Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel V. Reihen, Producte und bestimmte Integrale

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel V.

Reihen, Producte und bestimmte Integrale.

§ 22.

Entwickelung bestimmter Integrale in Reihen oder Producte.

1. Benutzt man die unter der Bedingung $z^2 < 1$ gültige Reihenentwickelung

$$l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(\frac{1}{1}z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots\cdots\right)$$

und berücksichtigt die Formel 45. in § 20., so erhält man für $\varkappa^2 < 1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1+\varkappa \sin\theta}{1-\varkappa \sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi\left(\frac{\varkappa}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\varkappa^5}{5} + \cdots\right).$$

Hier ist die Summe der rechts stehenden Reihe bekannt, daher

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{1+\varkappa \sin\theta}{1-\varkappa \sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi \arcsin\varkappa,$$

oder für $\varkappa = \frac{b}{a}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi \arcsin\frac{b}{a}.$$

2. Nach demselben Verfahren ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\sin\theta\, d\theta = \pi\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

3. Mittelst der in Thl. I., § 35. und § 44. angegebenen Reihenformeln findet man für ein ganzes positives $n > 0$

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta\, d\theta}{1 - 2\varkappa \cos\theta + \varkappa^2} = \frac{\pi \varkappa^n}{1 - \varkappa^2}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

4. $$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin\theta\, d\theta}{1 - 2\varkappa \cos\theta + \varkappa^2} = \frac{\pi}{2} \varkappa^{n-1}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

5. $$\int_0^\pi l(1 - 2\varkappa \cos\theta + \varkappa^2) \cos n\theta\, d\theta = -\pi \frac{\varkappa^n}{n}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

6. $$\int_0^\pi arctan\left(\frac{\varkappa \sin\theta}{1 - \varkappa \cos\theta}\right) \sin n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa^n}{n}, \qquad \varkappa^2 < 1.$$

7. $$\int_0^\pi e^{\varkappa \cos\theta} \cos(\varkappa \sin\theta) \cos n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa^n}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

8. $$\int_0^\pi e^{\varkappa \cos\theta} \sin(\varkappa \sin\theta) \sin n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa^n}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

9. Einerseits ist $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa \cos\theta} \cos(\varkappa \sin\theta)\, d\theta$

$$= \frac{\pi}{2} - \left\{\frac{1}{1} \cdot \frac{\varkappa}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\varkappa^5}{1 \cdot 2 \cdots 5} - \cdots\right\}$$

andererseits

$$\int_0^\varkappa \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{1} \cdot \frac{\varkappa}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\varkappa^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\varkappa^5}{1 \cdot 2 \cdots 5} - \cdots$$

mithin

$$\int_0^\varkappa \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa \cos\theta} \cos(\varkappa \sin\theta)\, d\theta.$$

Da $\cos(\varkappa \sin\theta)$ zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, so hat man

$$-\frac{1}{e^{\varkappa\cos\theta}} < e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta) < +\frac{1}{e^{\varkappa\cos\theta}}$$

und noch stärker

$$-\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\theta} < e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta) < +\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\theta},$$

woraus folgt

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2(\varkappa^2+2)}} < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\varkappa\cos\theta}\cos(\varkappa\sin\theta)\,d\theta < +\frac{\pi}{\sqrt{2(\varkappa^2+2)}}\cdot$$

Für $\varkappa = \infty$ ergiebt sich nun, wie früher auf anderem Wege,

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\cdot$$

10. Wenn sich der Werth eines bestimmten Integrales sowohl durch directe Integration als auch mittelst einer unendlichen Reihe finden lässt, so führt die Vergleichung beider Formen zu einer neuen Reihenentwickelung. So ist z. B. bei positiven $1-\varepsilon$ einerseits

$$\int_0^1 (1-\varepsilon)^x\,dx = \frac{\varepsilon}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)};$$

andererseits hat man nach dem binomischen Satze, falls ε die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreitet,

$$(1-\varepsilon)^x = 1 - \frac{x}{1}\varepsilon - \frac{x(1-x)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 - \frac{x(1-x)(2-x)}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 - \cdots$$

