universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel VI. Die Doppelintegrale und ihre geometrischen Anwendungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel VI.

Die Doppelintegrale und ihre geometrischen Anwendungen.

§ 24.

Allgemeine Formeln und Regeln.

1. Seiner ursprünglichen Bedeutung nach ist das bestimmte Doppelintegral

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy$$

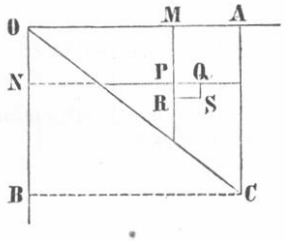
der Grenzwerth einer Doppelsumme deren einzelne Summanden die Form $f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y$ haben; die Integrationsgrenzen bestimmen hierbei den Spielraum, welcher den unabhängigen Variabelen x und y gegönnt ist. Um diess zu veranschaulichen, kann man immer x und y als rechtwinklige Coordinaten eines willkührlichen Punktes der xy-Ebene betrachten und den erwähnten Spielraum mittelst der Bedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y$$

geometrisch construiren.

Handelt es sich z. B. um das Doppelintegral

Fig. 45.



$$V = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} f(x, y)\, dx\, dy,$$

so zeigen die Bedingungen $0 \leqq x \leqq a$ und $0 \leqq y \leqq \frac{b}{a}x$, dass der Punkt xy die Peripherie des aus den Katheten $OA = a$ und $AC = b$ (Fig. 45.) gebildeten rechtwinkligen Dreiecks OAC nicht überschreiten darf. Zerlegt man die

Dreiecksfläche durch Parallelen zur x-Achse und durch Parallelen zur y-Achse in Rechtecke wie z. B. $PQRS$, so ist $OM = x$, $ON = y$, $PQ = \Delta x$, $PR = \Delta y$, mithin $f(x, y)\ \Delta x\ \Delta y$ einer von den Summanden der Doppelsumme. Die ganze Schaar der Summanden wird auf dieselbe Weise gebildet, indem man statt des Punktes P der Reihe nach die Ecken aller innerhalb des Dreiecks liegender Rechtecke nimmt und die Rechteckseiten als die Zunahmen von x und y ansieht. Schliesslich ist V der Grenzwerth, gegen welchen die Doppelsumme $\Sigma\Sigma f(x, y)\ \Delta x\ \Delta y$ convergirt, sobald die Abstände der Parallelen d. h. alle Δx und Δy unendlich abnehmen.

Als weitere Beispiele für die Interpretation der Integrationsgrenzen mögen folgende dienen. Ist

$$x_0 = 0, \quad X = a; \qquad y_0 = 0, \quad Y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

so bleibt der Punkt xy innerhalb eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b vom Coordinatenanfange aus auf den Coordinatenachsen abgeschnitten sind.

Die Integrationsgrenzen

$$x_0 = 0, \quad X = 2a; \qquad y_0 = 0, \quad Y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

bedeuten, dass der Spielraum des Punktes xy eine Halbellipse ist, deren Scheitel im Coordinatenanfange liegt.

Den Integrationsgrenzen

$$x_0 = -a, \ X = +a; \quad y_0 = -b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad Y = +b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

entspricht eine volle Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt. Die Integrationen beziehen sich dann auf alle positiven und negativen x und y, welche der Bedingung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$

Genüge leisten.

2. Wenn sich die auf y bezügliche Integration, bei welcher x als Constante anzusehen ist, ausführen lässt, so kommt das Doppelintegral sofort auf ein einfaches Integral zurück, dessen Werth dann einer weiteren Untersuchung bedarf.

Mit Hülfe der Integralformel

$$\int \sqrt{k^2 - y^2} \cdot dy = \tfrac{1}{2}\left(y\sqrt{k^2 - y^2} + k^2 \arcsin\frac{y}{k}\right)$$

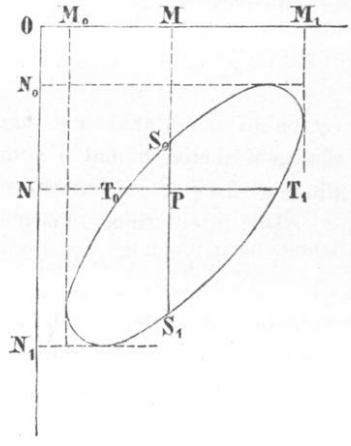
findet man z. B.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ (1-x)\sqrt{x} + (1-x^2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right\} dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{15} + \tfrac{3}{4}\tfrac{2}{5}\right] = \tfrac{2}{4}\tfrac{2}{5}.$$

3. Die Reihenfolge der Integrationen lässt sich umkehren, wenn man die Integrationsgrenzen auf die gehörige Weise ändert. Besteht der Spielraum für x und y aus einer geschlossenen ebenen Fläche, deren Peripherie von einer Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann (Fig. 46.), so bestimmen sich die Integrationsgrenzen für $OM = x$ und $ON = y$ auf folgende Weise. Man integrirt entweder zuerst in Beziehung auf y und dann nach x; in diesem Falle geht y von $MS_0 = y_0$ bis $MS_1 = Y_1$, nachher x von $OM_0 = x_0$ bis $OM_1 = X$. Wählt man dagegen die umgekehrte Anordnung der Integrationen, so ist $NP = x$ bis zu den Durchschnitten T_0 und T_1 mit der gegebenen Peripherie zu verlängern und $NT_0 = \xi_0$, $NT_1 = \Xi$ sind die Grenzen für x; die Grenzen für y sind nachher der kleinste und grösste Werth des y, nämlich $ON_0 = \eta_0$ und $ON_1 = \Upsilon$.

Fig. 46.



Diess giebt

$$\int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\eta_0}^{\Upsilon} \int_{\xi_0}^{\Xi} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Am einfachsten wird die Sache, wenn der Integrationsbereich aus einem Rechtecke besteht, dessen Seiten parallel zu den Coordinatenachsen liegen; es ist dann

$$\int_{a_0}^{a} \int_{b_0}^{b} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{b_0}^{b} \int_{a_0}^{a} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Fernere Beispiele sind

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^b \int_{\frac{a}{b}y}^{a} f(x, y)\, dy\, dx,$$

$$\int_0^{2a}\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_0^{b}\int_{a-a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{a+a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Uebrigens ist zu beachten, dass solche Umänderungen nur dann unzweifelhaft gelten, wenn die Function $f(x,\ y)$ innerhalb des Integrationsbereiches endlich und stetig bleibt.

4. Will man in einem Doppelintegrale statt einer der beiden Variabelen x und y eine neue Variabele einführen, so hat man ebenso wie bei einfachen Integralen zu verfahren.

Mittelst der Substitution

$$y = y_0 + (Y - y_0)t$$

erhält man z. B.

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{X}\int_{0}^{1} (Y - y_0)\,f(x,\ y_0 + [Y - y_0]\,t)\,dx\,dt;$$

was häufig sehr vortheilhaft ist.

Mittelst desselben Verfahrens lassen sich auch zwei neue Variabele nach einander einführen. Setzt man z. B. in

$$V = \int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy$$

zuerst $y = b\eta$, so geht das Integral über in

$$V = b\int_{-a}^{+a}\int_{-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,\ b\eta)\,dx\,d\eta$$

und durch Substitution von $x = a\xi$ erhält man schliesslich bei Zusammenstellung des ersten und letzten Werthes von V

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}^{+b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,\ y)\,dx\,dy = ab\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} f(a\xi,\ b\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Hiermit ist das Integral, dessen Integrationsbereich eine Ellipse bildete, auf ein Integral mit kreisförmigem Integrationsbereich zurückgeführt.

Die nämlichen Substitutionen geben

$$\int_0^{2a}\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\,dx\,dy = ab\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2\xi-\xi^2}} f(a\xi, b\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

was einer ähnlichen Reduction wie vorhin entspricht.

Wenn in dem Integrale

$$V = \int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

dessen Grenzen nachher untersucht werden sollen, statt x und y die neuen Variabelen r und θ mittelst der Gleichungen

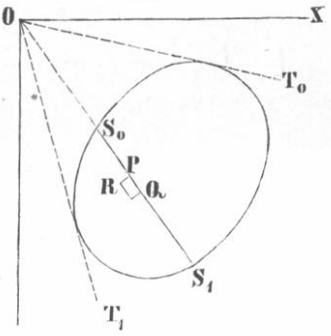
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

einzuführen sind, so substituire man erst $y = x\tan\theta$, nachher $x = r\cos\theta$; diess giebt

$$\begin{aligned} V &= \int\int f(x, x\tan\theta)\,dx \cdot x\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int\int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\,dr \cdot r\cos\theta\,\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int\int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr. \end{aligned}$$

Diese Transformation hat den Sinn, dass man sich den Spielraum der x und y nicht mehr in Rechtecke sondern in Vierecke zerlegt denkt, deren jedes von zwei concentrischen Kreisbögen und zwei Radien begrenzt wird. An die Stelle der früheren Rechtecksfläche $dx\,dy$ tritt nun eine unendlich kleine Fläche, die als ein aus den Seiten $PQ = dr$ und $PR = r\,d\theta$ gebildetes Rechteck gelten kann (Fig. 47.). Die Integrationsgrenzen für r und θ erhält man dadurch, dass man erst r bis zu seinen Durchschnitten S_0 und S_1 mit der Peripherie des Integrationsbereiches verlängert und nachher dem θ seinen grössten und kleinsten Werth giebt. Für $OS_0 = r_0$, $OS_1 = R$, $\angle XOT_0 = \theta_0$, $\angle XOT_1 = \Theta$ ist nun

Fig. 47.



$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\Theta}\int_{r_0}^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Als Beispiele eines solchen Ueberganges von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten mögen dienen

$$\int_0^c \int_0^{\sqrt{c^2-x^2}} f(x,\ y)\ dx\ dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^c f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ r\ d\theta\ dr,$$

$$\int_0^{2c} \int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,\ y)\ dx\ dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2c\cos\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ r\ d\theta\ dr.$$

Das letzte Integral kann man auch so transformiren, dass man erst $x = x_1 - c$ und nachher $x_1 = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ setzt, was einen leicht erkennbaren geometrischen Sinn hat; man erkält

$$\int_0^{2c} \int_0^{\sqrt{2cx-x^2}} f(x,\ y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi} \int_0^{c} f(r\cos\omega - c,\ r\sin\omega)\ r\ d\omega\ dr.$$

Wendet man erst die Substitutionen $x = a\xi$, $y = b\eta$ an und geht dann zu Polarcoordinaten über, so gelangt man zu folgenden allgemeinen Transformationen

$$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,\ y)\ dx\ dy = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta)\ r\ d\theta\ dr,$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{b\sqrt{2\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} f(x,\ y)\ dx\ dy = ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\cos\theta} f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta)\ r\ d\theta\ dr$$

$$= ab \int_0^{\pi} \int_0^1 f(ar\cos\omega - a,\ br\sin\omega)\ r\ d\omega\ dr.$$

Um ganz allgemein statt x und y zwei neue Variabele s und t einzuführen, welche mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(s,\ t), \qquad y = \psi(s,\ t)$$

verbunden sind, hat man folgende Formel anzuwenden

$$\int\int f(x,\ y)\ dx\ dy$$

$$= \int\int f[\varphi(s,\ t),\ \psi(s,\ t)] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial s}\right) ds\ dt.$$

Die für s und t geltenden Integrationsgrenzen müssen jederzeit durch eine besondere Untersuchung ermittelt werden.

§ 25.

Cubaturen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Coordinaten.

In der Horizontalebene xy sei durch gerade oder krumme Linien eine geschlossene Figur begrenzt, und durch alle Punkte ihrer Peripherie mögen Senkrechte zur Ebene xy gelegt sein; wird nun der so entstandene Cylinder von einer durch die Gleichung $z = f(x, y)$ bestimmten Fläche geschnitten, so entsteht ein Cylindervolumen, dessen Basis jene ebene Figur, und dessen obere Begrenzung von der letzterwähnten Fläche gebildet ist. Ferner kann das Cylindervolumen als Summe einer unendlich grossen Menge prismatischer Volumenelemente angesehen werden, von denen irgend eines den Inhalt $z\,dx\,dy$ besitzt, falls man sich die Cylinderbasis in unendlich kleine Rechtecke zerlegt denkt, deren Seiten parallel zu den Achsen der x und y liegen. Hiernach ist das gesuchte Volumen

$$V = \int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

wobei die Cylinderbasis den Integrationsbereich für x und y bildet.

