Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel IV. Einfache bestimmte Integrale

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel IV.

Einfache bestimmte Integrale.

§ 19.

Berechnung der Werthe von bestimmten Integralen.

Allgemeine Sätze und Regeln. Wenn zwischen den beiden Zahlen a und $b > a$ eine beliebige Menge wachsender Grössen x_1, x_2, $\cdots\; x_{n-1}$ eingeschaltet wird, wenn also die Ungleichung

$$a < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < b$$

statt findet, so versteht man unter dem Symbole

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

den Grenzwerth, gegen welchen die Summe

$$(x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + (x_3 - x_2)\, f(x_2) + \cdots$$
$$\cdots\cdots + (b - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

in dem Falle convergirt, wo die Anzahl $(n - 1)$ der eingeschalteten Grössen unendlich wächst und alle die Differenzen

$$x_1 - a,\; x_2 - x_1,\; x_3 - x_2,\; \cdots\; b - x_{n-1}$$

unendlich abnehmen. — Werden die vorstehenden Differenzen der Reihe nach mit δ_1, δ_2, δ_3, $\cdots\; \delta_n$ bezeichnet, so ist auch

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

$$= Lim\, \big\{ f(a)\, \delta_1 + f(a + \delta_1)\, \delta_2 + f(a + \delta_1 + \delta_2)\, \delta_3 + \cdots\cdots$$
$$\cdots + f(a + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n-1})\, \delta_n \big\},$$

vorausgesetzt, dass bei unendlich wachsenden n und unendlich abnehmenden $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_n$ die Bedingung

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n = b - a$$

erfüllt bleibt.

Am einfachsten ist es die Grössen $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ in gleichen Abständen einzuschalten, d. h.

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \cdots = \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

zu nehmen, in welchem Falle nur δ statt δ_1, δ_2, etc. geschrieben zu werden braucht; diess giebt

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= Lim\left\{[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\right\}.$$

Geometrisch bedeutet das bestimmte Integral die ebene Fläche, welche von der Strecke $b - a$ der Abscissenachse, von zwei in den Entfernungen $x = a$ und $x = b$ parallel zur Ordinatenachse liegenden Geraden und im Uebrigen von der Curve begrenzt wird, deren Gleichung $y = f(x)$ ist.

Nach der obigen directen Formel erhält man z. B.

$$\int_a^b x^2\,dx$$

$$= Lim\left\{n a^2 \delta + 2\,[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\,a\delta^2 \right.$$
$$\left. + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\,\delta^3\right\}$$

$$= Lim\left\{a^2(b-a) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a(b-a)^2 + \tfrac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)(b-a)^3\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Für ein zweites Beispiel sei $f(x) = \dfrac{1}{x}$; es ist dann vortheilhaft $x_1, x_2, x_3, \cdots$ nicht wie vorhin in arithmetischer sondern in geometrischer Progression wachsen zu lassen, was einfach dadurch geschieht, dass man

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \varrho$$

und nachher

$$x_1 = a\varrho, \quad x_2 = a\varrho^2, \quad x_3 = a\varrho^3, \cdots \quad x_{n-1} = a\varrho^{n-1}$$

setzt. Diess giebt

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = Lim \left\{ n(\varrho - 1) \right\} = Lim \left\{ n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) \right\} = l \left(\frac{b}{a} \right).$$

Ein bequemeres Mittel zur Berechnung der Werthe von bestimmten Integralen bietet der Satz, dass jedes bestimmte Integral als Differenz zweier speciellen Werthe des entsprechenden unbestimmten Integrales angesehen werden darf; aus

$$\int f(x)\, dx = F(x) + Const.$$

folgt nämlich

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Dieser Satz gilt aber nur unter der Bedingung, dass $f(x)$ continuirlich bleibt innerhalb des Integrationsintervalles $x = a$ bis $x = b$.

Wenn die Function $f(x)$ ein Aggregat von mehreren anderen Functionen ist etwa

$$f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x) + C\chi(x) + \cdots,$$

so gilt bei bestimmten Integralen dieselbe Vorschrift wie bei unbestimmten, nämlich

$$\int_a^b \left\{ A\varphi(x) + B\psi(x) + C\chi(x) + \cdots \right\} dx$$

$$= A\int_a^b \varphi(x)\, dx + B\int_a^b \psi(x)\, dx + C\int_a^b \chi(x)\, dx + \cdots$$

Im Fall die Anzahl der Summanden unendlich gross wird, bedarf es einer besonderen Untersuchung über die Anwendbarkeit dieses Satzes.

Beispiel 1. $\displaystyle\int_a^b x^{p-1}\, dx = \frac{b^p - a^p}{p}, \quad p > 0.$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha + \beta x)^{q+1}} = \frac{1}{q\alpha^q \beta}, \quad q > 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha + \beta x)(\alpha_1 + \beta_1 x)} = \frac{l\alpha - l\alpha_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad \begin{matrix} \alpha > 0, \ \beta > 0, \\ \alpha_1 > 0, \ \beta_1 > 0. \end{matrix}$

4. $$\int_0^\alpha \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{4\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

5. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

6. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}, \qquad 4ac - b^2 > 0.$$

7. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{4\pi c}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$$

8. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(a + bx + cx^2)^2} = -\frac{2\pi b}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$$

9. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{4\pi a}{\sqrt{(4ac - b^2)^3}},$$

10. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^3} = \frac{12\pi c^2}{\sqrt{(4ac - b^2)^5}},$$

11. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(a + bx + cx^2)^3} = -\frac{6\pi bc}{\sqrt{(4ac - b^2)^5}},$$

12. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(a + bx + cx^2)^3} = -\frac{2\pi(2ac + b^2)}{\sqrt{(4ac - b^2)^5}},$$

13. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\,dx}{(a + bx + cx^2)^3} = -\frac{6\pi ab}{\sqrt{(4ac - b^2)^5}},$$

14. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a + bx + cx^2)^3} = \frac{12\pi a^2}{\sqrt{(4ac - b^2)^5}},$$

(7.–14.) $4ac - b^2 > 0.$

Wenn a, c und $4ac - b^2$ positiv sind und zur Abkürzung

$$2\sqrt{ac} + b = h$$

gesetzt wird, so ist

15. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{ah}}.$$

16. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{ch}}.$$

17. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a + bx^2 + cx^4)^2} = \frac{\pi(3h - b)}{8\sqrt{a^3h^3}}.$$

18. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ah^3}}.$$

19. $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ch^3}}.$$

20. $$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^2} = \frac{\pi(3h - b)}{8\sqrt{c^3h^3}}.$$

21. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^3} = \frac{\pi(5h - 3b)}{32\sqrt{a^3h^5}}.$$

22. $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^3} = \frac{3\pi}{16\sqrt{ah^5}}.$$

23. $$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^3} = \frac{3\pi}{16\sqrt{ch^5}}.$$

24. $$\int_0^\infty \frac{x^8\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^3} = \frac{\pi(5h - 3b)}{32\sqrt{c^3h^5}}.$$

25. $$\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^4} = \frac{\pi(7h - 5b)}{64\sqrt{a^3h^7}}.$$

26. $$\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(a + bx^2 + cx^4)^4} = \frac{5\pi}{32\sqrt{ah^7}}.$$

27. $$\int_0^\infty \frac{x^8\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{5\pi}{32\sqrt{ch^7}}.$$

28. $$\int_0^\infty \frac{x^{10}\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^4} = \frac{\pi(7h-5b)}{64\sqrt{c^3h^7}}.$$

29. $$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n-1)},\ \mu>0.$$

30. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$ 31. $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

32. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2},\quad m \text{ gerade.}$$

33. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots m},\quad m \text{ ungerade.}$$

Wenn a, c und $4ac-b^2$ positiv sind und $2\sqrt{ac}+b$ wieder mit h bezeichnet wird, so ist

34. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}} = \frac{2}{h\sqrt{a}}.$$

35. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}} = \frac{2}{h\sqrt{c}}.$$

36. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{2(2h-b)}{3h^2\sqrt{a^3}}.$$

37. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{4}{3h^2\sqrt{a}}.$$

38. $$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{4}{3h^2\sqrt{c}}.$$

39. $$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = \frac{2\,(2h-b)}{3h^2\sqrt{c^3}}.$$

40. $$\int_0^1 x^{a-1}lx\,dx = -\frac{1}{a^2}. \qquad a > 0.$$

41. $$\int_0^1 x^{a-1}(lx)^n\,dx = \frac{(-1)^n\,1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{a^{n+1}}. \qquad a > 0.$$

42. $$\int_0^\infty e^{-az}\,dz = \frac{1}{a}.$$ 43. $$\int_0^\infty z\,e^{-az}\,dz = \frac{1}{a^2}. \qquad a > 0.$$

44. $$\int_0^\infty z^n e^{-az}\,dz = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{a^{n+1}}. \qquad a > 0.$$

45. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} sin^m\omega\,d\omega = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad m \text{ gerade.}$$

46. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} sin^m\omega\,d\omega = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(m-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots\cdots m}, \qquad m \text{ ungerade.}$$

47. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\alpha^2 cos^2\omega + \beta^2 sin^2\omega} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

48. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 cos^2\omega + \beta^2 sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3\beta^3}.$$

49. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cos^2\omega\,d\omega}{(\alpha^2 cos^2\omega + \beta^2 sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha^3\beta}.$$

50. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2\omega\,d\omega}{(\alpha^2 cos^2\omega + \beta^2 sin^2\omega)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta^3}.$$

51. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{(\alpha^2 cos^2\omega + \beta^2 sin^2\omega)^3} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3\,(\alpha^4+\beta^4)+2\alpha^2\beta^2}{\alpha^5\beta^5}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{52.}\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,du = \frac{a}{a^2+b^2}, \\[2ex] \text{53.}\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,du = \frac{b}{a^2+b^2}, \end{array}\right\} \quad a > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{54.}\ \displaystyle\int_0^\infty u e^{-au}\cos bu\,du = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}, \\[2ex] \text{55.}\ \displaystyle\int_0^\infty u e^{-au}\sin bu\,du = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}, \end{array}\right\} \quad a > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{56.}\ \displaystyle\int_0^\infty u^2 e^{-au}\cos bu\,du = \frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}, \\[2ex] \text{57.}\ \displaystyle\int_0^\infty u^2 e^{-au}\sin bu\,du = \frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}, \end{array}\right\} \quad a > 0.$$

§ 20.

Transformationen bestimmter Integrale.

Allgemeine Sätze und Regeln. Wenn die Function $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ continuirlich bleibt, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi[a + \varepsilon(b-a)], \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Für $b = a$ folgt hieraus, dass ein zwischen den gleichen Grenzen a und a genommenes Integral im Allgemeinen verschwindet, ausgenommen, wenn $\varphi(a)$ unendlich wird. Einen Ausnahmefall dieser Art bildet z. B. das Integral

$$\int_\delta^{2\delta} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2\delta}$$

welches für $\delta = 0$ nicht verschwindet, sondern unendlich gross wird.

Bezeichnet $\psi(x)$ eine Function, welche von $x = a$ bis $x = b$ stetig und zugleich positiv bleibt, so ist allgemeiner

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi[a + \varepsilon(b - a)] \int_a^b \psi(x)\,dx,$$
$$0 < \varepsilon < 1.$$

Zur Abkürzung sei $a + \varepsilon(b - a) = \mu$, ferner habe $\varphi(x)$ die Eigenschaft $\varphi(0) = 0$; die analoge Gleichung

$$\int_a^b \varphi(\varkappa x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(\varkappa\mu) \int_a^b \psi(x)\,dx, \qquad a < \mu < b,$$

dient dann zur Beantwortung der Frage, ob das Integral verschwindet, sobald der constante Coefficient $\varkappa$ in Null übergeht. Bei endlichen a und b ist μ gleichfalls endlich, mithin für $\varkappa = 0$ auch $\varkappa\mu = 0$ und $\varphi(\varkappa\mu) = 0$; das rechter Hand stehende Product verschwindet dann sicher wenn

$$\int_a^b \psi(x)\,dx$$

einen endlichen Werth besitzt; im Gegenfalle erhält jenes Product die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$, welche näherer Untersuchung bedarf. So verschwindet z. B. das Integral

$$\int_0^1 l\left(\frac{1}{1 - \varkappa x}\right) \frac{1}{x^3}\,dx$$

nicht für $\varkappa = 0$, denn sein Werth beträgt mehr als

$$\varkappa \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \varkappa \cdot \infty.$$

Ist zweitens eine der Integrationsgrenzen a und b unendlich gross, so kann μ gleichfalls unendlich gross sein, und dann lässt sich nicht einmal behaupten, dass $\varkappa\mu = 0$ werde und demgemäss $\varphi(\varkappa\mu)$ verschwinde. Derartige Fälle müssen besonders untersucht werden.

