universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel VI. Die Discussion doppelt gekrümmter Curven

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel VI.

Die Discussion doppelt gekrümmter Curven.

§. 20.

Allgemeine Regeln und Formeln.

Wenn die gegebene Curve auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z bezogen ist, so gilt für das Bogenelement ds die Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

im Fall die Curve durch ihre Projection auf die Horizontalebene xy und die Verticalebene xz, mithin durch zwei Gleichungen von den Formen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ bestimmt ist, hat man statt der obigen Formel zu schreiben

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \,.\, dx.$$

Die Winkel τ_x, τ_y, τ_z, welche die Tangente im Punkte xyz mit den Coordinatenachsen bildet, bestimmen sich durch die Formeln

$$\cos \tau_x = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos \tau_y = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos \tau_z = \frac{dz}{ds} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\frac{\xi - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{ds}},$$

oder

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \zeta - z = z'(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\frac{dx}{ds}(\xi-x)+\frac{dy}{ds}(\eta-y)+\frac{dz}{ds}(\zeta-z)=0,$$

oder

$$\xi-x+y'(\eta-y)+z'(\zeta-z)=0.$$

Um den Krümmungshalbmesser und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes zu finden, berechnet man zuerst die drei Grössen

$$\begin{aligned} X&=dy\,d^2z-d^2y\,dz,\\ Y&=dz\,d^2x-d^2z\,dx,\\ Z&=dx\,d^2y-d^2x\,dy; \end{aligned}$$

die Gleichung der Krümmungsebene ist dann

$$X(\xi-x)+Y(\eta-y)+Z(\zeta-z)=0,$$

ferner gelten für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Formeln

$$\begin{aligned} \xi-x&=\frac{Y\,dz-Z\,dy}{X^2+Y^2+Z^2}\,ds^2,\\ \eta-y&=\frac{Z\,dx-X\,dz}{X^2+Y^2+Z^2}\,ds^2,\\ \zeta-z&=\frac{X\,dy-Y\,dx}{X^2+Y^2+Z^2}\,ds^2, \end{aligned}$$

und der Krümmungsradius ist

$$\varrho=\frac{ds^3}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Statt dieser Formeln kann auch geschrieben werden

$$\varrho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

$$\xi-x=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\quad \eta-y=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\quad \zeta-z=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Nimmt man x als unabhängige Variabele, so hat man als Gleichung der Krümmungsebene

$$(y'z''-y''z')(\xi-x)-z''(\eta-y)+y''(\zeta-z)=0,$$

oder

$$\left(\frac{y'}{y''}-\frac{z'}{z''}\right)(\xi-x)-\frac{1}{y''}(\eta-y)+\frac{1}{z''}(\zeta-z)=0;$$

der Krümmungshalbmesser wird

$$\varrho=\sqrt{\left\{\frac{(1+y'^2+z'^2)^3}{(y'z''-y''z')^2+y''^2+z''^2}\right\}}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi-x=-\varrho^2\frac{y'y''+z'z''}{(1+y'^2+z'^2)^2},$$
$$\eta-y=\varrho^2\frac{y''-(y'z''-y''z')z'}{(1+y'^2+z'^2)^2},$$
$$\zeta-z=\varrho^2\frac{z''+(y'z''-y''z')y'}{(1+y'^2+z'^2)^2}.$$

In den Fällen, wo sich x, y, z durch die unabhängige Variabele s ausdrücken lassen, ist

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

$$\xi-x=\varrho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad \eta-y=\varrho^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad \zeta-z=\varrho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Um den Halbmesser der zweiten Krümmung, den sogenannten Torsionsradius zu bestimmen, berechnet man zuerst die Grösse

$$S=(d^2x\,d^3y-d^3x\,d^2y)\,dz+(d^2z\,d^3x-d^3z\,d^2x)\,dy$$
$$+(d^2y\,d^3z-d^3y\,d^2z)\,dx;$$

es ist dann

$$\varrho_1=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{S}=\frac{ds^6}{\varrho^2 S}.$$

Wird x als unabhängige Variabele angesehen, so ist einfacher

$$\varrho_1=\frac{1}{\varrho^2(y''z'''-y'''z'')}.$$

Im Fall bei jedem x die Gleichung $S=0$ stattfindet, liegt die Curve in einer Ebene, welche mit der Krümmungsebene identisch ist.

