Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Integralrechnung

Schlömilch, Oskar

Leipzig, 1870

Capitel X. Differentialgleichungen höherer Ordnungen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6274

Capitel X.

Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

§ 43.

Die einfachsten Formen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q,$$

so hat man als allgemeines Schema einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$q = f(x, y, p).$$

In den einfacheren Fällen, wo rechter Hand nur eine oder zwei der Grössen x, y, p vorkommen, lässt sich die Integration der betreffenden Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Integration von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Die hierzu dienenden Operationen sind folgende.

Erste Form. Aus der Gleichung

$$q = f(x)$$

folgt wegen $q\,dx = dp$ durch einmalige Integration

$$p = \int f(x)\,dx + C,$$

und nachher, weil $p\,dx = dy$ ist,

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C_1$$

oder

$$y = x \int f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx + Cx + C_1.$$

Zweite Form. Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(y)$$

werden auf die Weise integrirt, dass man zunächst die Substitution

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

anwendet und in der nunmehrigen Gleichung

$$p \frac{dp}{dy} = f(y)$$

die Variabelen sondert; diess giebt als erstes Integral

$$p = \sqrt{C + 2 \int f(y)\, dy}.$$

Vermöge der Bedeutung von p folgt hieraus als zweites Integral

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2 \int f(y)\, dy}} + C_1.$$

Dritte Form. Bei Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(p)$$

benutzt man wieder die vorige Substitution, welche giebt

$$dx = \frac{dp}{f(p)}.$$

Daraus folgt einerseits unmittelbar

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C,$$

andererseits, weil $dy = p\, dx$ ist,

$$y = \int \frac{p\, dp}{f(p)} + C_1.$$

Eliminirt man p aus den beiden letzten Gleichungen, so gelangt man zu der Integralgleichung zwischen x, y, C, C_1.

Vierte Form. Ist die Differentialgleichung von der Form

$$q = f(x, p),$$

so giebt man ihr zunächst die Gestalt

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

welche eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabelen x und p darstellt. Durch Integration dieser Gleichung erhält man p als Function von x etwa

$$p = \varphi(x)$$

und nachher

$$y = \int \varphi(x)\, dx + Const.$$

Fünfte Form. Bei Differentialgleichungen von der Form

$$q = f(y, p)$$

benutzt man die für die zweite Form angegebene Substitution und erhält

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

d. h. eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen y und p. Das Integral derselben hat die Gestalt

$$p = \psi(y)$$

und hieraus folgt schliesslich

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y)} + Const.$$

Für alle Fälle möge noch bemerkt sein, dass das allgemeine Integral jeder Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei willkührliche Constanten enthalten muss. Sind weniger willkührliche Constanten vorhanden, so ist das Integral entweder ein particuläres oder ein singuläres. Die Integrale der letzteren Art erhält man dadurch, dass man entweder bei der ersten oder bei der zweiten Integration statt des allgemeinen Integrales das etwa vorhandene singuläre Integral nimmt, welches nach den in § 36., No. 10. angegebenen Vorschriften aufzusuchen ist.

Beispiel 1. Man verlangt die Curve, in welcher zwischen der Normale u, dem Krümmungsradius ϱ und einer gegebenen Constanten h die Gleichung

$$\varrho = \frac{u^3}{h^2}$$

stattfindet.

Die Gleichung der gesuchten Curve ist

$$By^2 - B^2(x - c)^2 = h^2;$$

sie bedeutet eine Hyperbel, weil die willkührliche Constante B nur positiv genommen werden kann.

2. Man sucht die Curve, welcher die Eigenschaft zukommt

$$\varrho = -\frac{u^3}{h^2}.$$

Die Integralgleichung lässt sich in der Form

$$y^2 = 2h(x - c) + \varkappa (x - c)^2$$

darstellen und bedeutet irgend einen Kegelschnitt, dessen Hauptachse mit der x-Achse zusammenfällt und dessen Halbparameter $= h$ ist.

3. Für welche Curve gilt die Relation

$$\frac{u^3}{\varrho} = \frac{y^4}{a^2} \pm b^2.$$

Bezeichnen A und B willkührliche Constanten, so findet sich als Gleichung der Curve

$$y^2 = A e^{\frac{2x}{a}} + B e^{-\frac{2x}{a}} + \sqrt{4AB \mp a^2 b^2}.$$

4. Die analoge Aufgabe

$$\frac{u^3}{\varrho} = -\frac{y^4}{a^2} \pm b^2$$

hat zur Auflösung

$$y^2 = A \cos\frac{2x}{a} + B \sin\frac{2x}{a} + \sqrt{A^2 + B^2 \mp a^2 b^2}.$$

5. Man sucht diejenige Curve, bei welcher die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers $= \frac{u^2}{h}$ ist.

Bezeichnen a und C willkührliche Constanten, so ergiebt sich

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{Cy - 2h}}\, dy$$

oder, wenn $C = \frac{2h}{b}$ gesetzt wird,

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sqrt{y(y-b)}}{b} + l\left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{y-b}}{\sqrt{b}}\right) \right\},$$

Die betreffende Curve lässt sich auch durch folgende zwei Gleichungen ausdrücken

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + l \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) \right\}, \qquad y = b \sec^2\varphi.$$

6. Man sucht diejenige Curve, bei welcher die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers $= -\frac{u^2}{h}$ ist.

Wie vorhin ergiebt sich

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{Cy + 2h}}\, dy,$$

wo C ebensowohl positiv als negativ genommen werden darf.

