universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel III. Cubaturen und Complanationen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel III.

Cubaturen und Complanationen.

§ 16.

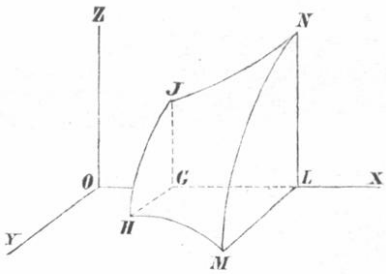
Die Cubatur begrenzter Volumina.

Allgemeine Regeln und Formeln. In einem irgendwie durch Flächen begrenzten, längs der x-Achse sich erstreckenden Körper mögen zwei, zur genannten Achse senkrechte Querschnitte GHJ und LMN (Fig. 22.) gelegt sein, von denen der erste als fest, der zweite als beweglich gelten und von der yz-Ebene um $OL = x$ entfernt sein soll; bezeichnet nun U_x den Flächeninhalt des beweglichen Querschnittes, V_x das Volumen der zwischen beiden Querschnitten enthaltenen Zone, so gilt die allgemeine Formel

$$V_x = \int U_x \, dx + Const.,$$

wobei die Constante so zu bestimmen ist, dass V_x verschwindet für $x = OG$. Falls die Begrenzungsflächen des Körpers Unterbrechungen haben (wie z. B. eine Rotationsfläche, welche durch Umdrehung einer discontinuirlichen Curve entstanden ist), so besteht das Volumen aus einzelnen Theilen, welche gesondert berechnet werden müssen.

Fig. 22.

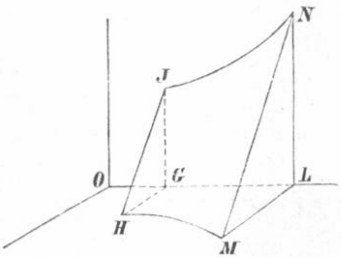


Bei Flächen von specieller Entstehungsweise lässt sich der Werth von U_x in der Regel näher angeben, wie die folgenden Fälle zeigen werden.

a. In der Horizontalebene xy (Fig. 23.) sei eine durch ihre

Gleichung zwischen $OL = x$ und $LM = y$ bestimmte Curve construirt und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade MN gelegt, welche der yz-Ebene parallel ist und mit der Horizontalebene den constanten Neigungswinkel $LMN = \gamma$ bildet; die Begrenzungsfläche ist dann eine Cylinderfläche und

Fig. 23.



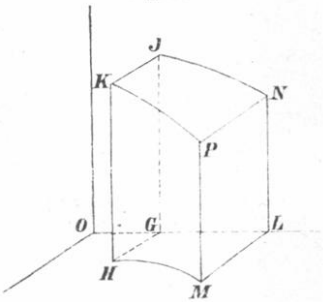
$$V_x = \tfrac{1}{2} \tan\gamma \int y^2 dx + Const.$$

b. Wie vorhin sei in der xy-Ebene eine Curve HM, dagegen in der xz-Ebene irgend eine andere Curve JN gezogen, deren Gleichung zwischen $OL = x$ und $LN = z$ gegeben ist; jede zu yz parallele Ebene, wie z. B. LMN, schneidet beide Curven, und wenn die Durchschnittspunkte durch gerade Linien MN verbunden werden, so entsteht eine windschiefe Regelfläche; in diesem Falle ist

$$V_x = \tfrac{1}{2} \int yz\, dx + Const.$$

c. Wie vorhin mögen die beiden Curven HM und JN gegeben sein; durch alle Punkte der ersten legt man Parallelen zur z-Achse (Fig. 24.), durch alle Punkte der zweiten Parallelen zur x-Achse; die Begrenzung des Körpers besteht dann (abgesehen von Ebenen) aus zwei sich schneidenden Cylinderflächen, und es ist

Fig. 24.



$$V_x = \int yz\, dx + Const.$$

d. Wenn eine in der xy-Ebene construirte Curve HM (s. Fig. 22.) um die x-Achse gedreht wird, so entsteht eine Rotationsfläche, und es ist der ganze Querschnitt $U_x = \pi y^2$ mithin

$$V_x = \pi \int y^2\, dx + Const.$$

e. Sind HM und JN zwei beliebige Curven und wird in jeder zu yz parallelen Ebene LMN eine Ellipse aus den Halbachsen LM und LN construirt, so entsteht eine Fläche mit elliptischen Querschnitten; es ist dann

$$V_x = \pi \int yz\, dx + Const.$$

f. Wie vorhin mögen HM und JN zwei beliebige Curven sein; durch

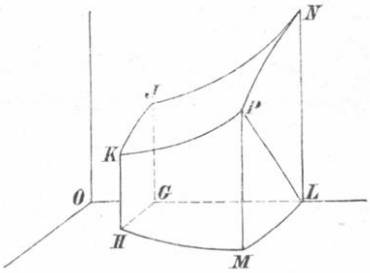
alle Punkte der ersten legt man Parallelen zur z-Achse, die zweite Curve lässt man um die x-Achse rotiren; die Begrenzung der Zone (Fig. 25.) besteht dann (abgesehen von Ebenen) aus einer Cylinderfläche und einer Umdrehungsfläche. Der Querschnitt U_x ist hier die Summe von der Dreiecksfläche LMP und der Kreissectorenfläche NLP, daher

$$V_x = \tfrac{1}{2} \int \left(y \sqrt{z^2 - y^2} + z^2 \arcsin \frac{y}{z} \right) dx + Const.$$

Im Allgemeinen sei noch bemerkt, dass die Volumina von Hohlkörpern als Differenzen zweier Volumina zu berechnen sind.

Beispiel 1. Ein elliptischer Cylinder schneidet die xy-Ebene in einer Ellipse mit den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, und die xz-Ebene in einer Ellipse mit den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$; seine erzeugenden Geraden sind parallel zu BC. Das Volumen zwischen den Querschnitten OBC, U_x, den Coordinatenebenen und der Fläche beträgt

Fig. 25.



$$V = \tfrac{1}{2}\, b c x \left(1 - \frac{x^2}{3a^2}\right),$$

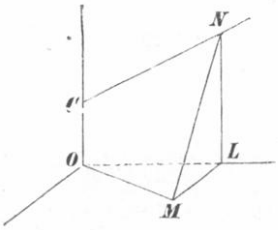
mithin ist das Volumen $OABC = \frac{1}{3}\, abc$.

2. In der Horizontalebene xy ist eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade OM, in der Verticalebene xz eine nicht durch O gehende Gerade CN construirt (Fig. 26.), und es mögen wie in b. die Punkte M und N durch gerade Linien verbunden sein, welche der yz-Ebene parallel sind und bekanntlich ein hyperbolisches Paraboloid erzeugen. Sind bei positiven β, γ, c

$$y = \beta x, \qquad z = c + \gamma x$$

die Gleichungen der Geraden OM und CN, so ergiebt sich für das Volumen $OLMNCO$

Fig. 26.



$$V = \tfrac{1}{2}\, \beta x^2 \left(\tfrac{1}{2}\, c + \tfrac{1}{3}\, \gamma x\right).$$

Die Fläche des Querschnittes LMN heisse U, die Fläche des durch

die Mitte von OL gelegten parallelen Querschnittes sei T; es gilt dann die einfache Beziehung

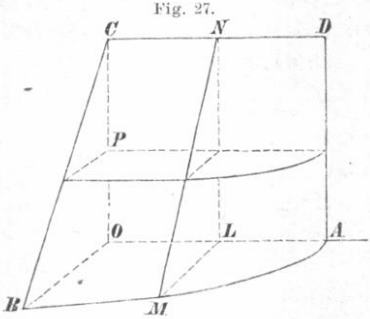
$$V = \tfrac{1}{6}(4T + U)\,x.$$

3. Die Horizontalspur einer Fläche sei eine aus den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$ construirte Ellipse (Fig. 27.), die Verticalspur eine in der Entfernung $OC = c$ parallel zu OA liegende Gerade CD; die Querschnitte der Fläche mögen gerade Linien sein, welche eine sogenannte elliptische Keilfläche bilden. Das Volumen zwischen OBC und LMN ist

$$V_x = \frac{bc}{4}\left(\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \cdot arcsin\,\frac{x}{a}\right).$$

Der ganze Körper, dessen Grundriss eine Ellipse, dessen Aufriss ein Rechteck, und dessen Seitenansicht ein Dreieck ist, besitzt hiernach das halbe Volumen des umschriebenen elliptischen Cylinders.

Fig. 27.

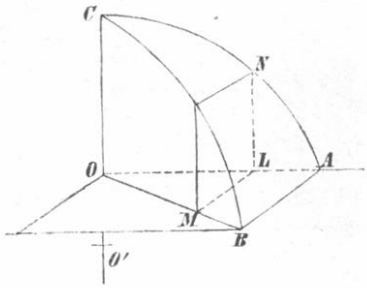


Will man dagegen das Volumen V_z einer Zone bestimmen, welche zwischen der Basis und einem in der Entfernung $OP = z$ hierzu parallelen Querschnitte enthalten ist, so beachte man, dass der volle Querschnitt eine Ellipse bildet; daraus findet sich

$$V_z = \pi a b z\left(1 - \frac{z}{2c}\right)$$

und für $z = c$ derselbe Werth wie vorhin.

