Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel IX. Differentialgleichungen erster Ordnung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel IX.

Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 36.

Allgemeine Regeln.

1. Die Integration einer Differentialgleichung zwischen den Variabelen x, y und $\frac{dy}{dx}$ ist am einfachsten, wenn die Sonderung der Variabelen ausgeführt, d. h. wenn die Differentialgleichung auf die Form

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0$$

gebracht werden kann, wobei $\varphi(x)$ eine Function von x allein, und ebenso $\psi(y)$ eine Function von y allein bezeichnet. Durch Integration entsteht nämlich sofort die allgemeine Integralgleichung

$$\int\varphi(x)\,dx + \int\psi(y)\,dy = Const.$$

2. Wenn eine Differentialgleichung homogen, d. h. unter der Form

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

enthalten ist, so lässt sich zwar im Allgemeinen die Sonderung der Variabelen nicht bewirken, substituirt man aber

$$\frac{y}{x} = t \text{ mithin } y = xt, \qquad \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t,$$

so kann man in der neuen Differentialgleichung zwischen x und t die Variabelen trennen und erhält

$$\int\frac{dt}{F(t) - t} = \int\frac{dx}{x} + Const.$$

Nach Ausführung der Integration liefert die Restitution $t = \frac{y}{x}$ das gesuchte allgemeine Integral.

Dasselbe Verfahren passt auf die nichthomogene Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + f(x) \cdot F\left(\frac{y}{x}\right)$$

und liefert

$$\int \frac{dt}{F(t)} = \int \frac{f(x)}{x} dx + Const., \qquad t = \frac{y}{x}.$$

3. Die Substitution neuer Variabelen bildet überhaupt das wichtigste Mittel, um Differentialgleichungen in andere Differentialgleichungen umzuformen, deren Integration leichter ist, als die der ursprünglichen Differentialgleichung. Allgemeine Regeln lassen sich hierüber nicht geben, doch mögen einige häufiger vorkommende Fälle erwähnt werden.

a. Setzt man in der Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

$y^2 = z$, so wird die Gleichung homogen und lässt sich nachher mittelst der Substitution $z = xt$ integriren; diess giebt

$$\int \frac{dt}{2F(t) - t} = lx + C, \qquad t = \frac{y^2}{x}.$$

b. In der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 F(xy)$$

führt die Substitution $xy = u$ zur Sonderung der Variabelen, so dass entsteht

$$\int \frac{du}{u + u^2 F(u)} = lx + C, \qquad u = xy.$$

c. Wendet man die vorige Substitution auch bei folgender Differentialgleichung an

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = f(x) \,.\, F(xy),$$

so erhält man

$$\int \frac{du}{F(u)} = \int x\, f(x)\, dx + C, \qquad u = xy.$$

d. Substituirt man in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$$

$ax + by = z$, so giebt die Sonderung der Variabelen

$$\int \frac{dz}{a + b\,f(z)} = x + C, \qquad z = ax + by.$$

e. In der Differentialgleichung

$$x + y\frac{dy}{dx} = f(x)\,F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

führt die Substitution $x^2 + y^2 = r^2$ zur Sonderung der Variabelen und liefert schliesslich

$$\int \frac{r\,dr}{F(r)} = \int f(x)\,dx + C, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Die ziemlich allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)\,.\,y + \psi(x) = 0$$

lässt sich dadurch integriren, dass man y als Product zweier neuen Variabelen u und v ansieht und

$$\frac{du}{dx} + \varphi(x)\,.\,u = 0$$

setzt; es ergiebt sich

$$y = \left[e^{-\int\varphi(x)\,dx}\right]\left[C - \int \psi(x)\,e^{\int\varphi(x)\,dx}\,dx\right].$$

Auf die erwähnte Differentialgleichung lässt sich die folgende

$$f'(z)\frac{dz}{dx} + \varphi(x)\,f(z) + \psi(x) = 0$$

zurückführen, wenn $f(z) = y$ gesetzt wird; das Resultat ist

$$f(z) = \left[e^{-\int\varphi(x)\,dx}\right]\left[C - \int \psi(x)\,e^{\int\varphi(x)\,dx}\,dx\right].$$

5. Sehr häufig ist es vortheilhaft, für x und y gleichzeitig neue Variabele einzuführen. Beachtet man z. B., dass die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y - b}\,F\left(\frac{y^2 - 2by}{x^2}\right)$$

unter der Form

$$\frac{2(y-b)\,dy}{2x\,dx} = F\left(\frac{y^2 - 2by}{x^2}\right)$$

dargestellt werden kann, so erkennt man die Zweckmässigkeit der Substitutionen

$$x^2 = \xi, \qquad y^2 - 2by = \eta,$$

wodurch die Differentialgleichung homogen wird, nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = F\left(\frac{\eta}{\xi}\right).$$

6. Wenn in der allgemeinen Differentialgleichung

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = 0$$

die linke Seite das totale Differential einer Function $f(x, y)$ ist, so bildet die Gleichung

$$f(x, y) = Const.$$

das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung. Bezeichnet man die vorkommenden Functionen kurz mit φ, ψ, f, so giebt die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

die Bedingung an, unter welcher $\varphi \,.\, dx + \psi \,.\, dy = df$ ist, und wenn φ und ψ der ebenerwähnten Bedingung genügen, so lässt sich das allgemeine Integral $f = Const.$ folgendermassen ausdrücken

$$\int \varphi \,.\, dx + \int \psi \,.\, dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = Const.$$

Die Integrationen beziehen sich hier immer partiell auf die Variabelen, deren Differential unter dem Integralzeichen steht.

Die obige Bedingung ist z. B. erfüllt bei der Differentialgleichung

$$(\alpha x + \beta y^2)\,dx + (2\beta xy + \gamma y^3)\,dy = 0,$$

und daraus ergiebt sich als allgemeines Integral

$$\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x y^2 + \tfrac{1}{4}\gamma y^4 = Const.$$

7. Wenn die vorhin erwähnte Bedingung nicht erfüllt und demzufolge $\varphi \,.\, dx + \psi \,.\, dy$ kein vollständiges Differential ist, so giebt es doch einen Factor $\chi(x, y)$ oder kurz χ von der Beschaffenheit, dass das Product

$$\varphi\chi \,.\, dx + \psi\chi \,.\, dy$$

ein totales Differential bildet. In der Gleichung z. B.

$$(x^m + y)dx - x\,dy = 0$$

ist die linke Seite kein vollständiges Differential, aber nach Zusatz des Factors $-\frac{1}{x^2}$ entsteht ein solches und zwar

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} - x^{m-2}dx = d\left\{\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1}\right\} = 0,$$

woraus als allgemeines Integral folgt

$$\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1} = Const.$$

Wenn man den integrirenden Factor χ nicht errathen kann, wie im so eben behandelten Falle, so muss man ihn aus der Bedingung

$$\frac{\partial(\varphi\chi)}{\partial y} = \frac{\partial(\psi\chi)}{\partial x}$$

bestimmen. Diese neue Differentialgleichung ist aber meistentheils schwieriger zu integriren als die ursprüngliche Differentialgleichung.

8. Eine sehr häufig anwendbare Integrationsmethode besteht darin, dass man die gegebene Differentialgleichung entweder nach y oder nach x auflöst, wodurch dieselbe eine der Formen

$$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

erhält, und sie nachher noch einmal differenzirt.

a. Wird zur Abkürzung der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = p$$

gesetzt, so führt die Differentiation von $y = \Phi(x, p)$ zu der Gleichung

$$p = \frac{\partial\Phi(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi(x, p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

welche eine Differentialgleichung zwischen den Variabelen x und p darstellt. Nicht selten ist dieselbe leicht zu integriren und liefert dann eine Gleichung zwischen x und p. Eliminirt man aus dieser und der Gleichung $y = \Phi(x, p)$ die Grösse p, so erhält man die gesuchte Integralgleichung.

Als Beispiel diene die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \alpha - \alpha\beta x^2 + \beta xy \text{ oder } \beta y = \alpha\beta x + \frac{p-\alpha}{x}.$$

Durch Differentiation der zweiten Form erhält man eine neue Gleichung, welche nach Sonderung der Variabelen in

$$\frac{1+\beta x^2}{x}\,dx = \frac{dp}{p-\alpha}$$

übergeht und demgemäss leicht integrabel ist; die Elimination von p giebt schliesslich

$$y = \alpha x + Ce^{\frac{1}{2}\beta x^2}.$$

b. Wenn zweitens die gegebene Differentialgleichung auf die Form $x = \Psi(y, p)$ gebracht ist, so wird durch Differentiation

$$1 = \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

und zufolge der beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$$

kann dafür geschrieben werden

$$1 = p\left\{\frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi(y, p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}\right\}.$$

Diese Differentialgleichung enthält nur y und p, sie liefert daher durch Integration eine Gleichung zwischen y und p. Eliminirt man aus dieser und der Gleichung $x = \Psi(y, p)$ die Grösse p, so erhält man die gesuchte Integralgleichung.

Beispielsweis sei gegeben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - ky^2 \text{ oder } x = \frac{y}{p+ky^2}.$$

Die Differentiation liefert die neue Gleichung

$$\frac{p}{y}\cdot\frac{dp}{dy} = -k(3p + ky^2),$$

welche durch die naheliegende Substitution $y^2 = z$ homogen wird, nämlich

$$2\,\frac{dp}{dz} = -k\left(3 + k\frac{z}{p}\right).$$

Diese lässt sich nach No. 2. mittelst der Substitution $\frac{z}{p} = t$ integriren; es wird zunächst

$$\frac{2t\,dt}{(k+t)(k+2t)} = -\frac{dz}{z}$$

ferner durch Integration und Restitution von $t = \frac{y^2}{p}$

$$C(ky^2 + p)^2 = ky^2 + 2p$$

und schliesslich, wenn p eliminirt wird, entweder $y = 0$ oder

$$y = \frac{2x}{C + kx^2}.$$

9. Eine Differentialgleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades hat die Form

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + Z_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \cdots + Z_{n-1}\frac{dy}{dx} + Z_n = 0,$$

worin $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ gegebene Functionen von x und y bedeuten; sie kann u. A. dadurch integrirt werden, dass man sie zunächst nach $\frac{dy}{dx}$ auflöst und damit in n einzelne Differentialgleichungen zerlegt, welche sein mögen:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \cdots \frac{dy}{dx} = f_n(x, y).$$

Sind nun die Integrale derselben

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \quad F_2(x, y, C_2) = 0, \cdots F_n(x, y, C_n) = 0,$$

so ist das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$F_1(x, y, C_1) \cdot F_2(x, y, C_2) \cdots F_n(x, y, C_n) = 0.$$

Dabei darf man $C_1 = C_2 \cdots = C_n = C$ setzen, ohne die Allgemeinheit der Auflösung zu beeinträchtigen.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\alpha\frac{dy}{dx} = \beta x.$$

Diese zerfällt in die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta x},$$

welche, durch Sonderung der Variabelen integrirt, die Integralgleichungen liefern

$$y + \alpha x - \frac{2\sqrt{(\alpha^2 + \beta x)^3}}{3\beta} + C = 0, \quad y + \alpha x + \frac{2\sqrt{(\alpha^2 + \beta x)^3}}{3\beta} + C = 0;$$

das allgemeine Integral ist demnach

$$9\beta^2(y + \alpha x + C)^2 = 4(\alpha^2 + \beta x)^3.$$

Uebrigens sei noch bemerkt, dass sich homogene Differentialgleichungen höherer Grade mittelst der in No. 2. erwähnten Substitution integriren lassen, und dass auch die in No. 8. auseinandergesetzte Methode bei nichtlinearen Differentialgleichungen häufig gute Dienste leistet.

