Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel I. Einfache Differentiation von entwickelten Functionen einer Variabelen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel I.

Einfache Differentiation von entwickelten Functionen einer Variabelen.

§. 1.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

Für die Differentiation der sogenannten einfachen Functionen gelten die nachstehenden Formeln, welche gewissermassen das Einmaleins der Differentialrechnung ausmachen:

1) $$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1},$$

2) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x\, la, \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

3) $$\frac{d({}^a log\, x)}{dx} = \frac{1}{x\,.\,la}, \quad \frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x}$$

4) $$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

5) $$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,$$

6) $$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x,$$

7) $$\frac{d\cot x}{dx} = -\csc^2 x,$$

8) $$\frac{d\sec x}{dx} = \sec^2 x \sin x,$$

9) $$\frac{d\csc x}{dx} = -\csc^2 x \cos x,$$

10) $$\frac{d\, arc\sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d\, arc\cos x}{dx},$$

11) $$\frac{d \operatorname{arc} \tan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = -\frac{d \operatorname{arc} \cot x}{dx},$$

12) $$\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{d \operatorname{arc} \csc x}{dx}.$$

Sind α, β, γ, etc. constante Grössen, u, v, w, etc. Functionen einer und derselben Variabelen x, so hat man für die Differentiation des Aggregates $\alpha u + \beta v +$ etc. die Regel

13) $$\frac{d(\alpha u + \beta v + \gamma w + \ldots)}{dx} = \alpha \frac{du}{dx} + \beta \frac{dv}{dx} + \gamma \frac{dw}{dx} + \ldots$$

Dieselbe gilt im Allgemeinen nur unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Summanden endlich ist; im entgegengesetzten Falle wird eine besondere Untersuchung erforderlich.

Zur Differentiation der Producte dient die Vorschrift

14) $$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

wofür auch gesetzt werden kann

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}\right).$$

Aus der letzteren Form ergiebt sich bei einer grösseren Anzahl von Factoren

15) $$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx} + \ldots\right).$$

Falls unendlich viel Factoren vorhanden sind, darf diese Formel nicht ohne Weiteres angewendet werden.

Die Differentiation der Quotienten unterliegt dem Gesetz

16) $$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}.$$

Ist der Nenner constant $= a$, so bedarf es dieser Formel nicht, weil der Quotient $\frac{v}{a}$ als Product aus dem constanten Factor $\frac{1}{a}$ und dem variabelen Factor v angesehen werden kann. Bei constantem Zähler $u = b$ giebt die Formel einfacher

17) $$\frac{d\left(\frac{b}{u}\right)}{dx} = -\frac{b}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Handelt es sich um die Differentiation einer Function von einer Function

$$z = f[\varphi(x)],$$

so ersetzt man diese eine Gleichung durch die beiden folgenden Gleichungen

$$z = f[y], \quad y = \varphi(x).$$

Aus der ersten berechnet man $\frac{dz}{dy}$ ebenso als wenn y eine unabhängige Variabele wäre; aus der zweiten sucht man $\frac{dy}{dx}$, und schliesslich erhält man durch Multiplication

18) $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, nicht sogleich den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, sondern vorerst das Differential dz zu entwickeln und die angegebene Substitution von y im Gedächtnisse zu behalten. Das Ende der Rechnung kündigt sich von selbst dadurch an, dass das Differential der unabhängigen Variabelen als letzter Factor auftritt. Soll z. B. $l\,(a+bx+cx^2)$ differenzirt werden, so sagt man: analog der Formel

$$d\,l\,y = \frac{1}{y}\,dy$$

ist auch, wenn statt y der Ausdruck $a+bx+cx^2$ gesetzt wird,

$$d\,l(a+bx+cx^2) = \frac{1}{a+bx+cx^2}\,d\,(a+bx+cx^2);$$

rechts hat man noch ein Aggregat zu differenziren und dies giebt wegen $da = 0$

$$d\,l\,(a+bx+cx^2) = \frac{1}{a+bx+cx^2}\,[b\,dx + c\,d\,(x^2)]$$

$$= \frac{1}{a+bx+cx^2}\,[b\,dx + c \,.\, 2x\,dx]$$

$$= \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\,dx,$$

und damit schliesst die Rechnung, weil es nur noch der beiderseitigen Division mit dx bedürfen würde, um den gesuchten Differentialquotienten zu erhalten. In diesem, wie in jedem andern Falle w a n d e r t das Zeichen d so lange von links nach rechts, bis es auf der äussersten Rechten nur noch vor x oder der sonstigen unabhängigen Variabelen steht.

