Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel VII. Die dreifachen Integrale

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel VII.

Die dreifachen Integrale.

§ 30.

Allgemeine Formeln und Regeln.

1. Seiner ursprünglichen Bedeutung nach ist das bestimmte dreifache Integral

$$W = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

der Grenzwerth einer dreifachen Summe, deren Summanden die Form $F(x, y, z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ haben; die Integrationsgrenzen bestimmen hierbei den Spielraum, welcher den Variabelen x, y, z angewiesen ist. Denkt man sich x, y, z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume und den Raum mit einer nichthomogenen Masse erfüllt, deren Dichtigkeit im Punkte xyz durch die Function $F(x, y, z)$ ausgedrückt wird, so ist $dx\, dy\, dz$ der körperliche Inhalt eines aus den Kanten dx, dy, dz construirten Parallelepipedes d. h. eines Volumenelementes, ferner bedeutet $F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ die in jenem Volumenelemente enthaltene Masse d. h. kurz das Massenelement; endlich ist das obige dreifache Integral die Summe aller nach den drei Dimensionen des Raumes vertheilten Massenelemente d. h. die Gesammtmasse eines Körpers, dessen Begrenzung durch die Integrationsgrenzen bestimmt ist. Der Quotient aus W und dem Volumen V des Körpers giebt nachher die mittlere Dichtigkeit des betreffenden Körpers.

In allen Fällen, wo die erste, auf z bezügliche Integration direct ausgeführt werden kann, reducirt sich das dreifache Integral sofort auf ein Doppelintegral, dessen weitere Behandlung den Gesetzen des vorigen Capitels unterliegt. Lässt sich dagegen die erste Integration entweder gar nicht in geschlossener Form bewirken oder liefert deren Ausführung sehr verwickelte Formeln, so greift man zu den in 2. und 3. erwähnten Mitteln.

2. Die Reihenfolge der Integrationen darf geändert werden, sobald man die hierbei nöthigen Aenderungen der Integrationsgrenzen beachtet. Am einfachsten ist die Sache in dem Falle, wo alle sechs Integrationsgrenzen absolute Constanten sind, d. h. wenn der Spielraum des Punktes xyz aus einem rechtwinkligen Parallelepipede besteht, dessen Seitenflächen parallel zu den Coordinatenebenen liegen; die verschiedene Anordnung der Integrationen bedingt dann nur eine verschiedene Stellung aber keine Werthänderung der Grenzen. So ist z. B.

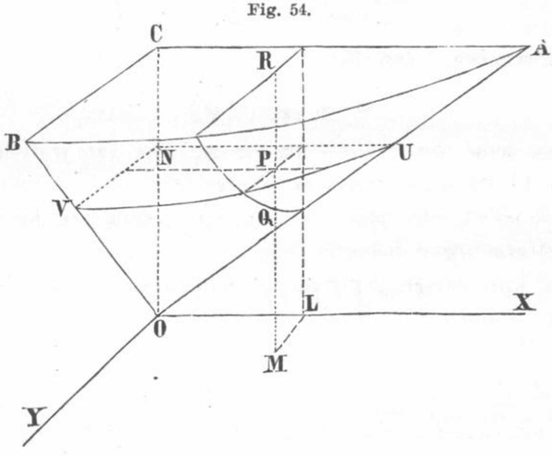
$$\int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b}\int_{c_0}^{c} F(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz = \int_{b_0}^{b}\int_{c_0}^{c}\int_{a_0}^{a} F(x,\ y,\ z)\, dy\, dz\, dx.$$

Als Beispiel für den Fall, wo die Grenzen geändert werden müssen, diene das Integral

$$W = \int\int\int \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz,$$

worin dem Punkte xyz ein aus den Geraden $AC = a$, $BC = b$, $OC = c$ construirter Kegelquadrant (Fig. 54.) als Spielraum angewiesen sei.

Fig. 54.