Zur Vertauschung der Integrationsgrenzen dient der Satz

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Sind α, β, γ, $\cdots$ μ beliebige, zwischen a und b in der Weise eingeschaltete Grössen, dass

$$a < \alpha < \beta < \gamma < \cdots < \mu < b,$$

so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \cdots + \int_\mu^b f(x)\,dx,$$

welche Operation die Zerlegung des Integrales durch Theilung des Integrationsintervalles genannt wird.

Die genannte Zerlegung dient u. A. zur Berechnung des Integralwerthes für den Fall, dass die Function $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles Unterbrechungen der Continuität erleidet. Wird $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ nur einmal und zwar an der Stelle $x = \varkappa$ discontinuirlich, so betrachtet man das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als den Grenzwerth, welchem sich die Summe

$$\int_a^{\varkappa-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{\varkappa+\delta_2}^b f(x)\,dx$$

bei verschwindenden δ_1 und δ_2 nähert; diess giebt, wenn

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

gesetzt wird,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + Lim\left\{F(\varkappa - \delta_1) - F(\varkappa + \delta_2)\right\}$$

und ähnlich bei mehreren Unterbrechungen der Continuität. Der für $\delta_1 = \delta_2$ entstehende Werth des Integrales heisst der Hauptwerth des letzteren.

Desselben Verfahrens bedient man sich, wenn man bei der unbestimmten Integration für $F(x)$ eine discontinuirliche Function erhalten hat. So ist z. B.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = arctan\,\frac{2\sqrt{x}}{1-x} + Const.$$

wollte man aber hieraus ohne Weiteres

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 0$$

schliessen, so wäre diess unrichtig und auf folgende Weise zu verbessern

$$\int_0^{1-\delta_1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_{1+\delta_2}^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = arctan\,\frac{2\sqrt{1-\delta_1}}{\delta_1} + arctan\,\frac{2\sqrt{1+\delta_2}}{\delta_2}$$

mithin für $\delta_1 = \delta_2 = 0$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi,$$

wie man auch durch die zweckmässigere Integralformel

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \, arctan \sqrt{x} + Const.$$

verificiren kann.

Die Substitution neuer Variabelen wird bei bestimmten Integralen im Allgemeinen ebenso wie bei unbestimmten Integralen ausgeführt, nur hat man zur Vermeidung von Restitutionen auf die Veränderungen zu achten, welche die Integrationsgrenzen erleiden. Wenn die Gleichung $\varphi(x) = y$, nach x aufgelöst, nur einen einzigen Werth $x = \psi(y)$ giebt, so ist

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, \psi'(y)\, dy.$$

Wenn dagegen die Gleichung $\varphi(x) = y$ zwei verschiedene Ausdrücke $x = \psi(y)$ und $x = \chi(y) > \psi(y)$ liefert, so ist diess ein Zeichen, dass y, als Function von x betrachtet, ein Maximum oder Minimum besitzt. Tritt dasselbe an der Stelle $x = \mu$ ein und ist zugleich $a < \mu < b$, so entsprechen jedem y zwei x, von denen das eine weniger, das andere mehr als μ beträgt; man hat daher die erste Wurzel $x = \psi(y)$ im Falle $x < \mu$, die zweite $x = \chi(y)$ im Falle $x > \mu$ zu substituiren. Um diese Fälle zu trennen, zerlegt man erst wie folgt

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\, dx = \int_a^\mu f[\varphi(x)]\, dx + \int_\mu^b f[\varphi(x)]\, dx$$

und erhält nachher durch die angedeuteten Substitutionen

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\mu)} f(y)\, \psi'(y)\, dy + \int_{\varphi(\mu)}^{\varphi(b)} f(y)\, \chi'(y)\, dy.$$

Ganz ähnlich hat man zu verfahren, wenn $\varphi(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ mehrere Maxima und Minima besitzt, mithin aus $\varphi(x)=y$ drei oder mehr Werthe für x folgen.

Beispiel 1. Benutzt man die Substitution

$$\sqrt{x^2+1} - x = y$$

und beachtet, dass y verschwindet für $x = \infty$, so erhält man

$$\int_\lambda^\infty (\sqrt{x^2+1} - x)^p\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda} (y^{p-2} + y^p)\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\sqrt{\lambda^2+1} - \lambda)^{p-1}}{p-1} + \frac{(\sqrt{\lambda^2+1} - \lambda)^{p+1}}{p+1}\right\}, \qquad p > 1.$$

2. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\int_\lambda^\infty (x - \sqrt{x^2-1})^p\,dx = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})^{p-1}}{p-1} + \frac{(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})^{p+1}}{p+1}\right\}, \qquad p > 1.$$

3. Die Substitution

$$\frac{\beta x}{\alpha + \beta x} = y$$

führt zu der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(\alpha+\beta x)^{p+q}} = \frac{1}{\alpha^q \beta^p}\int_0^1 y^{p-1}(1 - y^{q\;-1}\,dy.$$

Im speciellen Falle eines ganzen positiven p wird nach No. 29. des vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(\alpha+\beta x)^{p+q}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+p-1)}\cdot\frac{1}{\alpha^q\beta^p}.$$

Setzt man in der vorhergehenden Formel

$$p = \tfrac{1}{2}(m+1), \qquad q = \tfrac{1}{2}, \qquad x = \xi^2, \qquad y = \eta^2$$

so erhält man unter Rücksicht auf die Formeln 32. und 33. des vorigen Paragraphen

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}}, \text{ für gerade } m.$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m\,d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}}, \qquad \text{für ungerade } m.$$

Für $\xi = \frac{1}{\zeta}$ wird

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{\frac{1}{2}m+1}} = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(\alpha\zeta^2+\beta)^{\frac{1}{2}m+1}},$$

man hat also zugleich zwei Formeln für das auf der rechten Seite stehende Integral.