10. Eine Differentialgleichung kann ausser ihrem allgemeinen Integrale und den hieraus durch Specialisirung der willkührlichen Constante hervorgehenden particulären Integralen noch ein sogen. singuläres Integral haben. Denkt man sich nämlich die gegebene Differentialgleichung geometrisch als Eigenschaft einer unbekannten Curve, so repräsentirt die allgemeine Integralgleichung

$$F(x, y, C) = 0$$

eine Schaar von Curven, die alle jene Eigenschaft besitzen. Die nämliche Eigenschaft kommt dann auch der Curve zu, welche von den successiven Durchschnitten jener Curven gebildet wird, d. h. der einhüllenden Curve. Das singuläre Integral findet man hiernach dadurch, dass man aus den Gleichungen

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

die willkührliche Constante C eliminirt.

§ 37.

Einfache lineare Differentialgleichungen.

1. Bei einer gewissen Curve sei die Strecke, welche die im Curvenpunkte xy construirte Tangente von der x-Achse abschneidet, gleich dem arithmetischen Mittel zwischen einer gegebenen Strecke a und der Abscisse x; man sucht die Gleichung der Curve.

Aus der Differentialgleichung

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \tfrac{1}{2}(a + x) \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x - a}$$

findet man nach Sonderung der Variabelen, dass die gesuchte Curve eine durch die Gleichung

$$by = (x - a)^2$$

bestimmte Parabel ist, wobei b die willkührliche Constante bezeichnet.

2. Soll der vorhin erwähnte, von der Tangente gebildete Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel zwischen a und x sein, so ergiebt sich als Gleichung der Curve

$$\sqrt{\frac{x}{a}} \pm \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

Die Curve ist demnach eine Parabel, welche die Coordinatenachsen berührt.

3. Wenn der vorhin erwähnte Abschnitt das harmonische Mittel zwischen a und x bilden soll, so findet sich

$$xy = C(x-a)^2.$$

Die Curve ist hiernach eine Hyperbel, deren Asymptoten durch den Coordinatenanfang gehen und mit der x-Achse die Winkel $arctan\, C$ und $\frac{1}{2}\pi$ einschliessen.

4. Soll der vorhin erwähnte Abschnitt $= \frac{x^2}{a}$ sein, so ergiebt sich, dass die Curve eine durch die Gleichung

$$(x-a)(y-b) = ab$$

bestimmte gleichseitige Hyperbel ist.

5. Wird allgemein verlangt, dass die von der Tangente auf der Abscissenachse abgeschnittene Strecke eine gegebene Function der Abscisse, etwa $= \varphi(x)$ sein soll, so ist die Gleichung der Curve

$$ly = \int \frac{dx}{x - \varphi(x)} + C.$$

6. In einer Curve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, gleich dem arithmetischen Mittel zwischen a und x; man sucht die Gleichung der Curve.

Beachtet man, dass die linke Seite der Gleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(a+x)$$

durch Zusatz des Factors $-\frac{dx}{x^2}$ ein vollständiges Differential wird, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{a + xl\left(\frac{c}{x}\right)\right\}.$$

7. Soll der von der Tangente auf der y-Achse gebildete Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel zwischen a und x sein, so ergiebt sich

$$y = Cx - 2\sqrt{ax} \quad \text{oder} \quad (Cx - y)^2 = 4ax,$$

welcher Gleichung eine Parabel entspricht.

8. Wenn der vorhin erwähnte Abschnitt das harmonische Mittel zwischen a und x bilden soll, so folgt

$$y = x\left\{C - 2l\left(\frac{x}{a+x}\right)\right\}.$$

9. Für den Fall, dass der erwähnte Abschnitt $= \frac{x^2}{a}$ sein soll, findet sich eine durch die Gleichung

$$y = x\left(C - \frac{x}{a}\right)$$

bestimmte Parabel.

10. Wird allgemein verlangt, dass der genannte Abschnitt eine gegebene Function der Abscisse, etwa $= \varphi(x)$ sein soll, so findet sich

$$y = x\left\{C - \int \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx\right\}.$$

11. In einer Curve soll die über der Strecke $x - h$ stehende Fläche gleich dem m^{ten} Theile des Rechtecks aus Abscisse und Ordinate sein; man verlangt die Gleichung der Curve.

Aus der Bedingung

$$\int_h^x y\, dx = \frac{xy}{m}$$

erhält man durch Differentiation die Differentialgleichung

$$my = x\frac{dy}{dx} + y,$$

deren Integral ist

$$y = Cx^{m-1}.$$

Da zufolge der Differentiation die Constante h weggefallen ist, so muss das Resultat erst verificirt werden. Nun ist

$$\int_h^x y\,dx = \frac{C(x^m - h^m)}{m}, \qquad \frac{xy}{m} = \frac{Cx^m}{m};$$

die Gleichheit beider Ausdrücke kann nur bestehen, wenn m positiv und $h = 0$ genommen wird, während C willkührlich bleibt.

12. Es wird die Curve gesucht, welche die Eigenschaft besitzt

$$\int_a^x y\,dx = \tfrac{1}{3}x(y + b).$$

Durch Differentiation der vorliegenden und Integration der entstehenden Gleichung findet sich

$$y = Cx^2 + \tfrac{1}{2}b;$$

die nachherige Verification zeigt, dass im Falle $a = 0$ die Integrationsconstante C beliebig gewählt werden kann, dass hingegen im Falle $a \gtrless 0$

$$C = -\frac{3b}{2a^2}$$

genommen werden muss.

13. Man sucht die Curve, welche folgende Eigenschaft besitzt

$$\int_a^x y\,dx = x\sqrt{by}.$$

Nach dem vorhin benutzten Verfahren ergiebt sich

$$y = \frac{bc^2}{(c - x)^2};$$

dabei muss $a = 0$ und x zwischen 0 und c genommen werden.

14. Für die allgemeine Aufgabe

$$\int_a^x y\,dx = x\,\varphi(y)$$

erhält man als Integralgleichung

$$lx = \int \frac{\varphi'(y)\,dy}{y - \varphi(y)} + C,$$

bei welcher in jedem speciellen Falle eine Verification erforderlich ist, um a oder C näher zu bestimmen.

15. In einer Curve soll die über der Abscisse x stehende Fläche $= ay - bx$ sein; man sucht die Gleichung der Curve.

Unter Rücksicht auf die gegebene Bedingung findet sich

$$y = b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

16. Wenn die über der Abscisse stehende Fläche $= bx - 2a\sqrt{by}$ sein soll, so ergiebt sich

$$y = b\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}} + 1}\right)^2.$$

17. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_h^x y\,dx = bx + \psi(y)$$

erhält man die Auflösung

$$x = \int \frac{\psi'(y)}{y - b}\,dy + C,$$

welche in jedem speciellen Falle zu verificiren ist.

18. Man verlangt die Curve, worin der von $\theta = 0$ ab gerechnete Sector

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^\theta r^2\,d\theta$$

dem Kreissector $\frac{1}{2}(\sqrt{ar})^2\,\theta$ gleichkommt.

Die Polargleichung der gesuchten Curve ist

$$r = \frac{a\gamma}{\gamma - \theta}$$

mithin die Curve eine hyperbolische Spirale. Dabei muss θ kleiner als die willkührliche Constante γ genommen werden.

19. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_\alpha^\theta r^2\,d\theta = F(r)\cdot\theta$$

erhält man die Auflösung

$$l\theta = \int \frac{F'(r)\,dr}{r^2 - F(r)} + C,$$

welche in jedem speciellen Falle einer Verification bedarf.

20. Man verlangt die Curve, worin der von $\theta = 0$ ab gerechnete Sector

$$S = \tfrac{1}{2}a^2\theta - ar$$

ist.

Bei gehöriger Bestimmung der Integrationsconstanten findet sich

$$r = a \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}.$$

21. Für die analoge Aufgabe

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{2} a^2 \theta$$

erhält man die Auflösung

$$r = a \sqrt{e^\theta - 1}.$$

22. Soll überhaupt die Gleichung

$$\int_\alpha^\theta r^2 \, d\theta = A\theta + f(r)$$

bestehen, so folgt

$$\theta = \int \frac{f'(r)\, dr}{r^2 - A} + C,$$

welches Resultat in jedem speciellen Falle der Verification bedarf.

23. Man verlangt diejenige Curve, worin zwischen den Coordinaten x, y und dem von $x = 0$ an gerechneten Bogen s die Relation

$$s = 2\sqrt{ax} + y$$

stattfindet.

Durch Differentiation dieser Gleichung und Integration der entstehenden Differentialgleichung findet man

$$y + C = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}} - \sqrt{ax},$$

wobei $C = 0$ sein muss vermöge des Anfangswerthes von s. (Vergl. § 12., Aufg. 3.).

24. Soll überhaupt die Gleichung

$$\int_h^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \varphi(x) \pm y$$

bestehen, so folgt

$$C \pm y = \tfrac{1}{2} \left\{ \int \frac{dx}{\varphi'(x)} - \varphi(x) \right\}$$

welches Resultat in jedem speciellen Falle der Verification bedarf.

25. Man verlangt die Curve, worin zwischen x, y und dem von $x = 0$ ab gerechneten Bogen s die Relation

$$s = \sqrt{y^2 - a^2} - x$$

stattfindet.

Bei gehöriger Bestimmung der Constanten erhält man

$$y = a \sec \frac{2x}{a} \cdot$$

26. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\int_h^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \psi(y) \pm x$$

ist die Auflösung

$$C \pm x = \tfrac{1}{2} \left\{ \int \frac{dy}{\psi'(y)} - \psi(y) \right\},$$

wozu die nöthige Verification gehört.

27. Man verlangt die Curve, worin zwischen den Polarcoordinaten θ, r und dem von $\theta = 0$ ab gerechneten Bogen s die Relation besteht

$$s = a\theta - r.$$

Bei gehöriger Bestimmung der Constanten ergiebt sich als Polargleichung

$$r = a \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1};$$

diese Curve geht vom Coordinatenanfange aus und hat einen mit dem Radius a beschriebenen Kreis zur Asymptote.

28. Man verlangt die Polargleichung derjenigen Curve, bei welcher zwischen dem von $\theta = 0$ ab gerechneten Sector S, dem Bogen s und dem Radiusvector r die Relation besteht

$$S = \tfrac{1}{2} a (s - r).$$

Es ergiebt sich die nämliche Curve wie in No. 27.

29. Es wird die Curve gesucht, in welcher die über der Abscisse x stehende Fläche U, der von $x = 0$ an gerechnete Bogen s und die Ordinate y durch die Gleichung

$$U = a(s - y)$$

verbunden sind.

Bei gehöriger Bestimmung der Constanten erhält man

$$y = a \sqrt{1 - e^{-\frac{x}{a}}}.$$

30. Wenn die über der Abscisse x stehende Fläche einer Curve um die Abscissenachse vollständig herumgedreht wird, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Volumen V, und dessen Mantel S heissen möge; es wird nun die Curve gesucht, bei welcher die Relation

$$V = \tfrac{1}{2} a (S - \pi y^2)$$

stattfindet.

Die Curve ist hier dieselbe wie in No. 29.

§ 38.

Homogene lineare Differentialgleichungen.

1. Man sucht die Curve, worin die Subtangente das arithmetische Mittel zwischen der Abscisse und der Ordinate ist.

Die gesuchte Curve hat zur Gleichung

$$(x - y)^2 - 2cy = 0$$

und ist demnach eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse einen Winkel von 45^0 bildet.

2. Für die allgemeinere Aufgabe

$$Sbtg. = mx + ny$$

erhält man die Lösung

$$Cy^m = (m - 1)x + ny.$$

3. Es wird die Curve gesucht, worin die Subnormale das arithmetische Mittel zwischen der Abscisse und der Ordinate ist.

Als Gleichung der Curve findet sich

$$(x - y)^2 (x + 2y) = C.$$

4. Bei der allgemeineren Aufgabe

$$Sbnorm. = mx + ny$$

sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Ist erstens

$$4m + n^2 > 0,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\mu = \tfrac{1}{2}\left(n + \sqrt{4m + n^2}\right), \qquad \nu = \tfrac{1}{2}\left(n - \sqrt{4m + n^2}\right);$$

die gesuchte Gleichung ist dann

$$(y - \mu x)^\mu = C(y - \nu x)^\nu.$$

Ist z. B. $m = -1$, $n = \frac{3}{\sqrt{2}}$, so kann man der Gleichung die Form

$$(y - \sqrt{2} \cdot x)^2 = 2a(\sqrt{2} \cdot y - x)$$

ertheilen, welcher eine Parabel entspricht.

