Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel II. Mehrfache Differentiationen von entwickelten Functionen einer Variabelen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel II.

Mehrfache Differentiationen von entwickelten Functionen einer Variabelen.

§. 7.

Grundformeln und allgemeine Regeln.

Die successiven Differentialquotienten der Functionen $f(x)$ werden entweder bezeichnet durch

$$\frac{d\,f(x)}{dx},\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^3 f(x)}{dx^3},\ldots.$$

oder kürzer durch

$$Df(x),\quad D^2 f(x),\quad D^3 f(x),\ldots.$$

oder auch durch

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ldots.$$

Für die höheren Differentialquotienten der einfachsten Functionen gelten folgende Formeln:

1) $$D^n[(a+bx)^\mu]$$
$$=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])\,b^n(a+bx)^{\mu-n};$$

specieller für $\mu=-1$

2) $$D^n\left(\frac{1}{a+bx}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n.b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

und für $\mu=-\frac{1}{2}$

3) $$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)\,b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}.$$

4) $$D^n l(a+bx)=\frac{(-1)^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)\,b^n}{(a+bx)^n}.$$

5) $$D^n(e^{bx})=b^n e^{bx}.$$

6) $$D^n \sin x=\sin(\tfrac{1}{2}n\pi+x).$$

7) $$D^n \cos x=\cos(\tfrac{1}{2}n\pi+x).$$

Bedeuten u und v Functionen der Variabelen x, so ist

8) $$D^n(au+bv)=a\,D^n u+b\,D^n v.$$

9) $$D^n(uv)=(n)_0 u\,.\,D^n v+(n)_1 Du\,.\,D^{n-1}v$$
$$+(n)_2 D^2 u\,.\,D^{n-2}v+\ldots,$$

wobei in der letzten Formel unter $(n)_0$, $(n)_1$, $(n)_2$, etc. die Binomialcoefficienten

$$1,\quad \frac{n}{1},\quad \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3},\ldots.$$

zu verstehen sind.

Um die höheren Differentialquotienten einer gegebenen Function $f(x)$ zu entwickeln, kann man zwei verschiedene Methoden benutzen: die recurrirende und die independente Darstellung. Bei der ersten bildet man zunächst eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren auf einander folgenden Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung, wie z. B. zwischen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n+2)}(x)$, und berechnet mittelst dieser Gleichung (der sogenannten Recursionsformel) einen Differentialquotienten nach dem andern. Bei der zweiten Methode sucht man $f^{(n)}(x)$ unabhängig von den vorhergehenden Differentialquotienten darzustellen, wie dies z. B. bei den Formeln 1) bis 7) geschehen ist. Da sich für keine der beiden Methoden Vorschriften geben lassen, so dienen die folgenden Beispiele hauptsächlich, um zu zeigen, wie man in speciellen Fällen die besonderen Eigenschaften einer gegebenen Function benutzen muss.

§. 8.

Beispiele zur recurrirenden Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1) Handelt es sich um die successiven Differentialquotienten von

$$f(x)=\sqrt{1+x^2},$$

so differenzirt man zunächst einmal; die entstehende Gleichung

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

multiplicirt man mit $1+x^2$, giebt dem Producte die Form

$$(1+x^2)f'(x)=xf(x)$$

und differenzirt noch $(m+1)$ mal mittelst der Formel 9) in §. 6; das Resultat lautet:

$$(1+x^2)f^{(m+2)}(x)+(m+1)_1\,.\,2x\,f^{(m+1)}(x)+(m+1)_2\,.\,2f^{(m)}(x)$$
$$=x\,f^{(m+1)}(x)+(m+1)_1 f^{(m)}(x)$$

oder

$$f^{(m+2)}(x)=-\frac{(2m+1)x\,f^{(m+1)}(x)+(m-1)(m+1)f^{(m)}(x)}{1+x^2}.$$

Für $m=0$ folgt aus dieser Recursionsformel unter Einführung der schon bekannten Werthe von $f^{(o)}(x)=f(x)$ und $f'(x)$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

ferner ist für $m=1, 2$ u. s. w.

$$f'''(x)=-\frac{3x f''(x)}{1+x^2}=-\frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}},$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{5x f'''(x)+3f''(x)}{1+x^2}=\frac{12x^2-3}{\sqrt{(1+x^2)^7}}$$

u. s. w.

In dem speciellen Falle $x=0$ wird die Recursionsformel einfacher nämlich

$$f^{(m+2)}(0)=-(m-1)(m+1)f^{(m)}(0)$$

und daraus erhält man wegen $f(0)=1$ und $f'(0)=0$

$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}n-1}[1.3.5\ldots(n-3)]^2(n-1)$, für gerade n

$f^{(n)}(0)=0$, für ungerade n.

2. Die Function

$$f(x)=(a+bx^2)^\mu$$

giebt bei gleicher Behandlung

$$(a+bx^2)f'(x)=2\mu b x f(x),$$

$$f^{(m+2)}(x)=b\,\frac{(2\mu-2m-2)x f^{(m+1)}(x)+(m+1)(2\mu-m)f^{(m)}(x)}{a+bx^2}.$$

Im speciellen Falle $x=0$ wird bei geraden n

$$f^{(n)}(0)=1.3.5..(n-1)\mu(\mu-1)(\mu-2)..(\mu-[\tfrac{1}{2}n-1])a^{\mu-\frac{1}{2}n}(2b)^{\frac{1}{2}n},$$

dagegen bei ungeraden n

$$f^{(n)}(0)=0.$$

3. Um die Function

$$f(x)=\frac{2a}{(\sqrt{a+bx}+\sqrt{a})\sqrt{a+bx}}$$

mehrmals zu differenziren schreibt man erst

$$f(x)=\frac{2a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{x\sqrt{a+bx}}$$

multiplicirt mit $x\sqrt{a+bx}$ und differenzirt vorläufig einmal; nach gehöriger Reduction findet sich

$$2(ax+bx^2)f'(x)+(2a+3bx)f(x)=2a.$$

Durch $(m+1)$malige Differentiation folgt hieraus die Recursionsformel

$$2x(a+bx)f^{(m+2)}(x)$$
$$=[(2m+4)a+(4m+7)bx]f^{(m+1)}(x)+(m+1)(2m+3)bf^{(m)}(x).$$

Für den speciellen Fall $x=0$ ergiebt sich wegen $f(0)=1$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n 1.2.3\ldots n \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{4.6.8\ldots(2n+2)} \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