Integrirt man zuerst nach z und bezeichnet mit Q und R die Punkte, in welchen die Gerade $MP = z$ den Kegelmantel und die Kegelbasis schneidet, so sind die Grenzen für z

$$z_0 = MQ = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \qquad Z = MR = c;$$

nachher müssen die Grenzen für $OL = x$ und $LM = y$ so gewählt werden, dass der Punkt R alle Stellen der Ellipsenquadrantenfläche ACB betritt, woraus folgt

$$y_0 = 0, \quad Y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}; \qquad x_0 = 0, \quad X = a.$$

Schreibt man dagegen

$$W = \int\int\int \frac{xy}{\sqrt{z}}\, dz\, dx\, dy,$$

so bleibt anfangs z constant, und der Punkt P ist in der Querschnittsfläche herumzuführen, welche in der Höhe $ON = MP = z$ parallel zur xy-Ebene liegt; dieser Querschnitt bildet eine aus den Halbachsen

$$NU = \frac{az}{c}, \qquad NV = \frac{bz}{c}$$

construirte Ellipse, und daher ist hier

$$y_0 = 0, \quad Y = b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad x_0 = 0, \quad X = \frac{az}{c};$$

um endlich alle Querschnitte des Körpers zu durchlaufen, muss z von

$$z_0 = 0 \text{ bis } Z = c$$

ausgedehnt werden. Das Resultat ist in beiden Fällen

$$W = \tfrac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c},$$

jedoch verursacht die zweite Anordnung der Integrationen etwas geringeren Rechnungsaufwand als die erste.

Der so eben erwähnte Vortheil tritt besonders hervor, wenn man das allgemeinere Integral

$$W = \int\int\int xy\, f(z)\, dx\, dy\, dz$$

betrachtet, wo $f(z)$ eine beliebige Function von z, und der Integrationsbereich für x, y, z derselbe wie vorhin sein möge. Fängt man die Integrationen mit z an, so bleibt schon die erste Integration unausführbar, dagegen erhält man bei der anderen Anordnung y, x, z

$$W = \frac{a^2 b^2}{8 c^4} \int_0^c z^4 f(z)\, dz.$$

3. Das dreifache Integral

$$W = \int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus einem auf z bezüglichen einfachen Integrale und aus einem nachfolgenden Doppelintegrale in Beziehung auf x und y. Letzteres gestattet die Einführung von ebenen Polarcoordinaten und es bezeichne zu diesem Zwecke p die Horizontalprojection des Radiusvector OP, sowie ω den Winkel zwischen der x-Achse und p; es ist dann

$$x = p \cos\omega, \qquad y = p \sin\omega, \qquad dx\, dy = p\, d\omega\, dp$$

mithin

$$\int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int F(p\cos\omega, p\sin\omega, z)\, p\, d\omega\, dp\, dz.$$

Die Grössen p, ω, z bilden ein System sogenannter Cylindercoordinaten mit der Polarachse z.

Bezeichnet r den Radiusvector OP, und ψ den Neigungswinkel von OP gegen die Ebene xy, so lässt sich wieder das in der vorigen Gleichung enthaltene Doppelintegral mit den Variabelen p und z dadurch transformiren, dass man

$$p = r \cos\psi, \qquad z = r \sin\psi, \qquad dp\, dz = r\, d\psi\, dr$$

substituirt; diess giebt

$$\int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\int\int F(r\cos\psi \cos\omega, r\cos\psi \sin\omega, r\sin\psi)\, r^2 \cos\psi\, d\omega\, d\psi\, dr.$$

Die Grössen r, ψ, ω bilden das gewöhnliche System räumlicher Polarcoordinaten, welches man auch als System von Kugelcoordinaten bezeichnen kann; dabei ist die z-Achse die Polarachse, die xy-Ebene die Aequatorebene, ω die geographische Länge, ψ die geographische Breite des Punktes P, welchen man sich auf einer mit dem Radius r beschriebenen Kugel denken kann.

Die Integrationsgrenzen für die neuen Coordinaten sind besonders zu bestimmen, indem man auch die Begrenzung des gegebenen Körpers in Polarcoordinaten ausdrückt.

