Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis

Aufgaben aus der Differentialrechnung

Schlömilch, Oskar

1868

Capitel XII. Functionen und Reihen mit complexen Variabelen

urn:nbn:at:at-ubi:2-6262

Capitel XII.

Functionen und Reihen mit complexen Variabelen.

§. 43.

Die einfachen Functionen complexer Variabelen.

1. Bezeichnet i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so ist $x+iy$ die allgemeine Form einer complexen Variabelen; x^2+y^2 heisst die Norm dieser Variabelen, $\sqrt{x^2+y^2}$ ihr Modulus, wobei die Wurzel jederzeit im absoluten Sinne genommen wird.

Setzt man ferner

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \text{ oder } \theta = arctan\,\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, so lässt sich die complexe Variabele immer auf die Form

$$x+iy = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$$

bringen; θ heisst dann die Amplitude der Variabelen.

2. Addition, Subtraction, Multiplication und Division complexer Variabelen werden ebenso ausgeführt, wie bei reellen Variabelen, nur hat man dabei auf die Gleichungen $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$, $i^5=+i$ u. s. w. Rücksicht zu nehmen. Falls die complexen Variabelen durch Modulus und Amplitude ausgedrückt sind, können Multiplicationen und Divisionen mittelst der Formeln

$$r_1(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)\,.\,r_2(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2)$$
$$= r_1 r_2 [cos(\theta_1+\theta_2) + i\,sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{r_1(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)}{r_2(cos\,\theta_2 + i\,sin\,\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1-\theta_2) + i\,sin(\theta_1-\theta_2)]$$

ausgeführt werden.

3. Um eine complexe Zahl auf einen reellen ganzen positiven Exponenten zu erheben, drückt man die Basis durch Modulus und Amplitude aus und hat

$$(x+iy)^m=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^m=r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta).$$

Ist der Exponent ein positiver, auf seine kürzeste Benennung gebrachter Bruch $\frac{m}{n}$, so hat die Potenz n verschiedene Werthe, welche aus der Gleichung

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}}=r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{m\theta+2k\pi}{n}\right\}$$

für $k=0,1,2,3,\ldots(n-1)$ hervorgehen. Dabei ist $r^{\frac{m}{n}}$ im absoluten Sinne zu nehmen.

Potenzen mit negativen Exponenten werden mittelst der Definition

$$z^{-\mu}=\frac{1}{z^{\mu}}$$

auf Potenzen mit positiven Exponenten zurückgeführt.

Nach dem Vorhergehenden sind die n Wurzeln der Gleichung

$$z^n=+1$$

bei geraden n folgende:

$$\begin{array}{cc}
+1, & -1, \\
\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n}-i\sin\frac{6\pi}{n}, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-2)\pi}{n};
\end{array}$$

bei ungeraden n sind sie:

$$\begin{array}{cc}
 & +1, \\
\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, & \cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}, \\
\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}, & \cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}, \\
\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}, & \cos\frac{6\pi}{n}-i\sin\frac{6\pi}{n} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},\quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Ferner hat die Gleichung

$$z^n=-1$$

bei geraden n folgende Wurzeln

$$\begin{array}{ll}
\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, & \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},\\
\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, & \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},\\
\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, & \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n};
\end{array}$$

dagegen bei ungeraden n:

$$-1,$$

$$\begin{array}{ll}
\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, & \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},\\
\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, & \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},\\
\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, & \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, & \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.
\end{array}$$

Bei complexen z_1 und z_2 gilt der Satz

$$z_1^{\mu}\,.\,z_2^{\mu}=(z_1 z_2)^{\mu}$$

ohne Einschränkung, wenn μ eine positive oder negative ganze Zahl ist; bei gebrochenen μ bleibt er insofern richtig, als jeder Werth von z_1^{μ}, multiplicirt mit irgend einem Werthe von z_2^{μ} wieder einen der Werthe von $(z_1 z_2)^{\mu}$ giebt.