Wenn $z = f(x, y)$ innerhalb des ganzen Integrationsbereiches negativ ist, so wird auch V negativ; entgegengesetzte Vorzeichen von V bedeuten demgemäss entgegengesetzte Lagen. Im Fall die Fläche theils über theils unter der xy-Ebene liegt, besteht das Volumen aus einem positiven und einem negativen Theile; die obige Formel giebt dann die algebraische Summe der beiden Theile. Um die arithmetische Summe zu erhalten, muss man jeden Theil einzeln berechnen und deren absolute Werthe addiren.

Beispiel 1. Die Cylinderbasis sei wie in Fig. 45. ein aus den Katheten $OA = a$, $AC = b$ construirtes rechtwinkliges Dreieck, die obere Begrenzungsfläche ein Paraboloid mit der Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}(Ax^2 + By^2);$$

für das Volumen, welches V_a heissen möge, ergiebt sich dann

$$V_a = \tfrac{1}{2}\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} (Ax^2 + By^2)\,dx\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^a \left\{ Ax^2 \cdot \frac{b}{a}x + \tfrac{1}{3}B\frac{b^3}{a^3}x^3 \right\} dx = \tfrac{1}{8}ab(Aa^2 + \tfrac{1}{3}Bb^2).$$

Nimmt man dagegen als Basis das rechtwinklige Dreieck aus den Katheten $OB = b$, $BC = a$, so erhält man

$$V_b = \tfrac{1}{8} ab(\tfrac{1}{3} Aa^2 + Bb^2).$$

Die Summe beider Volumina giebt den Inhalt des Parallelepipedes über dem Rechtecke $OACBO$ nämlich

$$V = \tfrac{1}{6} ab(Aa^2 + Bb^2) = \tfrac{1}{3} abc,$$

wo c das zu $x = a$ und $y = b$ gehörende z bedeutet. Dasselbe Resultat findet sich direct aus

$$V = \tfrac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (Ax^2 + By^2)\, dx\, dy.$$

2. Die Basis des gesuchten Volumens werde von den positiven Theilen der beiden Coordinatenachsen und von einer Parabel eingeschlossen, welche auf der x-Achse die Strecke $OA = a$, auf der y-Achse die Strecke $OB = b$ abschneidet, deren Achse die y-Achse und deren Scheitel B ist; die begrenzende Fläche sei dieselbe wie vorhin. Das Volumen über AOB beträgt dann

$$V = \tfrac{1}{105} ab\,(7Aa^2 + 8Bb^2).$$

3. Wird die vorige Aufgabe dahin modificirt, dass die Parabelachse mit der x-Achse und der Scheitel mit A zusammenfällt, so findet sich

$$V = \tfrac{1}{105} ab\,(8Aa^2 + 7Bb^2).$$

4. In der Horizontalebene sei eine Parabel gezeichnet, welche die x-Achse im Punkte A, die y-Achse im Punkte B berührt und im Uebrigen zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen enthalten ist; die dreieckige Fläche OAB werde als Basis des Volumens gewonnen, dessen obere Begrenzung wieder das vorige Paraboloid sein möge. Für $OA = a$, $OB = b$ ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{168} ab\,(Aa^2 + Bb^2) = \tfrac{1}{84} abc,$$

wo c dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 1.

5. Die Basis des Volumens sei eine aus den Halbachsen a und b construirte Ellipse, deren grosse Achse $2a$ in die x-Achse fällt und deren Mittelpunkt die Coordinaten a und 0 besitzt; die Begrenzungsfläche sei das vorige Paraboloid; es ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{8} \pi ab\,(5Aa^2 + Bb^2).$$

6. Die Basis des Volumens sei von den positiven Theilen der Coordinatenachsen und ausserdem von derjenigen Curve begrenzt, deren Gleichung ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1;$$

die Begrenzungsfläche sei das vorige Paraboloid. Beachtet man, dass hier

$$Y = b\sqrt[4]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}$$

ist, so erhält man nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \frac{b}{2a^3}\int_0^a \left\{Aa^2x^2 + \tfrac{1}{3}Bb^2\sqrt{a^4 - x^4}\right\}\sqrt[4]{a^4 - x^4}\cdot dx.$$

Durch Substitution von

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a^4 - x^4}} = t \text{ oder } x = \frac{at}{\sqrt[4]{1 + t^4}}$$

geht die vorige Gleichung über in

$$V = \tfrac{1}{2}ab\left\{Aa^2\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^4)^2} + \tfrac{1}{3}Bb^2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^4)^2}\right\},$$

oder, wenn c dasselbe wie in No. 1. bedeutet,

$$V = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}abc.$$

7. Ein elliptischer Kegel, dessen Gleichung

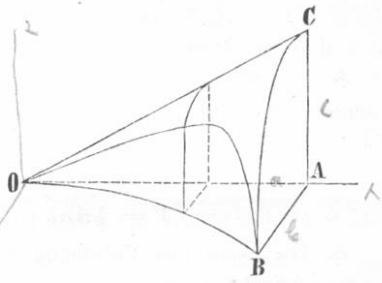
$$z^2 = Mx^2 - Ny^2$$

sein möge, wird von einem verticalen, durch die Gleichung

$$ky = x^2$$

bestimmten parabolischen Cylinder geschnitten; man verlangt das Volumen desjenigen Körpers, welcher von den positiven Theilen der Coordinatenebenen xy und xz, von den beiden krummen Flächen und ausserdem von einer Ebene begrenzt wird, die parallel zur Ebene yz durch den Schnittpunkt der Horizontalspuren beider Flächen geht. (Fig. 48.)

Fig. 48.



Sind $OA = a$ und $AB = b$ die Coordinaten des Spurendurchschnittes B und wird $AC = c$ gesetzt, so ist

$$V = \int_0^a \int_0^{b\left(\frac{x}{a}\right)^2} c \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot dx\, dy.$$

Nach Ausführung der ersten Integration substituire man $x = a\xi$; es wird dann

$$V = \tfrac{1}{2} abc \left\{ \int_0^1 \xi^3 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot d\xi + \int_0^1 \xi^2 \arcsin \xi \, d\xi \right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn K das Volumen des Kegeloctanten $OABC$ bezeichnet,

$$K - V = \tfrac{2}{45} abc.$$

8. In der vorigen Aufgabe ersetze man die Parabel OB durch eine semicubische Parabel, deren Gleichung von der Form

$$ky^2 = x^3$$

sein möge; dann ergiebt sich, wenn nach Ausführung der ersten Integration $x = a\xi^2$ substituirt wird,

$$V = abc \left\{ \int_0^1 \xi^6 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot d\xi + \int_0^1 \xi^5 \arcsin \xi \, d\xi \right\} = \tfrac{5}{64} K.$$

9. Nimmt man in der vorigen Aufgabe statt der Basis OAB den Quadranten der schleifenförmigen, durch die Gleichung

$$a^4 y^2 = b^2 x^2 (a^2 - x^2)$$

bestimmten Curve, so erhält man

$$V = \tfrac{8}{45} abc.$$

10. Der in No. 2. erwähnte parabolische Cylinder werde von einem durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

bestimmten Ellipsoide geschnitten; das Cylindervolumen ist dann

$$V = \tfrac{22}{45} abc.$$

11. Wenn der in No. 3. erwähnte parabolische Cylinder von

demselben Ellipsoide wie vorhin geschnitten wird, so ist das Cylindervolumen von derselben Grösse wie in No. 10.

12. Aus den Halbachsen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}b$ sei eine Halbellipse construirt, deren grosse Achse a mit der gleichnamigen Halbachse des vorigen Ellipsoides zusammenfällt; wird nun diese Halbellipse als Basis eines cylindrischen Volumens V, und das Ellipsoid als obere Begrenzungsfläche genommen, so ist, wenn E das Volumen des Ellipsoidoctanten bezeichnet,

$$E - V = \tfrac{2}{9}\, a\, b\, c.$$

13. Als Basis werde der zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen liegende Quadrant der in No. 9. erwähnten schleifenförmigen Curve genommen; die obere Begrenzungsfläche sei das vorige Ellipsoid; es ist dann

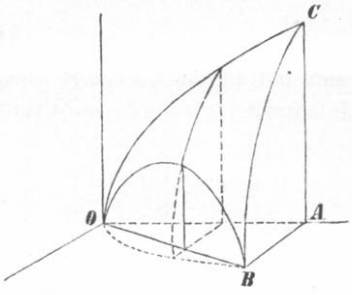
$$E - V = \tfrac{1}{4}\tfrac{3}{5}\, a\, b\, c.$$

14. In dem elliptischen Paraboloide, dessen Gleichung

$$x = My^2 + Nz^2$$

sein möge, ist am Ende der Strecke $OA = a$ ein zur Paraboloidachse senkrechter Querschnitt ABC (Fig. 49.) und durch OB eine auf der xy-Ebene senkrechte Ebene gelegt; man sucht das Volumen, welches von den Ebenen OAB, OAC, ABC, der genannten Verticalebene und dem Paraboloide begrenzt wird.

Fig. 49.



Man kann hier ebensowohl

$$V = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^a \int_0^{\sqrt{Ma}} \sqrt{x - My^2}\cdot dx\, dy$$

als bei umgekehrter Anordnung der Integrationen

$$V = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}} \int_{\sqrt{My}}^{a} \sqrt{x - My^2}\cdot dy\, dx$$

setzen, wobei in die Augen fällt, dass die zweite Form weit bequemer als die erste ist. Man erhält

$$V = \frac{2}{3\sqrt{N}} \left\{ \int_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}} \sqrt{(a - My^2)^3} \cdot dy - \int_0^{\sqrt{\frac{a}{M}}} \sqrt{(\sqrt{Ma} \cdot y - My^2)^3} \cdot dy \right\}$$

oder, wenn im ersten Integrale $y = \sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \sin\varphi$, und im zweiten $y = \sqrt{\frac{a}{M}} \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\psi$ gesetzt wird,

$$V = \frac{2a^2}{3\sqrt{MN}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\varphi \, d\varphi - \tfrac{1}{16} \int_0^{\pi} \sin^4\psi \, d\psi \right\} = \frac{7\pi a^2}{64\sqrt{MN}} .$$

Für $AB = b$, $AC = c$ hat man auch

$$V = \tfrac{7}{64}\pi abc.$$

15. Ein durch die Gleichung

$$2x = \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

bestimmtes elliptisches Paraboloid werde von einem verticalen elliptischen Cylinder geschnitten, dessen Horizontalspur die Gleichung

$$y^2 = 2bx - \frac{b}{a} x^2$$

also im Scheitel dieselbe Krümmung besitzt, wie die Horizontalspur der Fläche; man verlangt das Volumen, welches die von $x = 0$ bis $x = 2a$ reichende Halbellipse zur Basis und das Paraboloid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Integrirt man zuerst in Beziehung auf x und beachtet, dass der Ausdruck

$$2ab + 2\sqrt{ab(ab - y^2)} - y^2$$

ein vollständiges Quadrat ist, so erhält man

$$V = \tfrac{5}{8}\pi a^2 \sqrt{bc}.$$

16. Die obere Begrenzungsfläche eines Volumens sei wieder das vorige Paraboloid, dagegen die Basis ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt A auf der x-Achse in der Entfernung $OA = a$ liegt, und dessen Peripherie die Horizontalspur des Paraboloides berührt.

Mittelst der Bemerkung, dass

$$2ab - y^2 + 2b\sqrt{2ab - b^2 - y^2}$$

ein vollständiges Quadrat ausmacht, findet sich

$$V = \tfrac{1}{8}\pi(2a - b)(2a + 3b)\sqrt{bc}.$$

17. Ueber dem von den positiven Theilen der Coordinatenachsen eingeschlossenen Quadranten der Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

stehe ein Cylindervolumen, welches durch eine aus dem Coordinatenanfange mit dem Radius a construirte Kugelfläche begrenzt wird; man sucht die Grösse jenes Volumens.

