Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel XI. Unendliche Reihen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel XI.

Unendliche Reihen.

§. 35.

Die Entstehung unendlicher Reihen.

Die Summe der aus n Gliedern bestehenden Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \ldots + u_{n-1}$ sei bekannt und heisse S_n; trifft es sich nun, dass S_n bei unendlich wachsenden n gegen einen bestimmten endlichen Grenzwerth S convergirt, so geht die Gleichung

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

in die folgende über

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \textit{in inf.},$$

dann heisst die Reihe convergent, S ihre Summe. Ist dagegen $Lim\, S_n$ keine bestimmte Grösse, so heisst die Reihe divergent und sie hat dann keine Summe.

1. Um die Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

zu summiren, benutze man die identische Gleichung

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1};$$

man findet

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

und für $n = \infty$

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$$

2. Auf ähnliche Art sollen die folgenden Gleichungen bewiesen werden:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots$$

3. Mittelst der identischen Gleichung

$$\frac{1}{(x+m)(x+m+1)(x+m+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(x+m)(x+m+1)}-\frac{1}{(x+m+1)(x+m+2)}\right\}$$

erhält man

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{(x+n-1)(x+n)(x+n+1)},$$

$$\frac{1}{2x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\cdots$$

4. Setzt man in der identischen Gleichung

$$\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z^2-1}=\frac{1}{z+1}$$

der Reihe nach $z=x,\ x^2,\ x^4,\ x^8, \ldots x^{2^{n-1}}$, multiplicirt die entstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $1, 2, 4, 8, \ldots 2^{n-1}$ und schreibt kurz p für 2^{n-1}, so erhält man durch Addition

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2p}{x^{2p}-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\cdots+\frac{p}{x^p+1}.$$

Für $n=\infty$ wird hieraus unter der Bedingung $x>1$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\frac{8}{x^8+1}+\cdots;$$

für $x \leqq 1$ divergirt die Reihe.

5. Setzt man in der obigen identischen Gleichung der Reihe nach $z=x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{8}}, \ldots x^{\frac{1}{q}}$, wo $q=2^n$ ist, so erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{1}{q\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)}-\frac{1}{x-1}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}+1}$$

und für $n=\infty$, falls x von der Einheit verschieden ist,

$$\frac{1}{l\,x}-\frac{1}{x-1}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}+1}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}+1}+\cdots\cdots$$

6. Mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$\tfrac{1}{2}\cot u-\cot 2u=\tfrac{1}{2}\tan u$$

erhält man für $u=\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}x, \frac{1}{8}x, \ldots \frac{1}{2^n}x$ und für $2^n=q$

$$\frac{1}{q}\cot\frac{x}{q}-\cot x=\tfrac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\tan\frac{x}{8}+\cdots+\frac{1}{q}\tan\frac{x}{q},$$

woraus für $n=\infty$ folgt

$$\frac{1}{x}-\cot x=\tfrac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\tfrac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\tfrac{1}{8}\tan\frac{x}{8}+\cdots$$

7. Die Summenformel für die geometrische Progression, nämlich

$$\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}$$

giebt bei unendlich wachsenden n

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$
$$-1<x<+1;$$

für alle der zuletzt angegebenen Bedingung nicht genügenden x divergirt die Reihe.

8. Multiplicirt man die vorhergehende Summenformel mit x und differenzirt das Product, so entsteht

$$\frac{1-(n+1)x^n+n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+n\,x^{n-1}$$

und bei unendlich wachsenden n*)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdot$$
$$-1 < x < +1.$$

9. Multiplicirt man die vorhergehende Summe der endlichen Reihe mit x und differenzirt, so erhält man

$$\frac{1+x-(n+1)^2 x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}$$
$$= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots\cdot + n^2 x^{n-1}$$

und für $n = \infty$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots\cdot\cdot$$
$$-1 < x < +1.$$

Auf ähnliche Weise kann man viele ähnliche Reihensummen ableiten.

10. Es bedeute U die unbekannte Summe der aus n Termen bestehenden Reihe

$$U = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots\cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta;$$

um U zu finden, multiplicire man beiderseits mit

$$1 - 2x\cos\theta + x^2$$

und beachte rechter Hand die Gleichung

$$2\cos k\theta\cos\theta = \cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta,$$

dann erhält man nach gehöriger Hebung

$$(1-2x\cos\theta + x^2)\,U = 1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta.$$

Hieraus ergiebt sich U und es ist also

$$\frac{1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$
$$= 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n wird hieraus

*) Zur Ermittelung des Grenzwerthes von $\psi(n)$ kann man sich hier und in mehreren späteren Fällen des Satzes bedienen, dass $\psi(n)$ gegen die Null convergirt oder unendlich wächst, je nachdem der absolute Werth von $Lim\,\dfrac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. (Compend. d. h. Anal. S. 208.) Ist der letztere Grenzwerth $= 1$, so muss eine besondere Untersuchung über $Lim\,\psi(n)$ vorgenommen werden.

$$\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+x\cos\theta+x^2\cos2\theta+x^3\cos3\theta+\cdots$$
$$-1<x<+1.$$

Eine Folge hiervon ist die Gleichung

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+2(x\cos\theta+x^2\cos2\theta+x^3\cos3\theta+\cdots)$$
$$-1<x<+1.$$

11. Behandelt man auf ganz ähnliche Weise die Gleichung

$$V=x\sin\theta+x^2\sin2\theta+x^3\sin3\theta+\cdots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

so erhält man zunächst

$$(1-2x\cos\theta+x^2)V=x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta,$$

mithin

$$\frac{x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$
$$=x\sin\theta+x^2\sin2\theta+x^3\sin3\theta+\cdots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

Für $n=\infty$ giebt dies

$$\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=x\sin\theta+x^2\sin2\theta+x^3\sin3\theta+\cdots.$$
$$-1<x<+1,$$

wo beiderseits x gehoben werden kann.

12. Wir knüpfen hieran einige Bemerkungen über die gebrochene Function

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta},\quad b=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

wobei aber $\alpha^2>\beta$ sein muss, wenn a und b reell bleiben sollen, so ist $a+b=2\alpha$, $ab=\beta$, mithin

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=\frac{1}{1-(a+b)z+abz^2}=\frac{1}{a-b}\left\{\frac{a}{1-az}-\frac{b}{1-bz}\right\}.$$

Im Fall nun die absoluten Werthe von az und bz echte Brüche sind, kann rechter Hand die Formel

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots.$$
$$-1<x<+1$$

sowohl für $x = az$, als für $x = bz$ angewendet werden; hierdurch entsteht ein Resultat von der Form

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots\cdots,$$

und zwar ist

$$C_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)^{n+1} - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)^{n+1}}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta}}.$$

Zur weiteren Entwickelung des Zählers lässt sich der binomische Satz für ganze positive Exponenten benutzen, wodurch entsteht

$$C_n = (n+1)_1 \alpha^n + (n+1)_3 \alpha^{n-2} (\alpha^2 - \beta) + (n+1)_5 \alpha^{n-4} (\alpha^2 - \beta)^2 + (n+1)_7 \alpha^{n-6} (\alpha^2 - \beta)^3 + \cdots$$

also

$$C_1 = 2\alpha, \quad C_2 = 4\alpha^2 - \beta, \quad C_3 = 8\alpha^3 - 4\alpha\beta, \cdots$$

Unter der Bedingung, dass gleichzeitig

$$\alpha^2 > \beta, \quad \left[\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right) z\right]^2 < 1 \text{ und } \left[\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right) z\right]^2 < 1$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2 - \beta) z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta) z^3 + \cdots$$

Die vorigen Schlüsse verlieren ihre Anwendbarkeit, wenn $\alpha^2 < \beta$ ist, mithin a und b imaginär werden. Da in diesem Falle β positiv und $\sqrt{\beta} > \alpha$ sein muss, so kann man

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \cos\theta, \quad z = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

setzen und es wird dann

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Hier lässt sich unter der Bedingung $x^2 < 1$ die letzte Formel in No. 11 anwenden, wodurch entsteht

$$\frac{1}{1 - 2\alpha z + \beta z^2} = \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \sin\theta + x\sin 2\theta + x^2 \sin 3\theta + x^3 \sin 4\theta + \cdots \right\}$$
$$= 1 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots.$$

Der Werth von C_n ist

$$C_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \sqrt{\beta^n}$$

oder nach einer bekannten Formel (Compend. d. h. Anal., §. 7, No. 15)

$$C_n = \sqrt{\beta^n}\,\{(n+1)_1 \cos^n\theta - (n+1)_3 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + (n+1)_5 \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta - \cdots\cdots\};$$

durch Substitution der Werthe

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta-\alpha^2}}{\sqrt{\beta}}$$

wird hieraus

$$C_n = (n+1)_1 \alpha^n - (n+1)_3 \alpha^{n-2}(\beta-\alpha^2) + (n+1)_5 \alpha^{n-4}(\beta-\alpha^2)^2 - (n+1)_7 \alpha^{n-6}(\beta-\alpha^2)^3 + \cdots$$

Unter den Bedingungen, dass gleichzeitig

$$\alpha^2 < \beta < \frac{1}{z^2}$$

ist, gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2-\beta) z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta) z^3 + \cdots.$$

Die Coefficienten von z, z^2, z^3 etc. sind hier dieselben wie früher, die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichung sind aber andere.

Wäre endlich $\beta = \alpha^2$, so würde man für $\alpha z = x$ auf die in No. 8 entwickelte Summenformel zurückkommen.

§. 36.

Die Convergenz und Divergenz der Reihen.

Wenn eine gegebene unendliche Reihe nur positive Terme enthält, so dienen folgende Sätze zur Beurtheilung ihrer Convergenz oder Divergenz.

a) Die Reihe convergirt, sobald von einer bestimmten Stelle an ihre Terme kleiner sind als die gleichstelligen Terme einer anderen als convergent bekannten Reihe; sie divergirt wenn dagegen ihre Terme grösser sind als die entsprechenden Terme einer bekannten divergirenden Reihe.

b) Die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

convergirt oder divergirt, je nachdem

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

c) Im Fall der genannte Grenzwerth $=1$ ist, giebt das vorige Kennzeichen keine Entscheidung; man untersuche dann

$$Lim\left\{n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\};$$

je nachdem dieser Grenzwerth mehr oder weniger als die Einheit ausmacht, convergirt oder divergirt die Reihe.

d) Sehr häufig lässt sich mit Vortheil der Satz anwenden, dass die Reihen

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots$$

und

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+16u_{16}+\cdots$$

gleichzeitig convergiren uud divergiren, wie aus folgenden Schlüssen hervorgeht. Wegen $u_1>u_2>u_3\ldots$ ist

$$\begin{aligned} 2u_4 &< u_2+u_3 &&< 2u_2, \\ 4u_8 &< u_4+\cdots+u_7 &&< 4u_4, \\ 8u_{16} &< u_8+\cdots+u_{15} &&< 8u_8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mithin durch Addition und allseitige Hinzufügung von u_1

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}u_1-u_2+\tfrac{1}{2}(u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots) \\ &< u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots< \\ &u_1+2u_2+4u_4+8u_8+16u_{16}+\cdots; \end{aligned}$$

diese Ungleichung liefert sofort den Beweis, dass die Reihe $u_1+u_2+u_3+$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem die Reihe $u_1+2u_2+4u_4+$ etc. convergent oder divergent ist.

Wenn eine Reihe aus Termen mit alternirenden Vorzeichen besteht, mithin unter der Form

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\cdots$$

enthalten ist, so convergirt sie immer, sobald von einer bestimmten Stelle an jeder Term grösser als der nächste und zugleich $Lim\, u_n=0$ ist.

Beispiele.

1. Die Reihe

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt in jedem anderen Falle.

2. Die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Im Falle $x^2=1$ ist zu unterscheiden, ob $x=-1$ oder $x=+1$ ist. Für $x=-1$ convergirt die Reihe, für $x=+1$ führen folgende Schlüsse zur Entscheidung. Die Ungleichungen

$$\frac{h}{a+h} < l(a+h) - la, \quad \frac{h}{a} > l(a+h) - la$$

geben, wenn in der ersten $h=1$, $a=z-1$, in der zweiten $h=1$, $a=z$ gesetzt wird,

$$l(z+1) - lz < \frac{1}{z} < lz - l(z-1)$$

mithin für $z=2,3,\ldots n$ und Addition nebst Hinzufügung der Einheit

$$1 - l2 + l(n+1) < \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + ln;$$

daraus erhellt unmittelbar die Divergenz der Reihe.

3. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdot$$

convergirt für jedes endliche x. Wenn x nicht eine kleine Zahl ist, so wachsen anfangs die Terme (wovon schon $x=5$ ein Beispiel giebt), es lässt sich aber auf folgende Weise die Stelle im Voraus bestimmen, von welcher ab die Reihe schneller convergirt als eine geometrische Progression.