§. 2.

Beispiele zur Differentiation algebraischer Functionen.

1) $$d\,[(a+\alpha x)(b+\beta x)]=(a\beta+b\alpha+2\alpha\beta x)\,dx.$$

Die Aufgabe kann auf zwei verschiedene Arten behandelt werden; man benutzt entweder die Regel zur Differentiation der Producte, oder man führt die Multiplication von $a+\alpha x$ mit $b+\beta x$ aus und differenzirt das entstandene Aggregat. Dies giebt zugleich eine Controle der Rechnung

2) $$d\,[(a+\alpha x)\,(b+\beta x^2)]=(b\alpha+2a\beta x+3\alpha\beta x^2)\,dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

3) $$d[(\tfrac{1}{2}b^2-b\,x+x^2)\,(\tfrac{1}{2}b^2+b\,x+x^2)]=4x^3\,dx.$$

Warum ist das Differential so einfach und identisch mit $d(x^4)$?

4) $$d\left(\frac{c}{a+b\,x}\right)=-\frac{b\,c}{(a+b\,x)^2}\,dx.$$

5) $$d\left(\frac{\alpha+\beta\,x}{\alpha-\beta\,x}\right)=\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta\,x)^2}\,dx.$$

Man kann diese Aufgabe entweder direct nach Formel 16) behandeln, oder auf die vorhergehende zurückführen, indem man von der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}=\frac{2\alpha}{\alpha-\beta x}-1$$

Gebrauch macht.

6) $$d\left(\frac{\alpha+\beta\,x}{a+b\,x}\right)=\frac{a\beta-b\,\alpha}{(a+b\,x)^2}\,dx.$$

Die vorhin angegebenen zwei Methoden sind auch hier anwendbar; welcher kleinen Modification bedarf die zweite?

7) $$d\left(\frac{a+b\,x}{a+b\,x+c\,x^2}\right)=-\frac{2\,a\,c\,x+b\,c\,x^2}{(a+b\,x+c\,x^2)^2}\,dx.$$

8) $$d\left(\frac{\alpha+\beta\,x}{a+b\,x+c\,x^2}\right)=\frac{a\beta-b\,\alpha-2\,c\,\alpha\,x-c\,\beta\,x^2}{(a+b\,x+c\,x^2)^2}\,dx.$$

9) $$d\left(\frac{\alpha+\beta\,x+\gamma\,x^2}{a+b\,x+c\,x^2}\right)$$

$$=\frac{a\beta-b\,\alpha+2\,(a\gamma-c\,\alpha)\,x+(b\,\gamma-c\,\beta)\,x^2}{(a+b\,x+c\,x^2)^2}\,dx.$$

Will man die Aufgabe nicht direct lösen, so kann man sie mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2}=\frac{\gamma}{c}-\frac{1}{c}\cdot\frac{a\gamma-c\alpha+(b\gamma-c\beta)\,x}{a+bx+cx^2}$$

auf die vorhergehende zurückführen.

10) $$d\sqrt{a+bx}=\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

11) $$d\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

12) $$d\,(x\sqrt{a+bx})=\frac{2a+3bx}{2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Hier benutzt man entweder die Regel zur Differentiation der Producte nebst Formel 10) oder man setzt $x\sqrt{a+bx}=\sqrt{ax^2+bx^3}$ und betrachtet den letzteren Ausdruck als Potenz eines Aggregates; was ist bequemer für die Rechnung?

13) $$d\left(\frac{\sqrt{a+bx}}{x}\right)=-\frac{2a+bx}{2x^2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Hier gilt wieder die vorige Bemerkung.

