universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel X. Maxima und Minima der Functionen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel X.

Maxima und Minima der Functionen.

§. 31.

Maxima und Minima der Functionen einer Variabelen.

Eine Function $f(x)$ erreicht jedesmal einen Maximalwerth oder einen Minimalwerth, sobald ihr Differentialquotient $f'(x)$ sein Vorzeichen wechselt, und zwar ist $f(a)$ ein Maximum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x=a$ vom Positiven zum Negativen übergeht, d. h. wenn für unendlich kleine δ gleichzeitig

$$f'(a-\delta)>0, \quad f'(a+\delta)<0$$

ist; dagegen bildet $f(a)$ ein Minimum, wenn $f'(x)$ an der Stelle $x=a$ vom Negativen zum Positiven übergeht, d. h. wenn die Ungleichungen

$$f'(a-\delta)<0, \quad f'(a+\delta)>0$$

zusammen stattfinden.

Falls $f'(x)$ sich stetig ändert, kann $f'(x)$ sein Vorzeichen nur mittelst Durchganges durch Null wechseln, d. h. es muss $f'(a)=0$ sein; man hat daher diejenigen Werthe von x aufzusuchen, für welche $f'(x)=0$ wird. Ist a ein solcher Werth, so bedarf es dann noch der Entscheidung, ob $f(a)$ ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ darstellt. Meistentheils reicht hierzu der zweite Differentialquotient hin; $f(a)$ ist nämlich ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $f''(a)$ negativ oder positiv ausfällt. Wenn aber $f''(a)=0$ ist, so muss man die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Hülfe nehmen; die Regel ist dann: ein aus der Gleichung $f'(x)=0$ bestimmter Werth $x=a$ macht $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x), f'''(x)$ etc., der erste für $x=a$ nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar bildet $f(a)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem der genannte Differentialquotient für $x=a$ negativ oder positiv ausfällt.

Wenn $f'(x)$ keine stetige Function von x ist, so kann $f'(x)$ sein Vorzeichen plötzlich ändern (z. B. mittelst eines Sprunges von $-\infty$ nach $+\infty$); solche Stellen bedürfen einer genauern Untersuchung, namentlich müssen dann $f(a-\delta)$ und $f(a+\delta)$ besonders discutirt werden.

Beispiel 1. $y = x(2a - x)$;

für $x = a$ wird $y = a^2$ ein Maximum.

2) $y = x(a^2 - x^2)$;

für $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = -\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ ein Minimum,

für $x = +\frac{a}{\sqrt{3}}$ wird $y = +\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ ein Maximum.

3) $y = x(a - x)^2$;

für $x = \frac{1}{3}a$ wird $y = \frac{4}{27}a^3$ ein Maximum,

für $x = a$ wird $y = 0$ ein Minimum.

4) $y = x + \frac{a^2}{x}$;

für $x = a$ wird $y = 2a$ ein Minimum.

5) $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$;

für $x = a$ wird $y = 3a^2$ ein Minimum.

6) $y = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x$;

für $x = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ wird $y = \alpha(2\alpha^2 - 3\beta) \pm 2\sqrt{(\alpha^2 - \beta)^3} : \left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right.$,
wobei $\alpha^2 - \beta > 0$ sein muss. Im Falle $\alpha^2 - \beta = 0$ hat y weder ein Maximum noch ein Minimum.

7) $y = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta}$;

für $x = \mp\sqrt{\beta}$ wird $y = \frac{1}{\alpha \mp 2\sqrt{\beta}} : \left\{ \begin{matrix} \text{Minimum}, \\ \text{Maximum}, \end{matrix} \right.$

wobei $\beta > 0$ sein muss. Für $\beta = 0$ besitzt y weder ein Maximum noch ein Minimum.

8) $y = \frac{x - \gamma}{x^2 + \alpha x + \beta}$;

für $x = \gamma \mp \sqrt{\alpha\gamma + \beta + \gamma^2}$ wird $y = \frac{1}{\alpha + 2\gamma \mp 2\sqrt{\alpha\gamma + \beta + \gamma^2}} : \left\{ \begin{matrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{matrix} \right.$

wobei $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 > 0$ sein muss. Im Falle $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 = 0$ hat y weder ein Maximum noch ein Minimum.

9) $y = x + \sqrt{a(a - x)}$;

für $x = \frac{3}{4}a$ wird $y = \frac{5}{4}a$ ein Maximum.

10) $y = x - \sqrt{a(x - a)}$;

für $x = \frac{5}{4}a$ wird $y = \frac{3}{4}a$ ein Minimum.

11) $$y=\sqrt{\alpha+\beta x}+\gamma x;$$

$$\text{für } x=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma^2} \text{ wird } y=-\frac{\beta^2+4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma}$$

ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\beta\gamma$ negativ oder positiv ist.

12) $$y=\sqrt{\alpha+\beta x^2}+\gamma x;$$

$$\text{für } x=\mp\gamma\sqrt{\frac{\alpha}{\beta(\beta-\gamma^2)}} \text{ wird } y=\mp\sqrt{\frac{\alpha(\beta-\gamma^2)}{\beta}}: \begin{cases}\text{Minimum,}\\ \text{Maximnm,}\end{cases}$$

wobei $\alpha\beta(\beta-\gamma^2)$ positiv sein muss.

13) $$y=\frac{a+bx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}};$$

$$\text{für } x=\frac{\alpha b}{a\beta} \text{ wird } y=\sqrt{\frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}}$$

ein Maximum oder Minimum, je nachdem $a\beta$ positiv oder negativ ist.

14) $$y=\frac{(a+bx)\sqrt{\alpha+\beta x^2}}{x};$$

$$\text{für } x=\sqrt[3]{\frac{a\alpha}{b\beta}} \text{ wird } y=\sqrt{\frac{(ab_1+ba_1)^3}{ab}}$$

ein Minimum oder Maximum, je nachdem $b\beta$ positiv oder negativ ist. Die Grössen a_1 und b_1 dienen zur Abkürzung, nämlich

$$a_1=\sqrt[3]{a\alpha},\quad b_1=\sqrt[3]{b\beta}.$$

15) $$y=2x+3\sqrt[3]{b(x-a)^2},\quad b>0;$$

für $x=a-b$ wird $y=2a+b$ ein Maximum,
„ $x=a$ „ $y=2a$ „ Minimum.

16) $$y=2x-3\sqrt[3]{b(x-a)^2},\quad b>0;$$

für $x=a$ wird $y=2a$ ein Maximum,
„ $x=a+b$ „ $y=2a-b$ „ Minimum.

17) $$y=b+\sqrt[3]{\frac{(2ax-x^2)^2}{a}},\quad a>0;$$

für $x=0$ wird $y=b$ ein Minimum,
„ $x=a$ „ $y=b+a$ „ Maximum,
„ $x=2a$ „ $y=b$ „ Minimum.

18) $$y=\sqrt[3]{bx^2}+\sqrt[3]{c(x-a)^2},\quad b>0,\quad c>0;$$

für $x=0$ wird $y=\sqrt[3]{a^2c}$ ein Minimum,
„ $x=\frac{ab}{b+c}$ „ $y=\sqrt[3]{a^2(b+c)}$ „ Maximum,
„ $x=a$ „ $y=\sqrt{a^2b}$ „ Minimum.

19) $$y=\sqrt[3]{bx^2}-\sqrt[3]{c(x-a)^2},\quad b>c>0;$$

für $x=0$ wird $y=-\sqrt[3]{a^2c}$ ein Minimum,

„ $x=a$ „ $y=+\sqrt[3]{a^2b}$ „ Maximum,

„ $x=\frac{ab}{b-c}$ „ $y=\sqrt[3]{a^2(b-c)}$ „ Minimum.

20) $$y=x^m e^{-x},\quad m>0;$$

für $x=m$ wird $y=\left(\frac{m}{e}\right)^m$ ein Maximum.

21) $$y=b e^{\frac{x}{a}}-x;$$

für $x=a\,l\left(\frac{a}{b}\right)$ wird $y=a\left\{1-l\left(\frac{a}{b}\right)\right\}$ ein Minimum,

wobei ab positiv sein muss.

22) $$y=x^m l\left(\frac{a}{x}\right);$$

für $x=\frac{a}{e^{\frac{1}{m}}}$ wird $y=\frac{a^m}{me}$ ein Maximum oder Minimum,

je nachdem m positiv oder negativ ist.

23) $$y=x^x;$$

für $x=\frac{1}{e}$ wird $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ ein Minimum.

24) $$y=x^{\frac{1}{x}};$$

für $x=e$ wird $y=e^{\frac{1}{e}}$ ein Maximum.

25) $$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x;$$

für $x=\frac{a}{e}$ wird $y=e^{\frac{a}{e}}$ ein Maximum.

26) $$y=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}};$$

für $x=ae$ wird $y=e^{\frac{1}{ae}}$ ein Maximum.

27) $$y=\sin x\,.\,\sin(\alpha+x);$$

für $x=n\pi-\frac{1}{2}\alpha$ wird $y=-\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ ein Minimum,

„ $x=n\pi+\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ „ $y=+\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ „ Maximum,

wobei n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

28) $$y = \sin x \,.\, \cos(\alpha + x);$$

für $x = n\pi - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = -\sin^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ ein Minimum,

„ $x = n\pi + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha$ „ $y = +\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ „ Maximum.

29) $$y = \cot x \,.\, \tan(x - \alpha), \quad 0 < \alpha < \pi;$$

für $x = (n + \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ wird $y = \tan^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ ein Maximum,

„ $x = (n - \frac{1}{4})\pi + \frac{1}{2}\alpha$ „ $y = \tan^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$ „ Minimum.

30) $$y = \sin x \cos^2 x;$$

für $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ wird $y = 0$ ein Maximum,

„ $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ „ $y = 0$ „ Minimum;

wenn ferner zur Abkürzung $\arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = \vartheta$ gesetzt wird, so ist

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Max.,

für $x = 2n\pi - \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ein Min.

31) $$y = \tfrac{1}{2}\left(a \sin x + \frac{b}{\sin x}\right), \quad a > b > 0;$$

für $x = (2n + \frac{1}{2})\pi$ wird $y = +\frac{1}{2}(a+b)$ ein Maximum,

„ $x = (2n - \frac{1}{2})\pi$ „ $y = -\frac{1}{2}(a+b)$ „ Minimum;

wenn ferner $\arcsin \sqrt{\frac{b}{a}} = \vartheta$ ist, so wird

für $x = 2n\pi + \vartheta$ und für $x = (2n+1)\pi - \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Min.

„ $x = 2n\pi - \vartheta$ „ „ $x = (2n+1)\pi + \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ „ Max.