Wendet man den Satz

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1$$

auf die Function $f(x) = x\,lx$ an, so erhält man

$$(a+h)\,l(a+h) - a\,la = h[1 + l(a+\vartheta h)]$$

und für die extremen Werthe $\vartheta=0$ und $\vartheta=1$

$$(a+h)l(a+h) - ala > h[1+la],$$
$$(a+h)l(a+h) - ala < h[1+l(a+h)].$$

In der ersten Ungleichung setze man $h=1$, $a=z$, in der zweiten $h=1$, $a=z-1$, es wird dann

$$zlz - (z-1)l(z-1) - 1 < lz < (z+1)l(z+1) - zlz - 1.$$

Durch Addition aller für $z=2,3,4,\ldots n$ hieraus entstehenden Ungleichungen folgt

$$nln - (n-1) < l(2.3\ldots n) < (n+1)l(n+1) - 2l2 - (n-1)$$

oder

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < 1.2.3\ldots n < \frac{(n+1)^{n+1}}{4e^{n-1}},$$

mithin

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} < \frac{1}{e}\left(\frac{ex}{n}\right)^n.$$

Bezeichnet k die ganze Zahl, welche nächstgrösser als ex ist, so wird

$$\frac{x^k}{1.2\ldots k}+\frac{x^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)}+\frac{x^{k+3}}{1.2\ldots(k+2)}+\cdots$$
$$<\frac{1}{e}\left\{\left(\frac{ex}{k}\right)^k+\left(\frac{ex}{k+1}\right)^{k+1}+\left(\frac{ex}{k+2}\right)^{k+2}+\cdots\right\},$$

und hier convergirt die eingeklammerte Reihe stärker als eine geometrische Progression, die nach Potenzen des echten Bruches $\frac{ex}{k}$ fortschreitet.

4. Die Reihe

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdot$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Im Falle $x=+1$ divergirt sie (nach c), im Falle $x=-1$ convergirt sie, wie man mittelst des Satzes

$$Lim\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}=0,\quad \alpha>\beta$$

leicht finden wird.

5. Die Reihe

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{3}+\cdots$$

convergirt für $x^2\leqq 1$ und divergirt für $x^2>1$.

6. Die Reihe

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots$$

convergirt für $x^2\leqq 1$ und divergirt für $x^2>1$.

7. Die allgemeinere Reihe

$$\frac{x}{1^\mu}+\frac{x^2}{2^\mu}+\frac{x^3}{3^\mu}+\cdots$$

convergirt (bei jedem μ) für $x^2>1$ und divergirt für $x^2<1$. Im Falle $x=-1$ convergirt sie, sobald μ eine positive Grösse ist. Im Falle $x=+1$ erhält man (nach c) für $\frac{1}{n}=\delta$

$$Lim\left\{n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right\}=\frac{1}{(1+\delta)^\mu}\cdot\frac{(1+\delta)^\mu-1}{\delta}=\mu;$$

die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots$$

convergirt also für $\mu>1$ und divergirt für $\mu<1$. Ist $\mu=1$, so kommt man auf das zweite Beispiel zurück.

Zu den letzteren, für $x=+1$ geltenden Resultaten gelangt man auch mittelst des unter d) erwähnten Satzes.

8. Die Reihe

$$\frac{x^2}{2^\mu l2}+\frac{x^3}{3^\mu l3}+\frac{x^4}{4^\mu l4}+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Im Falle $x=-1$ convergirt sie bei allen positiven μ; ist $x=+1$, so zeigt der Satz d) (für $u_1=0$), dass die Reihe nur unter der Bedingung $\mu>1$ convergirt.

9. Um die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$l(1+\tfrac{1}{1})\frac{x}{1}+l(1+\tfrac{1}{2})\frac{x^2}{2}+l(1+\tfrac{1}{3})\frac{x^3}{3}+\cdots$$

zu entscheiden, benutze man die Ungleichung

$$\frac{h}{a+h}<l(a+h)-la<\frac{h}{a}$$

für $a=1$, $h=\frac{1}{n}$; man findet dann, dass die Reihe für $x^2\leqq 1$ convergirt und im Gegenfalle divergirt.

Geht man (für $x=1$) von den Logarithmen zu den Zahlen zurück, so ergiebt sich der bemerkenswerthe Satz, dass das unendliche Product

$$(1+\tfrac{1}{1})^{\frac{1}{1}}(1+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}(1+\tfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots$$

gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt.

10. Zur Abkürzung sei

$$s_n=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

und gegeben die Reihe

$$\frac{x}{1s_1}+\frac{x^2}{2s_2}+\frac{x^3}{3s_3}+\cdots$$

Für $x^2<1$ convergirt dieselbe, für $x^2>1$ divergirt sie. Im Falle $x=-1$ ist gleichfalls Convergenz vorhanden; im Falle $x=+1$ wende man den Satz d) an und beachte die Ungleichungen

$$s_2=1+\tfrac{1}{2}<2,$$
$$s_4=s_2+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}<s_2+\tfrac{2}{2}<3,$$
$$s_8=s_4+\tfrac{1}{5}+\cdots+\tfrac{1}{8}<s_4+\tfrac{4}{4}<4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

es ergiebt sich dann, dass die Reihe

$$\frac{1}{1s_1}+\frac{1}{2s_2}+\frac{1}{3s_3}+\cdots$$

divergent ist.

11. Die Reihe

$$e^{-s_1}x+e^{-s_2}x^2+e^{-s_3}x^3+\cdots,$$

worin s_n dieselbe Bedeutung hat wie in No. 10), convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Wegen $Lim\, s_n=\infty$ ist auch im Falle $x=-1$ Convergenz vorhanden. Für $x=+1$ zeigt die Anwendung der in No. 2) bewiesenen Relation

$$1-l2+l(n+1)<s_n<1+ln,$$

dass die Reihe divergirt.

12. Um die Reihe

$$l\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\right\}x+l\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\right\}x^2+l\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\right\}x^3+\cdots$$

zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass μ keine ganze negative Zahl sein darf, weil sonst ein Term unendlich werden würde. Schliesst man im Folgenden die Fälle $\mu=-1,\ -2,\ -3$ etc. aus, so ist ferner

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mu\, l(n+2)+l(n+1+\mu)-(\mu+1)\,l(n+1)}{\mu\, l(n+1)+l(n+\mu)-(\mu+1)\,ln}\,x,$$

wobei sich der Grenzwerth des Bruches mittelst des Satzes

$$l(n+h)=ln+\frac{h}{n+\vartheta h},\quad 0<\vartheta<1$$

finden lässt; man erhält

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}=x,$$

mithin convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem $x^2<1$ oder $x^2>1$ ist. Für $x=-1$ convergirt die Reihe. Der Fall $x=+1$ erledigt sich, wenn man die Gleichung

$$f(h)=f(0)+hf'(\vartheta h),\quad 0<\vartheta<1$$

auf die Function

$$l\left\{\frac{(1+h)^\mu}{1+h\mu}\right\}=\mu\, l(1+h)-l(1+\mu h)$$

anwendet und nachher $h=\frac{1}{n}$ setzt; die Reihe

$$l\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\right\}+l\left\{\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\right\}+l\left\{\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\right\}+\cdots$$

erhält dann die Form

$$\mu(\mu-1)\left\{\frac{\vartheta_1}{(1+\vartheta_1)(1+\mu\vartheta_1)}+\frac{\vartheta_2}{(2+\vartheta_2)(2+\mu\vartheta_2)}\right.$$
$$\left.+\frac{\vartheta_3}{(3+\vartheta_3)(3+\mu\vartheta_3)}+\cdots\right\},$$

aus welcher ihre Convergenz leicht zu ersehen ist.

Hieran knüpft sich die bemerkenswerthe Folgerung, dass das unendliche Product

$$\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{3})^\mu}{1+\frac{1}{3}\mu}\cdots\cdot$$

gegen einen bestimmten endlichen Grenzwerth convergirt, welcher selbstverständlich eine gewisse Function von μ sein muss; dieselbe wird nicht selten mit $\Pi(\mu)$ bezeichnet. Hiernach ist für unendlich wachsende n

$$Lim\left\{\frac{(1+\frac{1}{1})^\mu}{1+\frac{1}{1}\mu}\cdot\frac{(1+\frac{1}{2})^\mu}{1+\frac{1}{2}\mu}\cdots\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^\mu}{1+\frac{1}{n-1}\mu}\right\}=\Pi(\mu),$$

oder nach gehöriger Hebung

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{2}{\mu+2}\cdots\cdot\frac{n-1}{\mu+n-1}n^\mu\right\}=\Pi(\mu),$$

mithin auch

$$Lim\left\{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdot\frac{3}{\mu+2}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}n^{\mu-1}\right\}=\frac{\Pi(\mu)}{\mu}.$$

Die rechts stehende Function pflegt man $\Gamma(\mu)$ zu nennen. Bei ganzen positiven μ sind ihre Werthe leicht zu finden, nämlich $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=1.2$ und überhaupt

$$\Gamma(p)=1.2.3\ldots(p-1).$$

Zufolge der Definition von $\Gamma(\mu)$ kann man setzen

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdots\cdot\frac{n}{\mu+n-1}n^{\mu-1}=\frac{\Gamma(\mu)}{1+\varrho},$$

wo ϱ zwar nicht genauer bekannt ist, jedenfalls aber bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergiren muss. Hiernach ergiebt sich die oft brauchbare Gleichung

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=(1+\varrho)\frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Um eine Anwendung derselben zu zeigen, leiten wir aus der vorstehenden Gleichung die folgende ab

$$\frac{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}=\frac{1+\varrho_1}{1+\varrho}\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\cdot\frac{1}{n^{c-b}},$$

welche sofort erkennen lässt, dass

$$Lim\frac{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}$$

$=\infty$, $=1$ oder $=0$ ist, je nachdem b mehr, eben so viel oder weniger als c beträgt.

13. Die Reihe

$$1+\frac{\beta}{1}\cdot\frac{x}{1^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\cdot\frac{x}{2^\alpha}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{3^\alpha}+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Die Fälle $x=-1$ und $x=+1$ erledigen sich durch Anwendung des vorigen Satzes, zufolge dessen die Reihe folgendermaassen geschrieben werden kann

$$1+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\{\frac{1+\varrho_1}{1^{\alpha-\beta+1}}x+\frac{1+\varrho_2}{2^{\alpha-\beta+1}}x^2+\frac{1+\varrho_3}{3^{\alpha-\beta+1}}x^3+\cdots\right\};$$

man ersieht hieraus, dass im Falle $x=-1$ nur für $\alpha-\beta>-1$ und im Falle $x=+1$ nur für $\alpha-\beta>0$ Convergenz vorhanden ist.

14. Die Reihe

$$1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a(a+1).b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2).b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots$$

convergirt für $x^2<1$ und divergirt für $x^2>1$. Giebt man der Reihe die Form

$$1+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left\{\frac{(1+\delta_1)x}{1^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_2)x^2}{2^{c-a-b+1}}+\frac{(1+\delta_3)x^3}{3^{c-a-b+1}}+\cdots\right\},$$

wo δ_1, δ_2, δ_3 etc. echte Brüche sind und $Lim\,\delta_n=0$ ist, so folgt, dass die Reihe für $x=-1$ nur unter der Bedingung $c-a-b>-1$, und für $x=+1$ nur unter der Bedingung $c-a-b>0$ convergirt.

§. 37.

Summirung einiger Potenzenreihen.

Für das Folgende sind einige Sätze nöthig, welche wir zunächst vorausschicken.

a) Die unendliche Potenzenreihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

convergirt unbedingt, wenn der absolute Werth von

$$Lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right)$$

weniger als die Einheit beträgt; setzt man zur Abkürzung

$$Lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda,$$

so lässt sich die vorige Bedingung kürzer ausdrücken durch die Ungleichung

$$-\lambda<x<+\lambda \text{ oder } x^2<\lambda^2.$$

Unter derselben Bedingung convergirt auch die Reihe

$$1a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots,$$

wie man durch Untersuchung von $Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$ findet.

b) Die Summen der vorigen Reihen mögen $f(x)$ und $\varphi(x)$ heissen, nämlich

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$
$$\varphi(x)=1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots;$$

man kennt diese Summen zwar nicht, weiss aber wenigstens, dass beide so lange endliche Werthe haben, als $x^2<\lambda^2$ bleibt. Vermehrt man x um eine kleine positive Grösse δ von der Beschaffenheit, dass auch $(x+\delta)^2<\lambda^2$ ist, und vermindert man andererseits x um ε unter Festhaltung der Bedingung $(x-\varepsilon)^2<\lambda^2$, so hat man durch Subtraction der entsprechenden Gleichungen

$$f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)$$
$$=(\delta+\varepsilon)\left\{a_1\frac{x+\delta-(x-\varepsilon)}{\delta+\varepsilon}+a_2\frac{(x+\delta)^2-(x-\varepsilon)^2}{\delta+\varepsilon}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{(x+\delta)^3-(x-\varepsilon)^3}{\delta+\varepsilon}+\cdots\right\}.$$

Hier lässt sich auf alle rechts stehenden Quotienten der Satz

$$m\alpha^{m-1}<\frac{\beta^m-\alpha^m}{\beta-\alpha}<m\beta^{m-1},\quad \alpha<\beta$$

für $\alpha=x-\varepsilon$, $\beta=x+\delta$ anwenden; dies giebt unter der Voraussetzung, dass $a_1, a_2, a_3\ldots$ und x positiv sind

$$(\delta+\varepsilon)\{1a_1+2a_2(x-\varepsilon)+3a_3(x-\varepsilon)^2+\cdots\}$$
$$<f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)<$$
$$(\delta+\varepsilon)\{1a_1+2a_2(x+\delta)+3a_3(x+\delta)^2+\cdots\}$$

d. i.

$$(\delta+\varepsilon)\varphi(x-\varepsilon)<f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)<(\delta+\varepsilon)\varphi(x+\delta).$$

Bei verschwindenden δ und ε folgt hieraus, weil $\varphi(x)$ einen endlichen Werth hat,

$$Lim\,[f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)]=0;$$

die Summe einer nur positive Terme enthaltenden Potenzenreihe ist hiernach eine stetige Function der Variabelen x.