Fig. 28.



4. In der xy-Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten $OA = a$, $AB = b$ construirt (Fig. 28.), in der xz-Ebene ein Kreisbogen, welcher durch A, sowie durch einen auf der z-Achse in der Höhe $OC = c$ befindlichen Punkt C geht, und dessen Mittelpunkt O' auf der Verlängerung von CO liegt; man verlangt das Volumen des dreiseitigen Prisma's über OAB, welches oberhalb durch den Cylinder begrenzt wird, dessen erzeugende Gerade parallel

zur y-Achse durch den Kreisbogen AC gehen. Nennt man für den Augenblick r den Radius des Kreises, so ist

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad z = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}, \qquad r = \frac{a^2 + c^2}{2c},$$

mithin

$$V_x = \frac{b}{a}\left\{\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)^3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - a^2}\cdot x^2\right\};$$

für $x = a$ und durch Wegschaffung von r erhält man als Volumen des Körpers, welcher als Inhalt eines Klostergewölbes mit kreisförmiger Wölblinie bezeichnet werden kann,

$$V_a = \frac{bc\,(3a^2 + c^2)}{12a}.$$

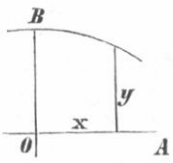
5. Wenn in der vorigen Aufgabe statt des Kreises eine aus den Halbachsen $OA = a$ und $OC = c$ construirte Ellipse genommen wird, so ergiebt sich als Volumen des elliptischen Klostergewölbes

$$V_a = \tfrac{1}{3}abc.$$

6. Eine Parabel, deren Scheitel B ist, sei um eine Gerade OA gedreht, welche in der Entfernung $BO = b$ senkrecht zur Parabelachse liegt und die Curve schneidet (Fig. 29.); die Gleichung der Parabel ist, wenn k deren Parameter bezeichnet,

$$y = b - \frac{x^2}{k}$$

Fig. 29.



mithin des Volumen einer von $x = 0$ ab gerechneten Zone des Rotationskörpers

$$V_x = \pi x\left(b^2 - \frac{2bx^2}{3k} + \frac{x^4}{5k^2}\right).$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}h$, bezeichnet mit c die zugehörige Parabelordinate und drückt k durch b, c, h aus, so liefert das Doppelte des vorigen Werthes, nämlich

$$\tfrac{1}{15}\pi h\,(8b^2 + 4bc + 3c^2)$$

den Inhalt eines Fasses von parabolischer Krümmung, dessen grösster Durchmesser $2b$, dessen kleinster $2c$ und dessen Höhe h ist.

7. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel eine Ellipse treten, deren kleine Halbachse $OB = b$ ist, so

erhält man als Inhalt des Fasses von elliptischer Krümmung

$$\tfrac{1}{3}\pi h\,(2b^2 + c^2).$$

Derselbe ist um

$$\tfrac{2}{15}\pi h\,(b - c)^2$$

grösser als der vorige Inhalt.

8. Eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse sei um eine Gerade gedreht worden, welche der grossen Halbachse parallel liegt in der Entfernung c; die Cubatur des entstandenen Rotationskörpers verlangt dann die Unterscheidung dreier Fälle.

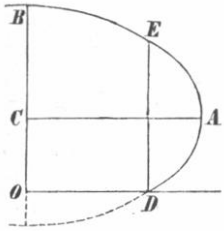
Für $c > b$ ist der Körper ein elliptischer Ring, dessen Querschnitte sammt und sonders Kreisringe sind; als Volumen einer von $x = 0$ an gerechneten Zone ergiebt sich

$$2\pi bc\left(\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \cdot arcsin\,\frac{x}{a}\right)$$

und als Volumen des ganzen Ringes $2\pi^2 abc$.

Im Falle $c < b$ wird die Ellipse von der Drehungsachse in einem Punkte D geschnitten (Fig. 30.) und die Querschnitte des Rotationskörpers sind Vollkreise für $x \leqq OD$, dagegen Kreisringe für $x > OD$. Setzt man zuerst $x < OD$ voraus, so erhält man, von $x = 0$ ab gerechnet,

Fig. 30.



$$V_x = \pi\left[(b^2 + c^2)\,x - \frac{b^2x^3}{3a^2} + \frac{bcx}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + abc \cdot arcsin\,\frac{x}{a}\right];$$

für $x = OD$ ergiebt sich hieraus als Volumen des von der Fläche $BODEB$ erzeugten Rotationskörpers

$$\pi\left\{\frac{a\,(2b^2 + 7c^2)}{3b}\sqrt{b^2 - c^2} + abc \cdot arcsin\,\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}\right\}.$$

Nimmt man zweitens $x > OD$ und bestimmt das ringförmige Volumen R_x so, dass es für $x = OD$ verschwindet, so findet man

$$R_x = 2\pi\left\{\frac{bcx}{a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{ac^2\sqrt{b^2 - c^2}}{b}\right\}$$

$$+\,2\pi abc\left\{arcsin\,\frac{x}{a} - arcsin\,\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}\right\};$$

für $x = a$ folgt hieraus als Volumen des von dem Segmente $EDAD'$ beschriebenen Ringes

$$\pi^2 abc - \pi ac \left\{ \frac{2c\sqrt{b^2 - c^2}}{b} + b \cdot arcsin \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} \right\}.$$

Das Doppelte von der Summe der beiden Volumina giebt den Inhalt des ganzen elliptischen Wulstes, nämlich

$$W = 2\pi a \left\{ bc(\pi - \alpha) + \tfrac{1}{3}(2b^2 + c^2) \sin \alpha \right\},$$

wobei der Hülfswinkel α durch die Formel

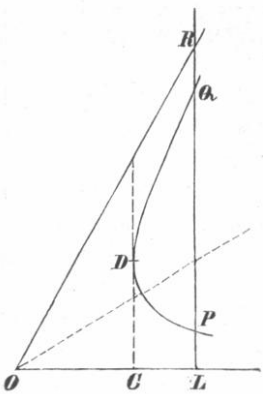
$$\cos \alpha = \frac{c}{b}$$

bestimmt ist.

Im dritten Falle $c = b$ ist das Volumen $= 2\pi^2 ab^2$.

9. Eine Hyperbel, deren Haupthalbachse a grösser als die Nebenhalbachse b sein möge, wird um eine ihrer Asymptoten gedreht (Fig. 31.); man sucht das Volumen des von dem Hyperbelsegmente $PDQP$ beschriebenen ringförmigen Körpers.

Fig. 31.



Nimmt man die Drehungsachse zur x-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, so erhält man als Gleichung der Curve

$$(a^2 - b^2)\, y^2 - 2ab\, xy + a^2 b^2 = 0,$$

woraus zwei Werthe für y folgen, welche die Ordinaten LP und LQ bestimmen; nur der Abscisse $OC = \sqrt{a^2 - b^2}$ entspricht eine einzige Ordinate CD, die zugleich Tangente ist. Unter Rücksicht auf den Umstand, dass die Querschnitte des gesuchten Volumens Kreisringe sind, findet man

$$V = \frac{4\pi a^2 b^2}{3c^4} \sqrt{(x^2 - c^2)^3}, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Verlängert man LPQ bis zum Durchschnitte R mit der zweiten Asymptote, so ergiebt sich als Volumen des von der Fläche $OLPDQRO$ beschriebenen Rotationskörpers

$$\frac{4\pi a^2 b^2}{3c^4} \left\{ x^3 - \sqrt{(x^2 - c^2)^3} \right\}.$$

Bei grossen x beträgt dasselbe nahezu das Doppelte des Kreiscylinders, welcher OL zur Höhe und CD zum Radius hat.

10. Die in Thl. I., S. 68., No. 5. erwähnte Curve liefert durch Umdrehung um die x-Achse eine Fläche, für welche, von $x = 0$ an gerechnet,

$$V_x = \frac{\pi x^2}{9a}\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2ax + \tfrac{9}{2}a^2\right)$$

ist, woraus sich als Volumen des von der Curvenschlinge erzeugten Rotationskörpers $\frac{39}{4}\pi a^3$ ergiebt.

11. Für die in Thl. I., S. 69., No. 6. betrachtete schleifenförmige Curve ist, wenn V_x von $x = 0$ ab gerechnet wird,

$$V_x = \frac{\pi(5a^2 - 3x^2)x^3}{15a^2};$$

das Gesammtvolumen des Rotationskörpers beträgt hiernach ein Fünftheil von dem Volumen der umschriebenen Kugel.

12. Verlegt man in der Thl. I., S. 69, No. 7. betrachteten Curve den Coordinatenanfang nach der Spitze A, so ist das von $x = 0$ an gerechnete Volumen des Rotationskörpers, welcher durch Umdrehung der Curvenfläche um die x-Achse entsteht

$$V_x = \frac{\pi(5a - 2x)x^4}{10a^2}$$

mithin das Gesammtvolumen $= \frac{1}{10}\pi a^3$.