14) $$d(x^\mu\sqrt{a+bx})=\frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu+1)\,b x^\mu}{2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

15) $$d\,(x\sqrt{a+bx+cx^2})=\frac{2a+3bx+4cx^2}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

16) $$d\left(\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\right)=-\frac{2a+bx}{2x^2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

17) $$d\,(x^\mu\sqrt{a+bx+cx^2})$$
$$=\frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu+1)\,bx^\mu+(2\mu+2)\,cx^{\mu+1}}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

Für die letzten vier Beispiele kann man die bei No. 12 gemachte Bemerkung gleichfalls benutzen.

18) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{2a+bx}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx.$$

Die zu differenzirende Function lässt sich entweder als Quotient oder als Product aus x und $(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$ ansehen.

19) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{b^2x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx.$$

20) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{2a\beta-b\alpha+b\beta x}{2\sqrt{(a+bx)^3}}\,dx.$$

21) $$d\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{4ac-b^2}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

22) $$d\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{(b^2-4ac)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

23) $$d\left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{2a\beta-b\alpha+(b\beta-2c\alpha)x}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

24) $$d\left(\frac{x^\mu}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)$$
$$=\frac{2\mu a x^{\mu-1}+(2\mu-1)bx^\mu+(2\mu-2)cx^{\mu+1}}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\,dx.$$

Hinsichtlich der letzten sechs Aufgaben gilt wieder die bei No. 18 gemachte Bemerkung.

25) $$d\left\{\frac{(a-2bx)\sqrt{a+bx}}{x\sqrt{x}}\right\}=-\frac{3a^2}{2x^2\sqrt{x(a+bx)}}\,dx.$$

Die hier gegebene Function lässt sich entweder als Quotient ansehen, oder als Product zweier Factoren:

$$\left(\frac{a}{x}-2b\right)\sqrt{\frac{a}{x}+b}$$

oder als Product von drei Factoren:

$$(a-2bx)\,x^{-\frac{3}{2}}\,(a+bx)^{\frac{1}{2}};$$

welche Form ist die bequemste für die Rechnung?

26) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta x)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,dx.$$

Wie kann diese Aufgabe, falls man sie nicht direct lösen will, auf No. 23 zurückgeführt werden?

27) $$d\sqrt{\frac{\alpha+\beta x^2}{\alpha-\beta x^2}}=\frac{2\alpha\beta x}{(\alpha-\beta x^2)\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^4}}\,dx.$$

28) $$d\left\{\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x}\right\}=-\sqrt{a}\,\frac{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Hier lässt sich die gegebene Function entweder als Quotient betrachten oder in die Form

$$\frac{2a}{x}+b+2\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{a+bx}}{x}$$

bringen, welche die Anwendung von No. 13 gestattet.

$$29)\quad d\left\{\frac{\left(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}\right)^2}{x^2}\right\}=-2\sqrt{a}\,\frac{\left(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}\right)^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin, wobei No. 17 zu beachten ist.

$$30)\quad d\left\{\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\}=-\frac{\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\left(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\right)^2}{x^2\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

Warum unterscheidet sich dieses Resultat von den in No. 28 verzeichneten nur durch einen constanten Factor?

$$31)\quad d\left\{\frac{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}\right\}=-\frac{2\sqrt{a}}{c}\cdot\frac{\left(\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}\right)^2}{x^3\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

$$32)\quad d\left\{\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}\right\}=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}{x^2\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}\,dx.$$

In wie fern lässt sich die vorige Bemerkung zu einer wesentlichen Abkürzung der Rechnung benutzen?