mithin

$$\int_0^1 (1-\varepsilon)^x\,dx = 1 - \frac{J_1}{1}\varepsilon - \frac{J_2}{1\cdot 2}\varepsilon^2 - \frac{J_3}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 - \cdots,$$

$$J_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)\,dx.$$

Die Vergleichung beider Formen liefert

$$\frac{\varepsilon}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)} = 1 - \frac{J_1}{1}\varepsilon - \frac{J_2}{1\cdot 2}\varepsilon^2 - \frac{J_3}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 - \cdots$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1,$$

und zwar sind die Werthe der mit J bezeichneten Integrale

$$J_1 = \tfrac{1}{2}, \quad J_2 = \tfrac{1}{6}, \quad J_3 = \tfrac{1}{4}, \quad J_4 = \tfrac{19}{30}, \quad J_5 = \tfrac{9}{4}, \cdots$$

so dass man auch schreiben kann

$$\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\varepsilon - \frac{1}{24}\varepsilon^2 - \frac{19}{720}\varepsilon^3 - \frac{3}{160}\varepsilon^4 - \cdots$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1.$$

11. Von der Gleichung

$$\int_0^1 (1 - \varepsilon + \varepsilon x)(1-\varepsilon)^x dx = \left[\frac{\varepsilon}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\right]^2$$

ausgehend, erhält man nach demselben Verfahren

$$\left[\frac{\varepsilon}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\right]^2 = 1 - \varepsilon + \frac{K_2}{1\cdot 2}\varepsilon^2 + \frac{K_3}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 + \cdots\cdots$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1,$$

worin die Coefficienten folgende sind

$$K_2 = \tfrac{1}{6}, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = -\tfrac{1}{10}, \quad K_5 = -\tfrac{1}{2}, \cdots$$

$$K_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-2-x)\,[1-(n-1)x]\,dx.$$

Dasselbe Resultat lässt sich aus No. 10. durch Differentiation in Beziehung auf ε herleiten.

Bemerkenswerth ist noch die folgende Combination der beiden letzten Entwickelungen

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}\right]\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}$$

$$= \frac{H_1}{1} + \frac{H_2}{1\cdot 2}\varepsilon + \frac{H_3}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^2 + \frac{H_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varepsilon^3 + \cdots\cdots,$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1,$$

worin H_1, H_2, etc. die nachstehenden Werthe haben

$$H_1 = -\tfrac{1}{12}, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = \tfrac{1}{120}, \quad H_4 = \tfrac{1}{30}, \cdots\cdot$$

$$H_n = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)\cdot(\tfrac{1}{2}-x)\,dx.$$

12. Bestimmt man den Werth des Integrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\mu\theta \, d\theta$$

erst direct und nachher mittelst der Reihenentwickelung (Compendium d. h. Anal. S. 232.)

$$\cos\mu\theta = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}\sin^2\theta - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4\theta$$
$$-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6\theta - \cdots\cdots$$

so erhält man für $\mu = 2\lambda$

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi} = 1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\frac{\lambda^2}{2^2} - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\frac{\lambda^2}{3^2} - \cdots.$$

Die rechts stehende Reihe lässt sich in folgende zwei Theile zerlegen

$$1 - \frac{\lambda^2}{1^2} - \cdots - \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{(n-1)^2}\right)\frac{\lambda^2}{n^2}$$
$$-\left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right) S,$$
$$S = \frac{\lambda^2}{(n+1)^2} + \left(1-\frac{\lambda^2}{(n+1)^2}\right)\frac{\lambda^2}{(n+2)^2} + \cdots$$

und der erste Theil durch gewöhnliche Addition zusammenziehen; diess giebt

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi} = \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right)[1-\sigma_n\lambda^2],$$
$$\sigma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \left(1-\frac{\lambda^2}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{(n+2)^2} + \cdots.$$

Wählt man die ganze Zahl $n+1 > \lambda$, so ist σ_n positiv und kleiner als

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots.$$
$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots$$

d. i.

$$0 < \sigma_n < \frac{1}{n},$$

und es kann daher $\sigma_n = \frac{\varrho}{n}$ gesetzt werden, wo ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet. Nach diesen Erörterungen ist

$$\frac{\sin\lambda\pi}{1-\frac{\varrho\lambda^2}{n}} = \pi\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda^2}{n^2}\right);$$

für $n=\infty$ folgt hieraus das bekannte unendliche Product für den Sinus eines beliebigen Bogens.