13. Durch Umdrehung der Cissoide um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche, in welcher, von $x = 0$ an gerechnet,

$$V_x = \pi\left\{8a^3 l\left(\frac{2a}{2a - x}\right) - x\left(4a^2 + ax + \tfrac{1}{3}x^2\right)\right\}$$

ist. Specieller für $x = a$ wird

$$V_a = 8\pi\left(l2 - \tfrac{2}{3}\right)a^3.$$

Lässt man die Cissoide um ihre Asymptote rotiren, so ist der in der Höhe y senkrecht zur Drehungsachse gelegte Flächenschnitt ein Kreis mit dem Radius $2a - x$ daher

$$V_y = \pi\int(2a - x)^2\,dy = \pi\int(3a - x)\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx,$$

d. i., wenn das Volumen für $x = 0$ und $y = 0$ verschwinden soll

$$V_y = \pi\left\{a^3 \arccos\frac{a - x}{a} - \frac{3a^2 - 5ax + x^2}{3}\sqrt{2ax - x^2}\right\}.$$

Als Inhalt des von der ganzen Cissoide durch Umdrehung um ihre Asymptote entstandenen Rotationskörpers folgt hieraus der endliche Werth $2\pi^2 a^3$.

14. Wenn die in Thl. I., S. 71., No. 10. betrachtete Curve um die x-Achse gedreht wird, so ist

$$V_x = \pi \int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 \, dx;$$

mittelst der Substitution $x = \xi^3$ erhält man, von $x = 0$ an gerechnet,

$$V_x = 3\pi x \left(\tfrac{1}{3} a^2 - \tfrac{3}{5} \sqrt[3]{a^4 x^2} + \tfrac{3}{7} \sqrt[3]{a^2 x^4} - \tfrac{1}{9} x^2\right),$$

und als Gesammtvolumen $\frac{8}{35}$ vom Volumen der umschriebenen Kugel.

Dasselbe Verfahren passt auch auf den Fall, wo man die Evolute der Ellipse um die eine oder andere Halbachse der Ellipse rotiren lässt.

15. Nimmt man in der Cardioide den Mittelpunkt C des erzeugenden Kreises zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen positive x in der Richtung von C nach B gezählt werden, so ist

$$y^2 = 3a^2 - x^2 \pm 2a\sqrt{3a^2 - 2ax},$$

wobei von $x = -3a$ bis $x = +a$ nur das obere Zeichen gilt, und von $x = +a$ bis $x = +\frac{3}{2}a$ beide Zeichen Geltung haben. Durch Umdrehung der Curve um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche, deren Querschnitte theils Kreise, theils Kreisringe sind. Für den ersten Theil des eingeschlossenen Raumes bestimmt man V_x so, dass $V_x = 0$ wird für $x = -3a$; diess giebt

$$V_x = \pi \left[18a^3 + 3a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 - \tfrac{2}{3}\sqrt{(3a^2 - 2ax)^3}\right],$$

woraus für $x = a$ der Werth $20\pi a^3$ folgt. Im zweiten ringförmigen Theile des Rotationskörpers lasse man V_x mit $x = a$ beginnen; diess giebt

$$V_x = \tfrac{4}{3}\pi \left[a^3 - \sqrt{(3a^2 - 2ax)^3}\right],$$

und als Volumen des ganzen ringförmigen Theiles $\frac{4}{3}\pi a^3$. Der gesammte Inhalt des von der Cardioidenfläche erzeugten Rotationskörpers beträgt hiernach das Sechzehnfache von dem Volumen der Kugel mit dem Radius a.

16. Die Fusspunktcurve der Ellipse hat zur Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$$

oder wenn $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ gesetzt wird,

$$y^2 = \tfrac{1}{2}\left\{b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}\right\},$$

wobei die Wurzel nur positiv zu nehmen ist. Lässt man die Curve um die x-Achse rotiren, so folgt, wenn V_x für $x = 0$ verschwinden soll,

$$V_x = \tfrac{1}{2}\pi\left\{b^2x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x\sqrt{b^4 + 4c^2x^2} + \frac{b^2}{4c}\,l\left(\frac{2cx + \sqrt{b^4 + 4c^2x^2}}{b^2}\right)\right\};$$

das Gesammtvolumen des Rotationskörpers ist hiernach

$$\pi\left\{\frac{a(2a^2 + 3b^2)}{6} + \frac{b^2}{2c}\,l\left(\frac{a + c}{b}\right)\right\}.$$

17. Aus der Gleichung der Cassini'schen Curve (Thl. 1., S. 75.) ergiebt sich,

$$y^2 = \sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - (c^2 + x^2),$$

wobei das Wurzelzeichen nur positiv genommen werden darf. Lässt man die Curve um die x-Achse rotiren, so erhält man

$$V_x = \pi\left\{\tfrac{1}{2}x\sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - c^2x - \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{h^4}{4c}\,l\left(2cx + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}\right) + Const.\right\};$$

dabei sind aber drei Fälle zu unterscheiden.

Für $h < c$ erstreckt sich die Curve auf der positiven Seite von $x = \sqrt{c^2 - h^2}$ bis $x = \sqrt{c^2 + h^2}$, man bestimmt daher die Constante so, dass V_x für $x = \sqrt{c^2 - h^2}$ verschwindet; diess giebt

$$V_x = \pi\left\{\tfrac{1}{6}(2c^2 + h^2)\sqrt{c^2 - h^2} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - c^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right\}$$
$$+ \frac{\pi h^4}{4c}\,l\left(\frac{2cx + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}}{\left(c + \sqrt{c^2 - h^2}\right)^2}\right)$$

und als Gesammtvolumen

$$\pi\left\{\frac{h^4}{c}\,l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + h^2}}{c + \sqrt{c^2 - h^2}}\right) - \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{c^2 + h^2} - \sqrt{c^2 - h^2}\right)^3\right\}$$

Im Falle $h = c$ wird die Curve zu einer Lemniscate; die vorigen Formeln sind dann noch anwendbar.

Ist endlich $h > c$, so rechne man das Volumen von $x = 0$ ab; diess giebt

$$V_x = \pi\left\{\tfrac{1}{2}x\sqrt{h^4 + 4c^2x^2} - c^2x - \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{h^4}{4c}\,l\left(\frac{2cx + \sqrt{h^4 + 4c^2x^2}}{h^2}\right)\right\}$$

und als Gesammtvolumen

$$\pi\left\{\frac{h^4}{c}\,l\left(\frac{c+\sqrt{c^2+h^2}}{h}\right)+\tfrac{1}{3}(h^2-2c^2)\sqrt{c^2+h^2}\right\}.$$

18. Lässt man eine logarithmische Linie um die x-Achse rotiren, so ist das Volumen einer Zone, welche von der Fläche und zwei Kreisen begrenzt wird, deren Radien die Ordinaten y_0 und y_1 sind,

$$V_x=\tfrac{1}{2}\pi a(y_1{}^2-y_0{}^2);$$

das von $x=-\infty$, $y=0$ bis $x=0$, $y=b$ sich erstreckende Volumen hat demnach den endlichen Inhalt $\frac{1}{2}\pi a b^2$.

Nimmt man dagegen die y-Achse zur Drehungsachse, so folgt

$$V_y=\pi\int x^2\,dy=\frac{\pi b}{a}\int x^2 e^{\frac{x}{a}}\,dx$$

das ist, wenn das Volumen von $y=0$ ab gerechnet wird,

$$V_y=\pi(2a^2-2ax+x^2)y;$$

das von $y=0$ bis $y=b$ reichende Volumen besitzt hiernach den endlichen Inhalt $2\pi a^2 b$.

19. Eine Kettenlinie werde um die x-Achse gedreht, das Volumen von $x=0$ ab gerechnet und der rotirende Bogen mit s bezeichnet; es ist dann

$$V_x=\tfrac{1}{4}\pi a(ax+2ys).$$

Lässt man die Curve um die y-Achse rotiren, so wird, von $y=a$ ab gerechnet,

$$V_y=\pi\{(2a^2+x^2)s-2axy\}.$$

20. Die logarithmische Lemniscate (Thl. I., S. 82.) werde um die x-Achse gedreht und das Volumen von $x=0$ an gerechnet; es ist dann

$$V_x=\tfrac{2}{3}\pi x^3\left\{l\left(\frac{a}{x}\right)+\tfrac{1}{3}\right\},$$

mithin das Gesammtvolumen des Rotationskörpers gleich ein Viertheil der umschriebenen Kugel.

21. Handelt es sich um die Cubatur des Rotationskörpers, welchen die Fläche der Tractorie einer Geraden (Thl. I., S. 83.) bei ihrer Umdrehung um die x-Achse erzeugt, so muss man entweder die Formel

$$V_x=\pi\int y^2\,dx$$

durch die folgende

$$V_x = \pi \left\{ y^2 x - 2 \int x y \, dy \right\}$$

ersetzen und hierin für x seinen Werth substituiren, oder x und y durch eine dritte Variabele ausdrücken. Um das Letztere zu thun, sei bei positiven x

$$x = a \left\{ l \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) - \sin\varphi \right\}, \quad y = a \cos\varphi,$$

so dass x von 0 bis ∞ wächst und y von a bis 0 abnimmt, wenn φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ geht. Für das von $x = 0$ ab gerechnete Volumen ergiebt sich dann

$$V_x = \tfrac{1}{3}\pi a^3 \sin^3\varphi = \tfrac{1}{3}\pi \sqrt{(a^2 - y^2)^3};$$

das gesammte Volumen des Rotationskörpers ist die Hälfte von den Volumen einer mit dem Radius a beschriebenen Kugel.