$$33)\quad d\left\{(-3a+2bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}\right\}=\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2x}{\sqrt[3]{a+bx}}\,dx.$$

$$34)\quad d\left\{(-3a+2bx^2)\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}\right\}=\frac{20}{3}\cdot\frac{b^2x^3}{\sqrt[3]{a+bx^2}}\,dx.$$

$$35)\quad d\left\{(-3a^2+abx^2+4b^2x^4)\sqrt[3]{a+bx^2}\right\}$$
$$=\tfrac{56}{3}\,b^2x^3\sqrt[3]{a+bx^2}\,.\,dx.$$

$$36)\quad d\left\{(-4a+3bx)\sqrt[4]{(a+bx)^3}\right\}=\frac{21}{4}\cdot\frac{b^2x}{\sqrt[4]{a+bx}}\,dx.$$

$$37)\quad d\left\{(-4a+3bx^2)\sqrt[4]{(a+bx^2)^3}\right\}=\frac{21}{2}\cdot\frac{b^2x^3}{\sqrt[4]{a+bx^2}}\,dx.$$

$$38)\quad d\left\{(-4a^2+abx^2+5b^2x^4)\sqrt[4]{a+bx^2}\right\}$$
-84
$$=\frac{45}{2}\,b^2x^3\sqrt[4]{a+bx^2}\,.\,dx.$$

$$39)\quad d\sqrt{\left\{\frac{x^3}{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}\right\}},$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{a+\alpha x}+\frac{b}{b+\beta x}+\frac{c}{c+\gamma x}\right\}\frac{\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}}.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man unter Anderem die Formel 15 in §. 1 benutzen.

40)
$$\left\{\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots}}{(a+\alpha x)^m(b+\beta x)^n\cdots}\right\}$$
$$=\left\{m\frac{a\varkappa-k\alpha}{a+\alpha x}+n\frac{b\varkappa-k\beta}{b+\beta x}+\cdots\right\}\frac{(k+\varkappa x)^{m+n+\cdots-1}dx}{(a+\alpha x)^m(b+\beta x)^n\cdots};$$
die Anzahl der Factoren ist hier beliebig.

§. 3.

Beispiele zur Differentiation von Exponentialgrössen und Logarithmen.

1) $$d[(x-1)e^x]=xe^x\,dx$$

2) $$d[(x^2-2x+2)e^x]=x^2e^x\,dx.$$

3) $$d[(x^3-3x^2+6x-6)e^x]=x^3e^x\,dx.$$

Hieran knüpft sich die allgemeinere Frage: „Wie müssen die Coefficienten A_1, A_2, A_3 etc. gewählt werden, wenn die Gleichung

4) $$d[(x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-\cdots)e^x]=x^me^x\,dx$$

statt finden soll, worin m eine ganze positive Zahl bedeutet?"

5) $$d\left(\frac{1}{x}e^x\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x\,dx.$$

6) $$d\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}\right)e^x\,dx.$$

7) $$d\left[\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^4}\right)e^x\,dx.$$

8) $$d\left[\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{6x}\right)e^x\right]=\left(\frac{1}{6x}-\frac{4}{x^5}\right)e^x\,dx.$$

Wie müssen überhaupt die Coefficienten B_1, B_2, B_3 etc. nebst a und b gewählt werden, wenn die Gleichung

9) $$d\left[\left(\frac{1}{x^m}+\frac{B_1}{x^{m-1}}+\frac{B_2}{x^{m-2}}+\cdots\right)e^x\right]=\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{x^{m+1}}\right)e^x\,dx$$

stattfinden soll?

10) $$d(e^{2ax+bx^2})=2(a+bx)e^{2ax+bx^2}dx.$$

11) $$d(xe^{2ax+bx^2})=[1+2(ax+bx^2)]e^{2ax+bx^2}dx.$$

12) $$d(e^{\sqrt{a+bx+cx^2}})=\frac{b+2cx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}e^{\sqrt{a+bx+cx^2}}dx.$$

13) $$d\,l(a+bx)=\frac{b}{a+bx}dx.$$

14) $$d\,l(a+bx+cx^2)=\frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}dx.$$

15) $$d\,l[(a+\alpha x)(b+\beta x)]=\frac{a\beta+b\alpha+2\alpha\beta x}{(a+\alpha x)(b+\beta x)}\,dx.$$

Den gegebenen Logarithmus kann man entweder im Ganzen differenziren oder vor der Differentiation in die Logarithmen der einzelnen Factoren zerlegen.

16) $$d\,l\left(\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2 x^2}\,dx.$$

Hier gilt eine ähnliche Bemerkung wie vorhin.