13. Um das Integral

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi, \qquad a > b,$$

welches die Länge des Quadranten einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse angiebt, in eine Reihe zu entwickeln, setze man

$$a+b=\alpha, \qquad a-b=\beta, \qquad \frac{a-b}{a+b}=\lambda;$$

es wird dann

$$E = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta\cos 2\varphi+\beta^2},\ d\varphi$$

oder für $2\varphi = \omega$

$$E = \frac{\alpha}{4}\int_0^{\pi} \sqrt{1+2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\cdot d\omega.$$

Verwandelt man die Wurzel in eine nach Potenzen von λ fortgehende Reihe, so erhält man durch Integration der einzelnen Terme

$$E = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\left\{1+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{64}\lambda^4+\frac{1}{256}\lambda^6+\frac{25}{16384}\lambda^8+\cdots\right\}.$$

Diese Formel gewährt eine bequeme Rechnung, falls a nicht mehr als das Dreifache von b beträgt.

14. Bezeichnet man $\frac{b}{a}$ mit μ, so ist der Ellipsenquadrant

$$E = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\sqrt{1+\mu^2\tan^2\varphi}\cdot d\varphi;$$

innerhalb des Integrationsintervalles 0 und bis $\frac{1}{2}\pi$ bleibt $\mu \tan \varphi$ nicht immer < 1, daher lässt sich die im Integral vorkommende Wurzel nicht ohne Weiteres mittelst des Binomialtheoremes entwickeln, und daher giebt es auch für E keine Reihe von der Form $A_0 + A_1 \mu + A_2 \mu^2 +$ etc. Man betrachte desshalb erst den kleineren Ellipsenbogen

$$s = \int_0^{\vartheta} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

für welchen ϑ durch die Gleichung

$$\vartheta = \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}$$

bestimmt sein möge. Die Substitution

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \cot \psi$$

liefert folgende Transformation

$$s = \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a^2 b^2 \, d\psi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^3}},$$

und mit Rücksicht auf die leicht zu verificirende Gleichung

$$\int \frac{a^2 b^2 \, d\psi}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^3}}$$

$$= \int \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}}$$

findet man

$$s = \int_{\vartheta}^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi + a - b$$

oder, weil das Integral rechter Hand den Werth $E - s$ besitzt,

$$s - (E - s) = a - b.$$

Diese Gleichung hat den einfachen Sinn, dass

$$arc\, BP - arc\, AP = a - b$$

ist, wenn der Punkt P in Fig. 45 auf dieselbe Weise construirt wird wie in Fig. 55. Thl. I., S. 172.

Aus der vorigen Gleichung folgt

$$E = 2s - (a - b), \qquad s = a\int_0^{\vartheta} \cos\varphi \sqrt{1 + \mu^2 \tan^2\varphi} \cdot d\varphi$$

und mittelst der Substitution

$$\tan\varphi = \frac{t}{\sqrt{\mu}}$$

wird noch

$$s = a\mu \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \mu t^2}{(\mu + t^2)^3}}\, dt = a\left\{1 - \mu \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{(1 + \mu t^2)(\mu + t^2)}}\right\}.$$

Entwickelt man $(1 + \mu t^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze, so kommt man auf einzelne Integrale von der Form

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}\, dt}{\sqrt{\mu + t^2}},$$

welche sich leicht durch Recursionsformeln bestimmen lassen. Die gesammte Rechnungsvorschrift ist dann folgende

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{1 + \mu} - \mu l\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{\mu}}\right)\right\},$$

$$J_n = \frac{\sqrt{1 + \mu} - (2n - 1)\mu J_{n-1}}{2n},$$

$$s = a\left[1 - J_1\mu + \frac{1}{2} J_2\mu^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} J_3\mu^3 + \cdots\right],$$

$$E = 2s - a(1 - \mu).$$

Für $a = 10$, $b = 1$, $\mu = 0{,}1$ ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned}
J_1 &= 0{,}43097\,68680, & J_2 &= 0{,}22987\,8947,\\
J_3 &= 0{,}15564\,490, & J_4 &= 0{,}11748\,22,\\
J_5 &= 0{,}09430\,7, & J_6 &= 0{,}07876,\\
J_7 &= 0{,}0676, & J_8 &= 0{,}059,\\
s &= 9{,}57996\,7725, & E &= 10{,}15993\,545.
\end{aligned}$$