4. Wendet man die Substitution

$$\frac{2x}{1+x^2} = y$$

an und beachtet, dass dem Werthe $x = 1$ ein Maximum von y entspricht, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(1+x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2^m}\int_0^1 \frac{y^m dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

und ferner, wenn

$$x = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\xi, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0$$

gesetzt wird,

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2^{m+1}\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}}, \qquad m \text{ gerade.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^m d\xi}{(\alpha+\beta\xi^2)^{m+1}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots m}\cdot\frac{1}{2^m\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}}, \qquad m \text{ ungerade.}$$

5. Für $\xi = \tan\theta$ gehen aus den Formeln in 3. und 4. die folgenden hervor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}}, \qquad m \text{ gerade.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}m+1}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta^{m+1}}}, \qquad m \text{ ungerade.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m\theta\cos^m\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)^{m+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi}{2^{m+1}\sqrt{\alpha^{m+1}\beta^{m+1}}},$$

m gerade.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m \theta \cos^m \theta \, d\theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)^{m+1}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots\cdots m} \cdot \frac{1}{2^m \sqrt{\alpha^{m+1} \beta^{m+1}}},$$

m ungerade.

6. Transformirt man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(\frac{1}{x} + 2\varkappa + x\right)^p \sqrt{x}}$$

mittelst der Substitution

$$x + \frac{1}{x} = 2y$$

und beachtet einerseits, dass y für $x = 1$ ein Minimum erreicht, sowie andererseits, dass die identische Gleichung

$$\sqrt{y - \sqrt{y^2 - 1}} + \sqrt{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \sqrt{2(y+1)}$$

statt findet, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{(1 + 2\varkappa x + x^2)^p} = \frac{\sqrt{2}}{2^p} \int_1^\infty \frac{dy}{(\varkappa + y)^p \sqrt{y-1}}$$

und für $y = 1 + \zeta^2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{(1 + 2\varkappa x + x^2)^p} = \frac{1}{2^{p-\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1 + \varkappa + \zeta^2)^p}.$$

Durch Substitution von

$$p = \tfrac{1}{2} m + 1, \qquad x = \sqrt{\frac{c}{a}} \cdot z^2, \qquad \varkappa = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

ergiebt sich ferner

$$\int_0^\infty \frac{z^{m+2} \, dz}{(a + bz^2 + cz^4)^{\frac{1}{2}m+1}} = \sqrt[4]{\frac{4a}{c}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(2\sqrt{ac} \cdot \zeta^2 + b + 2\sqrt{ac})^{\frac{1}{2}m+1}}$$

wobei sich für jedes ganze m das rechts stehende Integral nach der letzten Formel in No. 3. entwickeln lässt.

Setzt man $\frac{1}{z}$ statt z und vertauscht a und c gegen einander, so erhält man noch

$$\int_0^\infty \frac{z^m\,dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{1}{2}m+1}} = \sqrt[4]{\frac{4c}{a}} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(2\sqrt{ac}\cdot\zeta^2+b+2\sqrt{ac})^{\frac{1}{2}m+1}}.$$

Für $m=0$ und $m=2$ führen die beiden letzten Formeln zu den in § 19. unter No. 15., 16., 18. und 19. angegebenen Resultaten.

7. Zerlegt man das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,lx\,dx}{(1+\varkappa x+x^2)^p}$$

in zwei, bezüglich von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ gehende Integrale und setzt im ersten dieser Integrale $x=y$, im zweiten $x=\frac{1}{y}$, so findet man, dass der Werth des ursprünglichen Integrales $=0$ ist. Für

$$x=\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot z, \qquad \varkappa=\frac{b}{\sqrt{ac}}$$

folgt hieraus bei positiven, von Null verschiedenen a und c

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,lz\,dz}{(a+bz+cz^2)^p} = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{a}{c}\right)\int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{(a+bz+cz^2)^p}$$

also z. B.

$$\int_0^\infty \frac{lz\,dz}{a+bz+cz^2} = \frac{la-lc}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\mathrm{arctan}\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b},\quad 4ac-b^2>0.$$

$$\int_0^\infty \frac{z\,lz\,dz}{(a+bz+cz^2)^2} = \frac{la-lc}{4ac-b^2}\left\{1-\frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\mathrm{arctan}\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b}\right\}.$$

$$\int_0^\infty \frac{z^m\,lz\,dz}{(a+cz^2)^{m+1}}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots m}\cdot\frac{\pi(la-lc)}{2^{m+2}\sqrt{a^{m+1}c^{m+1}}}, \qquad \text{für gerade } m,$$

$$=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(m-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots m}\cdot\frac{la-lc}{2^{m+1}\sqrt{a^{m+1}c^{m+1}}}, \qquad \text{für ungerade } m.$$

8. Setzt man

$$a = h\cos\gamma, \qquad b = h\sin\gamma, \qquad h = \sqrt{a^2+b^2},$$

so ist identisch

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[h\cos(\theta-\gamma) + c]^m}$$

und für $\theta - \gamma = \eta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = \int_{-\gamma}^{2\pi} \frac{d\eta}{(h\cos\eta + c)^m}.$$

Man zerlege nun das Integral rechter Hand nach dem Schema

$$\int_{-\gamma}^{2\pi} = \int_{-\gamma}^{0} + \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} - \int_{2\pi-\gamma}^{2\pi}$$

und substituire im ersten Integrale $\eta = -\zeta$, im zweiten $\eta = +\zeta$, im dritten und vierten $\eta = 2\pi - \zeta$; diess giebt

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\zeta}{(h\cos\zeta + c)^m}$$

endlich für

$$c + \sqrt{a^2+b^2} = \alpha^2, \qquad c - \sqrt{a^2+b^2} = \beta^2, \qquad \zeta = 2\omega,$$

wobei $a^2 + b^2 < c^2$ vorausgesetzt wird,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^m} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^m}.$$

Specielle Fälle hiervon sind

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta + c)^2} = \frac{2\pi c}{\sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^3}}.$$

9. Nach demselben Verfahren erhält man die allgemeine Formel

$$\int_0^{2\pi} F(a\cos\theta + b\sin\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\pi} F\left(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\zeta\right)d\zeta.$$