4. Aus der Gleichung

$$f(x) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} + \beta x)^\mu$$

erhält man durch einmalige Differentiation

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2} \,.\, f'(x) = \mu \beta f(x);$$

eine weitere Differentiation liefert (unter Rücksicht auf die Gleichung selber)

$$(\alpha^2 + \beta^2 x^2) f''(x) + \beta^2 x f'(x) = \mu^2 \beta^2 f(x).$$

Nach m-maliger Differentiation dieser Gleichung findet man

$$(\alpha^2 + \beta^2 x^2) f^{(m+2)}(x)$$
$$= -(2m+1)\beta^2 x f^{(m+1)}(x) + (\mu^2 - m^2)\beta^2 f^{(m)}(x).$$

Für $x = 0$ ergiebt sich bei geraden n:

$$f^{(n)}(0) = \mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)\ldots(\mu^2 - [n-2]^2)\, \alpha^{\mu-n} \beta^n,$$

dagegen bei ungeraden n:

$$f^{(n)}(0) = \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)\ldots(\mu^2 - [n-2]^2)\, \alpha^{\mu-n} \beta^n.$$

5. Es sei

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(arc\sin x)^2;$$

man findet dann

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 1$$

und hieraus die Recursionsformel

$$(1 - x^2) f^{(m+2)}(x) = (2m+1) x f^{(m+1)}(x) + m^2 f^{(m)}(x).$$

Im speciellen Falle $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = [2.4.6\ldots(n-2)]^2, \text{ für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{für ungerade } n.$$

6. Aus der Gleichung

$$f(x) = \cos(\mu\, arc\sin x)$$

folgt, wenn einmal differenzirt, dann mit $\sqrt{1-x^2}$ multiplicirt und nochmals differenzirt wird,

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = -\mu^2 f(x);$$

man findet nachher die Recursionsformel

$$(1 - x^2) f^{(m+2)}(x) = (2m+1) x f^{(m+1)}(x) + (m^2 - \mu^2) f^{(m)}(x).$$

Diese giebt im speciellen Falle $x = 0$

$$f^{(n)}(0) = -\mu^2(2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2)\ldots([n-2]^2 - \mu^2), \text{ für gerade } n$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{für ungerade } n.$$

7. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die Function

$$f(x) = \sin(\mu\, arc\sin x).$$

Die Recursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin, und für $x = 0$ wird

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{bei geraden } n,$$
$$f^{(n)}(0) = \mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)\ldots([n-2]^2 - \mu^2), \text{ bei ungeraden } n.$$

8. Es sei
$$f(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos(\mu \operatorname{arc}\tan x);$$
differenzirt man statt dieser die Gleichung die folgende
$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}\mu}f(x)=\cos(\mu \operatorname{arc}\tan x),$$
multiplicirt nachher mit $1+x^2$ und differenzirt noch einmal, so findet man
$$(1+x^2)f''(x)-2(\mu-1)xf'(x)+\mu(\mu-1)f(x)=0$$
Daraus ergiebt sich die Recursionsformel
$$(1+x^2)f^{(m+2)}(x)$$
$$=-2(\mu-m-1)xf^{(m+1)}(x)-(\mu-m)(\mu-m-1)f^{(m)}(x).$$
Im speciellen Falle $x=0$ wird
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}n}\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1]), \text{ für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0)=0, \qquad \text{für ungerade } n.$$

9. Ganz ähnlich lässt sich die Function
$$f(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin(\mu \operatorname{arc}\tan x)$$
behandeln. Die Recursionsformel ist hier dieselbe wie vorhin und im Falle $x=0$ ergiebt sich
$$f^{(n)}(0)=0, \qquad \text{für gerade } n,$$
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1]), \text{ für ungerade } n.$$

§. 9.

Beispiele zur independenten Entwickelung höherer Differentialquotienten.

1. Um die gebrochene Function
$$\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}$$
zu differenziren, bringt man dieselbe auf die Form
$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-\beta x}+\frac{1}{\alpha+\beta x}\right)$$
und wendet die Formel 2) in §. 7 an; man erhält
$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1.2.3\ldots n\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}\right\}$$
oder auch
$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}1.2.3\ldots n\beta^n}{2\alpha}\left\{\frac{1}{(\beta x-\alpha)^{n+1}}-\frac{1}{(\beta x+\alpha)^{n+1}}\right\}.$$
Vereinigt man die beiden Brüche rechter Hand, benutzt im Zähler den binomischen Satz und setzt zur Abkürzung
$$U=(n+1)_1(\beta x)^n+(n+1)_3\alpha^2(\beta x)^{n-2}+(n+1)_5\alpha^4(\beta x)^{n-4}+\ldots$$
$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2-\beta^2x^2}\right)=\frac{1.2.3\ldots n\beta^n U}{(\alpha^2-\beta^2x^2)^{n+1}}.$$

2. Mittelst eines ähnlichen Verfahrens erhält man

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2-\beta^2 x^2}\right)=\frac{1.2.3\ldots n\,\beta^n}{2\beta}\left\{\frac{1}{(\alpha-\beta x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(\alpha+\beta x)^{n+1}}\right\}$$

$$=(-1)^{n+1}3.4\ldots n\,\beta^{n-1}\left\{\frac{1}{(\beta x-\alpha)^{n+1}}+\frac{1}{(\beta x+\alpha)^{n+1}}\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$V=(\beta x)^{n+1}+(n+1)_2\,\alpha^2(\beta x)^{n-1}+(n+1)_4\,\alpha^4(\beta x)^{n-3}+\ldots,$$

so ist auch

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2-\beta^2 x^2}\right)=\frac{1.2.3\ldots n\,\beta^{n-1}\,V}{(\alpha^2-\beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

3. Um die Function

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}$$

zu differenziren, kann man die Zerlegung

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}=\frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{\beta x-\alpha\sqrt{-1}}-\frac{1}{\beta x+\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

benutzen und dann wie in No. 1) rechnen. Wird hierbei zur Abkürzung

$$U=(n+1)_1(\beta x)^n-(n+1)_3\,\alpha^2(\beta x)^{n-2}+(n+1)_5\,\alpha^4(\beta x)^{n-4}-\ldots.$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n\,1.2.3\ldots n\,\beta^n\,U}{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

