universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel IX. Bestimmung der Werthe vieldeutiger Ausdrücke

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel IX.

Bestimmung der Werthe vieldeutiger Ausdrücke.

§. 27.

Die Formen $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$.

I. Wenn die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den speciellen Werth $x = a$ gleichzeitig verschwinden, so erhält der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0}$; der wahre Werth dieses Bruches findet sich dann mittelst des Satzes, dass unter den angegebenen Umständen

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

ist. Falls wiederum $\varphi'(a) = 0$ und zugleich $\psi'(a) = 0$ sein sollte, muss derselbe Satz zum zweiten Male angewendet werden u. s. f.

Beispiel 1. Es sei

$$y = \frac{(x-b)^m - (a-b)^m}{x-a};$$

für $x = a$ wird $y = \frac{0}{0} = m(a-b)^{m-1}$.

2) $$y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12};$$

für $x = -3$ wird $y = \frac{0}{0} = -1$.

3) $$y = \frac{1 - (m+1)x^m + m x^{m+1}}{(1-x)^2};$$

für $x = 1$ wird $y = \frac{0}{0} = \frac{m(m+1)}{2}$.

4) $$y=\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+cx}-\sqrt{a+c}};$$

für $x=1$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}$.

5) $$y=\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}};$$

für $x=1$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{16}{9}$.

6) $$y=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a-bx+cx^2}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}$.

7) $$y=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^m-(\sqrt{1+x^2}-x)^m}{x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=2m$.

8) $$y=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n+(\sqrt{1+x^2}-x)^n-2}{x^2};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=n^2$.

9) $$y=\frac{a^x-b^x}{x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=la-lb$.

10) $$y=\frac{x-a-a(lx-la)}{a-\sqrt{2ax-x^2}};$$

für $x=a$ wird $y=\frac{0}{0}=1$.

11) $$y=\frac{l(x^{2m}+x^m-1)-mlx}{x^2-1}$$

für $x=1$ wird $y=\frac{0}{0}=m$.

12) $$y=\frac{x^x-1}{x^m+x^n lx-1};$$

für $x=1$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{1}{m+1}$.

13) $$y=\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=2$.

14) $$y=\frac{\tan x}{kx+l\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-l2};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{1}{k}$.

15) $$y=\frac{\sin 3x+4\sin^3 x-3l(1+x)}{(e^x-1)\sin x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{3}{2}$.

16) $$y=\frac{1-\cos x-l\cos x}{x^2};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=1$.

17) $$y=\frac{1-\cos(\mu \arcsin x)}{l(1+x^2)};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{1}{2}\mu^2$.

18) $$y=\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{3}{2}$.

19) $$y=\frac{1+2\cos^3 x-3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=\frac{9}{4}$.

20) $$y=\frac{1-5\sin^2 x+4\cos^5 x-5\sqrt{\cos^3 2x}}{\sin^6 x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{0}{0}=-\frac{15}{4}$.

II. Wenn die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x=a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x)-f(x)$ die unbestimmte Form $\infty-\infty$; den wahren Werth derselben findet man dadurch, dass man die Differenz in einen Bruch verwandelt z. B. mittelst der identischen Gleichung

$$F(x)-f(x)=\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)\,F(x)}}$$

und diesen, wenn nöthig, nach der vorigen Regel untersucht.

21) $$z=\frac{\alpha}{1-x^{\alpha}}-\frac{\beta}{1-x^{\beta}};$$

für $x=1$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

22) $$z=\frac{1}{l\,x}-\frac{\alpha}{x^{\alpha}-1};$$

für $x=1$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{2}\alpha$.

23) $$z=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{2}$.

24) $$z=\frac{2}{x}-\frac{x}{e^{x}-x-1};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{2}{3}$.

25) $$z=\frac{1}{2}\pi\,sec\,x-x\,tan\,x;$$

für $x=\frac{1}{2}\pi$ wird $z=\infty-\infty=1$.

26) $$z=\frac{1}{x^{2}}-cot^{2}x;$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{2}{3}$.

27) $$z=\frac{2+cos\,x}{x^{3}\,sin\,x}-\frac{3}{x^{4}};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{60}$.

28) $$z=cot\,x-\frac{15-6x^{2}}{x(15-x^{2})};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=0$.

29) $$z=\frac{3}{3x^{4}-x^{6}}-\frac{1}{x^{3}\,arc\,tan\,x};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{5}$.

30) $$z=\frac{2+\sqrt{1-x^{2}}}{3x^{4}}-\frac{1}{x^{3}\,arc\,sin\,x};$$

für $x=0$ wird $z=\infty-\infty=\frac{1}{180}$.

III. Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x=a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ die vieldeutige Form $\frac{\infty}{\infty}$; der wahre Werth desselben findet sich dann nach dem Satze, dass unter den angegebenen Umständen

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}$$

ist; die Methode zur Bestimmung des wahren Werthes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$.

