Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel IV. Die Discussion ebener Curven

Capitel IV.

Die Discussion ebener Curven.

§. 14.

Allgemeine Regeln und Formeln.

Die Curve sei auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x und y bezogen und es möge zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

gesetzt werden; dann gelten folgende Regeln.

So lange y' positiv bleibt, so lange steigt die Curve; so lange y' negativ ist, so lange fällt sie; wechselt y' durch Null hindurchgehend sein Vorzeichen, so findet an der betreffenden Stelle eine Culmination statt und zwar eine obere oder untere, je nachdem der Zeichenwechsel von $+$ nach $-$, oder von $-$ nach $+$ vor sich geht.

So lange y'' positiv bleibt, so lange ist die Curve convex nach unten; so lange y'' negativ bleibt, so lange ist die Curve concav nach unten; jedem Zeichenwechsel von y'' entspricht ein Inflexionspunkt.

Bezeichnet τ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte xy mit der x-Achse einschliesst, so ist (Fig. 1)

$$\tan \tau = y',$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \tau &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{ds}, \\ \sin \tau &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dy}{ds}, \end{aligned}\right\} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

worin ds das Bogendifferential bedeutet. Ferner gelten die Formeln:

$$\text{Subtangente}: MT = \frac{y}{y'},$$

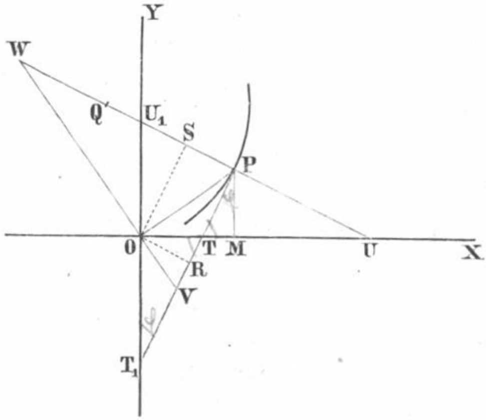
$$\text{Tangente}: PT = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

Abschnitt der Tangente auf der x-Achse: $OT = x - \frac{y}{y'}$,

" " " " " y-Achse: $OT_1 = y - xy'$,

Entfernung der Tangente vom Coordinatenanfang: $OR = \frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$,

Fig. 1.



Projection des Radiusvector auf die Tangente: $PR = \frac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$,

Coordinaten von R.: $-\frac{(y-xy')\,y'}{1+y'^2}$ und $\frac{y-xy'}{1+y'^2}$,

Polarsubtangente: $OV = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(y-xy')}{x+yy'}$,

Polartangente: $PV = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{x+yy'}$,

Coordinaten von V.: $-\frac{y\,(y-xy')}{x+yy'}$ und $\frac{x\,(y-xy')}{x+yy'}$,

Gleichung der Tangente: $\eta - y = y'(\xi - x)$.

Wenn bei unendlich wachsenden x

$$Lim\, y' = A, \quad Lim(y - xy') = B$$

endliche bestimmte Grössen sind, so ist

Gleichung der Asymptote: $\eta = A\xi + B$.

Ferner gelten die Formeln (s. Fig. 1)

Subnormale: $MU = yy'$,

Normale: $PU = y\sqrt{1+y'^2}$,

Abschnitt der Normale auf der x-Achse: $OU = x + yy'$,

$$\text{Abschnitt der Normale auf der } y\text{-Achse}: O\,U_1 = y + \frac{x}{y'},$$

$$\text{Entfernung der Normale vom Coordinatenanfang}: OS = \frac{x + y\,y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\text{Projection des Radiusvector auf die Normale}: PS = \frac{y - x\,y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\text{Coordinaten von } S.: \frac{x+y\,y'}{1+y'^2} \text{ und } \frac{(x+y\,y')\,y'}{1+y'^2},$$

$$\text{Polarsubnormale}: O\,W = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+y\,y')}{y - x\,y'},$$

$$\text{Polarnormale}: P\,W = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2}}{y - x\,y'},$$

$$\text{Coordinaten von } W.: \frac{y\,(x+y\,y')}{y-x\,y'} \text{ und } -\frac{x\,(x+y\,y')}{y-x\,y'},$$

$$\text{Gleichung der Normale}: \eta - y = -\frac{1}{y'}\,(\xi - x).$$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes Q:

$$x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} \text{ und } y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser}: \varrho = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

Ist die Curve auf Polarcoordinaten r und θ bezogen und wird zur Abkürzung

$$\frac{d\,r}{d\theta} = r', \quad \frac{d^2\,r}{d\theta^2} = r''$$

gesetzt, so gelten die Formeln

$$y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta} = \tan\tau,$$

$$y'' = \frac{-r\,r'' + 2\,r'^2 + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3},$$

$$d\,s = \sqrt{(r\,d\theta)^2 + d\,r^2},$$

ferner, wenn φ den Winkel zwischen Radiusvector und Tangente, so wie ψ den Winkel zwischen Radiusvector und Normale bezeichnet,

$$\tan\varphi = \frac{r}{r'}, \quad \tan\psi = -\frac{r'}{r},$$

$$\text{Polarsubtangente}: O\,V = \frac{r^2}{r'},$$

$$\text{Polartangente}: P\,V = \frac{r\sqrt{r^2 + r'^2}}{r'}$$

$$\text{Entfernung der Tangente vom Pol}: OR = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

$$\text{Polarsubnormale}: OW = r',$$

$$\text{Polarnormale}: PW = \sqrt{r^2+r'^2},$$

$$\text{Entfernung der Normale vom Pol}: OS = \frac{rr'}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

Rechtwinklige Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$r\cos\theta - \frac{(r^2+r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+2r'^2-rr''} \text{ und}$$

$$r\sin\theta + \frac{(r^2+r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\text{Krümmungshalbmesser}: \varrho = \frac{\sqrt{(r^2+r'^2)^3}}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

§. 15.

Beispiele von Curvendiscussionen. (Algebraische Curven.)

1. Die Parabel. Bezeichnet h den Halbparameter, so führt die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2hx$$

zu folgenden Sätzen und Formeln.

Die Subtangente ist gleich der doppelten Abscisse; die Tangente bildet mit der nach dem Brennpunkte gezogenen Geraden (dem Brennstrahl des Berührungspunktes) denselben Winkel wie mit der Parabelachse. Fällt man vom Brennpunkte eine Senkrechte auf irgend eine Tangente, so liegt der Fusspunkt dieses Perpendikels auf der Scheiteltangente. Die Subnormale ist constant gleich dem Halbparameter.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = 3x + h, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{h}} = -\frac{y^3}{h^2}, \quad -\sqrt{\frac{y^6}{h^5}}\,h$$

wobei die erste Formel unter Zuhilfenahme der Normale eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes giebt; der Krümmungsradius ist, wenn u die Normale bedeutet,

$$\varrho = -\frac{u^3}{h^2}.$$

2. Die Ellipse. Geht man entweder von der Mittelpunktsgleichung aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder benutzt man statt derselben die beiden Gleichungen

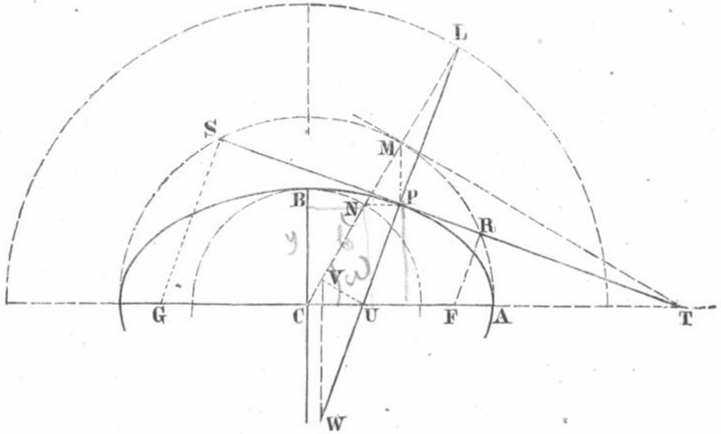
$$x = a \cos \omega, \quad y = b \sin \omega,$$

worin ω den Winkel ACM (die sogenannte excentrische Anomalie) bedeutet (Fig. 2), so gelangt man zu folgenden Formeln, Sätzen und Constructionen. Die Strecke CT, welche die Tangente von der Abscissenachse abschneidet, ist

$$CT = \frac{a^2}{x};$$

bezeichnet demnach M denjenigen Punkt des umschriebenen Kreises AB, welcher dieselbe Abscisse wie P besitzt, so gehen die Kreistangente MT und die Ellipsentangente PT durch einen und denselben

Fig. 2.



Punkt der x-Achse, was eine einfache Tangentenconstruction giebt. Die Tangente halbirt den Nebenwinkel des von den Brennstrahlen FP und GP gebildeten Winkels FPG. Fällt man von den Brennpunkten Senkrechte auf die Tangente, so liegen die Fusspunkte R und S dieser Perpendikel auf dem umschriebenen Kreise.