10. Der Werth des Integrales

$$J=\int_0^{\pi} \sin 2m\omega \cot n\omega \, d\omega$$

lässt sich, wenn m und n ganze positive Zahlen bedeuten, auf folgendem Wege finden. Man substituire zunächst $n\omega=\varphi$, zerlege das entstehende Integral

$$J=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \sin\frac{2m\varphi}{n} \cot\varphi \, d\varphi$$

nach dem Schema

$$\int_0^{n\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

und setze im ersten Integrale rechter Hand $\varphi=\psi$, im zweiten $\varphi=\pi+\psi$, im dritten $\varphi=2\pi+\psi$ u. s. w.; das Resultat ist

$$J=\frac{A}{n}\int_0^{\pi} \sin\frac{2m\psi}{n} \cot\psi \, d\psi+\frac{B}{n}\int_0^{\pi} \cos\frac{2m\psi}{n} \cot\psi \, d\psi,$$

worin A und B folgende Bedeutungen haben

$$A=1+\cos\frac{2m\pi}{n}+\cos\frac{4m\pi}{n}+\cos\frac{6m\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(2n-2)m\pi}{n},$$

$$B=\quad \sin\frac{2m\pi}{n}+\sin\frac{4m\pi}{n}+\sin\frac{6m\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(2n-2)m\pi}{n}.$$

Aus den im ersten Theile, § 35., No. 10. und 11. entwickelten Formeln ergiebt sich $\left(\text{für } x=1 \text{ und } \theta=\frac{2m\pi}{n}\right)$, dass $A=n$ oder $=0$ ist, jenachdem n in m aufgeht oder nicht, und dass B immer $=0$ ist. Im zweiten Falle wird $J=0$; im ersten sei $\frac{m}{n}=q$, also q eine ganze Zahl; die Gleichung

$$\sin 2q\psi \cot\psi=1+2\{\cos 2\psi+\cos 4\psi+\cdots+\cos(2q-2)\psi\} \\ +\cos 2q\psi$$

liefert dann $J=\pi$. Der Werth des Productes

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2m\omega \cot n\omega \, d\omega$$

ist demnach $=1$ oder $=0$, jenachdem n im m aufgeht oder nicht.

11. Bezeichnet k eine ganze positive Zahl, so erhält man durch ein ganz ähnliches Verfahren

$$\int_0^\pi f(\theta)\, sin\, k\theta\, d\theta = \frac{1}{k} \int_0^\pi Z\, sin\, \zeta\, d\zeta,$$

worin Z die folgende Bedeutung hat

$$Z = f\left(\frac{\zeta}{k}\right) - f\left(\frac{\zeta+\pi}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+2\pi}{k}\right) - \cdots + (-1)^{k-1} f\left(\frac{\zeta+(k-1)\pi}{k}\right).$$

12. Nach derselben Methode findet man

$$\int_0^\pi f(\theta)\, sin^2 k\theta\, d\theta = \frac{1}{k} \int_0^\pi Z\, sin^2 \zeta\, d\zeta,$$

worin Z durch die Gleichung

$$Z = f\left(\frac{\zeta}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+\pi}{k}\right) + f\left(\frac{\zeta+2\pi}{k}\right) + \cdots + f\left(\frac{\zeta+(k-1)\pi}{k}\right)$$

bestimmt ist.

§ 21.

Die Variation der Constanten.

Wenn in einem bestimmten Integrale eine willkührliche Constante r vorkommt wie z. B. in der Gleichung

$$W = \int_a^b f(x, r)\, dx,$$

so hängt auch der Integralwerth U von r ab und es kann daher W in Beziehung auf r differenzirt werden. Unter der Voraussetzung, dass die Integrationsgrenzen a und b kein r enthalten, geschieht die verlangte Differentiation mittelst der Formel

$$\frac{dW}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx;$$

wenn dagegen r auch in a und b vorkommt, so ist

$$\frac{dW}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx + f(b, r)\frac{db}{dr} - f(a, r)\frac{da}{dr}.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur unter der Bedingung, dass bei unendlich abnehmenden $\varDelta r$ und einem echt gebrochenen ε

$$Lim \left\{ \varDelta r \int_a^b f_r''(x, r + \varepsilon \varDelta r)\, dx \right\} = 0$$

ist, wozu nur gehört, dass das Integral

$$\int_a^b f_r''(x, r)\, dx$$

einen endlichen Werth besitzt.

Wie man diese Variation der Constanten benutzen kann, um die Werthe mancher bestimmten Integrale zu finden, wird das folgende Beispiel zeigen.

1. Das zu entwickelnde Integral sei

$$W = \int_0^\infty \frac{l(1 + \varkappa^2 x^2)}{x^2(1 + \lambda^2 x^2)}\, dx, \qquad \lambda > 0.$$

Da die Function unter dem Integralzeichen positiv, und der Factor $l(1 + \varkappa^2 x^2) < \varkappa^2 x^2$ bleibt, so folgt, dass W positiv und kleiner als $\frac{\varkappa^2 \pi}{2\lambda}$ sein muss; es ist daher W eine endliche Grösse, welche für $\varkappa = 0$ verschwindet.*) Durch Differentiation in Beziehung auf $\varkappa$ folgt

$$\frac{dW}{d\varkappa} = 2\varkappa \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + \varkappa^2 x^2)(1 + \lambda^2 x^2)} = \pi\left(1 - \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda}\right)$$

mithin ist

$$W = \pi \int \left(1 - \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda}\right) d\varkappa = \pi \left\{\varkappa - \lambda l(\varkappa + \lambda) + Const.\right\}.$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $\varkappa = 0$ auch $W = 0$ werden muss; die Zusammenstellung der ersten und letzten Form von W giebt nun

---

*) Es wäre voreilig, das Verschwinden von W aus dem Umstande schliessen zu wollen, dass $l(1 + \varkappa^2 x^2)$ für $\varkappa = 0$ in Null übergeht. Die letztere Behauptung setzt nämlich endliche x d. h. eine endliche obere Integrationsgrenze voraus, die hier nicht vorhanden ist.

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{x^2(1+\lambda^2 x^2)}\, dx = \pi\left\{\varkappa - \lambda l\left(1+\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\}, \qquad \lambda > 0.$$

Hieraus lassen sich durch ein- oder mehrmalige Differentiation in Beziehung auf λ weitere Integralformeln herleiten, z. B.