Ein anderes Verfahren ist folgendes. Man führe den Hülfswinkel ω ein mittelst der Formel

$$\omega=\operatorname{arc\,tan}\frac{\alpha}{\beta x},$$

aus welcher folgt

$$x=\frac{\alpha}{\beta}\cot\omega,\quad dx=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{d\omega}{\sin^2\omega},\quad d\omega=-\frac{\beta}{\alpha}\sin^2\omega\,dx,$$

und differenzire zunächst die identische Gleichung

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}=\frac{1}{\alpha^2}\sin^2\omega;$$

man erhält

$$d\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{2}{\alpha^2}\sin\omega\cos\omega\,d\omega=-\frac{2\beta}{\alpha^3}\sin^3\omega\cos\omega\,dx$$

oder

$$D\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=-\frac{\beta}{\alpha^3}\sin^2\omega\sin 2\omega.$$

Differenzirt man zum zweiten Male und drückt $d\omega$ wieder durch dx aus, so findet man

$$D^2\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=+\frac{2\beta^2}{\alpha^4}\sin^3\omega\,\sin 3\omega$$

und durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n\beta^n}{\alpha^{n+2}}\sin^{n+1}\omega\,\sin(n+1)\omega.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Formel beweist man mittelst des Schlusses von n auf $n+1$, d. h. man differenzirt die vorstehende Gleichung noch einmal und zeigt, dass hierdurch entsteht

$$D^{n+1}\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^{n+1} 1.2\ldots(n+1)\beta^{n+1}}{\alpha^{n+3}}\sin^{n+2}\omega\,\sin(n+2)\omega;$$

Die Formel gilt also für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten, wenn sie für den n^{ten} richtig war, und da sie beim ersten Differentialquotienten gegolten hat, so ist sie nun successive richtig für den zweiten, dritten u. s. w. Setzt man für $\sin\omega$ und ω ihre ursprünglichen Werthe, so gelangt man zu dem Endresultate

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\ldots n\beta^n}{\alpha\sqrt{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}}\sin\left[(n+1)\,\mathrm{arc\,tan}\,\frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Aus der Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2}}{\beta x}\right)^{n+1}\sin\left[(n+1)\,\mathrm{arc\,tan}\,\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

$$=(n+1)_1\frac{\alpha}{\beta x}-(n+1)_3\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^3+(n+1)_5\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^5-\ldots.$$

oder, wenn $n=m-1$ gesetzt und wieder ω eingeführt wird,

$$\frac{\sin m\omega}{\cos^m\omega}=(m)_1\tan\omega-(m)_3\tan^3\omega+(m)_5\tan^5\omega-\ldots,$$

worin ein oft gebrauchter goniometrischer Satz liegt.

4. Der n^{te} Differentialquotient von

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}$$

lässt sich gleichfalls auf zwei verschiedene Arten entwickeln. Setzt man zur Abkürzung

$$V=(\beta x)^{n+1}-(n+1)_2\alpha^2(\beta x)^{n-1}+(n+1)_4\alpha^4(\beta x)^{n-3}-\ldots.$$

so gelangt man zu der Formel

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n\beta^{n-1}V}{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}.$$

Man kann aber auch, wenn ω seine vorige Bedeutung behält, von der identischen Gleichung

$$\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\sin\omega\cos\omega$$

ausgehen und findet dann

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\ldots n\beta^{n-1}}{\alpha^{n+1}}\sin^{n+1}\omega\cos(n+1)\omega$$

oder

$$D^n\left(\frac{x}{\alpha^2+\beta^2 x^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\ldots n\beta^{n-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2 x^2)^{n+1}}}\cos\left[(n+1)\,arc\tan\frac{\alpha}{\beta x}\right].$$

Durch Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen Ausdrücke für denselben Differentialquotienten folgt noch

$$\frac{\cos m\omega}{\cos^m\omega}=(m)_0-(m)_2\tan^2\omega+(m)_4\tan^4\omega-\cdots\cdots$$

5. Die identische Gleichung

$$\frac{1}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{c\left[\frac{ac-b^2}{c^2}+\left(\frac{b}{c}+x\right)^2\right]}$$

führt zur Kenntniss des n^{ten} Differentialquotienten der links stehenden Function; man wendet hierbei die Formeln des 3. Beispiels so an, dass man

$$\alpha^2=\frac{ac-b^2}{c^2},\quad \beta=1$$

und zugleich $\frac{b}{c}+x$ für x setzt, wodurch sich dx nicht ändert. Macht man Gebrauch von der Abkürzung

$$S=(n+1)_1(b+cx)^n-(n+1)_3(ac-b^2)(b+cx)^{n-2}$$
$$+(n+1)_5(ac-b^2)^2(b+cx)^{n-4}-\cdots\cdots,$$

so ergiebt sich

$$D^n\left(\frac{1}{a+2bx+cx^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2\ldots nS}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Falls $ac-b^2$ positiv ist, kann man analog der zweiten Methode in No. 3) verfahren; wird nämlich

$$\omega=arc\tan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx},$$

$$\sin\omega=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}},\quad \cos\omega=\frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}}$$

gesetzt, so findet sich

$$D^n\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{a+2bx+cx^2}\right)$$
$$=(-1)^n 1.2\ldots n\sqrt{\left(\frac{c}{a+2bx+cx^2}\right)^{n+1}}\sin\left[(n+1)\,arc\tan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

6. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}=\frac{\frac{b}{c}+x}{\frac{ac-b^2}{c^2}+\left(\frac{b}{c}+x\right)^2}$$

erhält man nach No. 4), wenn die Abkürzung

$$T=(b+cx)^{n+1}-(n+1)_2(ac-b^2)(b+cx)^{n-1} \\ +(n+1)_4(ac-b^2)^2(b+cx)^{n-3}-\cdots$$

eingeführt wird

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right)=\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n\, T}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}.$$

Im Falle $ac-b^2$ positiv ist, kann man die zweite Methode in No. 4) anwenden; sie giebt

$$D^n\left(\frac{b+cx}{a+2bx+cx^2}\right) \\ =(-1)^n 1.2\ldots n\sqrt{\left(\frac{c}{a+2bx+cx^2}\right)^{n+1}}\cos\left[(n+1)\arctan\frac{\sqrt{ac-b^2}}{b+cx}\right].$$

7. Nach der Regel für die Differentiation der Producte findet man

$$D^n(e^{ax}\cos bx) \\ =\{(n)_0a^n-(n)_2a^{n-2}b^2+(n)_4a^{n-4}b^4-\cdots\}e^{ax}\cos bx \\ -\{(n)_1a^{n-1}b-(n)_3a^{n-3}b^3+\cdots\}e^{ax}\sin bx.$$