Im Falle $C = \frac{2h}{b}$ erhält man

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sqrt{y(y+b)}}{b} - l\left(\frac{\sqrt{y} + \sqrt{y+b}}{\sqrt{b}}\right) \right\}$$

oder

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - l\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\psi\right) \right\}, \qquad y = b\tan^2\psi.$$

Für $C = 0$ entsteht das particuläre Integral

$$x - a = \tfrac{2}{3} \sqrt{\frac{y^3}{2h}}.$$

Für $C = -\frac{2h}{b}$ ergiebt sich

$$x - a = \sqrt{\frac{b^3}{2h}} \left\{ \arccos\sqrt{\frac{b-y}{b}} - \frac{\sqrt{y(b-y)}}{b} \right\}$$

oder

$$x - a = \sqrt{\frac{c^3}{h}}\,(\omega - \sin\omega), \qquad y = c(1 - \cos\omega);$$

die Cycloide bildet einen speciellen Fall dieser Curve.

7. Man sucht die Polargleichung derjenigen Curve, bei welcher die von $\theta = \alpha$ an gerechnete Sectorenfläche in constantem Verhältnisse zur Fläche des rechtwinkligen Dreiecks steht, dessen Katheten der Radiusvector und die Polarsubnormale des Punktes r, θ sind.

Bezeichnet man das gegebene Verhältniss mit $1 : \mu$, so findet man mittelst der Substitution $r^2 = R$

$$r^2 = Ae^{\lambda\theta} + Be^{-\lambda\theta}, \qquad \lambda = \sqrt{2\mu},$$

wobei die willkührlichen Constanten A und B an die Bedingung

$$Ae^{\alpha\lambda} - Be^{-\alpha\lambda} = 0$$

gebunden sind.

8. In einer Curve gelte für den Krümmungsradius ϱ die leicht zu construirende Formel

$$\varrho = h\csc^3\tau,$$

wobei τ den Winkel zwischen der Abscissenachse und der Tangente im Punkte xy bezeichnet; man verlangt die Curvengleichung.

Die gesuchte Linie ist durch die Gleichung

$$(y-b)^2 = 2h(a-x)$$

bestimmt und demnach eine Parabel.

9. Bei welcher Curve ist die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers constant $= k$?

Die Gleichung der betreffenden Curve lautet

$$y - b = k\, l\, sec\, \frac{x-a}{k}\,.$$

10. Bei einer durch den Coordinatenanfang gehenden Curve sei der vom Coordinatenanfang ab gerechnete Bogen

$$s = \tfrac{3}{2} h\, sin^2 \tau\,;$$

man sucht die Gleichung der Curve.

Der Differentialgleichung genügen die Werthe

$$x = a - h\, cos^3 \tau, \qquad y = b + h\, sin^3 \tau,$$

woraus folgt

$$(x-a)^{\frac{2}{3}} + (y-b)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}.$$

Um noch die beiden Nebenbedingungen zu erfüllen, muss $a = h$ und $b = 0$ genommen werden.

11. Eine Curve berührt die Abscissenachse in einem Punkte, dessen Abscisse k ist; für den von demselben Punkte aus gerechneten Bogen gilt die Formel

$$s = \tfrac{1}{2} k\, sin^2 \tau\,;$$

es soll die Natur dieser Curve bestimmt werden.

Durch Integration der betreffenden Differentialgleichung findet man

$$x - a = k(cos\tau + \tau\, sin\tau), \qquad y - b = k(sin\tau - \tau\, cos\tau)$$

oder, wenn

$$x - a = r\, cos\theta, \qquad y - b = r\, sin\theta$$

gesetzt wird,

$$r^2 = k^2(1+\tau^2), \qquad \theta = \tau - arctan\tau.$$

Die Curve ist hiernach eine Kreisevolvente, wobei der übrigen Bedingungen wegen $a = 0$ und $b = 0$ genommen werden muss.

12. Man sucht diejenige Curve, in welcher die Verticalprojection des Krümmungshalbmessers $= h + \dfrac{x^2}{h}$ ist.

Bezeichnen c und γ willkührliche Constanten, so lautet die Gleichung der Curve

$$y = \frac{x}{\gamma} - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} h\, l\left(\frac{h+\gamma x}{c}\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$y = \frac{a}{h} x - \frac{a^2 + h^2}{h} l\left(\frac{a+x}{b}\right).$$

Die specielle Annahme $\gamma = 0$ liefert das particuläre Integral

$$y - b = \frac{x^2}{2h}.$$

13. Für welche Curve gilt die Relation

$$\varrho = 2x \sec^2 \tau.$$

Das Integral der betreffenden Differentialgleichung ist

$$y - b = \left(\frac{x}{3a} - 1\right)\sqrt{ax};$$

die Curve stimmt also mit der in Thl. I., S. 68. unter No. 5. betrachteten Curve überein.

14. Die analoge Aufgabe

$$\varrho = x \sec^2 \tau$$

hat folgende Auflösung

$$4by = x^2 - 2b^2 l\left(\frac{x}{a}\right).$$

15. Zur Bestimmung der Curve, welcher die Eigenschaft

$$\varrho = 2x \csc \tau$$

zukommt, erhält man

$$y - b = \int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx$$

oder für $x = a \sin^2 \frac{1}{2}\omega$ und $a = 2c$

$$x = c\,(1 - \cos\omega), \qquad y - b = c\,(\omega - \sin\omega);$$

die Curve ist demnach eine Cycloide.

16. Man sucht die Curve, für welche die Gleichung gilt

$$\varrho = 2\sqrt{hx} \cdot \csc^2 \tau.$$

Hier lassen sich x und y folgendermassen darstellen

$$x = h\,(C - \csc\tau)^2, \qquad y - b = 2h\,(\cot\tau + C\, l \tan\tfrac{1}{2}\tau),$$

woraus τ nöthigenfalls eliminirt werden könnte.