15. Unter der Voraussetzung eines beliebigen positiven p werde unter $\Gamma(p)$ folgende Function verstanden

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{p-1} dx$$

oder, wenn $x = e^{-z}$ gesetzt wird,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz.$$

Durch theilweise Integration findet man leicht

$$\int_0^\infty z^q e^{-z} dz = q \int_0^\infty z^{q-1} e^{-z} dz, \qquad q > 0$$

das ist

$$\Gamma(q+1) = q\,\Gamma(q)$$

und durch mehrmalige Anwendung der vorstehenden Formel

$$\Gamma(n+r) = r(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)\cdot\Gamma(r), \qquad r > 0.$$

Hiernach ist, wenn man von dem Falle $r = 1$, $\Gamma(1) = 1$ ausgeht

$$\Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n.$$

Weil ferner nach § 21., No. 12.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = \sqrt{\pi}$$

ist, so folgt für $r = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

In der ursprünglichen für $\Gamma(p)$ gegebenen Definition betrachte man nun $l\left(\frac{1}{x}\right) = -\,l x$ als den Grenzwerth von $n\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)$ für $n = \infty$; es ist dann

$$\Gamma(p) = Lim\left\{n^{p-1}\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^{p-1} dx\right\}$$

oder für $x = y^n$

$$\Gamma(p) = Lim\left\{n^p \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{p-1} dy\right\},$$

d. i. nach Formel 29. in § 19.

$$\Gamma(p) = Lim\left\{\frac{1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots n\cdot n^{p-1}}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}\right\}, \qquad n = \infty,$$

wofür man auch

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{1})^p}{1+\frac{1}{1}p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^p}{1+\frac{1}{2}p}\cdot\frac{(1+\frac{1}{3})^p}{1+\frac{1}{3}p}\cdots$$

schreiben kann. (Vergl. Thl. I., S. 210.).

Nach der vorhergehenden Formel findet man

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)$$

$$= Lim\left\{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{1}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\cdots\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}}\right\}$$

das ist

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{sin\,\lambda\pi}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Im speciellen Falle $\lambda = \frac{1}{2}$ ergiebt sich wie früher $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Setzt man $p = 1 + q$ und nimmt die Logarithmen, so erhält man leicht

$$l\,\Gamma(1+q) = Lim\left\{q\,l\,n - l\left(1+\frac{q}{1}\right) - l\left(1+\frac{q}{2}\right) - \cdots l\left(1+\frac{q}{n}\right)\right\}.$$

Unter der Voraussetzung $-1 < q < +1$ lassen sich die vorkommenden Logarithmen nach Potenzen von q entwickeln, wobei zur Abkürzung

$$Lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-l\,n\right) = C$$

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots = S_k, \qquad k > 1$$

sein möge; das Resultat ist dann

$$l\,\Gamma(1+q) = -Cq + \tfrac{1}{2}S_2q^2 - \tfrac{1}{3}S_3q^3 + \tfrac{1}{4}S_4q^4 - \cdots,$$
$$-1 < q < +1.$$

Hieraus erhellt die Möglichkeit, $l\,\Gamma(1+q)$ also auch $l\,\Gamma(q)$ mittelst einer gut convergirenden Reihe zu berechnen. Die Werthe von S_2, S_3, etc. sind

$S_2 = 1{,}64493\,40668$,	$S_3 = 1{,}20205\,69032$,
$S_4 = 1{,}08232\,32337$,	$S_5 = 1{,}03692\,77551$,
$S_6 = 1{,}01734\,30620$,	$S_7 = 1{,}00834\,92774$,
$S_8 = 1{,}00407\,73562$,	$S_9 = 1{,}00200\,83928$,
$S_{10} = 1{,}00099\,45751$,	$S_{11} = 1{,}00049\,41886$,
. . . .	. . . .

