universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

Ball, Leo de

Leipzig, 1912

urn:nbn:at:at-ubi:2-6337

B.63

K.k. Universitäts Sternwarte
Innsbruck

LEHRBUCH

DER

SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE

VON

DR. L. DE BALL
DIREKTOR DER v. KUFFNER'SCHEN STERNWARTE

MIT 112 FIGUREN IM TEXT UND 2 KARTEN

Bibliothek
der Universitäts-Sternwarte
Innsbruck
Inv.-Nr. B.63.
Syst. Sign.
Schrank II 9

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1912

Copyrigth 1912 by Wilhelm Engelmann, Leipzig.
Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, werden vorbehalten.

HERRN MORIZ EDLEN VON KUFFNER

IN DANKBARKEIT UND VEREHRUNG GEWIDMET

VOM VERFASSER

VORWORT.

Bei der Abfassung des vorliegenden Lehrbuchs leitete mich der Gedanke, einerseits für den Fachastronomen ein Nachschlagewerk zu schaffen, andererseits den Studierenden die Möglichkeit zu gewähren, sich die für ein gedeihliches praktisches Wirken unumgänglich nötige eingehende Kenntnis der in das Gebiet der sphärischen Astronomie fallenden Fragen erwerben zu können. Das Studium der Astronomie sollte man erst dann beginnen, wenn man sich mit den Elementen der analytischen Geometrie, der Differentialrechnung, der Integralrechnung und der analytischen Mechanik bekannt gemacht hat; ein so vorgebildeter Leser wird auch keine Mühe haben, sich den Inhalt dieses Buches anzueignen. Damit das Lehrbuch als Nachschlagewerk bequem sei, habe ich danach getrachtet, jedes Kapitel möglichst selbständig zu machen; aus diesem Grunde sind auch gelegentlich kleine Wiederholungen einem bloßen Hinweise auf einen oder mehrere andere Paragraphen vorgezogen worden.

Dem später mitgeteilten Inhaltsverzeichnis sollen einige Bemerkungen vorausgeschickt werden. Im 1. Kapitel leite ich nach *Serret* einige häufig zur Anwendung kommende Reihen ab. Es folgen sodann die gebräuchlichsten, zur Interpolation und numerischen Differentiation nötigen Formeln nebst Beispielen. Auf die Begründung dieser Formeln, welche am besten mit derjenigen der für die mechanische Quadratur erforderlichen Formeln verbunden wird, mußte — weil sie außerhalb des Gebietes der sphärischen Astronomie fällt und zuviel Raum beanspruchen würde — verzichtet werden. Denjenigen Studierenden, welche keine Gelegenheit gehabt haben, bereits vor Beginn des Studiums der Astronomie eine Vorlesung über die Theorie der Interpolation, der numerischen Differentiation und mechanischen Quadratur zu hören, ist die Lektüre der sehr klaren Darstellung der betreffenden Materien in *Oppolzer*s Lehrbuch der Bahnbestimmung, 2. Band, anzuraten.

In allen bisher veröffentlichten Lehrbüchern der sphärischen Astronomie hat man sich damit begnügt, die Ausdrücke für die Änderungen, welche die Lage der Erdachse infolge der Anziehung der Sonne und des Mondes erfährt, anzugeben, ohne zu zeigen, wie dieselben gewonnen worden sind. Das Unbefriedigende eines solchen Vorgehens wird wohl jeder empfunden haben, als er mit einem dieser Lehrbücher seine astronomischen Studien begann; aber schwerwiegender als dieses Gefühl des Unbehagens ist der Umstand, daß ein großer Teil des Gebietes der sphärischen Astronomie nur sehr unvollkommen verstanden werden kann, wenn man die Theorie der Drehung der Erde nicht gründlich studiert hat. Ich habe also diese Theorie in einem eigenen Kapitel auseinandergesetzt. Der erste Teil der Theorie ist schon vor

einigen Jahren in den Abhandlungen der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlicht worden, doch habe ich nachträglich noch einige formelle Verbesserungen angebracht; der zweite, die Zeitmessung behandelnde Teil, ist neu hinzugefügt.

Das 7. Kapitel enthält außer den gewöhnlich zur Berechnung der Präzession angewandten trigonometrischen Formeln und Reihenentwicklungen auch die Ableitung der Formel, mit Hilfe derer man für ein gegebenes Zeitintervall den Betrag der Präzession bis auf Glieder dritter Ordnung genau erhält, wenn die für den Anfang, die Mitte und das Ende des Intervalls gültige jährliche Präzession bekannt ist.

Bei der im 8. Kapitel angestellten Untersuchung über den Einfluß der jährlichen Parallaxe auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne wurden die Parallaxen beider Sterne berücksichtigt; die gewöhnlich gemachte Annahme, daß die Parallaxe des einen Sterns gleich 0 sei, führt zu Formeln, die nicht ganz strenge sind.