Zwei durch die Punkte xyz und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ gelegte Normalebenen schneiden sich in einer Geraden, welche durch die Gleichungen beider Ebenen, nämlich

$$(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz=0,$$
$$(\xi-x)\,d^2x+(\eta-y)\,d^2y+(\zeta-z)\,d^2z=ds^2$$

bestimmt ist. Alle diese Geraden bilden stetig auf einander folgend eine Regelfläche, die sogenannte Evolutenfläche; ihre Gleichung ergiebt sich dadurch, dass man x aus den vorstehenden Gleichungen eliminirt.

§. 21.

Beispiele.

1. Durchschnitt zweier parabolischen Cylinder. Die Gleichungen der beiden Cylinder mögen sein

$$y=\frac{x^2}{2a},\quad z=\frac{x^3}{6a^2};$$

es ergeben sich dann folgende Werthe

$$\cos\tau_x=\frac{2a^2}{2a^2+x^2},\quad \cos\tau_y=\frac{2ax}{2a^2+x^2},\quad \cos\tau_z=\frac{x^2}{2a^2+x^2}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta=\frac{x}{a}\xi-\frac{x^2}{2a},\quad \zeta=\frac{x^2}{2a^2}\xi-\frac{x^3}{3a^2}.$$

Die Punkte, in welchen die Tangente die Coordinatenebenen schneidet, d. h. die Spuren der Tangente, bestimmen sich hiernach durch folgende Formeln

$$\xi_1=\tfrac{2}{3}x,\quad \eta_1=\tfrac{1}{6}\frac{x^2}{a},\qquad \zeta_1=0,$$

$$\xi_2=\tfrac{1}{2}x,\quad \eta_2=0,\qquad \zeta_2=-\tfrac{1}{12}\frac{x^3}{a^2},$$

$$\xi_3=0,\quad \eta_3=-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a},\quad \zeta_3=-\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^2};$$

lässt man den Punkt xyz auf der Curve im Raume fortrücken, so beschreibt die erste Tangentenspur eine Parabel zweiten Grades, die zweite eine Parabel dritten Grades, die dritte eine semicubische Parabel.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$2a^2\xi+2ax\eta+x^2\zeta=\frac{x(12a^4+6a^2x^2+x^4)}{6a^2},$$

woraus u. A. die Gleichungen der Spuren dieser Ebene hergeleitet werden können.

Ferner ist

$$\varrho=\frac{(2a^2+x^2)^2}{4a^3}=a\sec^2\tau_x$$

und für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes hat man

$$\xi=-\frac{x^3}{2a^2},\quad \eta=\frac{4a^4+2a^2x^2-x^4}{4a^3},\quad \zeta=\frac{x(3a^2+2x^2)}{3a^2}.$$

Bildet man hieraus durch Elimination von x zwei Gleichungen zwischen ξ, η, ζ, so bestimmen diese Gleichungen den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Für den Halbmesser der zweiten Krümmung ergiebt sich

$$\varrho_1=\frac{a^3}{\varrho^2}.$$

2. Durchschnitt eines Kreiscylinders und einer Kugel. Die Gleichungen beider Flächen mögen sein

$$y^2=x(a-x),\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$$

so dass der Durchmesser des Cylinders dem Halbmesser der Kugel gleichkommt; es sind dann

