

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel VIII. Einhüllende Curven und Flächen

Capitel VIII.

Einhüllende Curven und Flächen.

§. 25.

Einhüllende Curven.

Die Gleichung einer ebenen Curve enthalte ausser den Coordinaten x und y noch eine willkürliche Constante p (einen sogenannten Parameter), sie sei demgemäss

$$F(x, y, p) = 0.$$

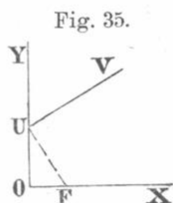
Lässt man p sich stetig ändern, so entsteht eine Schaar von Curven derselben Art, die sich aber in ihren Dimensionen, Gestalten oder Lagen von einander unterscheiden. Dabei kann es geschehen, dass jede solche Curve die nächste schneidet, und dann bilden die successiven Durchschnitte eine neue Curve, die sogenannte Einhüllende jener Schaar. Die Gleichung der Einhüllenden ergibt sich dadurch, dass man aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

den veränderlichen Parameter p eliminirt.

Beispiel 1. Ein rechter Winkel bewege sich so, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel an einer festen Geraden hingleitet; man sucht die Einhüllende des andern Schenkels (Fig. 35).

Nimmt man die feste Gerade zur Ordinatenachse, legt zu dieser senkrecht die Abscissenachse durch den festen Punkt F , wählt auf der y -Achse die Strecke $OU = u$ willkürlich und zieht $UV \perp FU$, so ist FUV irgend eine Lage des rechten Winkels; die Gleichung von UV lautet für $OF = a$



$$y = \frac{a}{u} x + u,$$

und darin bedeutet u die willkürliche Constante (oben p). Die partielle Differentiation in Beziehung auf u giebt

$$0 = -\frac{a}{u^2} x + 1$$

und durch Elimination von u entsteht

$$y^2 = 4ax.$$

Die Einhüllende ist hiernach eine Parabel. (Vergl. S. 103, Aufg. 1.)

Beispiel 2. Ein rechter Winkel werde so verschoben, dass der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht und der Scheitel einen gegebenen Kreis durchläuft; man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Der Mittelpunkt des Kreises sei der Coordinatenanfang O , seine Verbindungslinie mit dem festen Punkte F die x -Achse, der Kreisradius $= a$, $OF = c$; die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Kreise mögen u und v heissen; die Gleichung des zweiten Winkelschenkels ist dann

$$v(y - v) = (c - u)(x - u),$$

wobei u und v an die Bedingung

$$u^2 + v^2 = a^2$$

gebunden sind. Differenzirt man die Gleichung der vorigen Geraden nach u und beachtet, dass zufolge der letzten Bedingung v abhängig von u und deshalb $\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{u}{v}$ ist, so erhält man

$$(y - 2v) \left(-\frac{u}{v} \right) = -(c + x) + 2u.$$

Endlich giebt die Elimination von u und v aus allen drei Gleichungen

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

die Einhüllende ist also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. (Vergl. S. 103, Aufg. 2.)

Beispiel 3. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch den Scheitel einer Parabel geht, während der Scheitel des Winkels auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Für den zweiten Schenkel gilt die Gleichung

$$v(y - v) = -u(x - u),$$

wobei u und v an die Bedingung

$$v^2 = 4au$$

gebunden sind. Wegen $\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{2a}{v}$ erhält man durch Differentiation der ersten Gleichung

$$(y-2v)\frac{2a}{v} = -x+2u.$$

Eliminirt man u das eine Mal aus der ersten und zweiten, das andere Mal aus der dritten und zweiten Gleichung, so erhält man

$$16a^2y + 4a(x-4a)v - v^3 = 0,$$

$$4a^2y + 2a(x-4a)v - v^3 = 0;$$

die Differenz beider Gleichungen giebt

$$v = -\frac{6ay}{x-4a},$$

und wenn man diesen Werth in eine der beiden vorhergehenden Gleichungen einsetzt, so gelangt man zu der Gleichung der Einhüllenden, nämlich

$$27ay^2 = (x-4a)^3.$$

Die gesuchte Curve ist demnach eine semicubische Parabel.