In dem über die Eigenbewegung der Fixsterne handelnden Kapitel 9 wird zunächst der von *H. v. Seeliger* herrührende Satz bewiesen, daß, wenn sich auch ein Stern mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig im Raume bewegt, die Eigenbewegung dieses Sterns im größten Kreise gemessen streng genommen nicht konstant ist. In demselben Kapitel werden auch die beiden Wege angegeben, welche man einschlagen kann, um die Koordinaten und die Komponenten der Eigenbewegung eines Sterns von einem Äquinox, bzw. von einer Epoche auf ein anderes Äquinox, bzw. eine andere Epoche zu reduzieren. Die Reihenentwicklung, mittels derer sich der Betrag der Präzession zusammengenommen mit demjenigen der Eigenbewegung berechnen läßt, habe ich nicht aufgenommen. Es ist nämlich die Präzessionskonstante bereits so genau bestimmt, daß man auf lange Zeit hinaus keinen Grund haben wird, die einmal berechneten Werte der jährlichen Präzession, der Variatio saecularis und des dritten Gliedes zu ändern; von der Eigenbewegung der Fixsterne gilt das aber nicht. Mit Rücksicht hierauf scheint es mir richtiger, die durch die Eigenbewegung bewirkte Änderung der Koordinaten ganz getrennt von der durch die Präzession bewirkten zu berechnen. — Das 9. Kapitel enthält auch noch die Bestimmung des Konvergenzpunktes der Eigenbewegungen und die Bestimmung der Parallaxen der Glieder eines Sternstroms.

Im 11. Kapitel erläutere ich eingehend den Gebrauch der in den Jahrbüchern zur Reduktion auf den scheinbaren Ort gegebenen Konstanten A, B, ...; die Begründung der bei der Anwendung dieser Konstanten zu beachtenden Regeln wird durchweg viel zu knapp gehalten. Im 11. Kapitel findet man auch die zur Reduktion auf den scheinbaren Ort bei Polsternen dienenden Formeln von *Fabritius* aufgeführt und auf ein Beispiel angewandt. Für diese in Wirklichkeit nicht strengen Formeln liegt eine Reihe von Beweisen vor, doch habe ich keinen gefunden, der mich befriedigt.

Bei der im 12. Kapitel enthaltenen Darstellung der Methode, die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes zu bestimmen, wird es als selbstverständlich betrachtet, daß man nur solche korrespondierende Beobachtungen benutzt, welche sich

auf denselben Mondrand beziehen. In Anbetracht dessen, daß man durch die Diskussion der bisher ausgeführten geodätischen Messungen aller Voraussicht nach zu einem genauen Wert der Abplattung der Erde gelangen wird, habe ich davon abgesehen, die Korrektion des nach *Helmert* angenommenen Wertes der Abplattung als Unbekannte in die Bedingungsgleichungen einzuführen.

Die im 13. Kapitel gegebene Darstellung der *Radau*schen Theorie der Refraktion habe ich in der Hauptsache bereits in den Sitzungsberichten der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlicht. Doch ist jetzt auch der Einfluß des Dunstdruckes auf die brechende Kraft der Luft berücksichtigt worden; außerdem wurden in formeller Beziehung mehrere Änderungen an der a. a O. erschienenen Abhandlung vorgenommen.

In dem über die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik, sowie der Rektaszensionen handelnden Kapitel 14 gebe ich ein neues Verfahren an, relative Rektaszensionskorrektionen zu bestimmen und die von *F. Cohn* für die *Bessel*schen Beobachtungen nachgewiesene Abhängigkeit der Rektaszension von der mittleren Zeit der Beobachtung zu untersuchen. Bezüglich der Bestimmung des Unterschiedes zwischen Tag- und Nachtbeobachtungen bin ich den Ausführungen von *F. Cohn* gefolgt.

Das nachträglich hinzugefügte Kapitel 14^a enthält die bei der Vergleichung der Sternkataloge, bzw. der Bildung eines Fundamentalkatalogs zu befolgenden Vorschriften; hierbei habe ich mich im wesentlichen auf die Untersuchungen von *Auwers* und *Boss* gestützt. Bezüglich des von den Genannten benutzten Verfahrens, die Abhängigkeit der Gewichte von der Zahl der Beobachtungen zu bestimmen, ist mir nichts Näheres bekannt; die von mir mit Hilfe der »Durchschnittsfehler« für den Katalog Greenwich 1872 gefundenen Gewichte stimmen indessen befriedigend mit den von *Auwers* in seinen Gewichtstafeln angegebenen überein.

Im 19. Kapitel wird die *Hansen*sche Theorie der Sonnenfinsternisse in neuer und wesentlich vereinfachter Form dargestellt. Als Fundamentalgleichungen habe ich nicht, wie *Hansen*, die für $u \sin\Theta$ und $u \cos\Theta$ gültigen, sondern die von mir direkt erhaltenen, für $u \sin\psi$ und $u \cos\psi$ gültigen Gleichungen bezeichnet; denn diese letzteren sind diejenigen, welche man sowohl bei der Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort, als auch bei der Berechnung der Grenzkurven (mit einer Ausnahme) benutzt. Die Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort habe ich an erster Stelle behandelt; man wird damit in den Stand gesetzt, die Bedingungsgleichung für die nördliche und südliche Grenzkurve sofort angeben zu können. Bei der Berechnung der östlichen und westlichen Grenzkurve glaubte ich, von der Berücksichtigung der Refraktion absehen, und auch noch die sogenannte reduzierte Breite mit der um höchstens 6′ von ihr verschiedenen geographischen Breite vertauschen zu dürfen. Die Berechnung der Grenzkurven soll ja nur dazu dienen, die zur Beobachtung einer Finsternis geeigneten Punkte der Erde kennen zu lernen; da nun Beobachtungen an solchen Punkten, welche selbst um einige Grade von der östlichen und westlichen Grenzkurve entfernt sind, keinen Wert haben, so ist der bei den vorhin erwähnten Vernachlässigungen begangene, rund einen halben Grad betragende Fehler ohne jede Bedeutung. Vorkommendenfalls läßt es sich überdies mit Hilfe der zur Vorausberechnung einer Finsternis für

einen gegebenen Ort dienenden Formeln, und unter Berücksichtigung der in § 106 gemachten Bemerkungen, leicht feststellen, ob für einen Ort, welcher in der Nähe der nach § 121 berechneten östlichen oder westlichen Grenzkurve liegt, eine Finsternis stattfinden wird. Aus demselben Grunde wie bei der östlichen und westlichen Grenzkurve kann die Refraktion auch bei der Berechnung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche vernachlässigt werden.