17. Es wird die Curve gesucht, worin der von $x = a$ an gerechnete Bogen gleich ist der Strecke, welche die Tangente im Endpunkte des Bogens von der Ordinatenachse abschneidet.

Unter Rücksicht auf die gegebene Nebenbedingung findet man

$$y = \frac{b}{2}\left\{1 + l\left(\frac{x}{a}\right)\right\} - \frac{a^2 + x^2}{4b}.$$

18. Bei einer durch den Coordinatenanfang gehenden Curve ist der von demselben Punkte an gerechnete Bogen gleich dem Doppelten der Strecke, welche die Tangente im Endpunkte des Bogens von der Ordinatenachse abschneidet; man sucht die Gleichung der Curve.

Mit Rücksicht auf die gegebenen Nebenbedingungen findet man

$$y = \left(1 - \frac{x}{3c}\right)\sqrt{cx}.$$

19. Eine Curve schneidet die x-Achse in einem Punkte, dessen Abscisse $= a$ ist; der vom nämlichen Punkte aus gezählte Bogen gleicht der Projection der Abscisse auf die Tangente am Bogenendpunkte; man sucht die zugehörige Curve.

Letztere ist eine mit dem Parameter a construirte Kettenlinie.

20. Eine Curve schneidet die x-Achse in einem Punkte, dessen Abscisse $= a$ ist, und von welchem aus die Bögen gerechnet werden sollen; man verlangt die Curve, deren Bogen gleich der Strecke ist, welche die Normale durch den Bogenendpunkt von der Ordinatenachse abschneidet.

Als Gleichung der Curve findet sich

$$9ay^2 = (2a + x)^2 (a - x).$$

21. Man sucht die Curve, bei welcher der Krümmungsradius durch die Formel

$$\varrho = \frac{y}{\cos\tau \sin\tau}$$

bestimmt ist.

Die Gleichung der Curve lautet

$$y^2 = a\left(a + b e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

22. Es wird die Curve verlangt, bei welcher die Horizontalprojection des Krümmungshalbmessers mit der Subtangente zusammenfällt.

Der Aufgabe genügt die Tractorie der Geraden.

23. Es bezeichne O den Coordinatenanfang, P einen Curvenpunkt, Q den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt, PT die Polartangente, PU die Polarnormale; man sucht diejenige Curve, bei welcher sich die Flächen der Dreiecke OPQ und PTU wie $1:n$ verhalten.

Setzt man

$$\frac{dr}{d\theta}=p \text{ und } \frac{d^2r}{d\theta^2}=\frac{dp}{d\theta}=p\frac{dp}{dr},$$

so erhält man eine homogene Differentialgleichung zwischen p und r, die sich mittelst der gewöhnlichen Substitution $p=rt$ integriren lässt. Nachher findet man für $n=1$:

$$r=ce^{\frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2},$$

für $n>1$:

$$r^{n-1}=Ae^{m\theta}+Be^{-m\theta}, \qquad m=\sqrt{n-1},$$

und für $n<1$:

$$r^{n-1}=C\cos m(\theta-\gamma), \qquad m=\sqrt{1-n}.$$

24. Man verlangt die Polargleichung derjenigen Curve, in welcher der Krümmungshalbmesser das m-fache von der Projection des Radiusvector auf die Normale beträgt.

Die Gleichung der Curve ist

$$\theta-\gamma=\int\sqrt{\frac{r^2+C}{(m-1)r^2-C}}\cdot\frac{dr}{r}.$$

Dem speciellen Falle $C=0$, $m>1$ entspricht als particuläre Auflösung eine logarithmische Spirale; bei der allgemeinen Auflösung sind die Fälle $m=1$ (Kreisevolvente), $m>1$ und $m<1$ zu unterscheiden.

Für $m=2$, $C=a^2$ erhält man z. B.

$$\theta-\gamma=\tfrac{1}{2}\arccos\left(\frac{a^2}{r^2}\right)+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{r^2+a^2}+\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{r^2+a^2}-\sqrt{r^2-a^2}}\right)$$

oder

$$r=\frac{a}{\sqrt{\cos\omega}}, \qquad \theta-\gamma=\tfrac{1}{2}\left\{\omega+l\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\omega\right)\right\}.$$

25. Es bezeichne u die Polarnormale und es werde die Curve gesucht, welche die Eigenschaft besitzt

$$\varrho=-\frac{(h^2+r^2)u}{r^2}.$$

Als Integralgleichung findet man

$$\theta - \gamma = \tfrac{1}{2} \, arccos \, \frac{C - h^2 r^2}{r^2 \sqrt{2C + h^4}}$$

oder

$$\frac{1}{r^2} = \frac{cos^2(\theta - \gamma)}{a^2} - \frac{sin^2(\theta - \gamma)}{a^2 + h^2},$$

woraus hervorgeht, dass die Curve eine Hyperbel ist.