Beispiel 4. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dass der eine Schenkel durch den Brennpunkt einer gegebenen Parabel geht, während der Scheitel auf derselben Parabel fortrückt; man sucht die Einhüllende des andern Schenkels.

Die Gleichung des letzteren Schenkels ist

$$v(y-v) = (a-u)(x-u),$$

wobei u und v der Bedingung

$$v^2 = 4au$$

genügen müssen. Durch ein dem vorigen sehr ähnliches Verfahren erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$27ay^2 = x(x-9a)^2;$$

letztere ist identisch mit der in §. 15, Aufgabe 5 untersuchten Curve.

Beispiel 5 (Fig. 36). Auf der einen Seite AB eines gegebenen Dreiecks ABC wählt man den Punkt P beliebig, legt durch denselben $PQ \parallel BC$, $PR \parallel AC$ und zieht die Gerade QR ; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

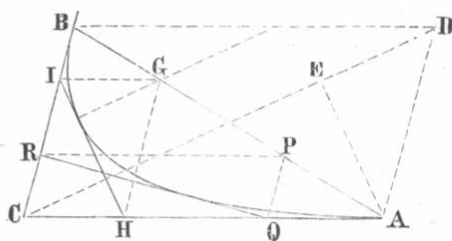
Nimmt man CA und CB als Coordinatenachsen und setzt $CA=a$, $CB=b$, $CQ=u$, $CR=v$, so ist die Gleichung der Geraden QR

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei u und v der Bedingung

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1$$

Fig. 36.



genügen müssen. Die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2 = 1$$

und ist eine Parabel, welche die Coordinatenachsen in A und B berührt. Um die Achse dieser Parabel zu finden,

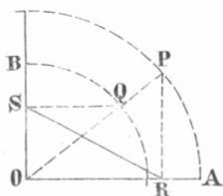
construirt man aus den Seiten CA , CB das Parallelogramm $ACBD$, fälle auf dessen Diagonale CD von A aus die Senkrechte AE und wähle auf AB den Punkt G so, dass

$$AG : BG = CE : DE;$$

dann ist G ein Punkt der Parabelachse und die zu G gehörende Gerade $HI \parallel AE$ die Scheiteltangente.

Beispiel 6 (Fig. 37). Mit den Radien $OA = a$ und $OB = b$ sind zwei concentrische Kreise beschrieben und es sei $OB \perp OA$; irgend eine durch O gelegte Gerade schneidet den ersten Kreis in P , den zweiten in Q ; man projecirt ferner P auf OA , Q auf OB , wodurch die Punkte R und S entstehen und zieht die Gerade RS ; welches ist die Einhüllende aller dieser Geraden?

Fig. 37.



Für $OR = u$, $OS = v$ hat man als Gleichung von RS

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei u und v der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Bequemer ist es hier, den Winkel $AOP = \omega$ einzuführen, wodurch $u = a \cos \omega$, $v = b \sin \omega$ wird, und in der nunmehrigen Gleichung von RS nämlich

$$\frac{x}{a \cos \omega} + \frac{y}{b \sin \omega} = 1$$

den Winkel ω als willkürliche Constante zu betrachten. Differenziert man die Gleichung in Beziehung auf ω und eliminirt nachher ω , so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Im Falle $b=a$ hat die Linie RS die constante Länge a und es entsteht dann die in §. 15, Aufgabe 10 betrachtete Curve; im Falle $b < a$ ist die Einhüllende identisch mit der Evolute einer aus den Halbachsen

$$\frac{a^2 b}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad \frac{a b^2}{a^2 - b^2}$$

construirten Ellipse.

Beispiel 7. Eine Gerade bewege sich so, dass das Rechteck aus den Strecken, welche sie von den Coordinatenachsen abschneidet, die constante Fläche c^2 besitzt; man sucht die Einhüllende jener Geraden.