Die Constante C ergiebt sich aus der vorigen Gleichung für $q = \frac{1}{2}$, wo der Werth der linken Seite bekannt ist; man erhält

$$C = 0{,}57721\,56649.$$

Eine oft brauchbare kleine Tafel der Brigg'schen Logarithmen von $\Gamma(q)$ und $\Gamma(1+q)$ ist folgende

q	$\log \Gamma(q)$	$\log \Gamma(1+q)$
$\frac{1}{12}$	1,060 6762	0,981 4950 — 1
$\frac{2}{12}$	0,745 5679	0,967 4166 — 1
$\frac{3}{12}$	0,559 3811	0,957 3211 — 1
$\frac{4}{12}$	0,427 9627	0,950 8415 — 1
$\frac{5}{12}$	0,327 8812	0,947 6700 — 1
$\frac{6}{12}$	0,248 5749	0,947 5449 — 1
$\frac{7}{12}$	0,184 3249	0,950 2417 — 1
$\frac{8}{12}$	0,131 6565	0,955 5652 — 1
$\frac{9}{12}$	0,088 2838	0,963 3451 — 1
$\frac{10}{12}$	0,052 6120	0,973 4308 — 1
$\frac{11}{12}$	0,023 4774	0,985 6888 — 1

§ 23.

Summirung von Reihen mittelst bestimmter Integrale.

Wenn ein Ausdruck von der Form $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei, von m unabhängigen Grenzen α und β integrirt wird, so ist der Integralwerth im Allgemeinen eine neue Function von m, es besteht also eine Gleichung von der Form

$$\int_\alpha^\beta f(x, m)\,dx = \varphi(m).$$

Aus dieser folgt

$$\int_\alpha^\beta \{f(x, 0) + f(x, 1) + f(x, 2) + \cdots + f(x, n-1)\}\,dx$$
$$= \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n-1).$$

Hier kann es sich treffen, dass die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summirbar ist, und dann erhält man die Summe der Reihe $\varphi(0) + \varphi(1) +$ etc. durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, dessen Werth sich nicht selten auf anderem Wege finden lässt.

1. Durch Anwendung der Formel

$$\int_0^1 x^{k+m-1}\,dx = \frac{1}{k+m}, \qquad k+m>0,$$

erhält man

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{k+n-1}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{k+n-1}}{1+x}\,dx.$$

Zufolge des Umstandes, dass $\frac{1}{1+x}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, findet man

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+n} < \int_0^1 \frac{x^{k+n-1}}{1+x}\,dx < \frac{1}{k+n}$$

mithin für $n = \infty$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \cdots = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx$$

oder für $k = \frac{a}{b}$, $x = t^b$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \cdots = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt.$$

Bemerkenswerthe specielle Fälle hiervon sind

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots = l2,$$

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{16} + \cdots = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + l2\right),$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{17} + \cdots = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - l2\right),$$

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{21} + \cdots = \frac{\pi + l(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}},$$

$$\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{23} + \cdots = \frac{\pi - l(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}.$$

2. Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+6}-\frac{1}{k+3}$$
$$+\frac{1}{k+8}+\frac{1}{k+10}-\frac{1}{k+5}+\ldots\ldots$$

enthält dieselben Terme wie die vorhin summirte Reihe, nur ist die Anordnung hier in so fern eine verschiedene, als je zwei positive Terme und ein negativer Term aufeinander folgen. Betrachtet man zuerst die endliche Reihe

$$S_n=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+6}-\frac{1}{k+3}+\cdots$$
$$\cdots\cdot+\frac{1}{k+4n-4}+\frac{1}{k+4n-2}-\frac{1}{k+2n-1}$$

so erhält man mittelst der vorigen Methode

$$S_n=\int_0^1\left\{\frac{1-x^{4n}}{1-x^2}-\frac{x(1-x^{2n})}{1-x^2}\right\}x^{k-1}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1+x}+\int_0^1\frac{x^{2n+1}-x^{4n}}{1-x^2}\,x^{k-1}\,dx$$

oder wenn im zweiten Integrale $x^{2n}=y$ substituirt wird

$$S_n=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx+\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{y^{1+\frac{1}{2n}}-y^2}{n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)}\,y^{\frac{k}{2n}-1}\,dy.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n ergiebt sich die gesuchte Summe

$$\underset{\infty}{S}=\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx+\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{y-y^2}{l\left(\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{dy}{y};$$

das zweite Integral geht für $y=e^{-z}$ über in

$$\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-2z}}{z}\,dz=l2,$$

mithin ist

$$\underset{\infty}{S} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}l\,2$$

oder für $k = \frac{a}{b}$, $x = t^b$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+4b} + \frac{1}{a+6b} - \frac{1}{a+3b}$$

$$+ \frac{1}{a+8b} + \frac{1}{a+10b} - \frac{1}{a+5b} + \cdots$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt + \tfrac{1}{2}l\,2.$$