Kommen positive und negative Terme vor, so lassen sich alle positiven Terme für sich, und ebenso alle negativen Terme für sich zusammenziehen und die Summe $f(x)$ erhält dann die Form $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. Hier sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einzeln genommen stetige

Functionen von x, ihre Differenz $f(x)$ ändert sich daher gleichfalls continuirlich. Es gilt daher der Satz, dass die Summe jeder Potenzenreihe innerhalb des Convergenzintervalles eine stetige Function der betreffenden Variabelen ist.

c) Aus der letzten Ungleichung folgt für $\varepsilon=0$

$$\varphi(x)<\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}<\varphi(x+\delta)$$

und durch Uebergang zur Grenze für verschwindende δ

$$f'(x)=\varphi(x).$$

Besteht demnach eine Potenzenreihe aus positiven Termen, so ist der Differentialquotient ihrer Summe gleich der Summe von den Differentialquotienten ihrer einzelnen Summanden. Mittelst der vorhin benutzten Zerlegung von $f(x)$ in $f_1(x)-f_2(x)$ lässt sich dieser Satz auf beliebige Potenzenreihen ausdehnen.

d) Wenn zwei Functionen $F(x)$ und $f(x)$ gleiche Differentialquotienten haben $[F'(x)=f'(x)]$, so lässt sich auf folgende Weise eine Eigenschaft dieser Functionen entdecken. Es sei $\psi(x)$ die Differenz beider Functionen, d. h.

$$\psi(x)=F(x)-f(x);$$

man hat dann

$$\psi'(x)=F'(x)-f'(x)=0.$$

Unter der Voraussetzung, dass $F(x)$ und $f(x)$ innerhalb irgend eines Intervalles stetig bleiben, ist auch $\psi(x)$ eine continuirliche Function von x, dasselbe gilt von $\psi'(x)=0$. Mittelst des Satzes

$$\psi(a+h)-\psi(a)=h\,\psi'(a+\vartheta h),\quad 0<\vartheta<1$$

ergiebt sich nun, wenn a und $a+h$ innerhalb des Continuitätsintervalles liegen,

$$\psi(a+h)-\psi(a)=0,$$

woraus hervorgeht, dass $\psi(x)$ einen constanten Werth hat. Zwei stetige Functionen, welche gleiche Differentialquotienten besitzen, können daher nur um eine Constante differiren.

Aufgabe 1. Man sucht die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{1}x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots,$$

welche für $x^2<1$ convergirt.

Bezeichnet man die Summe der Reihe mit $F(x)$, so hat man

$$F'(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

d. i.

$$F'(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Schreibt man statt dieser Gleichung die folgende

$$F'(x) = \frac{d\,l\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx},$$

so ergiebt sich nach dem Satze *d*)

$$F(x) - l\left(\frac{1}{1-x}\right) = Const.,$$

oder vermöge der Bedeutung von $F(x)$

$$\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots = l\left(\frac{1}{1-x}\right) + Const.$$

Die Constante bestimmt sich dadurch, dass man dem x irgend einen speciellen zwischen -1 und $+1$ liegenden Werth ertheilt; am besten eignet sich hierzu der Werth $x=0$, mittelst dessen man findet $Const. = 0$, also

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots.$$
$$x^2 < 1.$$

Setzt man einmal $x = +y$, das andere Mal $x = -y$, so giebt die Differenz beider Gleichungen

$$l\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\left(\tfrac{1}{1}y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \cdots\right)$$
$$y^2 < 1.$$

Hieraus lassen sich noch folgende Formeln herleiten

$$lz = \tfrac{1}{2}[l(z+1) + l(z-1)]$$
$$+ \frac{1}{2z^2-1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \cdots.$$
$$z > 1,$$
$$l(z+2) = 2[l(z+1) - l(z-1)] + l(z-2)$$
$$+ 2\left\{\frac{2}{z^3-3z} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^5 + \cdots\right\},$$
$$z > 2.$$

Aufgabe 2. Man sucht die Summe der immer convergirenden Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots.$$

Bezeichnet man die gesuchte Summe durch $\Phi(x)$, so erhält man

$$\Phi'(x) = \Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{d\,l\,\Phi(x)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Daraus folgt

$$l\,\Phi(x) - x = c \text{ oder } \Phi(x) = e^{c+x}$$

d. i.

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots = e^{c+x}.$$

Für $x=0$ ergiebt sich $e^c = 1$, mithin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots.$$

Aufgabe 3. Man sucht die Summe der Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

welche für $x^2 < 1$ convergirt.

Bezeichnet man mit $\Phi(x)$ die gesuchte Summe, so findet man

$$(1+x)\,\Phi'(x) = \mu\,\Phi(x),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{d\,l\,\Phi(x)}{dx} = \frac{d[\mu\,l(1+x)]}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$l\,\Phi(x) - \mu\,l(1+x) = c \text{ oder } \Phi(x) = e^c(1+x)^\mu,$$

mithin

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$= e^c(1+x)^\mu.$$

Für $x=0$ ergiebt sich $e^c\,1^\mu = 1$ also wenn $(1+x)^\mu$ im absoluten Sinne genommen und demgemäss $1^\mu = 1$ gesetzt wird, $e^c = 1$ und

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 4. Man sucht die Summen u und v der folgenden, immer convergirenden Reihen

$$u = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \cdots,$$
$$v = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots.$$

Quadrirt man die erste Gleichung, so entsteht ein Resultat von folgender Form

$$u^2 = 1 - \frac{a_2}{1.2}x^2 + \frac{a_4}{1\ldots4}x^4 - \frac{a_6}{1\ldots6}x^6 + \cdots,$$

und darin ist

$$a_n = 1 - \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \cdots,$$

oder nach der kurzen Bezeichnung der Binomialcoefficienten

$$a_n = (n)_0 - (n)_2 + (n)_4 - (n)_6 + \cdots$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$v^2 = \frac{b_2}{1.2}x^2 - \frac{b_4}{1\ldots4}x^4 + \frac{b_6}{1\ldots6}x^6 - \cdots$$

und darin ist

$$b_n = (n)_1 - (n)_3 + (n)_5 - \cdots$$

Aus den Formeln für u^2 und v^2 folgt

$$u^2 + v^2 = 1 - \frac{a_2 - b_2}{1.2}x^2 + \frac{a_4 - b_4}{1\ldots4}x^4 - \frac{a_6 - b_6}{1\ldots6}x^6 + \cdots,$$

darin ist aber

$$a_n - b_n = (n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \cdots = 0,$$

mithin bleibt

$$u^2 + v^2 = 1,$$

wofür man auch schreiben kann

$$v = \sqrt{1-u^2}, \quad u = \sqrt{1-v^2}.$$

Differenzirt man ferner die ursprünglichen Gleichungen für u und v, so hat man

$$\frac{du}{dx} = -v = -\sqrt{1-u^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = +u = +\sqrt{1-v^2},$$

oder in anderer Form

$$\frac{d\,arc\cos u}{dx} = \frac{d(x)}{dx},$$

$$\frac{d\,arc\sin u}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Die erste Gleichung liefert $arc\cos u - x = \alpha$ oder $u = \cos(x+\alpha)$, mithin

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots = \cos(x+\alpha);$$

für $x=0$ wird hieraus $\cos\alpha = 1$, mithin $\alpha = 2k\pi$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, also durch Substitution dieses Werthes

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \cdots$$

Auf analoge Weise erhält man $v = \sin(x+\beta)$ und schliesslich

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \cdots$$

Aufgabe 5. Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 \leqq 1$ convergirenden Reihe

$$\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Wird die Summe der Reihe mit $F(x)$ bezeichnet, so ergiebt sich

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2},$$

oder

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d \arctan x}{dx}$$

und hieraus folgt

$$F(x) = \arctan x + c.$$

Nach Substitution dieses Werthes kann die Constante mittelst der Specialisirung $x=0$ bestimmt werden und es ist dann

$$\arctan x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 6. Man sucht die Summe der folgenden, für $x^2 \leqq 1$ convergirenden Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Bezeichnet $F(x)$ die Summe, so ist

$$F'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots$$

d. i.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx}.$$

Hieraus folgt

$$F(x) = \arcsin x + Const.,$$

und nach Bestimmung der Constanten ergiebt sich

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots$$
$$x^2 \leqq 1.$$

§. 38.

Reihenentwickelungen mit Beachtung des Restes.

Wenn man nicht im Voraus weiss, ob und unter welchen Bedingungen eine Function $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, so wäre es eine völlig ungerechtfertigte Hypothese,

$$f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots$$

setzen zu wollen; jedenfalls aber darf man eine Gleichung von folgender Form aufstellen

$$f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n+R,$$

wo R eine unbekannte Function von x ist, denn es sagt diese Gleichung nichts weiter, als dass der Unterschied zwischen $f(x)$ und der Reihe eine gewisse Function von x sein wird. Wie man durch passende Rechnungsoperationen $a_0, a_1, \ldots a_n$ und R, den sogenannten Rest der Reihe, bestimmen kann, mögen die folgenden Aufgaben zeigen.

Aufgabe 1. Es sei

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right)=a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n+R,$$

so ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{1}{1-x}=1\,a_1+2\,a_2 x+\cdots+n\,a_n x^{n-1}+\frac{dR}{dx}.$$

Diese Gleichung wird identisch mit der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x},$$

wenn die Coefficienten $a_1, \ldots a_n$ folgende Werthe erhalten

$$a_1=\tfrac{1}{1},\quad a_2=\tfrac{1}{2},\ldots a_n=\frac{1}{n}$$

und wenn überdies

$$\frac{dR}{dx}=\frac{x^n}{1-x}$$

ist. Um hervorzuheben, dass R von x abhängt, setze man $R=\varphi(x)$, also

$$\varphi'(x)=\frac{x^n}{1-x};$$

weil ferner $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetige Functionen von x sind, wenn $x<1$ bleibt, so lässt sich der Satz

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\,\varphi'(\vartheta x),\quad 0<\vartheta<1$$

anwenden, wodurch man erhält

$$\varphi(x) = x\frac{(\vartheta x)^n}{1-\vartheta x}.$$

Nach diesen Bemerkungen hat man

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1-\vartheta x},$$

$$x < 1.$$

Bei unendlich wachsenden n hat x^n nur dann die Null zur Grenze, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt; es ist daher

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$-1 < x < +1.$$

Aufgabe 2. Von der Gleichung

$$e^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + R$$

ausgehend, erhält man durch Differentiation

$$e^x = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx};$$

diese Gleichung wird mit der vorigen identisch, wenn erstens

$$1 a_1 = 1, \quad 2 a_2 = a_1, \quad 3 a_3 = a_2, \ldots n a_n = a_{n-1},$$

d. h.

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{1.2}, \quad a_3 = \frac{1}{1.2.3}, \ldots a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}$$

und wenn ausserdem

$$\frac{dR}{dx} = a_n x^n + R$$

ist. Um die letztere Bedingung zu vereinfachen, setzen wir

$$R = e^x \psi(x);$$

es wird dann

$$\psi'(x) = a_n x^n e^{-x} = \frac{x^n}{1.2\ldots n} e^{-x},$$

mithin wegen $\psi(x) = \psi(0) + x\psi'(\vartheta x)$

$$\psi(x) = \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1.2\ldots n} e^{-\vartheta x};$$

hieraus ergiebt sich R und nachher

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \frac{\vartheta^n x^{n+1}}{1.2\ldots n} e^{(1-\vartheta)x}.$$

Bei unendlich wachsenden n wird für jedes endliche x

$$Lim \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0,$$

der Rest convergirt dann gegen die Null und damit kommt man auf die bekannte Exponentialreihe zurück.