$$y=\sqrt{x(a-x)},\quad z=\sqrt{a(a-x)}$$

die Gleichungen des Durchschnittes beider Flächen. Hieraus folgen die Werthe

$$\cos\tau_x=2\sqrt{\frac{x(a-x)}{a(a+x)}},\quad \cos\tau_y=\frac{a-2x}{\sqrt{a(a+x)}},\quad \cos\tau_z=-\sqrt{\frac{x}{a+x}};$$

die Gleichungen der Tangente sind

$$\eta=\frac{(a-2x)\xi+ax}{2\sqrt{x(a-x)}},\quad \zeta=-\frac{\sqrt{a}\,[\xi-(2a-x)]}{2\sqrt{a-x}};$$

ferner ist die Gleichung der Normalebene

$$2y\xi+(a-2x)\eta-\sqrt{ax}\,.\,\zeta=0.$$

Für den Halbmesser der ersten Krümmung findet man

$$\varrho=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+x)^3}{5a+3x}}$$

und für den der zweiten

$$\varrho_1=\frac{32}{3}\cdot\frac{x^2(a-x)^3}{a^2\varrho^2}\sqrt{\frac{x}{a}}=\frac{32}{3}\cdot\frac{y^5z}{a^3\varrho^2}.$$

Die Gleichungen zweier auf einander folgenden Normalebenen sind

$$2\sqrt{x(a-x)}\,.\,\xi+(a-2x)\eta=\sqrt{ax}\,.\,\zeta$$
$$(a-2x)\xi-2\sqrt{x(a-x)}\,.\,\eta=\tfrac{1}{2}\sqrt{a(a-x)}\,.\,\zeta.$$

Quadrirt und addirt man dieselben, so erhält man

$$a(4\xi^2+4\eta^2-\zeta^2)=3\zeta^2x;$$

eliminirt man dagegen ξ aus beiden vorigen Gleichungen, so bleibt

$$a^2\eta = -x\sqrt{ax}\,.\,\zeta \text{ oder } a^3\eta^2 = \zeta^2 x^3;$$

endlich giebt die Elimination von x aus den letzten Gleichungen

$$[4(\xi^2+\eta^2)-\zeta^2]^3 - 27\eta^2\zeta^4 = 0.$$

Hierdurch bestimmt sich die Evolutenfläche, welche im vorliegenden Falle eine Kegelfläche ist.

3. Durchschnitt eines hyperbolischen und eines Kettencylinders. Die Gleichungen der beiden Flächen mögen sein

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

und zur Abkürzung werde die numerische Excentricität der Hyperbel mit ε bezeichnet; es gelten dann die Formeln

$$\cos\tau_x = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\varepsilon x}, \quad \cos\tau_y = \frac{b}{a\varepsilon}, \quad \cos\tau_z = \frac{a}{\varepsilon x},$$

von denen namentlich die zweite bemerkenswerth ist.

Die Gleichungen der Tangente lauten

$$\eta - y = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}(\xi - x);$$

die Normalebene ist durch die Gleichung bestimmt

$$a\sqrt{x^2-a^2}\,(\xi - x) + bx(\eta - y) + a^2(\zeta - z) = 0,$$

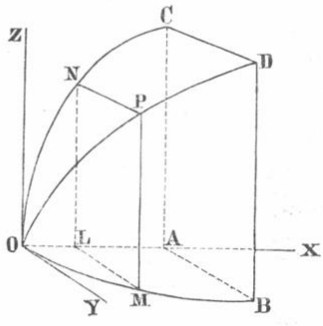
und schneidet die xz-Ebene immer unter demselben Winkel.