4. Die Exponentialgrösse e^{x+iy} wird durch die Gleichung

$$e^{x+iy}=Lim\left\{\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^m\right\}$$

definirt, worin m eine unendlich wachsende ganze positive Zahl bedeutet; die Ausführung des angedeuteten Grenzenüberganges liefert

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Hieran knüpfen sich die speciellen Gleichungen

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$$

$$\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\cos y,\quad \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}=\sin y.$$

Allgemeiner ist bei reellen positiven a

$$a^{x+iy}=a^x\{\cos(y\,la)+i\sin(y\,la)\}.$$

Die Gleichung

$$a^{z_1}\,.\,a^{z_2}=a^{z_1+z_2}$$

gilt für alle complexen z_1 und z_2.

5. Bezeichnet $L\zeta$ den allgemeinen Logarithmus von ζ, d. h. irgend eine reelle oder complexe Zahl z, welcher die Eigenschaft $e^z=\zeta$ zukommt, so ist bei positiven ξ

$$L(\xi+i\eta)=\tfrac{1}{2}l\,(\xi^2+\eta^2)+i\left\{\arctan\frac{\eta}{\xi}\pm 2k\pi\right\},$$

worin k irgend eine ganze Zahl bedeutet; bei negativen ξ ist

$$L(\xi+i\eta)=\tfrac{1}{2}l(\xi^2+\eta^2)+i\left\{\arctan\frac{\eta}{\xi}\pm(2k+1)\pi\right\}.$$

Specielle Fälle hiervon sind

$$(L+1)=\pm 2k\pi i,\quad L(-1)=\pm(2k+1)\pi i.$$

Die Gleichung

$$L(\zeta_1\,\zeta_2)=L\zeta_1+L\zeta_2$$

gilt allgemein, wenn die Vieldeutigkeit von $L\zeta$ beachtet wird (ähnlich wie am Ende von No. 3).

Eine häufig angewendete Formel ist noch

$$\frac{1}{2i}L\left(\frac{\xi+i\eta}{\xi-i\eta}\right)=\arctan\frac{\eta}{\xi}\pm 2h\pi,$$

wo h eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

6. Die in No. 4) für $\cos y$ und $\sin y$ angegebenen Formeln dienen als Definitionen des Cosinus und Sinus einer beliebigen complexen Variabelen; sie geben

$$\cos(x+iy)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x-i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x,$$

$$\sin(x+iy)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x,$$

und specieller

$$\cos(iy)=\frac{e^y+e^{-y}}{2},\quad \sin(iy)=i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

Für die übrigen goniometrischen Functionen benutzt man die gewöhnlichen Definitionen

$$sec\, z = \frac{1}{cos\, z}, \quad tan\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z} \text{ u. s. w.}$$

und erhält

$$sec\,(x+iy) = 2\,\frac{(e^y + e^{-y})\, cos\, x + i(e^y - e^{-y})\, sin\, x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\, cos\, 2x},$$

$$tan\,(x+iy) = \frac{2\, sin\, 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\, cos\, 2x},$$

$$csc\,(x+iy) = 2\,\frac{(e^y + e^{-y})\, sin\, x - i(e^y - e^{-y})\, cos\, x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\, cos\, 2x},$$

$$cot\,(x+iy) = \frac{2\, sin\, 2x - i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\, cos\, 2x}.$$

Die goniometrischen Formeln für $sin\,(z_1 + z_2)$, $cos\,(z_1 + z_2)$ u. s. w. gelten ebenso bei complexen wie bei reellen z_1 und z_2.

7. Unter $Arcsin\, \zeta$ versteht man jede reelle oder complexe Zahl z, welche der Gleichung $sin\, z = \zeta$ genügt; wird zur Abkürzung gesetzt

$$X = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 + 1 + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\xi^2}\right]},$$

$$Y = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 - 1 + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2}\right]},$$

wobei die Wurzeln im absoluten Sinne zu nehmen sind, und bezeichnet m irgend eine positive oder negative ganze Zahl, so gilt die allgemeine Formel

$$Arcsin\,(\xi + i\eta) = m\pi + (-1)^m\, arcsin\, \frac{\xi}{X} \pm i\, l(X + Y).$$

Im speciellen Falle $\eta = 0$, $\xi^2 > 1$ wird

$$Arcsin\, \xi = m\pi + (-1)^m\, arcsin\, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} \pm i\, l\left(\sqrt{\xi^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}\right),$$

wobei die Wurzeln im absoluten Sinne zu nehmen sind. Für $\xi = 0$ hat man

$$Arcsin\,(i\eta) = m\pi \pm i\, l\left(\sqrt{\eta^2} + \sqrt{\eta^2 + 1}\right)$$

und dabei $\sqrt{\eta^2}$ im absoluten Sinne zu nehmen.