Aufgabe 3. Es sei

$$(1+x)^{\mu}=1+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n+R;$$

differenzirt man diese Gleichung und multiplicirt nachher mit $1+x$, so erhält man

$$\mu(1+x)^{\mu}=1a_1+(1a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot+[(n-1)a_{n-1}+na_n]x^{n-1}+na_n x^n+(1+x)\frac{dR}{dx},$$

und andererseits ist direct

$$\mu(1+x)^{\mu}=\mu+\mu a_1 x+\mu a_2 x^2+\cdots\cdot+\mu a_{n-1}x^{n-1}+\mu a_n x^n+\mu R.$$

Die beiden letzten Gleichungen werden identi ch, wenn erstens

$$1a_1=\mu,\quad 1a_1+2a_2=\mu a_1,\quad 2a_2+3a_3=\mu a_2,\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot(n-1)a_{n-1}+na_n=\mu a_{n-1}$$

ist, woraus folgt

$$a_1=\frac{\mu}{1},\quad a_2=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2},\quad a_3=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3},\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot a_n=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2.3\ldots n},$$

und wenn zweitens die Gleichung

$$na_n x^n+(1+x)\frac{dR}{dx}=\mu a_n x^n+\mu R,$$

oder

$$(1+x)\frac{dR}{dx}-\mu R=(\mu-n)a_n x^n$$

stattfindet. Dieselbe vereinfacht sich mittelst der Substitution

$$R=(\mu-n)a_n(1+x)^{\mu}\varphi(x);$$

sie wird nämlich

$$\varphi'(x)=\frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}}$$

und hieraus folgt, wofern $(1+x)^{\mu}$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet,

$$\varphi(x)=\frac{\vartheta^n x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{\mu+1}}.$$

Diese Formel bestimmt nachher R, und wenn man a_n kurz mit $(\mu)_n$ bezeichnet, so folgt

$$(1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \cdots$$
$$\cdots + (\mu)_n x^n + (\mu - n)(\mu)_n \frac{\vartheta^n (1+x)^\mu x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{\mu+1}}.$$

Im Fall x zwischen -1 und $+1$ liegt, ist bei unendlich wachsenden n

$$Lim\,[(\mu - n)(\mu)_n x^n] = 0;$$

der Rest convergirt dann gegen die Null, und damit kommt man auf den allgemeinen binomischen Satz zurück.

Aufgabe 4. Es sei zu entwickeln

$$arctan\, x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{1}{1+x^2} = 1\,a_1 + 3\,a_3 x^2 + 5\,a_5 x^4 + \cdots + (2n-1)\,a_{2n-1} x^{2n-2} + \frac{dR}{dx};$$

andererseits ist identisch

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2},$$

mithin durch Vergleichung

$$a_1 = \tfrac{1}{1}, \quad a_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad a_5 = +\tfrac{1}{5}, \ldots a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$
$$\frac{dR}{dx} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.$$

Schreibt man für den Augenblick $\varphi(x)$ statt R, so erhält man

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(\vartheta x) = x\,\frac{(-1)^n (\vartheta x)^{2n}}{1+(\vartheta x)^2}$$

und zusammen

$$arctan\, x = \tfrac{1}{1} x - \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \vartheta^{2n} x^{2n+1}}{1+\vartheta^2 x^2}.$$

Bei echt gebrochenen x und unendlich wachsenden n convergirt der Rest gegen die Null und es entsteht die bekannte unendliche Reihe für $arctan\, x$.

Aufgabe 5. Es sei zu entwickeln

$$arcsin\, x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} + R.$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1\,a_1 + 3\,a_3 x^2 + 5\,a_5 x^4 + \cdots + (2n-1)\,a_{2n-1} x^{2n-2} + \frac{dR}{dx},$$

andererseits ist nach dem binomischen Satze für $x^2 < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \cdots$$

Beide Gleichungen werden identisch, wenn erstens

$$a_1=\tfrac{1}{1},\quad a_3=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3},\quad a_5=\frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5},\ \ldots a_{2n-1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1},$$

und wenn zweitens ist

$$\frac{dR}{dx}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^{2n}\left\{1+\frac{2n+1}{2n+2}x^2+\cdots\right\}.$$

Für $R=\varphi(x)$ folgt hieraus

$$\varphi(x)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\vartheta^{2n}x^{2n+1}\left\{1+\frac{2n+1}{2n+2}\vartheta^2x^2+\cdots\right\};$$

die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt weniger als

$$1+\vartheta^2x^2+\vartheta^4x^4+\cdots=\frac{1}{1-\vartheta^2x^2}$$

und kann daher

$$=\frac{\varepsilon}{1-\vartheta^2x^2}$$

gesetzt werden, wo ε einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bezeichnet. Nach diesen Erörterungen ist für $x^2<1$

$$arcsin\, x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1.3..(2n-3)}{2.4..(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots(2n)}\cdot\frac{\varepsilon\vartheta^{2n}x^{2n+1}}{1-\vartheta^2x^2}.$$

Bei unendlich wachsenden n convergirt der Rest gegen die Null und es entsteht die unendliche Reihe für $arcsin\, x$.

Aufgabe 6. Es sei zu entwickeln

$$l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+R.$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren wie in No. 5 findet man

$$l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3..(2n-3)}{2.4..(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$+(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots(2n)}\vartheta^{2n}x^{2n+1}(1-\varepsilon x^2),$$

wobei $x^2<1$ sein muss, ϑ und ε positive echte Brüche bedeuten. Bei unendlich wachsenden n wird

$$l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{x}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\cdots,$$

$$x^2<1;$$

diese Gleichung gilt auch noch im Falle $x^2=1$.

§. 39.

Die Sätze von Taylor und Mac Laurin.

Im vorigen Paragraphen wurden die Reihen für $l(1-x)$, e^x etc. mittelst specieller Eigenschaften dieser Functionen entwickelt, jene Reihen können aber auch aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet werden, nämlich aus den Sätzen von Taylor und Mac Laurin. Hierbei macht sich eine Untersuchung des Restes nöthig, und für diese ist die Bemerkung von Werth, dass der Rest unter unendlich vielen verschiedenen Formen dargestellt werden kann.

Setzt man

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{b-x}{1}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{1.2}f''(x)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Function, $\varphi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechtsstehenden n-gliederigen Reihe bezeichnet, so hat man

$$\varphi(a)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1.2}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

und ferner unter der Voraussetzung, dass $f(b), f'(b), f''(b), \ldots f^{(n-1)}(b)$ endliche Grössen sind

$$\varphi(b)=f(b).$$

Andererseits ergiebt sich durch Differentiation

$$\varphi'(x)=\frac{(b-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x).$$

Wir benutzen nun folgenden Satz: wenn $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben und wenn ferner $\psi'(x)$ nnerhalb des genannten Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt, so ist

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(a+\vartheta[b-a])}{\psi'(a+\vartheta[b-a])},\quad 0<\vartheta<1,$$

oder

$$\varphi(a)=\varphi(b)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}\varphi'(a+\vartheta[b-a]).$$

Mittelst dieser Formel ergiebt sich unter Benutzung der Werthe von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und $\varphi'(x)$

$$f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1.2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$=f(b)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta[b-a]),$$

wobei $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben müssen und $\psi(x)$ eine beliebige nur an die eine Bedingung gebundene Function ist, dass $\psi'(x)$ zwischen a und b keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf.

Für $b-a=h$ oder $b=a+h$ ergiebt sich der Taylor'sche Satz

$$f(a+h)-R_n=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

worin der Rest R_n durch die Gleichung

$$R_n=\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta h)$$

bestimmt ist und zufolge der Willkürlichkeit von $\psi(x)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen kann. Die Wahlen $\psi(x)=x$ und $\psi(x)=(a+h-x)^n$ führen zu den gewöhnlich in den Lehrbüchern angegebenen Restformen.

Setzt man noch $a=0$, so entsteht der Satz von Mac Laurin

$$f(h)-R_n=f(0)+\frac{f'(0)}{1}h+\frac{f''(0)}{1.2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}h^{n-1},$$
$$R_n=\frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'(\vartheta h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\vartheta h),$$

worin $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ stetig und endlich bleiben müssen und $\psi'(x)$ zwischen 0 und h keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf. Für $\psi(x)=x$ und $\psi(x)=(h-x)^n$ kommen die gewöhnlichen Restformen zum Vorschein. Nimmt man dagegen $\psi(x)=f^{(n-1)}(x)$, so erhält man

$$R_n=[f^{(n-1)}(h)-f^{(n-1)}(0)]\frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

wo $f^{(n-1)}(x)$ zwischen 0 und h sein Vorzeichen nicht wechseln darf.

Bemerkenswerth ist auch das Resultat der Annahme $\psi(x)=(h-x)^n f^{(n)}(x)$ nämlich

$$R_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{h^n}{1-\varrho_n},\qquad \varrho_n=\frac{(1-\vartheta)h}{n}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{f^{(n)}(\vartheta x)};$$

nur darf hier der Ausdruck

$$n f^{(n)}(x) - (h-x) f^{(n+1)}(x)$$

zwischen 0 und h keinen Vorzeichenwechsel erleiden.

Aufgabe. Man soll $(1+h)^\mu$ nach dem Satze von Mac Laurin entwickeln.

Es ergiebt sich

$$(1+h)^\mu - R_n = 1 + \frac{\mu}{1} h + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-[n-2])}{1.2.3\ldots(n-1)} h^{n-1},$$

und wenn $\psi(x) = (1+x)^\mu$ genommen wird, so ist unter der Voraussetzung von $h < -1$

$$R_n = [(1+h)^\mu - 1] \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots(n-1)} \left(\frac{h-\vartheta h}{1+\vartheta h}\right)^{n-1}.$$

Nach dem bekannten Satze, dass für $q^2 < 1$

$$Lim \left\{ \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1.2\ldots(n-1)} q^{n-1} \right\} = 0$$

ist, findet man leicht, dass R_n gegen die Null convergirt, wenn

$$\left(\frac{h-\vartheta h}{1+\vartheta h}\right)^2 < 1$$

bleibt, welche Bedingung für $h^2 < 1$ erfüllt ist. Man erhält so den binomischen Satz.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Functionen $l(1+h)$, e^h, $\cos h$, $\sin h$, $\operatorname{arctan} h$ in endliche Reihen verwandeln, deren Reste je nach der Wahl von $\psi(x)$ verschiedene Formen annehmen; bei unendlich wachsenden n ist dann zu untersuchen, unter welchen Umständen $Lim\, R_n = 0$ wird.

§. 40.

Reihenentwickelungen für zusammengesetzte Functionen.

I. Wenn eine Function als Summe oder Product mehrer anderer Functionen betrachtet werden kann, von denen jede für sich in eine Reihe verwandelbar ist, so erhält man die Entwickelung der zusammengesetzten Function sehr leicht dadurch, dass man die Reihen für die einzelnen Functionen addirt resp. multiplicirt.

Aufgabe 1. Es soll die Function

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Beachtet man die verschiedenen Formen

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)=\frac{1-x}{1-x^4},$$

so hat man drei verschiedene Mittel zur Entwickelung der gesuchten Reihe, welche für $x^2<1$ lautet

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+x^{12}-x^{13}+\cdots.$$

Aufgabe 2. Es soll bewiesen werden, dass die Gleichung

$$\frac{l(1+x)}{1+x}=\tfrac{1}{1}x-(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2})x^2+(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3-\cdots$$

für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden x gilt.

Aufgabe 3. Man soll zeigen, dass für jedes x eine Entwickelung folgender Art besteht

$$e^{ax+\frac{b}{x}}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_3}{x^3}+\cdots,$$

worin A_n und B_n die Werthe haben

$$A_n=\frac{a^n}{1.2\ldots n}\left\{1+\frac{ab}{1.(n+1)}+\frac{a^2b^2}{1.2.(n+1)(n+2)}+\cdots\right\},$$

$$B_n=\frac{b^n}{1.2\ldots n}\left\{1+\frac{ab}{1.(n+1)}+\frac{a^2b^2}{1.2.(n+1)(n+2)}+\cdots\right\}.$$

Setzt man die Summe der immer convergirenden Reihe

$$1+\frac{u}{1^2}+\frac{u^2}{(1.2)^2}+\frac{u^3}{(1.2.3)^2}+\cdots=\varphi(u),$$

so kann man der vorigen Entwickelung folgende Gestalt verleihen

$$e^{ax+\frac{b}{x}}=\varphi(ab)+\left(ax+\frac{b}{x}\right)\varphi'(ab)+\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\varphi''(ab)+\cdots$$

II. Sehr häufig trifft es sich, dass Betrachtungen der vorigen Art zwar die Möglichkeit einer Reihenentwickelung zeigen, aber das Bildungsgesetz der Coefficienten schwer erkennen lassen; in solchen Fällen ist es gerathen, die Coefficienten einstweilen mit Buchstaben zu bezeichnen und sie nachträglich durch eine oder mehrere Differentiationen zu bestimmen. (Methode der unbestimmten Coefficienten.)

Aufgabe 4. Es soll der Ausdruck

$$\frac{l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

in eine Potenzenreihe verwandelt werden.