Nennt man u und v die erwähnten Abschnitte, so ist die Gleichung der beweglichen Geraden

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1,$$

wobei u und v an die Bedingung

$$uv = c^2$$

gebunden sind. Als Einhüllende ergibt sich eine Hyperbel, welche durch die Gleichung

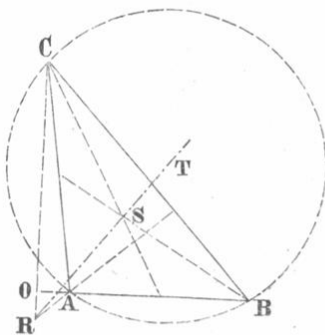
$$xy = \frac{1}{4} c^2$$

bestimmt ist.

Beispiel 8. In jedem Dreiecke ABC (Fig. 38) liegen bekanntlich der Höhendurchschnitt R , der Durchschnitt S der Mittellinien (der Schwerpunkt der Dreiecksfläche) und der Mittelpunkt T des umschriebenen Kreises in einer Geraden; lässt man die Spitze C in einer zur Basis AB senkrechten Geraden fortrücken, so ändert die Gerade RST ihre Lage, und es fragt sich, welches die Einhüllende von RST ist.

Die Basis AB sei die Abscissenachse, die zugehörige Höhe OC die

Fig. 38.



Ordinatenachse; für $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ sind dann die Coordinaten

$$\begin{aligned} \text{von } R: \text{ Absc.} &= 0, & \text{ Ordin.} &= -\frac{ab}{c}, \\ \text{,, } S: & \text{,,} & = \frac{a+b}{3}, & \text{,,} & = \frac{c}{3}, \\ \text{,, } T: & \text{,,} & = \frac{a+b}{2}, & \text{,,} & = \frac{ab+c^2}{2c}, \end{aligned}$$

und demnach ist die Gleichung der Geraden RST

$$(a+b)cy = (3ab+c^2)x - ab(a+b).$$

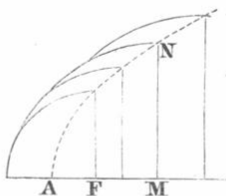
Differenzirt man die Gleichung nach c und eliminirt dann c , so erhält man

$$\left(x - \frac{a+b}{6}\right)^2 - \frac{(a+b)^2}{12ab}y^2 = \left(\frac{a+b}{6}\right)^2.$$

Die Einhüllende ist demnach eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Punkt O zwischen A und B oder ausserhalb der Geraden AB liegt. Fällt O mit einem der Punkte A und B zusammen, so reducirt sich die Einhüllende auf den Punkt O .

Beispiel 9. In einer Parabel, deren Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen als Mittelpunkte, die zugehörigen Parabelordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Fig. 39.



Setzt man (Fig. 39) $AF=a$, $AM=u$, $MN=v$, so ist die Gleichung des aus M mit dem Radius MN beschriebenen Kreises

$$(x-u)^2 + y^2 = v^2,$$

wobei $v^2=4au$ sein muss. Hieraus findet sich, dass die Einhüllende durch die Gleichung

$$y^2 = 4a(x+a)$$

bestimmt, also wieder eine Parabel ist.

Beispiel 10. In einer Ellipse, deren grosse Achse die Abscissenachse sein möge, werden die Endpunkte der Abscissen zu Mittelpunkten, die zugehörigen Ellipsenordinaten als Halbmesser von Kreisen genommen; man sucht die Einhüllende dieser Kreise.

Sind u und v die Coordinaten eines Kreismittelpunktes, so hat man

$$(x-u)^2 + y^2 = v^2, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

als Einhüllende ergibt sich hieraus eine concentrische Ellipse, deren Halbachsen $\sqrt{a^2+b^2}$ und b sind.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

Beispiel 11. Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen und deren Peripherien durch den Scheitel derselben Parabel gehen?

Sind u und v die Coordinaten eines Kreismittelpunktes, so gelten die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad u = \frac{v^2}{4a};$$

die Einhüllende hat zur Gleichung

$$x^3 + (2a+x)y^2 = 0$$

und ist demnach eine Cissoide, deren erzeugender Kreis seinen Mittelpunkt in dem Durchschnitte von Parabelachse und Directrix hat und dessen Durchmesser dem Parameter gleichkommt.