Ist z. B. dem Punkte xyz der vorhin betrachtete Kegelquadrant als Spielraum angewiesen, so fängt r mit 0 an und hört mit demjenigen r auf, welches entsteht, wenn OP bis zum Durchschnitte mit der Begrenzungsebene ACB verlängert wird; die Grenzen für r sind demnach

$$r_0 = 0 \text{ und } R = c \sec\psi.$$

Ferner hat man als Grenzen für ψ die Werthe $\psi = \psi_0$ und $\Psi = \frac{1}{2}\pi$, wobei sich ψ_0 aus der Gleichung der Kegelfläche findet, indem man letztere in Polarcoordinaten transformirt, also

$$\psi_0 = arctan\left[c\sqrt{\left(\frac{cos\,\omega}{a}\right)^2 + \left(\frac{sin\,\omega}{b}\right)^2}\right], \qquad \Psi = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Endlich sind

$$\omega_0 = 0 \text{ und } \Omega = \tfrac{1}{2}\pi$$

die Integrationsgrenzen für ω.

Nicht selten wählt man die x-Achse zur Polarachse, mithin die yz-Ebene zur Aequatorialebene und bezeichnet mit θ den Winkel zwischen x und r (das Complement der Breite), sowie mit χ den Neigungswinkel der Ebene von θ gegen die xy-Ebene (die Länge); es ist dann analog

$$\int\int\int F(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\int\int F(r\,cos\theta,\ r\,sin\theta\ cos\chi,\ r\,sin\theta\ sin\chi)\ r^2 sin\theta\ d\chi\ d\theta\ dr,$$

wobei die Integrationsgrenzen auf ähnliche Weise wie vorhin bestimmt werden.

4. Wenn überhaupt statt der ursprünglichen Variabelen x, y, z drei neue Variabele r, s, t eingeführt werden sollen, welche mit jenen durch drei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(r,\, s,\, t), \qquad y = \psi(r,\, s,\, t), \qquad z = \chi(r,\, s,\, t)$$

verbunden sind, so geschieht diess mittelst der allgemeinen Formel

$$\int\int\int F(x,\, y,\, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int F(\varphi,\, \psi,\, \chi)\, N\, dr\, ds\, dt,$$

worin N folgenden Ausdruck bezeichnet

$$N = \frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

Die Integrationsgrenzen für r, s, t sind hier besonders zu bestimmen.

§ 31.

Beispiele für dreifache Integrationen.

1. Wird dem Punkte xyz der im vorigen Paragraphen erwähnte Kegelquadrant als Spielraum angewiesen, so ergiebt sich

$$\int\int\int x^m \, dx \, dy \, dz = \frac{a^{m+1} b c}{(m+2)(m+3)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m \omega \, d\omega.$$

2. Unter der nämlichen Bedingung findet man

$$\int\int\int z^m \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a b c^{m+1}}{m+3}.$$

In dem speciellen Falle $m = -1$ ist der Integralwerth unabhängig von c.

3. Wenn die Dichtigkeit im Punkte xyz durch die Formel

$$\Delta = Ax + By + Cz$$

bestimmt ist, so beträgt die Masse des vorigen Kegelquadranten

$$M = \tfrac{1}{4} a b c \left(\frac{Aa + Bb}{3} + \frac{\pi C c}{4} \right).$$

4. Die Kegelsubstanz bestehe aus unendlich dünnen Kugelschaalen, von denen jede für sich homogen sein möge, und es wachse die Dichtigkeit proportional dem Quadrate der Entfernung, also

$$\Delta = x^2 + y^2 + z^2;$$

es ist dann die Masse des ganzen Kegels

$$M = \tfrac{1}{20} \pi (a^2 + b^2 + 4c^2).$$

5. Der Annahme

$$\Delta = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

entspricht eine Zusammensetzung aus gewissen ellipsoidischen Schichten; die Masse des vorigen Kegels beträgt dann

$$M = \tfrac{3}{10} \pi a b c.$$

6. Nimmt man

$$\Delta = \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2},$$

was einer ähnlichen Zusammensetzung entspricht, so folgt als Masse des Kegels

$$M = \tfrac{1}{4} \pi l 2 \cdot a b c.$$

7. In einem mit dem Radius R beschriebenen Kugeloctanten ändere sich die Dichtigkeit nach dem Gesetze

$$\varDelta = \frac{xyz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}};$$

man sucht die Masse des Körpers.

