universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel V. Aufgaben über geometrische Orte

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel V.

Aufgaben über geometrische Orte.

§. 17.

Die Evoluten.

Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Curvenpunktes und ist ferner zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{d^2y}{dx^2}=y'',$$

so werden die rechtwinkligen Coordinaten ξ und η des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes durch folgende Formeln bestimmt

$$\xi=x-\frac{1+y'^2}{y''}y', \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Alle Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen eine Curve, den geometrischen Ort des Krümmungsmittelpunktes, welche bei ebenen Curven die Evolute der ursprünglichen Curve heisst; ihre Gleichung erhält man aus den Formeln für ξ und η, wenn man, unter Zuhülfenahme der zwischen x und y bestehenden ursprünglichen Curvengleichung, die Variabelen x und y eliminirt, so dass nur die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η übrig bleibt.

1. Die Parabel. Aus der Gleichung

$$y=\sqrt{2hx}$$

folgen die Werthe

$$\xi=3x+h, \quad \eta=-\sqrt{\frac{8x^3}{h}};$$

durch Elimination von x ergiebt sich als Gleichung der Evolute

$$\eta^2=\frac{8}{27}\frac{(\xi-h)^3}{h},$$

oder wenn der Coordinatenanfang im Sinne der positiven ξ um h verschoben wird,

$$\eta^2=\frac{8\xi^3}{27h}.$$

Die Evolute ist demnach eine sogenannte semicubische Parabel.

2. Die Ellipse. Stellt man die Ellipsengleichung in der gewöhnlichen Form dar

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

und setzt zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{a^2-b^2}{a},\quad \beta=\frac{a^2-b^2}{b},$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-1\right)^3+27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2=0.$$

3. Die Hyperbel. Aus der Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$\alpha=\frac{a^2+b^2}{a},\quad \beta=\frac{a^2+b^2}{b}$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

oder in rationaler Form

$$\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}-1\right)^3-27\left(\frac{\xi\eta}{\alpha\beta}\right)^2=0.$$

4. Die Cissoide. Die Gleichung dieser Curve, nämlich

$$(2a-x)y^2=x^3$$

liefert die Werthe

$$\xi=-\frac{ax(12a-5x)}{3(2a-x)^2},\quad \eta=\frac{8a}{3}\sqrt{\frac{x}{2a-x}};$$

entnimmt man x der zweiten Formel und substituirt den erhaltenen Ausdruck in die erste, so findet man als Gleichung der Evolute

$$4096a^3\xi+1152a^2\eta^2+27\eta^4=0.$$

5. Für die Curve, deren Gleichung ist

$$9ay^2=(x-3a)^2x,$$

gelten die Werthe

$$\xi=\frac{a^2+2ax-x^2}{2a},\quad \eta=\tfrac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

welche umgekehrt geben

$$x=a\pm\sqrt{2a(a-\xi)},\quad x=\sqrt[3]{\tfrac{9}{16}a\eta^2}.$$

Beachtet man nun, dass eine Gleichung von der Form

$$a\pm\sqrt{u}=\sqrt[3]{v}$$

nach Wegschaffung der Wurzelgrössen übergeht in

$$(u-a^2)^3+2a(3u+a^2)v-v^2=0,$$

so erhält man als Gleichung der Evolute

$$256a(a-2\xi)^3+288a(7a-6\xi)\eta^2-81\eta^4=0.$$

6. Die Cardioide lässt sich entweder durch die eine der beiden Gleichungen

$$(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2),$$
$$r=2a(1+\cos\theta)$$

oder auch durch die zwei Gleichungen

$$x=2a(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=2a(1+\cos\theta)\sin\theta$$

ausdrücken. Die letzteren geben

$$\xi=\tfrac{4}{3}a+\tfrac{2}{3}a(1-\cos\theta)\cos\theta,\quad \eta=\tfrac{2}{3}a(1-\cos\theta)\sin\theta,$$

oder, wenn

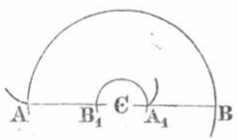
$$\theta=\pi-\theta_1,\quad \tfrac{4}{3}a-\xi=\xi_1,\quad \eta=\eta_1$$

gesetzt wird,

$$\xi_1=\tfrac{2}{3}a(1+\cos\theta_1)\cos\theta_1,\quad \eta_1=\tfrac{2}{3}a(1+\cos\theta_1)\sin\theta_1.$$