Setzt man zur Abkürzung

$$Z = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\xi^2} - (\xi^2 + \eta^2 - 1)\right\},$$

so ist

$$Arctan\,(\xi + i\eta) = m\pi + arctan\, \frac{\xi}{Z} + \frac{i}{2}\, l\left(\frac{\eta + 1 - Z}{\eta - 1 + Z}\right);$$

dabei sind die Wurzeln im absoluten Sinne zu nehmen; m bedeutet irgend eine ganze Zahl.

Als specielle Formel sei erwähnt

$$Arctan(i\eta) = m\pi + il\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^2},$$

worin die Wurzel im absoluten Sinne zu nehmen ist. Die Formeln für die cyclometrischen Functionen, wie z. B.

$$Arcsin\,\zeta = m\pi + (-1)^m arcsin\,\zeta,$$
$$Arctan\,\zeta = m\pi + arctan\,\zeta,$$

gelten auch bei complexen ζ, wenn man vorkommenden Falles die Mehrdeutigkeit von $Arcsin\,\zeta$, $Arctan\,\zeta$ etc. berücksichtigt.

§. 44.

Reihen mit complexen Variabelen.

Eine unendliche Reihe, deren Terme complexe Zahlen sind, heisst convergent, wenn sowohl die reellen als die imaginären Bestandtheile aller Terme, für sich genommen, convergirende Reihen geben; in jedem anderen Falle heisst die Reihe divergent. Zur Convergenz der Reihe

$$(u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots$$

gehören also die beiden Bedingungen, dass die zwei Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

gleichzeitig convergiren. Sind U und V die Summen der letzteren Reihen, so nennt man $U + iV$ die Summe der obigen complexen Reihe.

Beispiel 1. Es soll die Reihe

$$\frac{1}{1}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \cdots$$

für den Fall eines complexen z, nämlich

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

summirt werden.

Die beiden einzelnen Reihen sind hier

$$\frac{1}{1}r\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + \frac{1}{3}r^3\cos 3\theta + \cdots,$$
$$\frac{1}{1}r\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin 3\theta + \cdots;$$

dieselben convergiren unbedingt, wenn schon die Reihe

$$\frac{1}{1}r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{4}r^4 + \cdots$$

convergirt, d. h. wenn $r^2 < 1$ ist; auch sind dann ihre Summen stetige Functionen von r. Nennen wir sie U und V, so erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{dU}{dr}=\cos\theta+r\cos 2\theta+r^2\cos 3\theta+\cdots,$$

d. i. nach den Formeln in §. 35, No. 10)

$$\frac{dU}{dr}=\frac{\cos\theta-r}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dU}{dr}=\frac{d[-\frac{1}{2}l(1-2r\cos\theta+r^2)]}{dr}.$$

Zufolge des in §. 37 unter d) erwähnten Satzes folgt nun

$$U=-\tfrac{1}{2}l(1-2r\cos\theta+r^2)+Const.,$$

und wenn man beachtet, dass die mit U bezeichnete Reihe für $r=0$ verschwindet, so erhält man $Const.=0$, mithin

$$-\tfrac{1}{2}l(1-2r\cos\theta+r^2)=\tfrac{1}{1}r\cos\theta+\tfrac{1}{2}r^2\cos 2\theta+\tfrac{1}{3}r^3\cos 3\theta+\cdots$$
$$r^2<1.$$

Mittelst desselben Verfahrens findet sich

$$\arctan\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}=\tfrac{1}{1}r\sin\theta+\tfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}r^3\sin 3\theta+\cdots$$
$$r^2<1.$$

Setzt man wieder $r(\cos\theta+i\sin\theta)=z$ und beachtet die Relation

$$-\tfrac{1}{2}l(1-2r\cos\theta+r^2)+i\arctan\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}$$
$$=-l[1-ir(\cos\theta+i\sin\theta)]=l\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

so gelangt man mittelst der obigen Gleichungen zu dem Resultate, dass die Reihenentwickelung

$$l\left(\frac{1}{1-z}\right)=\tfrac{1}{1}z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\cdots$$

auch für solche complexe z gilt, deren Modulus weniger als die Einheit beträgt.