In rechtwinkligen Coordinaten wäre

$$V = \int_0^a \int_0^Y \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \cdot dx\, dy,$$

wobei Y die reelle positive Wurzel der Lemniscatengleichung bedeutet; einfacher hat man in Polarcoordinaten

$$V = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\, d\theta\, dr = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{4\sqrt{2} - 5}{9}\right) a^3.$$

18. Verallgemeinert man die vorige Aufgabe dahin, dass an die Stelle der Lemniscate die Fusspunktcurve einer aus den Halbachsen a und $b < a$ construirten Hyperbel gesetzt wird, so folgt

$$V = \tfrac{1}{3}a^3 \arctan\frac{a}{b} - \tfrac{1}{9}\left\{2\sqrt{(a^2 + b^2)^3} - (3a^2 + 2b^2)\,b\right\}.$$

19. In der Horizontalebene sei zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen der Quadrant von der Fusspunktcurve einer aus den Halbachsen a und $b < a$ construirten Ellipse als Basis eines Cylinders genommen, welcher oberhalb durch das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

begrenzt wird; man sucht den Rest, welcher übrig bleibt, wenn jenes Cylindervolumen vom Ellipsoidoctanten weggenommen wird.

Der fragliche Rest beträgt

$$\tfrac{2}{9} \cdot \frac{c\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}{a}.$$

20. Das vorige Rotationsellipsoid, dessen Horizontalspur ein

mit dem Radius a beschriebener Kreis ist, werde zur oberen Begrenzungsfläche genommen; in der Horizontalebene sei durch die Gleichung $R = b\theta$ eine Archimedische Spirale bestimmt, welche den erwähnten Kreis im Punkte D durchschneidet, und es werde nun als Volumenbasis die dreieckige Fläche zwischen dem positiven Theile der x-Achse, dem abgeschnittenen Kreisbogen und dem Spiralbogen OD gewählt.

Das gesuchte Volumen ist

$$V = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 c}{b} .$$

21. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Archimedischen Spirale die parabolische Spirale treten, deren Gleichung $R = b\sqrt{\theta}$ ist, so erhält man

$$V = \frac{2}{15} \cdot \frac{a^4 c}{b^2} .$$

22. Ein aus den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ construirtes Ellipsoid werde von einer Ebene geschnitten, welche die z-Achse in sich enthält und mit der Ebene AOC den Winkel γ einschliesst; der Punkt, in welchem die geradlinige Horizontalspur dieser Ebene den Ellipsenquadranten AB trifft, heisse J, seine Abscisse $OH = h$; man sucht den Inhalt V_1 des über dem Ellipsensector AOJ stehenden Ellipsoidsectors.

Für $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ erhält man

$$V_1 = c \int_0^{\gamma} \int_0^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) r^2} \cdot r\, d\theta\, dr ,$$

wobei die obere Integrationsgrenze R durch die Formel

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

bestimmt ist; die Ausführung der Integrationen giebt

$$V_1 = \tfrac{1}{3}\, a\, b\, c \cdot \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\gamma\right) = \tfrac{1}{3}\, a\, b\, c \cdot \arccos\frac{h}{a} .$$

Subtrahirt man hiervon den über dem Ellipsensegmente AHJ stehenden Theil des Ellipsoides, nämlich

$$V_2 = \frac{\pi b c}{4 a^2} \int_h^a (a^2 - x^2)\, dx,$$

und setzt zur Abkürzung $\frac{h}{a} = \lambda$, so erhält man den über dem Dreiecke OHJ stehenden Theil des Ellipsoides

$$V_3 = [\tfrac{1}{4}\pi(\lambda - \tfrac{1}{3}\lambda^3) - \tfrac{1}{3} arcsin\, \lambda]\, a b c.$$

Derselbe erreicht sein Maximum für

$$\lambda = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

23. Das vorige dreiachsige Ellipsoid werde von einem verticalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse die z-Achse, und dessen Radius die Halbachse $b < a$ ist; man sucht das über dem Kreisquadranten stehende Cylindervolumen, welches das genannte Ellipsoid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad s^2 = \left(\frac{cos\,\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{sin\,\theta}{b}\right)^2,$$

so ist in Polarcoordinaten

$$V = c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^b \sqrt{1 - s^2 r^2} \cdot r\, d\theta\, dr = \tfrac{1}{3} b^2 c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon\, cos\,\theta} + \varepsilon\, cos\,\theta\right) d\theta$$

und durch Einführung eines Hülfswinkels γ

$$V = \tfrac{1}{6} a b c\, (\gamma + sin\,\gamma), \qquad sin\, \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{b}{a}.$$

24. In der xy-Ebene sei ein Halbkreis construirt, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, und dessen Peripherie sowohl die y-Achse als die Horizontalspur des vorigen Ellipsoides berührt; man sucht das Volumen des verticalen Halbcylinders, welcher jenen Halbkreis zur Basis und das genannte Ellipsoid zur oberen Begrenzungsfläche hat.

Werden die vorigen Abkürzungen wieder benutzt, so ergiebt sich in Polarcoordinaten nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{1}{3} c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \sqrt{(1 - 4\varepsilon^2 b^2 s^2\, cos^2\theta)^3}}{s^2}\, d\theta$$

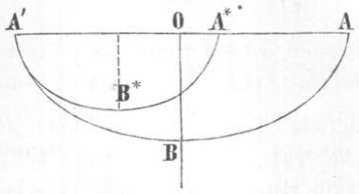
und schliesslich, weil $1 - 4\varepsilon^2 b^2 s^2 \cos^2\theta$ ein vollständiges Quadrat ausmacht,

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2a^4 - (a+b)\,b(a^2 - 3b^2)}{a^4}\,(a-b)\,bc.$$

Zur Möglichkeit der Aufgabe gehört übrigens die Bedingung, dass a nicht kleiner als $b\sqrt{2}$ ist.

25. Es sei wieder das vorige Ellipsoid gegeben und ABA' (Fig. 50.) die Hälfte seiner Horizontalspur; ferner sei eine zweite Halbellipse A^*B^*A' construirt, deren Achse die x-Achse, deren Brennpunkt der Coordinatenanfang O ist, und die mit der Ellipse ABA' den Halbparameter sowie den Scheitel A' gemein hat; man verlangt das vom Ellipsoid begrenzte über der dreieckigen Fläche $ABA'A^*B^*$ stehende Volumen.

Fig. 50.



In Polarcoordinaten ergiebt sich nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{1}{3} b^2 c \varepsilon^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\varepsilon^2\cos\theta}\right)^3 \frac{d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$$

oder, wenn

$$\frac{b\varepsilon^3}{a} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{1+\varepsilon^2\cos\theta}\right)^3 \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} = f(\varepsilon)$$

gesetzt wird,

$$V = \frac{abc}{3} \cdot \frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2}.$$

Das mit $f(\varepsilon)$ bezeichnete Integral lässt sich mittelst der Substitution

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\omega$$

auf folgende Form bringen

$$f(\varepsilon) = 16\varepsilon^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^6\omega\, d\omega}{[(1+\varepsilon^2)\cos^2\omega + (1+\varepsilon)^2 \sin^2\omega]^3},$$

woraus sein Werth nach der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^6\omega\, d\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^3} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3\beta^2 + 9\beta\alpha + 8\alpha^2}{(\beta+\alpha)^3\alpha^5}$$

$$= \frac{\pi}{16}\cdot\frac{3\beta^5 - 10\beta^3\alpha^2 + 15\beta\alpha^4 - 8\alpha^5}{(\beta^2-\alpha^2)^3\alpha^5}$$

erhalten wird; schliesslich ist

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\, a\, b\, c\, \frac{\varepsilon^3(5+2\varepsilon^2)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)^5}}\,.$$

26. In der Horizontalebene sei die Fusspunktcurve einer Ellipse construirt, deren Halbachsen

$$a_1 = \frac{2k\sqrt{a^2-k^2}}{a}, \qquad b_1 = \frac{2k\sqrt{b^2-k^2}}{b}$$

sind, und wobei k eine beliebige Gerade $< b < a$ bezeichnet; gesucht wird das Volumen, welches oberhalb durch das vorige Ellipsoid begrenzt wird, und dessen Basis die ringförmige Fläche zwischen der Horizontalspur des Ellipsoides und jener Fusspunktcurve ist.

Benutzt man die Abkürzungen

$$A = \frac{1}{a^2}, \qquad B = \frac{1}{b^2}, \qquad K = \frac{1}{k^2}, \qquad S = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta,$$

so erhält man nach Ausführung der ersten Integration

$$V = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{c}{K^3}\int^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(2S-K)^3}{S}\,d\theta$$

und schliesslich

$$V = \tfrac{2}{3}\pi c\left\{\frac{3(A+B)^2 - 10AB + 6(K-A)(K-B)}{K^3} - \frac{1}{\sqrt{AB}}\right\}.$$

27. Ein einfaches Hyperboloid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

und worin $a > b$ sein möge, wird von einem Kreiscylinder geschnitten, welcher die z-Achse zur Achse und a zum Radius hat; man sucht das cylindrische Volumen zwischen der Ebene xy und dem Hyperboloid.

Dasselbe beträgt

$$V = \tfrac{2}{3}\, a\, b\, c\left\{\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} - l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right\}$$

oder unter Benutzung eines Hülfsmittels δ

$$\tan\delta = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{a}, \qquad V = \tfrac{2}{3}abc\left\{\tan 2\delta - l\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi+\delta\right)\right\}.$$

28. In die elliptische Horizontalspur des vorigen Hyperboloides ist eine Gerade von der constanten Länge $2h < 2b$ als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an die Ellipse gelegt; die Durchschnitte dieser Tangenten bilden eine geschlossene Curve (vergl. § 10., Nr. 29.). Es werde nun das cylindrische Volumen gesucht, dessen Basis die ringförmige Fläche zwischen der Ellipse und der daraus abgeleiteten Curve, und dessen obere Begrenzungsfläche das Hyperboloid ist.

Nach Ausführung der ersten Integration erhält man ein Resultat von der Form

$$V = \tfrac{4}{3}c\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\frac{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}{(A_1\cos^2\theta + B_1\sin^2)^3}}\, d\theta;$$

benutzt man die Substitution

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\omega$$

und macht Gebrauch von der identischen Gleichung

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{(\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega)^3}} = \frac{1}{\alpha\beta}\int \sqrt{\alpha\sin^2\omega + \beta\cos^2\omega}\cdot d\omega + \frac{(\alpha-\beta)\sin\omega\cos\omega}{\alpha\beta\sqrt{\alpha\sin^2\omega+\beta\cos^2\omega}},$$

so gelangt man zu dem Resultate

$$V = \tfrac{4}{3}\cdot\frac{abch^3E}{(a^2-h^2)(b^2-h^2)},$$

worin E den Viertelumfang einer aus den Halbachsen $\sqrt{a^2-h^2}$ und $\sqrt{b^2-h^2}$ construirten Ellipse bezeichnet.

29. Ein durch die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmtes getheiltes Hyperboloid werde von einem geraden Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, und dessen Basis zur Gleichung hat

$$x^2 + y^2 = \frac{2a\sqrt{a^2 - b^2}}{b} y, \qquad a > b;$$

man sucht das zwischen der xy-Ebene und der oberen Hälfte der Fläche enthaltene Cylindervolumen.

Dasselbe beträgt

$$V = \tfrac{1}{3}\pi a b c \left\{ 3\left(\frac{a}{b}\right)^5 - 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right) - 2 \right\}.$$

30. Die Curve, deren Gleichung ist

$$(x^2+y^2)\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = \left(\frac{xy}{\cos\gamma \sin\gamma}\right)^2, \qquad 0 < \gamma < \tfrac{1}{4}\pi,$$

bildet zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen ein geschlossenes Blatt; nimmt man dasselbe zur Basis und das vorige Hyperboloid zur oberen Begrenzungsfläche eines cylindrischen Volumens, so erhält man in Polarcoordinaten

$$V = \frac{2a^2b^2c}{3(a^2-b^2)^3 \sin^3 2\gamma}\left\{a^4 - b^4 + 2a^2b^2 l\left(\frac{a^2\sin^2\gamma + b^2\cos^2\gamma}{a^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma}\right)\right\}$$
$$- \tfrac{1}{3} a b c \cdot \operatorname{arctan}\left(\frac{a b \cot 2\gamma}{a^2 + b^2}\right).$$

31. Ein elliptischer Kegel sei bestimmt durch die Gleichung

$$z^2 = A^2x^2 + B^2y^2;$$

ferner sei ein elliptischer Cylinder construirt, dessen Achse parallel zur Kegelachse liegt, dessen Mantel die Kegelachse in sich enthält, und dessen Horizontalquerschnitt eine dem Horizontalschnitte des Kegels ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ist; man sucht das Cylindervolumen zwischen der xy-Ebene und der Kegelfläche.