Die Gleichung der Evolute in rechtwinkligen Coordinaten würde man hieraus durch Elimination von θ_1 erhalten, man übersieht aber auch ohne diese Elimination, dass die Evolute der Cardioide wieder eine Cardioide ist. Der Radius ihres erzeugenden Kreises beträgt $\frac{1}{3}a$, ihr Anfangspunkt A_1 liegt in der Entfernung $AA_1=\frac{4}{3}a$ und die Drehungsrichtung der Evolute ist entgegengesetzt der Drehungsrichtung der gegebenen Cardioide (Fig. 30).

Fig. 30.



7. Die Lemniscate. Drückt man die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten aus, nämlich

$$r=a\sqrt{\cos 2\theta},$$

so hat man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mittelst folgender Formeln zu bestimmen

$$\xi = r\cos\theta - \frac{(r^2+r'^2)(r'\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+2r'^2-rr''},$$

$$\eta = r\sin\theta + \frac{(r^2+r'^2)(r'\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2+2r'^2-rr''};$$

man erhält

$$\xi = \frac{2a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \eta = -\frac{2a\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Als Gleichung der Evolute ergiebt sich hieraus durch Elimination von θ

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}}-\eta^{\frac{2}{3}}\right) = \tfrac{4}{9}a^2.$$

8. Die logarithmische Linie. Von der Gleichung

$$y = b\,e^{\frac{x}{a}}$$

ausgehend, erhält man

$$\xi = x - a - \frac{b^2}{a}e^{\frac{2x}{a}}, \quad \eta = 2b\,e^{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{b}e^{-\frac{x}{a}};$$

mittelst der zweiten Gleichung kann man $e^{\frac{x}{a}}$ und x durch η ausdrücken und nach Substitution dieser Werthe wird aus der ersten Gleichung

$$\xi = a\,l\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2-8a^2}}{4b}\right) - \frac{\eta\left(\eta \pm \sqrt{\eta^2-8a^2}\right)}{8a} - \tfrac{1}{2}a.$$

9. Die Kettenlinie. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

folgen die Werthe

$$\xi = x - \tfrac{1}{4}a\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right), \quad \eta = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welche geben

$$\xi = a\,l\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2-4a^2}}{2a}\right) \mp \frac{\eta\sqrt{\eta^2-4a^2}}{4a}.$$

10. Die Tractorie der Geraden. Mittelst der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}a\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right) - \sqrt{a^2-y^2}$$

erhält man die Werthe

$$\xi = \tfrac{1}{2}a\,l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}\right), \quad \eta = \frac{a^2}{y},$$

mithin durch Elimination von y

$$\xi=\tfrac{1}{2}a\,l\left(\frac{\eta+\sqrt{\eta^2-a^2}}{\eta-\sqrt{\eta^2-a^2}}\right)=a\,l\left(\frac{\eta+\sqrt{\eta^2-a^2}}{a}\right),$$

oder

$$\eta=\tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{\xi}{a}}+e^{-\frac{\xi}{a}}\right);$$

die Evolute ist also die Kettenlinie.

11. Die logarithmische Spirale. Die Gleichung

$$r=a\,e^{\beta\theta}$$

liefert, wenn ξ und η durch Polarcoordinaten ausgedrückt werden,

$$\xi=-a\beta e^{\beta\theta}\sin\theta,\quad \eta=a\beta e^{\beta\theta}\cos\theta.$$

Um auch die Gleichung der Evolute in Polarcoordinaten zu haben, sei

$$\xi=R\cos\tau,\quad \eta=R\sin\tau;$$

es ergiebt sich dann

$$R=a\beta e^{\beta(\tau-\frac{1}{2}\pi)};$$

wird noch $\tau=\omega+\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so folgt, dass die Evolute der logarithmischen Spirale wieder eine logarithmische Spirale ist, bei welcher $a\beta$ statt a eintritt.