Um die Normale unabhängig von der Tangente zu construiren, beschreibe man um den Ellipsenmittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $a+b$ und verlängere CM bis zum Durchschnitte L mit diesem Kreise; LP ist dann die Normale.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und der Krümmungsradius bestimmen sich durch die Formeln

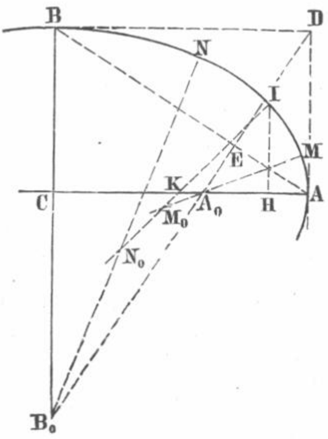
$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

wobei u die Normale PU, und h den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Um den Krümmungsmittelpunkt zu construiren, legt man UV senkrecht zu CM und zieht durch V parallel zu BC eine Gerade, welche die verlängerte PU im Krümmungsmittelpunkte W schneidet.

Wenn es auf eine gute graphische Darstellung der Ellipse ankommt, so bestimmt man eine Reihe von Curvenpunkten mittelst des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, construirt mittelst des Kreises vom Radius $a+b$ die zugehörigen Normalen und nimmt die auf einander folgenden Durchschnitte derselben als Krümmungsmittelpunkte, was um so richtiger ist, je näher die Curvenpunkte an einander liegen; die Ellipse lässt sich dann mit beliebig weit gehender Genauigkeit aus Kreisbögen zusammensetzen. Empfehlenswerth ist auch folgende Construction, deren Beweis aus den vorigen Formeln hergeleitet werden kann. (Fig. 3.) Man bilde zunächst das Rechteck $ACBD$ mit den Seiten $AC = a$, $BC = b$, und lege durch D senkrecht zur Diagonale AB eine Gerade, welche AB in E, AC in A_0, BC in B_0 schneidet; dann ist A_0 der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel A, und B_0 der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel B. Nimmt man ferner die Abscisse $CH = BE$ und die Ordinate $HI = AE$, so ist I ein Punkt der Ellipse und zwar derjenige, dessen Normale IK mit AC einen halben rechten Winkel bildet, also durch $HK = HI$ leicht zu construiren ist. Man beschreibt nun aus A_0 mit dem Halbmesser A_0A einen Kreis und sucht dann auf der verlängerten IK den Mittelpunkt M_0 desjenigen Kreises, der durch I geht und den vorigen Kreis von Innen berührt*). Auf gleiche Weise bestimmt man zwei sich berührende Kreise aus den Mittelpunkten B_0 und N_0. Die vier Kreisbögen AM, MI, IN, NB bilden zusammen eine Linie, die dem Ellipsenquadranten ausserordentlich nahe kommt.

Fig. 3.



*) Die hierzu nöthige Construction wird man leicht finden; für das praktische Zeichnen ist es aber bequemer und sogar genauer, den Punkt M_0 durch Versuche zu bestimmen.

3. Die Hyperbel. Man kann entweder die Mittelpunktsgleichung

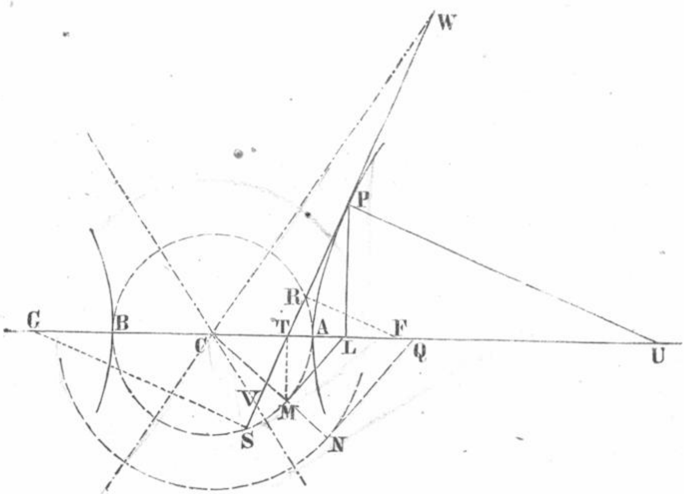
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

direct benutzen oder statt deren die beiden Gleichungen

$$x = a \sec \omega, \quad y = b \tan \omega$$

anwenden, in denen ω den Winkel ACM (Fig. 4) bedeutet, so dass $x = CL$, $y = LP = NQ$ ist; es ergeben sich dann folgende Resultate.

Fig. 4.



Der Durchschnitt T der Tangente mit der x-Achse ist der Fusspunkt des von M auf CA herabgelassenen Perpendikels; die Tangente halbirt den von den Brennstrahlen FP und GP gebildeten Winkel. Bezeichnet VW das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente, so ist $PV = PW$. Die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Senkrechten schneiden die Tangente in zwei Punkten R und S, welche auf dem über der Hauptachse beschriebenen Kreise liegen.

Für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und den Krümmungsradius gelten die Formeln

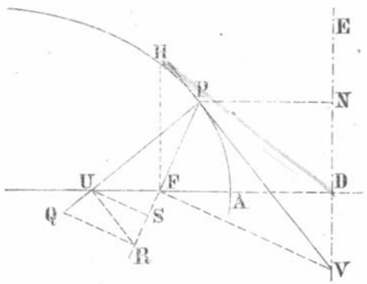
$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 + b^2}{b^4} y^3,$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4} = -\frac{u^3}{h^2},$$

worin u die Normale PU, und h den Halbparameter $\frac{b^2}{a}$ bedeutet. Aus der Bemerkung, dass die Formel für ξ durch $\xi = OU.\sec^2\omega$ ersetzt werden kann, folgt eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes.

4. Die Kegelschnitte im Allgemeinen. Es sei (in Fig. 5) F ein Brennpunkt, DE die nächste Directrix eines Kegelschnittes, so stehen bekanntlich die Entfernungen PF und PN in constantem Verhältniss; hieraus ergiebt sich, wenn $\frac{PF}{PN} = \varepsilon$, $FD = g$ gesetzt und F als Anfang rechtwinkliger Coordinaten genommen wird,

Fig. 5.



$$y^2 = \varepsilon^2 g^2 - 2\varepsilon^2 g x + (\varepsilon^2 - 1) x^2$$

und in Polarcoordinaten für $FP = r$, $\angle AFP = \theta$, $FH = h$,

$$r = \frac{h}{1 + \varepsilon \cos\theta}.$$

Hieraus können folgende Sätze abgeleitet werden. Der Endpunkt V der Polarsubtangente liegt auf der Directrix; FP ist das geometrische Mittel zwischen PN und FU; die Projection der Normale auf den Brennstrahl hat die constante Grösse $PS = h$. Errichtet man in U auf der Normale eine Senkrechte, welche den Brennstrahl in R schneidet und legt dann RQ senkrecht zu FR, so schneidet RQ die Normale im Krümmungsmittelpunkte Q.

5. Es soll die Curve untersucht werden, deren Gleichung ist

$$9ay^2 = (x - 3a)^2 x.$$

Die Curve besteht aus zwei congruenten Zweigen, von denen der eine durchaus convex, der andere durchaus concav nach unten ist. Der erste schneidet die x-Achse im Coordinatenanfang unter einem rechten Winkel, hat bei $x = a$, $y = -\frac{2}{3}a$ einen unteren Culminationspunkt, schneidet die Abscissenachse bei $x = 3a$ zum zweiten Male unter einem Winkel von 30^0 und steigt dann ins Unendliche. Zur Tangenten- und Normalenconstruction dient die einfache Formel

$$\sin\tau = \frac{x - a}{x + a};$$

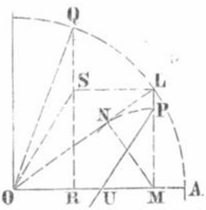
der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{(x+a)^2}{2a} = 2x \sec^2 \tau,$$

was man leicht construiren kann.

6. In einem mit dem Radius $OA = a$ (Fig. 6) beschriebenen Kreise wird ein fernerer Radius OL unter dem beliebigen Winkel $AOL = \omega$ gezogen, L auf OA projicirt, die Projection M wieder auf OL nach N projicirt und die Ordinate $MP = MN$ genommen; die so construirten Punkte P liegen auf einer Curve, welche man entweder durch die beiden Gleichungen

Fig. 6.



$$x = a \cos \omega, \quad y = a \cos \omega \sin \omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

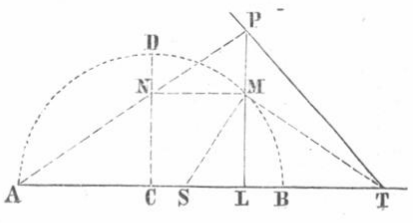
ausdrücken kann. Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die Form einer Schleife (∞). Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel vom Coordinatenanfange O aus, erreicht bei $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a}{2}$ seinen oberen Culminationspunkt und schneidet die Abscissenachse zum zweiten Male für $x = a$ unter einem rechten Winkel. Der Mittelpunkt O ist der einzig vorhandene Inflexionspunkt. Um für irgend einen Punkt P die Tangente oder Normale zu construiren, nehme man $\angle AOQ = 2\omega$, ziehe $QR \perp OA$, $LS \parallel OA$ und $PU \parallel SO$; es ist dann PU die Normale. Für den Krümmungsradius ergiebt sich

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(2a^4 - 5a^2x^2 + 4x^4)^3}}{a^2 x (3a^2 - 2x^2)},$$

woraus für den Scheitel A und für den Culminationspunkt sehr einfache Werthe folgen.