Für den zweiten Fall $4m + n^2 = 0$ ergiebt sich

$$l\left(\frac{2y - nx}{c}\right) = \frac{nx}{2y - nx}.$$

Ist drittens

$$4m + n^2 < 0,$$

so setze man zur Abkürzung

$$\sqrt{-(4m + n^2)} = \lambda;$$

die gesuchte Gleichung ist dann

$$l\left(\frac{y^2 - mx^2 - nxy}{C}\right) = \frac{2n}{\lambda} \, arctan \, \frac{nx - 2y}{\lambda x}$$

wofür auch die beiden Gleichungen geschrieben werden können

$$x = a e^{\varkappa\omega} \cos\omega, \qquad y = \frac{na}{2\varkappa} e^{\varkappa\omega}(\varkappa \cos\omega - \sin\omega),$$

$$\varkappa = \frac{n}{\sqrt{-(4m + n^2)}}.$$

Einen bemerkenswerthen speciellen Fall liefern die Werthe $m = -2$, $n = 2$, denen $\varkappa = 1$ entspricht.

5. In einer Curve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, $= m\frac{y^2}{x}$; man sucht die Gleichung der Curve.

Die verlangte Gleichung ist

$$y = \frac{x}{ml\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

6. In einer Curve sei die Strecke, welche die Normale von der Abscissenachse abschneidet, $= n\frac{y^2}{x}$; es soll die Gleichung der Curve gesucht werden.

Wenn $n \gtrless 1$ ist, so ergiebt sich

$$(n - 1)y^2 = x^2 + Cx^{2n};$$

dagegen hat man für den Fall $n = 1$:

$$y^2 = 2x^2 \, l\left(\frac{a}{x}\right).$$

7. In einer Curve stehe die von der Tangente auf der Ordinatenachse abgeschnittene Strecke in constantem Verhältniss zum Radiusvector; man sucht die Gleichung der Curve.

Bezeichnet $m : 1$ das genannte Verhältniss, so ergiebt sich

$$y = \tfrac{1}{2} x \left\{\left(\frac{a}{x}\right)^m - \left(\frac{x}{a}\right)^m\right\}.$$

Im Falle $m = 1$ ist die Curve eine Parabel.

8. In einer Curve stehe die von der Normale auf der Abscissenachse abgeschnittene Strecke in constantem Verhältniss zum Radiusvector; man sucht die Gleichung der Curve.

Bezeichnet $n : 1$ das gegebene Verhältniss, so folgt

$$x^2 + y^2 = n^2 (x - c)^2;$$

die Curve ist hiernach ein Kegelschnitt, dessen numerische Excentricität $= n$, und von welchem ein Brennpunkt zum Coordinatenanfang genommen ist.

Zu demselben Resultate führt die Substitution $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

9. In einer Curve stehen die Strecken, welche die Tangente von der Ordinatenachse, und die Normale von der Abscissenachse abschneidet, in constantem Verhältniss zu einander; man sucht die Gleichung der Curve.

Bezeichnet $1 : \mu$ das gegebene Verhältniss, so ergiebt sich

$$\mu \, arctan \, \frac{y}{x} + \tfrac{1}{2} l (x^2 + y^2) = l c;$$

die Curve ist demnach eine logarithmische Spirale.

10. Man verlangt diejenige Curve, bei welcher das arithmetische Mittel aus den in der vorigen Aufgabe erwähnten Strecken die constante Grösse a besitzt.

Die betreffende Differentialgleichung ist nicht homogen, wird es aber durch die Substitutionen $x = \xi + a$, $y = \eta + a$; man erhält schliesslich die Integralgleichung

$$\tfrac{1}{2} l \left\{\frac{(x-a)^2 + (y-a)^2}{c^2}\right\} = arctan \, \frac{y-a}{x-a},$$

welche eine logarithmische Spirale charakterisirt.

11. Man verlangt die Curve, worin das von der Tangente auf der Ordinatenachse abgeschnittene Stück $= \frac{y^2}{b}$ ist.

Die betreffende Differentialgleichung wird homogen durch die Substitution $y = \frac{1}{z}$; die Gleichung der Curve ist

$$(x - a)(y - b) = ab.$$

12. Die vorige Aufgabe bildet einen speciellen Fall der folgenden allgemeineren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left\{1 + y f(x)\right\};$$

das Integral dieser Differentialgleichung ist

$$y = \frac{x}{C - \int f(x)\,dx}.$$

13. In einer Curve sei die Strecke, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, $= \alpha x^\mu + \beta y$; man sucht die Gleichung dieser Curve.

Durch Substitution von $x^\mu = \xi$ wird die Differentialgleichung homogen; nachher folgt

$$y = Cx^{1-\beta} - \frac{\alpha x^\mu}{\beta + \mu - 1}, \qquad \text{für } \beta + \mu \gtrless 1,$$

$$y = \alpha x^{1-\beta}\, l\left(\frac{c}{x}\right), \qquad \text{für } \beta + \mu = 1.$$

Zu dem nämlichen Resultate führt die Anwendung der Formeln in § 36., No. 4.

14. Man verlangt die Gleichung derjenigen Curve, bei welcher die Relation

$$\textit{Subnorm.} = \alpha x^\mu + 2\beta\frac{y^2}{x}$$

stattfindet.

Mittelst der Substitution $y^2 = \eta$ lässt sich diese Aufgabe auf die vorige zurückführen, wodurch entsteht

$$y^2 = Cx^\beta + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{x^{\mu+1}}{\mu - \beta + 1}, \qquad 1 + \mu \gtrless \beta,$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}\alpha x^\beta\, l\left(\frac{x}{c}\right), \qquad 1 + \mu = \beta.$$

15. In einer Curve sei die von der Tangente auf der Ordina-

tenachse abgeschnittene Strecke $= a\sec\theta$, wo θ den Winkel zwischen Abscissenachse und Radiusvector bezeichnet; man sucht die Gleichung der Curve.

Die Differentialgleichung ist zwar nicht homogen, kann aber wie homogene Gleichungen behandelt werden; es ergiebt sich

$$y = \tfrac{1}{2}x\left\{e^{\frac{a}{x}+b} - e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right\}.$$

16. Wenn die in der vorigen Aufgabe erwähnte Strecke $= a\sec^3\theta$ sein soll, so folgt

$$(a + bx)^2 (x^2 + y^2) = x^2 y^2.$$

17. In einer Curve sei die über der Abscisse x stehende Fläche

$$U = \tfrac{1}{2}\mu x^2 - ay;$$

es wird die Gleichung der Curve gesucht.

Bei gehöriger Bestimmung der Constanten ergiebt sich

$$y = \mu x - \mu a\left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

18. Man verlangt die Curve, worin die über der Strecke x stehende Fläche ist

$$U = \frac{xy}{m} + kx^n.$$

Unter der Voraussetzung $m \gtrless n$ erhält man

$$y = Cx^{m-1} + \frac{kmn}{m-n}x^{n-1};$$

bei positiven m und n bleibt C beliebig.

Im Falle $m = n$ ergiebt sich

$$y = km^2 x^{m-1}\, l\left(\frac{c}{x}\right).$$

19. In einer Curve sei die von $\theta = 0$ ab gerechnete Sectorenfläche

$$S = \frac{1}{3}\cdot\frac{r^2\theta}{2} + (a\theta)^2,$$

man sucht die Polargleichung der Curve.

Dieselbe ist

$$r^2 = 12a^2\theta + b^2\theta^2.$$

20. Es wird die Polargleichung der Curve gesucht, für welche die Gleichung

$$S = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}(a \sin\theta)^2$$

stattfindet.

Die gesuchte Gleichung lautet

$$r^2 = (b^2 - a^2\theta) \sec^2\theta - a^2 \tan^2\theta.$$

§ 39.

Differentialgleichungen verschiedener Grade.

1. Man sucht die Curve, bei welcher das arithmetische Mittel zwischen der Subtangente und der Subnormale gleich der Abscisse ist.

Die verlangte Eigenschaft kommt einer Parabel zu, wenn deren Achse zur Abscissenachse, und die Directrix zur Ordinatenachse genommen wird.

2. Man sucht die Curve, bei welcher das vorhin erwähnte Mittel gleich dem Radiusvector ist.

Der Aufgabe genügt eine Parabel, wenn deren Achse zur Abscissenachse genommen, und die Ordinatenachse senkrecht hierzu durch den Brennpunkt gelegt wird.

3. Das harmonische Mittel zwischen Subtangente und Subnormale sei gleich der Abscisse; man verlangt die zugehörige Curve.

Letztere ist eine Parabel, deren Directrix die Abscissenachse, und deren Achse die Ordinatenachse ist.

4. Das vorige harmonische Mittel sei $= \dfrac{y^2}{x}$; man sucht die zugehörige Curve.

Letztere ist dieselbe Curve wie in No. 1.

5. Das vorige harmonische Mittel sei $= 2x \sin^2\theta$; man sucht die zugehörige Curve.

Der Aufgabe genügt sowohl eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade als eine gleichseitige Hyperbel.

6. Für $OM = x$, $MP = y$ bezeichne Q den Punkt, in welchem eine durch P senkrecht zu OP gelegte Gerade die Abscissenachse schneidet, ferner U den Durchschnitt der Normale mit der Abscissenachse, endlich V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse; man verlangt die Curve, bei welcher das Rechteck aus OU und OV gleich der Summe von der Dreiecksfläche OMP und der Hälfte der Dreiecksfläche MPQ ist.

Der Aufgabe genügen eine Parabel und eine Ellipse, deren Gleichungen sind

$$y^2 = cx \quad \text{und} \quad 2x^2 + y^2 = 4ax.$$

7. Man verlangt die Curve, für welche ist

$$OU \cdot OV = 4(\triangle OMP - \triangle MPQ).$$

Die beiden Auflösungen sind

$$xy = c^2 \quad \text{und} \quad y^2 = x^2 + \frac{x^4}{a^2} \cdot$$

8. Man verlangt die Curve folgender Eigenschaft:

$$OU \cdot OV = \tfrac{1}{2} \triangle OPQ.$$

Die Gleichung der Curve lautet

$$(y^2 - ax)^2 = 4ax^3.$$

9. Es wird die Curve gesucht, für welche die Relation besteht

$$OU \cdot OV = xy.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y^2 = 2x^2 \, l\left(\frac{a}{x}\right) \cdot$$

10. In einer Curve sei der Abstand der Tangente vom Coordinatenanfang gleich dem Doppelten der Senkrechten, welche vom Endpunkte M der Abscisse auf den Radiusvector OP gefällt ist; man sucht die zugehörige Curve.

Der Aufgabe genügt einerseits jede gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind, andererseits auch die Fusspunktcurve jeder solchen Hyperbel d. h. eine Lemniscate.

11. Die Entfernung der Tangente vom Coordinatenanfange stehe in constantem Verhältnisse zum Radiusvector; man sucht die Gleichung der betreffenden Curve.

Bezeichnet $1 : \mu$ das gegebene Verhältniss, so ergiebt sich

$$l a = \tfrac{1}{2} \, l(x^2 + y^2) + \sqrt{\mu^2 - 1} \cdot \operatorname{arctan} \frac{y}{x} \, ;$$

die Curve ist also eine logarithmische Spirale.

12. Es wird die Curve gesucht, in welcher zwischen dem von $x = 0$ ab gerechneten Bogen s und den Coordinaten die Relation

$$s = y - a + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y}$$

stattfindet.

In rechtwinkligen Coordinaten erhält man die Gleichung

$$cy = x^2 e^{\pm \frac{2y}{x}}$$

oder in Polarcoordinaten

$$r = c\, e^{2\tan\theta} \sec^2\theta \sin\theta.$$

Die Verification zeigt, dass $c = 2a$ zu nehmen ist.