12. Die Cycloiden. Für die gemeine Cycloide gelten die Gleichungen

$$x=b(\omega-\sin\omega),\quad y=b(1-\cos\omega),$$

aus welchen man erhält

$$\xi=b(\omega+\sin\omega),\quad \eta=-b(1-\cos\omega).$$

Verlegt man das Coordinatensystem, indem man

$$\xi=\pi b-\xi_1,\quad \eta=\eta_1-2b$$

und ausserdem $\omega=\pi-\omega_1$ setzt, so gelangt man zu den neuen Gleichungen

$$\xi_1=b(\omega_1-\sin\omega_1),\quad \eta_1=b(1-\cos\omega_1),$$

welche zeigen, dass die Evolute mit der ursprünglichen Cycloide identisch und nur der Lage nach von ihr verschieden ist.

Für die Epicycloide hat man

$$x=(a+b)\sin\frac{b\,\omega}{a}-b\sin\frac{(a+b)\,\omega}{a},$$

$$y=(a+b)\cos\frac{b\,\omega}{a}-b\cos\frac{(a+b)\,\omega}{a}$$

und erhält aus denselben

$$\xi = \frac{a(a+b)}{a+2b} \sin\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b} \sin\frac{(a+b)\omega}{a},$$
$$\eta = \frac{a(a+b)}{a+2b} \cos\frac{b\omega}{a} + \frac{ab}{a+2b} \cos\frac{(a+b)\omega}{a}.$$

Vertauscht man das Coordinatensystem der ξ, η mit einem anderen gleichfalls rechtwinkligen Systeme der ξ_1, η_1, welches denselben Anfang hat und dessen Abscissenachse mit der Achse der ξ den Winkel γ einschliesst, so hat man bekanntlich

$$\xi = \xi_1 \cos\gamma - \eta_1 \sin\gamma, \quad \eta = \xi_1 \sin\gamma + \eta_1 \cos\gamma$$

oder umgekehrt

$$\xi_1 = \eta \sin\gamma + \xi \cos\gamma, \quad \eta_1 = \eta \cos\gamma - \xi \sin\gamma,$$

mithin vermöge der Werthe von ξ und η

$$\xi_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \sin\left(\frac{b\omega}{a}+\gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \sin\left(\frac{(a+b)\omega}{a}+\gamma\right),$$
$$\eta_1 = \frac{a(a+b)}{a+2b} \cos\left(\frac{b\omega}{a}+\gamma\right) + \frac{ab}{a+2b} \cos\left(\frac{(a+b)\omega}{a}+\gamma\right).$$

Es sei noch

$$\gamma = -\pi\frac{b}{a}, \quad \omega = \pi + \omega_1,$$
$$\frac{a^2}{a+2b} = a_1, \quad \frac{ab}{a+2b} = b_1, \text{ also } \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1};$$

die vorigen Gleichungen werden dann

$$\xi_1 = (a_1+b_1) \sin\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \sin\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$
$$\eta_1 = (a_1+b_1) \cos\frac{b_1\omega_1}{a_1} - b_1 \cos\frac{(a_1+b_1)\omega_1}{a_1},$$

woraus hervorgeht, dass die Evolute einer Epicycloide immer eine Curve derselben Art ist, in welcher die Radien des festen und des rollenden Kreises in demselben Verhältnisse stehen, wie bei der ursprünglichen Curve.

Nimmt man z. B. die Radien a und b gleich, so ist die ursprüngliche Curve eine Cardioide, ebenso ist auch die Evolute eine Cardioide mit dem Radius $a_1 = b_1 = \frac{1}{3}a$ (vergl. Aufgabe 6).