Die im 22. Kapitel behandelte astrographische Ortsbestimmung bildet das Gegenstück zur geographischen. Eine Kenntnis der Methoden, nach denen die verschiedenen hier auftretenden Fragen gelöst werden können, erweist sich in mehrfacher Beziehung als nützlich. So z. B. ist es für das Studium der physischen Libration des Mondes erforderlich, den Weg zu kennen, auf dem *Cassini* seine Gesetze gefunden hat; ferner muß man, wenn der polare und äquatoreale Durchmesser der Sonne gemessen werden soll, wissen, wie sich die Lage der Rotationsachse bestimmen läßt, usw.

Das 23. Kapitel enthält eine Darstellung der hauptsächlich für die Geodäsie wichtigen Methoden, die Polhöhe und die Zeit durch Beobachtungen außerhalb des Meridians zu bestimmen; dabei werden nur solche Methoden berücksichtigt, welche von den Geodäten bevorzugt werden. Obwohl die Bestimmung der Polhöhe nach der *Horrebow-Talcott*schen Methode, weil sie im Meridiane erfolgt, nicht in das Kapitel hineingehört, habe ich doch geglaubt, das Prinzip derselben an dieser Stelle erwähnen zu können.

Unter den von mir eingesehenen und teilweise benutzen Werken erwähne ich die Lehrbücher von *Andoyer*, *Baillaud*, *Ball*, *Bauschinger*, *Brünnow*, *Chauvenet*, *Newcomb*, *Oppolzer*, *Sawitsch*, *Tisserand* und das Handwörterbuch der Astronomie von *Valentiner*. Die in dem vorliegenden Lehrbuch gewählte Darstellung weicht aber vielfach von den mir bekannt gewordenen ab.

Ein großer Teil des Manuskripts wurde vor der Drucklegung von den Herren Prof. *v. Hepperger*, Prof. *Schwarzschild*, Geheimrat *v. Seeliger*, Hofrat *Weiß* und Dozent Dr. *Wilkens* durchgesehen; es ist mir eine angenehme Pflicht, den genannten Herren auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank für ihre Mühe und die mir erteilten Ratschläge auszudrücken. Ferner bin ich Herrn Hofrat *Eder* für seine die Herstellung der Zeichnungen betreffenden Ratschläge und für die hierbei wiederholt gewährte tatkräftige Unterstützung zu großem Dank verpflichtet. Sodann habe ich Herrn *Kaiser*, Assistenten der k. k. technischen Hochschule, für die Ausführung von 8, und meinem Sohne Norbert für die Ausführung der übrigen Zeichnungen zu danken. Ferner danke ich Herrn *Niel*, Fachlehrer an der k. k. graphischen Lehr- und Versuchsanstalt, für die Herstellung der den Verlauf zweier Sonnenfinsternisse darstellenden Karten und für die mühsame Arbeit der Beschriftung der Figuren; einige weniger gelungene Buchstaben fallen mir selbst zur Last. Weiterhin bin ich Herrn Dr. *Pummerer* sehr dankbar für die große Sorgfalt, welche er auf das Lesen der Korrektur verwandt hat. Zum Schlusse sei es mir gestattet, auch der Verlagsbuchhandlung Wilhelm Engelmann meine Erkenntlichkeit für das mir stets bewiesene Entgegenkommen zum Ausdruck zu bringen.

Wien, im Februar 1912.

L. de Ball.

INHALT.

Kapitel I.

Reihenentwicklungen, Interpolationsformeln und Formeln für numerische Differentiation.

Seite

1. Reihenentwicklungen 1
2. Interpolationsformeln 4
3. Ein Trugschluß 8
4. Numerische Bestimmung der Differentialquotienten 9

Kapitel II.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

5. Mittelwerte 10
6. Mittlerer Fehler und wahrscheinlicher Fehler 12
7. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten 17
8. Auflösung der Normalgleichungen. Mittlere Fehler der Unbekannten 21

Kapitel III.

Sphärische Trigonometrie.

9. Einleitung 29
10. Fundamentalformeln 31
11. Transformation der Fundamentalformeln. Gleichungen von *Gauß* und *Napier* . 33
12. Rechtwinklige sphärische Dreiecke 36
13. Differentialformeln 37

Kapitel IV.

Koordinaten.

14. Einleitung 39
15. Koordinaten, bezogen auf den Horizont 40
16. Koordinaten, bezogen auf den Äquator und die Ekliptik 42
17. Berechnung der Zenitdistanz und des Azimuts eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Parallaktischer Winkel 46
18. Berechnung der Länge und Breite eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Winkel zwischen Breiten- und Deklinationskreis eines Sterns 47
19. Verwandlung der Länge und Breite in Rektaszension und Deklination 48

Seite

20. Positionswinkel und Distanz. Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes eines zwei Sterne verbindenden Bogens größten Kreises 49
21. Erläuterung einiger in der Theorie der Bahnbestimmung vorkommender Ausdrücke 50

Kapitel V.

Theorie der Drehung der Erde.