Bezeichnen a und b die Coordinaten der Horizontalspur der Cylinderachse, so ist

$$V = \int\int \sqrt{A^2x^2 + B^2y^2} \cdot dx\, dy$$

wobei der Integrationsbereich durch die Bedingung

$$A^2(x-a)^2 + B^2(y-b)^2 \leqq A^2a^2 + B^2b^2$$

bestimmt ist. Um zu vereinfachen setze man erst

$$Ax = x_1, \qquad By = y_1, \qquad Aa = a_1, \qquad Bb = b_1;$$

es wird dann

$$V = \frac{1}{AB} V_1$$

und zwar bedeutet V_1 das Volumen eines Kreiscylinders, dessen Basis durch die Gleichung

$$(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

gegeben, und dessen obere Begrenzungsfläche ein Kreiskegel ist. Für $a_1 = h\cos\gamma$, $b_1 = h\sin\gamma$ und mit Hülfe von Polarcoordinaten findet man

$$V_1 = \frac{8h^3}{3}\int_{\gamma-\frac{1}{2}\pi}^{\gamma+\frac{1}{2}\pi} \cos^3(\theta - \gamma)\, d\theta$$

und schliesslich

$$V = \frac{32}{9}\cdot\frac{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2)^3}}{AB}.$$

32. Man verlangt den Inhalt des Körpers, welcher von den positiven Theilen der Coordinatenebenen und ausserdem von der Fläche

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$$

begrenzt wird.

Die in der Formel

$$V = c\int\int\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2 dx\, dy$$

angedeuteten Integrationen beziehen sich hier auf alle positiven x und y, welche der Bedingung

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqq 1$$

genügen. Für $x = a\xi^4$, $y = b\eta^4$ wird

$$V = 16abc\int\int(1 - \xi^2 - \eta^2)^2\, \xi^3\eta^3\, d\xi\, d\eta,\ \xi^2 + \eta^2 \leqq 1,$$

und nun ist der Integrationsbereich ein Kreisquadrant; mit Hülfe von Polarcoordinaten ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{90}abc.$$

33. Man sucht das von den positiven Theilen der Coordinatenebenen und von der Fläche

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1$$

begrenzte Volumen.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren erhält man

$$V = \tfrac{1}{1680}\, abc.$$

34. Das von den positiven Theilen der Coordinatenebenen und von der Fläche

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} + \sqrt[4]{\frac{z}{c}} = 1$$

begrenzte Volumen ist

$$V = \tfrac{1}{34650}\, abc.$$

35. Das zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen und der Fläche

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{z}{c}\right)^2} = 1$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V = \tfrac{1}{70}\, \pi\, abc.$$

36. Das Volumen, welches von den positiven Theilen der Coordinatenebenen und von der Fläche

$$\sqrt[5]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[5]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} + \sqrt[5]{\left(\frac{z}{c}\right)^2} = 1$$

eingeschlossen wird, beträgt

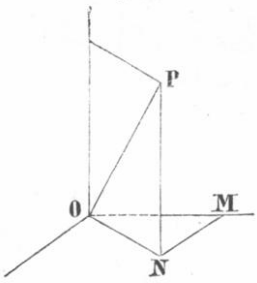
$$V = \tfrac{5}{6006}\, \pi\, abc.$$

§ 26.

Cubaturen durch Doppelintegrale in räumlichen Polarcoordinaten.

In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme seien (Fig. 51.) $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ die Coordinaten des Punktes; wird nun die xy-Ebene zur Aequatorialebene, und die z-Achse zur Polarachse eines Systemes räumlicher Polarcoordinaten (Kugelcoordinaten) genommen, worin $OP = r$, $\angle PON = \psi$, $\angle NOM = \omega$ ist, so vermitteln die Formeln

Fig. 51.



$$x = r\cos\psi\cos\omega, \qquad y = r\cos\psi\sin\omega,$$

$$z = r\sin\psi$$

den Uebergang von dem ersten zum zweiten Systeme. In letzterem

ist das Volumenelement eine Pyramide, welche r zur Höhe und das Rechteck aus den Seiten $r\cos\psi\, d\omega$ und $r\, d\psi$ zur Basis hat; daher folgt

$$V = \tfrac{1}{3}\int\int r^3 \cos\psi\, d\omega\, d\psi.$$

Für r ist sein Werth aus der Polargleichung der Begrenzungsfläche zu substituiren; die Integrationsgrenzen für ψ und ω bestimmen sich durch die Begrenzung des betrachteten Volumens.

Beispiel 1. Ein aus den Halbachsen a, b, c construirtes Ellipsoid werde von einer Ebene geschnitten, welche die Halbachse c in sich enthält und mit der Ebene der Achsen a und c den Winkel γ einschliesst; man sucht das Volumen des entstandenen Ellipsoidsegmentes.

In dem Doppelintegrale

$$V = \tfrac{1}{3}\int_0^{\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos\psi\, d\omega\, d\psi}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos^2\psi\cos^2\omega}{a^2} + \dfrac{\cos^2\psi\sin^2\omega}{b^2} + \dfrac{\sin^2\psi}{c^2}\right)^3}}$$

kann man zuerst die auf ψ bezügliche Integration mittelst der Substitution $\sin\psi = t$ ausführen; es bleibt dann

$$V = \tfrac{1}{3}a^2b^2c\int_0^{\gamma}\frac{d\omega}{b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega} = \tfrac{1}{3}abc\cdot \arctan\left(\frac{a}{b}\tan\gamma\right)$$

übereinstimmend mit Nr. 22. im vorigen Paragraphen.

2. Das zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen und der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = (ax^2 + by^2 + cz^2)^2$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V = \tfrac{1}{210}\pi\left\{5(a^3 + b^3 + c^3) + 3(b + c)(c + a)(a + b) - 4abc\right\}.$$

3. Das zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen und der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^5 = (a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2)^2$$

enthaltene Volumen beträgt

$$V = \tfrac{1}{18}\pi(a^3 + b^3 + c^3).$$

4. Der zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen liegende Octant der Fläche

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^5=\left(\frac{z}{h}\right)^4$$

begrenzt mit jenen Ebenen das Volumen

$$V=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{a\,b\,c^3}{h^2}\,.$$

5. Die positiven Theile der Coordinatenebenen und die Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=h^2$$

begrenzen zusammen das Volumen

$$V=\tfrac{1}{3}h\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\psi\;d\omega\;d\psi}{\frac{\cos^2\psi\,\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\cos^2\psi\,\sin^2\omega}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}}\,;$$

führt man zuerst die auf ω bezügliche Integration aus und setzt nachher $\sin\psi=t$, sowie zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}\,,\qquad \beta=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\,,\qquad (a<b<c)$$

so erhält man

$$V=\tfrac{1}{6}\pi\,a\,b\,h\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-\alpha^2t^2)\,(1-\beta^2t^2)}}\,.$$

Das noch übrige Integral ist ein sogenanntes elliptisches Integral erster Art und kann durch die Substitution $\alpha t=\sin\varphi$ auf die Normalform

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\,,\qquad \varkappa^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}<1\,,$$

gebracht werden.

6. Man sucht das Volumen, welches von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=h^4$$

und von den positiven Theilen der Coordinatenebenen begrenzt wird.

Setzt man $\sin\psi=t$, so erhält man zunächst

$$V = \tfrac{1}{3}h^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{d\omega\, dt}{\sqrt{\lambda + \mu t^2}},$$

$$\lambda = \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}, \qquad \mu = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\omega}{a^2} - \frac{\sin^2\omega}{b^2}.$$

Um die irrationale Form zu vermeiden, substituire man

$$\frac{\sqrt{\lambda+\mu}\cdot t}{\sqrt{\lambda + \mu t^2}} = u$$

und kehre nachher die Reihenfolge der Integrationen um; wird hierbei zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}, \qquad (a > b > c)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$V = \tfrac{1}{6}\pi c h^2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)\,(1 - \beta^2 u^2)}}.$$

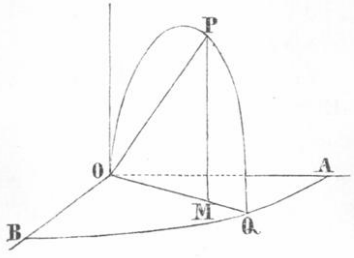
Lässt man a_1, b_1, c_1, h_1 an die Stelle von a, b, c, h treten und nennt V_1 das neue Volumen, so ist dieses gleich dem in Nr. 5. betrachteten Volumen, wenn

$$a_1 = \frac{g^2}{a}, \quad b_1 = \frac{g^2}{b}, \quad c_1 = \frac{g^2}{c}, \quad h_1 = \sqrt{gh}$$

und g gleich dem geometrischen Mittel aus a, b, c gewonnen wird.

7. In der Aequatorialebene xy sei aus den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ eine Ellipse construirt, und es bezeichne Q den Punkt in welchen die Gerade OM (Fig. 52.) den Ellipsenquadranten AB schneidet; wird nun über OQ als Durchmesser ein Kreis construirt, so bildet die stetige Folge aller solchen Kreise eine Fläche, deren Polargleichung ist

Fig. 52.



$$r = \frac{ab\cos\psi}{\sqrt{b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega}}.$$

Um das von dieser Fläche und von den positiven Theilen der Coordinatenebenen begrenzte Volumen zu finden, integrire man erst nach ψ und benutze nachher die im vorigen Paragraphen Nr. 28. angegebene Reductionsformel; man erhält

$$V = \tfrac{1}{16}\pi a b E,$$

wo E den Viertelumfang der gegebenen Ellipse bezeichnet.

8. Setzt man in der vorhergehenden Aufgabe statt der Ellipse eine mit dem Radius a beschriebene Cardioide, so ist der gesammte Inhalt des entstehenden Körpers

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

§ 27.

Complanationen durch Doppelintegrale in rechtwinkligen Coordinaten.

Wenn die Gleichung einer Fläche in rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, so schliessen die xy-Ebene und die Berührungsebene im Punkte xyz mit einander einen Winkel N ein, für welchen

$$\sec N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

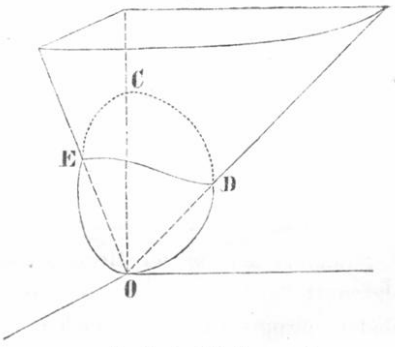
ist. Das Flächenelement dS, dessen Horizontalprojection das Rechteck aus den Seiten dx und dy ist, hat demnach den Inhalt $\sec N \cdot dx\,dy$, und hieraus folgt

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx\,dy.$$

Der Integrationsbereich für x und y ist hier die Horizontalprojection des endlichen Flächenstückes S, dessen Inhalt gesucht wird.

Beispiel 1. Eine mit dem Halbmesser c beschriebene Kugel, welche die xy-Ebene im Coordinatenanfange berührt, werde von einem elliptischen Kegel geschnitten, dessen Achse die z-Achse, und dessen Spitze der Coordinatenanfang ist; man sucht den Flächeninhalt der innerhalb des Kegels liegenden Kugelkappe (Fig. 53.).

Fig. 53.