Für die beiden Krümmungsradien erhält man

$$\varrho = \frac{\varepsilon^2 x^2}{a}, \quad \varrho_1 = \frac{(x^2-a^2)^3}{b\varepsilon^4 x^4}.$$

4. Durchschnitt eines parabolischen und eines cycloidischen Cylinders. In der Horizontalebene xy (Fig. 32) sei eine Parabel als Directrix eines vertical stehenden Cylinders durch die Gleichung

Fig. 32.



$$y = 2\sqrt{ax}$$

bestimmt, in der Verticalebene xz sei eine Cycloide ONC als Directrix eines horizontalen Cylinders genommen, dabei AC die halbe Basis, O der Scheitel der Cycloide, OA der Durchmesser des rollenden Kreises $= b$, so dass die Gleichungen

$$x=\tfrac{1}{2}b(1+\cos\omega),\quad z=\tfrac{1}{2}b(\pi-\omega+\sin\omega)$$

oder für $\omega=\pi-\psi$

$$x=\tfrac{1}{2}b(1-\cos\psi),\quad z=\tfrac{1}{2}b(\psi+\sin\psi)$$

stattfinden, welche man zu der einen Gleichung

$$z=\tfrac{1}{2}b\arccos\frac{b-2x}{b}+\sqrt{bx-x^2}$$

zusammenziehen kann. Aus den beiden Gleichungen ergeben sich folgende Werthe

$$\cos\tau_x=\sqrt{\frac{x}{a+b}},\quad \cos\tau_y=\sqrt{\frac{a}{a+b}},\quad \cos\tau_z=\sqrt{\frac{b-x}{a+b}},$$

von denen namentlich der zweite bemerkenswerth ist.

Als Gleichungen der Tangente hat man

$$\eta-y=\sqrt{\frac{a}{x}}(\xi-x),\quad \zeta-z=\sqrt{\frac{b-x}{x}}(\xi-x);$$

die Normalebene bestimmt sich durch die Gleichung

$$\sqrt{x}(\xi-x)+\sqrt{a}(\eta-y)+\sqrt{b-x}(\zeta-z)=0$$

und schneidet die xz-Ebene immer unter demselben Winkel.

Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man

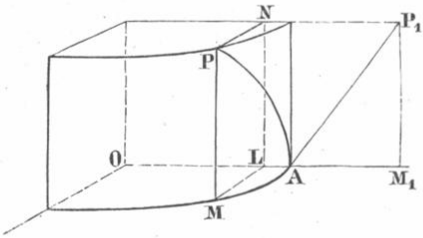
$$\varrho=2(a+b)\sqrt{\frac{b-x}{b}},\quad \varrho_1=\frac{2x^3}{(a+b)^2}\sqrt{\frac{b-x}{a}}.$$

5. Die Schraubenlinie (Fig. 33). Bezeichnet $OA=a$ den Radius des Cylinders, auf welchem die Schraubenlinie liegt, β den Steigungswinkel M_1AP_1 und ist ferner $OL=x$, $LM=y$, $MP=z$, $\angle AOM=\omega$, so gelten bekanntlich folgende Gleichungen

$$x=a\cos\omega,\quad y=a\sin\omega,$$
$$z=a\,\omega\tan\beta;$$

dabei lässt sich $a\tan\beta$ durch $\frac{h}{2\pi}$ ersetzen, wenn h die Höhe eines Schraubenganges bedeutet; zur Abkürzung sei noch

Fig. 33.



$$a\tan\beta=\frac{h}{2\pi}=b,\ \text{mithin}\ z=b\,\omega.$$

Man findet zunächst

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,.\,d\omega,$$

was auch aus der Entstehung der Schraubenlinie unmittelbar hervorgeht, ferner

$$\cos\tau_x = -\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_y = \frac{x}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\tau_z = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Die Verticalprojectionen der Tangente haben folgende Gleichungen

$$\xi - x = -\frac{y}{b}(\zeta - z), \quad \eta - y = +\frac{x}{b}(\zeta - z),$$

welche zu einer einfachen Tangentenconstruction führen. Die Normalebene bestimmt sich durch die Gleichung

$$-y\xi + x\eta + b\zeta = bz;$$

sie bildet mit der Horizontalebene immer denselben Neigungswinkel.