13. Unter M, P, Q, U mögen dieselben Punkte wie in No. 6. verstanden werden und es sei $MU > MQ$; man verlangt die Curve, für welche

$$MU \, . \, QU = h^2$$

ist, wenn h eine gegebene Constante bezeichnet.

Die Differentialgleichung ist nicht homogen, wird es aber durch eine naheliegende Substitution; bezeichnet a eine willkührliche Constante, so folgt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ah} = 1.$$

Die Curve ist demnach eine Ellipse oder Hyperbel von gegebenem Parameter $2h$ und willkührlicher Haupthalbachse a.

14. Setzt man in der vorigen Aufgabe $MU < MQ$ voraus, so erhält man als allgemeines Integral die Hyperbel

$$\frac{y^2}{ah} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Der Aufgabe genügt ausserdem die Einhüllende aller, den verschiedenen a entsprechenden Hyperbeln, d. h. das singuläre Integral

$$y^4 = 4h^2 x^2,$$

welches zwei Parabeln charakterisirt.

15. Es bezeichne R den Punkt, in welchem eine in P auf dem Radiusvector OP errichtete Senkrechte die Ordinatenachse schneidet, U den Durchschnitt der Normale mit der Abscissenachse, V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse; man verlangt die Curve, bei welcher

$$OU \, . \, OV = k \, . \, OR$$

ist, wo k eine gegebene Gerade bezeichnet.

Mit Hülfe der Substitution $x^2 + y^2 = z$ lässt sich die betreffende Differentialgleichung homogen machen, wodurch man findet

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon x\right)^2.$$

Die Curve ist demnach ein Kegelschnitt, von welchem ein

Brennpunkt in den Coordinatenanfang fällt, dessen Charakteristik willkührlich und dessen Halbparameter $= \frac{k}{\varepsilon}$ ist.

Als singuläres Integral ergiebt sich noch der Kreis

$$x^2 + y^2 = 4kx.$$

16. Unter T werde der Durchschnitt der Tangente mit der Abscissenachse, unter U derselbe Punkt wie in No. 15. verstanden; man sucht die Curve, welcher die durch

$$OT \,.\, OU = k^2$$

ausgedrückte Eigenschaft zukommt.

Giebt man der Differentialgleichung die Form

$$\left(xy\frac{dy}{dx} - y^2\right)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = k^2 y \frac{dy}{dx},$$

so bemerkt man leicht, dass die Substitution

$$x^2 + y^2 = z$$

vortheilhaft sein muss. Dieselbe führt zu der Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z + k^2}{x}\right)^2 = \left(\frac{z + k^2}{x}\right)^2 - 4k^2,$$

welche homogen ist in Beziehung auf $z + k^2$ als neue Variabele. Hiernach findet man als allgemeine Auflösung

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C - k^2} = 1$$

d. h. eine Schaar concentrischer Ellipsen oder Hyperbeln, deren gemeinsame lineare Excentricität $= k$ ist. Die singuläre Auflösung giebt zwei Punkte, nämlich die jenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Brennpunkte.

17. Es wird die Curve gesucht, für welche

$$\overline{OV}^2 = a^2 \tan\tau$$

ist, wo V den Durchschnitt der Tangente mit der Ordinatenachse, und τ den Winkel zwischen Tangente und Abscissenachse bedeutet.

Bringt man die Differentialgleichung auf die Form

$$\left[x^2\frac{dy}{dx} - (xy + \tfrac{1}{2}a^2)\right]^2 = a^2(xy + \tfrac{1}{4}a^2),$$

so liegt es nahe $xy = z$ zu setzen; man erhält schliesslich als allgemeine Auflösung die Gerade

$$y = b + \frac{b^2}{a^2} x$$

und als singuläre Lösung die gleichseitige Hyperbel

$$4xy = -a^2.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man rascher, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt und die Gleichung

$$y - xp = a\sqrt{p}$$

differenzirt, wodurch entsteht

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{p}} + x\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Diess giebt entweder

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{mithin} \quad p = C$$

und zufolge der ursprünglichen Gleichung

$$y - Cx = a\sqrt{C}$$

woraus für $a\sqrt{C} = b$ die vorige allgemeine Auflösung entsteht. Nimmt man zweitens

$$\frac{a}{2\sqrt{p}} + x = 0 \;\text{ oder }\; \sqrt{p} = -\frac{a}{2x},$$

so erhält man die singuläre Auflösung.

18. Es wird die Curve gesucht, bei welcher die Relation

$$OV = a \cot \tau$$

statt findet.

Die Differentialgleichung lässt sich auf folgende Form bringen:

$$\left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = y^2 - 4ax;$$

um sie zu vereinfachen setze man $y = uv$ und wähle u so, dass

$$2x\frac{du}{dx} - u = 0$$

wird. Diess giebt $u = \sqrt{x}$; die noch übrige Differentialgleichung für v kann durch Sonderung der Variabelen integrirt werden, und schliesslich erhält man als allgemeine Auflösung die Gerade

$$y = b + \frac{a}{b} x$$

und als singuläre Lösung die Parabel

$$y^2 = 4ax.$$

Zu den nämlichen Resultaten gelangt man rascher durch Differentiation der ursprünglichen Gleichung

$$y - xp = \frac{a}{p}.$$

19. Die allgemeine Differentialgleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } y - xp = F(p)$$

gestattet gleichfalls die Anwendung der Differentiationsmethode. Es folgt nämlich

$$[x + F'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

für $\frac{dp}{dx} = 0$, also $p = C$ erhält man das allgemeine Integral

$$y = Cx + F(C);$$

setzt man dagegen $x + F'(p) = 0$ und eliminirt p aus dieser und der ursprünglichen Gleichung, so gelangt man zum singulären Integrale.

20. Mit X und Y mögen die Strecken bezeichnet werden, welche die durch den Punkt xy gehende Tangente von den Achsen der x und y abschneidet; man verlangt die Curve, welcher folgende Eigenschaft zukommt

$$xX + yY = k^2.$$

Setzt man in der betreffenden Differentialgleichung $x = \xi^m$, $y = \eta^n$, so kann man m und n leicht so wählen, dass die Gleichung zwischen ξ, η, $d\xi$, $d\eta$ die Form

$$\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

erhält und daher nach No. 19. integrabel ist. Als allgemeines Integral findet sich eine Schaar von Hyperbeln, nämlich

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C - k^2} = 1$$

und als singuläres Integral die vier Geraden

$$(x \pm y)^2 = k^2.$$

21. Wird analog die Curve verlangt, für welche

$$\sqrt{xX} + \sqrt{yY} = k$$

ist, so lassen sich die vorigen Substitutionen zu gleichem Zwecke benutzen und geben, wenn die Wurzeln im absoluten Sinne genommen werden, als allgemeines Integral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a + b = k,$$

und als singuläres Integral

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

22. Man sucht die Curve, bei welcher das Rechteck aus der Subnormale und aus der Strecke, welche die Tangente auf der Ordinatenachse abschneidet, $= \frac{k^2 x}{y}$ ist.

Durch die in No. 20. erwähnten Substitutionen findet man als allgemeine Auflösung

$$\frac{y^2}{ak} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

und als singuläre Auflösung

$$y^4 = 4k^2x^2.$$

23. Für die Differentialgleichung

$$xy\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 + k^4\frac{dy}{dx} = 0$$

erhält man nach demselben Verfahren dass allgemeine Integral

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad ab = k^2$$

und ausserdem das singuläre Integral

$$4x^2y^2 = k^4.$$

24. Als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$x^4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = ky^2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$

findet man nach derselben Methode

$$(x - a)(y - b) = ab, \qquad b = \frac{a^2}{k},$$

und als singuläres Integral

$$y(4x^2 + ky) = 0.$$

25. Es bezeichne r den Radiusvector des Curvenpunktes xy, und u die Strecke, welche die Normale von der Abscissenachse abschneidet; man verlangt die Curve, bei welcher die Relation gilt

$$r(r^2 - xu) = a(r^2 - u^2).$$

Betrachtet man r als abhängige Variabele, so findet man

$$r + \varepsilon x = a(1 - \varepsilon^2) \quad \text{oder} \quad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

wozu noch das singuläre Integral gehört

$$x^2 + y^2 = \left(a + \frac{x^2}{4a}\right)^2.$$

26. Setzt man in der Differentialgleichung

$$4ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$$

$y = z^n$, so kann man dieselbe durch zweckmässige Wahl von n auf die Form

$$z - x\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

bringen und nachher die in No. 19. gemachte Bemerkung anwenden. Es findet sich als allgemeines Integral

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}(x - c)$$

und als singuläres Integral

$$y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{x^3}{a}$$

27. Es bezeichne v die Normale, u den Abschnitt, welchen dieselbe auf der x-Achse bildet, und es werde die Curve gesucht, für welche die Gleichung gilt

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1.$$

Mit Hülfe der Substitution $x^2 + y^2 = 2z$ bringt man die betreffende Gleichung leicht auf die in No. 26. erwähnte Form und erhält dann als allgemeines Integral

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)$$

und als singuläres Integral

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

28. Die vorige Aufgabe ist ein specieller Fall des allgemeineren Problems: die Curve zu bestimmen, in welcher die Normale eine gegebene Function des Abschnittes ist, welchen sie auf der x-Achse bildet. Zur Integration der entsprechenden Differentialgleichung

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=f\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$$

dient wieder die Substitution $x^2+y^2=2z$; das allgemeine Integral ist

$$(x-c)^2+y^2=[f(c)]^2,$$

wozu noch ein singuläres Integral kommen kann.

29. Man sucht die Curve, bei welcher das zwischen den Coordinatenachsen enthaltene Stück der Normale die constante Länge a besitzt.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{dy}{dx}=p$ und differenzirt die Differentialgleichung

$$x+yp=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

so kann man dem Resultate folgende Form ertheilen

$$\frac{yp\,dp+(1+p^2)\,dy}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{ap\,dp}{(1+p^2)^2},$$

wo die linke Seite $=d\left(y\sqrt{1+p^2}\right)$ ist. Nach dieser Bemerkung erhält man

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+p^2}\right\}$$

und aus der ursprünglichen Differentialgleichung

$$x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left\{a-c+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{1+p^2}\right\}.$$

Für $p=\tan\tau$ ist auch

$$y=-\tfrac{1}{2}a\cos^3\tau+c\cos\tau,\quad x=a(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\tau)\sin\tau-c\sin\tau.$$

Will man hieraus τ eliminiren, so setze man für den Augenblick $\cos^2\tau=t$ und quadrire beide Gleichungen; diess giebt

$$\begin{aligned}x^2&=(a-c)^2+c(a-c)t+a(c-\tfrac{3}{4}a)t^2-\tfrac{1}{4}a^2t^3,\\ y^2&=\qquad\qquad\qquad\quad c^2t\qquad\quad-act^2+\tfrac{1}{4}a^2t^3,\end{aligned}$$

mithin

$$x^2 + y^2 = (a - c)^2 + a c t - \tfrac{3}{4} a^2 t^2.$$

Hieraus lässt sich t finden und durch Substitution des erhaltenen Werthes in eine der vorhergehenden Gleichungen gelangt man zu einer Gleichung zwichen x und y.

Am einfachsten ist die Sache im Falle $c = 0$, wobei x_0 und y_0 statt x und y geschrieben werden mögen; die Gleichungen

$$y_0 = -\tfrac{1}{2} a \cos^3 \tau, \qquad x_0 = a(1 + \tfrac{1}{2} \cos^2 \tau) \sin \tau$$

geben dann

$$4(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^3 = 27 a^2 y_0^4.$$

Für den allgemeinen Fall ist nun

$$y = y_0 + c \cos \tau, \qquad x = x_0 - c \sin \tau$$

d. h. geometrisch: der Aufgabe genügt nicht nur die vorige, durch x_0 und y_0 ausgedrückte Curve, sondern auch jede hierzu parallele Curve.