Beispiel 12. Welches ist die Einhüllende von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Ellipse liegen und deren Peripherien durch das Centrum der Ellipse gehen?

Bei derselben Bezeichnung wie in No. 10 hat man

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1;$$

die Einhüllende bestimmt sich durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$$

und ist folglich die Fusspunktcurve einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ construirten Ellipse.

Ein ähnliches Resultat liefert die Hyperbel.

Beispiel 13. Welche Einhüllende gehört zu Kreisen, deren Mittelpunkte auf einem gegebenen Kreise liegen und deren Peripherien durch einen festen Punkt der Peripherie des gegebenen Kreises gehen? (Fig. 40).

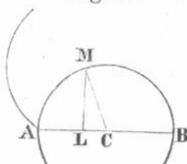
Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sei C , der feste Peripheriepunkt A , ferner $AC=a$, $AL=u$, $LM=v$, endlich A der Anfang und AC die Abscissenachse; es ist dann

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy = 0, \quad v^2 = u(2a-u).$$

Drückt man u und v durch den Centriwinkel $ACM=\omega$ aus, so hat man bequemer

$$x^2 + y^2 - 2ax = 2a(y \sin \omega - x \cos \omega).$$

Fig. 40.



Für die Einhüllende ergibt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2);$$

dieselbe ist folglich eine Cardioide, deren erzeugender Kreis AB zum Durchmesser hat.

Beispiel 14. Welche Einhüllende entsteht, wenn eine Ellipse so verändert wird, dass die Summe ihrer Halbachsen constant bleibt?

Bezeichnet k die constante Summe, so findet sich für die Einhüllende

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

welcher Gleichung die auf S. 71, Aufg. 10 erwähnte Curve entspricht.

Beispiel 15. Man sucht die Einhüllende der Fusspunktcuren aller concentrischen Ellipsen, deren Halbachsen eine constante Summe geben.

Ist wie vorhin k die constante Summe der beiden Halbachsen, so hat man als Gleichung der Fusspunktcure

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + (k-a)^2 y^2$$

und als Gleichung der Einhüllenden

$$(x^2 + y^2)^3 = k^2 x^2 y^2$$

oder in Polarcoordinaten

$$r = k \cos \theta \sin \theta.$$

Das letztere Resultat kann man auch unmittelbar dadurch erhalten, dass man von der Polargleichung der Fusspunktcure ausgeht.

§. 26.

Einhüllende Flächen.

I. Wenn in der Gleichung einer Fläche ausser den Coordinaten x, y, z noch ein willkürlicher Parameter vorkommt, wenn demnach die Gleichung der Fläche unter der Form

$$F(x, y, z, p) = 0$$

enthalten ist, so findet man die Gleichung der einhüllenden Fläche dadurch, dass man p aus den beiden Gleichungen

$$F(x, y, z, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p)}{\partial p} = 0$$

eliminirt. Das Verfahren ist also in diesem Falle dasselbe, wie bei der Aufsuchung einhüllender Curven.

Aufgabe 1. Eine Ebene schneidet auf den Achsen der x, y, z der Reihe nach die Strecken p, q, c ab, von denen die letzte constant ist, während p und q sich so verändern, dass ihr Product den constanten Werth k^2 behält; man sucht die Einhüllende aller derartigen Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene ist

$$\frac{x}{p} + \frac{py}{k^2} + \frac{z}{c} = 1,$$

und hieraus findet sich als Gleichung der einhüllenden Fläche

$$(z-c)^2 = \frac{4c^2}{k^2} xy.$$

Letztere ist demnach ein Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $0, 0, c$ besitzt.