I. Bewegung der Rotationsachse und der kleinen Achse der Erde.

22. Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes eines rotierenden Körpers . . . 54
23. Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers 55
24. Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids . . 58
25. Berechnung von L, M, N 61
26. Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde 63
27, 28. Reihenentwicklungen 68
29. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde 83
30. Änderung der Fundamentalebene 93
31. Die Änderung der Lage des mittleren Äquators und Äquinoktiums in bezug auf die einer beliebigen Zeit entsprechende Lage des mittleren Äquators und Äquinoktiums 98
32. Präzessionsformeln, gültig für das tropische Jahr als Zeiteinheit 100
33. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse der Erde 101
34. Bestimmung der Mondmasse 107

II. Zeitmessung.

35. Grundlagen der Zeitmessung: Mittlere und wahre Zeit 108
36. Sternzeit im mittleren Mittage. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt 112
37. Zeitgleichung. Verwandlung der wahren Zeit in mittlere Zeit 114
38. Tropisches, siderisches, anomalistisches Jahr. Normalmeridian 116

Kapitel VI.

Berechnung der Kulminationszeit und der Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns.

39. Kulminationszeit 118
40. Auf- und Untergangszeit eines Sterns 121
41. Auf- und Untergangszeit der Sonne 123
42. Auf- und Untergangszeit des Mondes 124
43. Morgen- und Abendweite 125

Kapitel VII.

Präzession und Nutation.

44. Definitionen 127
45. Präzession in Länge und Breite 128
46. Präzession in Rektaszension und Deklination 129

Seite

47. Nutation in Länge und Schiefe 135
48. Nutation in Rektaszension und Deklination 135
49. Reduktion eines Sternortes von dem mittleren Äquinox zu Anfang eines tropischen Jahres t_0 auf das wahre Äquinox zur Zeit t 136
50. Einfluß der Präzession und Nutation auf den Positionswinkel 138
51. Einfluß einer Korrektion der Nutationskonstante, bzw. der Konstante der Lunisolarpräzession auf die Nutation 139

Kapitel VIII.

Jährliche Parallaxe.

52. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns 142
53. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne 144

Kapitel IX.

Eigenbewegung der Fixsterne.

54. Einleitung 146
55. Einfluß der Eigenbewegung auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. Bestimmung der Größe und Richtung der Eigenbewegung 148
56. Reduktion der Eigenbewegung auf verschiedene Epochen und auf verschiedene Äquinoktien 151
56a. Reduktion der für ein beliebiges mittleres Äquinox und die zugehörige Epoche gültigen Koordinaten und Eigenbewegung eines Sterns auf ein anderes Äquinox und die zugehörige Epoche 153
57. Einfluß der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Fixsterne 155
57a. Sternströme 157

Kapitel X.

Aberration des Lichtes.

58. Erklärung der Aberration 164
59. Jährliche Aberration 165
59a. Einfluß der jährlichen Aberration auf die Länge und Breite 166
60. Einfluß der jährlichen Aberration auf die Rektaszension und Deklination . . 167
61. Tägliche Aberration 169
62. Säkulare Aberration 170
63. Planetenaberration 171
64. Einfluß der jährlichen Aberration auf den Positionswinkel und die Distanz . 173

Kapitel XI.

Reduktion auf den scheinbaren Ort.

65. Glieder erster Ordnung 175
66. Formeln von *Fabritius*. 181

Kapitel XII.

Parallaxe.

Seite
67. Einleitung 182
68. Parallaxe in Rektaszension und Deklination 184
69. Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz 188
70. Einfluß der Parallaxe auf den Winkelhalbmesser eines Himmelskörpers . . . 190
71. Bestimmung der Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes 191
72. Bestimmung der Sonnenparallaxe 196
73. Beziehung zwischen der Aberrationskonstante und der Sonnenparallaxe . . . 198

Kapitel XIII.

Refraktion.

74. Gesetz der Abnahme des Luftdrucks bei zunehmender Entfernung von der Erde 199
75. Änderung der Dichtigkeit mit der Höhe einer Luftschicht 202
76. Bestimmung des Drucks und der Dichtigkeit der Luft 204
77. Differentialausdruck der Refraktion 205
78. Einfluß des Wasserdampfes auf die brechende Kraft der Luft 208
79. Transformation des Refraktionsintegrals 211
80. Refraktion für $z \leqq 80^0$ 213
81. Berechnung der Refraktion für verschiedene Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft 220
82. Berechnung einiger bestimmter Integrale 223
83. Refraktion für $z > 80^0$ 229
84. Darstellung der Refraktion als Funktion der wahren Zenitdistanz 233
85. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns . 235
86. Einfluß der Refraktion auf den Positionswinkel und die Distanz 235
87. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz zweier Sterne 243
88. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der trockenen Luft 246
89. Bestimmung der Refraktionskonstante, der mittleren Polhöhe und der Deklinationen 249

Kapitel XIV.

Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne.

90. Näherungswerte 254
91. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik 255
92. Bestimmung der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne 257
93. Verbesserung eines Kataloges der Rektaszensionen von Zeitsternen 262

Kapitel XIV[a].

Bildung eines Fundamentalkatalogs.

93[a]. Vergleichung zweier Sternkataloge 267
93[b]. Reduktion mehrerer Sternkataloge auf ein mittleres System 271
93[c]. Bildung eines Fundamentalkatalogs 273

Kapitel XV.

Bestimmung der Konstante der Lunisolarpräzession und der Eigenbewegung des Sonnensystems.