Entwickelt man $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des binomischen Satzes und $l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ nach Aufgabe 6 in §. 38, so erhält man durch Multiplication

$$\frac{l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{8}{15}x^5-\tfrac{16}{35}x^7+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

worin das Bildungsgesetz der Coefficienten schwer zu erkennen ist. Man setze deshalb

$$\frac{l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=a_1x-a_3x^3+a_5x^5-\cdots,$$

multiplicire beiderseits mit $\sqrt{1+x^2}$, differenzire und multiplicire nochmals mit $\sqrt{1+x^2}$; dies giebt

$$1=a_1-(3a_3-2a_1)x^2+(5a_5-4a_3)x^4-(7a_7-6a_5)x^6+\cdots$$

und hieraus findet sich der Reihe nach

$$a_1=1,\quad a_3=a_1\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3},\quad a_5=a_3\tfrac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}\cdots,$$

mithin

$$\frac{l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5-\frac{2.4.6}{3.5.7}x^7+\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Aufgabe 5. Man verlangt eine Potenzenreihe für den Ausdruck

$$\left[l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2.$$

Multiplicirt man die für $l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ gefundene Reihe mit sich selbst, so entsteht ein Resultat von der Form

$$\left[l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2=a_2x^2-a_4x^4+a_6x^6-\cdots,$$
$$x^2<1;$$

durch Differentiation kommt man auf die Reihenentwickelung der vorigen Aufgabe zurück und erhält schliesslich

$$\left[l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$$
$$=\frac{x^2}{1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x^6}{3}-\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{x^8}{4}+\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Aufgabe 6. Durch ein ähnliches Verfahren soll folgende Gleichung bewiesen werden

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2.4}{3.5}x^5+\frac{2.4.6}{3.5.7}x^7+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

die sich auch in nachstehender Form darstellen lässt

$$arctan\, z = \frac{z}{1+z^2}\left\{1+\frac{2}{3}\,\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$z^2 < \infty.$$

Aufgabe 7. Es ist folgende Gleichung zu beweisen

$$(arcsin\, x)^2 = \frac{x^2}{1}+\frac{2}{3}\,\frac{x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}.\frac{x^6}{3}+\frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{x^8}{4}+\cdots,$$
$$x^2 < 1.$$

Aufgabe 8. Man sucht eine Potenzenreihe für den Ausdruck

$$2\,l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right).$$

Entwickelt man zunächst $\sqrt{1-x}$ nach dem binomischen Satze und benutzt nachher die logarithmische Reihe, so erhält man für den vorliegenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
&2\,l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2-\cdots}\right)\\
&=2\left\{\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots\right)^2\right.\\
&\qquad\left.+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots\right)^3+\cdots\right\}\\
&=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{32}x^3+\cdots\\
&\qquad+\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\cdots\\
&\qquad\qquad+\tfrac{1}{96}x^3+\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad+\cdots
\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt die Bedingungen, unter welchen es erlaubt ist, ihre Terme nach Verticalcolonnen zu ordnen; man hat daher

$$2\,l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)=a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\cdots,$$
$$x^2<1,$$

wo $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{16}$, $a_3=\frac{5}{48}$ ist. Durch Differentiation gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+1\,a_1 x+2\,a_2 x^2+3\,a_3 x^3+\cdots,$$

welche sich mit der Entwickelung von $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ vergleichen lässt; das Endresultat lautet

$$2\,l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^2}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^3}{3}+\cdots,$$
$$x^2 < 1,$$

oder auch

$$2l\left(\frac{2}{1+z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-z^2}{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(1-z^2)^2}{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(1-z^2)^3}{3}+\cdots,$$
$$0<z<\sqrt{2}.$$

Die Substitution $z=\cos\theta$ führt zu einer bemerkenswerthen Formel für $l\cos\frac{1}{2}\theta$.

Aufgabe 9. Man verlangt die Entwickelung des Ausdrucks

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}.$$

Durch Anwendung des binomischen Satzes bringt man die gegebene Function leicht in die Form

$$\begin{aligned}(m)_0+(m)_2(1-x)+(m)_4(1-x)^2+(m)_6(1-x)^3+\cdots\\
=(m)_0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
+(m)_2-\ (m)_2x\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\\
+(m)_4-2(m)_4x+\ (m)_4x^2\qquad\qquad\quad\\
+(m)_6-3(m)_6x+3(m)_6x^2-(m)_6x^3\\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

und zwar gilt diese Transformation für jedes x, wenn m eine ganze positive Zahl ist; bei anderen m dagegen muss x auf das Intervall 0 bis 1 beschränkt werden. Im ersten Falle ist die obige Doppelreihe eine endliche und darf ohne Weiteres nach Verticalcolonnen geordnet werden, wodurch ein Resultat von folgender Form entsteht

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

Im zweiten Falle geht die Doppelreihe ins Unendliche fort und darf nur unter der Bedingung in Verticalcolonnen umgesetzt werden, dass die absoluten Werthe der Terme sowohl bei der einen als bei der anderen Anordnung convergente Reihen liefern. Diese absoluten Werthe liefern aber, wenn die Horizontalzeilen zusammengezogen werden, die divergente Reihe

$$(m)_0+(m)_2(1+x)+(m)_4(1+x)^2+\cdots,$$
$$0<x<1,$$

mithin kann die ursprünglich gegebene Function für andere als ganze positive m nicht in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden. Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, dass für positive echt gebrochene x

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}$$
$$=2^{m-1}(1-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^2-\cdots)^m+\frac{x^m}{2^m}(1+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x^2+\cdots)^m$$

gesetzt werden kann; ist m keine ganze positive Zahl, so liefert die weitere Entwickelung der rechten Seite keine reine Potenzenreihe sondern ein Gemisch von ganzen positiven und anderen Potenzen des x.

Differenzirt man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m\}$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

und benutzt hierbei die Identitäten

$$(1+\sqrt{1-x})^{m-1}=\frac{(1+\sqrt{1-x})^m}{x}(1-\sqrt{1-x}),$$
$$(1-\sqrt{1-x})^{m-1}=\frac{(1-\sqrt{1-x})^m}{x}(1+\sqrt{1-x}),$$

so erhält man leicht

$$m\frac{(1+\sqrt{1-x})^m-(1-\sqrt{1-x})^m}{2\sqrt{1-x}}$$
$$=ma_0+(m-2)a_1x+(m-4)a_2x^2+(m-6)a_3x^3+\cdots.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\sqrt{1-x}$, differenzire wiederum und mache dabei von den vorigen Identitäten Gebrauch; dies giebt

$$m^2.\frac{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m}{2}$$
$$=m^2a_0+[(m-2)^2a_1-m(m-1)a_0]x$$
$$+[(m-4)^2a_2-(m-2)(m-3)a_1]x^2+\cdots.$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert die Relation

$$a_k=-\frac{(m-2k+2)(m-2k+1)}{k(m-k)}.\frac{a_{k-1}}{4}$$

und da sich aus der anfänglichen Gleichung für $x=0$ ergiebt $a_0=2^{m-1}$, so können a_1, a_2 etc. der Reihe nach berechnet werden.

Als Endresultat findet man die folgende Gleichung, worin die Reihe bei geraden m mit $x^{\frac{1}{2}m}$, bei ungeraden m mit $x^{\frac{1}{2}(m-1)}$ abzubrechen ist,

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m+(1-\sqrt{1-x})^m}{2^m}$$
$$=1-\frac{m}{1}.\frac{x}{4}+\frac{m(m-3)}{1.2}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$
$$+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\cdots.$$

Ferner ist nach einer der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{(1+\sqrt{1-x})^m-(1-\sqrt{1-x})^m}{2^m\sqrt{1-x}}$$

$$=1-\frac{m-2}{1}\cdot\frac{x}{4}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\left(\frac{x}{4}\right)^2$$

$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots.$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass man sich nun auch a posteriori von der nur auf ganze positive m beschränkten Gültigkeit dieser Formeln überzeugen kann. So ergiebt sich z. B. aus der ersten Formel für $m=-1$

$$\frac{4}{x}=1+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{8}x^2+\cdots.$$

und für $m=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}=1-\tfrac{1}{8}x-\tfrac{5}{128}x^2-\cdots.$$

und diese Resultate sind unrichtig.

Aufgabe 10. Mittelst der gewöhnlichen goniometrischen For meln erhält man leicht folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos 2u &= 2\cos^2 u-1\,,\\
\cos 3u &= 4\cos^3 u-3\cos u\,,\\
\cos 4u &= 8\cos^4 u-8\cos^2 u+1\,,\\
\cos 5u &= 16\cos^5 u-20\cos^3 u+5\cos u\,,\\
\cos 6u &= 32\cos^6 u-48\cos^4 u+18\cos^2 u-1\,,
\end{aligned}$$

u. s. w.,

aus denen hervorgeht, dass bei ganzen positiven m gesetzt werden kann

$$\cos mu=A_0\cos^m u-A_2\cos^{m-2}u+A_4\cos^{m-4}u-\cdots,$$

oder kürzer

$$\cos(m\arccos x)$$

$$=A_0x^m-A_2x^{m-2}+A_4x^{m-4}-A_6x^{m-6}+\cdots.$$

Differenzirt man diese Gleichung und multiplicirt nachher mit $\sqrt{1-x^2}$, so findet man

$$m\sin(m\arccos x)$$

$$=\sqrt{1-x^2}\,\{mA_0x^{m-1}-(m-2)A_2x^{m-3}+(m-4)A_4x^{m-5}-\cdots\};$$

diese Gleichung differenzire man wiederum, multiplicire mit $\sqrt{1-x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der ursprünglichen Gleichung, man gelangt dann zu folgender Relation

$$4k(m-k)A_{2k}=(m-2k+2)(m-2k+1)A_{2k-2},$$

welche dazu dient, um $A_2, A_4, A_6, \dots$ durch den vorläufig unbekannt bleibenden Coefficienten A_0 auszudrücken. Man findet

$$A_2 = \frac{m}{1} \cdot \frac{A_0}{2^2}, \quad A_4 = \frac{m(m-3)}{1.2} \cdot \frac{A_0}{2^4} \dots,$$

$$A_{2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2.3\dots k} \cdot \frac{A_0}{2^{2k}}.$$

Um A_0 zu bestimmen, unterscheide man gerade $m=2n$ und ungerade $m=2n+1$. Im ersten Falle ist

$$\cos 2nu = A_0 \cos^{2n} u - \dots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u + (-1)^n A_{2n}$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \text{ d. h. } A_{2n} = 1.$$

Andererseits hat man nach der Formel für A_{2k}, wenn $m=2n$, $k=n$ gesetzt wird,

$$A_{2n} = 2\frac{A_0}{2^{2n}},$$

mithin weil A_{2n} nach dem Vorigen bekannt ist

$$A_0 = 2^{2n-1} = 2^{m-1}.$$

Im Falle $m=2n+1$ ergiebt sich

$$\frac{\cos(2n+1)u}{\cos u} = A_0 \cos^{2n} u - \dots + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u + (-1)^n A_{2n}$$

und für $u = \frac{1}{2}\pi$

$$(2n+1)\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \text{ d. h. } A_{2n} = 2n+1.$$

Andererseits hat man nach der Formel für A_{2k}, wenn $m=2n+1$, $k=n$ gesetzt wird,

$$A_{2n} = \frac{2n+1}{1} \cdot \frac{A_0}{2^{2n}},$$

mithin durch Vergleichung mit dem vorigen Werthe von A_{2n}

$$A_0 = 2^{2n} = 2^{m-1}.$$

In allen Fällen ist also $A_0 = 2^{m-1}$, mithin

$$2\cos mu = (2\cos u)^m - \frac{m}{1}(2\cos u)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos u)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-6} + \dots$$

und durch Differentiation

$$\frac{\sin mu}{\sin u} = (2\cos u)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos u)^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos u)^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5(m-6)}{1.2.3}(2\cos u)^{m-7} + \dots$$

Aufgabe 11. Man sucht eine Potenzenreihe für den Ausdruck

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu,$$

worin μ eine beliebige reelle Zahl bedeuten soll.