17) $$d\,l\left(\frac{\alpha+\beta x}{a+bx}\right)=\frac{a\beta-b\alpha}{(a+bx)(\alpha+\beta x)}\,dx.$$

18) $$d\,l\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{2a+bx}{2x(a+bx)}\,dx.$$

19) $$d\,l\left(\frac{x}{\sqrt{a+cx^2}}\right)=\frac{a}{x(a+cx^2)}\,dx.$$

20) $$d\,l\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{4ac-b^2}{2(b+2cx)(a+bx+cx^2)}\,dx.$$

21) $$d\,l\left(\frac{2a+bx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\right)=\frac{(b^2-4ac)\,x}{2(2a+bx)(a+bx+cx^2)}\,dx.$$

22) $$d\,l(\sqrt{c}\,.\,x+\sqrt{a+cx^2})=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

23) $$d\,l\left(\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}\,dx.$$

24) $$d\,l\left(\frac{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+cx^2}+\sqrt{a}}\right)=\frac{2\sqrt{a}}{x\sqrt{a+cx^2}}\,dx.$$

25) $$d\,l\left(\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}\right)=\frac{\alpha}{x\sqrt{\alpha^2-\beta^2 x^2}}\,dx.$$

Setzt man in No. 24) $a=\alpha^2, c=-\beta^2$, so unterscheiden sich die rechten Seiten der Gleichungen 24) und 25) nur um einen constanten Factor; was folgt daraus in Beziehung auf die links stehenden Logarithmen?

26) $$d\,l\left(\frac{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}+(b+2cx)}{2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}-(b+2cx)}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx.$$

27) $$d\,l(ae^x+b)=\frac{a e^x}{ae^x+b}\,dx.$$

28) $$d\,l\left(\frac{\alpha e^x-\beta}{\alpha e^x+\beta}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 e^x-\beta^2 e^{-x}}\,dx.$$

29) $$d\,l\,(\sqrt{a e^{2x}+b}+\sqrt{a}\,.\,e^x)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b e^{-2x}}}\,dx.$$

30) $$d\,l\left(\frac{\sqrt{a+b e^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b e^x}+\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b e^x}}\,dx.$$

§. 4.

Beispiele zur Differentiation trigonometrischer Functionen.

1) $d[\sin^m(\alpha x+\beta)]=m\alpha\sin^{m-1}(\alpha x+\beta)\cos(\alpha x+\beta)\,dx.$

2) $d[\cos^m(\alpha x+\beta)]=-m\alpha\cos^{m-1}(\alpha x+\beta)\sin(\alpha x+\beta)\,dx.$

3) $d[\tan^m(\alpha x+\beta)]=m\alpha\tan^{m-1}(\alpha x+\beta)\sec^2(\alpha x+\beta)\,dx.$

4) $$d(2x+\sin 2x)=4\cos^2 x\,dx.$$

5) $$d(2x-\sin 2x)=4\sin^2 x\,dx.$$

6) $$d(9\sin x+\sin 3x)=12\cos^3 x\,dx.$$

7) $$d(9\cos x-\cos 3x)=-12\sin^3 x\,dx.$$

8) $$d(x+\sin x\cos x)=2\cos^2 x\,dx.$$

9) $$d(x-\sin x\cos x)=2\sin^2 x\,dx.$$

10) $$d\{(2+\cos^2 x)\sin x\}=3\cos^3 x\,dx.$$

11) $$d\{(2+\sin^2 x)\cos x\}=-3\sin^3 x\,dx.$$

Warum stimmen die rechten Seiten von 4) und 8), 5) und 9), 6) und 10), 7) und 11) bis auf constante Factoren mit einander überein?