32) $$y = \tfrac{1}{2}(a \tan x + b \cot x), \quad a > 0, \quad b > 0;$$

bezeichnet man $\arctan \sqrt{\frac{b}{a}}$ mit ϑ, so wird

für $x = n\pi + \vartheta$, $y = +\sqrt{ab}$ ein Minimum,

„ $x = n\pi - \vartheta$, $y = -\sqrt{ab}$ „ Maximum.

33) $$y = e^x \sin(x - \alpha);$$

für $x = (2n - \frac{1}{4})\pi + \alpha$ wird $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(2n - 1/4)\pi + \alpha}$ ein Minimum,

„ $x = (2n + \frac{3}{4})\pi + \alpha$ „ $y = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(2n + 3/4)\pi + \alpha}$ „ Maximum.

34) $$y = e^x[x \sin(x + \alpha) + (1 - x)\cos(x + \alpha)]; \quad \alpha > 0;$$

für $x = 0$ wird $y = \cos\alpha$ ein Minimum;

für $x = (2n+1)\pi - \alpha$ wird $y = [(2n+1)\pi - \alpha - 1]\, e^{(2n+1)\pi - \alpha}$ ein Max.,

für $x = 2n\pi - \alpha$ wird $y = -(2n\pi - \alpha - 1)\, e^{2n\pi - \alpha}$ ein Minimum.

35) $$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$
für $x=0$ wird $y=1$ ein Minimum.

36) $$y = x \arctan x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2);$$
für $x=0$ wird $y=0$ ein Minimum.

37) $$y = x \arctan \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} l(1+x^2);$$
für $x=0$ wird $y=0$ ein Minimum.

38) $$y = \frac{1}{1+x^2}\left(\tfrac{1}{2} - x \arctan \frac{1}{x}\right);$$
für $x=0$ wird $y=\frac{1}{2}$ ein Maximum,
„ $x=1$ „ $y=-\frac{1}{8}(\pi-2)$ ein Minimum.

39) $$y = \frac{9x+7x^3}{(1+x^2)(9+x^2)} - \arctan x;$$
für $x=-\sqrt{3}$ wird $y=-(\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi)$ ein Minimum,
„ $x=+\sqrt{3}$ „ $y=\frac{5}{8}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi$ ein Maximum.

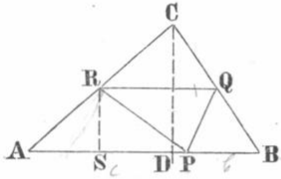
40) $$y = \frac{1+2x \arctan x}{1+x^2};$$
für $x=-1$ wird $y=\frac{1}{4}(\pi+2)$ ein Maximum,
„ $x=0$ wird $y=1$ ein Minimum,
„ $x=+1$ wird $y=\frac{1}{4}(\pi+2)$ ein Maximum.

§. 32.

Geometrische und physikalische Aufgaben.

1. Es ist ein Dreieck ABC und auf der Seite AB der Punkt P gegeben; man soll die Transversale $QR \parallel AB$ so legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks PQR ein Maximum wird (Fig. 41).

Fig. 41.



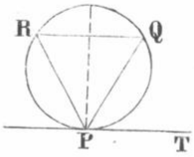
Das Maximum tritt ein, wenn die Höhe des Dreiecks PQR gleich wird der halben Höhe des Dreiecks ABC, also $RS=\frac{1}{2}CD$; es ist dann

$$\triangle PQR = \tfrac{1}{4} \triangle ABC.$$

2. Es ist ein Kreis und ein Peripheriepunkt P desselben gegeben; man soll die Sehne QR parallel der Kreistangente PT so legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreiecks PQR ein Maximum wird (Fig. 42).

Das Maximum tritt ein, wenn die Entfernung der Sehne vom Punkte P gleich wird $\frac{3}{4}$ des Kreisdurchmessers und es verhält sich dann die Dreiecksfläche zur Kreisfläche wie $\frac{3}{4}\sqrt{3} : \pi$.

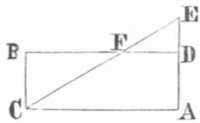
Fig. 42.



Im Wesentlichen bleiben diese Resultate ungestört, wenn man an die Stelle des Kreises eine Ellipse setzt, nur ist dann statt des Kreisdurchmessers derjenige Ellipsendurchmesser zu nehmen, welcher die zu PT parallelen Sehnen halbirt.

3. Durch die Ecke C des gegebenen Rechtecks $ACBD$ soll eine Gerade, welche die Gegenseiten AD in E und BD in F schneidet, so gelegt werden, dass $AE + BF$ ein Minimum wird, (Fig. 43).

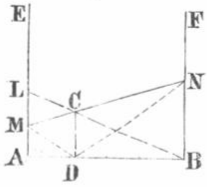
Fig. 43.



Das Minimum tritt ein, wenn $AE = BF$ gleich dem geometrischen Mittel zwischen den Rechteckseiten AC und BC genommen wird.

4. In den Endpunkten einer gegebenen geradlinigen Strecke AB sind auf letzterer Senkrechte AE und BF nach derselben Richtung gezogen; innerhalb des Raumes $EABF$ ist noch ein Punkt C gegeben; durch diesen soll man eine Gerade legen, welche AE in M und BF in N so schneidet, dass das geometrische Mittel zwischen AM und BN ein Minimum wird (Fig. 44).

Fig. 44.

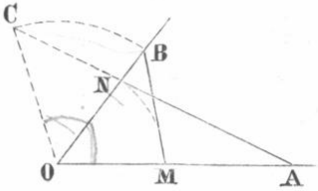


Man erhält die gesuchte Transversale, wenn man BC bis zum Durchschnitte L mit AE verlängert und den Mittelpunkt M des Abschnittes AL mit C verbindet. Ist D die Projection von C auf AB, so gelten hierbei folgende Beziehungen

$$\angle CDM = \angle CDN, \quad \sqrt{AD \cdot BD} \cdot \sqrt{AM \cdot BN} = \triangle ABC.$$

5. Auf den Schenkeln eines Winkels sind zwei feste Punkte A und B gegeben; man sucht zwei andere in gleichen Entfernungen von Scheitel O liegende Punkte M und N der Art, dass $AN + BM$ ein Minimum ist (Fig. 45).

Fig. 45.

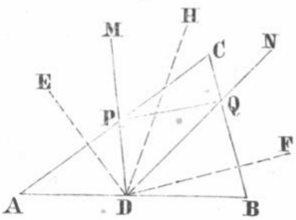


Nimmt man $\angle BOC = \angle BOA$, $OC = OB$ und zieht AC, so schneidet diese Gerade den Schenkel OB

in dem einen gesuchten Punkte N; der andere ergiebt sich durch $OM = ON$. Die Gerade AC ist zugleich die gesuchte Minimalsumme. Eine rein geometrische Betrachtung führt leicht zu denselben Resultaten.

6. Es ist ein Dreieck ABC gegeben und auf der Seite AB der Punkt D; auf den anderen Seiten AC und BC sollen die Punkte P und Q so bestimmt werden, dass der Winkel PDQ eine gegebene Grösse γ hat und dass der Flächeninhalt des Dreiecks PDQ ein Minimum wird (Fig. 46).

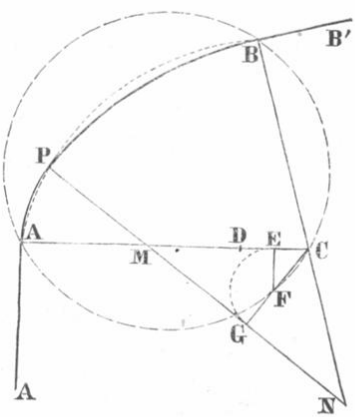
Fig. 46.



Setzt man $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\alpha + \beta - \gamma = \delta$ und bezeichnet $\angle APD$ mit x, so findet man, dass das gesuchte Minimum eintritt, wenn $\sin x \sin(x + \delta)$ ein Maximum wird. Dies führt zu folgender Construction. Man zieht $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, halbirt den Winkel EDF und trägt zu beiden Seiten der Halbirungslinie DH die gleichen Winkel HDM und HDN ab, deren Schenkel DM und DN die gesuchten Punkte bestimmen.

7. Zwei gegebene geradlinige Strecken AA' und BB' sollen durch zwei Kreisbögen AP und PB so verbunden werden, dass AA' Tangente an AP, BB' Tangente an BP, ferner P der innere Berührungspunkt beider Bögen und dass endlich die Differenz der Radien beider Bögen ein Minimum ist (Fig. 47).

Fig. 47.



Es sei C der Durchschnitt der in A und B auf den gegebenen Strecken errichteten Senkrechten, $AC = a$, $BC = b$, $\angle ACB = \gamma$, ferner $a > b$ und zur Abkürzung $a - b = c$, $1 - \cos\gamma = k$; man bemerkt leicht, dass der Mittelpunkt M des Bogens AP auf AC, ebenso der Mittelpunkt N des Bogens BP auf der Verlängerung von BC liegen und MN gleich der Radiendifferenz $BN - AM$ sein muss. Für $CM = x$, $MN = u$ erhält man der Reihe nach die Grössen von $AM = MP$, $NP = BN$, CN und aus dem Dreiecke CMN

$$u = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2kx^2 - c^2}{kx - c} - c.$$

Den gegebenen Bedingungen entspricht hiernach

$$CM = CN = \frac{a-b}{4\sin^2 \frac{1}{4}\gamma};$$

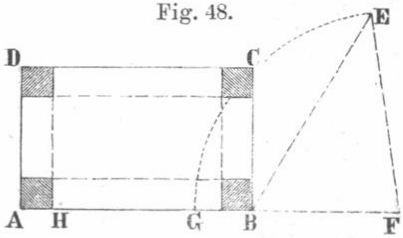
es ist daher $AD = BC$, $CE = \frac{1}{2} CD$ zu nehmen, in E senkrecht zu AC eine Gerade zu errichten, welche die Halbirungslinie des Winkels ACN in F schneidet, endlich CF um $FG = FE$ zu verlängern und durch G senkrecht zu CG eine Gerade zu ziehen, welche auf AC und BC die gesuchten Punkte M und N bestimmt.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass F auf dem um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise liegt und dass A, P, B Punkte eines aus dem Mittelpunkte F beschriebenen Kreises sind.

Die Determination, unter welcher die Aufgabe nur möglich ist, findet man leicht aus dem angegebenen Werthe von CM.

8. Aus einer rechteckförmigen Tafel soll durch Wegschneiden von vier gleichen Eckquadraten und gehöriges Zusammenbiegen ein offener rechtwinkliger Kasten von möglichst grossem Volumen gebildet werden (Fig. 48).

Fig. 48.