30. Die allgemeinere Differentialgleichung

$$x + y \frac{dy}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

kann nach demselben Verfahren integrirt werden; es ergiebt sich

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \left\{ c + \int \frac{p \Phi'(p)}{\sqrt{1 + p^2}} dp \right\},$$

$$x = \Phi(p) - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \left\{ c + \int \frac{p \Phi'(p)}{\sqrt{1 + p^2}} dp \right\}.$$

Nimmt man zuerst $c = 0$ und eliminirt p, so erhält man als particuläres Integral eine Gleichung zwischen x und y, welche man als Gleichung einer Curve ansehen kann; das allgemeine Integral ist nachher die Gleichung derjenigen Curve, welche der vorigen in irgend einer Entfernung c parallel läuft.

Ein Beispiel hierzu bildet die Gleichung

$$x + y p = \frac{k p}{\sqrt{\alpha + \beta p^2}},$$

wobei α verschieden von β sein möge. Für $p = \tan \tau$ ergeben sich die Werthe

$$y = \frac{\alpha k}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\cos \tau}{\sqrt{\alpha \cos^2 \tau + \beta \sin^2 \tau}} + c \cos \tau,$$

$$x = -\frac{\beta k}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\sin \tau}{\sqrt{\alpha \cos^2 \tau + \beta \sin^2 \tau}} - c \sin \tau;$$

im speciellen Falle $c = 0$ folgt als particuläres Integral

$$\frac{x^2}{\beta} + \frac{y^2}{\alpha} = \left(\frac{k}{\alpha - \beta}\right)^2,$$

der Aufgabe genügt daher der vorliegende Kegelschnitt und jede demselben parallele Curve.

31. Die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der Polarnormale mögen u und v heissen; man sucht die Curve, bei welcher die Mittelpunkte der Polarnormalen auf einer, durch die Gleichung

$$v = \frac{u^2}{2a}$$

bestimmten Parabel liegen.

In Polarcoordinaten sind die Werthe von u und v

$$u = \tfrac{1}{2}\left\{r\cos\theta - \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right\}, \qquad v = \tfrac{1}{2}\left\{r\sin\theta + \frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right\}$$

woraus folgt

$$r = 2(u\cos\theta + v\sin\theta) = 2\left(u\cos\theta + \frac{u^2}{2a}\sin\theta\right).$$

Diese Gleichung soll benutzt werden, um u statt r als abhängige Variabele einzuführen. Nun ist, wenn man den vorstehenden Werth von r in die Formel für v substituirt,

$$v = \frac{u^2}{2a} + \left\{\cos\theta + \frac{u}{a}\sin\theta\right\}\frac{du}{d\theta}\cos\theta$$

d. h. weil $v = \dfrac{u^2}{2a}$ sein soll

$$\left(\cos\theta + \frac{u}{a}\sin\theta\right)\frac{du}{d\theta} = 0.$$

Hieraus folgt einerseits $u = c$ und als Polargleichung der Curve

$$r = 2\left(c\cos\theta + \frac{c^2}{2a}\sin\theta\right)$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2 + y^2 = 2cx + \frac{c^2}{a}y.$$

Andererseits ergiebt sich $u = -a\cot\theta$ mithin

$$r = -a\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$x = \sqrt{-\frac{y^3}{y+a}}.$$

Das erste Integral, welches eine Schaar von Kreisen bedeutet, ist das allgemeine; das zweite, dem eine Cissoide entspricht, bildet die singuläre Lösung.

32. Die vorige Aufgabe lässt sich dahin verallgemeinern, dass

$$v = f(u)$$

gesetzt und die zugehörige Gleichung zwischen x und y verlangt wird.

Nach demselben Verfahren erhält man als allgemeines Integral

$$x^2 + y^2 = 2cx + 2f(c)y,$$

wozu noch ein singuläres Integral kommen kann.

33. Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y und dem vom Coordinatenanfange bis zum Punkte xy reichenden Bogen s bestehe die Gleichung

$$s^2 - y^2 = 2a(s - x);$$

man sucht die zugehörige Curve.

Löst man die Gleichung nach s auf und differenzirt, so erhält man folgende Differentialgleichung

$$\left[(2x - a)\frac{dy}{dx} - y\right]^2 = \frac{2x}{a}(a^2 - 2ax + y^2);$$

um sie zu vereinfachen setze man $y = zw$ und bestimme z so, dass

$$(2x - a)\frac{dz}{dx} - z = 0$$

wird. Die übrig bleibende Gleichung ist

$$\frac{dw}{\sqrt{w^2 - a}} = \sqrt{\frac{2x}{a}} \cdot \frac{dx}{2x - a}$$

und hieraus erhält man für $2x = a\zeta^2$ als Gleichungen der Curve

$$x = \tfrac{1}{2}a\zeta^2, \quad y = \tfrac{1}{2}a\left\{C(1+\zeta)e^{-\zeta} - \frac{1}{C}(1-\zeta)e^{+\zeta}\right\}.$$

Die Verification zeigt, dass $C = 1$ genommen werden muss, also

$$x = \tfrac{1}{2}a\zeta^2, \quad y = a\left\{\zeta\frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2} - \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2}\right\},$$

$$s = a\left\{1 + \zeta\frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2} - \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2}\right\},$$

wobei die Elimination von ζ keine Schwierigkeit hat.

34. Der Bogen s werde von einem noch zu bestimmenden Punkte an bis zum Punkte xy gerechnet und es sei

$$(s - y)^3 = 24\,a^2(s - x);$$

man sucht die zugehörige Curve.

Setzt man $s - y = u$ und betrachtet u als unabhängige Variabele, so ist einerseits $ds - dy = du$ d. h.

$$dy = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 - 1\right\} du,$$

andererseits

$$u^3 = 24\,a^2(y - x + u) \text{ oder } y = \frac{u^3}{24\,a^2} + x - u;$$

durch Differentiation dieser Gleichung und Substitution des Werthes von dy entsteht eine Differentialgleichung zwischen x und u, aus welcher sich findet

$$x - c = u \pm \frac{u^2}{4\,a}.$$

Der vorige Werth von y wird nun

$$y - c = \pm\frac{u^2}{4\,a} + \frac{u^3}{24\,a^2},$$

und aus der Gleichung $s - y = u$ folgt schliesslich

$$s - c = u \pm \frac{u^2}{4\,a} + \frac{u^3}{24\,a^2}.$$

Nimmt man z. B. $c = a$ und $\frac{u^2}{4\,a}$ mit dem oberen Zeichen, so erhält man durch Elimination von u

$$y = (\tfrac{1}{3}x - a)\sqrt{\frac{x}{a}} + \tfrac{5}{3}\,a,$$

$$s = (\tfrac{1}{3}x + a)\sqrt{\frac{x}{a}} - \tfrac{1}{3}\,a,$$

und hier ist s von derjenigen Stelle an gerechnet, wo $s = 0$ d. h. x gleich ist dem speciellen Werthe

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} - 2\right) a = 0{,}1038 \ldots a.$$

Nimmt man $\frac{u^2}{4a}$ mit dem unteren Zeichen, so gelangt man zu derselben Curve.

35. Die vorige Aufgabe bildet einen speciellen Fall des allgemeineren Problemes, aus der Gleichung

$$s - kx = f(s - y)$$

die Gleichung der betreffenden Curve herzuleiten.

Nach demselben Verfahren erhält man

$$x - c = ku + \int\sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \cdot du,$$

$$y - kc = (k^2 - 1)u + f(u) + k\int\sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \,.\, du,$$

$$s - kc = k^2 u + f(u) + k\int\sqrt{2f'(u) + k^2 - 1} \cdot du,$$

woraus im concreten Falle durch Elimination von u Gleichungen zwischen x und y, sowie zwischen x und s hergeleitet werden können. Der Punkt, von welchem ab s gerechnet wird, ist nachträglich durch die Bedingung $s = 0$ zu bestimmen.

§ 40.

Die Evolventen.

Allgemeine Formeln. Bezeichnen x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Curvenpunktes, ξ und η die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes, so wird die Evolute der ersten Curve durch eine Gleichung von der Form

$$F(\xi, \eta) = 0$$

bestimmt; unter der Voraussetzung, dass diese Gleichung gegeben ist, soll hieraus die Gleichung zwischen x und y hergeleitet, d. h. die Evolvente bestimmt werden.

Die Verbindungslinie der Punkte xy und $\xi\eta$ ist einerseits Tangente an der Evolute, daher

$$y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi);$$

andererseits bildet sie die Normale der Evolvente, steht also senkrecht auf der durch den Punkt xy gehenden Tangente an der Evolvente, mithin ist

$$\frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Eliminirt man ξ und η aus den drei vorhandenen Gleichungen, so bleibt eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ übrig und diese ist die Differentialgleichung der Evolvente.

Die Form dieser Differentialgleichung lässt sich im Allgemeinen bestimmen. Aus der Gleichung $F(\xi, \eta) = 0$ folgt nämlich

$$\eta = f(\xi), \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = f'(\xi)$$

und wenn zur Abkürzung $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, so gehen die zweite und dritte Gleichung über in

$$y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi), \qquad f'(\xi) = -\frac{1}{p}$$

oder wegen des Werthes von $f'(\xi)$

$$x + py = \xi + pf(\xi), \qquad f'(\xi) = -\frac{1}{p}.$$

Die letzte Gleichung liefert ξ ausgedrückt durch p, und nach Substitution dieses Werthes entsteht eine Differentialgleichung von der Form

$$x + yp = \Phi(p),$$

die immer integrirt werden kann. Dass ihr allgemeines Integral eine willkührliche Constante enthält, bedeutet geometrisch, dass einer gegebenen Evolute unendlich viele Evolventen entsprechen, die einander parallel sind.

Beispiel 1. Die gegebene Evolute sei eine semicubische Parabel, mithin

$$\eta^2 = \tfrac{8}{27} \cdot \frac{(\xi - h)^3}{h} \quad \text{oder} \quad \eta = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2(\xi - h)^3}{3h}},$$

wobei die Wurzel negativ genommen ist, damit dem unteren Zweige der Evolute der obere Zweig der Evolvente entspreche; es ergiebt sich dann die Differentialgleichung

$$x + yp = h + \frac{h}{2p^2},$$

und als Integral derselben für $p = tan\,\tau$

$$y = h\, cot\,\tau + c\, cos\,\tau, \qquad x = \tfrac{1}{2}h\, cot^2\tau - c\, sin\,\tau.$$

Der Specialfall $c = 0$ liefert

$$y = \sqrt{2hx};$$

die Evolvente ist also die vorliegende Parabel und ausserdem jede Parallele zu dieser Parabel. (Vergl. Thl. I., § 17.).

2. Die gegebene Evolute sei eine Parabel, mithin

$$\eta = \frac{\xi^2}{2h};$$

die Evolvente ist dann durch folgende zwei Gleichungen bestimmt

$$y = (\tfrac{1}{2}h\, l\, tan\tfrac{1}{2}\tau + c)\, cos\,\tau,$$
$$x = -\tfrac{1}{2}h\, cot\,\tau - (\tfrac{1}{2}h\, l\, tan\tfrac{1}{2}\tau + c)\, sin\,\tau.$$

3. Die gegebene Evolute sei die sternförmige, durch die Gleichung

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

bestimmte Curve; die Evolvente ist dann einerseits die Curve sechsten Grades, deren Gleichung lautet

$$4(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27\, a^2 y^4$$

sowie andererseits jede Parallele zu dieser Curve.

4. Wenn die gegebene Evolute eine Kettenlinie, mithin

$$\eta = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}\right)$$

ist, so findet sich als Differentialgleichung der Evolvente

$$x + yp = a\left\{\sqrt{1+p^2} + l\left(\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}\right)\right\}$$

und hieraus für $p = tan\,\tau$

$$y = a\, sin\,\tau + c\, cos\,\tau,$$
$$x = a\,(cos\,\tau + l\, tan\tfrac{1}{2}\tau) - c\, sin\,\tau.$$

Im Falle $c = 0$ giebt die Elimination von τ

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}\right);$$

die Evolvente der Kettenlinie ist also die Tractorie der Geraden und jede Parallele zu letzterer Curve.