Da überhaupt z^μ unter der Form

$$e^{\mu l z} = 1 + \frac{\mu l z}{1} + \frac{(\mu l z)^2}{1.2} + \cdots$$

dargestellt werden kann, so hat man

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu$$

$$= 1 - \frac{\mu}{1} l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right) + \frac{\mu^2}{1.2}\left[l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right]^2 + \cdots;$$

hier lässt sich die in der 8. Aufgabe entwickelte Reihe benutzen, wodurch die rechte Seite zu folgender Doppelreihe wird, welche an die Bedingung $x^2 < 1$ gebunden ist,

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{1}{1}\mu\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{2}{32}x^2 + \tfrac{5}{96}x^3 + \cdots\right) \\ + \tfrac{1}{2}\mu^2\left(\tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{3}{64}x^3 + \cdots\right) \\ - \tfrac{1}{6}\mu^3\left(\tfrac{1}{64}x^3 + \cdots\right) \\ + \cdots \end{aligned}$$

Wie leicht zu sehen ist, bleibt diese Doppelreihe auch in dem Falle convergent, wo ihre Terme mit durchaus positiven Zeichen genommen werden; man darf daher nach Verticalcolonnen ordnen und erhält dadurch ein Resultat von der Form

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$$x^2 < 1,$$

worin die ersten Coefficienten sind

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{\mu}{4}, \quad a_2 = \frac{\mu^2 - 3\mu}{32}.$$

Differenzirt man die vorhergehende Gleichung und benutzt die Identität

$$(1+\sqrt{1-x})^{\mu-1} = \frac{(1+\sqrt{1-x})^\mu}{x}(1-\sqrt{1-x}),$$

so gelangt man leicht zu folgendem Resultate

$$\mu\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu$$

$$= \sqrt{1-x}\,\{\mu a_0 + (\mu-2)a_1 x + (\mu-4)a_2 x^2 + (\mu-6)a_3 x^3 + \cdots\},$$

aus welchem sich durch nochmalige Differentiation ergiebt

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu (1-\sqrt{1-x})$$
$$=[1\mu a_0-2(\mu-2)a_1]x+[3(\mu-2)a_1-4(\mu-4)a_2]x^2$$
$$+[5(\mu-4)a_2-6(\mu-6)a_3]x^3+\cdots.$$

Multiplicirt man die vorhergehende Gleichung mit $\mu\sqrt{1-x}$ und addirt das Product zur letzten Gleichung, so entsteht

$$\mu^2\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu=\mu^2 a_0+[(\mu-2)^2 a_1-\mu(\mu-1)a_0]x$$
$$+[(\mu-4)^2 a_2-(\mu-2)(\mu-3)a_1]x^2+\cdots.$$

Man setze nun linker Hand die ursprüngliche Reihe und vergleiche die beiderseitigen Coefficienten; man erhält dann die Relation

$$a_k=-\frac{(\mu-2k+2)(\mu-2k+1)}{k(\mu-k)}\cdot\frac{a_{k-1}}{4},$$

aus welcher man, mit $a_0=1$ beginnend, die Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. bestimmt, was schliesslich zu folgendem Resultate führt

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu$$
$$=1-\frac{\mu}{1}\cdot\frac{x}{4}+\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$
$$+\frac{\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7)}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{4}\right)^4-\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Die Reihe ist dieselbe wie bei der 9. Aufgabe, sie unterscheidet sich aber dadurch von jener, dass sie in jedem Falle (auch bei ganzen positiven μ) ins Unendliche fortgesetzt werden muss.

Setzt man $\sqrt{1-x}=1-2z$, so erhält man noch

$$(1-z)^\mu=1-\frac{\mu}{1}z(1-z)+\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}z^2(1-z)^2$$
$$-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}z^3(1-z)^3+\cdots.$$
$$-\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)<z<+\tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe 12. Man sucht eine Potenzenreihe für die Function

$$(x+\sqrt{1+x^2})^\mu.$$

Durch Anwendung der Identität $z^\mu=e^{\mu lz}$ und der in §. 38 behandelten Aufgabe 6) bringt man den gegebenen Ausdruck leicht auf folgende Form

$$\begin{aligned}1&+\tfrac{1}{1}\mu\left(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{3}{40}x^5-\cdots\right)\\&-\tfrac{1}{2}\mu^2\left(x^2-\tfrac{1}{3}x^4+\tfrac{8}{45}x^6-\cdots\right)\\&+\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

worin $x^2<1$ sein muss. Da hier die Doppelreihe auch dann ihre Convergenz behält, wenn alle Terme positiv genommen werden, so hat man für $x^2<1$

$$(x+\sqrt{1+x^2})^\mu=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$
$$a_0=1,\quad a_1=\mu,\quad a_2=-\tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Man differenzire diese Gleichung, multiplicire mit $\sqrt{1+x^2}$, differenzire noch einmal, multiplicire wieder mit $\sqrt{1+x^2}$ und vergleiche das Resultat mit der anfänglichen Gleichung; man gelangt dann zu der Relation

$$a_{k+2}=-a_k\cdot\frac{\mu^2-k^2}{(k+1)(k+2)}.$$

Mit $a_0=1$ anfangend, berechnet man hieraus a_2, a_4, a_6 etc. und von $a_1=\mu$ ausgehend, a_3, a_5, a_7 etc., wodurch sich ergiebt

$$\begin{aligned}&(\sqrt{1+x^2}+x)^\mu\\&=1+\frac{\mu^2}{1.2}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}x^4+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots6}x^6+\cdots\\&\quad+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}x^3+\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2\ldots5}x^5+\cdots\\&\qquad x^2<1.\end{aligned}$$

Lässt man $-x$ an die Stelle treten, so entsteht eine zweite ähnliche Gleichung, welche mit der vorigen durch Addition und Subtraction verbunden werden kann.

Aufgabe 13. Es soll die Exponentialgrösse

$$e^{\lambda\,\arcsin x}$$

in eine Potenzenreihe verwandelt werden.

Das Verfahren ist hier fast ganz dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe; als Resultat findet sich

$$\begin{aligned}e^{\lambda\,\arcsin x}=1&+\frac{\lambda^2}{1.2}x^2+\frac{\lambda^2(\lambda^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\\&+\frac{\lambda}{1}x+\frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{1.2.3}x^3+\cdots\\&\qquad x^2<1,\end{aligned}$$

woraus noch die Entwickelungen von

$$\frac{e^{\lambda \arcsin x} + e^{-\lambda \arcsin x}}{2} \text{ und } \frac{e^{\lambda \arcsin x} - e^{-\lambda \arcsin x}}{2}$$

hergeleitet werden können.

Aufgabe 14. Es sind folgende Gleichungen zu beweisen

$$\cos\left[\mu\, l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$$
$$=1-\frac{\mu^2}{1.2}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)}{1.2.3.4}x^4-\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{1.2\ldots6}x^6+\cdots,$$
$$x^2<1;$$
$$\sin\left[\mu\, l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]$$
$$=\frac{\mu}{1}x-\frac{\mu(\mu^2+1^2)}{1.2.3}x^3+\frac{\mu(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{1.2\ldots5}x^5-\cdots,$$
$$x^2<1.$$

Die Entwickelung geschieht hier nach einem ähnlichen Verfahren wie bei den vorigen Aufgaben. Durch Substitution von

$$l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=z$$

erhalten die vorigen Gleichungen bemerkenswerthe neue Formen.

Aufgabe 15. Unter der Voraussetzung, dass für hinreichend kleine Werthe von x^2 die Gleichung

$$l(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^2+\cdots)$$
$$=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\cdots$$

bestehen kann, sollen die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. aus den gegebenen Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. hergeleitet werden.

Differenzirt man beiderseits, schafft nachher den Bruch weg und vergleicht die Coefficienten, so gelangt man zu den Relationen

$$\begin{aligned}
1a_1 &= 1b_1,\\
2a_2 &= 1a_1b_1+2b_2,\\
3a_3 &= 1a_2b_1+2a_1b_2+3b_3,\\
4a_4 &= 1a_3b_1+2a_2b_2+3a_1b_3+4b_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

aus denen sich successive b_1, b_2, b_3 etc. berechnen lassen.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, werde vorausgesetzt, dass die n Wurzeln der Gleichung

$$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

bekannt und zwar reell seien; sie mögen $z_1, z_2, \ldots z_n$ heissen. Nach einem Satze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen ist dann

$$z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$
$$=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_n),$$

mithin für $z=\frac{1}{x}$

$$1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$
$$=(1-z_1x)(1-z_2x)(1-z_3x)\dots(1-z_nx).$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen und wählt x so klein, dass die absoluten Werthe aller der Producte $z_1x, z_2x, \dots z_nx$ echte Brüche sind, so kann man rechter Hand sämmtliche n Logarithmen mittelst der Formel

$$l(1-\xi)=-\tfrac{1}{1}\xi-\tfrac{1}{2}\xi^2-\tfrac{1}{3}\xi^3-\cdots$$

entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} &l(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)\\ &=-\tfrac{1}{1}(z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n)x\\ &\quad-\tfrac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+\cdots\cdots+z_n^2)x^2\\ &\quad-\tfrac{1}{3}(z_1^3+z_2^3+\cdots\cdots+z_n^3)x^3\\ &\quad-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$z_1^k+z_2^k+\cdots+z_n^k=s_k$$

gesetzt wird

$$\begin{aligned} &l(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)\\ &=-\tfrac{1}{1}s_1x-\tfrac{1}{2}s_2x^2-\tfrac{1}{3}s_3x^3-\cdots \end{aligned}$$

Man hat hier eine Entwickelung der anfangs vorausgesetzten Art und zwar ist

$$a_{n+1}=a_{n+2}\cdots=0,\quad b_k=-\frac{1}{k}s_k,$$

mithin gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} 0&=1a_1+s_1,\\ 0&=2a_2+a_1s_1+s_2,\\ 0&=3a_3+a_2s_1+a_1s_2+s_3,\\ 0&=4a_4+a_3s_1+a_2s_2+a_1s_3+s_4,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die Grössen s_1, s_2, s_3 etc. lassen sich also direct aus den Coefficienten der gegebenen algebraischen Gleichung herleiten, ohne dass es nöthig wäre, die Gleichung aufzulösen.

Aufgabe 16. Unter der Voraussetzung, dass für hinreichend kleine x^2 die Gleichung

$$\begin{aligned} &(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^\mu\\ &=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\cdots \end{aligned}$$

bestehen kann, sollen die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. aus den gegebenen Coefficienten a_1, a_2, a_3 etc. hergeleitet werden.

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, differenzirt und verfährt im Uebrigen wie bei der vorigen Aufgabe, so gelangt man zu folgenden Relationen

$$\begin{aligned}
1\,b_1 &= \mu\, a_1,\\
2\,b_2 &= (\mu-1)\,a_1 b_1 + 2\mu\, a_2,\\
3\,b_3 &= (\mu-2)\,a_1 b_2 + (2\mu-1)\,a_2 b_1 + 3\mu\, a_3,\\
4\,b_4 &= (\mu-3)\,a_1 b_3 + (2\mu-2)\,a_2 b_2 + (3\mu-1)\,a_3 b_1 + 4\mu\, a_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

welche zur successiven Berechnung von b_1, b_2, b_3 etc. dienen.

Für den speciellen Fall $\mu = \frac{1}{2}$ ist z. B.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}\\
&= 1 + \tfrac{1}{2} a_1 x + (\tfrac{1}{2} a_2 - \tfrac{1}{8} a_1^2) x^2 + (\tfrac{1}{2} a_3 - \tfrac{1}{4} a_2 b_1 + \tfrac{1}{16} a_1^3) x^3\\
&\quad + (\tfrac{1}{2} a_4 - \tfrac{1}{4} a_3 a_1 - \tfrac{1}{8} a_2^2 + \tfrac{3}{16} a_2 a_1^2 - \tfrac{5}{128} a_1^3) x^4 + \cdots,
\end{aligned}$$

wobei die Coefficienten bald sehr zusammengesetzte Ausdrücke werden, deren independentes Bildungsgesetz zwar durch gewisse Formeln der Combinationslehre dargestellt werden kann, aber keinen wesentlichen praktischen Vortheil gewährt.

Um hiervon eine Anwendung zu machen, schicken wir folgende Bemerkung voraus. Bezeichnen α und $\beta < \alpha$ zwei beliebige positive Grössen, so lassen sich zwei Reihen neuer Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ mittelst nachstehender Formeln berechnen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), & \beta_1 &= \sqrt{\alpha\beta},\\
\alpha_2 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1), & \beta_2 &= \sqrt{\alpha_1 \beta_1},\\
\alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2), & \beta_3 &= \sqrt{\alpha_2 \beta_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

so dass immer

$$\alpha_{k+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \quad \beta_{k+1} = \sqrt{\alpha_k \beta_k}$$

ist. Nach dieser Formel hat man

$$\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\alpha_k} - \sqrt{\beta_k})^2$$

und ferner mittelst einer leichten Umwandlung

$$\frac{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}}{\alpha_k - \beta_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_k - \beta_k}{(\sqrt{\alpha_k} + \sqrt{\beta_k})^2} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_k,$$

wo ε_k einen echten Bruch bedeutet, auf dessen Werth es nicht ankommt. Setzt man in der vorigen Gleichung $k = 0, 1, 2, \ldots. (n-1)$, wobei $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$ zu nehmen ist, und multiplicirt alle entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\alpha_n - \beta_n = (\tfrac{1}{2})^n (\alpha - \beta)\, \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1},$$

und hieraus folgt für $n=\infty$, weil $(\alpha-\beta)\varepsilon_0\ldots\varepsilon_{n-1}$ immer einen endlichen Werth behält,

$$Lim(\alpha_n-\beta_n)=0.$$

Die Grössen α_n und β_n convergiren also gegen einen und denselben Grenzwerth, welcher das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen α und β heisst und im Folgenden mit $M(\alpha,\beta)$ bezeichnet werden soll.