Die Summe der neuen Reihe ist also um $\frac{1}{2}l\,2$ grösser als die Summe der früheren Reihe. Z. B.

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{3}{2}l\,2^{*}),$$

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{11} + \cdots = \tfrac{1}{4}(\pi + l\,2).$$

3. Das so eben benutzte Verfahren dient allgemeiner zur Summirung derjenigen Reihe, welche aus der früheren Reihe

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \cdots$$

dadurch entsteht, dass man immer p positive und q negative Terme aufeinander folgen lässt. Betrachtet man zunächst die endliche, np positive und nq negative Terme zählende Reihe

---

*) Wenn es nur auf den Beweis ankommt, dass diese Reihe eine grössere Summe besitzt als $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} -$ etc., so genügt schon die Zusammenziehung je zwei positiver Terme.

In der so entstehenden Reihe

$$\frac{4}{1\cdot 3} - \frac{1}{2} + \frac{12}{5\cdot 7} - \frac{1}{4} + \frac{20}{9\cdot 17} - \frac{1}{6} + \cdots$$

ist nämlich

$$\frac{8n-4}{(4n-3)(4n-1)} > \frac{1}{2n} > \frac{8n+4}{(4n+1)(4n+3)}$$

d. h. für $n = 1, 2, 3$ etc. jeder Term grösser als der nachfolgende, mithin die Summe

$$> \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2} > 0,8 > (0,69\cdots = l\,2).$$

$$S_n = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{k+2p-2}$$

$$- \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} - \cdots - \frac{1}{k+2q-1}$$

$$+ \frac{1}{k+2p} + \frac{1}{k+2p+2} + \cdots + \frac{1}{k+4p-2}$$

$$- \frac{1}{k+2q+1} - \frac{1}{k+2q+3} - \cdots - \frac{1}{k+4q-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \frac{1}{k+(2n-2)p} + \frac{1}{k+(2n-2)p+2} + \cdots + \frac{1}{k+2np-2}$$

$$- \frac{1}{k+(2n-2)q+1} - \frac{1}{k+(2n-2)q+3} - \cdots - \frac{1}{k+2nq-1},$$

so findet man

$$S_n = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2nq+1} - x^{2np}}{1-x^2}\,x^{k-1}\,dx$$

und mittelst der früher angegebenen Transformationen

$$S_\infty = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qz} - e^{-pz}}{z}\,dz.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Satz: Wenn man in der sogenannten harmonischen Reihe

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \cdots$$

die Terme so umstellt, dass immer p positive und q negative Terme aufeinander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe um

$$\frac{1}{2b}\, l\left(\frac{p}{q}\right)$$

grösser als die Summe der ursprünglichen Reihe.

Beispielsweis seien erwähnt

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2} l 6,$$

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \cdots = \tfrac{1}{2} l\left(\tfrac{8}{3}\right).$$

4. Für ganze positive k und beliebige positive μ gilt die Formel (§ 19., No. 29.)

$$\frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k-1)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{\mu-1}dx$$

oder für $x=1-t$, $\mu=a+nb$

$$\frac{1}{(a+nb)(a+nb+1)(a+nb+2)\cdots(a+nb+k-1)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\int_0^1 t^{a+nb-1}(1-t)^{k-1}dt.$$

Multiplicirt man beiderseits mit z^n und addirt alle für $n=0$, 1, 2, 3, etc. entstehenden Gleichungen, so gelangt man zu der Reihensummirung

$$\frac{1}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)}+\frac{z}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$
$$+\frac{z^2}{(a+2b)(a+2b+1)\cdots(a+2b+k-1)}+\cdots\cdot\cdot$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\int_0^1\frac{t^{a-1}(1-t)^{k-1}}{1-zt^b}dt,$$

wobei b positiv und $z^2\leqq 1$ sein muss.