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\varkappa^2 x^2)}{(1+\lambda^2 x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2\lambda}\left\{l\left(1+\frac{\varkappa}{\lambda}\right) - \frac{\varkappa}{\varkappa+\lambda}\right\}.$$

Durch theilweise Integration findet man

$$\int \frac{l(1+\alpha^2 x^2)\cdot l(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\, dx = -\frac{l(1+\alpha^2 x^2)\cdot l(1+\beta^2 x^2)}{3x^3}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\int \left\{\frac{\beta^2 l(1+\alpha^2 x^2)}{1+\beta^2 x^2} + \frac{\alpha^2 l(1+\beta^2 x^2)}{1+\alpha^2 x^2}\right\}\frac{dx}{x^2}$$

mithin nach der ersten von den vorigen Formeln

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\alpha^2 x^2)\cdot l(1+\beta^2 x^2)}{x^4}\, dx$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi\left\{(\alpha+\beta)\alpha\beta + \alpha^3 l\alpha + \beta^3 l\beta - (\alpha^3+\beta^3)\, l(\alpha+\beta)\right\}$$

und specieller

$$\int_0^\infty \left[\frac{l(1+x^2)}{x^2}\right]^2 dx = \tfrac{4}{3}\pi\,(1 - l2).$$

Aus dem letzten Falle kann man sich die Regel abstrahiren, dass es bei der Werthermittelung eines rein numerischen Integrales gerathen ist, dasselbe durch Einführung willkührlicher Constanten zu verallgemeinern und in Beziehung auf letztere zu differenziren.

2. Handelt es sich um das numerische Integral

$$\int_0^\infty \frac{arctan\, x}{x(1+x^2)}\, dx,$$

so betrachte man erst das allgemeinere Integral

$$W = \int_0^\infty \frac{arctan\,(\varkappa x)}{x(1+\lambda^2 x^2)}\, dx, \qquad \lambda > 0;$$

wegen $arctan(\varkappa x) < \varkappa x$ ist W positiv und kleiner als $\frac{\pi\varkappa}{2\lambda}$, mithin für $\varkappa = 0$ auch $W = 0$. Durch Differentiation in Beziehung auf $\varkappa$ und nachherige Integration findet man

$$\int_0^\infty \frac{arctan(\varkappa x)}{x(1+\lambda^2 x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}\, l\left(1 + \frac{\varkappa}{\lambda}\right), \qquad \lambda > 0$$

also das ursprüngliche numerische Integral $= \frac{1}{2}\pi\, l\, 2$.

Durch Differentiation in Beziehung auf λ ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{x \cdot arctan(\varkappa x)}{(1+\lambda^2 x^2)^2}\, dx = \frac{\pi\varkappa}{4\lambda^2(\varkappa+\lambda)}.$$

Mit Hülfe der theilweisen Integration gelangt man noch zu folgenden Formeln

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\alpha^2 x^2)\cdot arctan(\beta x)}{x^3}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left\{\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2)\, l(\alpha+\beta) - \alpha^2 l\alpha + \beta^2 l\beta\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{arctan(\alpha x)\cdot arctan(\beta x)}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, l\left\{\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right\}.$$

3. Durch Differentiation in Beziehung auf r und nachherige Integration findet man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1 + r\, sin^2\theta)\, d\theta = \pi l\left(\frac{1+\sqrt{1+r}}{2}\right)$$

und für $r = \frac{b}{a}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(a + b\, sin^2\theta)\, d\theta = \pi l\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{2}\right).$$

Hiernach ist auch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 sin^2\theta)\, d\theta = \pi l\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

4. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\,sin\,\theta}{a - b\,sin\,\theta}\right) sin\,\theta\,d\theta = \pi\,\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad a > b.$$

5. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\,sin\,\theta}{a - b\,sin\,\theta}\right) \frac{d\theta}{sin\,\theta} = \pi\,arcsin\,\frac{b}{a}, \qquad a > b.$$

6. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} arctan\left(\frac{b}{a}\,sin\,\theta\right) sin\,\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}.$$

7. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} arctan\left(\frac{b}{a}\,sin\,\theta\right) \frac{d\theta}{sin\,\theta} = \frac{\pi}{2}\,l\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{a}\right).$$

8. Aus der Gleichung

$$W = \int_a^b \frac{1}{x} e^{-tx}\,dx$$

erhält man durch Differentiation nach t

$$\frac{dW}{dt} = -\int_a^b e^{-tx}\,dx = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$$

mithin

$$W = \int \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}\,dt + Const.$$

Setzt man in beiden für W geltenden Formeln $t = h$, $t = 0$ und subtrahirt, so findet man

$$\int_a^b \frac{1 - e^{-hx}}{x}\,dx = \int_0^h \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

oder

$$\int_0^h \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = l\left(\frac{b}{a}\right) - \int_a^b \frac{1}{x} e^{-hx}\,dx.$$

Im Falle $a > 0$ und $b > 0$ liegt der Werth des rechter Hand vorkommenden Integrales zwischen den Grenzen

$$\int_a^b \frac{1}{a} e^{-hx}\, dx = \frac{e^{-ah} - e^{-bh}}{ah}$$

und

$$\int_a^b \frac{1}{b} e^{-hx}\, dx = \frac{e^{-ah} - e^{-bh}}{bh},$$

welche für $h = \infty$ verschwinden. Es ist daher

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = l\left(\frac{b}{a}\right), \qquad a > 0,\ b > 0.$$

9. Wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet und

$$W = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx$$

gesetzt wird, so findet man durch eine, der vorigen ganz analoge Rechnung

$$\int_0^{2n\pi} (1 - e^{-hx}) \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{arctan} h - \int_0^h \frac{e^{-2n\pi t}}{1 + t^2}\, dt$$

und für $h = \infty$

$$\int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi t}}{1 + t^2}\, dt.$$

Handelt es sich um das allgemeinere Integral

$$\int_0^\omega \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

dessen obere Grenze kein Vielfaches von 2π ist, so kann immer $\omega = 2n\pi + \varrho$ gesetzt werden, wo der Rest ϱ weniger als 2π beträgt; ferner lässt sich die Zerlegung

$$\int_0^\omega = \int_0^{2n\pi + \varrho} = \int_0^{2n\pi} + \int_{2n\pi}^{2n\pi + \varrho}$$

und im letzten Integrale die Substitution $x = 2n\pi + y$ anwenden, wodurch entsteht

$$\int_0^\omega \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi t}}{1+t^2}\,dt + \int_0^\varrho \frac{\sin y}{2n\pi + y}\,dy.$$

Wegen

$$0 < \frac{1}{1+t^2} < 1$$

liegt der Werth des ersten Integrales rechter Hand zwischen 0 und $\frac{1}{2n\pi}$; weil ferner $-1 < \sin y < +1$ ist, so hat das zweite Integral einen zwischen

$$-l\left(1 + \frac{\varrho}{2n\pi}\right) \text{ und } + l\left(1 + \frac{\varrho}{2n\pi}\right)$$

enthaltenen Werth; für $\omega = \infty$ d. h. $n = \infty$ wird nun

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Die Substitution $x = \mu\theta$ giebt unter der Voraussetzung eines positiven μ

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \mu > 0.$$

Beachtet man, dass

$$2\sin\alpha\theta\cos\beta\theta = \begin{cases} \sin(\alpha+\beta)\theta + \sin(\alpha-\beta)\theta, & \text{für } \alpha > \beta, \\ \sin 2\alpha\theta, & \text{für } \alpha = \beta, \\ \sin(\beta+\alpha)\theta - \sin(\beta-\alpha)\theta, & \text{für } \alpha < \beta, \end{cases}$$

so gelangt man zu der allgemeineren Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\theta\,\cos\beta\theta}{\theta}\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & \text{für } \alpha > \beta, \\ \frac{1}{4}\pi, & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{für } \alpha < \beta, \end{cases}$$

welche weder nach α noch in Beziehung auf β differenzirt werden darf.