Hier können ebensowohl rechtwinklige als polare Coordinaten benutzt werden; im letzteren Falle ist es bequem, $\sin^2\omega = u$ und $\sin^2\psi = t$ zu substituiren; man erhält

$$M = \frac{R^5}{15} \cdot \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)}.$$

8. Unter der Voraussetzung, dass der Punkt xyz den zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen enthaltenen Octanten eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides nicht überschreitet, soll der Werth von

$$M = \int\int\int \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entwickelt werden.

Substituirt man $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$, so kommt diese Aufgabe auf die vorige zurück, und es ergiebt sich

$$M = \frac{a^2 b^2 c^2}{15} \cdot \frac{bc + ca + ab}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

9. Wenn x, y, z an die vorige Bedingung geknüpft worden, ist

$$\int\int\int \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{8(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ b^2 c^2 l\left(\frac{c}{b}\right) + c^2 a^2 l\left(\frac{a}{c}\right) + a^2 b^2 l\left(\frac{b}{a}\right) \right\}.$$

10. Unter denselben Bedingungen ist

$$\int\int\int \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{(b + c)(c + a)(a + b)}.$$

11. Unter den vorigen Bedingungen ist

$$\int\int\int \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{4(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ a^2 l\left(\frac{c}{b}\right) + b^2 l\left(\frac{a}{c}\right) + c^2 l\left(\frac{b}{a}\right) \right\}.$$

12. Unter denselben Voraussetzungen ist

$$\int\int\int \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{abc\,(a+b+c)}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)}\,.$$

13. Zwei ähnliche concentrische Ellipsoide, von denen das grössere die Halbachsen a, b, c, das kleinere die Halbachsen εa, εb, εc besitzen möge, umschliessen eine ellipsoidische Schaale; innerhalb derselben sei die Dichtigkeit bestimmt durch die Gleichung

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

welcher eine Uebereinanderlagerung von concentrischen unendlich dünnen homogenen Kugelschaalen entspricht. Man sucht die Masse der ellipsoidischen Schaale.

Durch unmittelbare Einführung von Polarcoordinaten ergiebt sich

$$M = 8\,l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\,d\omega\,d\psi = 4\pi\,l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

14. Wird in der vorigen ellipsoidischen Schaale die Dichtigkeit durch die Gleichung

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

bestimmt, so ist die Masse

$$M = \tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

15. Gesucht wird die Masse eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides, innerhalb dessen die Dichtigkeit jedes Massenelementes umgekehrt proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers ist.

Durch unmittelbare Einführung von Polarcoordinaten mittelst der Formeln

$$x = r\cos\psi\cos\omega,\quad y = r\cos\psi\sin\omega,\quad z = r\sin\psi$$

erhält man, wenn in der Reihenfolge r, ω, ψ integrirt und $\sin\psi = t$ gesetzt wird,

$$M = 2\pi ab\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2-c^2}{c^2}t^2\right)\left(1+\frac{b^2-c^2}{c^2}t^2\right)}}\,.$$

Nimmt man dagegen die x-Achse zur Polarachse und setzt dem entsprechend

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\chi, \quad z = r\sin\theta\sin\chi,$$

so findet man für $\cos\theta = u$

$$M = 2\pi bc\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}u^2\right)\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}u^2\right)}}.$$

Die Identität beider Ausdrücke ist mittelst der Substitution

$$t = \frac{cu}{\sqrt{a^2-(a^2-c^2)u^2}}$$

leicht zu constatiren. Im Falle $a > b > c$ lässt sich M durch die Substitution

$$u = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cdot\sin\varphi$$

auf ein elliptisches Integral erster Art zurückführen. Wenn das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, kann die noch übrige Integration in geschlossener Form vollzogen werden.