Die Gleichungen beider Flächen sind

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz, \qquad A^2x^2 + B^2y^2 = z^2,$$

und hieraus folgt

$$S = c \int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{c^2 - (x^2 + y^2)}},$$

wobei die Peripherie des Integrationsbereiches durch die Gleichung

$$(1 + A^2)x^2 + (1 + B^2)y^2 = 2c\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2}$$

bestimmt ist. Die Einführung ebener Polarcoordinaten giebt

$$S = 4c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^R \frac{r\,d\theta\,dr}{\sqrt{c^2 - r^2}}, \qquad R = \frac{2c\sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}}{1 + A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta},$$

und nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration

$$S = 8c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{1 + A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta} = \frac{4\pi c^2}{\sqrt{(1 + A^2)(1 + B^2)}}.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass der Flächeninhalt der abgeschnittenen Kugelkappe gleich der Fläche einer Ellipse ist, welche die Sehnen CD und CE zu Halbachsen hat.

2. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle des Kegels ein elliptisches Paraboloid treten, dessen Gleichung

$$z = Ax^2 + By^2$$

sein möge, so erhält man als Flächeninhalt der innerhalb des Paraboloides liegenden Kugelkappe

$$S = \frac{2\pi c}{\sqrt{AB}}.$$

Dieses Resultat gestattet wörtlich dieselbe Interpretation wie das vorige, wenn mit D und E die Durchschnitte der Verticalspuren der Kugel und des Paraboloides bezeichnet werden.

3. Ein elliptisches Paraboloid sei durch die Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

bestimmt, und in der Horizontalebene xy eine Ellipse construirt, deren Halbachsen a_1 und b_1 sich wie a zu b verhalten; man sucht den Flächeninhalt desjenigen Paraboloidstückes, welches einen Sector der Ellipse zur Horizontalprojection hat.

Setzt man

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$$

und bezeichnet mit γ_0 und γ_1 die Winkel zwischen der x-Achse und den Radienvectoren, welche den Ellipsensector begrenzen, so erhält man mittelst ebener Polarcoordinaten

$$S = \tfrac{1}{3} a b \left[\sqrt{(1+\lambda^2)^3} - 1\right]\left[arctan\left(\frac{a}{b} tan\gamma_1\right) - arctan\left(\frac{a}{b} tan\gamma_0\right)\right].$$

Hieraus ergiebt sich noch der Satz, dass das Verhältniss von S zu seiner Horizontalprojection unabhängig von den Winkeln γ_0 und γ_1 ist, dass also über gleichen Ellipsensectoren gleiche Paraboloidflächen stehen.

4. Es sei wieder das vorige Paraboloid gegeben und in der Horizontalebene das rechtwinklige Dreieck aus den Katheten $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ construirt; man sucht die über diesem Dreiecke stehende Paraboloidfläche.

In ebenen Polarcoordinaten erhält man zunächst

$$S = \tfrac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{(1 + qR^2)^3} - 1}{q}\, d\theta,$$

wo q und R folgende Bedeutungen haben

$$q = \frac{cos^2\theta}{a^2} + \frac{sin^2\theta}{b^2}, \qquad R = \frac{\lambda}{\frac{cos\theta}{a} + \frac{sin\theta}{b}}.$$

Durch Benutzung der Substitution

$$tan\theta = \frac{b}{a} tan\omega$$

vereinfacht sich der obige Ausdruck und wird

$$S = \tfrac{1}{3} a b \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{[1 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 sec^2(\omega - \tfrac{1}{4}\pi)]^3}\, d\omega - \tfrac{1}{2}\pi \right\}.$$

Das noch übrige Integral geht durch Substitution von

$$\frac{sin(\omega - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{\frac{1}{2}\lambda^2 + cos^2(\omega - \frac{1}{4}\pi)}} = t$$

in ein algebraisches über, nämlich

$$S = \tfrac{1}{3} a b \left\{ (2 + \lambda^2)^2 \int_{-\mu}^{\mu} \frac{dt}{(1 + t^2)\,(2 - \lambda^2 t^2)^2} - \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

dessen völlige Entwickelung keine Schwierigkeit hat.

5. Das vorige Paraboloid werde von einem Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, und dessen Basis mit dem Radius $\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ so construirt ist, dass sie die x-Achse im Coordinatenanfange berührt; man sucht die Oberfläche der Kappe, welche der Cylinder aus dem Paraboloide herausschneidet.

Mit Hülfe ebener Polarcoordinaten findet man

$$S = \pi a b \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^5 - \tfrac{4}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} - \tfrac{2}{3} \right\}.$$

6. Es sei wieder das vorige Paraboloid gegeben und in der xy-Ebene aus den Halbachsen a_1 und b_1 eine Ellipse construirt, welche die y-Achse im Coordinatenanfange berührt; dabei soll, wenn $\varkappa$ eine beliebige positive Grösse bezeichnet,

$$a_1 = a\varkappa\sqrt{1 + \varkappa^2}, \qquad b_1 = b\varkappa$$

genommen und die Oberfläche des Paraboloidstücks bestimmt werden, welches jene Ellipse zur Horizontalprojection hat.

Setzt man erst $x = a x_1$, $y = b y_1$ und führt dann ebene Polarcoordinaten ein, so erhält man

$$S = \tfrac{2}{3} a b \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1 + 2\varkappa^2 - \varkappa^2 \sin^2\theta}{1 + \varkappa^2 \sin^2\theta} \right)^3 d\theta - \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{3} \pi a b \left\{ (2 + 2\varkappa^2 + 3\varkappa^4)\sqrt{1 + \varkappa^2} - 2 \right\}.$$

7. Man sucht die Grösse desjenigen Theiles von dem vorigen Paraboloide, dessen Horizontalprojection durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{4c^2(c^2 + a^2)}{a^2} x^2 + \frac{4c^2(c^2 + b^2)}{b^2} y^2$$

bestimmt, also die Fusspunktcurve einer Ellipse ist.

Mit Hülfe von Polarcoordinaten findet sich

$$S = \frac{2\pi}{3} \left\{ \frac{3(a^4 + b^4) + 2a^2b^2}{a^4 b^4} c^6 + \frac{6(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} c^4 + b c^2 \right\}.$$

8. Das vorige Paraboloid werde von einer mit dem Radius

$$c = a + b + \sqrt{ab}$$

beschriebenen Kugelfläche geschnitten, welche die xy-Ebene im Coordinatenanfange berührt; man sucht die Grösse der innerhalb der Kugel liegenden Paraboloidfläche.

Setzt man erst $x = ax_1$, $y = by_1$ und nachher $x_1 = r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$, so erhält man

$$S = 4ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^R \sqrt{1 + r^2} \cdot r \, d\theta \, dr,$$

$$R^2 = 4\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{ab} + a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^2}$$

und durch Ausführung der ersten Integration

$$S = \tfrac{4}{3}ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{\left(1 + \frac{2\sqrt{ab}}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}\right)^3 - 1\right\} d\theta$$

oder

$$S = \tfrac{2}{3}\pi\left\{3(a^2 + b^2) + 8ab + 6(a + b)\sqrt{ab}\right\}.$$

9. Es sei eine Fläche durch die Gleichung

$$z = \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{x^3}{a}} + \sqrt{\frac{y^3}{b}}\right)$$

und in der xy-Ebene eine Gerade durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda$$

bestimmt, worin λ eine beliebige positive Grösse bezeichnet; man verlangt die Complanation desjenigen Flächenstückes, welches das von den positiven Coordinatenachsen der x, y und der Geraden gebildete Dreieck zur Horizontalprojection hat.

Durch unmittelbare Ausführung der nöthigen Integrationen findet sich

$$S = \tfrac{2}{15}ab\left\{2 - 5\sqrt{(1 + \lambda)^3} + 3\sqrt{(1 + \lambda)^5}\right\},$$

oder für $\lambda = \cot^2\gamma$

$$S = \tfrac{2}{15}ab\left\{2 - 5\csc^3\gamma + 3\csc^5\gamma\right\}.$$

Der Winkel γ hat eine leicht erkennbare Bedeutung. Alle Punkte der Fläche, deren Normalen mit der xy-Ebene den gleichen

Neigungswinkel γ einschliessen, liegen nämlich auf einer Curve, deren Horizontalprojection durch die Gleichung

$$cot^2\gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

gegeben ist; letztere stimmt mit der Gleichung der anfangs erwähnten Geraden überein, und daher ist die Fläche S begrenzt von ihren Verticalspuren und derjenigen Curve isokliner Normalen (Thl. I., S. 129.), welche dem Neigungswinkel γ entspricht.

Man kann dieses Resultat direct und zwar dadurch erhalten, dass man statt der Coordinaten x und y die Winkel einführt, welche die Richtung einer beliebigen, durch den Punkt xyz gehenden Normale der Fläche bestimmen. Bezeichnet ν den Neigungswinkel der Normale gegen die xy-Ebene, χ den Winkel zwischen der Horizontalprojection der Normale und der x-Achse, so gelten folgende Gleichungen

$$S = \int\int \frac{dx\,dy}{\sin\nu},$$

$$\tan\chi = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{y}{x}, \qquad cot^2\nu = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b};$$

aus der zweiten erhält man

$$y = \frac{b}{a}\, x \tan^2\chi$$

und durch Substitution hiervon in die Complanationsformel, wobei man sich χ als die neue, für y eintretende Variabele zu denken hat,

$$S = \frac{2b}{a}\int\int \frac{x \sin\chi}{\sin\nu\ \cos^3\chi}\, dx\, d\chi.$$

Aus der Gleichung für $cot^2\nu$ ergiebt sich ferner zufolge des Werthes von y

$$cot^2\nu = \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\tan^2\chi \quad \text{oder} \quad x = a\cos^2\chi\, cot^2\nu$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes, wobei ν die neue Variabele bedeutet

$$S = -4ab\int\int \frac{\cos^3\nu}{\sin^6\nu}\cos\chi\,\sin\chi\, d\nu\, d\chi.$$

Um nun das erwähnte Flächenstück zu begrenzen, muss χ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, und ν von $\frac{1}{2}\pi$ bis γ ausgedehnt werden; diess giebt

$$S = 4ab \int_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3 \nu}{\sin^6 \nu} \, d\nu \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\chi \, \sin\chi \, d\chi$$

$$= 2ab \int_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{\sin^6 \nu} - \frac{1}{\sin^4 \nu} \right) \cos\nu \, d\nu$$

was mit dem früheren Resultate übereinkommt.

10. Durch die Gleichung

$$z = \tfrac{2}{3} (Ax^2 + By^2)^{\frac{3}{4}}$$

ist eine Fläche bestimmt, deren Verticalspuren semicubische Parabeln und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; man verlangt die Grösse der Kappe, welche von der, dem Neigungswinkel γ entsprechenden Curve isokliner Normalen begrenzt wird.

Zur Einführung von χ und ν dienen hier die Gleichungen

$$\tan\chi = \frac{By}{Ax} \text{ oder } y = \frac{A}{B} x \tan\chi,$$

$$\cot^2 \nu = \frac{A^2 x^2 + B^2 y^2}{\sqrt{Ax^2 + By^2}} \text{ oder } x^2 = \frac{A \sin^2\chi + B \cos^2\chi}{A^3 B} \cos^2\chi \cot^4 \nu,$$

mithin ist

$$S = \frac{2}{A^2 B^2} \int_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3 \nu}{\sin^6 \nu} \, d\nu \int_{0}^{2\pi} (A \sin^2\chi + B \cos^2\chi) \, d\chi$$

$$= \frac{2\pi (A + B)}{15 A^2 B^2} (2 - 5 \csc^3\gamma + 3 \csc^5\gamma).$$

11. Ein elliptisches Paraboloid dritten Grades sei durch die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{3} \left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} \right)$$

bestimmt, und es werde die Complanation der Kappe verlangt, deren Begrenzung die zum Neigungswinkel γ gehörende Curve isokliner Normalen ist.

Man erhält nach der vorigen Methode

$$S = ab \int_{\gamma}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\nu}{\sin^3 \nu} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{\sin\chi \cos\chi}};$$

das auf χ bezügliche Integral hat den Werth 3,70815, daher ist

$$S = 1{,}854075 \cdot a\,b\left(\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma} + l\cot\tfrac{1}{2}\gamma\right).$$

12. Durch die Gleichung

$$z = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}$$

ist eine Fläche charakterisirt, deren Verticalspuren gleichseitige Hyperbeln, und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; eine Zone der Fläche sei von denjenigen zwei Curven isokliner Normalen begrenzt, welche den Neigungswinkeln γ_0 und γ_1 entsprechen; man sucht den Flächeninhalt dieser Zone.