Ein anderer Weg zur Entwickelung desselben Differentialquotienten ist folgender. Man führe zwei Hülfsconstanten c und ϑ ein mittelst der Gleichungen

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tan\vartheta=\frac{b}{a},$$

aus denen folgt

$$a=c\cos\vartheta,\quad b=c\sin\vartheta;$$

statt der Formel

$$D(e^{ax}\cos bx)=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$$

lässt sich dann schreiben

$$D(e^{ax}\cos bx)=c\,e^{ax}\cos(bx+\vartheta).$$

Durch mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens erhält man die Formel

$$D^n(e^{ax}\cos bx)=c^n e^{ax}\cos(bx+n\vartheta),$$

welche mittelst des Schlusses von auf $n+1$ zu beweisen ist.

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax}\cos bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x=0$ und $b=a\tan\vartheta$, so erhält man dieselbe goniometrische Formel wie am Schlusse von No. 4.

8. Die höheren Differentialquotienten von $e^{ax}\sin bx$ lassen sich gleichfalls nach den vorigen zwei Methoden entwickeln. Die erste giebt

$$\begin{aligned} &D^n(e^{ax}\sin bx)\\ &= \{(n)_0 a^n - (n)_2 a^{n-2} b^2 + (n)_4 a^{n-4} b^4 - \cdots\} e^{ax}\sin bx\\ &+ \{(n)_1 a^{n-1} b - (n)_3 a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots\} e^{ax}\cos bx; \end{aligned}$$

nach der zweiten Methode erhält man

$$D^n(e^{ax}\sin bx) = c^n e^{ax}\sin(bx + n\vartheta),$$

wo c und ϑ dieselbe Bedeutung haben wie in No. 7).

Vergleicht man die beiden für $D^n(e^{ax}\sin bx)$ erhaltenen Ausdrücke, setzt in der entstehenden Gleichung $x=0$ und $b = a\tan\vartheta$, so kommt man auf die in No. 3) gefundene goniometrische Relation zurück.

§. 10.

Allgemeine Theoreme über höhere Differentialquotienten.

1. Um die höheren Differentialquotienten von $F\left(\frac{1}{x}\right)$ zu entwickeln, setze man für den Augenblick

$$\frac{1}{x} = y, \quad \text{mithin} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2};$$

es ist dann

$$\frac{dF\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -F'(y)\frac{1}{x^2},$$

wobei $F'(y)$ so berechnet wird, als wenn y eine unabhängige Variabele wäre; zufolge des Werthes von y ergiebt sich dann

$$DF\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Eine nochmalige Anwendung desselben Verfahrens liefert

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dF'(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^3}F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

oder durch Wiedereinsetzung des Werthes von y

$$D^2F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}F'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Auf diese Weise fortgehend erhält man der Reihe nach

$$D^3F\left(\frac{1}{x}\right) = -\left\{\frac{1}{x^6}F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^5}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^4}F'\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

$$\begin{aligned} &D^4F\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x^8}F^{IV}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{12}{x^7}F'''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{36}{x^6}F''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{24}{x^5}F'\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

In den bisherigen Formeln scheint sich folgendes Gesetz auszusprechen:

$$D^n F\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\left\{\frac{1}{x^{2n}}F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1).(n)_1}{x^{2n-1}}F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-2).(n)_2}{x^{2n-2}}F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right\};$$

man soll dasselbe mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ beweisen.

a) Hiernach ist z. B.

$$D^n\left(e^{\frac{a}{x}}\right)=\frac{(-1)^n}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n+(n-1).(n)_1\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right.$$
$$\left.+(n-1)(n-2).(n)_2\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2}+\cdots\right\}e^{\frac{a}{x}}.$$

b) Wählt man die Function $F(y)$ so, dass sich $D^n F\left(\frac{1}{x}\right)$ direct (d. h. ohne Hülfe der allgemeinen Formel) entwickeln lässt, so gelangt man nicht selten zu bemerkenswerthen algebraischen oder goniometrischen Sätzen. Z. B. für

$$F(y)=arc\tan y,\quad F'(y)=\frac{1}{1+y^2},$$
$$F^{(k)}(y)=\frac{(-1)^{k-1}1.2\ldots(k-1)}{\sqrt{(1+y^2)^k}}\sin\left(k\,arc\tan\frac{1}{y}\right)$$

ergiebt sich

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=arc\tan\frac{1}{x},\quad DF\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2+1},$$
$$D^nF\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(-1)^n1.2\ldots(n-1)}{\sqrt{(x^2+1)^n}}\sin\left(n\,arc\tan\frac{1}{x}\right);$$

wendet man nun die allgemeine Formel an, indem man schreibt

$$(-1)^n x^n D^n F\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{(n)_1}{x}F'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n)_2}{1.x^2}F''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n)_3}{1.2.x^3}F'''\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots$$

und setzt man schliesslich $arc\tan x=\theta$, so erhält man

$$\sin^n\theta\sin n(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$
$$=(n)_1\cos\theta\sin\theta-(n)_2\cos^2\theta\sin2\theta+(n)_3\cos^3\theta\sin3\theta-\cdots.$$

Die Annahme $F(y)=\frac{1}{2}l(1+y^2)$ führt bei gleichen Behandlung zu dem entsprechenden Satze

$$\sin^n\theta\cos n(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$
$$=(n)_0-(n)_1\cos\theta\cos\theta+(n)_2\cos^2\theta\cos2\theta-(n)_3\cos^3\theta\cos3\theta+\cdots.$$

2. Setzt man für den Augenblick $x^2=y$, so erhält man

$$\frac{dF(x^2)}{dx}=\frac{dF(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=F'(y).2x$$

oder

$$D\,F(x^2) = 2x\,F'(x^2);$$

die mehrmalige Anwendung desselben Verfahrens giebt

$$D^2 F(x^2) = (2x)^2 F''(x^2) + 2F'(x^2),$$
$$D^3 F(x^2) = (2x)^3 F'''(x^2) + 6.2x\,F''(x^2),$$
$$D^4 F(x^2) = (2x)^4 F^{\mathrm{IV}}(x^2) + 12(2x)^2 F'''(x^2) + 12F''(x^2),$$
$$D^5 F(x^2) = (2x)^5 F^{\mathrm{V}}(x^2) + 20(2x)^3 F^{\mathrm{IV}}(x^2) + 60.2x\,F'''(x^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und in diesen Gleichungen erkennt man inductorisch das Gesetz

$$D^n F(x^2) = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.2}(2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \cdots,$$

welches mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ zu beweisen ist.