Durch theilweise Integration ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\theta\,\sin\beta\theta}{\theta^2}\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\beta, & \text{für } \alpha > \beta, \\ \frac{1}{4}\pi(\beta+\alpha), & \text{für } \alpha = \beta, \\ \frac{1}{2}\pi\alpha, & \text{für } \alpha < \beta. \end{cases}$$

10. Differenzirt man das Integral

$$W = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin rx}{x} dx$$

in Beziehung auf r und beachtet, dass W gleichzeitig mit r verschwindet, so findet man

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{a},$$

11. Das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx}) \cos rx}{x} dx,$$

welches für $r = 0$ in das unter No. 8. entwickelte Integral übergeht, lässt sich analog behandeln; sein Werth ist

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos rx \, dx = \tfrac{1}{2} l \left(\frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2} \right).$$

12. Mittelst der Substitution $z = x^2$ erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \left\{ \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \right\};$$

im letzten Integrale ist $x > 1$ mithin $x^2 > x$ und $e^{-x^2} < e^{-x}$ folglich der Werth des letzten Integrales eine endliche positive Grösse; das auf z bezügliche Integral besitzt daher gleichfalls einen endlichen positiven Werth, welcher A heissen möge. Setzt man in der Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = A$$

$z = ky$, so findet man noch

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ky}}{\sqrt{y}} dy = \frac{A}{\sqrt{k}}, \qquad k > 0.$$

Nach dieser Vorbereitung soll das Integral

$$V = \int_0^\infty \frac{e^{-t(1+y)}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy$$

betrachtet werden. Hier ist

$$\frac{dV}{dt} = -\int_0^\infty \frac{e^{-t(1+y)}}{\sqrt{y}}\, dy = -\frac{Ae^{-t}}{\sqrt{t}}$$

mithin

$$V = -A\left\{\int \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt + Const.\right\}.$$

Setzt man in beiden für V geltenden Gleichungen $t = h$, $t = 0$ und subtrahirt, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-h(1+y)}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy = A\int_0^h \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

oder umgekehrt

$$A\int_0^h \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \pi - e^{-h}\int_0^\infty \frac{e^{-hy}}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy.$$

Da $\dfrac{1}{1+y}$ ein positiver echter Bruch ist, so gilt die Ungleichung

$$0 < \int_0^\infty \frac{e^{-hy}}{(1+y)\sqrt{y}} < \frac{A}{\sqrt{h}},$$

mithin wird für $h = \infty$

$$A\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \pi \text{ das ist } A^2 = \pi$$

und schliesslich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \qquad k > 0,$$

oder für $y = z^2$

$$\int_0^\infty e^{-kz^2}\, dz = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}, \qquad k > 0.$$

Durch mehrmalige Differentiation in Beziehung auf k lassen sich aus den vorigen Formeln die nachstehenden ableiten

$$\int_0^\infty y^{n-\frac{1}{2}} e^{-ky}\, dy = 2\int_0^\infty z^{2n} e^{-kz^2}\, dz = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2k)^n}\sqrt{\frac{\pi}{k}}.$$

13. Es sei

$$U = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2tx\, dx;$$

man erhält dann

$$\frac{dU}{dt} = -2\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin 2tx\, dx$$

und durch theilweise Integration, wobei die Formel

$$\int x e^{-x^2}\, dx = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2}$$

zu beachten ist,

$$\frac{dU}{dt} = -2tU \quad \text{oder} \quad dl\, U = d(-t^2).$$

Die Integration liefert $U = Ce^{-t^2}$, wobei sich die Constante C mittelst der Bemerkung bestimmt, dass dem Falle $t = 0$ der Specialwerth $U = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ entspricht; es ist demnach

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2tx\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{-t^2}$$

und für $x = az$, $t = \dfrac{b}{a}$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos 2bz\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad a > 0.$$

14. Durch Differentiation der Gleichung

$$U = \int_0^\infty \frac{e^{-ty}(\sin t - y\cos t)}{(1+y^2)\sqrt{y}}\, dy$$

erhält man

$$\frac{dU}{dt} = \int_0^\infty \frac{e^{-ty}\cos t}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\pi}\,\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$$

mithin

$$U = \sqrt{\pi}\left\{\int \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt + Const.\right\};$$

subtrahirt man die für $t = h$ und $t = 0$ entstehenden Werthe von U, so gelangt man zu der Gleichung

$$\sqrt{\pi}\int_0^h \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sin h\int_0^\infty \frac{e^{-hy}\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y}} - \cos h\int_0^\infty \frac{y\,e^{-hy}\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y}}.$$

Bei unendlich wachsenden h wird dieselbe zur folgenden

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und für $t = \mu\theta$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\mu\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, \qquad \mu > 0.$$

15. Nach demselben Verfahren lässt sich aus der Gleichung

$$V = \int_0^\infty \frac{e^{-ty}\,(\cos t + y\sin t)}{(1+y^2)\sqrt{y}}\,dy$$

die nachstehende Formel herleiten

$$\int_0^\infty \frac{\sin\mu\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, \qquad \mu > 0.$$