Zunächst ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} a^4 b^4 \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \frac{d\nu}{\sin\nu\cos^2\nu} \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{(b^4\cos^2\chi + a^4\sin^2\chi)^3}},$$

und wenn man hier die Reductionsformel

$$\int \frac{d\chi}{\sqrt{(\alpha\cos^2\chi + \beta\sin^2\chi)^3}}$$
$$= \frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int \sqrt{\alpha\cos^2\chi + \beta\sin^2\chi}\cdot d\chi - \frac{(\alpha-\beta)\cos\chi\sin\chi}{\sqrt{\alpha\cos^2\chi + \beta\sin^2\chi}}\right\}$$

anwendet, so gelangt man zu dem Resultate

$$S = \frac{\sqrt{a\,b}}{2}\left\{\sec\gamma_1 - \sec\gamma_0 + l\left(\frac{\tan\frac{1}{2}\gamma_1}{\tan\frac{1}{2}\gamma_0}\right)\right\} P,$$

worin P den Umfang einer aus den Halbachsen

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} \text{ und } \sqrt{\frac{b^3}{a}}$$

construirten Ellipse bedeutet.

13. In der Horizontalebene xy sei aus dem Coordinatenanfange mit dem Radius c ein Kreis beschrieben und in diesem ein beliebiger Radius OQ gezogen, welcher mit der x-Achse den Winkel ω einschliesst; auf der z-Achse werde nun der Abschnitt $ON = c\sin\omega$ genommen und durch N eine Parallele zu OQ gelegt; alle diese, der stetigen Aenderung des ω entsprechenden Geraden bilden zusammen eine windschiefe Fläche. Von letzterer soll dasjenige Flächenstück bestimmt werden, dessen Horizontalprojection ein die

y-Achse im Coordinatenanfange berührender, über dem Durchmesser b beschriebener Kreis ist.

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{b^2 + c^2} = a$, so erhält man durch Einführung von $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$

$$S = \tfrac{1}{4}\pi\left\{ab + c^2 l\left(\frac{a+b}{c}\right)\right\}.$$

Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, dass der über b als Durchmesser beschriebene Kreis die Horizontalprojection von derjenigen Curve isokliner Normalen ist, welche dem Winkel $\gamma = arctan\,\frac{b}{c}$ entspricht.

14. Ein elliptischer Kegel sei durch die Gleichung bestimmt

$$z^2 = Ax^2 + By^2, \qquad A < B,$$

und in der Horizontalebene eine Lemniscate durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2 xy;$$

man sucht die Grösse desjenigen Stückes der Kegelfläche, welches über der Horizontalebene liegt, und von welchem das zwischen den positiven Theilen der x- und y-Achse enthaltene Lemniscatenblatt die Horizontalprojection darstellt.

Setzt man zur Abkürzung

$$A(1 + A) = A_1, \qquad B(1 + B) = B_1,$$

so erhält man in ebenen Polarcoordinaten

$$S = c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\frac{A_1\cos^2\theta + B_1\sin^2\theta}{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}}\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta;$$

die noch übrige Integration kann mittelst der Substitution

$$\frac{A_1\cos^2\theta + B_1\sin^2\theta}{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta} = (1 + A + B)\sin^2\omega$$

ausgeführt werden, und zwar ergiebt sich, wenn die Hülfswinkel α und β durch die Formeln

$$tan\,\alpha = \sqrt{\frac{1+A}{B}}, \qquad tan\,\beta = \sqrt{\frac{1+B}{A}}$$

bestimmt werden

$$S = \frac{ABc^2}{2(B-A)(1+A+B)}\left\{\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - l\left(\frac{tan\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta)}{tan\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)}\right)\right\}.$$

15. Der vorige elliptische Kegel werde von der Fläche

$$z^4 = c^2 xy$$

geschnitten; man sucht dasjenige Stück der Kegelfläche, welches zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen von der Schnittcurve begrenzt wird.

Setzt man $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ und nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{Au}{B(1-u)}},$$

so erhält man

$$S = \frac{c^2}{6} \cdot \frac{A + B + \sqrt{(1+A)(1+B)} + 2}{AB\left(\sqrt{1+A} + \sqrt{1+B}\right)}.$$

16. Der vorige elliptische Kegel werde von der Rotationsfläche

$$(x^2 + y^2)^3 = c^4 z^2$$

geschnitten; man sucht das innerhalb dieser Fläche liegende Stück der Kegelfläche.

In Polarcoordinaten ergiebt sich

$$S = \tfrac{1}{2} c P,$$

wobei P den Umfang einer aus den Halbachsen

$$c\sqrt{A(1+A)} \text{ und } c\sqrt{B(1+B)}$$

construirten Ellipse bedeutet.

17. Parallel zur xy-Ebene sei in der Entfernung c eine Ebene gelegt und in letzterer die sternförmige Curve construirt, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist; lässt man eine durch den Coordinatenanfang gehende bewegliche Gerade an dieser Curve hingleiten, so entsteht eine Kegelfläche mit der Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (Cz)^{\frac{2}{3}}, \qquad C = \frac{a}{c};$$

man sucht den Flächeninhalt desjenigen Kegelstückes, welches zwischen dem Coordinatenanfange und einem in der h genommenen Horizontalquerschnitte enthalten ist.

Zunächst erhält man

$$S = \frac{1}{C} \iint \sqrt{\left[C^2 + \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 (xy)^{-\frac{2}{3}}\right]}\, dx\, dy,$$

wobei sich die Integrationen auf alle positiven und negativen x und y beziehen, welche der Bedingung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq (Ch)^{\frac{2}{3}}$$

genügen. Substituirt man nach einander $x = \xi^3$, $y = \eta^3$, so wird

$$S = \frac{9}{C} \int\int \sqrt{C^2 \xi^2 \eta^2 + (\xi^2 + \eta^2)^2} \cdot \xi \eta \, d\xi \, d\eta$$

und der Integrationsbereich ist nun ein mit dem Radius $\sqrt[3]{Ch}$ um den Coordinatenanfang beschriebener Kreis; durch Einführung von Polarcoordinaten und Anwendung der Substitution $\cos 2\theta = u$ findet man

$$S = \tfrac{3}{4} h^2 \left\{ 2C + (4 + C^2) \arctan \frac{2}{C} \right\}.$$

18. Die vorige Fläche werde von einem verticalen Kreiscylinder geschnitten, dessen Achse die z-Achse und dessen Radius $= k$ ist; man verlangt die Complanation des innerhalb des Cylinders liegenden oberen Flächentheiles.

Mittelst der vorigen Substitutionen erhält man

$$S = 2k^2 \left\{ \frac{2\sqrt{C^2 + 3}}{C} \arctan \left(\sqrt{C^2 + 3}\right) - \arctan \frac{C}{2} \right\}.$$

19. Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

sein möge, denke man sich zwei Curven isokliner Normalen construirt, welche den Neigungswinkeln ν_0 und ν_1 entsprechen; es soll der Inhalt der von jenen Curven begrenzten Zone ermittelt werden.

Benutzt man die Gleichungen

$$\tan \chi = \frac{By}{Ax}, \qquad \cot^2 \nu = \frac{A^2 x^2 + B^2 y^2}{C(1 - Ax^2 - By^2)},$$

so erhält man sehr leicht

$$S = ABC \int_{\nu_1}^{\nu_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \nu \, d\nu \, d\chi}{(BC \cos^2 \nu \cos^2 \chi + CA \cos^2 \nu \sin^2 \chi + AB \sin^2 \nu)^2}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$p = B(C \cos^2 \nu + A \sin^2 \nu), \qquad q = A(C \cos^2 \nu + B \sin^2 \nu)$$

gesetzt wird,

$$S = ABC \int_{v_1}^{v_0} \cos v \, dv \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{(p\cos^2\chi + q\sin^2\chi)^2},$$

und nach Ausführung der auf χ bezüglichen Integration

$$S = \pi ABC \int_{v_1}^{v_0} \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\} \frac{\cos v}{\sqrt{pq}} \, dv.$$

Bei dem Ellipsoide sei $A < B < C$, bei den Hyperboloiden $A^2 > B^2$; die Grössen

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}}$$

sind dann immer reell und bedeuten geometrisch die numerischen Excentricitäten der Verticalspuren der Fläche; zugleich ist immer $\alpha > \beta$. Mittelst der Substitutionen

$$\sin v = u, \qquad \sin v_0 = u_0, \qquad \sin v_1 = u_1$$

ergiebt sich nun

$$S = \frac{\pi}{C\sqrt{AB}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{\frac{A}{1 - \alpha^2 u^2} + \frac{B}{1 - \beta^2 u^2}\right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}.$$

Um dieses Integral durch sogenannte elliptische Integrale auszudrücken, setze man weiter

$$\varkappa = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C - B}{C - A}}, \qquad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}$$

und beachte folgende identische Gleichung

$$\frac{1}{\alpha} \int \left\{\frac{A}{\cos^2\varphi} + \frac{B}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}\right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{\frac{C}{C - A}} \left\{A \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} + (C - A) \int \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi \right.$$

$$\left. + \frac{A - (C - B)\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \tan\varphi \right\};$$

führt man nun die Abkürzungen ein

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi, \qquad F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$

$$G(\varphi) = \frac{A - (C - B)\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \tan\varphi$$

und bestimmt die Grenzen von φ mittelst der Gleichungen

$$\sin\varphi_0 = \alpha u_0 = \alpha \sin\nu_0, \qquad \sin\varphi_1 = \alpha u_1 = \alpha \sin\nu_1,$$

so erhält man schliesslich

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C - A)}} \{(C - A)[E(\varphi_0) - E(\varphi_1)] + A[F(\varphi_0) - F(\varphi_1)] + G(\varphi_0) - G(\varphi_1)\}.$$

Bei dem Ellipsoide, dessen Halbachsen a, b, c sein mögen, führen die Werthe $\nu_1 = 0$, $\nu_0 = \frac{1}{2}\pi$ zur Oberfläche des Halbellipsoides; die Gesammtoberfläche des Ellipsoides ist demnach

$$\Omega = \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \{(a^2 - c^2) E(\varphi_0) + c^2 F(\varphi_0) + a^2 c^2 G(\varphi_0)\},$$

$$\sin\varphi_0 = \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \qquad \cos\varphi_0 = \frac{c}{a}$$

oder einfacher

$$\Omega = 2\pi c \{b E(\varphi_0) \tan\varphi_0 + b F(\varphi_0) \cot\varphi_0 + c\}.$$

20. Durch die Gleichung

$$Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} + Cz^{\frac{2}{3}} = 1$$

wird eine Fläche bestimmt, deren Schnitte, parallel zu den Coordinatenebenen genommen, Evoluten von Ellipsen oder Hyperbeln sind; man sucht den Inhalt einer Zone, welche von zwei, den Neigungswinkeln ν_0 und ν_1 entsprechenden Curven isokliner Normalen begrenzt wird.