22. Drückt man bei der Cycloide (Thl. I., S. 87.) x und y durch den Wälzungswinkel ω aus und rechnet das Volumen von $x = 0$ d. h. $\omega = 0$ an, so erhält man

$$V_x = \pi b^3 (\tfrac{5}{2}\omega - 4 \sin\omega + \tfrac{3}{2} \sin\omega \cos\omega + \tfrac{1}{3} \sin^3\omega)$$

und als Volumen des von einer ganzen Cycloidenfläche erzeugten Rotationskörpers $5\pi^2 b^3$.

23. In der Ebene xz ist eine durch die Gleichung

$$z = \sqrt{2cx}$$

bestimmte Parabel construirt und um die x-Achse gedreht worden, so dass ein Rotationsparaboloid entsteht. Diese Fläche wird von einem parabolischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Gerade parallel zur z-Achse liegen, und dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y = \sqrt{2bx}, \qquad b \leq c,$$

besitzt; man sucht das Volumen, welches von der Horizontalebene der Verticalebene, dem am Ende des x normal zur x-Achse gelegten Schnitte und im Uebrigen von den beiden erwähnten Flächen begrenzt wird.

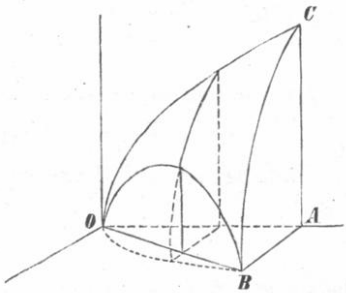
Nach der auf S. 94. unter f. entwickelten Formel erhält man

$$V_x = \tfrac{1}{2} \left\{ \sqrt{b(c-b)} + c \cdot \arcsin \sqrt{\frac{b}{c}} \right\} x^2.$$

Im speciellen Falle $b = c$ wird V_x zur Viertelkappe eines Rotationsparaboloides; die ganze Kappe ist hiernach gleich der Hälfte des umschriebenen Cylinders.

24. In dem vorigen Rotationsparaboloide sei am Ende der Strecke $OA = a$ ein normaler Querschnitt ABC (Fig. 32.) und durch die Gerade OB eine auf der xy-Ebene senkrechte Ebene gelegt; man sucht das Volumen, welches von den Ebenen OAB, OAC, ABC, der genannten Verticalebene und im Uebrigen von der Fläche begrenzt wird.

Fig. 32.



Als Gleichung der Geraden OB hat man

$$y = \sqrt{\frac{2c}{a}} \cdot x$$

mithin für den Querschnitt am Ende des x

$$U_x = c\left\{\frac{x\sqrt{ax - x^2}}{a} + x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right\};$$

hieraus findet sich durch theilweise Integration

$$V_x = c\left\{\frac{8x^2 - a^2}{16}\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{16x^2 + 2ax + 3a^2}{48a}\sqrt{x(a-x)}\right\}$$

und für das gesuchte Volumen

$$V_a = \tfrac{7}{32}\pi a^2 c.$$

25. Das vorige Rotationsparaboloid werde von einem elliptischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Gerade parallel zur z-Achse liegen, und dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{c}{a}(2ax - x^2)}$$

bestimmt, also eine Ellipse ist, welche $2a$ zur grossen Achse und im Scheitel O dieselbe Krümmung hat wie die Horizontalspur des Paraboloides.

Für den Querschnitt am Ende des x ergiebt sich

$$U_x = c\left\{\frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{2a} + x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{2a - x}{2a}}\right\},$$

wobei man bemerken möge, dass zufolge des bekannten Verhältnisses zwischen Centriwinkel und Peripheriewinkel über demselben Bogen die Gleichung

$$arcsin\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \tfrac{1}{2}\left(\pi - arccos\,\frac{a-x}{a}\right)$$

stattfindet. Man erhält nun

$$V_x = c\left\{\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5a^2-2x^2}{8}\,arccos\,\frac{a-x}{a} - \frac{15a^2+5ax-4x^2}{24a}\sqrt{x(2a-x)}\right\}$$

und für das gesuchte Volumen

$$V_{2a} = \tfrac{5}{8}\pi a^2 c.$$

26. In der xz-Ebene sei eine durch die Gleichung

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

bestimmte Ellipse construirt und um die x-Achse gedreht worden. Das entstandene Rotationsellipsoid werde von einem elliptischen Cylinder geschnitten, dessen erzeugende Gerade parallel zur z-Achse liegen und dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad b < c,$$

gegeben ist. Für das von $x = 0$ an gerechnete Volumen erhält man

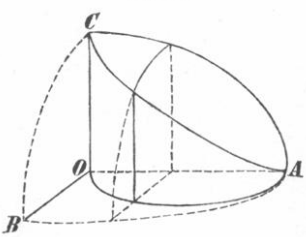
$$V_x = \tfrac{1}{2}\left(b\sqrt{c^2-b^2} + c^2\,arcsin\,\frac{b}{c}\right)\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

und für $x = a$

$$V_a = \tfrac{1}{3}a\left(b\sqrt{c^2-b^2} + c^2\,arcsin\,\frac{b}{c}\right).$$

27. Das vorige Rotationsellipsoid werde von einem verticalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Halbachsen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$ besitzt und ihre Hauptscheitel in O und A hat (Fig. 33.). Es ist dann

Fig. 33.



$$U_x = \frac{c^2}{2a^2}\left\{(a-x)\sqrt{ax} + (a^2-x^2)\,arctan\sqrt{\frac{x}{a}}\right\},$$

$$V_x = \frac{c^2}{18a}\left\{\frac{3(2a^3+3a^2x-x^3)}{a}\,arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - (6a^2-5ax+3x^2)\sqrt{\frac{x}{a}}\right\}$$

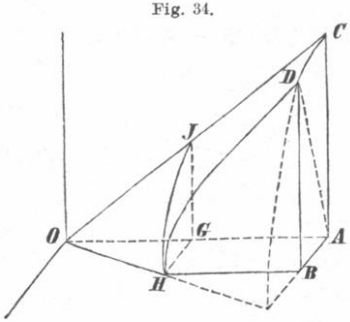
und speciell

$$V_a = (\tfrac{1}{6}\pi - \tfrac{2}{9})\,ac^2.$$

Nach Abzug dieses Volumens bleibt von dem Octanten des Ellipsoides ein Rest, welcher einen rationalen Theil des Parallelepipedes aus den Kanten a, c, c beträgt.

28. Ein in der xz-Ebene aus den Katheten $OA = a$, $AC = c$ construirtes rechtwinkliges Dreieck ist um die erste Kathete gedreht und dadurch ein Rotationskegel erzeugt worden; letzteren schneidet eine in der Entfernung $AB = b$ parallel zu xz gelegte Ebene, und es wird nun das Volumen gesucht, welches von den Ebenen OAB, OAC, ABC, BHD und der Kegelfläche begrenzt wird. (Fig. 34.).

Fig. 34.



Setzt man für den Augenblick die Strecke

$$OG = \frac{ab}{c} = k,$$

so ist

$$U_x = \frac{b}{c}\left\{\frac{c\sqrt{x^2 - k^2}}{a} + \frac{b}{k^2}x^2 \arcsin\frac{k}{x}\right\};$$

durch Integration ergiebt sich hieraus das von dem Querschnitte GHJ an gerechnete Volumen und speciell für $x = a$

$$V_a = \tfrac{1}{3}ab\sqrt{c^2 - b^2} - \tfrac{1}{12}\pi\frac{ab^3}{c}$$

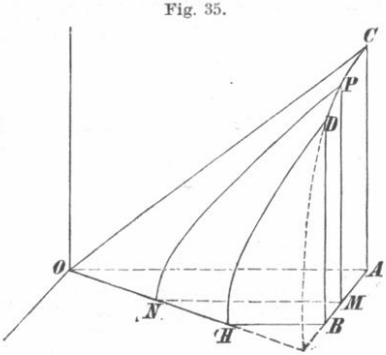
$$+ \tfrac{1}{6}ac^2 \arcsin\frac{b}{c} + \tfrac{1}{6}\frac{ab^3}{c}\, l\left(\frac{b}{c + \sqrt{c^2 - b^2}}\right).$$

Addirt man das Volumen $OGHJ$ und bezeichnet den Winkel CAD mit ε, so folgt

$$V = \tfrac{1}{6}ac^2(\varepsilon + \sin 2\varepsilon + \sin^3\varepsilon \cdot l \tan \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Dieselbe Aufgabe lässt sich auch dadurch lösen, dass man in der beliebigen Entfernung $AM = y$ (Fig. 35.) einen Schnitt MNP parallel zur Ebene xz legt, dessen Flächeninhalt U_y und daraus das Volumen $OAMNPCAO$ berechnet. Der Schnitt ist eine mit den Halbachsen $\frac{ay}{c}$ und y ver-

Fig. 35.



sehene Hyperbel, deren höchster Punkt P die Coordinaten a und $\sqrt{c^2 - y^2}$ besitzt; es ist daher

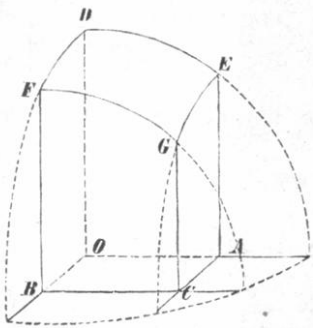
$$U_y = \tfrac{1}{2}\left\{a\sqrt{c^2 - y^2} - \frac{a y^2}{c} l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right)\right\}$$

mithin durch Integration

$$V_y = \tfrac{1}{6} a\left\{2 y\sqrt{c^2 - y^2} + c^2 \arcsin\frac{y}{c} - \frac{y^3}{c} l\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right)\right\},$$

woraus sich für $y = b$ derselbe Werth wie vorhin ergiebt.