§ 41.

Die Trajectorien.

Allgemeine Formeln. Die Gleichung einer Curve enthalte ausser den Coordinaten noch einen Parameter, durch dessen stetige Aenderung eine Schaar von Curven derselben Art entsteht; dann heisst Trajectorie der erwähnten Curven jede neue Linie, welche alle jene Curven unter einem und demselben Winkel schneidet.

In rechtwinkligen Coordinaten sei die Gleichung der gegebenen Curve

$$f(x, y, h) = 0$$

und darin h der veränderliche Parameter; durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{\partial f(x, y, h)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, h)}{\partial y} dy = 0$$

oder, wenn τ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Punkte xy mit der x-Achse einschliesst,

$$\tan\tau = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Durch den Punkt xy gehe ferner die Trajectorie und es sei τ_1 der Winkel, welchen die Tangente an der Trajectorie mit der x-Achse bildet; dann ist

$$\tan\tau_1 = \frac{dy}{dx}.$$

Der gegebenen Bedingung zufolge muss die Differenz $\tau_1 - \tau$ einem constanten Winkel α gleich sein, dessen trigonometrische Tangente $\varkappa$ heissen möge, mithin

$$\frac{\tan\tau_1 - \tan\tau}{1 + \tan\tau_1 \tan\tau} = \varkappa;$$

substituirt man die Werthe von $\tan\tau$, $\tan\tau_1$ und beachtet, dass h in der Gleichung der Trajectorie nicht mehr vorkommen darf, so gelangt man zu der Regel: durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$f(x, y, h) = 0,$$

$$\left(\varkappa \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ergiebt sich die Differentialgleichung der Trajectorie. Im speciellen Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. wenn die Trajectorie eine orthogonale sein soll, wird $\tan\tau \cdot \tan\tau_1 = -1$ und dann ergiebt sich die Differentialgleichung der Trajectorie durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$f(x,\ y,\ h) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Die im allgemeinen Integrale der Differentialgleichung vorkommende willkührliche Constante lässt sich bestimmen, wenn die Trajectorie durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Falls die ursprüngliche Curve durch Polarcoordinaten ausgedrückt und ihre Gleichung

$$F(r,\ \theta,\ h) = 0$$

ist, gilt eine vollkommen analoge Betrachtung. Die Winkel φ und φ_1 welche die Tangente an der gegebenen Curve und die Tangente an der Trajectorie mit dem gemeinschaftlichen Radiusvector r bilden, sind nämlich an die Bedingung $\varphi_1 - \varphi = \alpha$ gebunden; die Differentialgleichung der Trajectorie ergiebt sich daher durch Elimination von h aus den Gleichungen

$$F(r,\ \theta,\ h) = 0,$$

$$\left(\varkappa \frac{\partial F}{\partial \theta} - r \frac{\partial F}{\partial r}\right) \frac{dr}{d\theta} - r \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} + \varkappa r \frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0.$$

Im speciellen Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist einfacher

$$F(r,\ \theta,\ h) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{dr}{d\theta} - r^2 \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Für die im allgemeinen Integrale vorkommende Constante gilt wieder die frühere Bemerkung.

Beispiel 1. Die gegebene Curve sei eine Gerade, mithin

$$hx - y = 0;$$

es ist dann

$$(\varkappa h - 1) \frac{dy}{dx} + h + \varkappa = 0$$

und durch Elimination von h

$$\left(\varkappa \frac{y}{x} - 1\right) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \varkappa = 0.$$

Als Integral dieser homogenen Differentialgleichung erhält man

$$\tfrac{1}{2}\varkappa\, l\left(\frac{x^2+y^2}{c^2}\right) = arctan\,\frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad r = c\,e^{\frac{\theta}{\varkappa}}.$$

Die Trajectorie eines Strahlenbüschels ist demnach eine logarithmische Spirale, welche im Falle $\alpha = 0$ d. h. $\varkappa = \infty$ zu einem concentrischen Kreise wird.

2. Ein rechter Winkel bewege sich so, dass sein Scheitel auf einer gegebenen Geraden fortrückt und der eine Schenkel immer durch einen festen Punkt geht; man sucht die orthogonale Trajectorie des anderen Schenkels.

Nimmt man die gegebene Gerade zur Abscissenachse und die vom festen Punkte darauf gefällte Senkrechte zur Ordinatenachse, so hat man als Gleichung der zu durchschneidenden Geraden

$$h(x-h) - a y = 0$$

mithin als Differentialgleichung der Trajectorie

$$x + y p = -\frac{a}{p}, \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Daraus folgt

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c - a\, l\left(\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}\right)\right\};$$

die Elimination von p aus den beiden letzten Gleichungen führt zu der gesuchten Gleichung zwischen x und y.

3. Eine Gerade bewege sich so, dass die zwischen den Coordinatenachsen enthaltene Strecke derselben die constante Länge a besitzt; man sucht die orthogonale Trajectorie dieser Geraden.

Aus der Gleichung der beweglichen Geraden

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{\sqrt{a^2-h^2}} = 1$$

ergiebt sich als Differentialgleichung der Trajectorie

$$x + y p = \frac{a p}{\sqrt{1+p^2}};$$

das Integral dieser Gleichung ist bereits in § 39., No. 29. entwickelt worden.

4. In Fig. 56. sei F ein leuchtender Punkt, CD die Trennungslinie zweier durchsichtigen Media von verschiedener Brechbarkeit,

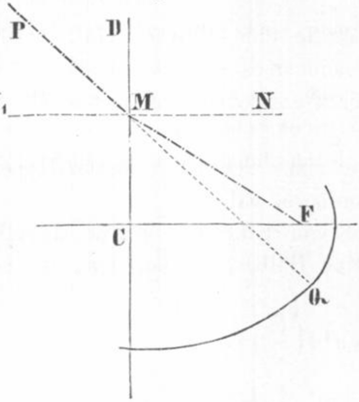
FM ein Lichtstrahl, welcher bei M jene Trennungslinie trifft und nach dem bekannten Gesetze

$$\frac{\sin NMF}{\sin N_1 MP} = \mu$$

gebrochen wird; man sucht die orthogonale Trajectorie der gebrochenen Strahlen PQ.

Nimmt man CF und CD zu Coordinatenachsen und setzt $CF = g$, $CM = h$, so ist die Gleichung des gebrochenen Strahles

Fig. 56.



$$\frac{x}{\sqrt{\mu^2 g^2 + (\mu^2 - 1) h^2}} + \frac{y}{h} = 1;$$

für die Trajectorie ergiebt sich die Differentialgleichung

$$x + yp = \frac{\mu g p}{\sqrt{1 - \mu^2 + p^2}},$$

welche nach § 39., No. 30. integrirt werden kann. Die einfachste der gesuchten Trajectorien ist ein Kegelschnitt, wovon C der Mittelpunkt, F ein Brennpunkt und dessen Haupthalbachse $= \frac{g}{\mu}$ ist; die übrigen Trajectorien sind Parallelen zu jenem Kegelschnitte.

5. Man sucht die Trajectorie aller durch die Gleichung

$$y = h x^{\mu}$$

charakterisirten parabolischen Curven.

Die Differentialgleichung der Trajectorie ist

$$\left(1 - \varkappa \mu \frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = \varkappa + \mu \frac{y}{x}$$

und kann wegen ihrer homogenen Form leicht integrirt werden, wobei die Fälle $(\mu - 1)^2 - 4\varkappa^2 \mu > 0$, $= 0$ und < 0 zu unterscheiden sind. Für eine orthogonale Trajectorie ergiebt sich die Gleichung

$$x^2 + \mu y^2 = C.$$

6. Es soll die orthogonale Trajectorie aller confocalen Ellipsen aufgesucht werden.

Bezeichnet a die veränderliche grosse Halbachse, e die unveränderliche lineare Excentricität der Ellipse, so ist die Differentialgleichung der Trajectorie

$$\left(x - \frac{y}{p}\right)(x + yp) = e^2.$$

Nach § 39., No. 16. hat man als Integral derselben

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C - e^2} = 1.$$

Für $C > e^2$ würde die Trajectorie eine Ellipse sein, welche aber die gegebene Ellipse nicht schneidet; es muss demnach $C < e^2$ genommen werden, wodurch Hyperbeln entstehen, welche der Ellipse confocal sind.

Wird umgekehrt die Trajectorie einer Schaar confocaler Hyperbeln gesucht, so findet sich eine confocale Ellipse.

7. Die orthogonale Trajectorie von Ellipsen, welche dieselbe grosse Achse und verschiedene kleine Halbachsen besitzen, ist bestimmt durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2a^2\, l\left(\frac{x}{c}\right).$$

8. Wenn in der Curvengleichung

$$Ax^m + By^n = 1$$

A constant und B veränderlich ist, so wird die Trajectorie der entstehenden Curven durch folgende Gleichung bestimmt

$$A(nx^2 + my^2) = \frac{2n}{2 - m}\, x^{2-m} + C, \quad \text{wenn } m \gtrless 2,$$

$$A(nx^2 + 2y^2) = 2n\, l\left(\frac{x}{c}\right), \qquad \text{wenn } m = 2.$$

9. Lässt man in der Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

die Grösse ε sich stetig ändern, so erhält man eine Schaar von Kegelschnitten, welche denselben Halbparameter k, dagegen verschiedene numerische Excentricitäten besitzen; die Trajectorie dieser Kegelschnitte hat zur Polargleichung

$$\sin\theta = \frac{c}{r}\, e^{\frac{r}{k}},$$

wofür in rechtwinkligen Coordinaten gesetzt werden kann

$$x^2 = \left[k\,l\left(\frac{y}{c}\right)\right]^2 - y^2.$$

10. Setzt man in der Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,a\,x - x^2)$$

das Verhältniss $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ gleich einer Constanten μ und lässt a variiren, so erhält man eine Schaar ähnlicher Ellipsen, die einander im Coordinatenanfange berühren; die Trajectorie dieser Ellipsen hat zur Gleichung

$$(2-\mu)\,x^2 + y^2 = c^{2-\mu}\,y^{\mu}, \qquad \text{für } \mu \lesseqgtr 2,$$

$$x^2 = y^2\,l\left(\frac{c}{y}\right), \qquad \text{für } \mu = 2.$$

11. Die Trajectorie einer Curve zu finden, wenn letztere in ihrer Ebene parallel einer gegebenen Richtung verschoben wird.