26. Für die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = u \, \varphi(r)$$

besteht die Lösung in folgenden zwei Gleichungen

$$\int \frac{dr}{r\varphi(r)} = \psi(r),$$

$$\theta - \gamma = \int \frac{dr}{r \sqrt{[C r^2 e^{-2\psi(r)} - 1]}}.$$

27. Man sucht die Curve, in welcher der Krümmungshalbmesser gleich dem Radiusvector ist.

Mittelst der Bemerkung, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{rt}{\sqrt{(1 + t^2)^3}} \cdot \frac{dt}{dr}$$

einen vollständigen Differentialquotienten darstellt, findet man

$$\theta - \gamma = \sqrt{\frac{r - a}{a}} - 2 \, arccos \sqrt{\frac{a}{r}}$$

oder auch

$$r = a(1 + \omega^2), \qquad \theta - \gamma = \omega - 2 \, arctan \, \omega.$$

Die Curve gehört zu den Spiralen und gestattet eine einfache Rectification, nämlich

$$s = \frac{r + 2a}{3} \sqrt{\frac{r - a}{a}}.$$

28. Die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = \varphi(r)$$

wird durch folgende Gleichungen gelöst

$$\int \frac{r\,dr}{\varphi(r)} = \psi(r),$$

$$\theta - \gamma = \int \frac{[\psi(r) - c] \, dr}{r \sqrt{r^2 - [\psi(r) - c]^2}}.$$

29. Man sucht diejenige Curve, in welcher die Bögen proportional den Krümmungshalbmessern wachsen.

Aus der Gleichung

$$\varrho = \mu s$$

ergiebt sich durch Berücksichtigung der Relation $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$

$$s = c e^{\mu \tau}.$$

Differenzirt man diese Gleichung und beachtet, dass ds ebensowohl $= sec\,\tau \cdot dx$ als $= csc\,\tau \cdot dy$ gesetzt werden kann, so gelangt man zu den beiden Gleichungen

$$x - a = \frac{c\mu\, e^{\mu\tau}(\mu\, cos\,\tau + sin\,\tau)}{\mu^2 + 1},$$

$$y - b = \frac{c\mu\, e^{\mu\tau}(\mu\, sin\,\tau - cos\,\tau)}{\mu^2 + 1},$$

aus denen τ zu eliminiren ist. Es folgt aber

$$(x - a)^2 + (y - b^2) = \frac{c^2 \mu^2 e^{2\mu\tau}}{\mu^2 + 1}$$

und für $\mu = cot\,\varepsilon$

$$\frac{y - b}{x - a} = tan\,(\tau - \varepsilon),$$

woraus hervorgeht, dass die gesuchte Curve eine logarithmische Spirale ist.

30. Die allgemeinere Aufgabe

$$\varrho = f(s)$$

lässt sich ganz analog behandeln. Man erhält zunächst

$$\int \frac{ds}{f(s)} = \tau - \gamma,$$

und wenn man nach geschehener Integration hieraus s bestimmt, so entsteht eine Gleichung von der Form

$$s = \varphi(\tau);$$

diese führt zu den beiden Gleichungen

$$x - a = \int \varphi'(\tau)\, cos\,\tau\, d\tau, \qquad y - b = \int \varphi'(\tau)\, sin\,\tau\, d\tau,$$

welche die gesuchte Curve bestimmen.

Hiernach entspricht z. B. der Gleichung $\varrho^2 = 2hs$ eine Kreisevolvente, der Gleichung $\varrho^2 + s^2 = h^2$ eine Cycloide und der Gleichung $h(\varrho - h) = s^2$ eine Kettenlinie.

31. Man verlangt das Integral der Differentialgleichung

$$\left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \lambda^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{oder} \quad x^2q^2 + \lambda^2 = p^2,$$

worin λ eine gegebene Constante bezeichnet.

Mit Hülfe der Substitution $q = \frac{dp}{dx}$ ergiebt sich als erstes Integral

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{c} + \frac{\lambda^2 c}{x}\right),$$

wozu noch das singuläre Integral $p = \lambda$ kommt. Das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung ist demnach

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2c} + \lambda^2 c\, l\left(\frac{x}{a}\right)\right\},$$

und ihr singuläres Integral

$$y = b + \lambda x.$$

32. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$h^2(2p - xq)\,q = x.$$

Als allgemeines Integral findet man

$$y = b + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{ch^2} + \tfrac{1}{3}cx^3\right)$$

und als singuläres Integral

$$y = b \pm \frac{x^2}{2h}.$$

33. Die Differentialgleichung

$$(p - xq)^2 + 2hq = 0$$

kann mittelst der Substitution $p = x^m u$ bei zweckmässiger Wahl von m integrirt werden; ihr allgemeines Integral ist

$$y - b = cx - \frac{c^2x^2}{4h},$$

und ihr singuläres Integral

$$y = \frac{h}{2}\, l\left(\frac{x}{a}\right).$$

34. Als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$h\,(p + xq)^2 = h + xp$$

erhält man mittelst der vorigen Substitution

$$y = \frac{x^2}{8h} - \frac{cx}{h} + \frac{c^2 - h^2}{h} l\left(\frac{x}{a}\right)$$

und als singuläres Integral

$$y = h\, l\left(\frac{a}{x}\right).$$

35. Mittelst einer ähnlichen Substitution ergiebt sich, dass die Differentialgleichung

$$xp(p - xq)^2 + 4h^2 q = 0$$

folgendes allgemeine Integral besitzt

$$y - b = \pm h \left\{\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} + \arcsin\frac{x}{a}\right\},$$

wozu noch das singuläre Integral kommt

$$y = \pm h\, l\left(\frac{x}{a}\right).$$

36. Die Differentialgleichung

$$p^2(p - xq)^2 = \frac{x^2}{h^2} - p^2$$

lässt sich wie die vorigen Differentialgleichungen behandeln und liefert als erstes Integral

$$x^2 - h^2 p^2 = h^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2$$

und als zugehöriges singuläres Integral

$$(x^2 - h^2 p^2 - h^2)(x^2 - h^2 p^2) = 0.$$

Setzt man den ersten Factor $= 0$, so erhält man dasselbe wie für $a = \infty$, mithin ein particuläres Integral, dagegen führt $x^2 - h^2 p^2 = 0$ zu einem singulären Integrale. Demnach ist das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung

$$ah(y - b) = \pm\int\sqrt{(a^2 - h^2)\,x^2 + 2ah^2 x - a^2 h^2}\cdot dx,$$

worin behufs der Ausführung der Integration die Fälle $a^2 < h^2$, $a^2 = h^2$ und $a^2 > h^2$ zu unterscheiden sind. Der zweite Fall liefert das particuläre Integral

$$9k(y - b)^2 = 4(x - k)^3, \qquad k = \tfrac{1}{2}h.$$

Ausserdem existirt noch das singuläre Integral

$$h(y - b) = \pm\int\sqrt{x^2 - h^2}\cdot dx.$$

37. Zur Integration der Differentialgleichung

$$hq(p^2 - yq) = p^2$$

kann man die Substitution $p = y^n u$ benutzen; man findet als allgemeines Integral

$$y = \frac{a^2}{h} + b e^{\frac{x}{a}}$$

und als singuläres Integral

$$hy = (x - a)^2.$$

38. Für die Differentialgleichung

$$h^3 p q^3 = (p - 2xq)^2$$

erhält man als allgemeines Integral

$$9h^3(y - b)^2 = 32a^2(x - a)^3,$$

und als singuläres Integral

$$675h^3(y - b)^2 = 128x^5.$$

§ 44.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. Bezeichnen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegebene Functionen von x allein, so ist

$$\text{A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + \psi(x)\,y = 0$$

das allgemeine Schema einer sogenannten reducirten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur Integration derselben sind folgende Bemerkungen von Werth.

Führt man statt y eine neue Unbekannte z ein mittelst der Substitution

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int\varphi(x)\,dx},$$

so erhält man aus A) folgende Differentialgleichung für z

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left\{\left(\frac{\varphi(x)}{2}\right)^2 + \frac{\varphi'(x)}{2} - \psi(x)\right\} z;$$

diese ist von der einfacheren Form $z'' = F(x) \cdot z$ und lässt sich nicht selten integriren.

Falls man zwei von einander verschiedene particuläre Integrale

y_1 und y_2 der Gleichung A) kennt, so kann man hieraus das allgemeine Integral zusammensetzen; letzteres ist

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

wo C_1 und C_2 willkührliche Constanten bezeichnen.

Auch wenn nur ein particuläres Integral Y der Gleichung A) bekannt ist, lässt sich das allgemeine Integral derselben finden, nämlich

$$y = C_1 Y + C_2 Y \int \frac{dx}{Y^2}\, e^{-\int \varphi(x)\, dx}.$$

Die Integration der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{B)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi(x) \frac{dy}{dx} + \psi(x)\, y = f(x)$$

kann mittelst der sogenannten Variation der Constanten auf die Integration der reducirten Gleichung A) zurückgeführt werden. Bezeichnen nämlich y_1 und y_2 die beiden particulären Integrale der reducirten Gleichung A), so ist das Integral der allgemeinen Gleichung B)

$$y = y_1 \left\{ \int \frac{f(x)\, dx}{y_2 D \left[\frac{y_1}{y_2}\right]} + C_1 \right\} + y_2 \left\{ \int \frac{f(x)\, dx}{y_1 D \left[\frac{y_2}{y_1}\right]} + C_2 \right\},$$

wobei D den in Beziehung auf x genommenen Differentialquotienten bedeutet.

Beispiel 1. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

kommt auf die folgende zurück

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left(\tfrac{1}{4} a^2 - b\right) z,$$

welche sich nach § 43., II. integriren lässt, wenn man die Fälle $a^2 - 4b > 0$, $a^2 - 4b = 0$ und $a^2 - 4b < 0$ unterscheidet. Schliesslich findet man im ersten Falle

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}\left(C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}\right), \qquad \varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 - b};$$

im zweiten Falle

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}\left(C + C_1 x\right),$$

und im dritten Falle

$$y = e^{-\frac{1}{2}ax}\left(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x\right), \qquad \mu = \sqrt{b - \tfrac{1}{4} a^2}.$$

2. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{\alpha}{x}\frac{d y}{d x} + \frac{\beta}{x^2} y = 0$$

lässt sich dadurch auf die vorige zurückbringen, dass man statt x eine neue unabhängige Variabele t mittelst der Substitution $x = e^t$ einführt. Je nachdem $(\alpha - 1)^2 - 4\beta$ positiv, Null oder negativ ist, ergeben sich die Formeln

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha - 1)}(C_1 x^{\varkappa} + C_2 x^{-\varkappa}), \qquad \varkappa = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\alpha - 1)^2 - \beta},$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha - 1)}(C + C_1 l x),$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}(\alpha - 1)}\left\{C_1 \cos(\mu l x) + C_2 \sin(\mu l x)\right\}, \quad \mu = \sqrt{\beta - \tfrac{1}{4}(\alpha - 1)^2}.$$

Ein geometrisches Beispiel hierzu bietet die Aufsuchung der Curve, für welche

$$\int y\, d x = \frac{x(y - x \tan\tau)}{m}$$

ist. Man erhält

$$y = C_1 x^{\sqrt{1-m}} + C_2 x^{-\sqrt{1-m}}, \qquad m < 1,$$

$$y = b\, l\left(\frac{x}{a}\right), \qquad m = 1,$$

$$y = C_1 \cos\left(\sqrt{m - 1} \cdot l x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{m - 1} \cdot l x\right), \quad m > 1.$$