a) Beispielsweise hat man nach dieser Formel

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta x^2}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1.2..n(2\beta x)^n}{(\alpha+\beta x^2)^{n+1}}\left\{1-(n-1)_1\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2} + (n-2)_2\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right) - \cdots\right\}$$

Ersetzt man die Grössen α, β, x durch

$$\frac{ac-b^2}{c}, \quad c, \quad \frac{b}{c}+x,$$

was auf dx keinen Einfluss hat, und führt man die Abkürzung ein

$$\frac{c(a+2bx+cx^2)}{4(b+cx)^2} = u,$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{a+2bx+cx^2}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1.2..n[2(b+cx)]^n}{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}\{1-(n-1)_1 u + (n-2)_2 u^2 - \cdots\}$$

b) Die allgemeine Formel für $D^n F(x^2)$ liefert ferner

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n 1.3.5..(2n-1)(\beta x)^n}{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)^{2n+1}}}\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{\beta x^2}\right)^2 - \cdots\right\}.$$

Benutzt man hier die nämlichen Substitutionen wie im vorigen Beispiele und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c(a+2bx+cx^2)}{(b+cx)^2}=v,$$

so erhält man

$$D^n\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n 1.3..(2n-1)(b+cx)^n}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{2n+1}}}\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}v\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}v^2-\ldots\right\}.$$

Diese Formel gestattet eine bemerkenswerthe Umwandlung. Aus der Gleichung

$$(z^2-1)^n=z^{2n}-(n)_1 z^{2n-2}+(n)_2 z^{2n-4}-\ldots.$$

folgt nämlich, wenn z als unabhängige Variabele angesehen wird,

$$D^n{}_z[(z^2-1)^n]=(n+1)(n+2)..(2n)z^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\frac{1}{z^2}-\ldots\right\};$$

beachtet man erstens die identische Gleichung

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n)=\frac{1.2.3.\ldots.(2n)}{1.2.3.\ldots.n}=\frac{1.2.3\ldots(2n)}{2.4.6\ldots(2n)}2^n$$
$$=1.3.5\ldots(2n-1).2^n$$

und setzt man zweitens rechter Hand

$$z=\frac{b+cx}{\sqrt{c(a+2bx+cx^2)}},$$

so wird $\frac{1}{z^2}=v$ und die eingeklammerte Summe identisch mit der nach Potenzen von v fortschreitenden Reihe; dies giebt folgende Relation

$$D^n{}_x\left(\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right)=\frac{(-1)^n\sqrt{c^n}}{2^n\sqrt{(a+2bx+cx^2)^{n+1}}}D^n{}_z[(z^2-1)^n],$$

wobei nach geschehener Differentiation in Beziehung auf z der für z angegebene Ausdruck zu substituiren ist. Hieraus folgt specieller, wenn nach ausgeführter Differentiation $x=0$ gesetzt wird,

$$\left\{D^n{}_x\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\varkappa\lambda x+\varkappa^2x^2}}\right)\right\}_{(0)}=\frac{(-1)^n\varkappa^n}{2^n}D^n{}_\lambda[(\lambda^2-1)^n].$$

c) Die allgemeine Formel für $D^n F(x^2)$ liefert ferner

$$D^n(\alpha+\beta x^2)^\mu$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)(2\beta x)^n}{(\alpha+\beta x^2)^{n-\mu}}\left\{1+\frac{n(n-1)}{1(\mu-n+1)}\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\frac{\alpha+\beta x^2}{4\beta x^2}\right)^2+\dots\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-[2k-1])}{1.2\dots k(\mu-n+1)(\mu-n+2)\dots(\mu-n+k)},$$
$$u=\frac{c(a+2bx+cx^2)}{4(b+cx)^2},$$

so erhält man aus der vorigen Formel

$$D^n(a+2bx+cx^2)^\mu$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)[2(b+cx)]^n}{(a+2bx+cx^2)^{n-\mu}}(1+A_1u+A_2u^2+\dots\dots).$$

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $n=m-1$, $\mu=m-\frac{1}{2}$, welcher giebt

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{(-1)^{m-1}1.3.5\dots(2m-1)x^m}{m}\left\{(m_1)\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-(m)_3\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3\right.$$
$$\left.+(m)_5\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5-\dots\dots\right\}.$$

Für $x=\cos\omega$ lässt sich die eingeklammerte Reihe mittelst der Formel (§. 9, No. 3)

$$(m)_1\tan\omega-(m)_3\tan^3\omega+(m)_5\tan^5\omega-\dots\dots=\frac{\sin m\,\omega}{\cos^m\omega}$$

summiren und es wird nach Restitution von $\omega=\operatorname{arc}\cos x$

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}=\frac{(-1)^{m-1}1.3.5\dots(2m-1)}{m}\sin(m\operatorname{arc}\cos x).$$

d) Wählt man $F(y)$ so, dass $D^n F(x^2)$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu irgend einem algebraischen oder goniometrischen Satze. Im Falle

$$F(y)=l(1-y)$$

erhält man z. B.

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{(2x)^n}$$
$$=1-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^2-1}{4x^2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(\frac{x^2-1}{4x^2}\right)+\dots$$

oder wenn

$$\frac{x^2-1}{x^2}=z \text{ mithin } x=\frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

gesetzt wird,

$$\frac{(1+\sqrt{1-z})^n+(1-\sqrt{1-z})^n}{2^n}$$

$$=1-\frac{n}{1}\left(\frac{z}{4}\right)+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{z}{4}\right)^2-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots,$$

worin der Coefficient von $(\frac{1}{4}z)^k$ durch den Ausdruck

$$\frac{n(n-k-1)(n-k-2)\dots(n-2k+1)}{1.2.3\dots k}$$

gegeben ist.