Sind $AB = a$, $BC = b$ die Seiten des gegebenen Rechtecks und bezeichnet x die gesuchte Quadratseite AH, so erhält man für x die quadratische Gleichung

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0,$$

von welcher aber nur die kleinere Wurzel zu gebrauchen ist. Mittelst eines Dreiecks EBF, worin $\angle EBF = 60^0$ ist, kann AH leicht construirt werden.

Wählt man zwei ganze Zahlen m und $n < \frac{1}{2} m$ willkürlich und setzt

$$a = 6(m^2 - n^2), \quad b = 6m(m - 2n),$$

so erhält man für x den rationalen Werth

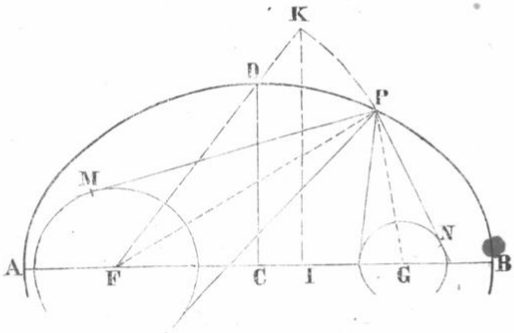
$$x = (m+n)(m-2n);$$

falls die für a, b, x gefundenen Werthe einen gemeinschaftlichen Factor haben, kann derselbe weggelassen werden.

Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. für $m = 5$, $n = 1$ die Werthe $a = 8$, $b = 5$, $x = 1$.

9. Um die Brennpunkte einer gegebenen Ellipse sind mit bekannten Radien Kreise beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll der Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe der von ihm aus an die Kreise gelegten Tangenten ein Maximum wird (Fig. 49).

Fig. 49.



Bezeichnet man die Halbachsen der Ellipsen mit a und b, die Radien der um die Brennpunkte F und G beschriebenen Kreise mit f und g, und nimmt den Brennstrahl $FP=r$ als unabhängige Variabele, so hat man

$$2MP+2NP=2\{\sqrt{r^2-f^2}+\sqrt{(2a-r)^2-g^2}\}$$

zu einem Maximum zu machen und erhält

$$FP=\frac{2af}{f+g},\quad GP=\frac{2ag}{f+g}.$$

Dies giebt folgende Construction: durch den inneren Aehnlichkeitspunkt I der beiden Kreise lege man parallel zu CD eine Gerade, welche FD in K schneidet; dann ist $FK=FP$ der eine, $AB-FK=GP$ der andere Brennstrahl des gesuchten Ellipsenpunktes. Bemerkenswerth ist noch, dass $\angle FPM=\angle GPN$ ist, dass also die beiden Kreise von P aus unter gleichen Winkeln gesehen werden.

10. Um die Brennpunkte einer Ellipse sind Kugeln beschrieben, welche innerhalb der Ellipse liegen; auf der letzteren soll man den Punkt P so bestimmen, dass die Summe der beiden Kugelkappen, welche man von P aus überblickt, ein Maximum wird.

Bei derselben Bezeichnung wie in No. 9), handelt es sich hier um das Maximum von

$$2\pi\left\{f^2+g^2-\left(\frac{f^3}{r}+\frac{g^3}{2a-r}\right)\right\};$$

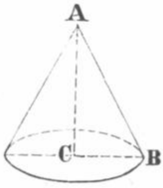
dieses tritt ein, wenn sich die Quadrate der beiden Brennstrahlen von P zu einander verhalten wie die Würfel der Kugelhalbmesser, also für

$$FP=\frac{2a\sqrt{f^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}},\quad GP=\frac{2a\sqrt{g^3}}{\sqrt{f^3}+\sqrt{g^3}}.$$

11. Unter allen geraden Kreiskegeln von gleicher Seite AB soll derjenige gefunden werden, dessen Volumen am grössten ist (Fig. 50).

Setzt man $AB = c$ und betrachtet den Radius der Grundfläche als unabhängige Variabele ($BC = x$), so findet man

Fig. 50.



$$BC = c\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad AC = c\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$\tan BAC = \sqrt{2}, \quad \angle BAC = 54^0 44' 8'' 2.$$

12. In einem geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem cubischen Inhalte so einbeschrieben werden, dass die Grundflächen beider Körper concentrisch sind.

Bezeichnet a den Basisradius, b die Höhe des Kegels, so ist der Basisradius des Cylinders $= \frac{2}{3}a$, die Cylinderhöhe $= \frac{1}{3}b$ und das Cylindervolumen $= \frac{4}{9}$ des Kegelinhaltes.

13. In einen geraden Kreiskegel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie in No 12) hat der Cylinder den Radius $\frac{1}{2}a$ und die Höhe $\frac{1}{2}b$.

14. In einen geraden Kreiskegel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergiebt sich der Cylinderradius $= \dfrac{ab}{2(b-a)}$, die Höhe $= \dfrac{b(b-2a)}{2(b-a)}$, wobei $b > 2a$ sein muss.

15. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem cubischen Inhalte einbeschrieben werden. Bezeichnet c den Kugelhalbmesser, so ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die Cylinderhöhe $= 2c\sqrt{\frac{1}{3}}$.

16. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiscylinder von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ist der Cylinderradius $= c\sqrt{\frac{1}{2}}$ und die Cylinderhöhe $= c\sqrt{2}$.

17. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiscylinder einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Der Cylinder hat die Dimensionen

$$\text{Radius} = c\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)}, \text{ Höhe} = 2c\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}.$$

18. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von grösstem cubischen Inhalte einbeschrieben werden.

Der Basisradius ist $\frac{2}{3}c\sqrt{2}$, die Höhe $\frac{4}{3}c$.

19. In eine gegebene Kugel soll der gerade Kreiskegel von grösstem Mantel einbeschrieben werden.

Der gesuchte Kegel ist derselbe wie bei der vorigen Aufgabe.

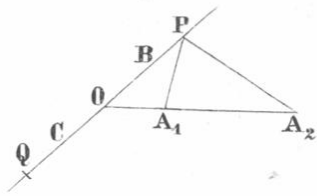
20. In eine gegebene Kugel soll derjenige gerade Kreiskegel einbeschrieben werden, dessen Gesammtoberfläche ein Maximum ist.

Nimmt man die Höhe des Kegels als unabhängige Variabele, so findet man

$$\text{Höhe} = \frac{23-\sqrt{17}}{16}c, \quad \text{Basisradius} = \frac{\sqrt{190+14\sqrt{17}}}{16}c.$$

21. Es sind zwei Punkte A_1, A_2 und eine Gerade BC gegeben; in letzterer soll man den Punkt P so bestimmen, dass der Winkel A_1PA_2, unter welchem die Strecke A_1A_2 von P aus gesehen wird, seinen grössten Werth erhält (Fig. 51).

Fig. 51.



Ist O der Durchschnitt von A_1A_2 mit BC, $OA_1=a_1$, $OA_2=a_2$, $\angle A_1OB=\gamma$, $OP=r$, $\angle A_1PA_2=\omega$, so ergiebt sich

$$\tan\omega=\frac{(a_2-a_1)r\sin\gamma}{a_1a_2-(a_1+a_2)r\cos\gamma+r^2},$$

und wenn ω, also auch $\tan\omega$ sein Maximum erreichen soll, so muss $r=\pm\sqrt{a_1a_2}$ sein. Es giebt demnach zwei solcher Punkte P und Q auf entgegengesetzten Seiten.

22. Auf der Achse einer bestimmten Parabel sind zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben; man soll denjenigen Parabelpunkt P ermitteln, für welchen $\angle A_1PA_2$ ein Maximum ist.

Bezeichnen a_1, a_2 die Abscissen der Punkte A_1, A_2 und ist

$$y=\sqrt{2bx}$$

die Gleichung der Parabel, so findet sich, wenn zur Abkürzung $\frac{1}{2}(a_1+a_2)-b=c$ gesetzt wird, als Abscisse von P

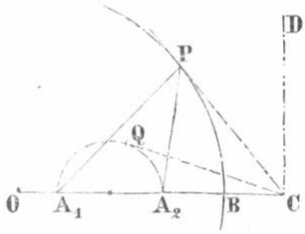
$$x=\tfrac{1}{3}\left(c+\sqrt{3a_1a_2+c^2}\right).$$

In dem speciellen Falle $b=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ wird einfacher $x=\sqrt{a_1a_2}.\tan 30^0$. Wenn A_1 mit dem Scheitel der Parabel zusammenfällt, ist die Aufgabe nur unter der Bedingung $a_2>2b$ lösbar.

23. Auf dem Durchmesser eines bestimmten Kreises sind zwei Punkte A_1 und A_2 gegeben; man soll denjenigen Peripheriepunkt P ermitteln, für welchen $\angle A_1PA_2$ ein Maximum wird (Fig. 52).

Nimmt man den Kreismittelpunkt zum Coordinatenanfang, setzt $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ und den Kreisradius $OB = b$, so findet man für die rechtwinkligen Coordinaten von P

Fig. 52.



$$x = \frac{(a_1 + a_2) b^2}{a_1 a_2 + b^2},$$

$$y = \frac{b \sqrt{(b^2 - a_1^2)(b^2 - a_2^2)}}{a_1 a_2 + b^2},$$

welche Formeln zu folgender Construction führen. Man beschreibe über $A_1 A_2$ als Durchmesser einen Kreis und bestimme auf der, nöthigenfalls verlängerten Geraden OB denjenigen Punkt C, von welchem aus gleiche Tangenten $CP = CQ$ an beide Kreise gelegt werden können (die Gerade $CD \perp OC$ ist die sogenannte Potenzlinie beider Kreise); der Berührungspunkt P besitzt dann die verlangte Eigenschaft.

Wenn A_1 und A_2 gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig ausserhalb des Kreises liegen, ist die Aufgabe immer möglich, dagegen wird sie unmöglich, wenn einer der gegebenen Punkte innerhalb und der andere ausserhalb des Kreises liegt.

24. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die grosse Halbachse der Ellipse am grössten erscheint.

Bezeichnet man die Halbachsen mit a und b, die lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ mit c, so erhält man für die Abscisse des gesuchten Punktes die Gleichung

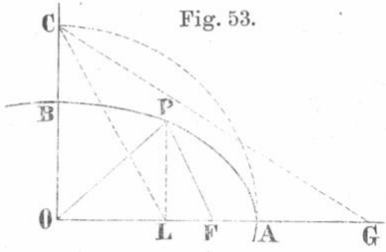
$$(x - a)(c^2 x^2 + a c^2 x - a^4) = 0$$

und hieraus

$$x = \frac{a}{2c}\left(\sqrt{4a^2 + c^2} - c\right).$$

Die Aufgabe ist nur für $a > b\sqrt{2}$ möglich.

Fig. 53.



25. Auf der Peripherie einer gegebenen Ellipse soll derjenige Punkt bestimmt werden, von welchem aus gesehen die lineare Excentricität am grössten erscheint (Fig. 53).