Der Halbmesser der ersten Krümmung ist constant, nämlich

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a};$$

die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = -\frac{b^2}{a}\cos\omega, \quad \eta = -\frac{b^2}{a}\sin\omega, \quad \zeta = b\omega,$$

und hier erkennt man augenblicklich, dass alle Krümmungsmittelpunkte wiederum auf einer Schraubenlinie liegen, welche die nämliche Achse und dieselbe Steigung wie die ursprüngliche Schraubenlinie besitzt, aber auf einem mit dem Radius $\frac{b^2}{a}$ construirten Cylinder liegt.

Der Radius der zweiten Krümmung ist gleichfalls constant, nämlich

$$\varrho_1 = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

Die Normalebenen durch zwei aufeinander folgende, den Winkeln ω und $\omega + d\omega$ entsprechende Punkte haben die Gleichungen

$$a\xi\sin\omega - a\eta\cos\omega = b\zeta - b^2\omega,$$
$$a\xi\cos\omega + a\eta\sin\omega = -b^2;$$

quadrirt und addirt man und setzt zur Abkürzung

$$\frac{b^2}{a} = a\tan^2\beta = c, \quad \frac{b}{a} = \tan\beta = \varkappa,$$

so erhält man

$$\omega = \frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2+\eta^2-c^2}}{c}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung

$$\xi\cos\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2+\eta^2-c^2}}{c}\right) + \eta\sin\left(\frac{\varkappa\zeta \pm \sqrt{\xi^2+\eta^2-c^2}}{c}\right) + c = 0;$$

dies ist die Gleichung der Evolutenfläche.

6. Die conische Schraubenlinie ist der Durchschnitt eines Rotationskegels und einer um dieselbe Achse beschriebenen Schraubenfläche; nimmt man die gemeinschaftliche Achse beider Flächen zur z-Achse, so hat man für x, y, z die beiden Gleichungen

$$x^2+y^2=z^2 \tan^2\gamma, \quad \frac{y}{x}=\tan\frac{z}{c},$$

oder wenn $\frac{z}{c}=\omega$, $c\tan\gamma=b$ gesetzt wird,

$$x=b\,\omega\cos\omega, \quad y=b\,\omega\sin\omega, \quad z=c\,\omega,$$

woraus u. A. folgt, dass die Horizontalprojection der conischen Schraubenlinie eine archimedische Spirale ist.

Zur Abkürzung sei $b^2+c^2=a^2$; man erhält dann

$$\cos\tau_x=\frac{b(\cos\omega-\omega\sin\omega)}{\sqrt{a^2+b^2\omega^2}}=\frac{c(cx-yz)}{z\sqrt{a^2c^2+b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_y=\frac{b(\sin\omega+\omega\cos\omega)}{\sqrt{a^2+b^2\omega^2}}=\frac{c(cy+xz)}{z\sqrt{a^2c^2+b^2z^2}},$$

$$\cos\tau_z=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2\omega^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{a^2c^2+b^2z^2}},$$

ferner als Gleichungen der Tangente

$$cz\xi=(cx-yz)\zeta+yz^2, \quad cz\eta=(cy+xz)\zeta-xz^2,$$

woraus z. B. folgt, dass die Horizontalspur der Tangente eine Spirale beschreibt, deren Vectoren proportional den Quadraten der Polarwinkel wachsen.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$c(cx-yz)\xi+c(cy+xz)\eta+c^3\zeta=a^2z^2.$$

Für die beiden Krümmungshalbmesser findet man

$$\varrho=\frac{\sqrt{(a^2c^2+b^2z^2)^3}}{bc\sqrt{4a^2c^4+(4b^2+c^2)c^2z^2+b^2z^4}},$$

$$\varrho_1=\frac{4a^2c^4+(4b^2+c^2)c^2z^2+b^2z^4}{c^3(6c^2+z^2)}.$$