3. Mittelst der im Anfange dieses Paragraphen erwähnten Substitution ergiebt sich, dass der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 2\varkappa x \frac{d y}{d x} + [\varkappa(\varkappa - 1) - \lambda^2 x^2]\, y = 0$$

die Integralgleichung entspricht

$$y = x^{-\varkappa}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}),$$

und der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 2\varkappa x \frac{d y}{d x} + [\varkappa(\varkappa - 1) + \mu^2 x^2]\, y = 0$$

die Integralgleichung

$$y = x^{-\varkappa}(C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x).$$

4. Nach demselben Verfahren findet man, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 2\beta x \frac{d y}{d x} + (\alpha + \beta^2 x^2)\, y = 0$$

folgendes Integral besitzt

$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}), \qquad \lambda = \sqrt{\beta - \alpha}, \qquad \alpha < \beta,$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 + C_2 x), \qquad \alpha = \beta,$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}(C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x), \qquad \mu = \sqrt{\alpha - \beta}, \qquad \alpha > \beta.$$

5. Um die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta x y = 0$$

zu integriren, versuche man, ob derselben die Exponentialgrösse $e^{\lambda x}$ genügen kann, wenn die Constante λ zweckmässig bestimmt wird. Man gelangt hierdurch zu einem particulären Integrale, aus welchem das allgemeine Integral folgt

$$y = e^{-\alpha x}\left\{C_1 + C_2 \int e^{\alpha x - \frac{1}{2}\beta x^2}\, dx\right\}.$$

6. Für die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

erhält man nach demselben Verfahren das allgemeine Integral

$$y = e^{-\beta x}\left\{C_1 + C_2 \int x^{-\alpha} e^{\beta x}\, dx\right\}.$$

Falls α eine negative ganze Zahl ist, kann die angedeutete Integration leicht ausgeführt werden.

7. Der Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(\mu - 1)x\frac{dy}{dx} - \mu(\mu - 1)y = 0$$

genügt als particuläres Integral eine Potenz von der Form $(A + Bx)^\mu$, wenn A und B zweckmässig bestimmt werden; das allgemeine Integral ist

$$y = (a + x)^\mu \left\{C_1 + C_2 \int \frac{(a - x)^{\mu - 1}}{(a + x)^{\mu + 1}}\, dx\right\}.$$

8. Mittelst der Variation der Constanten ergiebt sich für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = \frac{a}{x}$$

das allgemeine Integral

$$y = \frac{C_1 \cos\mu x + C_2 \sin\mu x}{x} + \frac{a}{\mu^2 x}.$$

9. Als allgemeine Lösung der Aufgabe

$$\int y\,dx = \tfrac{4}{3}x(y - x\tan\tau) + F(x)$$

findet man nach demselben Verfahren

$$y = C_1\sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2}\int\frac{F(x)}{\sqrt{x^5}}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{x}}\int\frac{F(x)}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

10. Für die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (1 + \lambda x)\frac{dy}{dx} + \lambda y = \mu x^2$$

erhält man als allgemeines Integral

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2(1 + \lambda x) - \frac{\mu}{\lambda}x^2.$$

11. Der Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{4}y = bx$$

entspricht das Integral

$$y = C_1\sqrt{a + x} + C_2\sqrt{a - x} - \tfrac{4}{3}bx.$$

12. Für die allgemeinere Differentialgleichung

$$(a^2 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{4}y = F(x)$$

erhält man als Integral

$$y = \sqrt{a + x}\left\{C_1 + \frac{1}{a}\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{a + x}}\right\}$$
$$+ \sqrt{a - x}\left\{C_2 - \frac{1}{a}\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{a - x}}\right\}.$$

§ 45.

Homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Allgemeine Regeln. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung wird homogen genannt, wenn sie unter der Form

$$\text{A)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}\right) \text{ oder } xq = F\left(p, \frac{y}{x}\right)$$

enthalten ist. Dieselbe lässt sich nach folgender Methode auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

Setzt man $y = xt$, mithin

$$q = \frac{F(p, t)}{x}$$

so hat man einerseits durch Differentiation von $y = xt$

$$dy = t\,dx + x\,dt;$$

andererseits ist $dy = p\,dx$ mithin durch Vergleichung der beiden Werthe von dy

B) $$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{p - t}.$$

Ferner ergiebt sich aus der Gleichung $dp = q\,dx$ durch Substitution des obigen Werthes von q

$$dp = \frac{F(p, t)}{x}\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{F(p, t)}.$$

Vergleicht man jetzt die beiden Werthe von $\frac{dx}{x}$, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen p und t nämlich

C) $$\frac{dp}{dt} = \frac{F(p, t)}{p - t}.$$

Durch Integration derselben entsteht ein Resultat von der Form $p = \varphi(t)$ d. i.

$$t + x\frac{dt}{dx} = \varphi(t);$$

diese neue Differentialgleichung liefert

D) $$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = l\left(\frac{x}{c}\right),$$

und wenn hier nach ausgeführter Integration $t = \frac{y}{x}$ eingesetzt wird, so kommt die gesuchte Integralgleichung zum Vorschein.

Wenn sich das Integral der Differentialgleichung C) nicht in der vorausgesetzten wohl aber in der inversen Form $t = \psi(p)$ darstellen lässt, so ist nach B)

$$\frac{dx}{x} = \frac{\psi'(p)\,dp}{p - \psi(p)} = \left\{\frac{1}{p - \psi(p)} - \frac{1 - \psi'(p)}{p - \psi(p)}\right\} dp$$

mithin durch Integration

E) $$l\left(\frac{x}{c}\right) = \int \frac{dp}{p - \psi(p)} - l[p - \psi(p)]$$

woraus x als Function von p, etwa

F) $$x = \chi(p)$$

erhalten wird. Ferner ist $y = xt$ d. i.

G) $$y = x\psi(p).$$

Eliminirt man p aus den Gleichungen F) und G), so gelangt man zu der gesuchten Integralgleichung.