Beispiel 2. Es soll die Reihe

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots$$

für den Fall $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ summirt werden.

Die obige Reihe convergirt für jedes r und θ und zerfällt in

$$U=1+\frac{r\cos\theta}{1}+\frac{r^2\cos 2\theta}{1.2}+\frac{r^3\cos 3\theta}{1.2.3}+\cdots,$$
$$V=\frac{r\sin\theta}{1}+\frac{r^2\sin 2\theta}{1.2}+\frac{r^3\sin 3\theta}{1.2.3}+\cdots$$

Man bemerke nun, dass folgende Gleichungen gelten

$$\frac{dU}{dr}=U\cos\theta-V\sin\theta,\quad \frac{dV}{dr}=U\sin\theta+V\cos\theta,$$

aus welchen sich die Relationen ergeben

$$U\frac{dU}{dr}+V\frac{dV}{dr}=(U^2+V^2)\cos\theta,$$

$$U\frac{dV}{dr}-V\frac{dU}{dr}=(U^2+V^2)\sin\theta.$$

Diese können einfacher dargestellt werden, wenn man setzt

$$U+iV=P(\cos\Omega+i\sin\Omega),$$

mithin

$$U^2+V^2=P^2,\quad \operatorname{arctan}\frac{V}{U}+k\pi=\Omega;$$

es ist dann

$$U\frac{dU}{dr}+V\frac{dV}{dr}=P\frac{dP}{dr},$$

$$U\frac{dV}{dr}-V\frac{dU}{dr}=(U^2+V^2)\frac{d\Omega}{dr},$$

und in Folge dieser Beziehungen gestalten sich die vorhergehenden Gleichungen wie folgt

$$\frac{dP}{dr}=P\cos\theta \text{ oder } \frac{dlP}{dr}=\frac{d(r\cos\theta)}{dr},$$

$$\frac{d\Omega}{dr}=\sin\theta \quad \text{„} \quad \frac{d\Omega}{dr}=\frac{d(r\sin\theta)}{dr}.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe

$$P=e^{r\cos\theta+a},\quad \Omega=r\sin\theta+b,$$

wo a und b Constanten bedeuten. Diese bestimmen sich durch die Specialisirung $r=0$ und das Endresultat besteht aus folgenden zwei Gleichungen

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)=1+\frac{r\cos\theta}{1}+\frac{r^2\cos 2\theta}{1.2}+\frac{r^3\cos 3\theta}{1.2.3}+\cdots,$$

$$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)=\frac{r\sin\theta}{1}+\frac{r^2\sin 2\theta}{1.2}+\frac{r^3\sin 3\theta}{1.2.3}+\cdots$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit i und addirt sie zur ersten, so findet man, dass die Gleichung

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots$$

für jedes complexe z gültig ist.

Beispiel 3. Es soll die Reihe

$$1+\frac{\mu}{1}z+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}z^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}z^3+\cdots\cdot$$

für $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ summirt werden.

Bezeichnet man die Binomialcoefficienten auf die gewöhnliche kurze Weise, so handelt es sich um die Summirung der beiden Reihen

$$1+(\mu)_1 r\cos\theta+(\mu)_2 r^2\cos 2\theta+(\mu)_3 r^3\cos 3\theta+\cdots\cdot,$$
$$(\mu)_1 r\sin\theta+(\mu)_2 r^2\sin 2\theta+(\mu)_3 r^3\sin 3\theta+\cdots\cdot,$$

welche bei ganzen positiven μ für jedes r, ausserdem aber nur für $r^2<1$ convergiren und deren Summen in jedem Falle U und V heissen mögen. Man bemerke nun, dass folgende Gleichungen stattfinden

$$\frac{dU}{dr}(1+r\cos\theta)-\frac{dV}{dr}r\sin\theta=\mu(U\cos\theta-V\sin\theta),$$
$$\frac{dV}{dr}(1+r\cos\theta)+\frac{dU}{dr}r\sin\theta=\mu(V\cos\theta+U\sin\theta);$$

eliminirt man hieraus das eine Mal $\frac{dV}{dr}$, das andere Mal $\frac{dU}{dr}$, so gelangt man zu den weiteren Relationen