Hiernach ist z. B. für $a=1$, $b=1$, $k=3$,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{z^2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{z^3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$
$$=\frac{3}{4z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{(1-z)^2}{2z^3}l\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

für $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $k=3$,

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{z}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{z^2}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{z^3}{7\cdot 9\cdot 11}+\cdots$$
$$=\frac{1}{8z^2}\left\{\frac{(1-z)^2}{2\sqrt{z}}l\left(\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)+\tfrac{5}{3}z-1\right\}.$$

Anderweite specielle Fälle sind

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdot\;\cdot=l2-\tfrac{1}{2},$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\cdots=\tfrac{1}{2}(1-l2),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\cdots=\tfrac{3}{4}-l2,$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\cdots=\tfrac{1}{4}(\pi-3),$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\cdots=\tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-l3\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{10\cdot 11\cdot 12}+\cdots=\tfrac{1}{8}\pi-\tfrac{1}{2}l2,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}+\cdots=\tfrac{1}{6}\left(1+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)-\tfrac{1}{4}l3.$$

5. Nach der vorigen Methode ergiebt sich folgender allgemeinere Satz: Wenn eine Reihensummirung von der Form

$$C_0+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots=F(z)$$

bekannt ist, so gilt die Formel

$$\frac{C_0}{a(a+1)\cdots(a+k-1)}+\frac{C_1z}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$
$$+\frac{C_2z^2}{(a+2b)(a+2b+1)\cdots(a+2b+k-1)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{k-1}F(zt^b)\,dt,$$

worin b positiv sein muss.

6. Setzt man in der Formel

$$\frac{1}{a^2}=\int_0^\infty ze^{-az}\,dz$$

der Reihe nach $a=1, 2, 3, \cdots p$, addirt alle entstehenden Gleichungen und benutzt die Substitution $1-e^{-z}=\zeta$, so erhält man

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}=\int_0^1\frac{1-(1-\zeta)^p}{\zeta}\,l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)d\zeta.$$

Durch Entwickelung des Logarithmus und Integration der einzelnen Terme wird hieraus

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}$$
$$=C-\frac{c_1}{p+1}-\frac{c_2}{(p+1)(p+2)}-\frac{c_3}{(p+1)(p+2)(p+3)}-\cdots.$$

wobei die Constanten folgende Werthe haben

$$C = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \textit{ in inf.},$$

$$c_1 = 1, \; c_2 = \frac{1}{2}, \; c_3 = \frac{2}{3}, \cdots c_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{n}, \; \cdots.$$

Uebrigens kann man die Constante C mittelst der vorigen Gleichung selber bestimmen, indem man für p eine nicht zu kleine Zahl (etwa 20) wählt und die linke Seite sowie die Summe aller negativen Terme rechter Hand numerisch berechnet; es folgt dann

$$C = 1{,}64493\,40668.$$

Obschon die obige Gleichung nur als Transformation einer endlichen Reihe in eine unendliche gelten kann, so leistet sie doch bei grossen p vollkommen die Dienste einer eigentlichen Summenformel; z. B. für $p = 99$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{99^2} = 1{,}634\,8839.$$

7. Nach demselben Verfahren lässt sich aus der Integralformel

$$\frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^\infty z^2 e^{-az} \, dz$$

die folgende Summenformel herleiten

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{p^3}$$

$$= C - \frac{c_2}{(p+1)(p+2)} - \frac{c_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \cdots\cdots$$

worin die Constanten folgende Werthe haben

$$C = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots = 1{,}20205\,69032,$$

$$c_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

8. Die vorige Methode bedarf einer kleinen Modification, wenn man sie auf die Gleichung

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-az} \, dz$$

anwenden will. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-pz}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

wobei das Integral in folgende drei Theile zerlegt werden kann

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}\right\} e^{-z}\,dz$$

$$+\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-pz}}{z}\,dz-\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}\right\} e^{-pz}\,dz.$$

Der Werth des ersten Integrales hängt nicht von p ab und ist daher eine numerische Constante, welche C heissen möge; der Werth des zweiten Integrales beträgt lp; im dritten Integrale substituiren wir $1-e^{-z}=\zeta$ und erhalten