Um diesen Grenzwerth mittelst einer unendlichen Reihe zu berechnen, setze man den echten Bruch

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\lambda, \text{ mithin } \beta=\alpha\frac{1-\lambda}{1+\lambda};$$

es ist dann

$$\alpha_1=\alpha\frac{1}{1+\lambda}=\alpha(1-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\lambda^4-\cdots),$$

$$\beta_1=\alpha\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}=\alpha(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda^3+\tfrac{3}{8}\lambda^4-\cdots),$$

ferner, wenn für α_1 und β_1 die vorstehenden Reihen benutzt werden

$$\alpha_2=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{11}{16}\lambda^4-\cdots)$$

$$\beta_2=\alpha\sqrt{1-2\lambda+\tfrac{5}{2}\lambda^2-3\lambda^3+\tfrac{27}{8}\lambda^4-\cdots}$$

$$=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{51}{32}\lambda^4-\cdots).$$

Auf diesem Wege fortgehend erhält man die Reihe,

$$M(\alpha,\beta)=\alpha(1-\lambda+\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{71}{64}\lambda^4-\cdots),$$

deren Coefficienten ein ziemlich verwickeltes, mit den bisherigen Mitteln nicht entdeckbares Bildungsgesetz befolgen. Beispielsweise findet sich für $\alpha=7$, $\beta=3$ durch directe Berechnung

$$\alpha_4=4{,}7890135832,\quad \beta_4=4{,}7890135831;$$

denselben Werth liefert die Reihe für $\alpha=7$ und $\lambda=0{,}4$.

§. 41.

Näherungsweise Darstellung gegebener Functionen.

Wenn die Potenzenreihen für zwei verschiedene Functionen in mehreren anfänglichen Termen übereinstimmen, so ist zu erwarten, dass die beiden Functionen — wenigstens bei kleinen Werthen der Variabelen — nicht sehr von einander differiren werden, dass man folglich die eine der beiden Functionen als eine genäherte Darstellung der anderen betrachten darf. Aus dieser Bemerkung entspringen zwei

Aufgaben: erstens, zu einer gegebenen Function eine ihr nahekommende zu finden, und zweitens, den Grad der Annäherung, d. h. das Maximum der Differenz beider Functionen zu bestimmen. Das folgende Beispiel wird zeigen, wie derartige Aufgaben zu behandeln sind.

Beispiel 1. Die drei Constanten α, β, γ sollen so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$l(1+x)=\frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x}$$

möglichst genau stattfinde.

Einerseits ist unter der Bedingung $x^2<1$

$$l(1+x)=\tfrac{1}{1}x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots\cdot,$$

andererseits, wenn $\gamma^2x^2<1$ genommen wird,

$$\frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x}=x\left\{\alpha-\frac{(\gamma-\beta)x}{1+\gamma x}\right\}$$
$$=\alpha x-(\gamma-\beta)x^2+(\gamma-\beta)\gamma x^3-(\gamma-\beta)\gamma^2x^4+\cdots\cdot;$$

setzt man in beiden Reihen die Coefficienten von x, x^2 und x^3 gleich, so hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten α, β, γ und erhält $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{2}{3}$. Demnach ist

$$l(1+x)-\frac{x(6+x)}{6+4x}$$
$$=-\left\{(\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9})x^4-(\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{27})x^5+(\tfrac{1}{6}-\tfrac{8}{81})x^6-\cdots\cdot\right\},$$

und zwar müssen hier die Bedingungen $x^2<1$, $\frac{4}{9}x^2<1$ gleichzeitig erfüllt sein, wozu $x^2<1$ genügt. Die letzte Reihe hat nun eine kleinere Summe als

$$(\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9})x^4+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{27})x^5+(\tfrac{1}{6}-\tfrac{8}{81})x^6+\cdots\cdot$$
$$<\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{4}x^5+\tfrac{1}{4}x^6+\cdots\cdot$$

und es ist daher

$$l(1+x)=\frac{x(6+x)}{6+4x}-\frac{\varrho x^4}{1-x},\quad x^2<1,$$

wo ϱ zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ liegt.

Dasselbe Verfahren gestattet folgende kleine Modification, die meistens bequemer sein dürfte. Man setze

$$l(1+x)-\frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x}=R,$$

multiplicire mit $1+\gamma x$ und substituire für $l(1+x)$ die gleichgeltende Potenzenreihe; es ist dann

$$(1+\gamma x)R$$
$$=(1-\alpha)x+(\gamma-\beta-\tfrac{1}{2})x^2+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\gamma)x^3$$
$$-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{3}\gamma)x^4+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{4}\gamma)x^5-(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{5}\gamma)x^6+\cdots.$$

Wählt man α, β, γ so, dass die Coefficienten x, x^2 und x^3 verschwinden, so wird

$$l(1+x)=\frac{x(6+x)}{6+4x}+R,$$

$$(3+2x)R=-\left(\frac{1}{3.4}x^4-\frac{2}{4.5}x^5+\frac{3}{5.6}x^6-\cdots\right).$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe beträgt weniger als

$$\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{4}x^5+\tfrac{1}{4}x^6+\cdots=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1-x}$$

und daher kann für jedes echt gebrochene x

$$R=-\frac{\varrho x^4}{(1-x)(3+2x)}, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4}$$

gesetzt werden.

Beschränkt man x auf positive Werthe $<\frac{5}{6}$, so ist in der Reihe

$$\frac{1}{3.4}x^4-\frac{2}{4.5}x^5+\frac{3}{5.6}x^6-\cdots$$

gleich von Anfang her jeder Term grösser als sein Nachfolger, also die Summe der Reihe $<\frac{1}{12}x^4$, und der absolute Werth des Restes R kleiner als

$$\tfrac{1}{12}\cdot\frac{x^4}{3+2x}<\tfrac{1}{36}x^4,$$

oder

$$R=-\varrho x^4, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{36}.$$

So ergiebt sich z. B. für $x=0{,}3$, wenn für ϱ das eine Mal sein grösster Werth $\frac{1}{36}$, das andere Mal sein kleinster Werth Null gesetzt wird,

$$0{,}262\,275<l(1{,}3)<0{,}262\,500,$$

während der wahre Werth ist $l(1{,}3)=0{,}262\,3643$.

Beispiel 2. Die allgemeinere Voraussetzung

$$l(1+x)-\frac{x(\alpha+\beta x)}{1+\gamma x+\delta x^2}=R$$

liefert für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe

$$\alpha=\tfrac{1}{6}, \quad \beta=\tfrac{1}{2}, \quad \gamma=1, \quad \delta=\tfrac{1}{6},$$

mithin

$$l(1+x)=\frac{x(6+3x)}{6+6x+x^2}+R; \quad x^2<1.$$

Man findet ferner

$$(6+6x+x^2)\,R=\frac{1.2}{3.4.5}x^5-\frac{2.3}{4.5.6}x^6+\frac{3.4}{5.6.7}x^7-\cdots.$$

und hieraus für jedes echt gebrochene x

$$R=\frac{\varrho\,x^5}{(6+6x+x^2)(1-x)},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{5}.$$

Wird dagegen x auf positive Werthe $<\frac{2}{3}$ beschränkt, so ergiebt sich

$$R=\varrho\,x^5,\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{180}.$$

Im Falle $x=0{,}3$ ist hiernach

$$0{,}2623574<l(1{,}3)<0{,}2623709.$$

Beispiel 3. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{x\,(15-4x^2)}{15-9x^2}+R,$$

so findet sich

$$R=\frac{\varrho\,x^7}{(1-x)(5-3x^2)},\quad 0<\varrho<\tfrac{2}{7}.$$

Beispiel 4. Geht man von einer ähnlichen Annahme wie im zweiten Beispiele aus, so erhält man

$$e^x=\frac{6+2x}{6-4x+x^2}+R,$$

$$(6-4x+x^2)\,R=\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{1.4.5}+\frac{x^6}{1.2.6.7}+\frac{x^7}{1.2.3.7.8}+\cdots$$
$$<\frac{x^4}{3.4}\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\right),$$

mithin

$$R<\frac{x^4e^x}{12[(x-2)^2+2]}<\left(\frac{x^4e^x}{24}=\varrho\,x^4e^x\right),$$

wo ϱ zwischen 0 und $\frac{1}{24}$ liegt. Durch Substitution dieses Werthes ergiebt sich

$$e^x=\frac{6+2x}{6-4x+x^2}\cdot\frac{1}{1-\varrho\,x^4},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{24}.$$

Beispiel 5. Durch ein ähnliches Verfahren wie bei dem vorigen Beispiele erhält man unter der Bedingung $x^2<1$

$$(1+x)^\mu=\frac{6+(2\mu+4)\,x}{6-4(\mu-1)\,x+\mu\,(\mu-1)\,x^2}+R$$

und

$$[6-4(\mu-1)\,x+\mu\,(\mu-1)x^2]\,R=C_4x^4+C_5x^5+C_6x^6+\cdots,$$

worin die Coefficienten C_4, C_5 etc. durch folgende Formel bestimmt sind

$$C_n = 6(\mu)_n - 4(\mu-1)(\mu)_{n-1} + \mu(\mu-1)(\mu)_{n-2}.$$

Vermöge der Werthe der Binomialcoefficienten findet man weiter

$$C_n = (\mu)_{n-2} \frac{(n-2)(n-3)(\mu+1)(\mu+2)}{(n-1)n}$$
$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\frac{(\mu-2)_{n-4}}{(n-1)n},$$

mithin

$$[6-4(\mu-1)x+\mu(\mu-1)x^2]R$$
$$= (\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\left\{\frac{(\mu-2)_0}{3.4}x^4 + \frac{(\mu-2)_1}{4.5}x^5 + \frac{(\mu-2)_2}{5.6}x^6 + \ldots\right\}$$

Die Grenzen, zwischen welche dieser Ausdruck gebracht werden kann, hängen von der Beschaffenheit des Exponenten μ ab. Ist derselbe ein positiver echter Bruch, so wird

$$-[6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2]R$$
$$= (2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4\left\{\frac{1}{3.4} - \frac{2-\mu}{1}\cdot\frac{x}{4.5} + \frac{(2-\mu)(3-\mu)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{5.6} - \ldots\right\};$$

unter der Voraussetzung, dass x zwischen 0 und $\frac{5}{6}$ liegt, beträgt jeder Term der Reihe mehr als sein Nachfolger, daher ist die rechte Seite positiv und kleiner als

$$(2+\mu)(1-\mu^2)\mu x^4 \cdot \frac{1}{3.4} < \tfrac{1}{4}x^4.$$

Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich

$$(1+x)^\mu = \frac{6+(4+2\mu)x - \varrho x^4}{6+4(1-\mu)x-\mu(1-\mu)x^2}, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4},$$

wobei die für μ und x erwähnten Bedingungen fest zu halten sind.

Hiernach ist z. B.

$$\sqrt{1+x} = \frac{6+5x-\varrho x^4}{6+2x-\frac{1}{4}x^2}, \quad 0<\varrho<\tfrac{1}{4}.$$

Beispiel 6. Mittelst der bisherigen Methode findet man

$$\cos x = \frac{12-5x^2}{12+x^2} + R,$$
$$(12+x^2)R$$
$$= \frac{x^6}{1.2\ldots6}\left\{2.9 - \frac{4.11}{7.8}x^2 + \frac{6.13}{7.8.9.10}x^4 - \frac{8.15}{7\ldots12}x^6 + \ldots\right\}$$

und für den Fall, dass $x^2 < \frac{252}{11}$ ist,

$$R < \frac{x^6}{1.2\ldots6}\cdot\frac{2.9}{12+x^2} < \frac{x^6}{480}.$$

Innerhalb der Grenzen 0 bis $\frac{3}{2}\pi$ darf also gesetzt werden

$$\cos x = \frac{12-5x^2}{12+x^2} + \varrho x^6, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{480}.$$

Beispiel 7. Behandelt man den Sinus auf gleiche Weise und ersetzt im Zähler von R die Zahl 11 durch die grössere 12, so findet man gleichfalls zwischen den Grenzen 0 und $\frac{3}{2}\pi$

$$\sin x = \frac{x(60-7x^2)}{60+3x^2} + \varrho x^7, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{4200}.$$

Beispiel 8. Unter der Voraussetzung eines positiven, weniger als 0,9 betragenden x ist

$$\arctan x = \frac{x(15+4x^2)}{15+9x^2} - \varrho x^7, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{43},$$

oder auch, wenn der Bogen $u < arc\, 41^0 59'$ genommen wird,

$$u = \frac{15-11\sin^2 u}{15-6\sin^2 u} \tan u - \varrho \tan^7 u, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{43}.$$

Beispiel 9. Nach der bisherigen Methode findet man, echt gebrochene x vorausgesetzt,

$$\arcsin x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + R,$$

$$(60-27x^2)R$$
$$= \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{c_7 x^7}{5.6.7} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{c_9 x^9}{7.8.9} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{c_{11} x^{11}}{9.10.11} + \cdots,$$

worin die mit c_7, c_9 etc. bezeichneten Coefficienten unter der Form

$$c_n = 3(n-5)(11n-16)$$

enthalten sind. Beachtet man, dass $11n-16 < 11n-11$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{c_n}{(n-2)(n-1)n} < \frac{33(n-5)}{(n-2)n},$$

mithin

$$(60-27x^2)R$$
$$< \tfrac{3}{8} . 33x^7 \left(\frac{2}{5.7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7.9} x^2 + \frac{5.7}{6.8} \cdot \frac{6}{9.11} x^4 + \cdots \right)$$
$$< \tfrac{99}{4} x^7 \left(\frac{1}{5.7} + \frac{2}{7.9} x^2 + \frac{3}{9.11} x^4 + \cdots \right).$$

Wie leicht zu sehen ist, besteht immer die Ungleichung

$$\frac{m}{(2m+3)(2m+5)} < \tfrac{1}{30}$$

und daher ist

$$(60-27x^2)R < \tfrac{33}{40} x^7 (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots),$$

oder

$$R < \tfrac{33}{40} \cdot \frac{x_7}{(60-27x^2)(1-x^2)} < \tfrac{1}{40} \cdot \frac{x^7}{1-x^2}.$$

Damit gelangt man zu dem Endresultate

$$arcsin\, x = \frac{x(60-17x^2)}{60-27x^2} + \frac{\varrho x^7}{1-x^2}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

oder

$$u = \frac{60 \sin u - 17 \sin^3 u}{60 - 27 \sin^2 u} + \frac{\varrho \sin^7 u}{\cos^2 u}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{40},$$

wobei u zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muss.