16. Man sucht die Masse eines aus den Halbachsen a_1, b_1, c_1 construirten Ellipsoides, innerhalb dessen die Dichtigkeit jedes Massenelementes umgekehrt proportional ist dem Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers.

Bei directer Einführung von Polarcoordinaten bleibt nach der auf r bezüglichen Integration ein unbequemes irrationales Doppelintegral übrig; man vermeidet letzteres dadurch, dass man erst $x = a_1\xi$, $y = b_1\eta$, $z = c_1\zeta$, nachher

$$\xi = \varrho\cos\theta, \quad \eta = \varrho\sin\theta\cos\chi, \quad \zeta = \varrho\sin\theta\sin\chi$$

setzt und in der Reihenfolge ϱ, χ, θ integrirt; für $\cos\theta = u$ ergiebt sich dann

$$M = 4\pi a_1\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-\frac{b_1^2-a_1^2}{b_1^2}u^2\right)\left(1-\frac{c_1^2-a_1^2}{c_1^2}u^2\right)}}.$$

Giebt man den Halbachsen die Werthe

$$a_1 = \frac{bc}{2a}, \qquad b_1 = \frac{ca}{2b}, \qquad c_1 = \frac{ab}{2c},$$

so wird die Masse des Ellipsoides gleich der Masse des in No. 15. betrachteten Ellipsoides.

17. Ein Körper sei von der Fusspunktfläche eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides begrenzt, und innerhalb desselben sei die Dichtigkeit jedes Massenelementes umgekehrt proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkte des Körpers; die Masse ist dann

$$M = \tfrac{2}{3}\pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

18. Wenn in dem vorigen Körper die Dichtigkeit jedes Elementes direct proportional seinem Abstande vom Mittelpunkte genommen wird, so ist die Masse

$$M = \tfrac{1}{15}\pi\left\{3(a^4 + b^4 + c^4) + 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\right\}.$$

19. In dem vorigen Körper sei die Dichtigkeit jedes Elementes umgekehrt proportional dem Quadrate seines Abstandes vom Coordinatenanfange; es ergiebt sich dann für

$$x = r\,cos\theta, \quad y = r\,sin\theta\,cos\chi, \quad z = r\,sin\theta\,sin\chi$$

und wenn nach Ausführung der auf r bezüglichen Integration $cos\theta = t$ gesetzt wird,

$$M = 8\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \sqrt{s + (a^2 - s)t^2}\cdot d\chi\,dt, \qquad s = b^2 cos^2\chi + c^2 sin^2\chi.$$

Das Integral erhält eine rationale Form durch die Substitution

$$\frac{at}{\sqrt{s + (a^2 - s)t^2}} = u,$$

nachher lässt sich die auf χ bezügliche Integration ausführen, so dass übrig bleibt

$$M = 2\pi a\int_0^1 \left\{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2u^2} + \frac{1 - \mu^2}{1 - \mu^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1 - \lambda^2u^2)(1 - \mu^2u^2)}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

Bezeichnet S die Oberfläche eines aus den Halbachsen a, $\frac{ab}{c}$ und c construirten Ellipsoides, so ist hiernach

$$M = \frac{b}{ac}S.$$

20. Um einen Punkt C herum ist eine Substanz so geschichtet, dass die Dichtigkeit eines im Punkte P befindlichen Massenelementes $=\frac{1}{CP}$ ist; aus dieser Substanz ist eine Kugelschaale geschnitten, deren Mittelpunkt O nicht mit C zusammenfällt; man sucht die Masse derselben.