Bemerkenswerth ist noch der specielle Fall, wo die Gleichung A) unter der Form

H) $$\frac{x^2}{y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{oder} \quad xq = tf\left(\frac{p}{t}\right)$$

enthalten ist. Die Differentialgleichung C) wird dann homogen und lässt sich mittelst der gewöhnlichen Substitution $\frac{p}{t} = u$ integriren. Zunächst erhält man

$$\frac{dt}{t} = \frac{(u-1)\,du}{f(u) + u - u^2}$$

und durch Integration mit Rücksicht auf den Werth $t = \frac{y}{x}$

I) $$l\left(\frac{y}{x}\right) = C + \int \frac{(u-1)\,du}{f(u) + u - u^2}.$$

Ferner ist nach B) und dem Vorigen

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\frac{p}{t} - 1}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{u-1}\cdot\frac{(u-1)\,du}{f(u) + u - u^2}$$

und durch Integration

K) $$lx = A + \int \frac{du}{f(u) + u - u^2}.$$

Addirt man hierzu die Gleichung I), so folgt

L) $$ly = B + \int \frac{u\,du}{f(u) + u - u^2};$$

Die beiden letzten Gleichungen, aus denen möglicherweise u eliminirt werden kann, enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

Beispiel 1. Es wird diejenige Curve gesucht, bei welcher zwischen dem Radiusvector r, seiner Projection r^* auf die Normale und dem Krümmungshalbmesser ϱ die Gleichung $r^*\varrho = r^2$ stattfindet.

Die Differentialgleichung C) kann in diesem Falle direct integrirt werden und liefert

$$p = \frac{A - t}{1 + At};$$

die gesuchte Curve ist demnach eine durch die Gleichung

$$x^2 + 2Cxy - y^2 = K$$

bestimmte gleichseitige Hyperbel.

2. Man verlangt die Curve, bei welcher die Relation $\eta \varrho = xy$ gilt, wenn η die Ordinate des Fusspunktes der vom Coordinatenanfange auf die Tangente herabgelassenen Senkrechten bedeutet.

Als Gleichung der Curve findet sich

$$\beta(\beta - 2) y^2 = x^2 + \alpha x^\beta,$$

wobei die willkührliche Constante β verschieden von 2 sein muss. Dem speciellen Falle $\beta = 2$ entspricht das particuläre Integral

$$y^2 = \tfrac{1}{2} x^2 \, l\left(\frac{a}{x}\right).$$

3. Die Differentialgleichung

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

hat zum allgemeinen Integral

$$ly = A + B\,lx + \tfrac{1}{2}\varkappa (lx)^2.$$

4. Unter der Voraussetzung, dass $\lambda + 1$ von Null verschieden ist, entspricht der Differentialgleichung

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \lambda \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

das allgemeine Integral

$$ly = A + Bx^{1+\lambda} - \frac{\varkappa}{1 + \lambda}\, lx.$$

Für $\lambda = -1$ kommt man auf den in No. 3. betrachteten Fall zurück.

5. Bei der Integration der Differentialgleichung

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = \varkappa \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \lambda \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \mu \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

in welcher $\mu \gtrless 1$ sein möge, hat man die drei Fälle zu unterscheiden, ob der Ausdruck

$$\varkappa(1-\mu)+\tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2$$

positiv, Null oder negativ ist. Im ersten Falle ergiebt sich

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}(Ax^{\varepsilon}+Bx^{-\varepsilon}), \qquad \varepsilon = \sqrt{\varkappa(1-\mu)+\tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2}\,;$$

im zweiten ist

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}(A+B\,l x), \qquad \varkappa(1-\mu)+\tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2 = 0;$$

im dritten Falle erhält man

$$y=x^{\frac{1}{2}(1+\lambda)}\{A\cos(\varepsilon\, l x)+B\sin(\varepsilon\, l x)\},\ \ \varepsilon=\sqrt{\varkappa(\mu-1)-\tfrac{1}{4}(1+\lambda)^2}.$$

6. Die gegebene Differentialgleichung sei

$$y\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\frac{dy}{dx}.$$

Der Gleichung C) lässt sich dann die leicht integrabele Form ertheilen

$$\frac{dt}{dp}-\frac{t}{p}-t^2=0\,;$$

diese liefert für x und y die beiden Gleichungen

$$l x = C_1 - \frac{2}{C+2}\,l p + l(p^2+C) - \frac{C+1}{C+2}\,l(p^2+C+2)\,,$$

$$y = -\frac{2xp}{p^2+C},$$

aus denen p eliminirt werden kann. Für $C = -1$ erhält man z. B.

$$y^2 = 4a(a-x).$$

Im Falle $C = -2$ ist die Formel für lx nicht anwendbar, vielmehr hat man in diesem Falle das folgende particuläre Gleichungensystem

$$l x = C_1 + \frac{1}{p^2} + l\left(1-\frac{2}{p^2}\right), \qquad y = \frac{2xp}{2-p^2}.$$

7. Das Integral der Differentialgleichung

$$x\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=0$$

lässt sich, wenn $C-2lp=\omega^2$ gesetzt wird, durch folgende zwei Gleichungen ausdrücken

$$x = a e^{\omega+\frac{1}{2}\omega^2}, \qquad y = b\,\omega e^{\omega}.$$

8. Als Integral der Differentialgleichung

$$x\left[y^2 + xy\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2} + y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

erhält man auf ähnliche Weise

$$x = a e^{\omega + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^3}, \qquad y = b\,\omega\, e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}.$$

§ 46.

Functionalgleichungen.