Aufgabe 2. Eine durch den Coordinatenanfang gehende Ebene schneidet die xy -Ebene in einer Geraden, welche mit der x -Achse den Winkel α bildet, ebenso die xz -Ebene in einer Geraden, welche mit der x -Achse den Winkel β einschliesst; man verlangt die Einhüllende dieser Ebene für den Fall, dass sich die Ebene dreht, während die Winkelsumme $\alpha + \beta$ den constanten Werth γ behält.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist die Gleichung der veränderlichen Ebene

$$x - y \cot \alpha - z \cot(\gamma - \alpha) = 0;$$

betrachtet man α als veränderlichen Parameter, so erhält man als Gleichung der Einhüllenden

$$[x \sin \gamma - (y + z) \cos \gamma]^2 = 4yz.$$

Dieser Gleichung entspricht ein elliptischer Kegel.

Aufgabe 3. Eine Ebene schneide auf den Coordinatenachsen die drei Strecken ab

$$\frac{t^2}{a+t}, \quad \frac{t^2}{b+t}, \quad \frac{t^2}{c+t},$$

wobei a, b, c gegebene Linien, t eine veränderliche Linie bedeuten; man sucht die Einhüllende aller solcher Ebenen.

Die Gleichung der Ebene ist

$$(a+t)x + (b+t)y + (c+t)z = t^2$$

und die Gleichung der Einhüllenden

$$(x+y+z)^2 + 4(ax+by+cz) = 0.$$

Die hiermit bestimmte Fläche ist ein parabolischer Cylinder.

Aufgabe 4. Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Parabel liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel derselben Parabel gehen.

Nimmt man die Ebene der Parabel zur xy -Ebene, ihre Achse zur x -Achse und stellt die Gleichung der Parabel in der Form $v^2 = 2bu$ dar, so ist die Gleichung der veränderlichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{b}x - 2vy = 0;$$

für die Einhüllende ergibt sich hieraus

$$(x^2 + y^2 + z^2)x + by^2 = 0.$$

Aufgabe 5. Man sucht die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen.

Verfährt man ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe, so hat man als Gleichung der veränderlichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy = 0,$$

wobei u und v der Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Als Gleichung der Einhüllenden ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2).$$

Aufgabe 6. Ein durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

bestimmtes hyperbolisches Paraboloid werde von einer Ebene geschnitten, welche den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ enthält und demgemäss zur Gleichung haben möge

$$M(x - \alpha) + N(y - \beta) + z - \gamma = 0.$$

Der Schnitt ist im Allgemeinen eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel mittelst der Bemerkung gefunden werden kann, dass zwei in der Schnittebene vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ nach den unendlich entfernten Hyperbelpunkten gezogene Gerade einen dem Asymptotenwinkel gleichen Winkel einschliessen. Setzen wir nun in den Gleichungen beider Flächen

$$x = \alpha + r \cos \varphi, \quad y = \beta + r \cos \psi, \quad z = \gamma + r \cos \chi,$$

wobei r die Entfernung der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und xyz bedeutet, so haben wir gleichzeitig

$$\frac{(\alpha + r \cos \varphi)^2}{a} - \frac{(\beta + r \cos \psi)^2}{b} = 2(\gamma + r \cos \chi),$$

$$M \cos \varphi + N \cos \psi + \cos \chi = 0.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch r^2 und lässt dann r unendlich werden, so entstehen die beiden Gleichungen

$$\frac{\cos^2 \varphi}{a} - \frac{\cos^2 \psi}{b} = 0,$$

$$M \cos \varphi + N \cos \psi + \cos \chi = 0,$$

und diese drücken die Bedingungen aus, welchen die Richtungswinkel φ, ψ, χ genügen müssen, wenn der Punkt xyz ein unendlich ferner Hyperbelpunkt sein soll. Da die erste Gleichung quadratisch ist, so giebt es zwei derartige Richtungen $\varphi_1 \psi_1 \chi_1$ und $\varphi_2 \psi_2 \chi_2$, für welche man findet

$$\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = + \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_2} = - \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Der Winkel zwischen beiden Richtungen bestimmt sich durch die Formel