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

$$=C+lp-\int_0^1 \left\{\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\right\}(1-\zeta)^{p-1}\,d\zeta.$$

Hier lässt sich die in § 22., No. 10. abgeleitete Reihenentwickelung benutzen und hierdurch erhält man für die rechte Seite

$$C+lp-\frac{1}{1}\cdot\frac{J_1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{J_2}{p(p+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{J_3}{p(p+1)(p+2)}-\cdots.$$

Durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{p}$ wird schliesslich

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdot+\frac{1}{p}$$

$$=C+lp+\frac{1}{2p}-\frac{a_2}{p(p+1)}-\frac{a_3}{p(p+1)(p+2)}-\cdots\cdot,$$

worin die Constanten folgende Werthe haben

$$C=0{,}57721\,56649,$$

$$a_2=\frac{1}{12},\quad a_3=\frac{1}{12},\quad a_4=\frac{19}{80},\quad a_5=\frac{9}{20},\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{n}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)\,dx.$$

Beispielweis findet sich

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000}=7{,}4854\,7086,$$

woraus ersichtlich ist, mit welcher Langsamkeit die harmonische Reihe divergirt.

9. Von der Integralformel

$$l b=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-bz}}{z}\,dz$$

ausgehend erhält man zunächst

$$l1+l2+\cdots+l(p-1)=\int_0^\infty\left\{(p-1)\,e^{-z}-\frac{e^{-z}-e^{-pz}}{1-e^{-z}}\right\}\frac{dz}{z}$$

oder hiermit identisch

$$l[1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)]$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}e^{-z}-\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}}\right\}\frac{dz}{z}+\left(p-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty(e^{-z}-e^{-pz})\frac{dz}{z}$$

$$+\int_0^\infty\left\{pe^{-pz}-\frac{1-e^{-pz}}{z}\right\}\frac{dz}{z}+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-z}}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right\}\frac{1}{z}e^{-pz}\,dz.$$

Der Werth des ersten Integrales ist eine von p unabhängige numerische Constante, welche C heissen möge; das zweite Integral hat den Werth lp; für das dritte ergiebt sich aus der unbestimmten Integralformel

$$\int\left\{pe^{-pz}-\frac{1-e^{-pz}}{z}\right\}\frac{dz}{z}=\frac{1-e^{-pz}}{z}$$

der Werth $-p$; im vierten setzen wir $1-e^{-z}=\zeta$ und erhalten zusammen

$$l[1\cdot 2\cdots(p-1)]=C+(p-\tfrac{1}{2})\,lp-p$$

$$-\int_0^1\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\right\}\frac{(1-\zeta)^{p-1}}{l\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}\,d\zeta.$$

Hier lässt sich die in § 22. am Ende von No. 11. erwähnte

Entwickelung benutzen; sie giebt, wenn noch beiderseits lp addirt wird,

$$l(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p)$$
$$= C + (p + \tfrac{1}{2})\,lp - p - \frac{b_1}{p} - \frac{b_2}{p(p+1)} - \cdots\cdots,$$

worin die Constanten folgende Werthe haben

$$b_1 = -\tfrac{1}{12}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \tfrac{1}{360}, \qquad b_4 = \tfrac{1}{120}, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{n}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)\cdot(\tfrac{1}{2}-x)\,dx$$

Den Werth von C kann man entweder aus der obigen Gleichung oder auf dieselbe Weise wie S. 437., Thl. I. d. Compend. d. h. A. bestimmen; er ist $\frac{1}{2}l(2\pi)$.

Multiplicirt man beiderseits mit dem Modulus M der gewöhnlichen Logarithmen, so erhält man

$$log\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p) = \tfrac{1}{2}\,log\,(2\pi)$$
$$+ (p + \tfrac{1}{2})\,log\,p - M\left\{p - \frac{1}{12p} + \frac{1}{360\,p(p+1)(p+2)} + \cdots\right\}.$$

Beispielweis ergiebt sich für $p = 1000$

$$log\,(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1000) = 2567{,}604644,$$

woraus folgt, dass $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1000$ eine Zahl von 2568 Ziffern ausmacht, deren acht höchste Ziffern sind 40238726.