Benutzt man zur Einführung von χ und ν die Formeln

$$y = \frac{B^3}{A^3} x \cot^3\chi,$$

$$x^2 = \frac{A^6 \sin^6\chi}{(A^3 \sin^2\chi + B^3 \cos^2\chi + C^3 \sin^2\chi \cos^2\chi \cot^2\nu)^3},$$

so erhält man

$$S = 9A^3B^3C^3 \int_{\nu_1}^{\nu_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4\nu \cos\nu \cdot \sin^4\chi \cos^4\chi \, d\nu \, d\chi}{[(A^3 \sin^2\chi + B^3 \cos^2\chi) \sin^2\nu + C^3 \sin^2\chi \cos^2\chi \cos^2\nu]^4}.$$

Das auf χ bezügliche Integral braucht man nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$

gehen zu lassen, wenn man den Factor 4 hinzusetzt; substituirt man nachher

$$\sin v = u, \qquad \tan\chi = t$$

wobei $\sin v_0 = u_0$, $\sin v_1 = u_1$ sein möge, so findet man

$$S = 36 A^3 B^3 C^3 \int_{u_1}^{u_0} u^4 \, du \int_0^{\infty} \frac{t^4 (1+t^2)^3 \, dt}{[B^3 u^2 + \{C^3 + (A^3 + B^3 - C^3) u^2\} t^2 + A^3 u^2 t^4]^4}.$$

Nach den Formeln 25. bis 28. in § 19. ist nun

$$\int_0^{\infty} \frac{t^4 (1+t^2)^3 \, dt}{(a + b t^2 + c t^4)^4}$$

$$= \frac{5\pi}{32} \left(\sqrt[6]{\frac{c}{a^2}} + \sqrt[6]{\frac{a}{c^2}} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{h^7}} + \frac{\pi}{32} \left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} + \frac{1}{\sqrt{c^3}} \right) \frac{1}{\sqrt{h^5}},$$

$$h = b + 2\sqrt{ac},$$

mithin im vorliegenden Falle, wo

$$a = B^3 u^2, \qquad b = C^3 + (A^3 + B^3 - C^3) u^2, \qquad c = A^3 u^2,$$

$$h = C^3 + \left[\left(\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3} \right)^2 - C^3 \right] u^2$$

ist, und zur Abkürzung

$$\lambda = \left(\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3} \right)^2 - C^3,$$

$$M = \left(\sqrt{A^3} + \sqrt{B^3} \right)^3 \sqrt{A^3 B^3}, \qquad N = \sqrt{A^9} + \sqrt{B^9}$$

sein möge,

$$S = \frac{9\pi C^3}{8\sqrt{A^3 B^3}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{ \frac{5 M u^3}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^7}} + \frac{N u}{\sqrt{(C^3 + \lambda u^2)^5}} \right\} du.$$

Die noch übrige Integration ist sehr einfach und liefert, wenn

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_0^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 v_0} = \mu_0,$$

$$\sqrt{C^3 + \lambda u_1^2} = \sqrt{C^3 + \lambda \sin^2 v_1} = \mu_1$$

gesetzt wird, folgendes Endresultat

$$S = \frac{3\pi C^3}{8\lambda^2 \sqrt{A^3 B^3}} \left\{ (5M + \lambda N) \left(\frac{1}{\mu_1^3} - \frac{1}{\mu_0^3} \right) - 3 C^3 M \left(\frac{1}{\mu_1^5} - \frac{1}{\mu_0^5} \right) \right\}.$$

Bei der untersuchten Fläche ist demnach jede durch zwei Curven isokliner Normalen begrenzte Zone algebraisch quadrirbar.

Im Falle positiver A, B, C schreibe man die Gleichung der Fläche unter der homogenen Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ihre halbe Oberfläche entspricht dann den Werthen $\nu_0 = \frac{1}{2}\pi$ und $\nu_1 = 0$. Setzt man für den Augenblick

$$\frac{1}{a} = \alpha, \qquad \frac{1}{b} = \beta, \qquad \frac{1}{c} = \gamma, \qquad \alpha + \beta = \varepsilon,$$

so ist

$$A^3 = \alpha^2, \qquad B^3 = \beta^2, \qquad C^3 = \gamma^2$$

$$\lambda = (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \varepsilon^2 - \gamma^2,$$

$$M = (\alpha + \beta)^3\, \alpha\beta = \varepsilon^3 \alpha\beta, \qquad N = \alpha^3 + \beta^3 = \varepsilon(\varepsilon^2 - \alpha\beta),$$

$$\mu_0 = \varepsilon, \qquad \mu_1 = \gamma$$

mithin die gesammte Oberfläche

$$\Omega = \frac{3\pi\gamma^2\varepsilon}{4\alpha\beta\lambda^2}\left\{[\varepsilon^4 + (2\alpha\beta - \gamma^2)\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2]\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{\varepsilon^3}\right) - 3\alpha\beta\gamma^2\varepsilon^2\left(\frac{1}{\gamma^5} - \frac{1}{\varepsilon^5}\right)\right\}$$

$$= \frac{3\pi}{4\alpha\beta\gamma\varepsilon^2\lambda^2}\left\{[\varepsilon^4 + (2\alpha\beta - \gamma^2)\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2](\varepsilon^3 - \gamma^3) - 3\alpha\beta(\varepsilon^5 - \gamma^5)\right\}$$

$$= \frac{3\pi}{4\alpha\beta\gamma\lambda^2}\left\{\varepsilon^5 - (\gamma^2 + \alpha\beta)\varepsilon^3 - \gamma^3\varepsilon^2 + 3\alpha\beta\gamma^2\varepsilon + (\gamma^2 - 2\alpha\beta)\gamma^3\right\}$$

$$= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{(\varepsilon - \gamma)^2\,[\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\varepsilon + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)]}{\alpha\beta\gamma\lambda^2}$$

oder wegen $\lambda = (\varepsilon + \gamma)(\varepsilon - \gamma)$

$$\Omega = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\varepsilon^3 + 2\gamma\varepsilon^2 + (2\gamma^2 - \alpha\beta)\varepsilon + \gamma(\gamma^2 - 2\alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

woraus man schliesslich erhält

$$\Omega = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 + 2abc\,[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + abc]}{(bc + ca + ab)^2}.$$

Im speciellen Falle $a = b = c$ wird Ω gleich $\frac{17}{48}$ der umschriebenen Kugelfläche.

21. Man verlangt den Inhalt derjenigen Zone von der Fläche

$$z = \tfrac{1}{2} c\, l\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

welche durch die beiden, den Neigungswinkeln α und β entsprechenden Curven isokliner Normalen begrenzt wird.

Nach dem bisherigen Verfahren ergiebt sich

$$S = \frac{\pi (a^2 + b^2) c^2}{a b} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\nu}{\cos^3 \nu},$$

wo die noch übrige Integration leicht ausführbar ist.

22. Durch die Gleichung

$$z = c \arctan \frac{a y}{b x}$$

wird eine schraubenähnliche Fläche bestimmt, in welcher die von zwei Curven isokliner Normalen begrenzte Zone dieselbe Grösse hat wie in No. 21.

23. Bei der Fläche, deren Gleichung ist

$$z = \tfrac{1}{2} a\, l\left(\frac{x^2 + y^2}{c^2}\right) + b \arctan \frac{y}{x},$$

bilden die Horizontalprojectionen der Curven isokliner Normalen concentrische Kreise; sind r_0 und r_1 die Halbmesser zweier solcher Kreise, so ist die Zone zwischen den betreffenden Curven

$$S = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{a^2 + b^2 + r^2} \cdot dr.$$

24. Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}\right)^2$$

wird eine Fläche charakterisirt, deren Verticalspuren Kettenlinien, und deren Horizontalschnitte Ellipsen sind; die Zone zwischen den Curven isokliner Normalen, welche den Neigungswinkeln α und β entsprechen, hat dieselbe Fläche wie in No. 21.

§ 28.

Complanationen durch Doppelintegrale in räumlichen Polarcoordinaten.

Wie in § 26. mögen die räumlichen Polarcoordinaten eines Punktes mit r, ψ, ω bezeichnet werden und ausserdem sei in rechtwinkligen Coordinaten

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 1$$

die Gleichung der Ebene, welche die gegebene Fläche im Punkte $r\psi\omega$ berührt. Um zunächst A, B, C zu bestimmen, bringe man in Rechnung, dass die berührende Ebene durch drei Punkte gehen muss, deren Coordinaten sind:

$$\psi,\ \omega,\ r; \qquad \psi + d\psi,\ \omega,\ r + \frac{\partial r}{\partial \psi} d\psi; \qquad \psi,\ \omega + d\omega,\ r + \frac{\partial r}{\partial \omega} d\omega;$$

diess giebt folgende drei Gleichungen

$$A\cos\psi\cos\omega + B\cos\psi\sin\omega + C\sin\psi = \frac{1}{r},$$

$$A\sin\psi\cos\omega + B\sin\psi\sin\omega - C\cos\psi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi},$$

$$A\cos\psi\sin\omega - B\cos\psi\cos\omega = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \omega}.$$

Hieraus finden sich die Werthe

$$A = \frac{\cos\psi\cos\omega}{r} + \frac{\sin\psi\cos\omega}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi} + \frac{\sin\omega}{r^2\cos\psi}\cdot\frac{\partial r}{\partial \omega},$$

$$B = \frac{\cos\psi\sin\omega}{r} + \frac{\sin\psi\sin\omega}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi} - \frac{\cos\omega}{r^2\cos\psi}\cdot\frac{\partial r}{\partial \omega},$$

$$C = \frac{\sin\psi}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi},$$

und es ist nun, wenn N den Winkel zwischen der Berührungsebene und der Aequatorialebene bezeichnet,

$$\sec N = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{C} = \frac{\sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\cos\psi}.$$

Setzt man für den Augenblick $r\cos\psi = \varrho$, so ist $\varrho\, d\omega\, d\varrho$ das in ebenen Polarcoordinaten ausgedrückte Element der Aequatorialebene, mithin das Element der krummen Fläche

$$dS = \sec N \cdot \varrho\, d\omega\, d\varrho = \sec N \,.\, r\cos\psi\, d\omega \frac{\partial(r\cos\psi)}{\partial\psi} d\psi;$$

nach Ausführung der Differentiation in Beziehung auf ψ und Substitution des Werthes von $\sec N$ erhält man eine Formel für dS, aus welcher durch Integration folgt

$$S = \int\int \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2} \cdot r\, d\omega\, d\psi.$$

Selbstverständlich ist für r sein Werth aus der Polargleichung der Fläche einzusetzen; die Integrationsgrenzen für ψ und ω bestimmen sich durch die Begrenzung des zu quadrirenden Flächenstückes.

Beispiel 1. Die Gleichung der Fläche sei

$$r = c\frac{\sin\omega}{\sin\psi}$$

und als Horizontalprojection des zu quadrirenden Stückes werde ein Kreis genommen, welcher b zum Durchmesser hat und die y-Achse im Coordinatenanfange berührt.

Zunächst ergiebt sich

$$S = 2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\Psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2\omega\cos^2\psi + \cos^2\omega\sin^2\psi}}{\sin^3\psi} \sin\omega\, d\omega\, d\psi,$$

wobei die obere Integrationsgrenze Ψ auf folgende Weise bestimmt wird. Sind R, Ψ, ω die Polarcoordinaten eines Punktes auf der Begrenzungslinie der gesuchten Fläche, so ist zufolge der Gleichung der Fläche und wegen der gegebenen Horizontalprojection

$$R = c\frac{\sin\omega}{\sin\Psi}, \qquad R\cos\Psi = b\cos\omega$$

mithin

$$\cot\Psi = \frac{b}{c}\cot\omega.$$

Setzt man im Doppelintegrale $\cos\omega = u$, $\cot\psi = t$, $\cot\Psi = T$, so erhält man

$$S = 2c^2 \int_0^1 \int_0^T \sqrt{(1-u^2)\,t^2 + u^2}\cdot du\,dt; \qquad T = \frac{bu}{c\sqrt{1-u^2}},$$

und durch Ausführung der Integrationen

$$S = \tfrac{1}{4}\pi\left\{b\sqrt{b^2+c^2} + c^2 l\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}+b}{c}\right)\right\}.$$

Dasselbe Resultat hat sich in No. 13. des vorigen Paragraphen auf anderem Wege gefunden.

2. Eine Fläche sei durch die Polargleichung

$$r = c\,\frac{\cos 2\omega}{\sin\psi}$$

und eine in der xy-Ebene liegende Curve durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^3 = 16\,b^2x^2y^2$$

bestimmt; man sucht den Inhalt des Flächenstückes über dem zwischen den Achsen der x und y liegenden Blatte der Curve.

Durch Anwendung der Substitution

$$\cot\psi = 2\xi\cdot\tan 2\omega$$

findet man

$$S = \tfrac{1}{2}\pi\left\{b\sqrt{b^2+c^2} + c^2 l\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}+b}{c}\right)\right\}.$$

3. In der Horizontalebene xy sei eine Gerade AB construirt, welche von der x-Achse die Strecke $OA = a$, von der y-Achse das Stück $OB = b$ abschneidet; durch einen beliebigen, zwischen A und B liegenden Punkt Q dieser Geraden und durch die z-Achse werde eine Verticalebene gelegt und in letzterer über OQ als Durchmesser ein Kreis construirt; alle diese Kreise bilden in stetiger Aufeinanderfolge eine wulstförmige Fläche. Man verlangt den Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches zwischen den positiven Theilen der Coordinatenebenen enthalten ist.