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \chi_1 \cos \chi_2 \\ &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \\ &\quad + (M \cos \varphi_1 + N \cos \psi_1)(M \cos \varphi_2 + N \cos \psi_2) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \left\{ 1 + M^2 + MN \left(\frac{\cos \psi_1}{\cos \varphi_1} + \frac{\cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 + N^2) \frac{\cos \psi_1}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{\cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \right\}, \end{aligned}$$

d. i. zufolge der vorhin angegebenen Werthe

$$\cos \omega = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{a(1 + M^2) - b(1 + N^2)}{a}.$$

Im Falle $a(1 + M^2) = b(1 + N^2)$ oder

$$aM^2 - bN^2 = b - a$$

wird $\omega = \frac{1}{2}\pi$; die vorstehende Gleichung ist also die Bedingung dafür, dass die Ebene

$$M(x - \alpha) + N(y - \beta) + z - \gamma = 0$$

mit dem Paraboloiden einen gleichseitigen hyperbolischen Schnitt bildet.

Lässt man die Ebene sich so um den festen Punkt drehen, dass ihre Schnitte mit dem Paraboloiden immer gleichseitige Hyperbeln bleiben, so erhält man für die Einhüllende aller derartigen Ebenen

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a} - \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{a-b} = 0;$$

dieser Gleichung entspricht ein elliptischer Kegel.

Aufgabe 7. Die beiden Hyperboloide und ihr gemeinschaftlicher Asymptotenkegel können durch die eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon$$

dargestellt werden, wobei $\varepsilon = +1$ dem einfachen Hyperboloide, $\varepsilon = 0$ dem elliptischen Kegel, $\varepsilon = -1$ dem getheilten Hyperboloide entspricht. Für den Schnitt der einen oder anderen dieser Flächen mit einer durch den festen Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebene hat man ausser der obigen Gleichung noch die folgende

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z-\gamma = 0.$$

Wie bei der vorigen Aufgabe findet man leicht, dass die Richtungswinkel φ, ψ, χ einer von $\alpha\beta\gamma$ nach einem unendlich entfernten Punkte des Schnittes gezogenen Geraden an die Bedingungen

$$\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} - \frac{\cos^2 \chi}{c^2} = 0,$$

$$M \cos \varphi + N \cos \psi + \cos \chi = 0$$

gebunden sind; für das Verhältniss $\frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$, welches kurz mit λ bezeichnet werden möge, folgt hieraus die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{2b^2 MN}{b^2 N^2 - c^2} \lambda + \frac{b^2 (a^2 M^2 - c^2)}{a^2 (b^2 N^2 - c^2)} = 0,$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 heissen mögen. Der Winkel ω zwischen den entsprechenden Richtungen $\varphi_1 \psi_1 \chi_1$ und $\varphi_2 \psi_2 \chi_2$ bestimmt sich durch die Formel

$$\cos \omega = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \{ 1 + M^2 + MN(\lambda_1 + \lambda_2) + (1 + N^2) \lambda_1 \lambda_2 \};$$

zufolge der Bedeutung von λ_1, λ_2 und unter Einführung der Abkürzungen

$$A = a^2(b^2 - c^2), \quad B = b^2(a^2 - c^2), \quad C = c^2(a^2 + b^2)$$

ergiebt sich weiter

$$\cos \omega = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{A M^2 + B N^2 - C}{a^2 (b^2 N^2 - c^2)}.$$

Die Gleichung

$$A M^2 + B N^2 = C$$

ist hiernach die Bedingung dafür, dass die Ebene

$$M(x-\alpha) + N(y-\beta) + z-\gamma = 0$$

mit der einen oder anderen der vorhin genannten drei Flächen einen gleichseitig-hyperbolischen Schnitt bildet.

Für die Einhüllende aller derartigen, durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehenden Ebenen erhält man die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{A} + \frac{(y-\beta)^2}{B} - \frac{(z-\gamma)^2}{C} = 0,$$

welcher ein elliptischer Kegel entspricht. Ist gleichzeitig $c > a$ und $c > b$, so existiren überhaupt keine gleichseitig-hyperbolischen Schnitte, und dann bedeutet die obige Gleichung keine Fläche mehr.