Beispiel 10. Es soll die Genauigkeit der Näherungsformel

$$arcsin\, x = \frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

untersucht werden.

Setzt man

$$arcsin\, x - \frac{3x(2-\sqrt{1-x^2})}{3+x^2} = R,$$

so erhält man vermöge der Reihen für $arcsin\, x$ und $\sqrt{1-x^2}$

$$(3+x^2)R$$
$$= \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1.2}{3.5} x^5 + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{3.4}{5.7} x^7 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{5.6}{7.9} x^9 + \cdots$$
$$< \tfrac{1}{8} x^5 (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{2} x^6 + \cdots),$$

mithin

$$R < \tfrac{1}{16} \cdot \frac{x^5}{(3+x^2)(1-x^2)} < \tfrac{1}{48} \cdot \frac{x^5}{1-x^2}.$$

Demnach ist

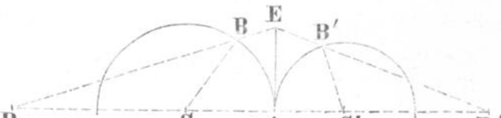
$$arcsin\, x = \frac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}} + \frac{\varrho x^5}{1-x^2}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{48},$$

oder auch, wenn $arcsin\, x = u$ gesetzt und u auf den ersten Quadranten beschränkt wird,

$$u = \frac{3 \sin u}{2 + \cos u} + \frac{\varrho \sin^5 u}{\cos^2 u}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{48}.$$

Von dieser Formel lässt sich eine Anwendung zur graphischen Rectification von Kreisbögen machen. Ist nämlich (Fig. 62) AB ein gegebener Bogen des mit dem Radius AC beschriebenen Kreises, so nehme

Fig. 62.



man längs AC die Strecke $AD=3.AC$, lege in A eine Tangente an den Kreis und ziehe die Gerade DB, welche die Tangente in E schneidet; für $AC=1$, $arc\,AB=u$ ist dann

$$AE=\frac{3\sin u}{2+\cos u}$$

mithin nahezu $AE=arc\,AB$. So lange der Centriwinkel ACB nicht mehr als 30^0 beträgt, ist der hierbei begangene Fehler weit geringer als die bei Zeichnungen überhaupt unvermeidlichen kleinen Fehler; bei grösseren Centriwinkeln rectificirt man die Hälfte oder sonst einen passenden Theil des Bogens und nimmt von AE das entsprechende Vielfache. Wie die Figur zeigt, kann man dieses Verfahren auch umgekehrt anwenden und mittelst desselben einen gegebenen Kreisbogen auf einen zweiten Kreis übertragen, so dass $arc\,AB'=arc\,AB$ ist.

Beispiel 11. Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^3+\cdots$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)+\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}}$$

untersucht werden, wobei x einen positiven echten Bruch bedeutet.

Für die Differenz zwischen der linken und rechten Seite findet man

$$R=-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)x^3-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{32}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)x^4-\cdots$$

Ferner

$$-R<\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3\left(\tfrac{5}{16}+\tfrac{5}{16}x^2+\tfrac{5}{16}x^3+\cdots\right)$$

d. i.

$$-R<\tfrac{25}{256}.\frac{x^3}{1-x}<\tfrac{1}{10}.\frac{x^3}{1-x},$$

wonach gesetzt werden darf

$$R=-\frac{\varrho x^3}{1-x},\quad 0<\varrho<\tfrac{1}{10}.$$

Beispiel 12. Es soll die Genauigkeit der Gleichung

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{x}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{x^2}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{x^3}{5}-\cdots$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-x}\right)+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}x}$$

untersucht werden, wobei x einen positiven echten Bruch bedeutet.

Man findet für die Differenz beider Seiten

$$R<\tfrac{5}{256}.\frac{x^3}{1-x}<\tfrac{1}{50}.\frac{x^3}{1-x},$$

so dass gesetzt werden darf

$$R = \frac{\varrho x^3}{1-x}, \quad 0 < \varrho < \tfrac{1}{50}.$$

In der Lehre von der Rectification der Curven wird sich zeigen, dass die obige Näherungsformel zur approximativen Rectification der Ellipse benutzt werden kann.

§. 42.

Die Auflösung transcendenter Gleichungen.

Die Beispiele des vorigen Paragraphen haben das Gemeinsame, dass eine transcendente Function näherungsweis durch eine algebraische Function ausgedrückt ist; hiervon lässt sich auf folgende Art Gebrauch machen zur Auflösung transcendenter Gleichungen.

Es bedeute $F(x)$ eine aus algebraischen und transcendenten Bestandtheilen zusammengesetzte Function (z. B. $x - \cos x$, $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ und dergl.) und es sei die Gleichung

$$F(x) = 0$$

aufzulösen; ersetzt man hier die transcendenten Bestandtheile durch die ihnen nach §. 41 nahezu gleichgeltenden algebraischen Ausdrücke, so verwandelt sich die gegebene transcendente Gleichung in eine algebraische Gleichung, welche nach den gewöhnlichen Methoden aufgelöst werden kann. Der so erhaltene Werth von x, welcher ξ heissen möge, ist selbstverständlich nur ein Näherungswerth und bedarf in der Regel noch einer kleinen Correction. Um diese zu finden, berechne man zuerst $F(\xi)$, welches nicht genau $=0$, aber auch nicht viel davon verschieden sein wird; der erhaltene Werth sei ε, also

$$F(\xi) = \varepsilon.$$

Man setze ferner $x = \xi + \delta$, wo δ die Correction bedeutet, und beachte, dass bei kleinen δ nahezu $F(\xi + \delta) = F(\xi) + \delta F'(\xi)$ ist; man hat dann

$$F(\xi) + \delta F'(\xi) = 0,$$

mithin wegen der vorhergehenden Gleichung

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{F'(\xi)}.$$

Der hieraus folgende Werth von δ ist nicht absolut genau, mithin $\xi + \delta$ nur ein zweiter Näherungswerth von x; man kann aber diese

Verbesserungsmethode beliebig oft anwenden und dadurch dem wahren Werthe des x so nahe kommen, als es der Zweck der Rechnung erheischt.

Beispiel 1. Es soll die Gleichung

$$l(1+x)-\tfrac{3}{4}x=0$$

aufgelöst werden.

Abgesehen von der Wurzel $x=0$ giebt es noch eine zweite Wurzel zwischen $\frac{1}{3}$ und 1, wie aus dem Gange der Function $l(1+x)-\frac{3}{4}x$ leicht zu ersehen ist. Wegen des echt gebrochenen x kann man die vorliegende Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\frac{x(6+3x)}{6+6x+x^2}-\tfrac{3}{4}x=0,$$

welche giebt

$$x=\sqrt{3}-1=0{,}73201.$$

Wird dieser Werth mit ξ bezeichnet, so ist

$$\varepsilon=l(\sqrt{3})-\tfrac{3}{4}(\sqrt{3}-1)=0{,}549306-0{,}549038=0{,}000268$$

und hieraus folgt als zweiter Näherungswerth

$$x=0{,}73360,$$

welcher auf fünf Decimalstellen richtig ist.

Beispiel 2. Man verlangt die Wurzel der Gleichung

$$xe^x-2=0.$$

Aus dem Gange der Function xe^x-2 erkennt man, dass die gesuchte Wurzel zwischen 0 und 1 liegt; mittelst der im vorigen Paragraphen entwickelten Näherungsformel für e^x findet man als ersten Näherungswerth $x=\frac{6}{7}$ und als zweiten

$$x=0{,}8526.$$

Beispiel 3. Es soll die Gleichung

$$x-\cos x=0$$

aufgelöst werden.

Da der gesuchte Werth zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen muss, so lässt sich die im vorigen Paragraphen für $\cos x$ entwickelte Näherungsformel anwenden. Man erhält zunächst die cubische Gleichung

$$x^3+5x^2+12x-12=0,$$

hieraus als ersten Näherungswerth $x=0{,}739=arc\ 42^0\ 21'$ und nachher durch Verbesserung

$$x=arc\ 42^0\ 20'\ 47''\ 3.$$

Beispiel 4. Für die Wurzel der transcendenten Gleichung

$$1-(1+x^2)\cos x=0$$

findet man als ersten Näherungswerth

$$x=\sqrt{\tfrac{6}{5}}=arc\,62^0 46'$$

und durch Verbesserung

$$x=1{,}102506=arc\,63^0\,10'\,8''\,2.$$

Es ist dieser Werth nicht der einzige, welcher die gegebene Gleichung befriedigt. Die Wurzeln derselben lassen sich nämlich als die Abscissen der Punkte betrachten, in denen sich die beiden Curven

$$y=\cos x \text{ und } y=\frac{1}{1+x^2}$$

schneiden, und hieraus folgt durch blosse Anschauung der Curven, dass unendlich viele positive und negative Wurzeln vorhanden sind. Die positiven Wurzeln x_0, x_1, x_2 etc. liegen folgendermaassen

$$\begin{array}{ll} x_0=0\,, & 0<x_1<\tfrac{1}{2}\pi\,, \\ \tfrac{3}{2}\pi<x_2<2\pi\,, & 2\pi<x_3<\tfrac{5}{2}\pi\,, \\ \tfrac{7}{2}\pi<x_4<4\pi\,, & 4\pi<x_5<\tfrac{9}{2}\pi\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Die negativen Wurzeln haben dieselben Werthe aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Ferner übersieht man leicht, dass die Differenzen

$$x_2-\tfrac{3}{2}\pi,\quad x_3-\tfrac{5}{2}\pi,\quad x_4-\tfrac{7}{2}\pi,\quad x_5-\tfrac{9}{2}\pi,\ldots.$$

welche alternirende Vorzeichen besitzen, rasch abnehmen, dass folglich $x_{n+1}-x_n$ gegen die Grenze π convergirt.

Um x_2 zu finden, setze man $x_2=\frac{3}{2}\pi+\xi$, wodurch

$$\sin\xi=\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi+\xi)^2}$$

wird; man hat dann wegen der Kleinheit von ξ näherungsweise

$$\xi=\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi)^2}, \text{ mithin } x_2=\tfrac{3}{2}\pi+\frac{1}{1+(\frac{3}{2}\pi)^2},$$

und durch weitere Correction

$$x_2=4{,}754761=arc\,272^0\,25'\,39''\,8.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$\begin{aligned} x_3&=\ \ 7{,}837\,964=arc\,449^0\ \ 4'\,56''\,1\,,\\ x_4&=11{,}003\,766=arc\,630^0\,28'\ \ 9''\,6\,,\\ x_5&=14{,}132\,185=arc\,809^0\,42'\,52''\,4\,,\\ x_6&=17{,}282\,097=arc\,990^0\,11'\,28''\,3\,, \end{aligned}$$

u. s. w.

Beispiel 5. Um die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$u - \cot u = 0$$

zu finden, benutze man für u die im 10. Beispiel des vorigen Paragraphen entwickelte Formel; als ersten Näherungswerth erhält man

$$\cos u = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \text{ oder } u = \operatorname{arc} 49^0\, 22'$$

und durch Verbesserung

$$u = \operatorname{arc} 49^0\, 17'\, 36''\, 5.$$

Die obige transcendente Gleichung besitzt übrigens noch unendlich viele andere Wurzeln.