Bezeichnet a den kleineren, b den grösseren Radius der Kugelschaale, c die Entfernung OC, und wird letztere zur Polarachse genommen, so ist

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{r^2 \sin\theta \, d\chi \, d\theta \, dr}{\sqrt{c^2-2cr\cos\theta+r^2}}$$

oder wenn in der Reihenfolge χ, θ, r integrirt wird

$$M=\frac{2\pi}{c}\int_a^b\left(\sqrt{c^2+2cr+r^2}-\sqrt{c^2-2cr+r^2}\right) r \, dr.$$

Um die Vorzeichen der Wurzeln zu bestimmen, müssen die drei Fälle unterschieden werden, ob c innerhalb des von der Kugelschaale umschlossenen Hohlraumes liegt ($c < a < b$), oder im ausgeschlossenen äusseren Raume ($c > b > a$), oder in der Masse der Kugelschaale selber ($a < c < b$). Unter der ersten Voraussetzung sind alle r grösser als c, und die Entfernung $CP=\sqrt{c^2-2cr\cos\theta+r^2}$ geht für $\theta=\pi$ in $r+c$, dagegen für $\theta=0$ in $r-c$ über; diess giebt

$$M=2\pi(b^2-a^2), \qquad c<a<b.$$

Im zweiten Falle sind alle $r<c$, und die Grenzwerthe von CP werden $c+r$ und $c-r$; daher ist

$$M=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{c}, \qquad c>b>a.$$

Die Masse der Kugelschaale beträgt hier ebensoviel, als wenn dieselbe homogen wäre und die im Mittelpunkte O vorhandene Dichtigkeit hätte.

Im letzten Falle sind die verschiedenen r theils grösser, theils kleiner als c; sie lassen sich dadurch trennen, dass man das von a bis b gehende Integral in zwei, von a bis c und von c bis b gehende Integrale zerlegt; man erhält dann

$$M=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{c^3-a^3}{c}+2\pi(b^2-c^2), \qquad a<c<b.$$

21. Die vorige Aufgabe werde dahin verallgemeinert, dass man die im Punkte P stattfindende Dichtigkeit gleich einer beliebigen Function von CP setzt; für $CP = u$ findet man

$$M = \frac{2\pi}{c} \int_a^b r\,dr \int_{r-c}^{r+c} u\,f(u)\,du, \qquad c < a < b,$$

$$M = \frac{2\pi}{c} \int_a^b r\,dr \int_{c-r}^{c+r} u\,f(u)\,du, \qquad c > b > a,$$

$$M = \frac{2\pi}{c} \left\{ \int_a^c r\,dr \int_{c-r}^{c+r} u\,f(u)\,du + \int_c^b r\,dr \int_{r-c}^{r+c} u\,f(u)\,du \right\}, \quad a < c < b.$$

Die noch übrigen Doppelintegrale lassen sich ganz allgemein auf einfache Integrale zurückführen, wenn man erst

$$\int u\,f(u)\,du = F(u)$$

setzt, nachher die theilweise Integration benutzt und schliesslich $F'(u) = u\,f(u)$ restituirt; diess giebt

$$M = \frac{\pi}{c} \left\{ b^2 \int_{b-c}^{b+c} u\,f(u)\,du - a^2 \int_{a-c}^{a+c} u\,f(u)\,du \right.$$

$$\left. - \int_a^b [(r+c)\,f(r+c) - (r-c)\,f(r-c)]\,r^2\,dr \right\}, \quad c < a < b,$$

$$M = \frac{\pi}{c} \left\{ b^2 \int_{c-b}^{c+b} u\,f(u)\,du - a^2 \int_{c-a}^{c+a} u\,f(u)\,du \right.$$

$$\left. - \int_a^b [(c+r)\,f(c+r) + (c-r)\,f(c-r)] r^2\,dr \right\}, \qquad c > b > a,$$

$$M = \frac{\pi}{c} \left\{ b^2 \int_{b-c}^{b+c} u\,f(u)\,du - \int_a^c [(c+r)\,f(c+r) + (c-r)\,f(c-r)]\,r^2\,dr \right.$$

$$\left. - a^2 \int_{c-a}^{c+a} u\,f(u)\,du - \int_c^b [(r+c) f(r+c) - (r-c) f(r-c)] r^2 dr \right\}, \ a < c < b.$$