$$(1+2r\cos\theta+r^2)\frac{dU}{dr}=\mu\{U(r+\cos\theta)-V\sin\theta\},$$
$$(1+2r\cos\theta+r^2)\frac{dV}{dr}=\mu\{U\sin\theta+V(r+\cos\theta)\},$$
$$U\frac{dU}{dr}+V\frac{dV}{dr}=\frac{\mu(r+\cos\theta)}{1+2r\cos\theta+r^2}(U^2+V^2),$$
$$U\frac{dV}{dr}-V\frac{dU}{dr}=\frac{\mu\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}(U^2+V^2).$$

Diese vereinfachen sich für

$$U+iV=P(\cos\Omega+i\sin\Omega)$$

und gehen über in

$$\frac{dP}{dr}=\frac{\mu(r+\cos\theta)P}{1+2r\cos\theta+r^2},\qquad \frac{d\Omega}{dr}=\frac{\mu\sin\theta}{1+2r\cos\theta+r^2},$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dlP}{dr}=\frac{d[\frac{1}{2}\mu l(1+2r\cos\theta+r^2)]}{dr},\qquad \frac{d\Omega}{dr}=\frac{d\left[\mu \arctan\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)\right]}{dr}.$$

Hieraus findet man P und Ω, wobei die auftretenden Constanten mittelst der Specialisirung $r=0$ zu bestimmen sind; die Resultate gestalten sich dann wie folgt

$$(1+2r\cos\theta+r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\left(\mu \arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$$
$$=1+(\mu)_1 r\cos\theta+(\mu)_2 r^2\cos 2\theta+(\mu)_3 r^3\cos 3\theta+\cdots,$$
$$(1+2r\cos\theta+r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\left(\mu \arctan\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)$$
$$=(\mu)_1 r\sin\theta+(\mu)_2 r^2\sin 2\theta+(\mu)_3 r^3\sin 3\theta+\cdots,$$

wobei $r^2<1$ sein muss, falls μ keine ganze positive Zahl ist.

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit i und addirt sie zur ersten, so findet man, dass der allgemeine binomische Satz auch für solche complexe z gilt, deren Modulus unter der Einheit liegt.

§. 45.

Reihen mit übersprungenen Termen.

Aus der bekannten Summenformel

$$1+\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\cdots+\cos(m-1)\beta$$
$$=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-\frac{1}{2})\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\tfrac{1}{2}(1-\cos m\beta)+\tfrac{1}{2}\frac{\sin m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

erhält man für $\beta=\dfrac{2k\pi}{m}$, wo k eine ganze positive Zahl bedeuten möge

$$1+\cos\frac{2k\pi}{m}+\cos\frac{4k\pi}{m}+\cos\frac{6k\pi}{m}+\cdots+\cos\frac{(2m-2)k\pi}{m}$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}}\cos\frac{k\pi}{m}.$$

Wenn $\dfrac{k}{m}$ keine ganze Zahl ist, so verschwindet der Ausdruck rechter Hand, wenn dagegen m in k aufgeht, mithin $\dfrac{k}{m}$ einer ganzen Zahl q gleich ist, so wird

$$\frac{\sin 2k\pi}{\sin\frac{k\pi}{m}}=\frac{\sin 2mq\pi}{\sin q\pi}=\frac{0}{0},$$

und durch Untersuchung des Bruches

$$\frac{\sin 2m\omega}{\sin\omega}\ \text{für}\ \omega=q\pi$$

findet man als wahren Werth des fraglichen Quotienten

$$\frac{2m\cos 2mq\pi}{\cos q\pi}=\frac{2m}{\cos\frac{k\pi}{m}}$$

Nach Substitution dieses Werthes und wenn zur Abkürzung $\frac{2\pi}{m} = \vartheta$ gesetzt wird, ergiebt sich folgender Satz: je nachdem k ein Vielfaches von m ausmacht oder nicht, ist

$$1 + \cos k\vartheta + \cos 2k\vartheta + \cos 3k\vartheta + \cdots + \cos(m-1)k\vartheta = m \text{ oder } = 0.$$

Von der Summenformel

$$\begin{aligned} &\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta + \cdots + \sin(m-1)\beta \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos m\beta)\cot\tfrac{1}{2}\beta - \sin m\beta \end{aligned}$$

ausgehend, findet man leicht für alle ganzen k und m

$$\sin k\vartheta + \sin 2k\vartheta + \sin 3k\vartheta + \cdots + \sin(m-1)k\vartheta = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta = \varepsilon,$$

so erhält man mittelst des Vorigen den Satz: je nachdem k ein Vielfaches von m ausmacht oder nicht, ist

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)k} = m \text{ oder } = 0.$$

Von diesem Satze lässt sich folgende Anwendung machen.