Fig. 36.



29. Eine aus dem Coordinatenanfange mit dem Radius $OD = c$ beschriebene Kugelfläche bildet die obere Begrenzungsfläche eines vertical stehenden rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Basis die Seiten $OA = a$ und $OB = b$ besitzt (Fig. 36.); man sucht das Volumen dieses Körpers, welcher als Inhalt von dem vierten Theile eines Kugelgewölbes anzusehen ist.

Der Flächeninhalt des Querschnittes am Ende des x beträgt

$$U_x = \tfrac{1}{2}\left\{b\sqrt{c^2 - b^2 - x^2} + (c^2 - x^2)\arcsin\frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\right\};$$

setzt man nach geschehener Integration $x = a$ und führt die Hülfswinkel α, β, γ mittelst der Formeln ein

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\sin\gamma = \frac{a b}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} = \sin\alpha \sin\beta,$$

so erhält man

$$V = \tfrac{1}{3} a b\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} + \tfrac{1}{6} a(3c^2 - a^2)\alpha + \tfrac{1}{6} b(3c^2 - b^2)\beta - \tfrac{1}{3} c^3\gamma.$$

In dem speciellen Falle $OC = OD$ wird einfacher

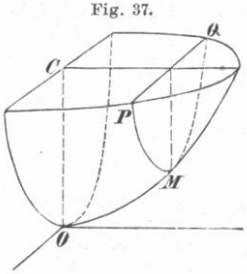
$$V_a = \tfrac{1}{12}\pi\left\{a^3 + b^3 + (a + b)^3 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)^3}\right\}.$$

30. Ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

sein möge, wird von zwei Ebenen geschnitten, deren erste in der Entfernung $OL = x$ parallel zur yz-Ebene, und deren zweite in der Entfernung $OC = c$ parallel zur xy-Ebene liegt (Fig. 37.); man sucht das zwischen der Fläche, der yz-Ebene und den beiden genannten Ebenen enthaltenen Volumen.

Fig. 37.



Der parabolische Querschnitt PMQ hat die Fläche

$$U_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{b(2ac - x^2)^3}{a^3}},$$

und hieraus findet sich

$$V_x = \sqrt{ab}\left\{c^2 \arcsin\frac{x}{\sqrt{2ac}} + \frac{x(5ac - x^2)}{6a^2}\sqrt{2ac - x^2}\right\}.$$

Für $x = \sqrt{2ac}$ wird hieraus das Volumen der halben Kappe von der Höhe c.

31. Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades, nämlich

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$$

gestattet folgende leicht zu übersehende Vereinfachungen. Nimmt man einen Punkt der Fläche zum Coordinatenanfang, so ist $K = 0$; setzt man ferner voraus, dass die xy-Ebene und die Fläche einander im Coordinatenanfange berühren, so muss gleichzeitig $G = 0$ und $H = 0$ sein; endlich lässt sich durch passende Drehung des Coordinatensystemes um die z-Achse noch das Product Fxy wegschaffen, mithin bleibt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Jz = 0.$$

Es soll nun das Volumen V einer Zone berechnet werden, deren Begrenzungsebenen in den Entfernungen z_0 und z_1 parallel zur xy-Ebene liegen, wobei die Schnitte der Fläche mit den genannten Ebenen als Ellipsen vorausgesetzt werden.

Der Schnitt der Fläche mit einer in der Entfernung h parallel zur xy-Ebene gelegten Ebene hat zur Gleichung

$$A\left(x + \frac{Eh}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{Dh}{B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BE^2 - ABC}{AB}h^2 - 2Jh,$$

und wenn dieser Schnitt eine Ellipse ist, so beträgt seine Fläche

$$U_h = \frac{\pi}{\sqrt{AB}} \left\{ \frac{AD^2 + BE^2 - ABC}{AB} h^2 - 2Jh \right\},$$

wofür kurz geschrieben werden möge

$$U_h = \gamma h^2 + \beta h.$$

Hiernach ist

$$V_z = \int (\beta z + \gamma z^2)\, dz$$

mithin das gesuchte Volumen

$$V = (z_1 - z_0) \left\{ \tfrac{1}{2}\beta(z_0 + z_1) + \tfrac{1}{3}\gamma(z_0^2 + z_0 z_1 + z_1^2) \right\}.$$

Bei dem elliptischen Paraboloide ist $\gamma = 0$ mithin

$$V = \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0)(\beta z_0 + \beta z_1)$$

oder, wenn man mit Q_0 und Q_1 die begrenzenden Querschnitte der Zone bezeichnet,

$$V = \tfrac{1}{2}(z_1 - z_0)(Q_0 + Q_1).$$

Bei den centrischen Flächen sind die begrenzenden Querschnitte

$$Q_0 = \beta z_0 + \gamma z_0^2, \qquad Q_1 = \beta z_1 + \gamma z_1^2,$$

und der mittlere, in der Entfernung $\frac{1}{2}(z_0 + z_1)$ liegende Querschnitt, welcher M heissen möge, ist

$$M = \beta \frac{z_0 + z_1}{2} + \gamma \left(\frac{z_0 + z_1}{2} \right)^2;$$

zufolge dieser Werthe ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{6}(z_1 - z_0)(Q_0 + 4M + Q_1).$$

32. Ist überhaupt eine Fläche so beschaffen, dass ihr Durchschnitt mit einer in der Höhe z parallel zu xy gelegten Ebene durch eine Formel von der Gestalt

$$U_z = \alpha + \beta z + \gamma z^2$$

quadrirbar ist, so lässt sich das Volumen der Zone zwischen den in den Höhen z_0 und z_1 gelegten Ebenen auf folgende Weise darstellen

$$V = \tfrac{1}{6}(z_1 - z_0)(Q_0 + 4M + Q_1),$$

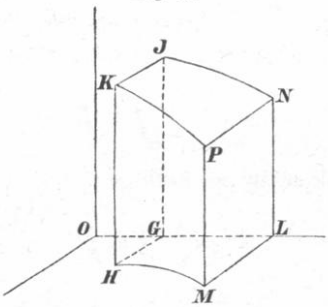
wobei Q_0, M und Q_1 dieselbe Bedeutung haben wie in No. 31.

§ 17.

Die Complanation von Cylinderflächen.

Allgemeine Formel. In der Horizontalebene (Fig. 38.) sei eine durch ihre Gleichung zwischen $OL = x$ und $LM = y$ bestimmte Curve HM gezeichnet und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade parallel zur z-Achse gezogen; auf gleiche Weise sei in der Ebene xz eine Curve JN bestimmt durch ihre Gleichung zwischen x und $LN = z$ und durch jeden ihrer Punkte eine Gerade parallel zur Achse der y gelegt; die beiden entstandenen Cylinderflächen schneiden sich in einer Curve KP. Ist noch ein Anfangswerth OG von x gegeben, welchen die Ordinaten GH und GJ entsprechen, so begrenzen die Geraden JK, NP und die Curven JN, KP ein Stück der zweiten Cylinderfläche, von welchem $GLMH$ die Horizontalprojection darstellt, und dessen Flächeninhalt S mittelst der Formel

Fig. 38.

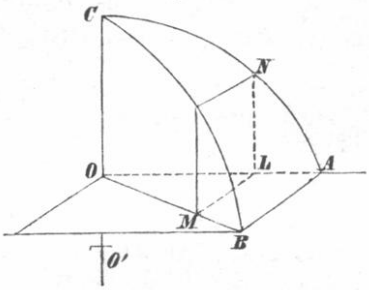


$$S = \int y \sqrt{1 + z'^2} \cdot dx + Const.$$

berechnet wird. Die Constante ist hierbei so zu bestimmen, dass $S = 0$ wird für $x = OG$.