7. Ueber dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 7) ist ein Kreis beschrieben und durch dessen Mittelpunkt C ein zweiter Durchmesser senkrecht zu AB gelegt. Irgend ein beliebiger Punkt M des Kreises wird auf beide Durchmesser projicirt, wodurch die Punkte L und N entstehen, endlich zieht man

Fig. 7.



die Gerade AN, welche der nöthigenfalls verlängerten LM in P begegnet. Alle hiernach construirten Punkte P liegen in einer Curve, welche für $CL=x$, $LP=y$ durch die Gleichung

$$a^2y^2=(a+x)^3(a-x)$$

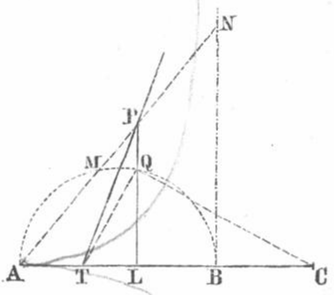
repräsentirt wird. Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter AB liegenden Theilen, die in A und B zusammentreffen und eine geschlossene blattähnliche Figur bilden. Der obere Zweig berührt AB in A mit convexer Krümmung, hat bei $x=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)a$ einen Wendepunkt, geht unter dem Winkel von 45^0 durch D, erreicht bei $x=\frac{1}{2}a$ seinen oberen Culminationspunkt und schneidet zuletzt AB in B unter einem rechten Winkel. Um für irgend einen Curvenpunkt P die Tangente zu construiren, nehme man $CS=LB$, ziehe SM und dazu in M eine Senkrechte, welche AB in T schneidet; TP ist dann die Tangente. Für den Krümmungsradius findet man

$$\varrho=\mp\frac{\sqrt{2(a+x)(a^3-2a^2x+2x^3)^3}}{a^2(a^2+2ax-2x^2)},$$

wobei sich das obere Zeichen auf den oberen, das untere auf den unteren Zweig bezieht.

8. Die Cissoide (Fig. 8). Ueber dem Durchmesser $AB=2a$ ist ein Kreis beschrieben und in B eine Tangente an denselben gelegt; durch A zieht man eine beliebige Gerade, welche den Kreis in M, die Tangente in N schneidet und nimmt die Strecke $AP=MN$. Alle so entstandenen Punkte P bilden eine Curve, deren Gleichung lautet

Fig. 8.



$$(2a-x)y^2=x^3,$$

wobei A als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und AB als Abscissenachse genommen ist. Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter der Abscissenachse liegenden Zweigen; der obere Zweig geht von A aus, wo er die x-Achse berührt und steigt mit convexer Krümmung ins Unendliche; die Tangente BN ist seine Asymptote. Um die Tangente an P zu construiren, nehme man $AC=3a$, verbinde C mit dem Punkte Q, in welchem die Ordinate LP den Kreis schneidet und errichte auf CQ in Q eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in T trifft; die Gerade TP ist die gesuchte Tangente. Für den Krümmungsradius findet man

$$\varrho = \pm \frac{a\sqrt{x(8a-3x)^3}}{3(2a-x)^2},$$

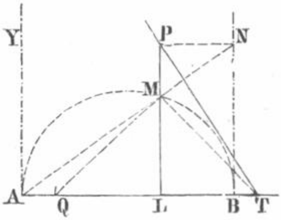
wobei das obere Zeichen dem oberen, das untere dem unteren Zweige entspricht. Die Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes hat den Werth

$$\eta = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{2ay}{x},$$

welcher eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes gestattet, nachdem die Normale bestimmt worden ist.

9. Ueber dem Durchmesser $AB = 2a$ (Fig. 9) ist ein Kreis beschrieben und in B eine Tangente an denselben gelegt; durch einen beliebigen Punkt M des Kreises zieht man ML senkrecht zu AB, ferner die Gerade AM, welche die Tangente in N schneidet und nimmt endlich $LP = BN$. Alle so entstandenen Punkte P bilden eine Curve, deren Gleichung für $AL = x$, $LP = y$ ist

Fig. 9.



$$xy^2 = 4a^2(2a-x).$$

Die Curve besteht aus zwei congruenten, über und unter der x-Achse liegenden Zweigen, welche die y-Achse zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Die Ordinaten des oberen Zweiges nehmen ab von $y = \infty$ bis $y = 0$, wo die Curve die x-Achse rechtwinklig schneidet; bei $x = \frac{3}{2}a$ hat jeder Zweig einen Wendepunkt. Um die Tangente an P zu construiren, nehme man $LQ = a$, ziehe QM und darauf in M eine Senkrechte, welche der x-Achse in T begegnet; TP ist die gesuchte Tangente. Für den Krümmungshalbmesser ergiebt sich

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{(4a^4 + 2ax^3 - x^4)^3}}{2a^2x^2(3a-2x)},$$

wobei das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Zweig gilt.

10. In einem mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreise (Fig. 10) sind zwei gegen einander senkrechte feste Durchmesser gezogen; irgend ein Punkt Q des Kreises wird erst auf OA, dann auf OQ und dann wieder auf OA projicirt, wodurch der Reihe nach die Projectionen S, U, M entstehen; ebenso wird Q nach einander auf OB, OQ, OB projicirt, und schliesslich verlängert man MU und NV bis zu ihrem Durchschnitte P. Setzt man $\angle AOQ = \omega$, $OM = x$, $ON = y$, so gelten die Gleichungen

$$x = a\cos^3\omega, \quad y = a\sin^3\omega,$$

aus welchen folgt

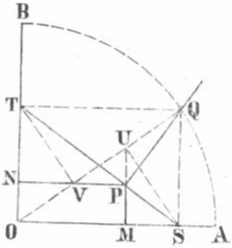
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

oder in rationaler Form

$$(x^2+y^2-a^2)^3 + 27\,a^2x^2y^2 = 0.$$

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen, welche zusammen eine sternförmige Figur bilden. Der zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht von B, wo er die Ordinatenachse berührt, bis A, wo er die Abscissenachse berührt; er fällt mit convexer Krümmung. Ferner liegen die drei Punkte S, P, T in einer Geraden, welche die Curve in P berührt und die constante Länge $ST = a$ besitzt; die Gerade PQ ist die Normale der Curve im Punkte P; der Krümmungshalbmesser ist das Dreifache von PQ.

Fig. 10.



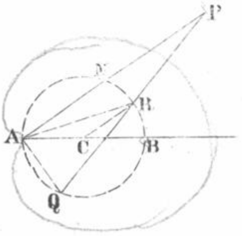
11. Die Cardiode (Fig. 11). In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$ beschriebenen Kreise sind Sehnen AN gezogen, welche durch den festen Punkt A gehen, und auf jeder Sehne wird von N aus, immer nach derselben Seite hin, der Durchmesser $NP = AB$ abgeschnitten. Nimmt man A als Coordinatenanfang, AB als Abscissenachse und setzt $AP = r$, $\angle BAP = \theta$, so ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten

$$r = 2\,a(1+\cos\theta)$$

und in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2+y^2-2\,ax)^2 = 4\,a^2(x^2+y^2).$$

Fig. 11.



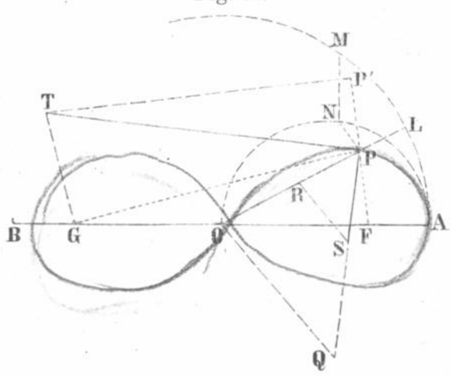
Die Curve wird durch die Abscissenachse in zwei congruente Theile getheilt. Der obere Zweig geht von A, wo er die x-Achse berührt, mit concaver Krümmung aufwärts, erreicht bei

$$\theta = \tfrac{1}{3}\pi, \quad x = 3a\cos\tfrac{1}{3}\pi, \quad y = 3a\sin\tfrac{1}{3}\pi$$

seinen oberen Culminationspunkt und schneidet zuletzt die Abscissenachse rechtwinklig im Punkte $x = 4a$, $y = 0$. Behufs der Normalenconstruction zieht man die zu AN senkrechte Kreissehne AQ; es ist dann PQ die Normale. Diese schneidet den Kreis ANB in einem Punkte R, dessen Radius $CR \parallel AP$, und wobei $AR = PR$ ist. Der Krümmungsradius für P beträgt zwei Drittheile von PQ.

12. Die Lemniscate (Fig. 12). Mit dem Radius $OA = a$ ist ein Kreis und über OA als Durchmesser ein zweiter Kreis beschrieben. Nach einem beliebigen Punkte L des ersten Kreises zieht man den Radius OL, nimmt $arc\,LM = arc\,AL$, legt durch M senkrecht zu OA eine Gerade, welche den zweiten Kreis in N schneidet und trägt auf OL die Strecke $OP = ON$ ab. Wählt man O zum Anfang, OA als Abscissenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat man für die Curve der Punkte P in Polarcoordinaten die Gleichung

Fig. 12.



$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

und in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Auf der Abscissenachse mögen ferner die Punkte F und G so bestimmt sein, dass $OF = OG = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; die Punkte F und G heissen die Brennpunkte der Lemniscate; die beiden Brennstrahlen eines Lemniscatenpunktes P besitzen dann die Eigenschaft $FP \,.\, GP = \overline{OF}^2$.