Seite

94. Bestimmung eines Näherungswertes der Konstante der Lunisolarpräzession . . 278
95. Einfluß einer Korrektion der Konstante der Lunisolarpräzession auf die Präzession in Rektaszension und Deklination 279
96. Berücksichtigung der Eigenbewegung des Sonnensystems 280
97. Bestimmung der Korrektion eines Näherungswertes der Konstante der Lunisolarpräzession sowie der Größe und Richtung der Bewegung des Sonnensystems. 282
98. Bestimmung der Größe und Richtung der Bewegung des Sonnensystems mit Hilfe spektroskopischer Beobachtungen 286

Kapitel XVI.

Bestimmung der Nutationskonstante, der Aberrationskonstante und der Parallaxe eines Sterns.

99. Bestimmung der Nutationskonstante, der Aberrationskonstante und der Parallaxe eines Sterns 287

Kapitel XVII.

Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns.

100. Einleitung 289
101. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Distanzbeobachtungen 290
102. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Positionswinkelmessungen 293
103. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Rektaszensionsdifferenzen 295

Kapitel XVIII.

Sternbedeckungen.

104. Fundamentalgleichungen 297
105. Vorausberechnung einer Sternbedeckung für einen gegebenen Ort 300
106. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen. Erste Methode 304
107. Bestimmung des Ortes, des Halbmessers und der Parallaxe des Mondes aus Beobachtungen von Sternbedeckungen 308
108. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen. Zweite Methode 311

Kapitel XIX.

Sonnenfinsternisse.

I. Fundamentalgleichungen und Vorausberechnung einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort.

109. Einleitung 312
110. Bedingung für das Eintreten einer Sonnenfinsternis 314

Seite

111. Radius eines Kreisschnittes der Schattenkegel 316
112. Koordinaten des Beobachtungsortes 319
113. Koordinaten der XY-Spur der Schattenachse 324
114. Berechnung von u 325
115. Darstellung der Koordinaten X und Y als Funktionen der Zeit 325
116. Fundamentalgleichungen 327
117. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Hansen* . . 330
118. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Bessel* . . 334

II. Vorausberechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsternis auf der Erde.

119. Nördliche und südliche Grenzkurve 340
120. Kurve der zentralen Finsternis und Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit auf dieser Kurve 343
121. Östliche und westliche Grenzkurve 344
122. Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche, sowie des Anfangs- und Endpunktes der Kurve der zentralen Finsternis 348
123. Berührungspunkte der nördlichen und südlichen mit der östlichen und westlichen Grenzkurve 349
124. Instantane Durchschnittskurve des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche . 350

III. Verwendung der zur Zeit einer Sonnenfinsternis angestellten Hörnerbeobachtungen.

125. Bestimmung der Korrektion der Mondephemeride mit Hilfe der Beobachtung der relativen Lage der Hörnerspitzen 352

Kapitel XX.

Mondfinsternisse.

126. Bedingung für das Eintreten einer Mondfinsternis 356
127. Vorausberechnung einer Mondfinsternis 358

Kapitel XXI.

Astrographische Ortsbestimmung.

128. Bestimmung der Lage der Rotationsachse und der Drehungsgeschwindigkeit eines kugelförmigen Himmelskörpers. Astrozentrische und astrographische Länge und Breite eines Fleckes 361
129. Bestimmung der Lage eines Fleckes gegen den Mittelpunkt der Himmelskörperscheibe 365
130. Die *Cassini*schen Gesetze 368
131. Die optische Libration des Mondes. Selenographische Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe 369
132. Anwendungen der selenographischen Koordinaten des Mittelpunktes der Mondscheibe 372

Kapitel XXII.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch Beobachtungen außerhalb des Meridians.

Seite

133. Bestimmung der Zeit mittels der Zenitdistanz eines Sterns 374
134. Zeitbestimmung aus gleichen Höhen zweier Sterne 376
135. Zeitbestimmung aus Durchgangsbeobachtungen im Vertikal des Polarsterns . 378
136. Bestimmung der Polhöhe durch Messung der Zenitdistanz eines Sterns . . . 379
137. Bestimmung der Polhöhe aus zwei gleichen Höhen verschiedener Sterne . . 381
138. Die *Horrebow-Talcott*sche Methode 382
139. Bestimmung der Polhöhe aus Durchgangsbeobachtungen im ersten Vertikal . 382

Register 384

Kapitel I.

Reihenentwicklungen, Interpolationsformeln und Formeln für numerische Differentiation.

1. Reihenentwicklungen. I. In der Differentialrechnung werden die Reihen abgeleitet

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots && x \mp \infty \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots && x \mp \infty \\
\operatorname{tang} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots && -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi \\
\operatorname{cotg} x &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \cdots && -\pi < x < +\pi \\
\sec x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots && -\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi \\
\operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \cdots && -\pi < x < +\pi
\end{aligned} \tag{1}
$$

und ferner

$$
\begin{aligned}
x &= \sin x + \frac{1}{6}\sin^3 x + \frac{3}{40}\sin^5 x + \cdots && -1 \leqq \sin x \leqq +1 \\
x &= \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \cdots && -1 \leqq \operatorname{tang} x \leqq +1
\end{aligned} \tag{2}
$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen (1) hat man sich den Winkel x als in Teilen des Radius ausgedrückt zu denken, d. h.: Beschreibt man um den Scheitel des Winkels mit einem beliebigen Radius einen Kreis und wählt den Radius als Längeneinheit, so ist x gleich der Länge des Bogens, welchen die Schenkel des Winkels auf dem Kreise ausschneiden. Wenn nun x'' die Anzahl der Bogensekunden angibt, welche in einem Winkel, dem die Bogenlänge x entspricht, enthalten sind, so ist x gleich dem Produkt aus x'' und der Länge des einem Winkel von $1''$ entsprechenden Bogens; man hat also $x = x'' \operatorname{arc} 1''$. Mit Rücksicht darauf, daß $\operatorname{arc} 1''$ sich um weniger als eine Einheit der 14ten Dezimale von $\sin 1''$ unterscheidet, darf auch

$$x = x'' \sin 1'' \qquad [\log \sin 1'' = 4.6855749] \tag{3}$$

gesetzt werden; diese letztere Form ist die gewöhnlich angewandte.