12) $$d\{\tfrac{3}{2}x+(\tfrac{3}{2}\cos x+\cos^3 x)\sin x\}=4\cos^4 x\,dx.$$

13) $$d\{\tfrac{3}{2}x-(\tfrac{3}{2}\sin x+\sin^3 x)\cos x\}=4\sin^4 x\,dx.$$

14) $$d\,(3\tan x+\tan^3 x)=\frac{3}{\cos^4 x}\,dx.$$

15) $$d(3\cot x+\cot^3 x)=-\frac{3}{\sin^4 x}\,dx.$$

16) $$d(\tan x-\tfrac{1}{3}\tan^3 x)=\frac{\cos 2x}{\cos^4 x}\,dx.$$

17) $$d(\tan x-\tan^3 x)=\frac{\cos 3x}{\cos^5 x}\,dx.$$

18) $$d(\tfrac{3}{2}\tan^2 x-\tfrac{1}{4}\tan^4 x)=\frac{\sin 3x}{\cos^5 x}\,dx.$$

19) $$d(2\tan^2 x-\tan^4 x)=\frac{\sin 4x}{\cos^6 x}\,dx.$$

20) $$d\left\{\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\right\}=\frac{3}{\cos^2 3x}\,dx.$$

21) $$d\left\{\frac{\tan x-\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}\right\}=\frac{1}{\cos^2 4x}\,dx.$$

22) $$d\left(\frac{\sin x}{a+b\cos x}\right)=\frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}\,dx.$$

23) $$d\left(\frac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}\right)=\frac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{(\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x)^2}\,dx.$$

24) $$d\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}=-\frac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\,dx.$$

25) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}{\cos x}\right\}=\frac{\beta\sin x\sec^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\,dx.$$

26) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}{\sin x}\right\}=-\frac{\alpha\cos x\csc^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\,dx.$$

27) $$d\left\{\frac{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}{\cos x\sin x}\right\}=-\frac{\alpha\sec^2 x-\beta\csc^2 x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\,dx.$$

28) $$d\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\right\}=-\frac{\beta\sin x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x)^3}}\,dx.$$

29) $$d\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\right\}=\frac{\alpha\cos x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x)^3}}\,dx.$$

30) $$d\left\{\frac{\cos x\sin x}{\sqrt{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}}\right\}=\frac{\alpha\cos^4 x-\beta\sin^4 x}{\sqrt{(\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x)^3}}\,dx.$$

§. 5.

Beispiele zur Differentiation cyclometrischer Functionen.

1) $$d\arctan\frac{1}{x}=-\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

2) $$d\arctan\frac{1-x}{1+x}=-\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Warum sind die rechten Seiten dieser Gleichungen identisch mit $d(-\arctan x)$?

3) $$d\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2}{1+x^2}\,dx.$$

4) $$d\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}\,dx.$$

Warum stimmen die rechten Seiten dieser Gleichungen mit $d(2\arctan x)$ überein?

5) $$d\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\, arc\, sin\, x$?

6) $$d\, arc\, sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\, arc\, tan\, x$?

7) $$d\, arc\, sin\, (2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\,(2\, arc\, sin\, x)$?

8) $$d\, arc\, tan \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2(1+x^2)}\, dx.$$

Warum ist die rechte Seite $= d\,(\frac{1}{2}\, arc\, tan\, x)$?

9) $$d\left\{2\, arc\, tan \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2}\, dx.$$

10) $$d\, arc\, sin \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+bx-cx^2}}\, dx.$$

11) $$d\left\{2\, arc\, tan \frac{2a+bx}{x\sqrt{4ac-b^2}}\right\} = -\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+bx+cx^2}\, dx.$$

12) $$d\, arc\, sin \frac{2a-bx}{x\sqrt{4ac+b^2}} = -\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}\, dx.$$

13) $$d\, arc\, tan \frac{\sqrt{2\alpha+\beta}\,.\,x}{\alpha-x^2} = \frac{\sqrt{2\alpha+\beta}\,(\alpha+x^2)}{\alpha^2+\beta x^2+x^4}\, dx.$$

14) $$d\, arc\, sin \frac{\alpha x+\beta}{\alpha+\beta x} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

15) $$d\, arc\, sin \frac{(2\alpha+\beta\gamma)x-\alpha\gamma}{\gamma(\alpha+\beta x)} = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\, dx.$$

16) $$d\, arc\, sin \frac{2a\beta-b\alpha+(b\beta-2c\alpha)x}{\sqrt{b^2-4ac}\,.\,(\alpha+\beta x)}$$
$$= \frac{\sqrt{b\alpha\beta-a\beta^2-c\alpha^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx+cx^2}}\, dx.$$

17) $$d\, arc\, sin \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha+\beta x} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

18) $$d\, arc\, tan \frac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(1-x^2)}}{\alpha x+\beta} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Warum sind die rechten Seiten von 17) und 18) gleich und entgegen gesetzt der rechten Seite von No. 14)?