Nimmt man in den vorigen Gleichungen $t = \eta^2$, so wird

$$2\int_0^\infty \cos(\eta^2)\,d\eta = 2\int_0^\infty \sin(\eta^2)\,d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

oder

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(\eta^2)\,d\eta = \int_{-\infty}^\infty \sin(\eta^2)\,d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und hieraus für $\eta = \gamma + \omega$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(\gamma^2+\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega - \int_{-\infty}^\infty \sin(\gamma^2+\omega^2)\sin 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(\gamma^2+\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega + \int_{-\infty}^\infty \cos(\gamma^2+\omega^2)\sin 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die beiden Integrale, in denen $\sin 2\gamma\omega$ vorkommt, verschwinden hier, weil die unter den Integralzeichen stehenden Functionen die gemeinsame Eigenschaft $f(-\omega) = -f(\omega)$ besitzen; die übrig bleibenden Gleichungen

$$\cos(\gamma^2)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega - \sin(\gamma^2)\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin(\gamma^2)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega + \cos(\gamma^2)\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

enthalten zwei unbekannte Integrale und liefern als Werthe der letzteren

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos(\gamma^2) + \sin(\gamma^2)\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega^2)\cos 2\gamma\omega\,d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos(\gamma^2) - \sin(\gamma^2)\right\}.$$

Für $\omega = \alpha\zeta$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ lassen sich diese Resultate in folgender Form darstellen

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\infty}\cos(\alpha^2\zeta^2)\cos 2\beta\zeta\,d\zeta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),\\ \int_0^{\infty}\sin(\alpha^2\zeta^2)\cos 2\beta\zeta\,d\zeta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),\end{aligned}\right\}\quad \alpha > 0,$$

und in die eine Formel zusammenziehen

$$\int_0^{\infty} e^{i\alpha^2\zeta^2}\cos 2\beta\zeta\,d\zeta = \frac{i\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-i\left[\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]},\quad i = \sqrt{-1},$$

welche dem Endresultate von No. 13. analog ist.

16. Aus der Gleichung

$$U = e^{-a}\int_0^a \frac{1}{x}e^{x}\sin tx\,dx - e^{a}\int_0^a \frac{1}{x}e^{-x}\sin tx\,dx$$

erhält man

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2\cos at - (e^a + e^{-a})}{1+t^2}$$

und ferner, wenn nach geschehener Integration $t = b$, $t = 0$ gesetzt und subtrahirt wird,

$$e^{-a}\int_0^a \frac{1}{x} e^x \sin bx\, dx - e^a \int_0^a \frac{1}{x} e^{-x} \sin bx\, dx$$

$$= 2\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt - (e^a + e^{-a}) \arctan b$$

oder

$$\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \arctan b$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_0^a \frac{\sin bx}{x}\, dx - \tfrac{1}{2} e^a \int_0^a \frac{\sin bx}{x}\, dx$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{-a} \int_0^a \frac{1}{x}(e^x - 1) \sin bx\, dx + \tfrac{1}{2} e^a \int_0^a \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \sin bx\, dx.$$

Setzt man im ersten und zweiten Integrale rechter Hand $bx = y$ und zur Abkürzung

$$\frac{e^{-a}(e^x - 1) + e^a(1 - e^{-x})}{2x} = \varphi(x)$$

so ist auch

$$\int_0^b \frac{\cos at}{1+t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a}) \arctan b$$

$$- \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a}) \int_0^{ab} \frac{\sin y}{y}\, dy + \int_0^a \varphi(x) \sin bx\, dx.$$

Mittelst theilweiser Integration ergiebt sich nun überhaupt

$$\int_0^a f(x) \sin bx\, dx = \frac{f(0) - f(a) \cos ab}{b} + \frac{1}{b} \int_0^a f'(x) \cos bx\, dx$$

und wenn $f(x)$ und $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = a$ endlich und stetig bleiben, so hat das letzte Integral irgend einen endlichen Werth; hieraus zusammen folgt

$$\text{für } b = \infty, \qquad Lim \int_0^a f(x) \sin bx\, dx = 0.$$

Die specielle Function

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} e^{-a}\left(\frac{1}{1} + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2} e^{+a}\left(\frac{1}{1} - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots\right)$$

genügt den für $f(x)$ angegebenen Bedingungen, daher ist für $b = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\cos a t}{1 + t^2}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}(e^a + e^{-a})\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}(e^a - e^{-a})\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Durch Substitution von $t = \frac{\theta}{\alpha}$, $a = \alpha\beta$ ergiebt sich noch

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta\theta}{\alpha^2 + \theta^2}\, d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

17. Ganz analog lässt sich die Gleichung

$$V = e^{-a}\int_0^a \frac{1}{x} e^x \sin t x\, dx + e^a \int_0^a \frac{1}{x} e^{-x} \sin t x\, dx$$

behandeln; man findet

$$\int_0^\infty \frac{t \sin a t}{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

und mittelst derselben Substitution wie vorhin

$$\int_0^\infty \frac{\theta \sin \beta\theta}{\alpha^2 + \theta^2}\, d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Dieselbe Formel kann aus No. **14.** durch Differentiation nach β abgeleitet werden; fernere Differentiationen nach β sind aber nicht statthaft. Dagegen dürfen die vorigen Formeln beliebig vielmal nach α differenzirt werden.

18. Aus der Gleichung

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

erhält man für $x = a + (b - a) u$

$$\int_0^1 f'[a(1-u)+bu]\,du = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

und diese Gleichung werde m-mal in Beziehung auf a differenzirt; das Resultat ist

$$\int_0^1 (1-u)^m f^{(m+1)}[a(1-u)+bu]\,du$$

$$= (m)_0 \frac{1\cdot 2\cdots m}{(b-a)^{m+1}}[f(b)-f(a)] - (m)_1 \frac{1\cdot 2\cdots(m-1)}{(b-a)^m} f'(a) - \cdots\cdot$$

$$\cdots\cdots - (m)_{m-1} \frac{1}{(b-a)^2} f^{(m-1)}(a) - (m)_m \frac{1}{b-a} f^{(m)}(a),$$

wobei aber die Bedingung erfüllt sein muss, dass $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots\cdot$ $f^{(m+1)}(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben. Setzt man für die Binomialcoefficienten ihre Werthe, multiplicirt durchgängig mit

$$\frac{(b-a)^{m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

und nimmt schliesslich $b=a+h$, so erhält man

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(a) + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdot\cdot + \frac{h^m}{1\cdot 2\cdots m} f^{(m)}(a) + \int_0^1 \frac{(1-u)^m}{1\cdot 2\cdots m} f^{(m+1)}(a+hu)\,du.$$

Diess ist der Taylor'sche Satz, wobei der Rest der Reihe unter der Form eines bestimmten Integrales erscheint.