22. Unter dem Potential eines gegebenen Körpers in Beziehung auf einen bestimmten Punkt versteht man denjenigen Ausdruck, welcher entsteht, wenn jedes Massenelement durch seinen Abstand von jenem Punkte dividirt und die Summe aller derartigen Quotienten gebildet wird. Bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines im Innern des Körpers liegenden Punktes, $f(x, y, z)$ die an derselben Stelle vorhandene Dichtigkeit, endlich α, β, γ die gleichfalls rechtwinkligen Coordinaten des gegebenen Punktes, so ist

$$P = \int\int\int \frac{f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}}$$

das Potential eines Körpers in Beziehung auf den Punkt $\alpha\beta\gamma$, vorausgesetzt, dass der Punkt xyz die Grenzflächen des Körpers nicht überschreitet. Die in der Aufgabe 20. angegebenen Werthe für M sind hiernach die Werthe des Potentiales einer homogenen, die Dichtigkeit 1 besitzenden Kugelschaale in Beziehung auf einen um c von ihrem Mittelpunkte entfernten Punkt C.

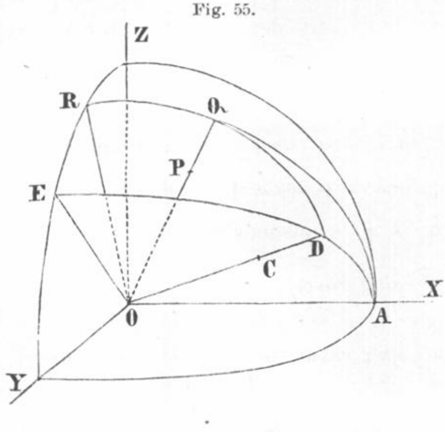
Um dieselbe Aufgabe allgemeiner zu behandeln, sind die in obiger Formel angedeuteten Integrationen auf alle positiven und negativen, der Bedingung

$$a^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq b^2$$

genügenden x, y, z auszudehnen; diese Operation wird durch Polarcoordinaten wesentlich erleichtert.

Nimmt man die x-Achse zur Polarachse (Fig. 55.), $OP = r$, $\angle POX = \varphi$ und bezeichnet mit ψ den Winkel ROY, welchen die Ebene des Winkels φ mit der xy-Ebene bildet, so ist einerseits

Fig. 55.



$$x = r\, cos\varphi,$$
$$y = r\, sin\varphi\, cos\psi,$$
$$z = r\, sin\varphi\, sin\psi;$$

dem analog sei c der Radiusvector des Punktes $\alpha\beta\gamma$ oder C, $\angle COX = \lambda$, $\angle EOY = \mu$ mithin

$$\alpha = c\, cos\lambda, \qquad \beta = c\, sin\lambda\, cos\mu, \qquad \gamma = c\, sin\lambda\, sin\mu,$$

für den Winkel COP, welcher τ heissen möge, ergiebt sich dann

$$\cos\tau = \cos\lambda \cos\varphi + \sin\lambda \sin\varphi \cos(\psi - \mu)$$

und für das Potential

$$P = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\tau + r^2}} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi;$$

hier sind noch die Werthe von x, y, z, τ einzusetzen, was der Kürze wegen unterlassen wurde.

Von den zusammengehörigen Coordinatensystemen x, y, z und r, φ, ψ gehe man nun zu zwei neuen Systemen x_1, y_1, z_1 und r, τ, ω über, worin die feste Gerade $OC = c$ die Polarachse und die Ebene EOX des Winkels λ die Ebene $x_1 y_1$ ist. Nennt man A, D, Q die Punkte, in welchen die ursprüngliche x-Achse und die Vectoren c, r die eine Begrenzungsfläche der Kugelschaale schneiden, so entsteht ein sphärisches Dreieck, worin $\angle DAQ = \psi - \mu$, die Seite $AD = \lambda$ und die Seite $AQ = \varphi$ ist; dem Winkel φ im früheren Polarsysteme entspricht im neuen Systeme die Seite $DQ = \tau$ und dem Winkel ψ der Winkel $EDQ = \omega = 180^0 - \angle ADQ$. Es gelten nun die sphärisch-trigonometrischen Formeln