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergiebt sich

$$(cx-a^2)(cx^2+a^2x-a^2c)=0,$$

$$x=\frac{a}{2c}\left(\sqrt{a^2+4c^2}-a\right).$$

Nimmt man $OC=OA=a$, $OG=2OF=2c$, so schneidet die Halbirungslinie des Winkels OCG die Gerade OA in einem Punkte L, welcher der Endpunkt der Abscisse von P ist.

26. Zwei Punkte A_1, A_2 und eine Curve sind gegeben; auf letzterer soll der Punkt P so bestimmt werden, dass $\angle A_1PA_2$ ein Maximum oder Minimum ist.

Legt man den Coordinatenanfang O auf die Gerade A_1A_2, setzt $OA_1=a_1$, $OA_2=a_2$ und bezeichnet in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichung der Curve mit

$$y=f(x),$$

so erhält man die Coordinaten x und y von P durch Verbindung der vorstehenden Gleichung mit der folgenden

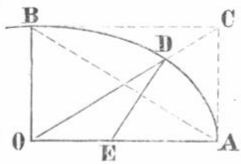
$$(a_1+a_2-2x)y+[a_1a_2-(a_1+a_2)x+x^2-y^2]y'=0.$$

27. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist geradlinig mit einem Peripheriepunkt verbunden und durch letzteren die Normale zur Curve gelegt; wie muss der Punkt gewählt werden, wenn der Winkel zwischen jenem Radiusvector und dieser Normale ein Maximum sein soll?

Wird der Ellipsenmittelpunkt als Pol und die grosse Halbachse als Polarachse genommen, so sind die Polarcoordinaten des gesuchten Punktes durch die Formeln bestimmt

$$\tan\theta=\frac{b}{a},\quad r=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Fig. 54.



Der gesuchte Punkt ist also der Durchschnitt D der Ellipse mit der Diagonale OC des aus den Halbachsen construirten Rechtecks $AOBC$ (Fig. 54); die Normale DE steht senkrecht auf der andern Diagonale AB, auch ist $\angle ODE=\angle OBA-\angle OAB$.

28. In der Fusspunktcurve einer gegebenen Ellipse sucht man denjenigen Punkt, für welchen der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Normale ein Maximum ist.

Sind OA und OB die Achsen der Ellipse, so schneidet die von O auf AB herabgelassene Senkrechte die Fusspunktcurve im gesuchten Punkte.

29. In einer gegebenen Curve soll man denjenigen Punkt bestimmen, für welchen der Winkel zwischen Radiusvector und Normale ein Maximum oder Minimum ist.

Bezieht man die Curve auf Polarcoordinaten, etwa

$$r = F(\theta),$$

so bestimmen sich θ und r aus dieser und der folgenden Gleichung

$$r'^2 - r r'' = 0,$$

welche geometrisch bedeutet, dass an der gesuchten Stelle der Krümmungshalbmesser mit der Polarnormale identisch ist.

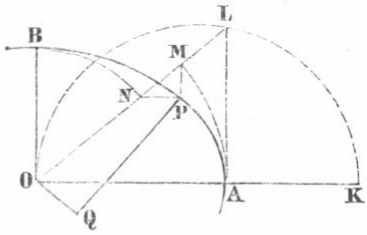
30. Welche Ellipsennormale liegt am weitesten vom Ellipsenmittelpunkte entfernt?

Die Coordinaten desjenigen Ellipsenpunktes, zu welchem in dem Quadranten der positiven Coordinaten die gesuchte Normale gehört, sind

$$x = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}, \quad y = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}.$$

Um den betreffenden Punkt zu construiren (Fig. 55), errichtet man im Endpunkte A der grossen Halbachse senkrecht zu OA die Gerade $AL = \sqrt{ab}$ und zieht OL, welche Gerade den umschriebenen Kreis in M, den eingeschriebenen Kreis in N schneidet und damit auch den gesuchten Punkt P bestimmt. Legt man durch ihn die Ellipsennormale, so ist deren Abstand von O, nämlich OQ, das geforderte Maximum und zwar $= a - b$; gleichzeitig ist $PQ = AL$ und Q der Krümmungsmittelpunkt für die Stelle P.

Fig. 55.



31. Welche Normale der Cardioide liegt am weitesten entfernt von der Spitze der Curve?

In Polarcoordinaten ist für denjenigen Cardioidenpunkt, durch welchen die Normale geht,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}, \quad r = \tfrac{4}{3} b,$$

wenn b den Durchmesser des erzeugenden Kreises bedeutet.

32. Ein Punkt und eine Curve sind gegeben; man sucht diejenige Normale der Curve, welche von jenem Punkte am weitesten entfernt oder ihm am nächsten liegt.

Wird der gegebene Punkt zum Coordinatenanfang genommen, so ist bei rechtwinkligen Coordinaten die Bedingung

$$(1+y'^2)^2+(y-xy')y''=0$$

zu erfüllen, dagegen bei Polarcoordinaten die Bedingung

$$r'^4+r^3r''=0.$$

Der Curvenpunkt, durch welchen die gesuchte Normale geht, besitzt hiernach die Eigenschaft, dass der zugehörige Krümmungsmittelpunkt identisch ist mit dem Fusspunkte der Senkrechten vom Coordinatenanfange auf die Normale.

33. In welchen Punkten der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen und durch die Gleichung

$$3a^2y=2a^2x+x^3$$

bestimmten Curve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Betrachtet man den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers als Maass der Krümmung einer Curve, so handelt es sich um das Minimum oder Maximum von ϱ; hier tritt das erste ein für

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\quad \varrho=9a\sqrt{6}.$$

34. In welchen Punkten der logarithmischen Linie

$$y=be^{\frac{x}{a}}$$

findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die stärkste Krümmung tritt ein für

$$x=al\left(\frac{a}{b\sqrt{2}}\right),\quad \varrho=\frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

35. In welchen Punkten der durch die Gleichung $y=f(x)$ bestimmten Curve findet die stärkste oder schwächste Krümmung statt?

Die Coordinaten der gesuchten Punkte müssen den Bedingungen $y=f(x)$ und

$$3y'y''^2-(1+y'^2)y'''=0$$

gleichzeitig genügen.

36. Die Fusspunktcurve der Ellipse wird bekanntlich durch die Polargleichung

$$r^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$$

ausgedrückt und besitzt im Falle $a>b\sqrt{2}$ einen Wendepunkt, für den

$$\tan\theta=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}}$$

ist; bei welchem Achsenverhältnisse wird dieses θ am kleinsten?

Setzt man $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = q$ und betrachtet q als unabhängige Variabele, so wird für $q = 2 + \sqrt{3}$ d. h. für

$$u = 2b \cos 15^0, \quad \theta = 75^0 \text{ ein Minimum.}$$

37. Die gedehnte Epicycloide hat (nach S. 91) unter der Bedingung

$$\frac{b^2}{a+b} < c < b$$

einen Inflexionspunkt, dessen Wälzungswinkel durch die Formel

$$\cos \omega = \frac{b^3 + (a+b)\, c^2}{(a+2b)\, b\, c}$$

bestimmt ist; wie muss c gewählt werden, wenn dieses ω seinen Maximalwerth erreichen soll?

Das Maximum tritt ein für

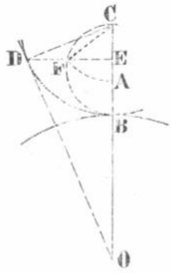
$$c = \sqrt{\frac{b^3}{a+b}}$$

und zwar ist dann

$$\tan \tfrac{1}{2} \omega = \frac{b-c}{b+c}.$$

Dies giebt folgende Construction (Fig. 56). Ist OB der Radius des festen, BC der Halbmesser des beweglichen Kreises in seiner Anfangslage, so beschreibe man über BC als Durchmesser einen Halbkreis, lege an denselben von O aus die Tangente OD, ziehe senkrecht zu BC die Gerade DE, welche den Halbkreis in F schneidet und nehme auf CB die Strecke $CA = CF$; es ist dann A der beschreibende Punkt.

Fig. 56.



Wählt man zwei rationale Zahlen m und $n < \frac{1}{2} m$ willkürlich und setzt

$$a = m(m-n)(m-2n), \quad b = (m-n)\, n^2,$$

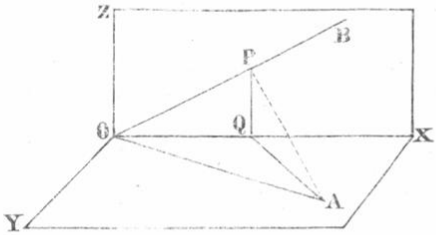
so erhält c den rationalen Werth

$$c = n^3, \quad \tan \tfrac{1}{2} \omega = \frac{m-2n}{m}.$$

38. Ein gegebener Punkt A der xy-Ebene wird von einer Lichtquelle beleuchtet, die sich in der xz-Ebene längs der Geraden OB verschieben lässt; bei welcher Stellung der Lichtquelle erhält A die stärkste Beleuchtung? (Fig. 57).

Bezeichnet λ die Lichtmenge, welche A erhalten würde, falls die Lichtquelle in der Entfernung 1 senkrecht über A stünde, so lässt sich die Beleuchtung für den Fall, wo sich die Lichtquelle in P befindet, nach dem Satze ermitteln, dass die Beleuchtung direct proportional dem Sinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ist; sie beträgt also, wenn $PQ \perp OX$,

Fig. 57.



$$\frac{\lambda \sin PAQ}{\overline{AP}^2} = \lambda \frac{PQ}{\overline{AP}^3}.$$

Sind ferner a und b die rechtwinkligen Coordinaten von A, x und z die rechtwinkligen Coordinaten von P, und ist $\angle BOX = \beta$, so hat man für die Beleuchtung von A den Ausdruck

$$\frac{\lambda z}{\sqrt{[(x-a)^2+b^2+z^2]^3}} \text{ und } z = x \tan \beta.$$

Die Lage von P bestimmt sich durch eine quadratische Gleichung, aus welcher nach Einführung von

$$OP = r, \quad OA = c, \quad \angle AOX = \alpha, \quad c \cos \alpha \cos \beta = k$$

erhalten wird

$$r = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 8c^2}}{4}.$$

Es giebt demnach zwei solcher Punkte, von denen der eine auf OB, der andere auf der Rückverlängerung von OB liegt.

In dem sehr einfachen Falle $\alpha = 0$, $\beta = 90^0$ wird $r = \pm c \sqrt{\frac{1}{2}}$; für $\alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^0$, $\beta = \arccos \frac{1}{3}$ erhält r die beiden Werthe $\frac{3}{4}c$ und $-\frac{2}{3}c$.