Beispiel 1. In der xy-Ebene ist ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten $OA = a$, $AB = b$ construirt, in der Verticalebene xz eine Parabel, welche durch A geht und von der z-Achse die Strecke $OC = c$ abschneidet (Fig. 39.); wird nun diese Parabel zum normalen Querschnitte eines horizontalen Cylinders genommen und die Fläche CNP mit S_x bezeichnet, so ergiebt sich

Fig. 39.



$$S_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{(a^4 + 4c^2x^2)^3} - a^6}{12a^2c^2}.$$

Die ganze Fläche CAB, welche einen Theil eines Klostergewölbes mit parabolischer Krümmung darstellt, besitzt demnach den Inhalt

$$S_a = \frac{b}{12} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + 4c^2)^3} - a^3}{c^2}.$$

2. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel einen Kreisbogen treten, so erhält man bei dem kreisförmigen Klostergewölbe

$$S_a = \frac{b(a^2 + c^2)}{2a}.$$

3. Handelt es sich um die Oberfläche des elliptischen Klostergewölbes, so ist der Kreisbogen AC durch einen Ellipsenquadranten zu ersetzen, diess giebt, wenn $a > c$,

$$S_x = \frac{b}{a} \int x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

dagegen im Falle $a < c$

$$S_x = \frac{b}{a} \int x \sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

Die angedeuteten Integrationen sind mittelst der Substitution $a^2 - x^2 = t^2$ leicht ausführbar; wird schliesslich $x = a$ genommen, so ergiebt sich für das gedrückte Gewölbe

$$S_a = \tfrac{1}{2} a b \left\{ 1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} l \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right\}$$

und für das überhöhte Gewölbe

$$S_a = \tfrac{1}{2} a b \left\{ 1 + \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \arctan \lambda \right\}.$$

4. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Ellipse die sternförmige Curve treten, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

so erhält man

$$S_x = \tfrac{3}{5} b \sqrt[3]{\frac{x^5}{a^2}}.$$

Hiernach beträgt S_a sechs Fünftheile seiner Horizontalprojection.

5. Die Curve AC sei wieder eine Ellipse und als Horizontalprojection der Fläche werde eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse genommen; es ist dann

$$S_x = \frac{b}{2} \left\{ \frac{x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{a} + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right\}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

und für $x = a$

$$S_a = \tfrac{1}{2} a b \left(\cos\gamma + \frac{\gamma}{\sin\gamma} \right), \qquad \cos\gamma = \frac{c}{a}.$$

6. Die Curve AC sei wieder eine Ellipse, und als Horizontalprojection der Fläche werde die schleifenförmige Curve genommen, deren Gleichung

$$y = \frac{b x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ist; man findet dann

$$S_a = \frac{b(a^2 + a c + c^2)}{3(a + c)}.$$

7. Die Curve HM sei eine Ellipse, JN eine semicubische Parabel, mithin

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad z = \tfrac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}};$$

man erhält dann

$$S_x = \frac{2b}{15} \left\{ 7a - (7a + 3x) \sqrt{\left(\frac{a - x}{a}\right)^3} \right\}$$

und speciell $S_a = \frac{14}{15} a b$.

8. Die Curven HM und JN seien bestimmt durch die Gleichungen

$$y = b \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \qquad z = a l \left(\frac{a^2}{a^2 - x^2} \right);$$

es ergiebt sich dann

$$S_x = \frac{b x}{a^2} (a^2 + \tfrac{1}{3} x^2),$$

woraus folgt, dass S_a das Doppelte seiner Horizontalprojection beträgt.

9. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Parabel eine aus dem Mittelpunkte O mit den Halbachsen a und b construirte Ellipse treten, so erhält man

$$S_x = \frac{b}{2} \left(3a \cdot \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right);$$

S_a beträgt hier das Dreifache seiner Horizontalprojection.

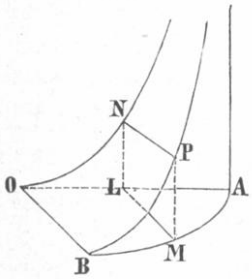
10. Die Horizontalcurve sei eine Hyperbel, die Verticalcurve eine Kettenlinie, nämlich

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad z = a l \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right);$$

es ist dann

$$S_x = \frac{b x^2}{2 a}.$$

Fig. 40.



11. In der xz-Ebene sei die Tractorie einer Geraden (Thl. I., S. 83.) so gelegt, dass ihre Spitze mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und ihre Asymptote in der Entfernung $OA = a$ senkrecht auf der x-Achse steht (Fig. 40.); die Curve hat dann zur Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2} a\, l \left(\frac{a + \sqrt{2 a x - x^2}}{a - \sqrt{2 a x - x^2}} \right) - \sqrt{2 a x - x^2}.$$

Nimmt man als Begrenzungscurve der Horizontalprojection eine durch A gehende Parabel, deren Scheitel auf der y-Achse in der Entfernung $OB = b$ liegt, so erhält man

$$S_x = \frac{b x (2 a + x)}{2 a},$$

hiernach beträgt S_a neun Viertheile seiner Horizontalprojection.

12. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Parabel durch einen aus den Halbachsen OA und OB construirten Ellipsenquadranten, so findet man

$$S_x = b \left(a - \sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot arcsin \frac{x}{a} \right)$$

und specieller $S_a = (1 + \tfrac{1}{2}\pi)\, a b$.

13. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle des Ellipsenquadranten eine Halbellipse treten, deren Halbachsen $\tfrac{1}{2} a$ und $\tfrac{1}{2} b$ sind, so erhält man

$$S_x = b \left\{ a \cdot arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{x (a - x)} \right\}$$

und specieller S_a gleich dem Vierfachen seiner Horizontalprojection.

14. In der xz-Ebene sei eine Cycloide so gelegt, dass ihr Scheitel mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und ihre Basis in der Entfernung $OA = 2a$ senkrecht auf der x-Achse steht; es ist dann

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$$

Als Horizontalprojection der zu complanirenden Fläche sei die Parabel

$$y = \sqrt{2 b x}$$

genommen; es ergiebt sich dann

$$S_x = 2\sqrt{ab} \cdot x.$$

Hiernach verhält sich S_{2a} zu seiner Horizontalprojection wie $3 : 2$.

15. Ersetzt man in der vorigen Aufgabe die Parabel durch eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse, so erhält man

$$S_x = \frac{2b}{3}\left\{4a - \sqrt{\frac{(2a-x)^3}{2a}}\right\}$$

und specieller $S_{2a} = \frac{8}{3}ab$.

16. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Ellipse eine durch die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$$

bestimmte Cissoide treten, so findet man

$$S_x = \tfrac{2}{3}\left\{8a^2 - (4a+x)\sqrt{2a(2a-x)}\right\}$$

und specieller $S_{2a} = \frac{16}{3}a^2$.

17. In der xz-Ebene sei mit dem Halbmesser a ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist; in der xy-Ebene sei die Fusspunktcurve der Ellipse als Begrenzung der Horizontalprojection des zu bestimmenden Flächenstücks genommen; man hat dann

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

und hieraus

$$S_x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\left\{\frac{b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2-b^2)x^2}}{a^2-x^2}\right\}}\,dx.$$

Um die Wurzel aus dem Zähler wegzuschaffen benutze man die Substitution

$$b^4 + 4(a^2-b^2)x^2 = b^2u^2$$

und setze zur Abkürzung

$$\frac{2a^2-b^2}{b} = c;$$

es wird dann sehr einfach

$$S_x = \frac{ab}{2\sqrt{a^2-b^2}}\int\frac{u\,du}{\sqrt{(u-b)(u+c)}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn nach ausgeführter Integration $x = a$ genommen und

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$$

gesetzt wird,

$$S_a = a^2 \left\{\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \varepsilon l\left(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}\right)\right\}.$$

18. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Fusspunktcurve der Ellipse die Fusspunktcurve der Hyperbel treten, so hat man

$$S_x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\left\{\frac{-b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2 + b^2)x^2}}{a^2 - x^2}\right\}} dx$$

und ferner, wenn

$$b^4 + 4(a^2 + b^2)x^2 = b^2 u^2, \qquad \frac{2a^2 + b^2}{b} = c$$

gesetzt wird,

$$S_x = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{u\,du}{\sqrt{(u + b)(u + c)}}.$$

Nach ausgeführter Integration erhält man für $x = a$ und

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \varepsilon$$

die Formel

$$S_a = a^2 \left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 1} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \varepsilon l\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)\right\}.$$

Im speciellen Falle $b = a$ wird die Fusspunktcurve zur Lemniscate und

$$S_a = a^2 \left\{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} \cdot l\left(2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right\};$$

hieraus folgt, dass sich S_a zu seiner Horizontalprojection nahebei wie 1,43 zu 1 verhält.

§ 18.

Die Complanation von Umdrehungsflächen.

Allgemeine Formeln. Eine durch ihre Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y bestimmte, in der Ebene xy liegende Curve werde um die x-Achse gedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt; der von einem gegebenen Anfangspunkte $x_0 y_0$ bis zu einem beliebigen Endpunkte xy reichende Curvenbogen s beschreibt dann eine Rotationsfläche, deren Inhalt T_x mittelst der Formel

$$T_x = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

berechnet wird. Die Integrationsconstante ist hier so zu bestimmen, dass T_x verschwindet für $x = x_0$.

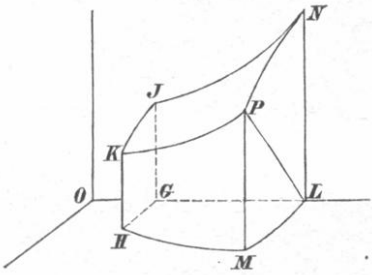
Geschieht die Drehung um die y-Achse, so gilt die analoge Formel

$$T_y = 2\pi \int x\, ds = 2\pi \int x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

wobei T_y gleichfalls für $x = x_0$ oder $y = y_0$ verschwinden muss.