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die Gestalt einer Schleife (∞). Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegende Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel von O aus, steigt mit concaver Krümmung, erreicht bei

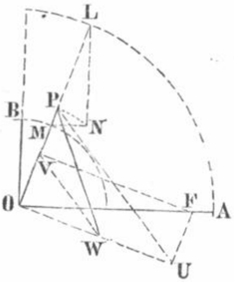
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad x = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \frac{a}{2}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2}$$

seinen oberen Culminationspunkt und schneidet endlich die x-Achse unter einem rechten Winkel bei $x = a$, $y = 0$. Der Mittelpunkt der Curve ist ihr einziger Inflexionspunkt. Zur Normalenconstruction dient die Bemerkung, dass der Winkel zwischen Normale und Radiusvector das Doppelte von θ, also $\angle OPQ = 2\theta$ ist. Um die Tangente unabhängig von der Normale zu construiren, verlängert man den Brennstrahl FP um $PP' = FP$ und errichtet in P' eine Senkrechte auf

FP'; diese Senkrechte schneidet die in G auf dem andern Brennstrahle GP errichtete Senkrechte in einem Punkte T, welcher der gesuchten Tangente angehört. Nimmt man auf der Normale die Strecke $PQ = a$, auf dem Radiusvector die Strecke $PR = \frac{1}{3}a$ und zieht durch R eine zu OQ parallele Gerade, so schneidet letztere die Normale im Krümmungsmittelpunkte S.

13. Um den Punkt O sind mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 13) zwei concentrische Kreise beschrieben; man zieht einen beliebigen Halbmesser, welcher den ersten Kreis in L, den zweiten in M schneidet und zieht durch L eine Parallele zu OB, durch M eine Parallele zu der auf OB senkrechten OA. Beide Parallelen schneiden sich in N; endlich trägt man auf OL die Strecke $OP = ON$ ab. Nimmt man OA als Abscissen-, OB als Ordinatenachse und setzt noch $OP = r$, $\angle AOP = \theta$, so hat die Curve der Punkte P in Polarcoordinaten die Gleichung

Fig. 31.



$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta,$$

dagegen in rechtwinkligen Coordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

oder auch, wenn x und y durch θ ausgedrückt werden,

$$x = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \, . \cos\theta,$$

$$y = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \, . \sin\theta.$$

Zur Abkürzung sei

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = A, \quad \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) = B;$$

man findet dann

$$x = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \, . \cos\theta, \quad y = \sqrt{A + B\cos 2\theta} \, . \sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A\cos\theta + B\cos 3\theta}{A\sin\theta + B\sin 3\theta},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{r(A^2 + 3B^2 + 4AB\cos 2\theta)}{(A\sin\theta + B\sin 3\theta)^3}.$$

Die Curve besteht aus vier congruenten, um den Mittelpunkt O herumliegenden Theilen; der von den positiven Seiten der Coordinatenachsen eingeschlossene Quadrant schneidet OA senkrecht in A und OB senkrecht in B. Im Falle $a \leqq b\sqrt{2}$, hat derselbe nur einen oberen Culminationspunkt (B) und keinen Wendepunkt; ist dagegen $a > b\sqrt{2}$, so wird B zum unteren Culminationspunkt und ausserdem existirt ein berer Culminationspunkt an der Stelle

$$tan\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2-2b^2}}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Zwischen beiden Culminationspunkten liegt ein Wendepunkt bei

$$tan\,\theta = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}}, \quad r = \frac{\sqrt{3}\,.\,ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.$$

Um die Normale in einem beliebigen Punkte P zu construiren, bestimme man zunächst den festen Punkt F, dessen Abscisse $OF = \sqrt{a^2-b^2}$ ist, lege durch O senkrecht zu OP eine Gerade und projicire F auf diese Senkrechte so wie auf OP, wodurch man die Punkte U und V erhält; endlich ziehe man $VW \parallel PU$, so ist PW die Normale.

14. **Die Cassini'sche Curve.** Es sind zwei feste Punkte F und G in der Entfernung $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des Punktes P gesucht, für welchen das Rechteck aus FP und GP eine constante Fläche $= h^2$ besitzt. Nimmt man den Mittelpunkt O von FG zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten und OF zur x-Achse, so erhält man als Gleichung der Curve

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = h^4 - c^4$$

und in Polarcoordinaten

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta = h^4 - c^4.$$

Aus der ersten Gleichung findet man

$$y^2 = \frac{[x^2-(c^2-h^2)]\,[c^2+h^2-x^2]}{c^2+x^2+\sqrt{h^4+4c^2x^2}},$$

und daran knüpfen sich folgende Bemerkungen. Für $h < c$ besteht die Curve aus zwei gesonderten Blättern; für $h = c$ geht sie in eine Lemniscate über, deren Halbachse $a = \sqrt{2}\,.\,c$ ist; für $h > c$ bildet die Curve eine Ovalfigur mit den Halbachsen $a = \sqrt{h^2+c^2}$ und $b = \sqrt{h^2-c^2}$.

Ferner gelten die Formeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(c^2-x^2-y^2)}{y(c^2+x^2+y^2)} = \frac{x(c^2-r^2)}{y(c^2+r^2)},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{h^2 r}{y(c^2+r^2)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{h^4}{y^3}\cdot\frac{h^4-c^4+3c^2(x^2-y^2)}{(c^2+x^2+y^2)^3}.$$

Hiernach sind für $h \leqq c$ vier Culminationspunkte vorhanden an den Stellen

$$x = \pm\frac{\sqrt{4c^4-h^4}}{2c}, \quad y = \pm\frac{h^2}{2c}, \quad r = c;$$

im Falle $c < h < \sqrt{2}\,.\,c$ giebt es sechs Culminationspunkte bei

$$x=0,\quad y=\pm\sqrt{h^2-c^2} \text{ und } x=\pm\frac{\sqrt{4c^4-h^4}}{2c},\quad y=\pm\frac{h^2}{2c},\quad r=c;$$

endlich für $\sqrt{2}\,.\,c<h$ existiren nur zwei Culminationspunkte bei

$$x=0,\quad y=\pm\sqrt{h^2-c^2}.$$

Inflexionspunkte sind nur im Falle $c<h<\sqrt{2}\,.\,c$ vorhanden und zwar gelten für deren Coordinaten die Gleichungen

$$x^2-y^2=-\frac{h^4-c^4}{3c^2},\quad x^2+y^2=\sqrt{\tfrac{1}{3}(h^4-c^4)}$$

$$r=\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}(h^4-c^4)}=\sqrt{ab\tan 30^0},\quad \cos 2\theta=-\frac{r^2}{c^2}.$$

Zur Normalenconstruction eignet sich am besten die Formel

$$\sin\psi=\frac{c^2}{h^2}\sin 2\theta,$$

worin ψ den Winkel zwischen Normale und Radiusvector bezeichnet. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho=-\frac{h^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{h^4-c^4+3c^2(x^2-y^2)}=-\frac{2h^2r^3}{c^4-h^4+3r^4}.$$

15. Es sind gegeben ein fester Punkt F und eine feste Gerade DE, gesucht wird der geometrische Ort des Punktes P, für welchen das Rechteck aus seinen Abständen von F und DE eine constante Fläche besitzt. Nimmt man F zum Coordinatenanfang, die Senkrechte von F auf DE zur Abscissenachse, setzt die Länge dieser Senkrechten $=2c$ und die constante Fläche $=h^2$, so hat man

$$r=\frac{h^2}{2c-x},$$

wonach sich die Curve leicht construiren lässt, und ferner

$$y^2=\frac{h^4}{(2c-x)^2}-x^2=\frac{(h^2-2cx+x^2)(h^2+2cx-x^2)}{(2c-x)^2}.$$

Für $h<c$ schneidet die Curve viermal die Abscissenachse in den Entfernungen

$$a_1=-\left(\sqrt{c^2+h^2}-c\right),\quad a_2=c-\sqrt{c^2-h^2},$$
$$a_3=c+\sqrt{c^2-h^2},\quad a_4=\sqrt{c^2+h^2}+c;$$

sie besteht dann aus einem blattförmig geschlossenen Theile und aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen, deren gemeinschaftliche Asymptote die Gerade DE ist. Im Falle $h=c$ reduciren sich jene vier Durchschnitte auf drei und die Curve bildet dann eine Schlinge um F;

für $h > c$ existiren nur noch zwei Durchschnitte, denen zwei Zweige entsprechen. Die Abscissenachse theilt in allen Fällen die Curve in zwei congruente Theile.

Man findet weiter

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{h^4}{(2c-x)^3}-x$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{c^4}{h^4}=m \text{ und } \frac{c}{2c-x}=\xi$$

gesetzt wird

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{h^4}{c^3}\cdot\frac{\xi^4-2m\xi+m}{\xi}.$$

Nach bekannten algebraischen Lehren hat nun die Gleichung

$$\xi^4-2m\xi+m=0$$

für $m > \frac{16}{27}$ zwei reelle, von einander verschiedene Wurzeln und zwei complexe Wurzeln, für $m=\frac{16}{27}$ werden die beiden reellen Wurzeln identisch, für $m < \frac{16}{27}$ sind alle Wurzeln imaginär. Derjenige Zweig der Curve, welcher durch die Gleichung

$$y=+\frac{\sqrt{h^4-x^2(2c-x)^2}}{2c-x}$$

ausgedrückt wird, kann daher höchstens zwei Culminationspunkte besitzen. Ist nun erstens $h < c$, mithin $m > 1$, und wird

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{h^4}{(2c-x)^3}-x=\varphi(x)$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$\varphi(0)=\frac{h^4}{8c^3}>0,\quad \varphi(\tfrac{1}{2}c)=\frac{16h^4-27c^4}{54c^3}<0,$$

$$\varphi(a_2)=-2\left(\frac{a_2}{h}\right)^2\sqrt{c^2-h^2}<0,\quad \varphi(a_3)=+2\left(\frac{a_3}{h}\right)^2\sqrt{c^2-h^2}>0;$$

die Abscisse des ersten Culminationspunktes liegt demnach zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, die des zweiten zwischen a_2 und a_3; der letzteren entspricht aber kein reelles y, es existirt daher in dem oberen Curvenzweige nur ein (oberer) Culminationspunkt.