$$\cos\varphi = \cos\lambda \cos\tau - \sin\lambda \sin\tau \cos\omega,$$

$$\sin\varphi \cos(\psi - \mu) = \sin\lambda \cos\tau + \cos\lambda \sin\tau \cos\omega,$$

$$\sin\varphi \sin(\psi - \mu) = \sin\tau \cos\omega;$$

entwickelt man aus den letzten die Werthe von $\sin\varphi \cos\psi$ und $\sin\varphi \sin\psi$ und multiplicirt nachher mit dem Radiusvector r, welcher beiden Polarsystemen gemeinschaftlich angehört, so erhält man

$$x = r(\cos\lambda \cos\tau - \sin\lambda \sin\tau \cos\omega),$$

$$y = r[\sin\lambda \cos\mu \cos\tau + (\cos\lambda \cos\mu \cos\omega - \sin\mu \sin\omega) \sin\tau],$$

$$z = r[\sin\lambda \sin\mu \cos\tau + (\cos\lambda \sin\mu \cos\omega + \cos\mu \sin\omega) \sin\tau],$$

oder, wenn λ und μ durch α, β, γ, c ausgedrückt werden,

$$x = \frac{r}{c}\left(\alpha \cos\tau - \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot \sin\tau \cos\omega\right),$$

$$y = \frac{r}{c}\left(\beta \cos\tau + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \sin\tau \cos\omega - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \sin\tau \sin\omega\right),$$

$$z = \frac{r}{c}\left(\gamma \cos\tau + \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \sin\tau \cos\omega + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \sin\tau \sin\omega\right).$$

Das neue Volumenelement ist $r^2 \sin\tau\, dr\, d\tau\, d\omega$, die Integrationsgrenzen bleiben für r, τ, ω die nämlichen wie für r, φ, ψ, und so ist

$$P = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)\, r^2 \sin\tau}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\tau + r^2}}\, dr\, d\tau\, d\omega,$$

worin noch die vorigen Werthe von x, y, z einzusetzen sind. Hiernach findet man leicht die folgenden Werthe des Potentiales.

a. Wenn die Substanz aus unendlich dünnen parallelen ebenen Schichten besteht, und die Dichtigkeit

$$\varDelta = Ax + By + Cz$$

ist, so gelten die drei Formeln

$$P = \frac{2}{3}\pi(b^2 - a^2)(A\alpha + B\beta + C\gamma), \qquad c < a < b,$$

$$P = \frac{4\pi}{15} \cdot \frac{(b^5 - a^5)(A\alpha + B\beta + C\gamma)}{c^3}, \qquad c > b > a,$$

$$P = \frac{2\pi}{15}\left(5b^2 - 3c^2 - 2\frac{a^5}{c^3}\right)(A\alpha + B\beta + C\gamma), \qquad a < c < b.$$

b. Wenn die Substanz aus unendlich dünnen concentrischen Kugelschichten besteht und

$$\varDelta = (\alpha_1 - x)^2 + (\beta_1 - y)^2 + (\gamma_1 - z)^2$$

ist, so ergeben sich durch Einführung der abkürzenden Zeichen

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = G, \qquad \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma = H$$

die folgenden Werthe des Potentiales

$$P = \frac{1}{3}\pi(b^2 - a^2)\left[6G - 4H + 3(a^2 + b^2)\right], \qquad c < a < b,$$

$$P = \frac{4\pi}{15}\left\{\frac{5(b^3 - a^3)G}{c} - \frac{(b^5 - a^5)(2H - 3c^2)}{c^3}\right\}, \qquad c > b > a,$$

$$P = \frac{\pi}{15}\left\{10\left(3b^2 - c^2 - 2\frac{a^3}{c}\right)G - 4\left(5b^2 - 3c^2 - 2\frac{a^5}{c^3}\right)H \right.$$
$$\left. + 3\left(5b^4 - 3c^4 - 4\frac{a^5}{c}\right)\right\} \qquad a < c < b.$$