31) $$y=\frac{c-lx}{a+\frac{b}{x}};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=0$.

32) $$y=\frac{log(x-a)}{log(e^x-e^a)};$$

für $x=a$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=1$.

33) $$y=\frac{tan\,x}{a+\frac{b}{\pi-2x}};$$

für $x=\frac{\pi}{2}$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=\frac{2}{b}$.

34) $$y=\frac{log\,x}{a+b\,log\,sin\,x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{b}$.

35) $$y=\frac{log\,x}{a+b\,log\,tan\,\mu x};$$

für $x=0$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{b}$.

36) $$y=\frac{l\,x}{x^m},\quad m>0;$$

für $x=\infty$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=0$.

37) $$y=\frac{x}{e^{ax}},\quad a>0;$$

für $x=\infty$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=0$.

38) $$y=\frac{x^\beta}{e^{ax}},\quad a>0,\quad \beta>0;$$

für $x=\infty$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=0$.

39) $$y=\frac{l(a+b\,e^x)}{\alpha+\beta x};$$

für $x=\infty$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{\beta}$.

40) $$y=\frac{l(a+b\,e^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}};$$

für $x=\infty$ wird $y=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{\beta}$.

§. 28.

Die Formen $0.\infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Wenn für $x=a$ gleichzeitig $\varphi(x)$ verschwindet und $f(x)$ unendlich wird, so erhält das Product $\varphi(x).f(x)$ die Form $0.\infty$; den wahren Werth desselben findet man dadurch, dass man $\varphi(x).f(x)$ in einen Quotienten verwandelt, welcher für $x=a$ entweder die Form $\frac{0}{0}$ oder die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt; dem ersten Falle entspricht die Umwandlung

$$\varphi(x).f(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

der zweite Fall entsteht durch

$$\varphi(x).f(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

41) $$z=x^p\,l\left(\frac{1}{x}\right),\quad p>1;$$

für $x=0$ wird $z=0.\infty=0$.

42) $$z=(\pi-2x)\tan x;$$

für $x=\frac{1}{2}\pi$ wird $z=0.\infty=2$.

43) $$z=l\left(2-\frac{x}{a}\right).\tan\frac{\pi x}{2a};$$

für $x=a$ wird $z=0.\infty=\frac{2}{\pi}$.

44) $$z=(e^a-e^x)\tan\frac{\pi x}{2a};$$

für $x=a$ wird $z=0.\infty=\frac{2a}{\pi}e^a$.

45) $$z = l\cos x \,.\, \cot x;$$
für $x=0$ wird $z=0\,.\,\infty=0$.

46) $$z = l\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).\cot x;$$
für $x=0$ wird $z=0\,.\,\infty=1$.

47) $$z = \arcsin x \,.\, \cot x;$$
für $x=0$ wird $z=0\,.\,\infty=1$.

48) $$z = \arccos\frac{x}{a}\,.\,\tan\frac{\pi x}{2a};$$
für $x=a$ wird $z=0\,.\,\infty=\infty$.

49) $$z = \frac{x}{\alpha+\beta x^2}\,.\,l(a+be^x);$$
für $x=\infty$ wird $z=0\,.\,\infty=\frac{1}{\beta}$.

50) $$z = \sin\frac{c}{x}\,.\,l(a+be^x);$$
für $x=\infty$ wird $z=0\,.\,\infty=c$.

II. Wenn die Potenz $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x=a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so benutzt man die Gleichung

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{lf(x)\,.\,\varphi(x)}$$

und untersucht den Exponenten $lf(x)\,.\,\varphi(x)$ nach den im vorigen Abschnitt gegebenen Regeln.

51) $$u = x^x;$$
für $x=0$ wird $u=0^0=1$.

52) $$u = x^{\frac{1}{a+blx}};$$
für $x=0$ wird $u=0^0=e^{\frac{1}{b}}$.

53) $$u = x^{\frac{1}{l(e^x-1)}};$$
für $x=0$ wird $u=0^0=e$.

54) $$u = \left(\frac{1}{a+be^x}\right)^{\frac{c}{x}};$$
für $x=\infty$ wird $u=0^0=e^c$.

55) $$v = x^{\frac{1}{x}};$$
für $x=\infty$ wird $v=\infty^0=1$.

56) $$v = (a+be^{\tan x})^{\pi-2x};$$
für $x=\frac{1}{2}\pi$ wird $v=\infty^0=e^2$.

57) $$v=(a+bx^m)^{\frac{1}{\alpha+\beta lx}},\quad m>0;$$

für $x=\infty$ wird $v=\infty^0=e^{\frac{m}{\beta}}$.

58) $$w=[tan(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x)]^{cot\,x};$$

für $x=0$ wird $w=1^\infty=e$.