Für den Fall $h=c$ wird einfacher

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c^3-7c^2x+5cx^2-x^3}{(2c-x)^2\sqrt{c^2+2cx-x^2}},$$

woraus sich für den oberen Zweig ein einziger Culminationspunkt ergiebt an der Stelle $x=0,16071\,.\,c$.

Ist drittens $h > c$, so müssen die drei Unterfälle

$$c^4 < h^4 < \tfrac{27}{16} c^4, \quad h^4 = \tfrac{27}{16} c^4, \quad h^4 > \tfrac{27}{16} c^4$$

unterschieden werden. Im ersten Falle zeigen die Werthe von $\varphi(0)$, $\varphi(\frac{1}{2}c)$ und $\varphi(c)$, dass der obere Curvenzweig zwei Culminationspunkte besitzt, von denen der obere zwischen 0 und $\frac{1}{2}c$, der untere zwischen $\frac{1}{2}c$ und c liegt. Im zweiten Unterfalle wird

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{(c-2x)^2[2c^2+(5c-2x)^2]}{16(2c-x)^3},$$

und dann ziehen sich die beiden vorigen Culminationspunkte zu einem Punkte zusammen, in welchem zwar die Tangente horizontal liegt, der aber kein Culminationspunkt ist, weil der Differentialquotient sein Zeichen nicht wechselt. Im letzten Falle sind gar keine Culminationspunkte vorhanden.

Weiter erhält man

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2h^8}{(2c-x)^6} - \frac{3h^4x^2}{(2c-x)^4} + \frac{2h^4x}{(2c-x)^3} - \frac{h^4}{(2c-x)^2}$$
$$= -2h^4\frac{8c^4-h^4-24c^3x+30c^2x^2-16cx^3+3x^4}{(2c-x)^3}$$

oder unter Benutzung der früheren Zeichen

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2\xi^2}{m^2}(\xi^4-6m\xi^2+8m\xi-3m).$$

Die Gleichung

$$\xi^4-6m\xi^2+8m\xi-3m=0$$

besitzt jederzeit zwei imaginäre Wurzeln, es kann daher die obere Hälfte der Curve höchstens zwei Inflexionspunkte haben. Ist nun erstens $h<c$, so liegt der eine Inflexionspunkt zwischen a_3 und $2c$, der andere zwischen $2c$ und a_4. Im Falle $h=c$ wird einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2h^4\frac{7c-3x}{\sqrt{(c^2+2cx-x^2)^3}},$$

und es existirt dann im oberen Zweige der Curve nur ein Inflexionspunkt an der Stelle

$$x=\tfrac{7}{3}c, \quad y=\frac{4\sqrt{2}}{3}c;$$

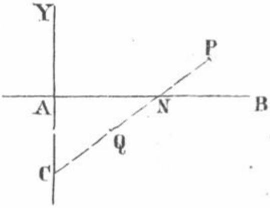
legt man im Punkte $x=c$, $y=0$ eine Tangente an die Curve, so geht diese Tangente durch den Inflexionspunkt. Im letzten Falle $h>c$ liegt ein Wendepunkt zwischen 0 und $2c$, der andere zwischen $2c$ und a_4.

Zur Normalenconstruction eignet sich am besten die Formel

$$x+y\frac{dy}{dx} = \frac{r^2}{2c-x}.$$

16. Die Conchoide. Eine Gerade AB und ein um die Strecke $AC=b$ davon entfernter Punkt C sind gegeben (Fig. 14); man verbindet den letzteren mit beliebigen Punkten N der Geraden und schneidet von N aus auf beiden Seiten von NC die gleichen Strecken $NP=NQ=a$ ab. Die so entstehende Curve besitzt zwei Zweige; für den oberen ist, wenn $\angle ACN=\omega$ gesetzt wird,

Fig. 14.



$$x=b\tan\omega+a\sin\omega,\quad y=+a\cos\omega,$$

für den unteren

$$x=b\tan\omega-a\sin\omega,\quad y=-a\cos\omega,$$

woraus für beide Zweige die gemeinsame Curvengleichung folgt

$$x^2y^2=(b+y)^2(a^2-y^2).$$

Hiernach ergeben sich die Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy^3}{(y+b)(y^3+a^2b)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2y^3(y^3+3by^2-2a^2b)}{(y^3+a^2b)^3}.$$

Die Punkte $x=0$, $y=+a$ und $x=0$, $y=-a$ sind die Culminationspunkte der Curve; die Abscissenachse ist Asymptote derselben. Die cubische Gleichung

$$y^3+3by^2-2a^2b=0$$

bestimmt die Ordinaten der Inflexionspunkte, wobei zu beachten ist, dass diese Punkte nur dann existiren, wenn die Wurzeln der vorstehenden Gleichung reell und zugleich zwischen $-a$ und $+a$ enthalten sind. Für $b>a$ findet man zwei derartige y, für $b\overline{\leq}a$ nur eines; demnach besitzt die Curve vier Inflexionspunkte, wenn $b>a$ ist; ausserdem nur zwei. Für $b=a$ entsteht bei C eine Spitze, für $b<a$ hat eine Curve eine um C herumgehende Schlinge.

§. 16.

Fortsetzung. (Transcendente Curven.)

1. Die logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y=be^{\frac{x}{a}}\quad\text{oder}\quad x=al\left(\frac{y}{b}\right);$$

drei oder mehreren in arithmetischer Progression stehenden Abscissen entsprechen hiernach Ordinaten, welche eine geometrische Progression bilden, und zufolge dieser Eigenschaft können aus dem Coordinatenpaar $x=0$, $y=b$, $x=a$, $y=be$ beliebig viele weitere Coordinaten durch Construction abgeleitet werden. Die Curve steigt fortwährend mit convexer Krümmung; die Subtangente ist constant $=a$, der Krümmungsradius

$$\varrho=\frac{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}{ay}.$$

2. Die Gewölblinie entsteht, wenn man die beiden symmetrisch entgegengesetzt liegenden logarithmischen Linien

$$y_1=be^{+\frac{x}{a}},\quad y_2=be^{-\frac{x}{a}}$$

construirt und zwischen jedem y_1 und y_2 das arithmetische Mittel aufsucht; die Gleichung der Gewölblinie lautet demnach

$$y=\tfrac{1}{2}b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

oder auch

$$x=a\,l\left(\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b}\right).$$

Die Curve wird von der y-Achse in zwei congruente Theile getheilt, von welchen der über der positiven x-Achse liegende Zweig fortwährend mit convexer Krümmung steigt. Mittelst der Formel

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2-b^2}}{a}$$

ist die Tangente im Punkte xy leicht zu construiren; für den Krümmungshalbmesser hat man

$$\varrho=\frac{\sqrt{(a^2-b^2+y^2)^3}}{ay}.$$

Im speciellen Falle $b=a$ führt die Curve den Namen Kettenlinie; der Krümmungsradius ist dann gleich und entgegengesetzt der Normale.

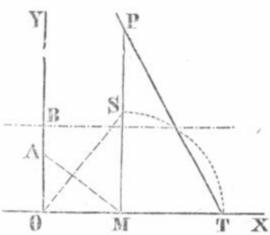
3. Die reciproke logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y=be^{\frac{a}{x}}\ \text{oder}\ x=\frac{a}{l\left(\frac{y}{b}\right)};$$

drei in harmonischer Proportion stehenden Abscissen entsprechen hiernach drei in geometrischer Proportion stehende Ordinaten, und zufolge dieser Eigenschaft können aus dem Coordinatenpaar $x=0$, $y=b$,

$x=a, y=be$ beliebig viele Coordinaten durch Construction hergeleitet werden. Den negativen Abscissen von $x=-\infty$ bis $x=0$ entspricht ein Curvenzweig, der von einer in der Höhe b parallel zur x-Achse liegenden Asymptote bis zum Coordinatenanfange herabsteigt und an der Stelle $x=-\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{e^2}$ von concaver zu convexer Krümmung übergeht. An der Stelle $x=0$ springt y von 0 nach $+\infty$ über, nachher fällt die Curve mit convexer Krümmung und nähert sich derselben Asymptote, wie der vorige Zweig. Um die Tangente im Punkte P zu construiren (Fig. 15), nehme man auf der Ordinatenachse $OA=a$, lege durch O senkrecht zu AM eine Gerade, welche die Ordinate MP in S schneidet, so ist $MS=MT$ die Subtangente. Der Krümmungsradius ist

Fig. 15.