Allgemeiner ist die folgende Aufgabe (Fig. 41.). Eine in der Ebene xz gezeichnete Curve JN sei um die x-Achse gedreht und die entstandene Rotationsfläche werde von einem verticalen Cylinder geschnitten, dessen Leitlinie HM in der Ebene xy gegeben ist. Setzt man $OL = x$, $LM = y$, $LN = z$ und bezeichnet mit S_x den Inhalt des Flächenstückes $KJNP$, dessen Horizontalprojection $GHML$ ist, so hat man

Fig. 41.



$$S_x = \int z \sqrt{1 + z'^2} \cdot arcsin \frac{y}{z}\, dx,$$

wobei S_x für $x = OG$ verschwinden muss. Nimmt man speciell $z = y$, so geht $4 S_x$ in das frühere T_x über.

Beispiel 1. Wird die Parabel

$$y = 2\sqrt{ax}$$

um die x-Achse gedreht, so ist für eine Kappe des entstehenden Rotationsparaboloides

$$T_x = \tfrac{8}{3}\pi \left\{a^2 - \sqrt{a(a+x)^3}\right\}.$$

Dagegen ergiebt sich bei der Drehung um die y-Achse

$$T_y = \tfrac{1}{2}\pi \left\{(a+2x)\sqrt{ax+x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 l\left(\frac{a+2x+2\sqrt{ax+x^2}}{a}\right)\right\}.$$

2. Eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse werde um die grosse Achse $2a$ gedreht; die Fläche der von $x = 0$ ab gerechneten Zone ist dann

$$T_x = \pi b \left\{\frac{x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}}{a} + \frac{a}{\varepsilon}\, arcsin \frac{\varepsilon x}{a}\right\}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Das Doppelte von T_a giebt die Oberfläche des gestreckten Rotationsellipsoides

$$= 2\pi b \left\{ b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arccos \frac{b}{a} \right\}.$$

Wird dagegen die Ellipse um die kleine Achse $2b$ gedreht, so ist die Fläche der von $y = 0$ ab gerechneten Zone

$$T_y = \pi a \left\{ \frac{y\sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2}}{b} + \frac{b}{\lambda} l \left(\frac{\lambda y + \sqrt{b^2 + \lambda^2 y^2}}{b} \right) \right\}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

das Doppelte von T_b giebt die Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoides

$$= 2\pi a \left\{ a + \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} l \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right\}.$$

3. Für die beiden Hyperboloide gelten ähnliche Formeln, bei denen nur zu beachten ist, dass man wenigstens von $x = a$ ausgehen muss.

4. Die schleifenförmige Curve, deren Gleichung ist

$$y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{8} \cdot a},$$

giebt bei der Umdrehung um die x-Achse

$$Z_x = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{x^2 (3a^2 - x^2)}{a^2};$$

die ganze Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers ist hiernach $= \frac{1}{2}\pi a^2$.

Wird dieselbe Curve um die y-Achse gedreht, so findet sich

$$Z_y = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{5a^3 - (5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

und die Gesammtoberfläche $= \frac{5}{3}\pi\sqrt{2} \cdot a^2$.

5. Die sternförmige Curve, deren Gleichung ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

werde um die x-Achse gedreht; es ist dann, wenn $x = a\cos^3\omega$, $y = b\sin^3\omega$ gesetzt und demgemäss auch ds durch ω ausgedrückt wird,

$$Z_x = \tfrac{6}{5}\pi a^2 sin^5\omega,$$

woraus $\tfrac{12}{5}\pi a^2$ als Oberfläche des ganzen Rotationskörpers folgt.

Auf gleiche Weise lässt sich der Fall behandeln, wo die Evolute der Ellipse um eine ihrer Achsen gedreht wird.

6. Bei der Cardioide hat man

$$x = b(1 + cos\theta)\, cos\theta, \qquad y = b(1 + cos\theta)\, sin\theta$$

mithin, wenn die Curve um die x-Achse gedreht wird,

$$Z_x = \tfrac{32}{5}\pi b^2(1 - cos^5\tfrac{1}{2}\theta)$$

und die Gesammtoberfläche des Rotationskörpers $= \tfrac{32}{5}\pi b^2$.

Lässt man die Cardioide um die y-Achse rotiren, so entstehen zwei Umdrehungsflächen, eine äussere, welche den Werthen $\theta = 0$ bis $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$ entspricht, und eine innere, bei welcher θ mit $\tfrac{1}{2}\pi$ anfängt und mit π aufhört. Für die äussere Oberfläche ist

$$Z_y = 16\pi b^2(1 - sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{2}{5} sin^4\tfrac{1}{2}\theta)\, sin\tfrac{1}{2}\theta, \qquad \theta \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$

mithin die gesammte äussere Fläche

$$= \frac{24\sqrt{2}}{5}\pi b^2.$$

Bei der inneren Fläche setze man $\theta = \pi - \eta$ und vertausche x gegen $-x$ um positive Abscissen zu erhalten; es ergiebt sich dann

$$Z_y = 16\pi b^2 \left\{(1 - cos^2\tfrac{1}{2}\eta + \tfrac{2}{5} cos^4\tfrac{1}{2}\eta)\, cos\tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{2}{5}\right\}, \qquad \eta \leqq \tfrac{1}{2}\pi$$

und für die ganze innere Fläche

$$\frac{8(3\sqrt{2} - 4)}{5}\pi b^2.$$

Die gesammte krumme Oberfläche des entstandenen Hohlkörpers ist demnach

$$\frac{16(3\sqrt{2} - 2)}{5}\pi b^2.$$

7. Die rotirende Curve sei die Fusspunktcurve der Ellipse, mithin ihre Gleichung

$$r^2 = a^2 cos^2\theta + b^2 sin^2\theta, \qquad a > b;$$

werden x, y und ds durch θ ausgedrückt, so ergiebt sich als Gesammtoberfläche des bei der Rotation um die x-Achse entstehenden Körpers

$$2\pi\left\{a^2+\frac{b^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\,l\left(\frac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}\right)\right\}.$$

Durch Drehung der Curve um die y-Achse dagegen entsteht ein Rotationskörper von der Oberfläche

$$2\pi\left\{b^2+\frac{a^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\,arccos\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}.$$

8. Die rotirende Curve sei die Fusspunktcurve der Hyperbel, mithin ihre Gleichung

$$r^2=a^2cos^2\theta-b^2sin^2\theta;$$

verfährt man wie bei der vorigen Aufgabe und beachtet, dass $arctan\frac{a}{b}$ der Maximalwerth von θ ist, so erhält man für die Gesammtoberfläche des bei der Drehung um die x-Achse entstehenden Körpers

$$2\pi\left\{a^2-\frac{ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\,l\left(\frac{(a^2+\sqrt{a^4-b^4})(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^3}\right)\right\},\qquad a>b,$$

$$2(2-\sqrt{2})\pi a^2,\qquad a=b,$$

$$2\pi\left\{a^2-\frac{ab^2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^4}{\sqrt{b^4-a^4}}\,arccos\,\frac{a^3+(b^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}}{b^3}\right\},\qquad a<b.$$

Lässt man dagegen die Curve um die y-Achse rotiren, so beträgt die Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers

$$\frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arccos\,\frac{b}{a}\right\},\qquad a>b,$$

$$2\sqrt{2}\cdot\pi a^2,\qquad a=b,$$

$$\frac{2\pi a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{b+\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)\right\},\qquad a<b.$$

9. Lässt man eine Kettenlinie um die x-Achse rotiren, so ist der Flächeninhalt der von $x=0$ ab gerechneten Zone

$$Z_x=\pi(ax+ys);$$

bei der Rotation um die y-Achse ergiebt sich dagegen als Oberfläche einer von $y=a$ ab gerechneten Kappe

$$Z_y=\pi(a^2-y^2+2xs).$$

10. Wenn die Tractorie der Geraden um ihre zur Abscissenachse genommene Asymptote rotirt, so ist der Flächeninhalt der von $x = 0$, $y = a$ ab gerechneten Zone

$$Z_x = 2\pi a(a - y);$$

die Gesammtoberfläche des entstandenen Rotationskörpers beträgt mithin das Vierfache der Kreisfläche πa^2.

Die Berechnung von Z_y führt auf ein Integral, welches sich nur durch Verwandlung in eine unendliche Reihe entwickeln lässt.

11. Nimmt man in der Cycloide einen Scheitel zum Coordinatenanfang, die Scheiteltangente zur y-Achse und bezeichnet den Durchmesser des erzeugenden Kreises mit h, so ist $s = 2\sqrt{hx}$ mithin die Oberfläche einer von $x = 0$ ab gerechneten, durch Drehung um die x-Achse entstandenen Kappe

$$Z_x = 2\pi\left\{ys - \tfrac{4}{3}\left[h^2 - \sqrt{h(h - x)^3}\right]\right\};$$

für $z = h$ ergiebt sich als Oberfläche des ganzen Rotationskörpers

$$2\pi(\pi - \tfrac{4}{3})h^2.$$

Lässt man dagegen die Cycloide um ihre Basis rotiren, so ist die Fläche der von $y = 0$ ab gerechneten Zone

$$= 4\pi(h - \tfrac{1}{3}x)\sqrt{hx}$$

mithin die Oberfläche des von einem ganzen Cycloidenzuge erzeugten Rotationskörpers $= \frac{16}{3}\pi h^2$.