II. Wenn in der Gleichung einer Fläche zwei von einander unabhängige Parameter p und q vorkommen, so findet man die Gleichung derjenigen Einhüllenden, welche den gleichzeitigen Aenderungen von p und q entspricht, dadurch, dass man aus den Gleichungen

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, z, p, q)}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p, q)}{\partial q} = 0$$

die Parameter p und q eliminirt.

Aufgabe 8. Eine Ebene bewegt sich so, dass die Strecken, welche sie auf den Coordinatenachsen abschneidet, eine constante Summe haben; man sucht die Einhüllende dieser veränderlichen Ebene.

Bezeichnet man die Achsenabschnitte mit u, v, w , ihre constante Summe mit c , so ist $w = c - u - v$, mithin die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{c-u-v} = 1.$$

Die veränderlichen Parameter sind hier u und v ; für die Einhüllende ergibt sich die Gleichung

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = c.$$

Die Aufgabe lässt sich auf folgende Art verallgemeinern. Eine feste Ebene schneide von den Coordinatenachsen die Strecken a, b, c ab; man projectirt jeden Punkt dieser Ebene auf die drei Coordinatenachsen und legt durch die drei Projectionen eine neue Ebene. Die Einhüllende der letzteren hat zur Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}}\right)^2 = 1.$$

Aufgabe 9. Eine Ebene bewegt sich so, dass das Parallelepiped aus den Strecken, welche sie auf den Coordinatenachsen abschneidet, den constanten Inhalt c^3 besitzt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der gesuchten Fläche ist

$$xyz = \frac{1}{27} c^3.$$

Aufgabe 10. Jeder Punkt eines Ellipsoides werde auf die Achsen desselben projectirt und durch die erhaltenen Projectionen eine Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende aller dieser Ebenen.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1;$$

die Abschnitte u, v, w sind dann an die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

gebunden. Hieraus folgt als Gleichung der Einhüllenden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Aufgabe 11. Die Berührungsebene im Scheitel eines elliptischen Paraboloides sei die xy -Ebene, die beiden Hauptebenen des Paraboloides mögen die übrigen Coordinatenebenen sein; jeder Punkt der Fläche werde auf die drei Coordinatenachsen projectirt und durch die Projectionen einer Ebene gelegt; man sucht die Einhüllende dieser Ebene.

Die Gleichung der veränderlichen Ebene sei

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

wobei u, v, w der Bedingung

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 2w$$

genügen müssen; die Gleichung der Einhüllenden ist

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y^2}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Aufgabe 12. Welches ist die Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt desselben Ellipsoides gehen?

Sind u, v, w die Mittelpunktscoordinaten einer solchen Kugel, so hat man als Gleichung der letzteren

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0$$

und hierzu die Bedingung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1.$$

Daraus ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2);$$

die Einhüllende ist demnach die Fusspunktfläche eines aus den doppelten Achsen construirten Ellipsoides.

Aufgabe 13. Welche Einhüllende gehört zu Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloid liegen und deren Oberflächen durch den Scheitel desselben Paraboloides gehen?

Bei ähnlicher Bezeichnung wie vorhin ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy - 2wz = 0,$$

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = 2w;$$

daraus ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)z + ax^2 + by^2 = 0.$$

Die Einhüllende ist demnach die Fusspunktfläche eines aus den doppelten Parametern construirten elliptischen Paraboloides.

Aufgabe 14. Ein dreiachsiges Ellipsoid verändert sich so, dass die Summe der Halbachsen den constanten Werth k behält; man sucht die Einhüllende.

Als Gleichung der letzteren findet sich

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

die Einhüllende kann daher nach Aufgabe 10 auch aus einer mit dem Radius k beschriebenen Kugel hergeleitet werden, was geometrisch unmittelbar einleuchtet.

Aufgabe 15. Welche Einhüllende gehört zur Fusspunktfläche eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Halbachsen die constante Summe k haben.

Aus der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + (k - a - b)^2 z^2$$

erhält man

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) = k^2 x^2 y^2 z^2.$$