Differenzirt man die vorige Gleichung in Beziehung auf z und lässt nachher $n+1$ an die Stelle von z treten, so findet man leicht

$$\frac{(1+\sqrt{1-z})^n-(1-\sqrt{1-z})^n}{2^n\sqrt{1-z}}=1-\frac{n-2}{1}\left(\frac{z}{4}\right)+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\left(\frac{z}{4}\right)^2$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots.$$

Zu ähnlichen Sätzen führt die Annahme

$$F(y)=l(1+y),$$

und zwar ergiebt sich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$arc\tan\frac{1}{x}=\theta$$

gesetzt wird,

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n-\frac{n}{1}(2\cos\theta)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\theta)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\theta)^{n-6}+\cdots\cdot.$$

Hieraus folgt noch durch Differentiation in Beziehung auf θ

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=(2\cos\theta)^{n-1}-\frac{n-2}{1}(2\cos\theta)^{n-3}$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2\cos\theta)^{n-5}-\cdots\cdot.$$

3. Durch mehrmalige Differentiation von $F(\sqrt{x})$ erhält man folgende Gleichungen

$$D\,F(\sqrt{x})=\frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}},$$

$$D^2F(\sqrt{x})=\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2}-2\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3},$$

$$D^3F(\sqrt{x})=\frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^3}-6\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4}+12\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5},$$

$$D^4F(\sqrt{x})=\frac{F^{\mathrm{IV}}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^4}-12\frac{F'''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^5}+60\frac{F''(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^6}-120\frac{F'(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^7},$$

die zu der inductorischen Formel führen

$$D^nF(\sqrt{x})=\frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n}-\frac{n(n-1)}{1}\frac{F^{n-1}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}-\cdots;$$

diese ist mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ zu beweisen.

a) Hiernach ergiebt sich z. B.

$$D^n\left(\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n 1.2..n\,\beta^n}{(2\sqrt{x})^n(\alpha+\beta\sqrt{x})^{n+1}}\left\{1+\frac{n-1}{1}\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}}\right)^2+\cdots\right\},$$

wobei die Coefficienten unter der Form

$$\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)(n-k)}{1.2.3.\ldots.k}$$

enthalten sind. Das obige Resultat lässt sich noch dadurch etwas verallgemeinern, dass man β durch $\beta\sqrt{b}$ und zugleich x durch $\frac{a}{b}+x$ ersetzt.

b) Macht man Gebrauch von den Abkürzungen

$$B_k=\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n(n-1)\ldots(n-k)}{1.2\ldots k(\mu-n+1)(\mu-n+2)\ldots(\mu-n+k)},$$

$$w=\frac{\alpha+\beta\sqrt{x}}{2\beta\sqrt{x}},$$

so findet man mittelst der Formel für $D^nF(\sqrt{x})$

$$D^n\left(\alpha+\beta\sqrt{x}\right)^\mu$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\beta^n}{\left(2\sqrt{x}\right)^n\left(\alpha+\beta\sqrt{x}\right)^{n+1}}(1-B_1 w+B_2 w^2-\cdots).$$

Ein bemerkenswerther specieller Fall hiervon ist

$$D^n\left(\alpha+\beta\sqrt{x}\right)^{2n-1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{\beta}{\sqrt{x}}\left(\beta^2-\frac{\alpha^2}{x}\right)^{n-1}.$$

c) Wählt man $F(y)$ so, dass $D^n F\left(\sqrt{x}\right)$ unabhängig von der allgemeinen Formel entwickelt werden kann, so gelangt man zu einem algebraischen oder goniometrischen Satze.

Ein Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$F(y)=\tfrac{1}{2}l(y^2-1),$$

welche giebt

$$F'(y)=\frac{y}{y^2-1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right),$$
$$F^{(k)}(y)=(-1)^{k-1}3.4\ldots(k-1)\left\{\frac{1}{(y-1)^k}+\frac{1}{(y+1)^k}\right\},$$
$$F\left(\sqrt{x}\right)=\tfrac{1}{2}l(x-1),\qquad DF\left(\sqrt{x}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

u. s. w.

und schliesslich, wenn nach Ausführung aller Differentiationen

$$x=\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2$$

gesetzt wird,

$$(u+v)^n=u^n+v^n+(n)_1(u^{n-1}+v^{n-1})\frac{uv}{u+v}$$
$$+(n+1)_2(u^{n-2}+v^{n-2})\left(\frac{uv}{u+v}\right)^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-2)_{n-1}(u+v)\left(\frac{uv}{u+v}\right)^{n-1}.$$

Nimmt man dagegen

$$F(y)=\tfrac{1}{2}l(y^2+1),$$

und setzt nach Ausführung aller Differentiationen

$$arc\tan\frac{1}{\sqrt{x}}=\theta,$$

so erhält man die goniometrische Formel

$$2^{n-1} \cos^n \theta$$
$$= \cos n\theta + (n)_1 \frac{\cos(n-1)\theta}{2\cos\theta} + (n+1)_2 \frac{\cos(n-2)\theta}{(2\cos\theta)^2} + \cdots\cdot$$
$$\cdots + (2n-2)_{n-1} \frac{\cos\theta}{(2\cos\theta)^{n-1}}.$$

4. Durch mehrmalige Differentiation von $F(x^\lambda)$ erhält man die Gleichungen

$$D\, F(x^\lambda) = \lambda x^{\lambda-1} F'(x^\lambda),$$
$$D^2 F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} F'(x^\lambda) + \lambda^2 x^{2\lambda-2} F''(x^\lambda),$$
$$D^3 F(x^\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) x^{\lambda-3} F'(x^\lambda) + 3\lambda^2(\lambda-1) x^{2\lambda-3} F''(x^\lambda)$$
$$+ \lambda^3 x^{3\lambda-3} F'''(x^\lambda),$$

....