Allgemeine Bemerkung. Sind $x_1, x_2, x_3, \cdots$ mehrere Werthe der unabhängigen Variabelen x, und $y_1, y_2, y_3, \cdots$ die zugehörigen Werthe der abhängigen Variabelen y, so kann die Aufgabe gestellt werden, die Function $y = f(x)$ so zu bestimmen, dass einer gegebenen Gleichung zwischen $x_1, x_2, x_3, \cdots$ eine gleichfalls gegebene Gleichung zwischen $y_1, y_2, y_3, \cdots$ entspricht, dass also zwei Gleichungen von den Formen

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \cdots) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(y_1, y_2, y_3, \cdots) = 0$$

simultan stattfinden. Derartige Aufgaben führen auf sogenannte Functionalgleichungen, die sich nicht selten in Differentialgleichungen umwandeln lassen, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Beispiel 1. Eine Curve besitzt die Eigenschaft, dass irgend drei in arithmetischer Proportion stehenden Abscissen drei in geometrischer Proportion stehende Ordinaten entsprechen; man sucht die Gleichung der Curve.

Die beiden, vorhin mit φ und ψ bezeichneten Gleichungen sind hier

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y_3 = \sqrt{y_1 y_2};$$

setzt man $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, so geht die Gleichung $y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$ nach Substitution des Werthes von x_3 in die folgende Functionalgleichung über

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}.$$

Um sie zu vereinfachen nehme man die Logarithmen und setze

$$lf(x) = F(x);$$

es ist dann

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{F(x_1) + F(x_2)\right\}.$$

Für $x_1 = x$, $x_2 = x + 2h$ wird hieraus

$$F(x+h) = \tfrac{1}{2}\left\{F(x) + F(x+2h)\right\}$$

oder

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x+h) + F(x)}{h^2} = 0.$$

Geht man in dieser für jedes x und h geltenden Gleichung zur Grenze für unendlich abnehmende h über, so erhält man die Differentialgleichung

$$F''(x) = 0\,,$$

deren Integral ist $F(x) = \alpha + \beta x$. Die gesuchte Function ist also

$$f(x) = e^{F(x)} = a e^{\beta x}$$

und $y = a e^{\beta x}$ die Gleichung der verlangten Curve.

2. Man sucht diejenige Function, bei welcher drei in arithmetischer Proportion stehenden Argumenten drei in harmonischer Proportion stehende Functionswerthe entsprechen.

Die Functionalgleichung ist in diesem Falle

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2f(x_1)\,f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)}\,;$$

sie kann mittelst der Substitution $f(x) = \dfrac{1}{F(x)}$ vereinfacht werden, wodurch man erhält

$$f(x) = \frac{1}{A + Bx}\,.$$

3. Es wird diejenige Function gesucht, bei welcher drei in harmonischer Proportion stehenden Argumenten drei in geometrischer Proportion stehende Functionswerthe entsprechen.

Um die Functionalgleichung

$$f\left(\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right) = \sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$$

zu vereinfachen setze man $x = \dfrac{1}{\xi}$ und bezeichne $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ mit $F(\xi)$; man kommt dann auf den in No. 1. erörterten Fall zurück, wodurch entsteht

$$f(x) = b\,e^{\frac{a}{x}}.$$

4. Man verlangt diejenige Function, welcher die Eigenschaft zukommt

$$f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = \mu\, f(x_1)\cdot f(x_2)\,.$$

Für $x_2 = 0$ erhält man den Specialwerth

$$f(0) = \frac{2}{\mu}$$

ferner ist für $x_1 = x + h$, $x_2 = h$

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \frac{\mu f(h) - 2}{h^2} f(x+h).$$

Lässt man h gegen die Null convergiren, so erhält man linker Hand $f''(x)$, rechter Hand $\frac{0}{0} f(x)$, wobei der Werth von $\frac{0}{0}$ zwar nicht bekannt, aber entschieden unabhängig von x d. h. irgend eine Constante k ist. Die Integration der entstehenden Differentialgleichung giebt

$$f(x) = Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die ursprüngliche Functionalgleichung, so findet man $A = B = \frac{1}{\mu}$ mithin

$$f(x) = \frac{1}{\mu}\left(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}\right).$$

Da k ebensowohl positiv als negativ sein kann, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen, nämlich

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{\mu} \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{2}{\mu} \cos\beta x,$$

wobei a und β beliebig sind.

5. Welcher Function kommt, beliebige x und h vorausgesetzt, die folgende Eigenschaft zu

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{\varkappa + f(x+2h)}{\varkappa + f(x)},$$

wobei $\varkappa$ eine gegebene Constante bezeichnet.

Subtrahirt man beiderseits die Einheit und dividirt mit h^2, so hat man

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = \frac{2}{\varkappa+f(x)} \cdot \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h folgt hieraus eine Differentialgleichung, deren Integral ist

$$f(x) = \frac{2}{A + Bx} - \varkappa.$$

6. Es soll die Function $f(x)$ so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{f(x+h)-f(x)}=\sqrt{\frac{1+[f(x+2h)]^2}{1+[f(x)]^2}}$$

für beliebige x und h stattfindet.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren findet man

$$f(x)=tan\,(\alpha+\beta x)\,,$$

worin α und β willkührliche Constanten bezeichnen.

Auf gleiche Weise lässt sich auch die allgemeinere Functionalgleichung

$$\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{f(x+h)-f(x)}=\left[\frac{\varkappa+[f(x+2h)]^m}{\varkappa+[f(x)]^m}\right]^n$$

behandeln. Für $f(x)=y$ gelangt man nämlich zu einer Differentialgleichung, deren Integral ist

$$A+B\int\frac{dy}{(\varkappa+y^m)^{2n}}=x,$$

sodass hier $y=f(x)$ als Umkehrung einer Gleichung von der Form $F(y)=x$ bestimmt wird.