Legt man, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, die y-Achse in die gegebene Richtung und bezeichnet mit

$$y = \varphi(x)$$

die Gleichung der Curve in ihrer anfänglichen Lage, so ist die Gleichung der Curve in irgend einer anderen Lage

$$y - h = \varphi(x)$$

mithin nach den allgemeinen Vorschriften

$$\left\{\varkappa\,\varphi'(x) - 1\right\}\frac{dy}{dx} + \varphi'(x) + \varkappa = 0.$$

Der Elimination von h bedarf es hier nicht erst, weil h in der vorliegenden Gleichung nicht mehr vorkommt; die Gleichung der Trajectorie ist demnach

$$y - c = \int \frac{\varkappa + \varphi'(x)}{1 - \varkappa\,\varphi'(x)}\,d\,x.$$

Für die semicubische Parabel

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

ergiebt sich hieraus als orthogonale Trajectorie die gewöhnliche Parabel

$$y = c - 2\sqrt{a x}.$$

12. Die Trajectorie einer Curve zu finden, wenn letztere in ihrer Ebene um einen festen Punkt gedreht wird.

Der gegebene Punkt sei der Coordinatenanfang eines Polarsystemes und

$$\theta = \psi(r)$$

die Gleichung der Curve in ihrer ursprünglichen Lage; für eine spätere Lage ist dann

$$\theta - \beta = \psi(r),$$

mithin nach den allgemeinen Vorschriften

$$\left\{\varkappa + r\psi'(r)\right\} \frac{dr}{d\theta} - r\left\{1 - \varkappa r \psi'(r)\right\} = 0.$$

Der Elimination von β bedarf es hier nicht, mithin ist die Polargleichung der Trajectorie

$$\theta - \gamma = \int \frac{\varkappa + r\psi'(r)}{1 - \varkappa r \psi'(r)} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Rotirt z. B. eine Ellipse um ihren Mittelpunkt, so hat man als Gleichung derselben

$$\theta = arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}}\right)$$

und als Gleichung der orthogonalen Trajectorie

$$\theta - \gamma = \frac{1}{ab}\int \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{r}\, dr$$

d. i., wenn mit Hülfe der Substitution $r^2 = u$ integrirt wird,

$$\theta - \gamma = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{2ab} + arctan\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2 - b^2}}\right)$$
$$+ \frac{a^2 + b^2}{2ab}\, arctan\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}.$$

Lässt man einen über dem Durchmesser b construirten Kreis um den einen Endpunkt des Durchmessers rotiren, so hat man als Gleichung des Kreises

$$r = b\cos\theta \quad \text{oder} \quad \theta = arccos\frac{r}{b}$$

und als Gleichung der orthogonalen Trajectorie

$$\theta - \gamma = -\left\{\frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r} - arccos\frac{r}{b}\right\}.$$

Die Trajectorie ist demnach die Tractorie eines mit dem Radius b beschriebenen Kreises.

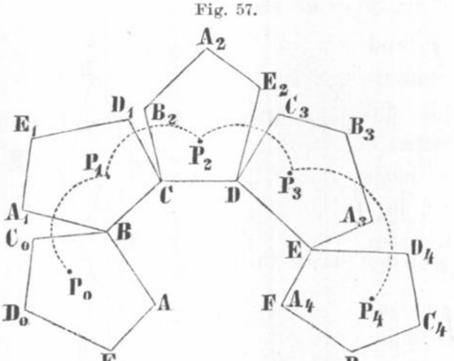
§ 42.

Die Rollcurven.

Allgemeine Formeln. Auf einer festen Curve, welche die Basis heissen möge, werde eine bewegliche Curve fortgerollt, ohne dass ein Gleiten stattfindet; irgend ein bestimmter Punkt in der Ebene der rollenden Curve beschreibt dann eine neue Linie, welche eine Rollcurve genannt wird.

Um die genannte Bewegung zu veranschaulichen, denke man sich erst zwei gebrochene Linien $ABCDEF$ und $A_0B_0C_0D_0E_0$ (Fig. 57.) deren correspondirende Seiten gleich sind nämlich $AB = A_0B_0$, $BC = B_0C_0$, $CD = C_0D_0$, $DE = D_0E_0$ etc., und betrachte $ABCDEF$ als Basis, $A_0B_0C_0D_0E_0$ als rollende Curve, wobei in der primitiven Lage der letzteren A_0B_0 mit AB zusammenfallen möge. Die nächstfolgende Lage von $A_0B_0C_0D_0E_0$ ist dann diejenige, bei welcher B_0C_0 auf BC fällt; sie wird herbeigeführt durch Drehung der beweglichen Curve um B, und hierbei beschreibt jeder in der Ebene dieser Curve liegende Punkt P_0 einen Kreisbogen P_0P_1, dessen Radius BP_0 und dessen Centriwinkel $= \angle C_0BC$ ist. Auf analoge Weise entsteht die dritte Lage durch Drehung um C, wobei P_1 wieder einen Kreisbogen P_1P_2 beschreibt, dessen Mittelpunkt C und dessen Centriwinkel $= D_1CD$ ist u. s. w. Wenn demnach ein Polygon auf einer gebrochenen Linie rollt, so besteht die Rollcurve $P_0P_1P_2P_3P_4$ aus einer Reihe von Kreisbögen. Lässt man die Polygonseiten unendlich abnehmen und denkt sich die Basis sowie die rollende Curve als Grenze eines eingeschriebenen Polygones, so wird die Rollcurve zur Einhüllenden jener Kreisbögen; ihre Gleichung lässt sich daher nach den Thl. I., § 25. gegebenen Methoden entwickeln.

Fig. 57.



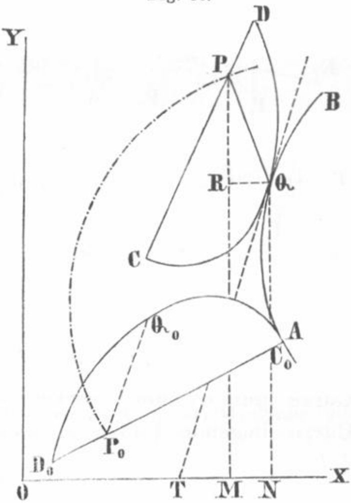
In Fig. 58. sei die Basis AQB auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen und zwar $ON = \xi$, $NQ = \eta$; die Anfangslage der rollenden Curve sei $C_0 Q_0 D_0$ und es falle dabei C_0 auf A; ihre Gleichung sei in Polarcoordinaten ausgedrückt, deren Pol der beschreibende Punkt P_0 sein möge, also $\angle C_0 P_0 Q_0 = \theta$, $P_0 Q_0 = r$. Ist nun CQD eine spätere Lage der beweglichen Curve, in welcher sie die Basis in Q berührt, so hat man erstens $arc\, CQ = arc\, C_0 Q_0 = arc\, AQ$ d. h.

$$\text{A)} \qquad \int \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} \cdot dr = \int \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} \cdot d\xi;$$

zweitens ist Q der Mittelpunkt und QP der Radius eines der Kreise, als deren Einhüllende die Rollcurve betrachtet werden kann, daher für $OM = x$ und $MP = y$

$$\text{B)} \qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2.$$

Fig. 58.



Nachdem man θ durch r, und η durch ξ ausgedrückt hat, enthalten die Gleichungen A) und B) die beiden veränderlichen Parameter r und ξ, von denen sich aber nach A) der eine durch den anderen ausdrücken lässt; die Gleichung B) kann daher so gestaltet werden, dass sie ausser x, y und etwaigen Constanten nur ξ oder r enthält, und dann ergiebt sich die Gleichung der Rollcurve durch Elimination von ξ resp. r aus der Gleichung B) und ihrem nach ξ resp. r genommenen partiellen Differentialquotienten.

Beispielweis mag die Curve bestimmt werden, welche der Pol einer logarithmischen Spirale beschreibt, wenn letztere auf der Aussenseite eines Kreises rollt. Hier ist

$$\eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}, \qquad \theta = \mu\, l\left(\frac{r}{a}\right)$$

ferner nach A), wenn c eine willkührliche Constante bezeichnet,

$$\sqrt{1 + \mu^2} \cdot r = a\left(c - a \cdot arccos\, \frac{\xi}{a}\right)$$

und nach B)

$$(x-\xi)^2+(y-\sqrt{a^2-\xi^2})^2=\frac{1}{1+\mu^2}\left(c-a\cdot arccos\,\frac{\xi}{a}\right)^2.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$arccos\,\frac{\xi}{a}=\omega,\qquad \mu=tan\beta,\qquad c=a\gamma$$

so wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$x^2+y^2-2ax\,cos\omega-2ay\,sin\omega+a^2=a^2(\omega-\gamma)^2\,cos^2\beta$$

und es ist nun ω als willkührlicher Parameter anzusehen, in Beziehung auf welchen die Differentiation giebt

$$x\,sin\omega-y\,cos\omega=a(\omega-\gamma)\,cos^2\beta.$$

Um ω zu eliminiren und gleichzeitig von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten überzugehen, setze man

$$x=R\,cos\Theta,\qquad y=R\,sin\Theta$$

und gebe den beiden vorigen Gleichungen die Formen

$$\text{C)}\qquad \begin{cases} R\,cos(\omega-\Theta)=\dfrac{R^2+a^2-a^2(\omega-\gamma)^2\,cos^2\beta}{2a}, \\ R\,sin(\omega-\Theta)=a(\omega-\gamma)\,cos^2\beta. \end{cases}$$

Die Summe der Quadrate beider Gleichungen gestattet folgende Darstellung

$$4a^4(\omega-\gamma)^2\,cos^2\beta\,sin^2\beta=[R^2-a^2-a^2(\omega-\gamma)^2\,cos^2\beta]^2,$$

diese liefert

$$(\omega-\gamma)\,cos\beta\pm sin\beta=\frac{\sqrt{R^2-a^2\,cos^2\beta}}{a}$$

oder nach Division mit $cos\beta$ und wegen $tan\beta=\mu$

$$\text{D)}\qquad \omega-\gamma\pm\mu=\frac{\sqrt{R^2-a^2\,cos^2\beta}}{a\,cos\beta},$$

wobei rechter Hand nur das positive Zeichen zu nehmen ist, weil ω und R gleichzeitig wachsen. Multiplicirt man ferner die zweite der Gleichungen C) mit $\mp tan\beta=\mp\mu$ und addirt sie zur ersten, so erhält man

$$R\,\frac{cos(\omega-\Theta\pm\beta)}{cos\beta}=\frac{R^2+a^2-(\omega-\gamma\pm\mu)^2\,a^2\,cos^2\beta+a^2\,sin^2\beta}{2a}$$

d. i. vermöge des Werthes von $\omega-\gamma\pm\mu$

$$R\,\frac{\cos(\omega - \Theta \pm \beta)}{\cos\beta} = a$$

oder

$$\omega - \Theta \pm \beta = \operatorname{Arccos}\frac{a\cos\beta}{R}\,.$$

Zieht man diese Gleichung von D) ab, setzt zur Abkürzung $a\cos\beta = A$ und bezeichnet mit Γ eine willkührliche Constante, so ergiebt sich

$$\Theta - \Gamma = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} - \operatorname{Arccos}\frac{A}{R}\,;$$

die Rollcurve ist demnach die Evolvente eines mit dem Radius

$$A = \frac{a}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

beschriebenen Kreises.

Die vorige Methode hat die Unbequemlichkeit, dass sie die Rectification der Basis und der rollenden Curve voraussetzt, und es ist daher meistentheils vortheilhafter, den Zusammenhang zwischen ξ, r, x und y durch Differentialgleichungen auszudrücken. Die Gleichung B) giebt nun durch partielle Differentiation nach ξ

$$x - \xi + (y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + r\frac{dr}{d\xi} = 0,$$

ferner ist nach A)

$$\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\cdot dr = \sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\cdot d\xi$$

und wenn man den hieraus folgenden Werth von $\frac{dr}{d\xi}$ in die vorhergehende Gleichung substituirt, so folgt

$$\left[x - \xi + (y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}\right]\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} + r\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = 0.$$

Man bemerke nun noch, dass sich im Punkte P die Rollcurve und derjenige von den eingehüllten Kreisen berühren, welcher PQ zum Radius und Q zum Mittelpunkte hat, dass mithin PQ nicht nur Normale dieses Kreises, sondern auch Normale der Rollcurve sein muss, also

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\xi}{y-\eta}\,.$$

Unter Benutzung der abkürzenden Zeichen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta', \qquad \frac{dr}{d\theta} = r', \qquad \frac{dy}{dx} = p$$

lassen sich die drei hauptsächlichen Gleichungen folgendermaassen schreiben

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2, \qquad p = -\frac{x-\xi}{y-\eta},$$

$$\frac{x-\xi+(y-\eta)\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} + \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}} = 0;$$

die beiden ersten geben

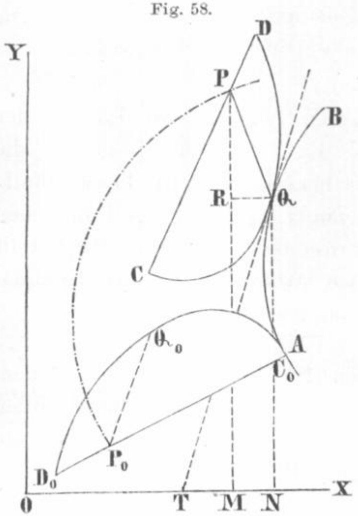
E). $$x-\xi = \mp\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y-\eta = \pm\frac{r}{\sqrt{1+p^2}},$$

und durch Substitution dieser Werthe geht die dritte Gleichung über in

F) $$\pm\frac{r}{r'} = \frac{1+p\eta'}{p-\eta'}.$$

Die Gleichungen E) und F) können direct durch folgende einfache geometrische Ueberlegung gefunden werden. Da PQ Normale der Rollcurve ist (Fig. 58.), so hat man

Fig. 58.



$$\tan MPQ = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$\sin MPQ = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\cos MPQ = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

mithin, wenn die Curve CQD auf der Aussenseite von AQB rollt,

$$RQ = PQ \cdot \sin MPQ$$

d. i. $$x-\xi = -\frac{rp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$RP = PQ \cdot \cos MPQ \text{ d. i. } y-\eta = +\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Zieht man ferner die Gerade QT, welche sowohl die Basis als die rollende Curve berührt, und setzt $\angle PQT = \varphi$, $\angle QTN = \tau$, so hat man

$$tan\varphi = \frac{r}{r'}, \qquad tan\tau = \eta'$$

ferner $\varphi = \angle PQR + \angle RQT = \frac{1}{2}\pi - \angle MPQ + \tau$,

$$tan\varphi = cot(MPQ - \tau) = \frac{1}{tan(MPQ - \tau)}$$

d. i. vermöge der Werthe von $tan\varphi$, $tan MPQ$ und $tan\tau$

$$\frac{r}{r'} = \frac{1 + p\eta'}{p - \eta'}.$$

Falls die Curve CQD auf der Innenseite von AQB rollt, ändert r sein Vorzeichen.

