universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Einleitung.

Bestimmung von Grenzwerthen.

I. Um den Grenzwerth zu ermitteln, welchem sich eine Function $f(x)$ in dem Falle nähert, wo an die Stelle von x eine unendlich wachsende Zahl ω gesetzt wird, reicht in vielen Fällen eine blosse Transformation von $f(x)$ aus. Die folgenden Aufgaben werden dies zeigen.

Aufgabe 1. Es soll $Lim\,(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega})$ für ein constantes α bestimmt werden.

Wollte man ohne Weiteres $\omega=\infty$ setzen, so würde man den nichtssagenden Ausdruck $\infty-\infty$ erhalten; betrachtet man aber die gegebene Function als einen Bruch mit dem Nenner 1 und multiplicirt Zähler und Nenner mit $\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}$, so führt die nunmehrige Gleichung

$$\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega}=\frac{\alpha}{\sqrt{\omega+\alpha}+\sqrt{\omega}}$$

zu dem Resultate

$$Lim\,(\sqrt{\omega+\alpha}-\sqrt{\omega})=0.$$

Aufgabe 2. Man sucht $Lim\,[\sqrt{\omega\,(\omega+\alpha)}-\omega]$.

Durch ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren ergiebt sich zunächst

$$\sqrt{\omega\,(\omega+\alpha)}-\omega=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\omega}}+1}$$

und hieraus

$$Lim\,[\sqrt{\omega\,(\omega+\alpha)}-\omega]=\tfrac{1}{2}\,\alpha.$$

Bemerkung. In älteren Werken findet man häufig die Behauptung, dass eine endliche Grösse gegen eine unendlich wachsende Zahl verschwinde und dass mithin $\omega+\alpha$ durch ω zu ersetzen sei. Die

Unsicherheit dieser Schlussweise zeigt sich an den obigen zwei Aufgaben, denn nach jener Weglassungsregel erhält man zwar bei No. 1 das richtige Resultat $\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega}=0$, bei No. 2 aber das falsche Resultat $\omega-\omega=0$.

Aufgabe 3. Nach demselben Verfahren ist die Gleichung

$$Lim\,[\sqrt{(\omega+\alpha)\,(\omega+\beta)}-\omega]=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

zu beweisen.

Aufgabe 4. Es soll

$$Lim\,\frac{l(\alpha+\beta\,e^{\omega})}{\omega}$$

bestimmt werden, worin e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\alpha+\beta e^{\omega}=e^{\omega}\,(\alpha\,e^{-\omega}+\beta)$$

erhält man

$$Lim\,\frac{l(\alpha+\beta\,e^{\omega})}{\omega}=Lim\left\{1+\frac{l(\alpha\,e^{-\omega}+\beta)}{\omega}\right\}=1.$$

Aufgabe 5. Man sucht den Grenzwerth

$$Lim\left\{l(\alpha+\beta\,e^{\omega})\,.\,l\left(1+\frac{1}{\omega}\right)\right\}.$$

Derselbe ist identisch mit

$$Lim\left\{\frac{l(\alpha+\beta\,e_{\omega})}{\omega}\,.\,l\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]\right\}=1.$$

II. Eine zu Grenzbestimmungen häufig anwendbare Methode besteht darin, dass man die veränderliche Grösse V, deren Grenzwerth gesucht wird, zwischen zwei Variabeln U und W einschliesst, von denen die eine kleiner, die andere grösser als V ist, dass man also eine Ungleichung von der Form

$$U<V<W$$

aufstellt. Bezeichnet ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch, so kann die vorstehende Ungleichung auch durch die Gleichung

$$V=U+\varepsilon\,(W-U)$$

ersetzt werden. Falls nun U und W sich einer gemeinschaftlichen Grenze K nähern, convergirt $W-U$ gegen den Werth $K-K=0$ und dann ergiebt sich

$$Lim\;V=K$$

Der Anwendung dieses Verfahrens schicken wir einen vielfach brauchbaren Hülfssatz voraus. In der identischen Gleichung

$$\frac{b^m - a^m}{b-a} = b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \ldots + b\,a^{m-2} + a^{m-1}$$

sei m selbstverständlich eine ganze positive Zahl und $0 < a < b$; die rechte Seite erhält dann einen zu kleinen Werth, wenn man jedes b durch das kleinere a ersetzt, sie wird dagegen zu gross, wenn für jedes a das grössere b geschrieben wird; es ist daher

$$m\,a^{m-1} < \frac{b^m - a^m}{b-a} < m\,b^{m-1}.$$

Um diese Ungleichung zu verallgemeinern, nehmen wir

$$a = A^{\frac{p}{q}}, \quad b = B^{\frac{p}{q}}, \quad m = q$$

wo p und q ganze positive Zahlen sein mögen und $A < B$ vorauszusetzen ist; es wird dann

$$q\,A^{p-\frac{p}{q}} < \frac{B^p - A^p}{B^{\frac{p}{q}} - A^{\frac{p}{q}}} < q\,B^{p-\frac{p}{q}}$$

und ferner, wenn wir zu den reciproken Werthen übergehen,

$$\frac{B^{\frac{p}{q}} - p}{q} < \frac{B^{\frac{p}{q}} - A^{\frac{p}{q}}}{B^p - A^p} < \frac{A^{\frac{p}{q}} - p}{q}$$