Wenn eine Gleichung von der Form

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

auch für complexe z gilt, so setze man darin nach einander

$$z = x,\ \varepsilon x,\ \varepsilon^2 x,\ \varepsilon^3 x, \ldots \varepsilon^{m-1} x$$

und addire alle entstehenden Gleichungen; dies giebt

$$\begin{aligned} &f(x) + f(\varepsilon x) + f(\varepsilon^2 x) + \cdots + f(\varepsilon^{m-1} x) \\ &= mC_0 + \cdots + C_k(1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \cdots + \varepsilon^{(m-1)k})x^k + \cdots, \end{aligned}$$

wo k alle die Werthe 1, 2, 3... erhält. Hier verschwinden nun alle Terme, in denen k kein Vielfaches von m ist, und daher bleibt nur

$$mC_0 + mC_m x^m + mC_{2m} x^{2m} + mC_{3m} x^{3m} + \cdots$$

Für die linke Seite bemerke man, dass $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{m-1}$ und $\varepsilon^m = 1$ die m Wurzeln der Gleichung $\eta^m = 1$ sind; bezeichnet man sie mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ und schreibt nachträglich z statt x, so hat man die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m}\{f(\varepsilon_1 z) + f(\varepsilon_2 z) + \cdots + f(\varepsilon_m z)\} \\ &= C_0 + C_m z^m + C_{2m} z^{2m} + C_{3m} z^{3m} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite durch Auslassung von je $m-1$ Termen der ursprünglichen Reihe gebildet ist.

1. Als erstes Beispiel diene die Gleichung

$$-\frac{l(1-z)}{z}=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{3}z^2+\tfrac{1}{4}z^3+\cdots,\quad mod\, z<1,$$

worin $C_n=\dfrac{1}{n+1}$ ist. Für $m=3$ wird

$$-\tfrac{1}{3}\left\{\frac{l(1-\varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1 z}+\frac{l(1-\varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2 z}+\frac{l(1-\varepsilon_3 z)}{\varepsilon_3 z}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{4}z^3+\tfrac{1}{7}z^6+\tfrac{1}{10}z^9+\tfrac{1}{13}z^{12}+\cdots$$

und nach völliger Ausrechnung ergiebt sich die Formel

$$\tfrac{1}{3}\left\{l\left(\frac{1}{1-z}\right)+\tfrac{1}{2}l(1+z+z^2)+\sqrt{3}\,.\,arctan\,\frac{z\sqrt{3}}{2+z}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{1}z+\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{10}z^{10}+\cdots,$$

welche man durch Differentiation leicht verificiren kann.

2. Nimmt man wieder $m=3$ und als Ausgangspunkt die Reihe

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots,$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{3}\left\{e^z+2e^{-\frac{1}{2}z}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right\}=1+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^6}{1.2\ldots6}+\frac{z^9}{1.2\ldots9}+\cdots$$

Die Gleichung

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1}+\frac{z}{1.2}+\frac{z^2}{1.2.3}+\cdots$$

führt nach derselben Methode zu dem Resultate

$$\tfrac{1}{3}e^z-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)-\sqrt{3}\,.\,sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$
$$=\frac{z}{1}+\frac{z^4}{1.2\ldots4}+\frac{z^7}{1.2\ldots7}+\frac{z^{10}}{12\ldots10}+\cdots;$$

endlich erhält man aus

$$\frac{e^z-1-z}{z^2}=\frac{1}{1.2}+\frac{z}{1.2.3}+\frac{z^2}{1.2.3.4}+\cdots$$

die Formel

$$\tfrac{1}{3}e^z-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}z}\left[cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)+\sqrt{3}.sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$
$$=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^5}{1.2\ldots5}+\frac{z^8}{1.2\ldots8}+\frac{z^{11}}{1.2\ldots11}+\cdots$$