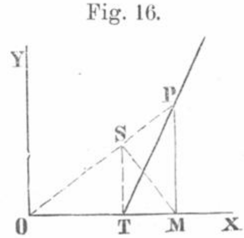
$$\varrho=\frac{\sqrt{(x^4+a^2y^2)^3}}{a(a+2x)x^2y}.$$

4. Die Gleichung einer Curve sei

$$y^2=x^2 l\left(\frac{x^2}{a^2}\right),$$

wobei man beachten möge, dass die Functionen $l(z^2)$ und $2lz$ zwar für positive, nicht aber für negative z identisch sind. Der Coordinatenanfang ist der Mittelpunkt der Curve, welche aus vier congruenten Quadranten besteht. Betrachtet man nur den zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen liegenden Quadranten, so findet sich, dass derselbe mit $x=a$, $y=0$ beginnt, anfangs mit concaver Krümmung, von $x=y=a\sqrt{e}$ ab mit convexer Krümmung steigt und ins Unendliche geht. Um die Tangente in einem Curvenpunkte P zu construiren (Fig. 16), fällt man vom Abscissenendpunkte M eine Senkrechte MS auf den Radiusvector OP und legt noch $ST\perp OX$; es ist dann MT die Subtangente. Für den Krümmungsradius ergiebt sich, wenn u die Normale im Punkte P bezeichnet,

Fig. 16.



$$\varrho=\frac{u^3}{y^2-x^2};$$

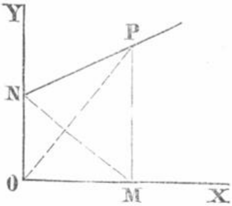
hieraus folgt eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes.

5. Die logarithmische Lemniscate. Es sei

$$y^2 = x^2\, l\left(\frac{a^2}{x^2}\right),$$

so besteht die Curve aus vier congruenten um den Coordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen positiven Coordinatenachsen befindliche Quadrant geht vom Coordinatenanfange aus*), steigt mit concaver Krümmung bis zu dem oberen Culminationspunkte

Fig. 17.



$x = y = \frac{a}{\sqrt{e}}$, fällt dann bis $x = a$, $y = 0$ und wird für $x > a$ imaginär; in beiden Durchschnitten mit der x-Achse steht die Curve senkrecht auf dieser Achse. Der Mittelpunkt ist der einzige Wendepunkt. Um die Tangente im Punkte P zu construiren, legt man durch den Abscissenendpunkt M senkrecht zum Radiusvector OP (Fig. 17) eine Gerade MN, welche die Ordinatenachse in N schneidet; NP ist dann die Tangente. Bezeichnet u die Normale im Punkte P, so ergiebt sich

$$\varrho = \frac{u^3}{x^2 + y^2},$$

woraus eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes folgt.

---

*) Man kann hierbei folgende Bemerkung zu Hülfe nehmen. Für $a < b$ ist bekanntlich (S. 3)

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} > m a^{m-1},$$

mithin für $a = 1$, $b = 1 + \frac{z}{m}$,

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right) - 1 > z$$

und durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende m

$$e^z - 1 > z \text{ folglich } e^z > z.$$

Setzt man $\frac{1}{2} l\omega$, wo ω mehr als die Einheit betragen muss, und quadrirt, so erhält man

$$\omega > \tfrac{1}{4}(l\omega)^2$$

oder

$$\frac{l\omega}{\omega} < \frac{4}{l\omega};$$

daraus geht hervor, dass $\frac{l\omega}{\omega}$ bei unendlich wachsenden ω gegen die Null convergirt.

6. Die Tractorie der Geraden. Durch die beiden Gleichungen

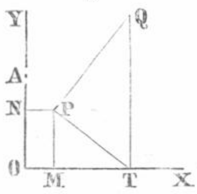
$$x=a\left(\tfrac{1}{2}\,l\,cot^2\,\tfrac{1}{2}\,\omega-\cos\omega\right),\quad y=a\sin\omega$$

oder durch die eine Gleichung

$$x=\tfrac{1}{2}\,a\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$$

wird eine Curve von folgenden Eigenschaften bestimmt. Die Curve besteht aus vier congruenten um den Coordinatenanfang herum liegenden Quadranten. Der zwischen den positiven Seiten der Coordinatenachsen enthaltene Quadrant beginnt mit $x=0$, $y=a$, fällt unausgesetzt mit convexer Krümmung und hat die x-Achse zur Asymptote. Es ist ferner

Fig. 18.



$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

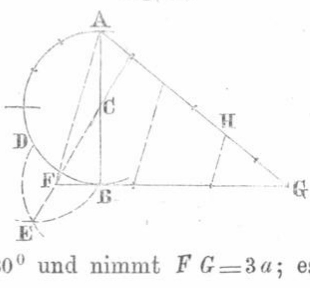
und hieraus folgt, dass die Tangente PT (Fig. 18) die constante Länge a besitzt. Für den Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho=\frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{y};$$

errichtet man in T eine Senkrechte auf der x-Achse, so schneidet diese Senkrechte die Normale im Krümmungsmittelpunkte Q.

7. Die Spirale des Archimedes ist diejenige Curve, bei welcher der Radiusvector r proportional dem Polarwinkel θ wächst. Um diese Spirale zu construiren, muss man zunächst ihren erzeugenden Kreis rectificiren, was entweder mittelst eines Massstabes, oder auf folgendem graphischen Wege geschehen kann (Fig. 19). Ist $AB=2a$ der Durchmesser, C der Mittelpunkt des Kreises, so legt man in B eine Tangente an den Kreis, construirt mit ungeänderter Zirkelöffnung den Winkel $BCE=30^0$, die Gerade $BF=a\,.\,tan\,30^0$ und nimmt $FG=3a$; es ist dann

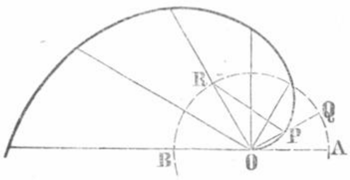
Fig. 19.



$$AG=a\sqrt{13\tfrac{1}{3}-\sqrt{12}}=a\,.\,3{,}141533\cdots,$$

also mit einer für graphische Zwecke völlig ausreichenden Genauigkeit $AG=a\,.\,\pi=$ dem Halbkreise ADB. Theilt man sowohl den Halbkreis als die Gerade in gleichviel gleiche Theile, z. B. in 6, oder 12, oder 24 Theile, was aus naheliegenden Gründen sehr bequem ist, so entstehen beiderseits gleiche Stücke, wie z. B. $arc\, BD = GH$. In Fig. 20

Fig. 20.



sei nun wieder $OA = a$ und die Peripherie des um O mit dem Radius a beschriebenen Kreises eben so wie vorhin getheilt; nach den Theilpunkten zieht man die Radien und trägt auf letztere, vom Mittelpunkte O aus, die entsprechenden geradlinigen Strecken auf, so dass immer $OP = arc\, AQ$ ist. Die Gleichung der Spirale ist hiernach

$$r = a\theta \text{ oder } \frac{y}{x} = \tan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}.$$

Vom Coordinatenanfange ausgehend, macht die Spirale unendlich viele, sich mehr und mehr erweiternde Windungen; sie besitzt daher unendlich viele Culminationspunkte, deren Polarwinkel durch die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$\tan\theta = -\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale hat die constante Grösse a; legt man demnach senkrecht zum Vector OP den Kreisradius OR, so ist PR die Normale für den Punkt P. Der Krümmungshalbmesser ist

$$\varrho = \frac{u^3}{a^2+u^2},$$

worin u die Polarnormale PR bezeichnet.

8. Die hyperbolische Spirale. Diese Curve hat zur Gleichung

$$r = \frac{a}{\theta},$$

und lässt sich auf ähnliche Weise, wie die Spirale des Archimedes construiren. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$ und zugleich geht $y = r \sin\theta$ in a über; bei wachsenden θ nimmt r ab. Die hyperbolische Spirale besitzt demnach eine Asymptote, welche in der Entfernung a parallel zur Polarachse liegt; sie macht ferner unendlich viele, sich mehr und mehr verengernde Windungen; der Coordinatenanfang ist ein asymptotischer Punkt der Curve. Culminationspunkte sind, wie bei der vorigen Curve, an den Stellen vorhanden, wo $\tan\theta = -\theta$ wird. Die Polarsubtangente hat den constanten Werth $-a$, was eine einfache Tangentenconstruction giebt. Bezeichnet u die Polarnormale, so ist

$$\varrho = \frac{u^3}{r^2}.$$

9. Die parabolische Spirale hat zur Gleichung

$$r^2 = a^2 \theta$$

und kann wegen $r = \sqrt{a \, . \, a\theta}$ auf ähnliche Weise wie die Spirale des Archimedes construirt werden. Sie macht vom Coordinatenanfang aus sowohl nach rechts wie nach links unendlich viele sich erweiternde Windungen, deren Culminationspunkte durch die transcendente Gleichung

$$tan\,\theta = -2\theta$$

bestimmt werden. Die Polarsubnormale ist nach der Formel

$$r' = \frac{a^2}{2r}$$

leicht zu construiren; zwischen der Polarnormale u und dem Krümmungsradius besteht die Relation

$$\varrho = \frac{u^3}{r^2 + 3u^2}.$$

10. Die reciproke parabolische Spirale (Lituus). Als Gleichung der Curve hat man

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta},$$

welcher Ausdruck leicht zu construiren ist. Für $\theta = 0$ wird $r = \infty$, dagegen $y = 0$; bei wachsenden θ nimmt r ab. Die Curve macht daher, und zwar nach entgegengesetzten Seiten hin, unendlich viele sich verengernde Windungen; die Polarachse ist ihre Asymptote, der Pol ihr asymptotischer Punkt. Culminationspunkte sind an den Stellen vorhanden, wo $tan\,\theta = -2\theta$ wird. Ferner besitzt die Curve zwei Inflexionspunkte für $\theta = \frac{1}{2} = arc\, 28^0\, 38'\, 52''\, 4$ und $r = \pm \sqrt{2} \, . \, a$. Die Polarsubtangente bestimmt sich durch die leicht construirbare Formel

$$\frac{r^2}{r'} = -2\frac{a^2}{r};$$

zwischen der Polarnormale u und dem Krümmungsradius besteht die Relation

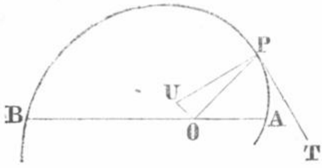
$$\varrho = \frac{4a^4 u^3}{r^2 (4a^4 - u^4)}.$$

11. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung der Curve nämlich

$$r = a e^{\beta\theta} \text{ oder } \theta = \frac{1}{\beta} \, l\left(\frac{r}{a}\right)$$

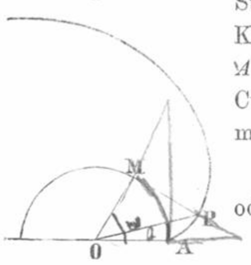
folgt, dass die Vectoren in geometrischer Progression wachsen, wenn die Polarwinkel eine arithmetische Progression bilden; sind demnach zwei Punkte der Curve bekannt, z. B. A mit den Coordinaten $\theta = 0$, $r = a$ und B mit den Coordinaten $\theta = \pi$, $r = b$, so lassen sich durch Construction beliebig viele Curvenpunkte bestimmen. Den von 0 bis $+\infty$ wachsenden θ entsprechen unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen, den Werthen von $\theta = 0$ bis $\theta = -\infty$ unendlich viele immer enger werdende Windungen, die sich dem Coordinatenanfange als asymptotischem Punkte nähern. So oft $\cot\theta = -\beta$ wird, treten Culminationspunkte ein. Der Winkel OPT zwischen Radiusvector und Tangente (Fig. 21) hat immer dieselbe Grösse, nämlich $\operatorname{arc}\cot\beta$; der Krümmungshalbmesser ist gleich der Polarnormale PU.

Fig. 21.



12. Die Kreisevolvente. (Fig. 22). An einem, mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreis ist in einem beliebigen Punkte M eine Tangente gelegt und auf derselben eine Strecke MP abgeschnitten, welche gleich ist dem Kreisbogen zwischen M und einem festen Punkte A; alle so construirten Punkte P bilden eine Curve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermassen ausdrücken lässt

Fig. 22.



$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \theta = \omega - \operatorname{arc}\tan\omega,$$

oder

$$\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \operatorname{arc}\cos\frac{a}{r}.$$

Die Curve gehört zu den Spiralen, insofern sie unendlich viele, sich fortwährend erweiternde Windungen um O herum macht. Die Kreistangente MP ist zugleich die Normale und der Krümmungshalbmesser der Curve. Nimmt man in den vorigen Formeln die Wurzeln negativ, so erhält man den zweiten Zweig der Curve, welcher dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

13. Die Tractorie des Kreises (Fig. 23). Es sei A ein fester, M ein beliebiger Punkt eines mit dem Radius $OA = a$ beschriebenen Kreises; durch M ist eine Tangente an den Kreis gelegt, auf dieser $MN = \operatorname{arc} AM$ genommen und schliesslich auf ON die Senkrechte MP gefällt; alle so construirten Punkte P bilden eine Curve, welche sich für $\angle AOM = \omega$ folgendermassen ausdrücken lässt

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \theta = \omega - arctan\,\omega$$

oder

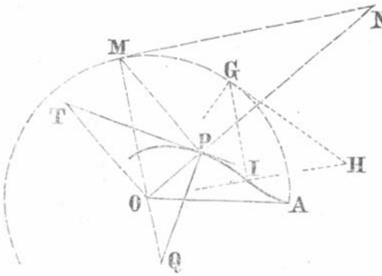
$$\theta = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} - arc\cos\frac{r}{a}.$$

Die Curve macht von A aus unendlich viele, sich fortwährend verengernde Windungen um den Coordinatenanfang, welcher der asymptotische Punkt der Curve ist; sie besitzt ferner einen Inflexionspunkt I an der Stelle

$$\omega = 1, \; r = \frac{a}{\sqrt{2}}, \; \omega = 1 - \frac{\pi}{4},$$

welchen man leicht mittelst der Bemerkung construiren kann, dass näherungsweise

Fig. 23.

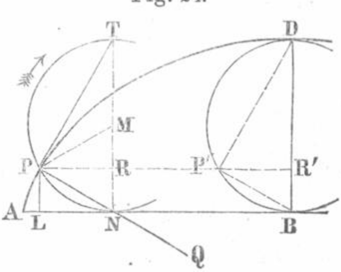


$$tan\,1 = tan\,57^0\,17'\,44''\,8 = \tfrac{95}{61}$$

ist, wobei der begangene Fehler weniger als 2 Secunden beträgt. Die Polartangente PT hat die constante Länge a; der Durchschnitt von MO mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt Q. Nimmt man in den obigen Formeln die Wurzelgrössen negativ, so erhält man einen zweiten Curvenzweig, welcher dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

14. Die Cycloide (Fig. 24). Wenn ein Kreis auf einer Geraden fortrollt, ohne zu gleiten, so beschreibt ein Peripheriepunkt des Kreises die genannte Curve. Es sei AB die gegebene Gerade, NPT der rollende Kreis in einer seiner Lagen, wo er AB in N berührt, P derjenige Punkt des Kreises, welcher die Curve beschreibt und welcher sich zu Anfange der Bewegung in A befunden haben möge; es ist dann $AN = arc\,NP$. Um die Curve zu construiren, braucht man den Kreis nur in seiner mittelsten, einer halben Umdrehung entsprechenden Lage zu zeichnen, so dass AB gleich der halben Kreisperipherie $AP'D$ ist; man wählt dann $arc\,BP'$ willkürlich, nimmt $AN = arc\,BP'$, zieht durch P' eine

Fig. 24.



Parallele, durch N eine Senkrechte zu AB und trägt von dem Durchschnitte R beider Linien die Strecke $RP = R'P'$ ab. Nimmt man A zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten, AB zur Abscissenachse, setzt den Kreisradius $MP = b$ und den sogenannten Wälzungswinkel $PMN = \omega$, so erhält man

$$x = b(\omega - \sin\omega), \quad y = b(1 - \cos\omega)$$

oder

$$x = b \operatorname{Arccos} \frac{b-y}{b} - \sqrt{2by - y^2},$$

wobei überhaupt $\operatorname{Arccos} z$ irgend einen der Bögen bezeichnet, welche z zum Cosinus haben. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werthe

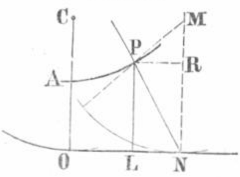
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \cot\tfrac{1}{2}\omega,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{(1-\cos\omega)^2} = -\frac{b}{4\sin^4\frac{1}{2}\omega}.$$

Die Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Zügen, welche die Abscissenachse in den Punkten $x = 0$, $\pm 2\pi b$, $\pm 4\pi b$, $\pm 6\pi b$, etc. rechtwinklig schneiden und an den Punkten $x = \pm \pi b$, $\pm 3\pi b$, $\pm 5\pi b$, etc., denen immer dieselbe Ordinate $2b$ entspricht, obere Culminationspunkte besitzen; Inflexionspunkte sind nicht vorhanden. Zieht man noch den Durchmesser NMT, so ist PT die Tangente, PN die Normale der Curve; der Krümmungsradius PQ beträgt das Doppelte der Normale PN.

15. Die gedehnte und die verschlungene Cycloide (Fig. 25). Wie bei der vorigen Aufgabe denke man sich einen Kreis auf einer Geraden rollend, nehme aber als beschreibenden Punkt einen nicht auf der Kreisperipherie liegenden Punkt, dessen Abstand vom Kreismittelpunkte $= c$ heissen möge. Die Anfangslage des Kreises sei diejenige, bei welcher die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des beschreibenden Punktes A senkrecht auf der gegebenen Geraden steht und der Abstand des beschreibenden Punktes von dieser Geraden am kleinsten ist; die Basis nehmen wir zur Abscissenachse, ihren Durchschnitt mit CA zum Coordinatenanfang. Es gelten dann folgende Gleichungen

Fig. 25.



$$x = b\omega - c\sin\omega, \quad y = b - c\cos\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c\sin\omega}{b - c\cos\omega}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c(b\cos\omega - c)}{(b - c\cos\omega)^3},$$

bei deren Discussion zwei Fälle unterschieden werden müssen.

Ist nämlich $c < b$ wie in Fig. 25, so heisst die Curve eine gedehnte Cycloide. Dieselbe schneidet die Abscissenachse nicht und besitzt an den Stellen $x=0$, $\pm\pi b$, $\pm 2\pi b$, $\pm 3\pi b$, etc. Culminationspunkte, welche abwechselnd untere und obere Culminationspunkte sind; dazwischen liegen Inflexionspunkte, deren ω durch die Gleichung $\cos\omega = \frac{c}{b}$ bestimmt werden, deren Abscissen mithin sind

$$x = b\, Arc\cos\frac{c}{b} - \frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{b}.$$

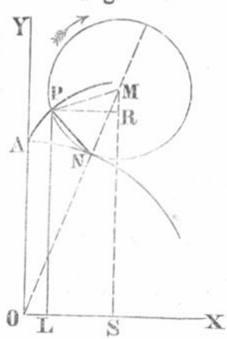
Im Falle $c > b$ heisst die Curve eine verschlungene Cycloide. Sie schneidet die Abscissenachse unendlich vielmal an den Stellen, wo $\cos\omega = \frac{b}{c}$ wird; sie besitzt ferner untere und obere Culminationspunkte an denselben Stellen, wie die gedehnte Cycloide, dagegen sind Inflexionspunkte im eigentlichen Sinne nicht vorhanden. Für beide Cycloiden ist PN die Normale; bezeichnet man sie mit u, so hat man für den Krümmungshalbmesser die Formel

$$\varrho = \frac{u^3}{c(b\cos\omega - c)},$$

welche leicht geometrisch construirt werden kann.