39. Wie in der vorigen Aufgabe sei A, statt der Geraden OB dagegen ein in der xz-Ebene liegender Kreis gegeben, und es werde auf letzterem P gesucht.

Nimmt man den Kreismittelpunkt zum Coordinatenanfang, setzt den Kreishalbmesser $= h$ und behält im Uebrigen die vorige Bezeichnung bei, so erhält man für x nur den einen Werth

$$x = \frac{\sqrt{12a^2h^2 + (c^2+h^2)^2} - (c^2+h^2)}{2a},$$

für welchen das Maximum der Beleuchtung eintritt.

40. Wie bei der vorigen Aufgabe sei A, und in der Ebene xz irgend eine durch die Gleichung $z=f(x)$ bestimmte Curve gegeben; man sucht auf letzterer den Ort der Lichtquelle für das Maximum oder Minimum der Beleuchtung von A.

Die Coordinaten von P bestimmen sich in diesem Falle aus den Gleichungen $z=f(x)$ und

$$3(x-a)z-(x^2-2ax+c^2-2z^2)z'=0,$$

wobei durch eine specielle Discussion zu entscheiden ist, welche x und z einem Maximum und welche einem Minimum entsprechen.

41. Reciproke Maxima und Minima. Wenn zwischen drei Grössen x, u, v eine Gleichung von der Form

$$u-v=f(x)$$

statt findet und es frei steht, die eine oder andere der beiden Grössen u und v zu einer Constanten zu machen, so hat man bei constantem v die Gleichung $u'=f'(x)$, bei constantem u dagegen $v'=-f'(x)$. Aus diesen Gleichungen geht unmittelbar hervor, dass einem Minimum oder Maximum von u ein Maximum oder Minimum von v entspricht, dass also zwei reciproke Sätze entstehen, wie sie in den folgenden Beispielen ausgesprochen sind.

42. Die Grundlinie eines Rechtecks sei g, seine Höhe h, sein Umfang U, seine Fläche V; wird ferner das Verhältniss $h:g$ mit x bezeichnet, so ist

$$\frac{U^2}{V}=4\frac{(1+x)^2}{x},$$

oder

$$2lU-lV=l4+2l(1+x)-lx.$$

Diese Gleichung hat die in No. 41) erwähnte Form, und da die Function rechter Hand für $x=1$ ihren Minimalwerth erreicht, so lassen sich folgende zwei reciproke Sätze aufstellen: Unter allen Rechtecken von gleicher Fläche hat das Quadrat den kleinsten Umfang, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat das Quadrat die grösste Fläche. Dabei ist immer $U^2=16V$; einem gegebenen V entspricht $g=h=\sqrt{V}$, bei gegebenem U ist $g=h=\frac{1}{4}U$.

43. Ein cylindrisches Hohlmaass habe r zum Radius der Basis, h zur Höhe, U zur Oberfläche, V zum Volumen; für $\frac{h}{r}=x$ ist dann

$$\frac{U^3}{V^2}=\pi\frac{(1+2x)^3}{x^2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze: Unter allen cylindrischen Hohlmaassen von gleichem Fassungsraume hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisradius ist, und unter allen cylindrischen Hohlmaassen von gleicher Oberfläche fasst dasjenige am meisten, bei welchem dasselbe Verhältniss zwischen Höhe und Basisradius stattfindet.

In allen Fällen ist $U^3 = 27\pi V^2$; bei gegebenem V folgt

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

dagegen bei gegebenem U

$$r = h = \sqrt{\frac{U}{3\pi}}.$$

44. Für einen allseitig geschlossenen Cylinder mögen dieselben Bezeichnungen wie vorhin gelten; man gelangt dann zu folgenden Sätzen: Unter allen Cylindern von gleichem Inhalte besitzt derjenige die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich dem Basisdurchmesser ist, und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche hat derjenige das grösste Volumen, bei welchem dasselbe Verhältniss zwischen Höhe und Basisdurchmesser stattfindet.

Dabei ist immer $U^3 = 54\pi V^2$ und, je nachdem V oder U als gegeben betrachtet wird,

$$r = \tfrac{1}{2}h = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \quad r = \tfrac{1}{2}h = \sqrt{\frac{U}{6\pi}}.$$

45. Unter allen geraden Kreiskegeln von gleichem Volumen hat derjenige den kleinsten Mantel, dessen Seite gleich dem Basisdurchmesser ist, und unter allen Kegeln von gleicher Mantelfläche besitzt derjenige das grösste Volumen, bei welchem die nämliche Gleichheit stattfindet.

Zugleich ist immer $U^3 = 24\pi V^2$.

46. Unter allen geraden Kreiskegeln von demselben Volumen besitzt derjenige die kleinste Gesammtoberfläche, dessen Seite gleich dem dreifachen Basisradius ist, und unter allen Kegeln von gleicher Oberfläche hat derjenige den grössten cubischen Inhalt, bei welchem zwischen der Seite und dem Basisradius dasselbe Verhältniss stattfindet.

Zugleich ist in beiden Fällen $U^3 = 72\pi V^2$.

47. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiscylinder und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der einen ebenen

Fläche des Cylinders zusammenfällt; das Verhältniss der Cylinderhöhe zum Radius der Cylinderbasis sei x, U die Oberfläche, V das Volumen des Körpers. Bei constantem V ist dann U ein Minimum, bei constantem U dagegen V ein Maximum für $x=1$ und $U^3=45\pi V^2$.

48. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiskegel und einer daran gesetzten Halbkugel, deren ebene Fläche mit der Kegelbasis zusammenfällt; das Verhältniss der Kegelhöhe zum Radius der Halbkugel sei x, die übrige Bezeichnung wie vorhin; es ist dann

$$\frac{U^3}{V^2}=9\pi\frac{(2+\sqrt{1+x^2})^3}{(2+x)^2}.$$

Der Ausdruck rechter Hand wird ein Minimum, wenn

$$x^2+6x-2-4\sqrt{1+x^2}$$

vom Negativen durch Null ins Positive übergeht, was für positive x nur an der Stelle $x=1{,}1259832$ der Fall ist.

Bei constantem V wird demnach U für diesen Werth ein Minimum, bei constantem U dagegen V ein Maximum.

§. 33.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen.

Wenn $F(x,y,z\ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so kann man sich $x,y,z\ldots$ als willkürliche Functionen einer neuen Variabelen t denken und dann muss der Ausdruck

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\cdots$$

sein Vorzeichen ändern, während $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ etc. ganz willkürliche Grössen bedeuten. Falls $\frac{dF}{dt}$ eine stetige Function ist, kann der Vorzeichenwechsel nur durch Null hindurchgehen und hierzu gehören die Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0,\ldots.$$

Um zu entscheiden, ob F durch die hieraus bestimmten Werthe von x,y,z etc. zu einem Maximum oder Minimum wird, muss zunächst untersucht werden, ob $\frac{d^2F}{dt^2}$ durch Substitution jener Werthe negativ

oder positiv ausfällt. Sollte dieser Differentialquotient bei der genannten Substitution verschwinden, so müssen die höheren Differentialquotienten von F discutirt werden.

Bei Functionen zweier Variabelen führt die Untersuchung von $\frac{d^2 F}{dt^2}$ zu folgender Regel: Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}<0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Function F, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen. Verschwinden dagegen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

für jene Werthe von x und y, so verliert das angegebene Criterium seine Anwendbarkeit und es ist dann am zweckmässigsten, aus der Natur der gestellten speciellen Aufgabe zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet. Dieselbe Bemerkung gilt für Functionen von drei oder mehr Variabelen und ebenso für den Fall, dass sprungweise Aenderungen der Differentialquotienten vorkommen.

Beispiele und Aufgaben.

1. Die Function

$$F(x,y)=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+K$$

hat nur dann ein Maximum oder Minimum, wenn C^2-AB negativ ist; bei negativen A und B liefern die Werthe

$$x=\frac{CE-BD}{AB-C^2},\quad y=\frac{CD-AE}{AB-C^2}$$

das Maximum, bei positiven A und B das Minimum der Function, nämlich

$$F(x,y)=\frac{2CD-(AE^2+BD^2)}{AB-C^2}+K.$$

2. Es sei

$$F(x,y)=xy(Ax+By-C);$$

die partiellen Differentialquotienten dieser Function verschwinden in folgenden Fällen

$$x=0, \quad y=0;$$
$$x=0, \; y=\frac{C}{B}; \quad x=\frac{C}{A}, \; y=0;$$
$$x=\frac{C}{3A}, \quad y=\frac{C}{3B}.$$

Von diesen vier Werthepaaren liefern die drei ersten weder Maxima noch Minima; das letzte giebt das Maximum

$$F(x,y)=-\frac{C^3}{27AB}.$$

3. Eine gegebene Zahl soll derart in drei Theile zerlegt werden, dass das Product aus der m^{ten} Potenz des ersten, der n^{ten} Potenz des zweiten und der p^{ten} Potenz des dritten Theiles ein Maximum wird.

Nur bei positiven m, n, p existirt ein solches Maximum; die gesuchten Theile der Zahl c sind

$$\frac{mc}{m+n+p}, \quad \frac{nc}{m+n+p}, \quad \frac{pc}{m+n+p}$$

und das erwähnte Maximalproduct ist

$$\frac{m^m n^n p^p c^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

4. Von einem innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC liegenden Punkte O sind auf die Dreieckseiten BC, CA, AB die Senkrechten OP, OQ, OR herabgelassen; man soll den Punkt O so bestimmen, dass das rechtwinklige Parallelepiped aus den Kanten OP, OQ, OR die kleinste Diagonale besitzt.

Bezeichnet man die Dreieckseiten mit a, b, c, die Senkrechten darauf mit x, y, z und mit Δ die Dreiecksfläche, so hat man den Ausdruck

$$x^2+y^2+\left(\frac{2\Delta-ax-by}{c}\right)^2$$

zu einem Minimum zu machen; die hierzu nöthigen Werthe sind

$$x=\frac{2\Delta.a}{a^2+b^2+c^2}, \quad y=\frac{2\Delta.b}{a^2+b^2+c^2}, \quad z=\frac{2\Delta.c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Mittelst der Proportion

$$x:y:z=a:b:c$$

wird man leicht eine Construction des Punktes O finden.

Derselbe ist übrigens der gemeinschaftliche Durchschnitt derjenigen drei Geraden, welche die Mittelpunkte der Dreieckseiten mit den Mittelpunkten der zugehörigen Dreieckshöhen verbinden. Die

Seiten des Dreiecks PQR verhalten sich wie die Schwerlinien des Dreiecks ABC und stehen senkrecht auf den letzteren.

5. Innerhalb des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass das rechtwinklige Parallelepiped, welches die Abstände OP, OQ, OR zu Kanten hat, die grösste Oberfläche besitzt.