Die Reihensummen, welche soeben gefunden wurden, besitzen übrigens ähnliche Eigenschaften wie $\cos z$ und $\sin z$; werden nämlich jene Summen kurz mit $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ bezeichnet, so gelten folgende Relationen:

$$\varphi_1(z)=\frac{d\varphi_2(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2},$$

$$\varphi_2(z)=\frac{d\varphi_3(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2},$$

$$\varphi_3(z)=\frac{d\varphi_1(z)}{dz}=\frac{d^2\varphi_2(z)}{dz^2};$$

$$\varphi_1(x+y)=\varphi_1(x)\varphi_1(y)+\varphi_2(x)\varphi_3(y)+\varphi_3(x)\varphi_2(y),$$
$$\varphi_2(x+y)=\varphi_2(x)\varphi_2(y)+\varphi_3(x)\varphi_1(y)+\varphi_1(x)\varphi_3(y),$$
$$\varphi_3(x+y)=\varphi_3(x)\varphi_3(y)+\varphi_1(x)\varphi_2(y)+\varphi_2(x)\varphi_1(y),$$

aus denen sich leicht zahlreiche weitere Formeln ableiten lassen.

3. Geht man für $m=3$ von den folgenden drei Gleichungen aus:

$$(1+z)^\mu=1+(\mu)_1 z+(\mu)_2 z^2+(\mu)_3 z^3+(\mu)_4 z^4+\cdots,$$

$$\frac{(1+z)^\mu-1}{z}=(\mu)_1+(\mu)_2 z+(\mu)_3 z^2+(\mu)_4 z^3+\cdots,$$

$$\frac{(1+z)^\mu-1-\mu z}{z^2}=(\mu)_2+(\mu)_3 z+(\mu)_4 z^2+\cdots,$$

welche bei ganzen positiven μ ohne Einschränkung und bei anderen μ unter der gemeinschaftlichen Bedingung $\mathrm{mod}\, z<1$ gelten, und setzt man ferner zur Abkürzung

$$\sqrt{1-z+z^2}=R,\quad \arctan\frac{\sqrt{3}\,.\,z}{2-z}=\Theta,$$

so gelangt man zu den folgenden drei Formeln:

$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu+2R^\mu\cos\mu\Theta\}$$
$$=(\mu)_0+(\mu)_3 z^3+(\mu)_6 z^6+(\mu)_9 z^9+\cdots,$$

$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu-R^\mu(\cos\mu\Theta-\sqrt{3}\,.\,\sin\mu\Theta)\}$$
$$=(\mu)_1 z+(\mu)_4 z^4+(\mu)_7 z^7+(\mu)_{10} z^{10}+\cdots,$$

$$\tfrac{1}{3}\{(1+z)^\mu-R^\mu(\cos\mu\Theta+\sqrt{3}\,.\,\sin\mu\Theta)\}$$
$$=(\mu)_2 z^2+(\mu)_5 z^5+(\mu)_8 z^8+(\mu)_{11} z^{11}+\cdots,$$

in denen für μ und z dieselben Bedingungen gelten, an welche der allgemeine binomische Satz geknüpft ist.

Bezeichnet man die gefundenen drei Reihensummen kurz mit

$$\psi_1(z,\mu),\quad \psi_2(z,\mu),\quad \psi_3(z,\mu),$$

so gelten folgende Relationen:

$$\psi_1(z,\mu)=\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_2(z,\mu+1)}{dz},$$
$$\psi_2(z,\mu)=\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_3(z,\mu+1)}{dz},$$
$$\psi_3(z,\mu)=\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{d\psi_1(z,\mu+1)}{dz}.$$

Lässt man $\frac{z}{\mu}$ an die Stelle von z treten und geht zur Grenze für unendlich wachsende μ über, so kommt man auf die im zweiten Abschnitt entwickelten Formeln zurück.

Druckfehler.

Seite 12, Formel 33), statt $\sqrt{a+bx}$ lies $\sqrt[3]{a+bx}$.

„ 87, Zeile 10 v. o. statt $\omega=1-\frac{\pi}{4}$ lies $\theta=1-\frac{\pi}{4}$.