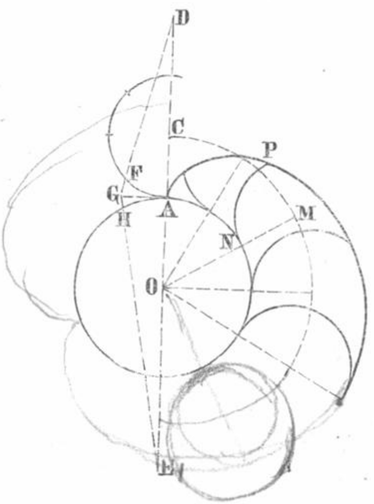
16. Die Epicycloiden. Auf der Aussenseite eines unbeweglichen, mit dem Radius $OA=a$ beschriebenen Kreises (Fig. 26) rolle ein mit dem Halbmesser b construirter Kreis; irgend ein Peripheriepunkt P des letzteren Kreises beschreibt dann eine Epicycloide. Den Anfang der Bewegung denken wir uns so, dass der beschreibende Punkt mit dem Berührungspunkte A beider Kreise zusammenfällt; nennen wir für irgend eine spätere Lage N den Berührungspunkt beider Kreise, so ist immer $arc\,AN = arc\,NP$. Die Construction der Curve kommt daher in der Hauptsache darauf zurück, derartige gleiche Bögen zu finden. Wenn die beiden Kreishalbmesser in rationalem Verhältnisse stehen, so erreicht man dies leicht dadurch, dass man zwei ganze Zahlen m und n wählt, die sich wie a zu b verhalten und nachher den ruhenden Kreis in m-, den beweglichen Kreis in n-Theile theilt. So ist in Fig. 27 $a:b = 3:2$, $m=12$, $n=8$, mithin $arc\,AH$, d. h. $\frac{1}{12}$ der Peripherie des ersten

Fig. 26.



Kreises, $= arc\, AF = \frac{1}{8}$ der Peripherie des zweiten, ebenso $arc\, AN = 2 . arc\, AH = 2 . arc\, AF = arc\, NP$. Bei einem irrationalen Verhältnisse von $a:b$ ist es für graphische Zwecke hinreichend, statt jenes Verhältnisses ein nahekommendes rationales Verhältniss zu setzen, welches man durch Abkürzung des unendlichen Decimalbruches für $\frac{a}{b}$ oder besser durch Kettenbrüche erhält; so würde man im Falle $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ entweder $m = 14, n = 10$, oder genauer $m = 17$, $n = 12$ nehmen. Ein anderes Näherungsverfahren ist folgendes. Auf dem kleineren der beiden Kreise, welcher in Fig. 27 der rollende Kreis ist, nehme man den Bogen AF willkürlich, jedoch höchstens gleich einem Achtel der Peripherie, ferner AD gleich dem dreifachen Radius AC und ziehe DF, welche Gerade die durch A gelegte Kreistangente in G schneidet; die Strecke AG kommt dann dem Bogen AF sehr nahe und lässt sich nun wieder auf den andern Kreis übertragen, indem man $AE = 3 . AO$ nimmt und die Gerade EG zieht, welche von dem zweiten Kreise den Bogen $AH = AG = AF$ abschneidet*). Hat man nach der einen oder andern Methode die gleichen Bögen AH und AF construirt, so nimmt man auf der Peripherie des ruhenden Kreises $arc\, AN$ gleich einem beliebigen Vielfachen von $arc\, AH$, zieht $ONM = a + b$, beschreibt aus M mit dem Radius b einen Kreisbogen NP, welcher das Gleichvielfache von $arc\, AF$ ist; man kann auf diese Weise beliebig viele Curvenpunkte P construiren.

Fig. 27.



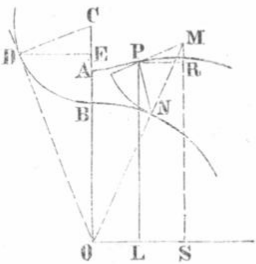
Wählt man O zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten, OA zur Ordinatenachse und setzt den Wälzungswinkel $NMP = \omega$, so führt die Bemerkung, dass in Fig. 26 $\angle AON = \frac{b\omega}{a}$ und $\angle PMR = \omega + \frac{b\omega}{a}$ ist, zu folgenden Gleichungen

$$x = (a+b) \sin \frac{b\omega}{a} - b \sin \frac{(a+b)\omega}{a},$$
$$y = (a+b) \cos \frac{b\omega}{a} - b \cos \frac{(a+b)\omega}{a}.$$

*) Vergl. die Aufgabe No. 10, in §. 41.

Ebenso findet man die Gleichungen der gedehnten und der verschlungenen Epicycloide. Ist nämlich die Entfernung des beschreibenden Punktes P vom Mittelpunkte M des rollenden Kreises nicht $= b$, sondern $= c$, so ergeben sich die Gleichungen (Fig. 28)

Fig. 28.



$$x = (a+b)\sin\frac{b\,\omega}{a} - c\sin\frac{(a+b)\,\omega}{a},$$

$$y = (a+b)\cos\frac{b\,\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\,\omega}{a},$$

wobei $c < b$ einer gedehnten, $c > b$ einer verschlungenen Epicycloide entspricht. Hieraus folgen die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\sin\frac{b\,\omega}{a} - c\sin\frac{(a+b)\,\omega}{a}}{b\cos\frac{b\,\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\,\omega}{a}} = \frac{a\sin\frac{b\,\omega}{a} - x}{y - a\cos\frac{b\,\omega}{a}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^3 + (a+b)c^2 - (a+2b)\,b\,c\cos\omega}{(a+b)\left(b\cos\frac{b\,\omega}{a} - c\cos\frac{(a+b)\,\omega}{a}\right)^3},$$

$$\varrho = -\frac{(a+b)\sqrt{(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2)^3}}{b(b^2 - 2bc\cos\omega + c^2) + ac(c - b\cos\omega)}.$$

Die Entfernung $OP = r$ wird am kleinsten für $\omega = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$ etc., am grössten für $\omega = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ etc.; die Normale im Punkte P geht immer durch den entsprechenden Berührungspunkt N beider Kreise. Ein Zeichenwechsel von ϱ tritt ein für

$$\cos\omega = \frac{b^3 + (a+b)c^2}{(a+2b)\,b\,c}$$

oder

$$\tan\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{(a+b)c - b^2}{(a+b)c + b^2}},$$

wozu entweder

$$b > c > \frac{b^2}{a+b}$$

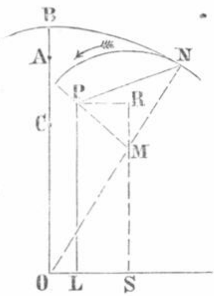
oder

$$b < c < \frac{b^2}{a+b}$$

nothwendig ist. Da die letzte Ungleichung sich selber widerspricht, so können Zeichenwechsel von ϱ, d. h. Inflexionspunkte, bei der verschlungenen Epicycloide gar nicht, und bei der gedehnten Epicycloide nur dann vorkommen, wenn c zwischen $\frac{b^2}{a+b}$ und b enthalten ist. Die geometrische Bedeutung hiervon ergiebt sich, wenn man von O aus an den in seiner Anfangslage befindlichen rollenden Kreis die Tangente OD legt und von D auf OC die Senkrechte DE fällt; der beschreibende Punkt, dessen Anfangslage A ist, muss dann zwischen E und B liegen. Aus dem Werthe von ϱ kann man leicht eine Construction des Krümmungshalbmessers ableiten.

17. Die Hypocycloiden (Fig. 29). Auf der Innenseite eines festen mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises rolle ein beweglicher Kreis mit dem Radius b; irgend ein Peripheriepunkt des letzteren Kreises beschreibt dann eine Hypocycloide. Liegt der beschreibende Punkt nicht in der Entfernung b, sondern in der Entfernung c vom Mittelpunkte des beweglichen Kreises, so entsteht eine gedehnte oder verschlungene Hypocycloide, je nachdem $c < b$ oder $c > b$ ist. Aus der Figur erhält man leicht für $\angle NMP = \omega$

Fig. 29.



$$x = (a-b)\sin\frac{b\,\omega}{a} - c\sin\frac{(a-b)\,\omega}{a},$$

$$y = (a-b)\cos\frac{b\,\omega}{a} + c\cos\frac{(a-b)\,\omega}{a};$$

dieselben Gleichungen entstehen auch, wenn man in den für die Epicycloiden geltenden Formeln dem b die entgegengesetzte Lage und dem ω die entgegengesetzte Drehungsrichtung giebt, also b und ω zugleich negativ nimmt. Die Entwickelung der übrigen Formeln hat demnach keine Schwierigkeit.

In dem Falle $a < b$, wo sich der grössere Kreis um den kleineren herumschwingt, nennen Manche die Curve eine Pericycloide; die nicht erheblichen Modificationen, welche die Formeln dann erleiden, wird man ohne Mühe finden.