59) $$w=\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{tan\,x};$$

für $x=\frac{1}{2}\pi$ wird $w=1^\infty=e^{\frac{2}{\pi}}$.

60) $$w=\left(cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x;$$

für $x=\infty$ wird $w=1^\infty=e^a$.

§. 29.

Differentialquotienten von der Form $\frac{0}{0}$.

Wenn aus einer Gleichung zwischen x und y, etwa $f(x,y)=0$, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ nach der Formel

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

entwickelt ist, so kann es geschehen, dass für specielle Werthe $x=a$, $y=b$ (welche selbstverständlich der ursprünglichen Gleichung genügen müssen) Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches gleichzeitig verschwinden, also $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ wird. Man wendet dann wieder die in §. 27, I erwähnte Regel an, wobei aber nicht zu übersehen ist, dass der unbekannte Werth, welchen $\frac{dy}{dx}$ für $x=a$ und $y=b$ annimmt, möglicherweise auch unendlich gross sein kann.

1. Aus der Gleichung

$$x^3-3cxy+y^3=0$$

folgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cy-x^2}{y^2-cx},$$

welcher Ausdruck für $x=0$ und $y=0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht. Differenzirt man rechter Hand Zähler und Nenner für sich und setzt zur Abkürzung $\frac{dy}{dx}=y'$, so hat man

$$y'=\frac{cy'-2x}{2yy'-c}, \quad (x=0, \quad y=0),$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung

$$y'=\frac{c\mp\sqrt{c^2-4xy}}{2y},$$

oder, wie man leicht findet,

$$y'=\frac{2x}{c+\sqrt{c^2-4xy}}, \quad y'=\frac{c+\sqrt{c^2-4xy}}{2y}.$$

Die wirkliche Einführung der Werthe $x=0$ und $y=0$ giebt nun

$$y'=0, \quad y'=\pm\infty.$$

Eine Modification dieses Verfahrens beruht auf der Bemerkung, dass der Quotient $\frac{y}{x}$ für $x=0$ und $y=0$ denselben Werth annimmt, wie y'; bezeichnet man nun $\frac{y}{x}$ mit t und setzt in der allgemeinen Formel

$$y'=\frac{cy-x^2}{y^2-cx}$$

$y=xt$, so erhält man

$$\frac{t+y'}{1+t^2y'}=\frac{x}{c}.$$

Für $x=0$ wird hieraus, wenn man q den gemeinsamen Werth nennt, den für diesen Fall t und y' annehmen,

$$\frac{2q}{1+q^3}=0$$

und dieser Bedingung genügen $q=0$ und $q=\pm\infty$.

2) $$x^5-5c^3xy+y^5=0;$$

für $x=0$ und $y=0$ erhält y' die Werthe 0 und $\pm\infty$.

3) $$(x^2+y^2)^2=c^2xy;$$

für $x=0$ und $y=0$ erhält y' die Werthe 0 und $\pm\infty$.

4) $$(y^2-x^2)^2=ax^3-bxy^2;$$

für $x=0$ und $y=0$ erhält y' die Werthe $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\pm\infty$,

5) $$y^4 + a x y^2 = b x^3 - x^4;$$

für $x=0$ und $y=0$ erhält y' die Werthe $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $\pm\infty$.

6) $$y^4 + (a^2 + x^2) y^2 = b^2 x^2;$$

für $x=0$ und $y=0$ erhält y' die Werthe $\pm\frac{b}{a}$.

§. 30.

Zwei allgemeine Sätze.

Nach §. 27, III und mit Hülfe der bekannten Relation

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\,\varphi'(x+\varepsilon h),$$

worin ε einen positiven echten Bruch bedeutet, lässt sich sehr leicht folgender Satz beweisen: Wenn $\varphi(x)$ gleichzeitig mit x ins Unendliche wächst und $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, so ist für $x=\infty$

$$Lim\,\frac{\varphi(x)}{x} = Lim\,\{\varphi(x+1) - \varphi(x)\}.$$

Hiernach ergeben sich z. B. die Grenzwerthe

$$Lim\,\frac{l\,x}{x} = 0, \quad Lim\,\frac{\cot\frac{c}{x}}{x} = \frac{1}{c}.$$

Die Substitution $\varphi(x) = l\,\psi(x)$ führt zu dem weiteren Satze: Wenn $\psi(x)$ gleichzeitig mit x unendlich wächst und $\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, so ist für $x=\infty$

$$Lim\left\{[\psi(x)]^{\frac{1}{x}}\right\} = Lim\,\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}.$$

Hieraus ergeben sich die Grenzwerthe

$$Lim\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = 1, \quad Lim\left\{(a + b\,c^x)^{\frac{1}{x}}\right\} = c, \quad c > 1.$$