12. Eine in der Ebene xz construirte, durch die Gleichung

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad a > c$$

bestimmte Ellipse sei um die x-Achse gedreht und hierdurch ein Rotationsellipsoid erzeugt worden; letzteres werde von einem verticalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad b < c$$

haben möge; es soll derjenige Theil der Ellipsoidoberfläche berechnet werden, welcher innerhalb des Cylinders liegt.

Nach der auf S. 117. eingeführten Bezeichnung ist, von $x = 0$ ab genommen,

$$S_x = \int \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} \cdot \arcsin\frac{b}{c}\, dx, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

oder

$$S_x = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\, arcsin\, \frac{\varepsilon x}{a}\right\} arcsin\, \frac{b}{c}\,.$$

Das Achtfache von S_a giebt die gesuchte Fläche

$$K = 4\,a\left\{c + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\, arccos\, \frac{c}{a}\right\} arcsin\, \frac{b}{c}\,.$$

Für $c = a$ geht das Ellipsoid in eine Kugel über und es wird

$$K = 8\,a^2\, arcsin\, \frac{b}{a}\,.$$

13. Ein aus dem Coordinatenanfange mit dem Radius a in der xz-Ebene beschriebener Kreis sei um die x-Achse gedreht und dadurch eine Kugelfläche erzeugt worden. Letztere werde von einem verticalen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$b\,y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}, \qquad b \geqq a$$

haben möge; man sucht den innerhalb des Cylinders liegenden Theil der Kegelfläche.

Von $x = 0$ ab gerechnet ist

$$S_x = a\int arcsin\, \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}\, dx = a\int arccos\, \frac{x}{b}\, dx$$
$$= a\left(b - \sqrt{b^2 - x^2} + x \cdot arccos\, \frac{x}{b}\right)$$

und hieraus findet sich für die ganze Fläche

$$K = 8\,a\left(b - \sqrt{b^2 - a^2} + a \cdot arccos\, \frac{a}{b}\right).$$

In dem speciellen Falle $b = a$ wird der Cylinder ein parabolischer Cylinder und $K = 8\,a^2$.

14. Die vorige Kugel werde von einem Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die schleifenförmige, durch die Gleichung

$$b\,y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad b \geqq a$$

charakterisirte Curve ist; es ergiebt sich dann

$$K = 8\,a\left(a \cdot arcsin\, \frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

15. Die vorige Kugel werde von einem verticalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$(x-c)^2+y^2=(a-c)^2, \qquad c<a$$

haben möge; es ist dann

$$S_x = a\int arcsin\sqrt{1-\frac{2c}{a+x}}\cdot dx = a\int arccos\sqrt{\frac{2c}{a+x}}\,dx.$$

Mittelst der Substitution

$$\frac{2c}{a+x}=\xi^2$$

und durch theilweise Integration findet man den Werth des Integrales, wobei die Constante so zu bestimmen ist, dass S_x verschwindet für $x=2c-a$; das ganze innerhalb des Cylinders liegende Stück der Kugelfläche ist

$$K=8a\left\{a\cdot arccos\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{c(a-c)}\right\}.$$

In dem speciellen Falle $c=\frac{1}{2}a$ kommt der Cylinderdurchmesser gleich dem Kugelhalbmesser und es wird

$$K=2\pi a^2-4a^2$$

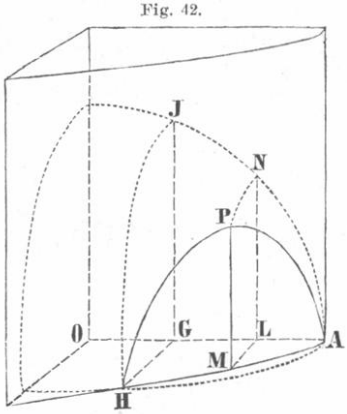
mithin der von der Halbkugel übrig bleibende Rest $=4a^2$.

16. Die vorige Kugel werde von einem verticalen parabolischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur durch die Gleichung

$$y^2=2b(a-x), \qquad b<a$$

bestimmt ist und die Horizontalspur der Kugel in zwei Punkten schneidet, welche der Abscisse $OG=2b-a$ entsprechen (Fig. 42.). Verfährt man ähnlich wie vorhin und bestimmt die Integrationsconstante so, dass S verschwindet für $x=2b-a$, so erhält man für dasjenige Stück der Kugelfläche, welches innerhalb des Cylinders liegt und ausserdem von der (allseitig erweiterten) Verticalebene GHJ begrenzt wird,

Fig. 42.

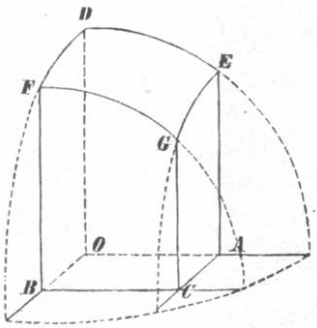


$$K=4a\left\{2\sqrt{b(a-b)}-\pi b+2a\cdot arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}\right\}.$$

Im speciellen Falle $b=\frac{1}{2}a$ wird $K=4a^2$.

17. Um die Oberfläche des Kugelgewölbes zu bestimmen (Fig. 43.), worin der Kugelradius $OD = c$ und ferner $OA = a$, $OB = b$ ist, hat man zunächst

Fig. 43.



$$S_x = c \int arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx;$$

benutzt man die theilweise Integration und nachher die Substitution

$$x = \frac{cu}{\sqrt{b^2 + u^2}},$$

so findet man

$$S_a = c(a\alpha + b\beta - c\gamma),$$

worin die Bögen α, β, γ durch die Gleichungen

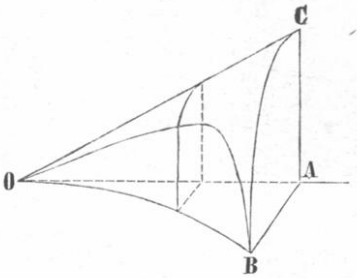
$$sin\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \qquad sin\,\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \qquad sin\,\gamma = sin\,\alpha\; sin\,\beta$$

bestimmt sind.

Wenn der Punkt G in der Horizontalebene liegt, ist einfacher

$$S_a = \tfrac{1}{2}\pi c(a + b - c).$$

Fig. 44.



18. Ein Rotationskegel $OABC$ (Fig. 44.) wird von einem verticalen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur eine semicubische Parabel ist; man verlangt den Inhalt desjenigen Theiles der Kegelfläche, welcher innerhalb des Cylinders liegt und überdiess von der Verticalebene ABC begrenzt wird.

Für $OA = a$, $AB = b$, $OC = c$ hat man

$$z = \frac{b}{a}x, \qquad y = b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}$$

$$S_x = \frac{bc}{16a^2}\left\{(8x^2 - 3a^2)\, arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} + (3a + 2x)\sqrt{x(a - x)}\right\};$$

die gesuchte Fläche beträgt hiernach fünf Achtel des Kegelmantels.

19. Der vorige Kegel werde von einem verticalen Cylinder

geschnitten, dessen Horizontalspur die schleifenförmige, durch die Gleichung

$$y = \frac{bx}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

dargestellte Curve ist; man erhält dann

$$S_x = \frac{bc}{4a^2}\left\{x^2 \arccos\frac{x}{a} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

Specieller ist $S_a = \frac{1}{8}\pi bc$ mithin der gesammte, innerhalb des Cylinders liegende Theil des Doppelkegels gleich dem Mantel des einfachen Kegels.

Für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ erreicht y sein Maximum und S_x geht über in

$$S_{a'} = \tfrac{1}{8}(\pi - 1)\,bc,$$

mithin besitzt $S_a - S_{a'}$ den rationalen Werth $\frac{1}{8}bc$.

20. Eine durch die Gleichung

$$z = 2\sqrt{cx}$$

charakterisirte Parabel sei um ihre Achse gedreht und das entstandene Rotationsparaboloid von einem elliptischen Cylinder geschnitten worden, dessen Horizontalspur zur Gleichung hat

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2};$$

zur Vereinfachung sei noch angenommen, dass

$$b^2 = \frac{4a^2c}{2a + c}$$

mithin der Halbparameter der Ellipse gleich dem harmonischen Mittel zwischen $2a$ und c ist.

Die gesammte innerhalb des Cylinders liegende Paraboloidfläche beträgt

$$\frac{16}{3}\left\{\frac{4a + 3c}{3}\sqrt{2ac} - c^2 \arcsin\sqrt{\frac{2a}{2a + c}}\right\}.$$

Im speciellen Falle $a = \frac{3}{2}c$ wird der elliptische Cylinder zu einem Kreiscylinder und die Paraboloidfläche

$$= 16\left(\sqrt{3} - \tfrac{1}{9}\pi\right)c^2.$$