Für die Hypocycloide gelten ganz ähnliche Formeln, aus denen der analoge Satz folgt, dass die Evolute eine mit den Radien

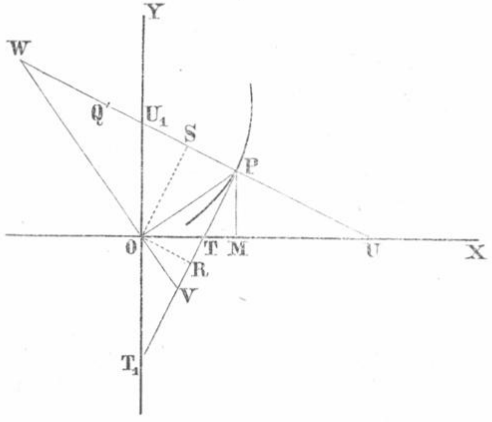
$$a_1 = \frac{a^2}{a-2b}, \quad b_1 = \frac{ab}{a-2b}$$

construirte Hypocycloide ist.

§. 18.

Die Endpunkte der Polartangenten und der Polarnormalen.

I. Bezeichnen u und v die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes V in Fig. 1, welcher der Endpunkt der Polartangente ist, so hat man



$$u=-\frac{y(y-xy')}{x+yy'}, \quad v=\frac{x(y-xy')}{x+yy'};$$

unter Zuhülfenahme der Gleichung der Curve kann man aus diesen Gleichungen x und y eliminiren, so dass nur eine Gleichung zwischen u und v übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Punktes V bestimmt.

1. Für die Ellipse ergeben sich, wenn man von der Mittelpunktsgleichung

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ausgeht, die Werthe

$$u=-\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)x}, \quad v=\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)y},$$

mithin durch Elimination von x und y

$$a^2u^2+b^2v^2=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}uv\right)^2.$$

Bei der Hyperbel gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

2. Nimmt man den Scheitel eines Kegelschnittes zum Coordinatenanfang und demgemäss

$$y=\sqrt{2hx+kx^2},$$

so erhält man

$$u=-\frac{hx}{h+(1+k)x},\quad v=\frac{hx^2}{[h+(1+k)x]y},$$

folglich

$$v^2=-\frac{u^3}{2h+(1+2k)u}.$$

Der Parabel entspricht hiernach eine Cissoide, einer aus den Halbachsen $a=b\sqrt{2}$ und b construirten Ellipse eine semicubische Parabel.

3. Ist ein Brennpunkt eines Kegelschnittes der Coordinatenanfang, mithin

$$y=\sqrt{h^2-2h\varepsilon x+(\varepsilon^2-1)x^2},$$

so wird

$$u=\frac{h}{\varepsilon},\quad v=-\frac{hx}{\varepsilon y}.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist dann eine Parallele zur Ordinatenachse und zwar die Directrix des Kegelschnittes.

4. Falls die Gleichung der ursprünglichen Curve in Polarcoordinaten gegeben ist, treten an die Stelle der vorigen allgemeinen Formeln für u und v die folgenden

$$u=\frac{r^2}{r'}\sin\theta,\quad v=-\frac{r^2}{r'}\cos\theta,$$

aus welchen dann unter Zuhülfenahme der Polargleichung der gegebenen Curve eine Gleichung zwischen u und v hergeleitet werden muss.

Für die reciproke parabolische Spirale hat man z. B.

$$r^2=\frac{a^2}{\theta},$$

$$u=-2a\sqrt{\theta}\,.\sin\theta,\quad v=+2a\sqrt{\theta}\,.\cos\theta$$
$$u^2+v^2=4a^2\theta,$$

woraus hervorgeht, dass die Endpunkte der Polartangenten in einer parabolischen Spirale liegen.