Hieraus ist ersichtlich, dass $D^n F(x^\lambda)$ folgende Gestalt haben muss

$$D^n F(x^\lambda)$$
$$= \frac{1}{x^n} \{C_1 x^\lambda F'(x^\lambda) + C_2 x^{2\lambda} F''(x^\lambda) + C_3 x^3 \; F'''(x^\lambda) + \cdots\},$$

worin C_1, C_2, C_3, gewisse Coefficienten bedeuten, die nur von λ und n nicht aber von x und der Natur der Function F abhängen. Zufolge des letzteren Umstandes kann man jene Coefficienten dadurch ermitteln, dass man für $F(x^\lambda)$ eine Function wählt, deren Differentiation direct (d. h. ohne die obige Formel) möglich ist, und nachher das Resultat mit der allgemeinen Formel vergleicht. Zu dem erwähnten Zwecke eignet sich z. B. die Annahme

$$F(y) = (1 - t + ty)^n$$

worin t eine beliebige Constante sein möge. Benutzt man zur Abkürzung das Symbol

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k+1) = [\mu]^{k},$$

so erhält man aus der obigen Formel

$$x^n D^n (1 - t + t x^\lambda)^n$$
$$= C_1 [n]^{1} x^\lambda (1 - t + t x^\lambda)^{n-1} t + C_2 [n]^{2} x^{2\lambda} (1 - t + t x^\lambda)^{n-2} t^2 + \cdots.$$

Andererseits ist

$$F(x^\lambda) = (1 - t + t x^\lambda)^n$$
$$= (1-t)^n + (n)_1 (1-t)^{n-1} t x^\lambda + (n)_2 (1-t)^{n-2} t^2 x^{2\lambda} + \cdots\cdot$$

und durch directe Differentiation

$$x^n D^n (1 - t + t x^\lambda)^n$$
$$= (n)_1 [\lambda]^{n} (1-t)^{n-1} t x^\lambda + (n)_2 [2\lambda]^{n} (1-t)^{n-2} t^2 x^{2\lambda} + \cdots\cdot$$

Die Vergleichung der beiden, auf verschiedenen Wegen erhaltenen

Resultate giebt eine Gleichung, die für jedes x und t richtig sein muss; setzt man in ihr zur Vereinfachung $x=1$, so lautet sie

$$\overset{1}{[n]} C_1 t + \overset{2}{[n]} C_2 t^2 + \overset{3}{[n]} C_3 t^3 + \cdots$$
$$= (n)_1 \overset{n}{[\lambda]} (1-t)^{n-1} t + (n)_2 \overset{n}{[2\lambda]} (1-t)^{n-2} t^2 + (n)_3 \overset{n}{[3\lambda]} (1-t)^{n-3} t^3 + \cdots$$

Entwickelt man rechter Hand $(1-t)^{n-1}$, $(1-t)^{n-2}$, etc. und ordnet Alles nach Potenzen von t, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von t, t^2, t^3, etc.

$$C_1 = \frac{1}{1} \overset{n}{[\lambda]},$$
$$C_2 = \frac{1}{1.2} \left\{ \overset{n}{[2\lambda]} - 2 \overset{n}{[\lambda]} \right\},$$
$$C_3 = \frac{1}{1.2.3} \left\{ \overset{n}{[3\lambda]} - 3 \overset{n}{[2\lambda]} + 3 \overset{n}{[\lambda]} \right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und überhaupt

$$C_k = \frac{1}{1.2\ldots k} \left\{ (k)_0 \overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1 \overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2 \overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots \right\}.$$

Um das Resultat möglichst einfach darstellen zu können, setzen wir

$$L_k = (k)_0 \overset{n}{[k\lambda]} - (k)_1 \overset{n}{[(k-1)\lambda]} + (k)_2 \overset{n}{[(k-2)\lambda]} - \cdots$$

und haben dann

$$D^n F(x^\lambda)$$
$$= \frac{1}{x^n} \left\{ \frac{L_1 x^\lambda}{1} F'(x^\lambda) + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1.2} F''(x^\lambda) + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1.2.3} F'''(x^\lambda) + \cdots \right\}.$$

Beispiele zu dieser allgemeinen Formel sind:

$$D^n (a+x^\lambda)^\mu$$
$$= \frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n} \left\{ (\mu)_1 L_1 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + (\mu)_2 L_2 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \cdots\cdots \right\},$$

$$D^n l(a+x^\lambda)$$
$$= \frac{1}{x^n} \left\{ \frac{1}{1} L_1 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) - \frac{1}{2} L_2 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \frac{1}{3} L_3 \left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^3 - \cdots \right\},$$

$$D^n e^{x^\lambda}$$
$$= \frac{1}{x^n} \left\{ \frac{L_1 x^\lambda}{1} + \frac{L_2 x^{2\lambda}}{1.2} + \frac{L_3 x^{3\lambda}}{1.2.3} + \cdots \right\} e^{x^\lambda}.$$

Gelegentlich ergeben sich hieraus Eigenschaften der Grössen L_1, L_2, etc. Setzt man nämlich im ersten Beispiele $a=0$ und differenzirt linker Hand direct, so erhält man

$$\overset{n}{[\lambda\mu]} = (\mu)_1 L_1 + (\mu)_2 L_2 + \cdots + (\mu)_n L_n.$$

5. Differenzirt man die Function $F(e^x)$ mehrmals nach einander, so gelangt man zu folgenden Gleichungen

$$D\,F(e^x)=e^x F'(x),$$
$$D^2 F(e^x)=e^x F'(x)+e^{2x} F''(e^x),$$
$$D^3 F(e^x)=e^x F'(x)+3e^{2x} F''(e^x)+e^{3x} F'''(e^x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren allgemeine Form ist

$$D^n F(e^x)=C_1 e^x F'(e^x)+C_2 e^{2x} F''(e^x)+C_3 e^{3x} F'''(e^x)+\cdots\cdot$$

Um die von x und $F(e^x)$ unabhängigen Coefficienten C_1, C_2, etc. zu bestimmen, wenden wir die vorliegende Formel auf den Fall an

$$F(y)=(1-t+ty)^n$$

und erhalten

$$D^n(1-t+te^x)^n$$
$$=C_1\,\overset{1}{[n]}\,e^x(1-t+te^x)^{n-1}t+C_2\,\overset{2}{[n]}\,e^{2x}(1-t+te^x)^{n-2}t^2+\cdots\cdots$$

Andererseits ist

$$F(e^x)=(1-t+te^x)^n$$
$$=(1-t)^n+(n)_1(1-t)^{n-1}te^x+(n)_2(1-t)^{n-2}t^2e^{2x}+\cdots\cdots$$

und durch directe Differentiation

$$D^n(1-t+te^x)^n$$
$$=(n)_1 1^n(1-t)^{n-1}te^x+(n)_2 2^n(1-t)^{n-2}t^2e^{2x}+\cdots\cdots$$