Mit Hilfe der Gleichung (3) kann man einen in Bogensekunden gegebenen Winkel in Teilen des Radius ausdrücken; ist umgekehrt der Winkel in Teilen des

Radius gegeben, und wünscht man, seinen Wert in Bogensekunden zu kennen, so hat man die Gleichung anzuwenden

$$x'' = \frac{x}{\sin 1''}, \qquad \log \sin 1'' = 4.685\,5749 \tag{3a}$$

Soll dagegen der Winkel in Bogenminuten (x'), bzw. in Graden (x°) ausgedrückt gefunden werden, so ist die letzte Gleichung durch

$$x' = \frac{x}{\operatorname{arc} 1'}, \qquad \log \operatorname{arc} 1' = 6.463\,7261 \tag{3b}$$

bzw.

$$x^\circ = \frac{x}{\operatorname{arc} 1^\circ}, \qquad \log \operatorname{arc} 1^\circ = 8.241\,8774 \tag{3c}$$

zu ersetzen.

Aus den drei ersten Gleichungen (1) in Verbindung mit der Gleichung (3) folgt noch, daß, wenn x so klein ist, daß das Quadrat und die höheren Potenzen von x vernachlässigt werden können,

$$\sin x = x = x'' \sin 1'', \qquad \cos x = 1, \qquad \operatorname{tang} x = x = x'' \sin 1''$$

ist. Gewöhnlich schreibt man die erste und letzte dieser Gleichungen in der Form $\sin x = x \sin 1''$, bzw. $\operatorname{tang} x = x \sin 1''$, indem man dabei stillschweigend voraussetzt, daß x in Bogensekunden ausgedrückt ist.

II. Es sei z eine komplexe Variabele, deren Modul kleiner als 1 ist, es sei also

$$z = \varrho e^{i\omega} = \varrho(\cos\omega + i \sin\omega), \qquad \varrho < 1,$$

ferner sei $l(1+z)$ der natürliche Logarithmus von $1+z$; man hat dann bekanntlich

$$l(1+z) = \varrho e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho^2 e^{2i\omega} + \tfrac{1}{3}\varrho^3 e^{3i\omega} - \cdots$$

Nun folgt aus dem Ausdruck für z, wenn

$$\begin{aligned} r \sin\Theta &= \varrho \sin\omega \\ r \cos\Theta &= 1 + \varrho \cos\omega \end{aligned} \tag{4}$$

oder auch

$$r = +\sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2} \tag{5}$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\varrho \sin\omega}{1 + \varrho\cos\omega} \tag{6}$$

gesetzt wird,

$$1 + z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta) = re^{i\Theta}$$

Somit ist

$$l(1+z) = lr + i\Theta$$

Ersetzt man hier $l(1+z)$ durch die oben angegebene Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} lr + i\Theta &= \varrho e^{i\omega} - \tfrac{1}{2}\varrho^2 e^{2i\omega} + \tfrac{1}{3}\varrho^3 e^{3i\omega} - \cdots \\ &= \varrho(\cos\omega + i\sin\omega) - \tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos 2\omega + i \sin 2\omega) + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Vergleichung der reellen und imaginären Teile dieser Entwicklung erhält man

$$lr = \varrho\cos\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2\cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3\cos 3\omega - \cdots \tag{8}$$

$$\Theta = \varrho\sin\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2\sin 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3\sin 3\omega - \cdots \tag{9}$$

Da $\varrho < 1$ und $r > 0$ vorausgesetzt wird, so geht aus der zweiten Gleichung (4) hervor, daß $\cos\Theta > 0$ und somit, wenn die Werte von $\Theta > 2\pi$ ausgeschlossen

werden, $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist. Wenn also zwei Gleichungen von der Form (4) oder von der Form (5) und (6) gegeben sind, und $\varrho < 1$ sowie $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist, so gelten für lr und Θ die Reihenentwicklungen (8) und (9). Um die Reihe für den *Briggs*schen Logarithmus von r zu erhalten, hat man die rechte Seite der Gleichung (8) mit dem Modul $M = 0.434\,29448$ zu multiplizieren; es wird demnach

$$\log r = M[\varrho \cos\omega - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cos 2\omega + \tfrac{1}{3}\varrho^3 \cos 3\omega - \cdots], \quad \log M = 9.637\,7843$$

III. Ersetzt man in den Gleichungen (4), (5) und (6) ω durch $\pi - x$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} r \sin\Theta &= \varrho \sin x \\ r \cos\Theta &= 1 - \varrho \cos x \end{aligned} \tag{10}$$

bzw.

$$r = +\sqrt{1 - 2\varrho\cos x + \varrho^2} \tag{11}$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{\varrho \sin x}{1 - \varrho \cos x} \tag{12}$$

Nun wurden aus (4), (5) und (6) die Reihenentwicklungen (8) und (9) abgeleitet; setzt man auch in diesen $\omega = \pi - x$, so erhält man die folgenden, den Gleichungen (10), (11) und (12) entsprechenden Entwicklungen, welche wie die Reihen (8) und (9) für $\varrho < 1$ und $-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ gelten:

$$lr = -\varrho\cos x - \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cos 2x - \tfrac{1}{3}\varrho^3 \cos 3x - \cdots \tag{13}$$

$$\Theta = +\varrho \sin x + \tfrac{1}{2}\varrho^2 \sin 2x + \tfrac{1}{3}\varrho^3 \sin 3x + \cdots \tag{14}$$

Multipliziert man die rechte Seite der Gleichung (13) mit dem Modul $M = 0.43429\ldots$, so erhält man die Reihe für den *Briggs*schen Logarithmus von r.