Andererseits ist

$$p\,A^{p-1} < \frac{B^p - A^p}{B-A} < p\,B^{p-1}$$

mithin durch Multiplication beider Ungleichungen

$$\frac{p}{q}\left(\frac{A}{B}\right)^{p-1} B^{\frac{p}{q}-1} < \frac{B^{\frac{p}{q}} - A^{\frac{p}{q}}}{B-A} < \frac{p}{q}\left(\frac{B}{A}\right)^{p-1} A^{\frac{p}{q}-1}.$$

Aufgabe 6. Man sucht den Grenzwerth von

$$\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)} - \omega.$$

Setzt man in der vorigen Ungleichung $p = 1$, $q = 3$,

$$A = \omega^3, \quad B = (\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)$$

und zur Abkürzung

$$\frac{B}{A} = \left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)\left(1+\frac{\beta}{\omega}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\omega}\right) = R, \text{ mithin } B = AR,$$

so erhält man

$$\frac{1}{3\,\omega^2\sqrt[3]{R^2}} < \frac{\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)} - \omega}{(\alpha+\beta+\gamma)\,\omega^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,\omega + \alpha\beta\gamma} < \frac{1}{3\,\omega^2}$$

oder

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{R^2}}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}$$
$$<\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega<$$
$$\tfrac{1}{3}\left\{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\omega}+\frac{\alpha\beta\gamma}{\omega^2}\right\}.$$

Wegen $Lim\, R=1$ folgt nun

$$Lim\left\{\sqrt[3]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)(\omega+\gamma)}-\omega\right\}=\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Aufgabe 7. Unter der Voraussetzung, dass $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ endliche Grössen sind und n deren Anzahl bedeutet, ist nach der vorigen Methode die allgemeinere Gleichung abzuleiten

$$Lim\left\{\sqrt[n]{(\omega+\alpha)(\omega+\beta)\ldots(\omega+\mu)}-\omega\right\}=\frac{\alpha+\beta+\ldots+\mu}{n}$$

III. Ein drittes Verfahren zur Ermittelung von Grenzwerthen besteht darin, dass man eine neue Variabele einführt und damit die gegebene Function auf eine andere Form bringt, deren Grenzwerth bekannt ist.

Aufgabe 8. Für ein constantes α soll

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}$$

ermittelt werden.

Setzt man $\frac{\omega}{\alpha}=\tau$, wo τ eine gleichzeitig mit ω unendlich wachsende Zahl bedeutet, so hat man identisch

$$\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}=\left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\alpha}$$

mithin, weil $\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}$ gegen die Grenze e convergirt,

$$Lim\left\{\left(1+\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=e^{\alpha}.$$

Aufgabe 9. Man verlangt den Werth von

$$Lim\left(\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}\right).$$

Für $\frac{\alpha}{\omega}=\vartheta$, wo nun ϑ gegen die Null convergirt, ist

$$\omega\sin\frac{\alpha}{\omega}=\alpha\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

mithin

$$Lim\left(\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\right) = \alpha.$$

Aufgabe 10. Auf ähnliche Art sind die Formeln

$$Lim\left\{\omega\left(1-\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\} = 0, \quad Lim\left\{\omega^2\left(1-\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)\right\} = \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

zu beweisen.

Aufgabe 11. Man verlangt den Werth von

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $\sin^2\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\} = Lim\left\{\left[\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\frac{1}{2}\left(\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\right)\sin\frac{\alpha}{\omega}}\right\} = 1.$$

Aufgabe 12. Auf ähnliche Art ist die Formel

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega^2}\right\} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$$

zu beweisen.

Aufgabe 13. Man sucht den Werth von

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa \tan\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\}.$$

Wird $\tan\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$Lim\left\{\left(1+\varkappa \tan\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\} = Lim\left\{\left[\left(1+\frac{\varkappa}{\tau}\right)^{\tau}\right]^{\omega \sin\frac{\alpha}{\omega}\sec\frac{\alpha}{\omega}}\right\} = e^{\varkappa\alpha}.$$

Aufgabe 14. Mittelst der Formeln in No. 11 und 13 soll die Gleichung

$$Lim\left\{\left(\cos\frac{\alpha}{\omega}+\varkappa \sin\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\omega}\right\} = e^{\varkappa\alpha}$$

bewiesen werden.