Behält man die vorige Bezeichnung bei und setzt zur Abkürzung

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=N,$$

so erhält man die Werthe

$$x=\frac{2\Delta}{N}(b+c-a),\quad y=\frac{2\Delta}{N}(c+a-b),\quad z=\frac{2\Delta}{N}(a+b-c).$$

Der in das Dreieck ABC beschriebene Kreis berühre die Seiten BC, CA, AB in den Punkten A_0, B_0, C_0; es ist dann

$$AB_0=AC_0=\tfrac{1}{2}(b+c-a)=a_0,$$
$$BC_0=BA_0=\tfrac{1}{2}(c+a-b)=b_0,$$
$$CA_0=CB_0=\tfrac{1}{2}(a+b-c)=c_0,$$

wobei a_0, b_0, c_0 zur Abkürzung dienen; die Proportion

$$x:y:z=a_0:b_0:c_0$$

lässt sich jetzt zur Construction des Punktes O benutzen. Noch sei bemerkt, dass sich die Umfänge der Seitenflächen des gesuchten Parallelepipedes wie die Dreiecksseiten verhalten.

6. Innerhalb des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass das Parallelepiped aus den Kanten OP, OQ, OR das grösstmögliche Volumen besitzt.

Bei derselben Bezeichnung wie vorhin ergeben sich die Werthe

$$x=\frac{2\Delta}{3a},\quad y=\frac{2\Delta}{3b},\quad z=\frac{2\Delta}{3c}.$$

Der Punkt O liegt demnach so, dass die Dreiecke BOC, COA, AOB die gleiche Fläche $\frac{1}{3}\Delta$ haben. Theilt man irgend eine Dreieckseite in drei gleiche Theile und zieht durch jeden Theilpunkt eine Parallele zur nächstliegenden Seite, so schneiden sich diese Parallelen in dem gesuchten Punkte O.

7. In der Ebene des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass $\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2$ seinen kleinsten Werth erhält.

Bezeichnet man die Dreieckseiten BC, CA, AB mit a, b, c, die Gegenwinkel mit α, β, γ und setzt $AO=u$, $\angle OAB=\theta$, so findet man für u und θ die Bedingungsgleichungen

$$3u=c\cos\theta+b\cos(\alpha-\theta),\quad 0=c\sin\theta-b\sin(\alpha-\theta),$$

deren Quadratsumme giebt

$$u = \tfrac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$$

und analog

$$BO = v = \tfrac{1}{3}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos\beta}, \quad CO = w = \tfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}.$$

Die Construction von u, v, w liegt sehr nahe und zeigt, dass O der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.

8. In der Ebene des Dreiecks ABC soll der Punkt O so bestimmt werden, dass die Summe $a_1 AO + b_1 BO + c_1 CO$, worin a_1, b_1, c_1 gegebene positive Factoren bedeuten, ihren Minimalwerth erreicht.

Die vorige Bezeichnung beibehaltend findet man die beiden Bedingungsgleichungen

$$a_1 = b_1 \frac{c\cos\theta - u}{v} + c_1 \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w},$$

$$0 = b_1 \frac{c\sin\theta}{v} - c_1 \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w},$$

d. h., wenn die Verlängerung von AO mit OL bezeichnet wird,

$$a = b_1 \cos BOL + c_1 \cos COL,$$
$$0 = b_1 \sin BOL - c_1 \sin COL.$$

Eliminirt man hieraus einmal c_1, das andere Mal b_1, so folgt

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin BOC : \sin COA : \sin AOB,$$

oder wenn

$$\angle BOC = 180^0 - \sigma, \quad \angle COA = 180^0 - \tau, \quad \angle AOB = 180^0 - \omega$$

gesetzt wird

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sin\sigma : \sin\tau : \sin\omega,$$
$$\sigma + \tau + \omega = 180^0.$$

Die Hilfswinkel σ, τ, ω bilden demnach die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten a_1, b_1, c_1 oder diesen Grössen proportional sind; die Möglichkeit des Punktes O setzt die Möglichkeit dieses Dreiecks voraus.

Um hiernach den Punkt O zu construiren, beschreibt man über den Dreieckseiten BC, CA, AB als Sehnen genommen, Kreisbögen, in denen die Winkel $180^0 - \sigma$, $180^0 - \tau$ und $180^0 - \omega$ Peripheriewinkel sind; der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser Kreisbögen ist der Punkt O.

In dem einfachsten Falle $a_1 = b_1 = c_1$ wird $\sigma = \tau = \omega = 60^0$ und jeder der Winkel BOC, COA, AOB beträgt dann 120^0. Für $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ werden σ, τ, ω identisch mit den Winkeln α, β, γ und der Punkt O ist dann der Durchschnitt der Höhen des Dreiecks ABC.

9. Reciproke Maxima und Minima. Wenn eine Gleichung von der Form

$$u-v=F(x,y,z,\ldots)$$

stattfindet und es frei steht, die eine oder andere der beiden Grössen u und v constant zu nehmen, so liefern diejenigen Werthe von $x, y, z\ldots$, welche $F(x, y, z\ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, einerseits das Maximum (resp. Minimum) von u bei constantem v, andererseits das Minimum (resp. Maximum) von v bei constantem u.

10. Aus einem Rechtecke und einem daran gesetzten gleichschenkligen Dreiecke ist ein Fünfeck construirt; die gemeinschaftliche Basis des Rechtecks und des Dreiecks sei $2g$, die Rechteckshöhe h, die Dreieckshöhe h_1, ferner $\frac{h}{g}=x$, $\frac{h_1}{g}=y$, endlich U der Umfang, V der Flächeninhalt des Fünfecks; es ist dann

$$\frac{U^2}{V}=4\frac{(1+x+\sqrt{1+y^2})^2}{2x+y},$$

oder

$$2lU-lV=l4+2l\left(1+x+\sqrt{1+y^2}\right)-l(2x+y).$$

Das Minimum der Function rechter Hand tritt ein, wenn die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{1+x+\sqrt{1+y^2}}-\frac{1}{2x+y}=0,$$

$$\frac{2}{1+x+\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{1}{2x+y}=0$$

erfüllt sind. Aus der ersten folgen die Relationen

$$y=\frac{1-(x-1)^2}{2(x-1)},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{1+(x-1)^2}{2(x-1)},$$

nachher liefert die zweite Bedingungsgleichung die Werthe

$$x=1,\quad x=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

von denen zwei unbrauchbar sind, weil y einen positiven endlichen Werth erhalten soll. Für

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

wird nun U ein Minimum bei constantem V, und umgekehrt V ein Maximum bei constantem U.

11. Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiscylinder und einem darauf gestellten geraden Kreiskegel, dessen Basis mit der einen ebenen Fläche des Cylinders zusammenfällt; der Cylinder habe den Radius r, die Höhe h, der Kegel die Höhe h_1 und es sei $\frac{h}{r}=x$, $\frac{h_1}{r}=y$, die Oberfläche des Körpers $=U$, sein Volumen $=V$; man hat dann

$$\frac{U^3}{V^2}=9\pi\frac{(1+2x+\sqrt{1+y^2})^3}{(3x+y)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Werthe

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sqrt{1+y^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von U liefern bei constantem V und zugleich das Maximum von V bei constantem U.

12. An die eine ebene Endfläche eines geraden Kreiscylinders ist eine Halbkugel, an die andere ein gerader Kreiskegel angesetzt; bei derselben Bezeichnung wie vorhin ist dann

$$\frac{U^3}{V^2}=9\pi\frac{(2+2x+\sqrt{1+y^2})^3}{(2+3x+y)^2}.$$

Hieraus folgt, dass die Werthe

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad z=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

das Minimum von U liefern bei constantem V und zugleich das Maximum von V bei constantem U.

§. 34.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

I. Wenn $F(x,y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x,y)=0$ erfüllt sein soll, so könnte man aus der letzten Gleichung y als Function von x entwickeln und diesen Werth in $F(x,y)$ substituiren, so dass man es nur noch mit einer Function der einen unabhängigen Variabelen x zu thun hat; meistens ist es aber besser, sowohl $F(x,y)$ als die Bedingungsgleichung zu differenziren, wobei y als implicite Function von x gilt, und nachher $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren. Man erhält dann zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y.

1. In rechtwinkligen Coordinaten ist ein Punkt ab und ausserdem eine Gerade gegeben, deren Gleichung sein möge

$$Ax+By=C;$$

man sucht den kürzesten Abstand des Punktes von der Geraden.

Hier ist der Ausdruck

$$F(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

so zu einem Minimum zu machen, dass x und y der Gleichung der Geraden genügen. Zum Minimum von F gehört die Bedingung $\frac{dF}{dx}=0$, d. i.

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0;$$

die Gleichung der Geraden liefert

$$A+B\frac{dy}{dx}=0,$$

mithin ist durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$

$$B(x-a)-A(y-b)=0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der Geraden, so erhält man die Werthe

$$x=a+\frac{A(C-Aa-Bb)}{A^2+B^2}, \quad y=b+\frac{B(C-Aa-Bb)}{A^2+B^2},$$

$$F(x,y)=\frac{C-Aa-Bb}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wobei das Wurzelvorzeichen so zu nehmen ist, dass die rechte Seite positiv ausfällt.

2. Man verlangt den kleinsten und grössten Radiusvector einer centrischen Linie zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+2Cxy=K$$

bestimmt ist.

Im vorliegenden Falle ist $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=r$, und man hat

$$\frac{dr}{dx}=0, \text{ wenn } x+y\frac{dy}{dx}=0;$$

aus der Gleichung der Curve ergiebt sich ferner

$$Ax+Cy+(By+Cx)\frac{dy}{dx}=0,$$

mithin zusammen

$$y(Ax+Cy)-x(By+Cx)=0.$$

Nimmt man hierzu die Gleichung der Curve in der Form

$$x(Ax+Cy)+y(By+Cx)=K$$

und setzt für den Augenblick

$$Ax+Cy=u, \quad By+Cx=v,$$

so erhält man für die Unbekannten u und v

$$u=\frac{Kx}{x^2+y^2}=\frac{Kx}{r^2}, \quad v=\frac{Ky}{x^2+y^2}=\frac{Ky}{r^2}.$$

Vermöge der Bedeutung von u und v ist weiter

$$\frac{K}{r^2}-A=C\frac{y}{x}, \quad \frac{K}{r^2}-B=C\frac{x}{y},$$

mithin

$$\left(\frac{K}{r^2}-A\right)\left(\frac{K}{r^2}-B\right)=C^2,$$

$$\frac{2K}{r^2}=A+B\pm\sqrt{(A+B)^2+4(C^2-AB)}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Maximal- und Minimalwerthe von r. Für $C^2-AB<0$ sind alle vier r reell und zu je zweien entgegengesetzt gleich; für $C^2-AB>0$ giebt es nur zwei reelle einander entgegengesetzte r.

3. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\,\beta$ soll die kürzeste oder längste Linie nach einem Punkte xy der Parabel gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$y=\frac{x^2}{2c}$$

bestimmt ist.

Man hat in diesem Falle die Gleichungen

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dy}{dx}=c,$$

welche geometrisch bedeuten, dass die gesuchten Geraden normal zur Parabel liegen.

Die erste Gleichung wird durch Substitution von c statt $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{c(x-\alpha)}{x}=\beta-y,$$

und wenn man den unbekannten Werth beider Seiten dieser Gleichung mit u bezeichnet, so ist

$$x=\frac{c\alpha}{c-u}, \quad y=\beta-u$$

und vermöge der Parabelgleichung

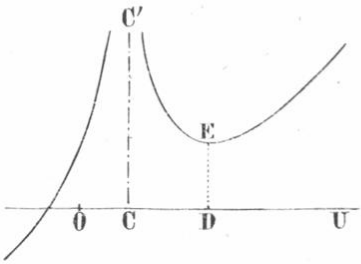
$$\beta = u + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c\alpha^2}{(c-u)^2}.$$

Aus den Formeln für x und y geht hervor, dass x und y eben so viel reelle Werthe haben, als die vorstehende cubische Gleichung reelle Werthe von u liefert. Um hierüber unabhängig von der Theorie der cubischen Gleichungen zu entscheiden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c\alpha^2}{(c-u)^2}$$

als Gleichung einer in rechtwinkligen Coordinaten u und v ausgedrückten Curve und untersuche deren Verlauf nach den gewöhnlichen Regeln. Man findet, dass diese Curve aus zwei getrennten Zweigen besteht (Fig. 58), deren erster von $u = -\infty, v = -\infty$ bis $u = c, v = +\infty$ nur steigt, also bei $OC = c$ eine verticale Asymptote CC' hat, während der zweite einen untern Culminationspunkt E besitzt, dessen Coordinaten sind

Fig. 58.



$$OD = c + \sqrt[3]{c\alpha^2}, \quad DE = c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2}.$$

Die Frage, wann $v = \beta$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, wie viel Punkte eine in der Höhe β parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade mit der betrachteten Curve gemein hat; dann lehrt aber ein Blick auf die Figur, dass die Anzahl der gemeinsamen Punkte 1, 2 oder 3 beträgt, je nachdem β kleiner, gleich oder grösser als DE ist. Die obige cubische Gleichung für u besitzt demnach 1, 2 oder 3 reelle Wurzeln, je nachdem

$$\beta \lesseqgtr c + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{c\alpha^2},$$

oder

$$27\,c\alpha^2 \gtreqless 8(\beta - c)^3$$

ist.

Geometrisch bedeutet diese Unterscheidung, dass von dem Punkte $\alpha\beta$ eine, zwei oder drei Normalen zur Parabel gezogen werden können, je nachdem jener Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabelevolute liegt. Im letzten Falle verschwindet die algebraische Summe

der Abscissen der drei Parabelpunkte, nach welchen die Normalen gehen, was ein einfaches Mittel giebt, um zu zwei solchen Normalen die dritte zu construiren.

4. Durch einen gegebenen Punkt $\alpha\beta$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte der Ellipse gezogen werden, welche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

bestimmt ist.

Die gesuchten Linien sind die durch den Punkt $\alpha\beta$ gehenden Normalen der Ellipse; die Coordinaten ihrer Endpunkte müssen ausser der Ellipsengleichung noch folgender Bedingung genügen

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{x}=\frac{b^2(y-\beta)}{y}.$$

Bezeichnet man mit u den unbekannten gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten, so hat man

$$x=\frac{a^2\alpha}{a^2-u},\quad y=\frac{b^2\beta}{b^2-u}$$

und vermöge der Ellipsengleichung

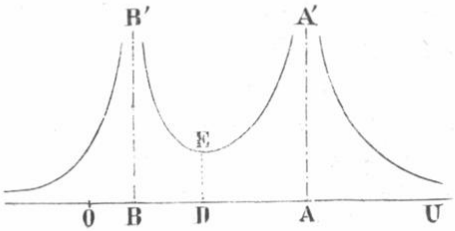
$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}=1.$$

Jede reelle Wurzel dieser biquadratischen Gleichung liefert ein reelles x und ein reelles y; es giebt daher so viel Normalen durch den Punkt $\alpha\beta$, als die vorliegende Gleichung reelle Wurzeln besitzt. Um die Anzahl derselben rasch zu finden, betrachte man die allgemeinere Gleichung

$$v=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten u und v bezogenen Curve. Letztere besteht aus drei getrennten Zweigen (Fig. 59); der erste Zweig hat die Abscissenachse zur horizontalen Asymptote und steigt bis zu einer in der Entfernung $OB=b^2$ liegenden verticalen Asymptote BB'; der zweite Curvenzweig geht von der Asymptote BB' bis zu der in der Entfernung

Fig. 59.



$OA = a^2$ parallelen Asymptote AA' und besitzt einen untern Culminationspunkt E, dessen Ordinate $DE = \mu$ durch die Formel

$$\mu = \frac{\left(\sqrt[3]{a^2\alpha^2} + \sqrt[3]{b^2\beta^2}\right)^3}{c^4}, \quad \left(c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

bestimmt ist; der dritte Zweig geht von der verticalen Asymptote AA' abwärts und nähert sich der Abscissenachse als seiner Asymptote. Die Frage, wann $v = 1$ wird, ist nun einerlei mit der Frage, in wie viel Punkten eine in der Höhe 1 parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade die Curve schneiden wird; man übersieht augenblicklich, dass zwei, drei oder vier Durchschnitte entstehen, je nachdem 1 kleiner, gleich oder grösser als μ ist. Demnach besitzt die biquadratische Gleichung für u zwei, drei oder vier reelle Wurzeln, je nachdem

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} \gtreqless c^{\frac{4}{3}}$$

ist, und es gehen also durch den Punkt $\alpha\beta$ zwei, drei oder vier Ellipsennormalen, je nachdem dieser Punkt ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipsenevolute liegt.

5. Man soll die analoge Untersuchung für die Hyperbel ausführen, bei welcher ein ganz ähnliches Resultat zum Vorschein kommt.

II. Wenn $F(x, y, z)$ so zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, dass die Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ erfüllt bleibt, so hat man es mit einer Function von nur zwei unabhängigen Variabelen x, y zu thun, da z eine implicite Function von x und y ist. Mit Rücksicht hierauf bildet man die partiell nach x und y genommenen Differentialquotienten von F, ebenso die von φ, und eliminirt die hierbei vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$; man erhält dann drei Bedingungsgleichungen für x, y und z.

6. In rechtwinkligen Coordinaten ist ein Punkt abc und ausserdem eine Ebene gegeben, deren Gleichung sein möge

$$Ax + By + Cz = D;$$

man sucht den kürzesten Abstand des Punktes von der Ebene.

Es handelt sich hier um das Minimum von

$$F(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

wobei x, y, z die Gleichung der Ebene befriedigen müssen. Zum Minimum von F gehören die Bedingungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, d. h.

$$x-a+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad y-b+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

die Gleichung der Ebene liefert

$$A+C\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad B+C\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

also ist durch Elimination der partiellen Differentialquotienten

$$C(x-a)-A(z-c)=0, \quad C(y-b)-B(z-c)=0.$$

Verbindet man diese Bedingungen mit der Gleichung der Ebene, so erhält man die Werthe

$$x=a+\frac{A(D-Aa-Bb-Cc)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y=b+\frac{B(D-Aa-Bb-Cc)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z=c+\frac{C(D-Aa-Bb-Cc)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$F(x,y,z)=\frac{D-Aa-Bb-Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

wobei das Wurzelvorzeichen so zu nehmen ist, dass die rechte Seite positiv ausfällt.

7. Man verlangt den kleinsten und grössten Radiusvector einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=K$$

bestimmt ist.

Da hier $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, so müssen erstens die Gleichungen gelten

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

ferner erhält man aus der Gleichung der Fläche, wenn die Abkürzungen

$$Ax+Fy+Ez=u,$$
$$By+Dz+Fx=v,$$
$$Cz+Ex+Dy=w$$

eingeführt werden,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{v}{w},$$

also zusammen

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}=\frac{w}{z}.$$

Wie man sieht, ist diese Aufgabe die nämliche, welche schon in §. 22, No. 6 gelöst wurde. Benutzt man wieder die Zeichen

$$L = A - \frac{EF}{D}, \quad M = B - \frac{FD}{E}, \quad N = C - \frac{DE}{F},$$

so erhält man zur Bestimmung der Maximalwerthe von r die folgende Gleichung sechsten Grades

$$1 = \frac{EF}{D} \cdot \frac{r^2}{K - Lr^2} + \frac{FD}{E} \cdot \frac{r^2}{K - Mr^2} + \frac{DE}{F} \cdot \frac{r^2}{K - Nr^2}.$$

8. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ soll die kürzeste oder längste Gerade nach einem Punkte xyz des elliptischen Paraboloides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}, \quad (a < b).$$

Die Bedingungsgleichungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums von

$$F(x, y, z) = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

sind hier

$$\frac{a(x-\alpha)}{x} = \frac{b(y-\beta)}{y} = \gamma - z,$$

oder, wenn u den gemeinschaftlichen Werth dieser drei Ausdrücke bezeichnet,

$$x = \frac{a\alpha}{a-u}, \quad y = \frac{b\beta}{b-u}, \quad z = \gamma - u.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Fläche, so erhält man für u die Gleichung fünften Grades

$$\gamma = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\},$$

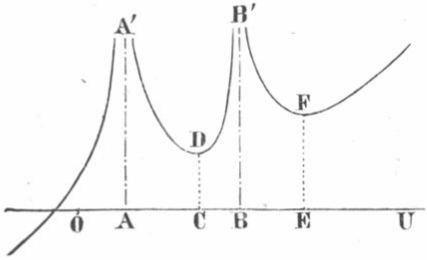
die sich zwar algebraisch nicht auflösen lässt, für welche aber doch die Bedingungen angegeben werden können, unter denen sie eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln besitzt. Man betrachte nämlich die allgemeinere Gleichung

$$v = u + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-u)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-u)^2}\right\}.$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten u und v bezogenen ebenen Curve und untersuche mit Hülfe von $\frac{dv}{du} = v'$ und $\frac{d^2v}{du^2} = v''$ den Verlauf dieser Linie. Man findet, dass dieselbe aus drei getrennten Zweigen besteht; der erste Zweig steigt von $u = -\infty$, $v = -\infty$ bis

$u=a$, $v=+\infty$, und hat bei $OA=a$ (Fig. 60) eine verticale Asymptote AA'; der zweite Zweig geht von dieser Asymptote abwärts, dann wieder aufwärts bis zu einer zur Abscisse $OB=b$ gehörenden zweiten Asymptote BB'; der dritte Zweig geht von dieser Asymptote abwärts und steigt späterhin wieder bis $u=\infty$, $v=\infty$. Die Curve besitzt demnach zwei untere Culminationspunkte D und F, deren Coordinaten λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 heissen mögen und zwar so, dass die grössere der beiden Ordinaten CD und EF mit μ_2 bezeichnet wird. Nun sind λ_1 und λ_2 die beiden einzigen rellen Wurzeln der Gleichung

Fig. 60.



$$0=1+\frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^3}+\frac{b\beta^2}{(b-\lambda)^3};$$

die beiden zugehörigen μ bestimmen sich durch die Formel

$$\mu=\lambda+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{a\alpha^2}{(a-\lambda)^2}+\frac{b\beta^2}{(b-\lambda)^2}\right\}.$$

Eine in der Höhe $v=\gamma$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat mit der obigen Curve einen, zwei, drei, vier oder fünf Punkte gemein, je nachdem

$$\gamma<\mu_1,\quad \gamma=\mu_1,\quad \mu_1<\gamma<\mu_2,\quad \gamma=\mu_2,\quad \mu_2<\gamma$$

ist, und die Gleichung fünften Grades für u liefert, diesen Fällen entsprechend, eine, zwei, drei, vier oder fünf reelle Wurzeln. Damit ist die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das elliptische Paraboloid herabgelassen werden können.