IV. Es sei eine Gleichung gegeben von der Form

$$\operatorname{tang} y = \frac{1+m}{1-m} \operatorname{tang}\alpha, \tag{15}$$

wobei m ein positiver oder negativer echter Bruch sein soll. Substituiert man diesen Wert von $\operatorname{tang} y$ in die Formel

$$\operatorname{tang}(y-\alpha) = \frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang} y \operatorname{tang}\alpha},$$

so erhält man

$$\operatorname{tang}(y-\alpha) = \frac{m \sin 2\alpha}{1 - m\cos 2\alpha}, \tag{15a}$$

also eine Gleichung von der Form (12); gleichzeitig folgt aus (15a) in Verbindung mit der für m angegebenen Bedingung, daß $-\frac{\pi}{2} \leqq y - \alpha \leqq +\frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann. Der Gleichung (15a) und somit auch der Gleichung (15) entspricht also die aus (14) für $\Theta = y - \alpha$, $\varrho = m$ und $x = 2\alpha$ sich ergebende Reihenentwicklung

$$y = \alpha + m \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}m^2 \sin 4\alpha + \tfrac{1}{3}m^3 \sin 6\alpha + \cdots \tag{16}$$

V. Setzt man

$$\frac{1+m}{1-m} = n$$

oder

$$m = \frac{n-1}{n+1},$$

so wird die Gleichung (15)

$$\text{tang}\, y = n \,\text{tang}\, \alpha \tag{17}$$

und die aus (15) abgeleitete Reihe (16)

$$y = \alpha + \frac{n-1}{n+1}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4\alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6\alpha + \cdots \tag{18}$$

Einer Gleichung von der Form (17) entspricht demnach die für $n > 0$ gültige Reihenentwicklung (18).

In dem Spezialfalle $n = \cos\varepsilon$, also

$$\text{tang}\, y = \cos\varepsilon \,\text{tang}\, \alpha$$

folgt aus (18)

$$y = \alpha - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\alpha + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\alpha - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}^6 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 6\alpha + \cdots \tag{18a}$$

2. Interpolationsformeln. Es seien die Werte einer Funktion $f(x)$ für die äquidistanten Werte $a - 2w$, $a - w$, a, $a + w$, ... des Arguments x gegeben, und man stelle sich zur Aufgabe, den Wert zu bestimmen, welchen $f(x)$ für einen zwischen a und $a + w$ liegenden Wert X des Arguments annimmt. Zur Lösung dieser Aufgabe bedarf man der Differenzen zwischen den gegebenen Funktionswerten. Bedeuten $f(a-2)$, $f(a-1)$, $f(a)$, ... die den Werten $a - 2w$, $a - w$, a, ... des Arguments entsprechenden Funktionswerte, so bilde man zunächst die ersten Differenzen, d. h. die Differenzen zwischen je zwei aufeinander folgenden Funktionswerten, und setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} f(a-1) - f(a-2) &= f'(a - \tfrac{3}{2}) \\ f(a) - f(a-1) &= f'(a - \tfrac{1}{2}) \\ f(a+1) - f(a) &= f'(a + \tfrac{1}{2}) \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo also $a - \frac{3}{2}$ das Mittel aus $a - 1$ und $a - 2$ darstellt, ferner $a - \frac{1}{2}$ gleich dem Mittel aus a und $a - 1$ ist, usw.

Sodann bilde man die zweiten Differenzen, d. h. die Differenzen aus den f', und setze

$$\begin{aligned} f'(a - \tfrac{1}{2}) - f'(a - \tfrac{3}{2}) &= f''(a-1) \\ f'(a + \tfrac{1}{2}) - f'(a - \tfrac{1}{2}) &= f''(a) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ferner bilde man die dritten Differenzen, nämlich

$$f''(a) - f''(a-1) = f'''(a - \tfrac{1}{2})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Fährt man in dieser Weise bis zur vierten Differenz fort und stellt die gegebenen Funktionswerte und ihre Differenzen zusammen, so erhält man das folgende Schema:

Argument					
$a-2w$	$f(a-2)$				
		$f'(a-\frac{3}{2})$			
$a-w$	$f(a-1)$		$f''(a-1)$		
		$f'(a-\frac{1}{2})$		$f'''(a-\frac{1}{2})$	
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$
		$f'(a+\frac{1}{2})$		$f'''(a+\frac{1}{2})$	
$a+w$	$f(a+1)$		$f''(a+1)$		$f^{IV}(a+1)$
		$f'(a+\frac{3}{2})$		$f'''(a+\frac{3}{2})$	
$a+2w$	$f(a+2)$		$f''(a+2)$		
		$f'(a+\frac{5}{2})$			
$a+3w$	$f(a+3)$				

Da der Wert X zwischen a und $a+w$ liegen soll, so kann man $X = a + nw$ setzen, wo n einen positiven echten Bruch bedeutet. Jenachdem nun n gleich oder kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$ ist, und demnach X entweder in der Mitte von a und $a+w$, oder näher bei a, oder näher bei $a+w$ liegt, hat man zur Berechnung des zu X gehörigen Funktionswertes $f(a+n)$ eine andere Formel anzuwenden. Die betreffenden Formeln sollen hier nur angeführt und durch Beispiele erläutert werden, ihre Ableitung findet man unter anderem in *Oppolzer*s Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 13ff.