5. Die Gleichung

$$r=\frac{h}{\theta+\varepsilon\sin\theta}$$

charakterisirt eine Curve, von welcher die hyperbolische Spirale ein besonderer Fall ist; man erhält

$$u=-\frac{h\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},\quad v=+\frac{h\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},$$
$$u^2+v^2=\left(\frac{h}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)^2.$$

Der geometrische Ort des Endpunktes der Polartangente ist in diesem Falle ein Kegelschnitt, wovon ein Brennpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt, und dessen Hauptachse parallel der Ordinatenachse liegt.

II. Bezeichnen u und v die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunktes W der Polarnormale, so gelten die Formeln

$$u=\frac{y(x+yy')}{y-xy'},\quad v=-\frac{x(x+yy')}{y-xy'};$$

unter Zuziehung der Gleichung der Curve lassen sich x und y eliminiren, so dass eine Gleichung zwischen u und v übrig bleibt, welche den geometrischen Ort des Endpunktes der Polarnormale bestimmt.

6. Aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse folgen die Werthe

$$u=\frac{(a^2-b^2)xy^2}{a^2b^2},\quad v=-\frac{(a^2-b^2)x^2y}{a^2b^2},$$

welche geben

$$(a^2u^2+b^2v^2)^3=a^2b^2(a^2-b^2)^2u^2v^2.$$

Für die Hyperbel gestaltet sich die Gleichung ähnlich.

7. Legt man bei irgend einem Kegelschnitte den Coordinatenanfang in den Scheitel, so hat man

$$u=\frac{2h+kx}{k}[h+(1+k)x],$$

$$v=-\frac{\sqrt{2hx+kx^2}}{k}[h+(1+k)x].$$

Die Combination

$$\frac{u}{v}=-\sqrt{\frac{2h+kx}{x}}$$

dient hier, um x durch u und v auszudrücken; setzt man den so erhaltenen Werth in eine der vorhergehenden Gleichungen ein, so gelangt man zu dem Resultate

$$(u^2-kv^2)^2=2hu[u^2+(2+k)v^2].$$

8. Falls die ursprüngliche Curve auf Polarcoordinaten bezogen ist, hat man

$$u=-r'\sin\theta,\quad v=+r'\cos\theta,$$

woraus eine Gleichung zwischen u und v herzuleiten ist.

Bei der Cardioide, deren Gleichung

$$r=2a(1+\cos\theta)$$

sein möge, gelten die Werthe

$$u = 2a\sin^2\theta, \quad v = -2a\sin\theta\cos\theta,$$

welche geben

$$v^2 = 2au - u^2;$$

der geometrische Ort des Endpunktes der Polarnormale ist hier der Kreis, welcher zur Construction der Cardioide dient.

9. Für die transcendente Curve, deren Gleichung ist

$$r = a\tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes von W

$$u^2 + 2av = a^2;$$

letzterer ist also eine Parabel.

10. Für die Curve, deren Gleichung ist

$$r = a\cot\tfrac{1}{2}\theta$$

findet man

$$u = a, \quad v = -a\cot\theta;$$

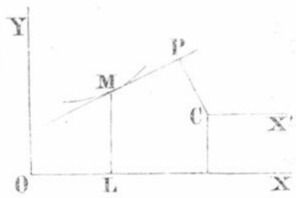
der gesuchte Ort besteht hier aus einer Parallelen zur Ordinatenachse.

§. 19.

Die Fusspunktcurven.

Lässt man von einem festen Punkte C (Fig. 31) Senkrechte auf alle Tangenten einer gegebenen Curve herab, so bilden die Fusspunkte P jener Perpendikel eine neue krumme Linie, deren Gleichung auf folgende Weise gefunden wird.

Fig. 31.



Bezeichnen g, h die rechtwinkligen Coordinaten des sogenannten Poles C, x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der gegebenen Curve, u und v die Coordinaten des entsprechenden Fusspunktes P, so gelten für letztere die Gleichungen

$$v - y = y'(u - x), \quad v - h = -\frac{1}{y'}(u - g),$$

woraus z. B. folgt

$$u-g=\frac{(x-g)\,y'^2-(y-h)\,y'}{1+y'^2},$$

$$v-h=-\frac{(x-g)\,y'-(y-h)}{1+y'^2}.$$

Unter Zuhülfenahme der zwischen x und y bestehenden Gleichung lassen sich aus irgend zweien der obigen vier Gleichungen x und y eliminiren; die übrig bleibende Gleichung zwischen u und v bestimmt die Natur der Fusspunktcurve.