Unter der Voraussetzung positiver a und b sei zur Abkürzung

$$AB = c, \qquad \sphericalangle\, OAB = \gamma;$$

es ergiebt sich dann

$$S = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\psi\;d\omega\,d\psi}{\sin^3(\omega+\gamma)}$$

das ist wenn nach Ausführung der Integrationen $cos\gamma = \frac{a}{c}$, $sin\gamma = \frac{b}{c}$ gesetzt wird,

$$S = \frac{\pi}{8}\left\{\frac{a^3 + b^3}{c} + \frac{a^2 b^2}{c^2} l\left(\frac{a + b + c}{a + b - c}\right)\right\}.$$

4. Lässt man in der vorigen Aufgabe an die Stelle der Geraden AB eine Lemniscate treten, für welche

$$r\,cos\psi = a\sqrt{cos\,2\omega}$$

ist, so erhält man für die Gesammtoberfläche des Lemniscatenwulstes

$$S = \tfrac{1}{2}\pi^2 a^2.$$

5. Nimmt man in No. 3. statt der Geraden AB eine Cardioide, für welche

$$r\,cos\psi = b\,(1 + cos\,\omega)$$

ist, so findet man als Gesammtoberfläche

$$S = \tfrac{16}{3}\pi b^2.$$

6. In No. 3. werde die Gerade AB durch die Fusspunktcurve einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse ersetzt, und zur Abkürzung sei $\sqrt{a^2 + b^2} = c$; es ergiebt sich dann für die Gesammtoberfläche

$$S = 2\pi c P,$$

wo P die Peripherie einer mit den Halbachsen $\frac{a^2}{c}$ und $\frac{b^2}{c}$ versehenen Ellipse bedeutet.

7. Von dem Mittelpunkte eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides denke man sich Senkrechte auf alle Berührungsebenen der Fläche herabgelassen; die Fusspunkte dieser Senkrechten bilden dann eine neue Fläche, deren Gleichung ist

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2;$$

man verlangt die Complanation dieser Fusspunktfläche.

In Polarcoordinaten ist die Gleichung der Fläche

$$r^2 = a^2 cos^2\psi\, cos^2\omega + b^2 cos^2\psi\, sin^2\omega + c^2 sin^2\psi;$$

der Complanationsformel gebe man die bequemere Gestalt

$$S = \int\int \sqrt{\left[r^4 + \left(r\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right] cos^2\psi + \left(r\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2} \cdot d\omega\, d\psi,$$

für den Octanten der Fusspunktfläche ergiebt sich dann

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^4 \cos^2\psi \cos^2\omega + b^4 \cos^2\psi \sin^2\omega + c^4 \sin^2\psi} \cdot \cos\psi \, d\omega \, d\psi$$

oder wenn

$$a^4 \cos^2\omega + b^4 \sin^2\omega - c^4 = Q$$

gesetzt wird,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{c^4 + Q \cos^2\psi} \cdot \cos\psi \, d\omega \, d\psi.$$

Benutzt man hier die Substitution

$$\frac{c^4 \sin^2\psi}{c^4 + Q \cos^2\psi} = u^2,$$

so erhält man das Integral in rationaler Form, nämlich

$$S = c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{(c^4 + Q) \, d\omega \, du}{(c^4 + Q u^2)^2}$$

$$= c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{(a^4 \cos^2\omega + b^4 \sin^2\omega) \, d\omega \, du}{[(a^4 \cos^2\omega + b^4 \sin^2\omega) \, u^2 + c^4 (1 - u^2)]^2}.$$

Durch Anwendung der weiteren Substitution

$$\tan\omega = \frac{a^2}{b^2} \tan\chi$$

wird einfacher

$$S = a^6 b^6 c^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{d\chi \, du}{[a^4 b^4 u^2 + c^4 (b^4 \cos^2\chi + a^4 \sin^2\chi) \, (1 - u^2)]^2}$$

oder endlich für $u = \sin\nu$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a^6 b^6 c^6 \cos\nu \, d\nu \, d\chi}{(b^4 c^4 \cos^2\nu \cos^2\chi + c^4 a^4 \cos^2\nu \sin^2\chi + a^4 b^4 \sin^2\nu)^2}.$$

Nach No. 19. des vorigen Paragraphen folgt hieraus, dass die Fusspunktfläche und das aus den Halbachsen

$$a_1 = \frac{bc}{a}, \quad b_1 = \frac{ca}{b}, \quad c_1 = \frac{ab}{c}$$

construirte Ellipsoid gleiche Oberflächen besitzen.

§ 29.

Vermischte Aufgaben über Doppelintegrale.

Nicht selten bieten Doppelintegrale die Eigenthümlichkeit, dass sich bei der einen Anordnung der Integrationen zwar die erste, nicht aber die zweite Integration ausführen lässt, dass hingegen bei umgekehrter Anordnung der Integrationen beide Integrationen ausführbar sind; die Zusammenstellung der so erhaltenen Resultate liefert dann den Werth eines einfachen bestimmten Integrales. So ist z. B.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\theta\, dx}{a^2 - b^2x^2\sin^2\theta} = \frac{1}{2ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta},$$

dagegen umgekehrt, wenn $a > b$ ist

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\, d\theta}{a^2 - b^2x^2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2a}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{\pi}{2ab}\arcsin\frac{b}{a}$$

mithin durch Vergleichung der beiderseitigen Resultate

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi\arcsin\frac{b}{a}, \qquad a > b.$$

Auf dieser Bemerkung beruht folgende Methode zur Ermittelung der Werthe gegebener einfacher Integrale. Man verwandele einen unter dem Integralzeichen vorkommenden Factor in ein schon bekanntes Integral mithin das gegebene einfache Integral in ein Doppelintegral und kehre in letzterem die Reihenfolge der Integrationen um.

Um hiernach den Werth von

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

zu finden erinnere man sich an die Gleichung

$$l\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right) = \int_0^1 \frac{2\alpha\beta\, dx}{\alpha^2 - \beta^2x^2}$$

und benutze sie für $\alpha = a$, $\beta = b \sin\theta$; es wird dann

$$W = 2ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 \frac{d\theta\, dx}{a^2 - b^2 x^2 \sin^2\theta},$$

und durch umgekehrte Anordnung der Integrationen

$$W = \pi \arcsin \frac{b}{a}.$$

Beispiel 1. Nach dem soeben benutzten Verfahren ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\left(\frac{a + b\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right) \sin\theta\, d\theta = \pi \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad a > b.$$

2. Durch Benutzung der Formel

$$\arctan \frac{\beta}{\alpha} = \int_0^1 \frac{\alpha\beta\, dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$$

findet man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arctan\left(\frac{b}{a}\sin\theta\right) \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{\pi}{2} l\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{a}\right).$$

3. Auf gleiche Weise gelangt man zu dem Resultate

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arctan\left(\frac{b}{a}\sin\theta\right) \sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}.$$

4. Durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{t} = \int_0^\infty e^{-tx}\, dx, \qquad t > 0$$

erhält man, wenn a, b, k endliche positive Grössen sind,

$$\int_k^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-k(a+x)}}{a + x}\, dx - \int_0^\infty \frac{e^{-k(b+x)}}{b + x}\, dx$$

oder, wenn rechter Hand im ersten Integrale $a + x = z$, im zweiten $b + x = z$ gesetzt wird,

$$\int_k^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_a^b \frac{e^{-kz}}{z} dz.$$

Geht man zur Grenze für unendlich abnehmende k über, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = l\left(\frac{b}{a}\right), \qquad a > 0,\ b > 0.$$

5. Benutzt man die vorige Substitution für $t = 1 + u^2$ und nachher die Formel 13. in § 21., so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\left(x + \frac{h^2}{x}\right)} dx$$

oder für $x = \xi^2$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2} du = \sqrt{\pi} \cdot e^{-2h} \int_0^\infty e^{-\left(\xi - \frac{h}{\xi}\right)^2} d\xi.$$

Das noch übrige Integral findet sich mittelst der Substitution

$$\xi - \frac{h}{\xi} = \eta;$$

es wird nämlich, positive h vorausgesetzt,

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2hu}{1+u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2h} \int_{-\infty}^\infty \left\{1 + \frac{\eta}{\sqrt{4h + \eta^2}}\right\} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\pi}{2} e^{-2h}.$$

Für $u = \frac{\theta}{\alpha}$, $2h = \alpha\beta$ folgt hieraus die in No. 17. des § 21. auf anderem Wege abgeleitete Formel.

6. Nach den in No. 15. des § 22. gegebenen Entwickelungen darf die Function

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-z} dz$$

als ebenso bekannt wie $l\mu$, $\sin\mu$ und dergleichen angesehen werden, und es ist daher genügend, ein Integral durch Gammafunctionen auszudrücken. Setzt man noch $z = ku$, wo k eine positive, die Null übersteigende Grösse sein muss, so ist auch

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-ku}\, du = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}$$

so wie umgekehrt

$$\frac{1}{k^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-ku}\, du.$$

Von der letzteren Formel lässt sich Gebrauch machen zur Ermittelung des Integralwerthes

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta.$$

Man erhält nämlich für $k = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ und $\mu = p + q$

$$W = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta\, du$$

ferner für $u = r^2$ und wenn man $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ setzt d. h. von Polarcoordinaten zu rechtwinkligen Coordinaten übergeht,

$$W = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2p-1} y^{2q-1} e^{(ax^2 + by^2)}\, dx\, dy.$$

Dieses Doppelintegral zerfällt in die beiden Factoren

$$\int_0^\infty x^{2p-1} e^{-ax^2}\, dx \text{ und } \int_0^\infty y^{2q-1} e^{-by^2}\, dy,$$

deren Werthe sich mittelst der Substitutionen $x^2 = \xi$ und $y^2 = \eta$ ergeben. Das Endresultat lautet bei positiven a und b

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q}.$$

Für $\cos^2\theta = z$ erhält dasselbe die algebraische Form

$$\int_0^1 \frac{z^{p-1}(1-z)^{q-1}\, dz}{[az + b(1-z)]^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q},$$

oder, wenn noch die Substitution

$$\frac{z}{1-z} = x$$

angewendet wird

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(ax+b)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q}.$$

Im speciellen Falle $q = 1 - p$ entsteht die Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{ax+b} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \cdot \frac{1}{a^p b^{1-p}}, \qquad 0 < p < 1.$$

7. Die vorigen Formeln lassen sich wieder zur Reduction des folgenden Doppelintegrales benutzen

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 x^m \sqrt{(\cos^2\varphi + x^2 \sin^2\varphi)^{n-1}} \cdot \tan^p\varphi \, d\varphi \, dx.$$

Um zunächst das auf x bezügliche Integral in eine rationale Form zu bringen, substituirt man

$$\frac{x}{\sqrt{\cos^2\varphi + x^2 \sin^2\varphi}} = y;$$

kehrt man nachher die Reihenfolge der Integrationen um, so wird

$$V = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)} \int_0^1 \frac{y^m\,dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}(p+1)}}.$$

Ferner liefert die Substitution $y = \sin\psi$

$$\int_0^1 \frac{y^m\,dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}(p+1)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(1+\frac{m-p}{2}\right)}$$

mithin ist zusammen

$$V = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{4\,\Gamma\left(1+\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{m-p}{2}\right)}.$$

Beachtet man noch die Relation

$$\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}(1-p)\pi} = \frac{\pi}{\cos\frac{1}{2}p\pi},$$

so gelangt man zu dem Endresultate

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 x^m \sqrt{(\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi)^{n-1}}\cdot \tan^p\varphi\, d\varphi\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\cos\frac{1}{2}p\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-p}{2}+1\right)},$$

wobei p ein positiver echter Bruch sein muss, wenn der Integralwerth endlich bleiben soll.

Wählt man m, n, p so, dass sich eine der beiden Integrationen leicht ausführen lässt, so erhält man den Werth eines einfachen bestimmten Integrales; z. B. für $m = n = 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi\right)}{\cos^p\varphi\,\sin^{1-p}\varphi}\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi^3}}{4\cos\frac{1}{2}p\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}.$$

Aehnliche Fälle wird man leicht finden.