19) $$d\left\{2\,arc\sin\sqrt{\frac{(\alpha+\beta\gamma)x}{\gamma(\alpha+\beta x)}}\right\}=\frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\,dx.$$

20) $$d\left\{2\,arc\tan\sqrt{\frac{(\alpha+\beta\gamma)x}{\alpha(\gamma-x)}}\right\}=\frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta\gamma)}}{(\alpha+\beta x)\sqrt{\gamma x-x^2}}\,dx.$$

Weshalb stimmen die rechten Seiten von No. 15), 19) und 20) überein?

21) $$d\,arc\tan\frac{\sqrt{\alpha+\beta}\,.\,x}{\sqrt{\alpha(1-x^2)}}=\frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

22) $$d\,arc\sin\frac{\sqrt{\alpha+\beta}\,.\,x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}=\frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

23) $$d\,arc\sin\frac{\sqrt{\gamma}\,(2\alpha+\beta x)}{\beta\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\gamma(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\alpha+\beta x}}\,dx.$$

24) $$d\,arc\sin\frac{\sqrt{\alpha}\,(\beta+2\gamma x)}{\beta\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{\alpha(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}\,dx.$$

§. 6.

Vermischte Beispiele.

1) $$d(x^x)=x^x(1+lx)\,dx.$$

Man beachte hierbei, dass x^x als Exponentialgrösse dargestellt werden kann.

2) $$d(x^{lx})=2x^{lx-1}\,lx\,dx.$$

3) $$d[(lx)^x]=(lx)^{x-1}\{1+lx\,.\,l(lx)\}\,dx.$$

4) $$d\left\{\left(\frac{x}{e}\right)^x\right\}=\left(\frac{x}{e}\right)^x lx\,dx.$$

Wenn u und v Functionen von x bedeuten, u' und v' ihre nach x genommenen Differentialquotienten sind, so gilt überhaupt die Formel

5) $$d(u^v)=u^{v-1}(u'v+uv'lu)\,dx.$$

Im Folgenden bezeichnen ${}^b log\, z$ den zur Basis b gehörenden Logarithmus von z; es ist dann

6) $$d({}^x log\, a)=-\frac{1}{x}\,.\,{}^x log\, a\,.\,{}^x log\, e\,.\,dx.$$

Hier wird es zweckmässig sein, ${}^x log\, a$ durch natürliche Logarithmen auszudrücken.

$$7)\quad d\left\{{}^{x}log\,(\alpha+\beta x)\right\}=\left\{\frac{\beta}{\alpha+\beta x}-\frac{1}{x}\,.\,{}^{x}log(\alpha+\beta x)\right\}{}^{x}log\,e\,.\,dx.$$

$$8)\quad d\left\{{}^{x}log\,sin\,x\right\}=\left\{cot\,x-\frac{1}{x}\,.\,{}^{x}log\,sin\,x\right\}{}^{x}\,log\,e\,.\,dx.$$

Sind überhaupt y und z Functionen von x, y' und z' ihre Differentialquotienten, so gilt die allgemeine Formel

$$9)\quad d\,({}^{y}log\,z)=\left(\frac{z'}{z}-\frac{y'}{y}\,.\,{}^{y}log\,z\right).{}^{y}log\,e\,.\,dx.$$

$$10)\quad d\left\{x\,arc\,sin\,x+\sqrt{1-x^2}\right\}=arc\,sin\,x\,dx.$$

$$11)\quad d\left\{x\,arc\,tan\,x-\tfrac{1}{2}\,l\,(1+x^2)\right\}=arc\,tan\,x\,dx,$$