1. Die Parabel. Von der Gleichung ausgehend

$$y^2=4ax$$

kann man die zwei ersten Gleichungen zwischen u und v folgendermassen darstellen

$$yv=2au+\tfrac{1}{2}y^2,\quad 2a(v-h)=-y(u-g);$$

man erhält dann durch Elimination von y

$$u(u-g)^2+(u-g)(v-h)v+a(v-h)^2=0.$$

Wird der Brennpunkt zum Pol genommen, so ergiebt sich einfach $u=0$, d. h. die Scheiteltangente ist dann die Fusspunktlinie; im Fall der Parabelscheitel zum Pol genommen wird, geht die Fusspunktcurve in eine Cissoide über.

2. Ellipse und Hyperbel. Die Gleichung der Ellipse sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1;$$

die beiden ersten Gleichungen zwischen u und v lauten dann

$$b^2ux+a^2vy=a^2b^2,\quad b^2(v-h)x-a^2(u-g)y=0.$$

Bestimmt man hieraus x und y, und setzt die gefundenen Ausdrücke in die Ellipsengleichung, so erhält man

$$[u(u-g)+v(v-h)]^2=a^2(u-g)^2+b^2(v-h)^2.$$

Diese Gleichung der Fusspunktcurve lässt sich etwas einfacher darstellen, wenn der Pol C zum Anfang eines Polarcoordinatensystems genommen wird, dessen Achse CX' parallel zur x-Achse liegt und worin die Senkrechte $CP=p$ der Radiusvector und $\angle PCX'=\chi$ der Polarwinkel ist; es ergiebt sich

$$(p+g\cos\chi+h\sin\chi)^2=a^2\cos^2\chi+b^2\sin^2\chi.$$

Nimmt man einen Brennpunkt der Ellipse zum Pol, so wird die Fusspunktcurve ein Kreis; liegt der Pol im Ellipsenmittelpunkte, so entsteht die auf Seite 74 Aufg. 13 betrachtete Curve. Für $b=a$, $g=-a$, $h=0$ geht die Fusspunktcurve in eine Cardioide über.

Um die entsprechenden Formeln für die Hyperbel zu erhalten, bedarf es nur der Vertauschung von b^2 gegen $-b^2$. In dem speciellen Falle, wo die Hyperbel eine gleichseitige ist und ihr Mittelpunkt zum Pol genommen wird, ergiebt sich

$$p^2 = a^2 \cos 2\chi;$$

die Fusspunktcurve ist dann eine Lemniscate.

3. Die semicubische Parabel. Die Gleichung der Curve sei

$$y = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

ferner $g = -\frac{1}{3}a$, $h = 0$; für u und v gelten dann die Gleichungen

$$v = (u - \tfrac{1}{3}x)\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad v = -(u + \tfrac{1}{3}a)\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Substituirt man den Werth von x aus der zweiten Gleichung in das Product beider Gleichungen, so erhält man

$$v^4 + u(u + \tfrac{1}{3}a)v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)^3 = 0,$$

oder

$$[v^2 + (u + \tfrac{1}{3}a)^2][v^2 - \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)] = 0;$$

der erste Factor kann nur für einen isolirten Punkt verschwinden, die Fusspunktcurve hat daher zur Gleichung

$$v^2 = \tfrac{1}{3}a(u + \tfrac{1}{3}a)$$

und ist demgemäss eine Parabel.