Die Vergleichung beider Resultate giebt, wenn zur Vereinfachung $x=0$ gestzt wird,

$$\overset{1}{[n]}\,C_1 t+\overset{2}{[n]}\,C_2 t^2+\overset{3}{[n]}\,C_3 t^3+\cdots\cdot$$
$$=(n)_1 1^n(1-t)^{n-1}t+(n)_2 2^n(1-t)^{n-2}t^2+(n)_3 3^n(1-t)^{n-3}t^3+\cdots\cdot$$

woraus durch Anordnung nach Potenzen von t folgt

$$C_1=1^n,$$
$$C_2=\frac{1}{1.2}\left\{2^n-2.1^n\right\},$$
$$C_3=\frac{1}{1.2.3}\left\{3^n-3.2^n+3.1^n\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und überhaupt

$$C_k=\frac{1}{1.2\ldots k}\left\{k^n-(k)_1(k-1)^n+(k)_2(k-2)^n-\cdots\cdot\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$E_k=(k)_0 k^n-(k)_1(k-1)^n+(k)_2(k-2)^n-\cdots\cdot,$$

so hat man die allgemeine Formel

$$D^n F(e^x)$$
$$=\frac{E_1 e^x}{1} F'(e^x)+\frac{E_2 e^{2x}}{1.2} F''(e^x)+\frac{E_3 e^{3x}}{1.2.3} F'''(e^x)+\cdots\cdot$$

Beispiele hierzu sind:

$$D^n (a+e^x)^\mu$$
$$=(a+e^x)^\mu \left\{ (\mu)_1 E_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)+(\mu)_2 E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\cdots\cdot \right\},$$
$$D^n l(a+e^x)$$
$$=\tfrac{1}{1} E_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)-\tfrac{1}{2} E_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2+\tfrac{1}{3} E_3 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^3-\cdots\cdot$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln wird für $a=0$

$$\mu^n=(\mu)_1 E_1+(\mu)_2 E_2+\cdots\cdot+(\mu)_n E_n,$$

worin eine Eigenschaft der Grössen E_1, E_2, etc. liegt. Substituirt man hier die Werthe

$$(\mu)_1=\frac{\mu}{1},\quad (\mu)_2=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}=\frac{\mu^2-\mu}{1.2},\cdots\cdot$$

ordnet Alles nach Potenzen von μ und vergleicht die beiderseitigen Coefficienten von μ, $\mu^2, \ldots \mu^n$, so erhält man noch n specielle Relationen. Die erste derselben ist für $n>1$

$$0=\tfrac{1}{1} E_1-\tfrac{1}{2} E_2+\tfrac{1}{3} E_3-\cdots\cdot,$$

und die letzte

$$1=\frac{E_n}{1.2\ldots n}$$

d. i. vermöge des Werthes von E_n

$$(n)_0 n^n-(n)_1 (n-1)^n+(n)_2 (n-2)^n-\cdots=1.2.3\ldots n.$$

Durch die Formel für $D^n F(e^x)$ erledigt sich auch die Differentiation aller Functionen von den Formen $f(\cos x)$, $f(\sin x)$, etc., weil (nach der Lehre von den Functionen complexer Variabelen) $\cos x$, $\sin x$, etc. durch Exponentialgrössen ausgedrückt werden können.

6. Differenzirt man $F(lx)$ mehrmals nach einander, so erhält man die Gleichungen

$$D\, F(lx)=\frac{1}{x} F'(lx),$$
$$D^2 F(lx)=\frac{1}{x^2} \left\{ F''(lx)-F'(lx) \right\}$$
$$D^3 F(lx)=\frac{1}{x^3} \left\{ F'''(lx)-3F''(lx)+2F'(lx) \right\},$$

....

welche auf das allgemeine Bildungsgesetz

$$D^n F(lx)$$
$$=\frac{1}{x^n}\left\{C_0 F^{(n)}(lx) - C_1 F^{(n-1)}(lx) + C_2 F^{(n-2)}(lx) - \cdots\right\}$$

hinweisen, worin die Coefficienten $C_0, C_1, \ldots C_{n-1}$ unabhängig von x sind. Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $F(y)=e^{-\lambda y}$, $F(lx)=x^{-\lambda}$, bei welcher alle angedeuteten Differentiationen ausführbar werden; die entstehende Gleichung

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)$$
$$=C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda$$

giebt zu erkennen, dass man durch Ausführung der angedeuteten Multiplication combinatorische Formeln für die Coefficienten C_0, C_1, C_2, etc. aufstellen kann. Es folgt nämlich

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1,\\
C_1 &= 1+2+3+\cdots+(n-1),\\
C_2 &= 1.2+1.3+1.4+\cdots+1(n-1)\\
&\qquad +2.3+2.4+\cdots+2(n-1)\\
&\qquad\qquad +3.4+\cdots+3(n-1)\\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad +(n-2)(n-1),
\end{aligned}$$

u. s. w.

überhaupt ist C_1 die Summe der Zahlen $1, 2, \ldots (n-1)$, C_2 die Summe der aus den letzteren herstellbaren Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen), wobei jede solche Ambe als Product angesehen wird, ferner ist C_3 die Summe der auf gleiche Weise gebildeten Ternen u. s. w. Diese Combinationsreihen lassen sich zwar summiren z. B.

$$C_0=1,\quad C_1=\frac{n(n-1)}{2},\quad C_2=\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24},\ldots$$

jedoch ist das Bildungsgesetz von C_1, C_2, etc. auf diesem Wege nicht zu entdecken*).

Für $F(y)=y^p$ erhält man bei umgekehrter Anordnung der Summanden

$$D^n(lx)^p$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{p\,C_{n-1}(lx)^{p-1} - p(p-1)\,C_{n-2}(lx)^{p-2}\right.$$
$$\left. + p(p-1)(p-2)\,C_{n-3}(lx)^{p-3} - \cdots\right\}.$$

*) Der Verfasser hat dasselbe nach einem anderen Verfahren gefunden, s. „Compendium der höheren Analysis" Theil II, S. 23.

Ist p eine ganze positive Zahl, so müssen die Fälle $p > n$ und $p \leqq n$ unterschieden werden. Im ersten Falle enthält die Reihe n Glieder, im zweiten Falle verschwinden alle diejenigen Glieder, bei welchen die Anzahl der gemachten Differentiationen mehr als p beträgt, und es bleibt daher

$$D^n (lx)^p$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} \left\{ p\, C_{n-1} (lx)^{p-1} - p(p-1) C_{n-2} (lx)^{p-2} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{p+1} p(p-1) \ldots 2.1\, C_{n-p} \right\}.$$

Daraus folgt z. B. wenn $(lx)^p$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet wird

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+p} 1.2.3 \ldots p\, C_{n-p} \quad , \qquad n \geqq p.$$