9. Man soll die analoge Untersuchung für das hyperbolische Paraboloid ausführen.

10. Von einem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ soll die längste oder kürzeste Gerade nach einem Punkte xyz des Ellipsoides gezogen werden, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (a<b<c).$$

Die Bedingungen für den Eintritt des gesuchten Maximums oder Minimums sind hier

$$\frac{a^2(x-\alpha)}{x}=\frac{b^2(y-\beta)}{y}=\frac{c^2(z-\gamma)}{z},$$

oder, wenn u den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten bezeichnet,

$$x=\frac{a^2\alpha}{a^2-u},\quad y=\frac{b^2\beta}{b^2-u},\quad z=\frac{c^2\gamma}{c^2-u}.$$

Für u erhält man die Gleichung sechsten Grades

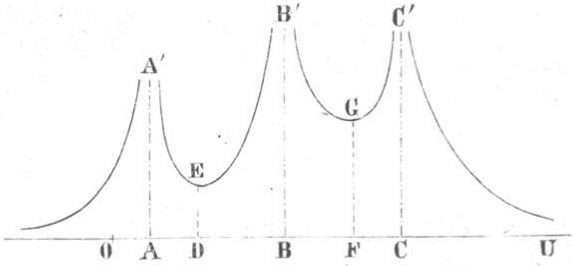
$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-u)^2}=1.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu ermitteln, betrachte man die Gleichung

$$v=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-u)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-u)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-u)^2}$$

als Gleichung einer ebenen Curve und untersuche den Verlauf der letzteren. Die Curve besteht aus vier getrennten Zweigen (Fig. 61) mit drei verticalen Asymptoten in den Entfernungen $OA=a^2$, $OB=b^2$, $OC=c^2$ und mit zwei unteren Culminationspunkten E und G, deren Coordinaten λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2 heissen mögen, wobei $\mu_2>\mu_1$ vorausgesetzt wird. Die Abscissen λ_1 und λ_2 sind die beiden einzigen reellen Wurzeln der Gleichung

Fig. 61.



$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^3}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^3}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-\lambda)^3}=0,$$

und die zugehörigen μ bestimmen sich durch die Formel

$$\mu=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-\lambda)^2}.$$

Eine in der Höhe $v=1$ parallel zur Abscissenachse gelegte Gerade hat nun mit der betrachteten Curve zwei, drei, vier, fünf oder sechs Punkte gemein, je nachdem

$$1<\mu_1,\quad 1=\mu_1,\quad \mu_1<1<\mu_2,\quad 1=\mu_2,\quad \mu_2<1$$

ist und die bicubische Gleichung für u liefert, diesen Fällen entsprechend, zwei, drei, vier, fünf oder sechs reelle Wurzeln. Damit ist

die Anzahl der in jedem Falle möglichen Auflösungen, d. h. die Anzahl der Normalen bestimmt, welche von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf das Ellipsoid herabgelassen werden können.

11. Man soll die analoge Untersuchung für das einfache Hyperboloid ausführen.

12. Es wird eine gleiche Untersuchung über das getheilte Hyperboloid verlangt.

13. Zwei Parabeln sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$y=\frac{x^2}{2a},\quad \eta^2=2b\xi;$$

man soll auf der ersten Parabel den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man x und ξ als unabhängige Variabele, so hat man für das Maximum oder Minimum von $P\Pi$ die Bedingungen

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0,\quad x-\xi+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}=0;$$

die hieraus folgende Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$$

zeigt, dass $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Parabeln sein muss. Vermöge der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ wird die letzte Gleichung

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{\eta}$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Betrag beider Quotienten mit u bezeichnet, so ist

$$x=au,\quad \eta=\frac{b}{u},$$

$$y=\frac{au^2}{2},\quad \xi=\frac{b}{2u^2};$$

nach Substitution dieser Werthe verwandelt sich die Gleichung

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{x}{a}=0$$

in die folgende zur Bestimmung von u dienende Gleichung

$$u^5+2u^3-2\frac{b}{a}u^2-\frac{b}{a}=0.$$

Um die Anzahl ihrer reellen Wurzeln zu finden, denke man sich

$$v = \frac{u^5 + 2u^3}{2u^2 + 1} \text{ und } v = \frac{b}{a}$$

als Gleichungen einer Curve und einer in der Höhe $\frac{b}{a}$ parallel zur u-Achse gelegten Geraden; die Discussion der Curve zeigt, dass ihre Ordinaten von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ continuirlich wachsen, dass also der Specialfall $v = \frac{b}{a}$ nur einmal vorkommen kann. Die beiden Parabeln haben daher jederzeit eine, aber keine weitere gemeinschaftliche Normale.

Für $b = a$ wird $u = 1$, $x = a$, $y = \frac{1}{2}a$, $\xi = \frac{1}{2}a$, $\eta = a$.

14. Eine Ellipse und eine gleichseitige Hyperbel sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } \xi\eta = k^2;$$

man soll auf der ersten Curve den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Betrachtet man x und ξ als unabhängige Variabele, so hat man für das Minimum von $P\Pi$

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad x - \xi + (y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

woraus hervorgeht, dass die Gerade $P\Pi$ normal auf beiden Curven sein muss. Zufolge der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist weiter

$$\frac{a^2(x - \xi)}{x} = \frac{b^2(y - \eta)}{y}, \quad \frac{a^2}{x\xi} = \frac{b^2}{y\eta}.$$

Nennt man u den gemeinschaftlichen Werth der beiden ersten, v den gemeinschaftlichen Werth der beiden letzten Quotienten, so findet man

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2 - u)v}, \quad y^2 = \frac{b^4}{(b^2 - u)v},$$
$$\xi^2 = \frac{a^2 - u}{uv}, \quad \eta^2 = \frac{b^2 - u}{uv},$$

und aus den Gleichungen der Curven

$$v = \frac{a^2}{a^2 - u} + \frac{b^2}{b^2 - u},$$

$$v^2 = \frac{(a^2 - u)(b^2 - u)}{k^4}.$$

Die Elimination von v würde eine bicubische Gleichung für u liefern, aus der sich u, dann v, x, y, ξ, η finden liessen; man thut aber besser, die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier in rechtwinkligen Coordinaten u und v ausgedrückten Curven zu betrachten und deren Durchschnitte aufzusuchen. Unter der Voraussetzung $a < b$ existiren nur zwei reelle Durchschnitte, für deren Coordinaten u_1, v_1, u_2, v_2 folgende Bemerkungen gelten:

$$-\infty < u_1 < a^2, \quad b^2 < u_2 < +\infty,$$
$$v_1 > 0, \quad v_2 < 0.$$

Die weitere Discussion über die Realität von x, y, ξ, η bietet keine Schwierigkeit.

15. Ein Ellipsoid und eine Fläche dritten Grades sind gegeben durch ihre Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ und } \xi\eta\zeta = k^3;$$

man soll auf der ersten Fläche den Punkt P, auf der zweiten den Punkt Π so bestimmen, dass die Entfernung $P\Pi$ ein Maximum oder Minimum wird.

Nimmt man x, y, ξ, η als unabhängige Variabele, so hat man die vier Gleichungen

$$x - \xi + (z - \zeta)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad y - \eta + (z - \zeta)\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$x - \xi + (z - \zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0, \quad y - \eta + (z - \zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0;$$

die hieraus folgenden Relationen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

zeigen, dass $P\Pi$ eine gemeinschaftliche Normale beider Flächen sein muss. Vermöge der Werthe der vier auftretenden partiellen Differentialquotienten erhält man weiter

$$\frac{a^2(x - \xi)}{x} = \frac{b^2(y - \eta)}{y} = \frac{c^2(z - \zeta)}{z},$$

$$\frac{a^2}{x\xi} = \frac{b^2}{y\eta} = \frac{c^2}{z\zeta},$$

oder, wenn man u den gemeinschaftlichen Werth der ersten drei, v den der letzten drei Brüche nennt

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2-u)\,v}, \quad y^2 = \frac{b^4}{(b^2-u)\,v}, \quad z^2 = \frac{c^4}{(c^2-u)\,v},$$
$$\xi^2 = \frac{a^2-u}{uv}, \quad \eta^2 = \frac{b^2-u}{uv}, \quad \zeta^2 = \frac{c^2-u}{uv}.$$

Aus den Gleichungen der Flächen ergeben sich nun für u und v folgende Gleichungen

$$v = \frac{a^2}{a^2-u} + \frac{b^2}{b^2-u} + \frac{c^2}{c^2-u},$$
$$v^3 = \frac{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}{k^3},$$

welche für u allein eine Gleichung zwölften Grades liefern. Betrachtet man aber die vorstehenden Gleichungen als Gleichungen zweier sich schneidenden Curven, so findet man leicht, dass es für u und v nur vier relle Werthepaare giebt, nämlich wenn $a < b < c$ vorausgesetzt wird,

$$-\infty < u_1 < a^2 < u_2 < b^2 < u_3 < c^2 < u_4 < +\infty,$$
$$v_1 > 0, \quad v_2 < 0, \quad v_3 > 0, \quad v_4 < 0.$$

Die weitere Discussion über die Realität der entsprechenden $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ bietet keine Schwierigkeit.