4. Die ursprüngliche Curve sei bestimmt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\,a^2 x^2 y^2 = 0;$$

um Weitläufigkeiten zu entgehen, ersetze man diese Gleichung durch die beiden Gleichungen (Seite 71 Aufg. 10)

$$x = a\cos^3\omega, \quad y = a\sin^3\omega,$$

drücke dem entsprechend u und v durch ω aus und eliminire schliesslich ω. Wegen $y' = -\tan\omega$ gehen die Gleichungen für u und v in die folgenden über

$$u\sin\omega + v\cos\omega = a\sin\omega\cos\omega, \quad v - h = (u - g)\cot\omega,$$

aus denen sich ergiebt

$$u(u - g) + v(v - h) = \frac{a(u - g)(v - h)}{\sqrt{(u - g)^2 + (v - h)^2}},$$

oder in Polarcoordinaten, welche ebenso, wie bei der vorigen Aufgabe zu wählen sind,

$$p = a\cos\chi\sin\chi - (g\cos\chi + h\sin\chi).$$

5. Am einfachsten gestalten sich die Formeln, wenn man gleich anfangs den Pol zum Anfangspunkte von Polarcoordinaten wählt und demgemäss substituirt

$$g=0, \quad h=0,$$
$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad u=p\cos\chi, \quad v=p\sin\chi;$$

die allgemeinen Gleichungen gehen dann über in

$$[r\cos(\theta-\chi)+r'\sin(\theta-\chi)]\,p=r^2, \quad r'=r\tan(\theta-\chi)$$

oder, wenn man r' aus der zweiten Gleichung in die erste substituirt,

$$p=r\cos(\theta-\chi), \quad r'=r\tan(\theta-\chi),$$

wie man auch direct mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung findet.

Als Beispiel mögen die Curven dienen, welche durch die Gleichung

$$r^m=a^m\cos m\theta$$

repräsentirt werden und zu denen u. A. die gleichseitige Hyperbel ($m=-2$), die Parabel ($m=-\frac{1}{2}$), die Cardioide ($m=+\frac{1}{2}$), der Kreis ($m=+1$) und die Lemniscate ($m=+2$) gehören. Die allgemeinen Gleichungen sind hier

$$p=a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}}\cos(\theta-\chi), \quad \tan m\theta=\tan(\chi-\theta);$$

aus der letzten Gleichung folgt $\theta=\frac{\chi}{m+1}$ und nachher aus der ersten

$$p^n=a^n\cos n\chi, \quad n=\frac{m}{m+1}.$$

Die Fusspunktcurve ist hier von derselben Gattung, wie die ursprüngliche Curve; der gleichseitigen Hyperbel z. B. entspricht die Lemniscate.

6. Die logarithmische Spirale. Aus der Gleichung

$$r=ae^{\beta\theta}$$

erhält man

$$p=ae^{\beta\theta}\cos(\theta-\chi), \quad \beta=\tan(\theta-\chi),$$

mithin durch Substitution von θ aus der zweiten Gleichung in die erste

$$p=a_1e^{\beta\chi}, \quad a_1=\frac{a}{\sqrt{1+\beta^2}}e^{\beta\arctan\beta};$$

die Fusspunktcurve ist also wieder eine logarithmische Spirale.

7. Die Kreisevolvente. Wenn die Curve durch die beiden Gleichungen

$$r=a\sqrt{1+\omega^2}, \quad \theta=\omega-\arctan\omega$$

repräsentirt wird, so hat man

$$p = a\sqrt{1+\omega^2}\,.\,cos(\theta-\chi),\quad tan(\theta-\chi)=\frac{1}{\omega};$$

die letztere Gleichung giebt einerseits

$$cos(\theta-\chi)=\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

andererseits

$$\theta-\chi=arctan\frac{1}{\omega}$$

oder

$$\omega-arctan\,\omega-\chi=\tfrac{1}{2}\pi-arctan\,\omega,\quad \omega=\tfrac{1}{2}\pi+\chi,$$

mithin ist nach Substitution der Werthe von $cos(\theta-\chi)$ und ω

$$p=a(\tfrac{1}{2}\pi+\chi).$$

Die Fusspunktcurve ist also einerlei mit der Spirale des Archimedes.