$$12)\quad d\left\{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\,sin\,x+\tfrac{1}{2}\,l\,(1-x^2)\right\}=\frac{arc\,sin\,x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$$

$$13)\quad d\left\{x^2+(arc\,sin\,x-2\,x\sqrt{1-x^2})\,arc\,sin\,x\right\}=\frac{4\,x^2\,arc\,sin\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

$$14)\quad d\left\{(x-\tfrac{1}{2}\,arc\,tan\,x)\,arc\,tan\,x-\tfrac{1}{2}\,l\,(1+x^2)\right\}=\frac{x^2\,arc\,tan\,x}{1+x^2}\,dx.$$

$$15)\quad d\left\{\frac{1}{1+x^2}+\left(\frac{2\,x}{1+x^2}+arc\,tan\,x\right)arc\,tan\,x\right\}=\frac{4\,arc\,tan\,x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

$$16)\quad d\left\{l\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{arc\,sin\,x}{x}\right\}=\frac{arc\,sin\,x}{x^2}\,dx.$$

$$17)\quad d\left\{e^{ax}\,(a\,cos\,b\,x+b\,sin\,b\,x)\right\}=(a^2+b^2)\,e^{ax}\,cos\,b\,x\,dx.$$

$$18)\quad d\left\{e^{ax}\,(a\,sin\,b\,x-b\,cos\,b\,x)\right\}=(a^2+b^2)\,e^{ax}\,sin\,b\,x\,dx.$$

$$19)\quad d\left\{(x+k\sqrt{1-x^2})\,e^{k\,arc\,sin\,x}\right\}=(1+k^2)\,e^{k\,arc\,sin\,x}\,dx.$$

$$20)\quad d\left\{\frac{k+x}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{k\,arc\,tan\,x}\right\}=\frac{1+k^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,e^{k\,arc\,tan\,x}\,dx.$$

$$21)\quad d\left\{x\,cos\,(l\,x-\tfrac{1}{4}\,\pi)\right\}=\sqrt{2}\,cos\,(l\,x)\,dx.$$

$$22)\quad d\left\{x\,sin\,(l\,x-\tfrac{1}{4}\,\pi)\right\}=\sqrt{2}\,sin\,(l\,x)\,dx.$$

$$23)\quad d\,l\left(\frac{\alpha+\beta\,tan\,x}{\alpha-\beta\,tan\,x}\right)=\frac{2\,\alpha\,\beta}{\alpha^2\,cos^2\,x-\beta^2\,sin^2\,x}\,dx.$$

$$24)\quad d\,l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,tan\,\tfrac{1}{2}\,x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,tan\,\tfrac{1}{2}\,x}\right)=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\,cos\,x}\,dx.$$

$$25)\quad d\,arc\,tan\left(\frac{\beta}{\alpha}\,tan\,x\right)=\frac{\alpha\,\beta}{\alpha^2\,cos^2\,x+\beta^2\,sin^2\,x}\,dx.$$

$$26)\quad d\,arc\,tan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,tan\,\tfrac{1}{2}\,x\right)=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2\,(a+b\,cos\,x)}\,dx.$$

27) $$d\,l\left\{\frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x+c-\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{(a-b)\tan\frac{1}{2}x+c+\sqrt{b^2+c^2-a^2}}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{a+b\cos x+c\sin x}\,dx.$$

28) $$d\,\mathrm{arc}\tan\frac{(a-b)\tan\frac{1}{2}x+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2(a+b\cos x+c\sin x)}\,dx.$$

29) $$d\left\{\sqrt{2}\,\mathrm{arc}\tan\frac{\sqrt{2a}\,.\,\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{(a+b)\cos x}}\right\}=\frac{\sqrt{a(a+b)}\,.\,\cos\frac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

30) $$d\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{2a}\,.\,\cos\frac{1}{2}x-\sqrt{(a-b)\cos x}}{\sqrt{2a}\,.\,\cos\frac{1}{2}x+\sqrt{(a-b)\cos x}}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{a(a-b)}\,.\,\sin\frac{1}{2}x}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}\,dx.$$