In den Gleichungen E) und F) lassen sich, wenn die Basis und die rollende Curve gegeben sind, η durch ξ, und r durch θ ausdrücken, so dass jene drei Gleichungen nur noch x, y, p, ξ und θ enthalten; durch Elimination von ξ und θ entsteht eine einzige Gleichung zwischen x, y, p, und diese ist die Differentialgleichung der Rollcurve. Bei geradliniger Basis ist, wenn dieselbe zur Abscissenachse genommen wird, $\eta = 0$ und dann einfacher

$$\text{G)} \qquad y = \pm\frac{r}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \pm\frac{r}{r'} = \frac{1}{p}$$

wo es nur der Elimination von θ bedarf.

Die Gleichungen E) und F) dienen zweitens zur Lösung der Aufgabe, aus den Gleichungen der Basis und der Rollcurve die Polargleichung der rollenden Curve herzuleiten. In diesem Falle sind nämlich y und p als Functionen von x, η und η' als Functionen von ξ gegeben, mithin können jene drei Gleichungen so dargestellt werden, dass nur r, r', x und ξ darin vorkommen. Nach Elimination von x und ξ bleibt eine Gleichung zwischen r und r' übrig, welche die Differentialgleichung der rollenden Curve ist.

Endlich können die Gleichungen E) und F) benutzt werden, um die Basis zu finden, auf welcher eine gegebene Curve rollen muss, wenn ein bestimmter Punkt in der Ebene der letzteren eine vorgeschriebene Rollcurve beschreiben soll. Drückt man in diesem Falle y und p durch x, sowie r und r' durch θ aus, so enthalten jene drei Gleichungen die Variabelen ξ, η, η', x, θ, und nach Elimination von x und θ bleibt die Differentialgleichung der Basis übrig.

Beispiel 1. Man sucht die Curve, welche der Brennpunkt einer Parabel beschreibt, wenn letztere auf einer Geraden rollt.

Bezeichnet a den Abstand des Brennpunkts vom Scheitel, so ist

$$r = \frac{2a}{1 + cos\theta} = \frac{a}{cos^2 \frac{1}{2}\theta}$$

und die Gleichungen G) werden

$$y^2 = \frac{a^2}{1 + p^2} sec^4 \tfrac{1}{2}\theta, \qquad tan^2 \tfrac{1}{2}\theta = p^2;$$

daraus folgt als Differentialgleichung der Rollcurve

$$y^2 = a^2(1 + p^2).$$

Das Integral derselben ist

$$l\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{c}\right) = \frac{x}{a}.$$

Denkt man sich als primitive Stellung der Parabel diejenige, bei welcher die Achse senkrecht zur x-Achse, mithin der Brennpunkt am tiefsten liegt, so muss für $x = 0$, $y = a$ werden; diess giebt $c = a$ und als Gleichung der Rollcurve

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

woraus hervorgeht, dass die Rollcurve eine Kettenlinie ist.

2. Eine hyperbolische Spirale rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Pole der Spirale beschriebene Curve.

Aus den Gleichungen G) erhält man wegen $r\theta = a$

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + c;$$

die erzeugte Rollcurve ist also die Tractorie eines mit dem Radius a construirten Kreises.

3. Eine Kreisevolvente rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Pole der Evolvente beschriebene Curve.

Da sich die Polargleichung der rollenden Curve nicht auf r, wohl aber auf θ reduciren lässt, nämlich

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - Arccos\frac{a}{r},$$

so behandelt man in den Gleichungen E) nicht θ, sondern r als unabhängige Variabele; es ist dann

$$y^2 = \frac{r^2}{1 + p^2}, \qquad \frac{r^2 - a^2}{a^2} = \frac{1}{p^2},$$

woraus folgt, dass die Rollcurve eine durch die Gleichung

$$y^2 = 2a(x + c)$$

charakterisirte Parabel ist.

4. Man sucht die Curve, welche von dem Pole einer Cardioide beschrieben wird, wenn letztere auf einer Geraden rollt.

Schreibt man die Polargleichung der rollenden Curve in der Form

$$r = b \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta \quad \text{oder} \quad \theta = 2 \operatorname{Arccos} \sqrt{\frac{r}{b}},$$

wo b den vierfachen Radius des erzeugenden Kreises bedeutet, so erhält man als Gleichung der Rollcurve

$$x - c = \int \frac{y^{\frac{1}{3}}\, dy}{\sqrt{b^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}}.$$

Die noch erforderliche Integration lässt sich mittelst der Substitution

$$b^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = z^2$$

ausführen, wodurch schliesslich entsteht

$$[(x - c)^2 + y^2 - 4b^2]^3 + 27 b^2 y^4 = 0.$$

Denkt man sich als anfängliche Stellung der Cardioide diejenige, bei welcher der Pol am höchsten liegt, so entsprechen einander die Anfangswerthe $x = 0$ und $y = b$; daraus folgt $c = 0$ und in Polarcoordinaten

$$\sin^4 \Theta = \frac{(4b^2 - R^2)^3}{27 b^2 R^4}.$$

5. Die Curve, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten ist

$$x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

rollt auf einer Geraden; man sucht die vom Mittelpunkte dieser Curve beschriebene Curve.

Die Gleichung der rollenden Curve lässt sich durch die beiden Gleichungen ersetzen

$$x_1 = a \cos^3 \omega, \qquad y_1 = a \sin^3 \omega$$

oder in Polarcoordinaten

$$r^2 = a^2(\cos^6 \omega + \sin^6 \omega), \qquad \tan \theta = \tan^3 \omega;$$

die Gleichungen G) werden hiernach

$$y^2 = \frac{a^2(\cos^6\omega + \sin^6\omega)}{1 + p^2}, \qquad \tan^2 2\omega = \frac{4}{p^2}$$

und liefern durch Elimination von ω die Differentialgleichung

$$y^2(p^2 + 4) = a^2.$$

Durch Integration derselben ergiebt sich, dass die Rollcurve eine aus den Halbachsen $\frac{1}{4}a$ und $\frac{1}{2}a$ construirte Ellipse ist.

6. Eine logarithmische Spirale, deren Gleichung ist

$$\theta = \mu\, l\left(\frac{r}{b}\right)$$

rollt auf der Aussenseite eines durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2$$

bestimmten Kreises; man sucht die Rollcurve, welche der Pol der Spirale beschreibt.

Die Gleichung F) giebt wegen $\eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$

$$\xi = \frac{a(1 - \mu p)}{\sqrt{(1 + \mu^2)(1 + p^2)}},$$

ferner ist zufolge der Kreisgleichung

$$\eta = \frac{a(\mu + p)}{\sqrt{(1 + \mu^2)(1 + p^2)}},$$

und nachher wegen $x + yp = \xi + \eta p$

$$x + yp = A\sqrt{1 + p^2}, \qquad A = \frac{a}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung besteht für $p = \tan\tau$ aus den beiden Gleichungen

$$x = A(\cos\tau + \tau\sin\tau) - c\sin\tau,$$
$$y = A(\sin\tau - \tau\cos\tau) + c\cos\tau.$$

Für $x = R\cos\Theta$, $y = R\sin\Theta$ erhält man aus der Quadratsumme dieser Gleichungen

$$\tau - \frac{c}{A} = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A};$$

ferner giebt der Quotient $\frac{y}{x} = \tan\Theta$

$$\tau - \frac{c}{A} = \frac{\tan\tau - \tan\Theta}{1 + \tan\tau\tan\Theta} = \tan(\tau - \Theta)$$

mithin

$$\tau - \Theta = Arctan\left(\tau - \frac{c}{A}\right) = Arctan\frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} = Arccos\frac{A}{R}$$

und wenn man diese Gleichung von der zweitvorhergehenden abzieht, so bleibt

$$\Theta - \frac{c}{A} = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} - Arccos\frac{A}{R},$$

woraus hervorgeht, dass die Rollcurve als Evolvente eines mit dem Radius A beschriebenen Kreises betrachtet werden kann.

7. Man soll diejenige Curve finden, welche durch Rollen auf einer Parabel eine gerade Linie erzeugt, die mit der Parabelachse zusammenfällt.

Benutzt man die Gleichungen

$$\eta = \sqrt{2h\xi}, \qquad \eta' = \sqrt{\frac{h}{2\xi}}, \qquad y = 0, \qquad p = 0,$$

so gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm h,$$

welche zeigt, dass die rollende Curve eine Archimedeische Spirale, und der beschreibende Punkt ihr Pol ist.

8. Man sucht diejenige Curve, welche durch Rollen auf einer Parabel eine Gerade erzeugt, die mit der Scheiteltangente der Parabel zusammenfällt.

Aus den Gleichungen

$$\eta = \sqrt{k\xi}, \qquad \eta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\xi}}, \qquad x = 0, \qquad p = \infty$$

erhält man die Differentialgleichung

$$r\frac{d\theta}{dr} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{r}},$$

deren Integral ist

$$r = \frac{k}{(\theta - \gamma)^2}.$$

9. Auf welcher Curve muss eine Ellipse rollen, wenn ein Brennpunkt derselben eine Gerade beschreiben soll?

Die Gleichung der Ellipse sei

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\theta} \quad \text{mithin} \quad r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{b}{\sqrt{r(2a - r) - b^2}},$$

ferner die Gleichung der beschriebenen Geraden

$$y = a + e \quad \text{mithin} \quad p = 0;$$

die Differentialgleichung der Basis wird dann

$$\frac{b\,d\eta}{\sqrt{2e\eta - \eta^2}} = d\xi$$

und als Gleichung der Basis folgt hieraus

$$\eta = e\left(1 - \cos\frac{\xi - \alpha}{b}\right).$$

Setzt man die willkührliche Constante $\alpha = 0$, so ist die primitive Lage der Ellipse diejenige, bei welcher ihre grosse Achse senkrecht auf der Basis steht.

10. Auf welcher Basis muss eine Cardioide rollen, wenn deren Pol eine Gerade beschreiben soll?

Aus den Gleichungen

$$r = b(1 + \cos\theta), \qquad y = 0$$

erhält man als Differentialgleichung der Basis

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{2b - \eta}{\eta}};$$

die Basis ist demnach eine Cycloide, deren erzeugender Kreis den Radius b hat.