I. Es sei $n < \frac{1}{2}$. Die Formel lautet dann

$$(19) \qquad f(a+n) = f(a) + n\Big[f'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n-1}{2}\Big[f''(a) + \frac{n+1}{3}\Big[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \cdots$$

Beispiel. Dem Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1910 wurden die folgenden Deklinationen der Sonne, d. h. die Abstände des Sonnenmittelpunktes vom Äquator entnommen; dieselben gelten jedesmal für den Berliner mittleren Mittag. Neben den Deklinationen findet man unter f', f'', f''' die ersten, zweiten und dritten Differenzen mitgeteilt; die vierten Differenzen sind so klein, daß sie ohne Nachteil vernachlässigt werden können.

1910	Deklination	f'	f''	f'''
Mai 1	$14^{\circ}52'\,49.''5$			
		$+\,53'\,49.''1$		
4	15 46 38.6		$-\,2'\,20.''0$	
		$+\,51\;\;29.1$		$-\,8.''7$
7	16 38 7.7		$-\,2\;\;28.7$	
		$+\,49\;\;0.4$		$-\,9.1$
10	17 27 8.1		$-\,2\;\;37.8$	
		$+\,46\;\;22.6$		$-\,8.2$
13	18 13 30.7		$-\,2\;\;46.0$	
		$+\,43\;\;36.6$		$-\,7.5$
16	18 57 7.3		$-\,2\;\;53.5$	
		$+\,40\;\;43.1$		
19	19 37 50.4			

Will man jetzt die Deklination der Sonne für den mittleren Berliner Mittag des 8. Mai berechnen, so hat man für den im Vorigen mit a bezeichneten Argumentwert

den mittleren Berliner Mittag des 7. Mai zu wählen, und es wird, da hier $w = 3$ Tage ist,

$$n = \frac{\text{Mai } 8 - \text{Mai } 7}{3} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{n+1}{3} = \frac{4}{9}$$

Ferner gibt die obige Tabelle

$$f(a) = 16^\circ 38' 7''.7, \quad f'(a+\tfrac{1}{2}) = +49' 0''.4, \quad f''(a) = -2' 28''.7, \quad f'''(a+\tfrac{1}{2}) = -9''.1$$

Damit sind die Werte aller in (19) vorkommenden Größen gefunden, und somit könnte man die Aufgabe als gelöst betrachten. Es soll aber noch ein Verfahren erläutert werden, mittels dessen sich die Berechnung des Ausdruckes (19) ausführen läßt, ohne daß man nötig hat, auf die Vorzeichen der Differenzen und deren Koeffizienten zu achten. Man ziehe zuerst durch den Ort, wo in der obigen Tabelle das Argument Mai 8 liegen würde (also unterhalb Mai 7), eine Horizontale; die dieser am nächsten liegenden Differenzen $+49' 0''.4$, $-2' 28''.7$, $-9''.1$ sind dann die für die Formel (19) zu benutzenden Werte von $f'(a+\frac{1}{2})$, $f''(a)$ und $f'''(a+\frac{1}{2})$. Indem nun allgemein mit $|v|$ der absolute Wert einer beliebigen Größe v bezeichnet wird, bilde man das Produkt aus $|f'''(a+\frac{1}{2})| = 9''.1$ und $\left|\frac{n+1}{3}\right| = \frac{4}{9}$, also $9''.1 \times \frac{4}{9} = 4''.0$. Dieses Produkt füge man mit einem solchen Vorzeichen versehen zu $|f''(a)| = 2' 28''.7$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $2' 28''.7$ und dem absoluten Wert $2' 37''.8$ der auf der anderen Seite der Horizontalen gelegenen Differenz f'' zu liegen kommt; man hat also zu bilden $2' 28''.7 + 4''.0 = 2' 32''.7$. Sodann multipliziere man $2' 32''.7$ mit $\left|\frac{n-1}{2}\right| = \frac{1}{3}$ und füge das Produkt $(2' 32''.7)\frac{1}{3} = 50''.9$ mit einem solchen Vorzeichen zu $|f'(a+\frac{1}{2})| = 49' 0''.4$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $49' 0''.4$ und dem absoluten Wert $51' 29''.1$ der jenseits der Horizontalen gelegenen Differenz f' zu liegen kommt; es ist also zu bilden $49' 0''.4 + 50''.9 = 49' 51''.3$. Multipliziert man nun $49' 51''.3$ mit $n = \frac{1}{3}$ und legt das Produkt $(= 16' 37''.1)$ zu der für Mai 7 gültigen Deklination $16^\circ 38' 7''.7$ hinzu, so erhält man für die gesuchte Deklination der Sonne am 8. Mai, mittlerer Mittag Berlin, $16^\circ 54' 44''.8$.

II. Falls $n > \frac{1}{2}$ ist, setze man $1 - n = \nu$ und hat dann

$$(20) \quad f(a+n) = f(a+1) - \nu\left[f'(a+\tfrac{1}{2}) - \frac{\nu-1}{2}\left[f''(a+1) - \frac{\nu+1}{3}\left[f'''(a+\tfrac{1}{2}) - \cdots\right.\right.\right.$$

Beispiel. Mit Hilfe der vorigen Tabelle (S. 5) soll die Deklination der Sonne für 1910 Mai 12, 6^h mittlerer Zeit Berlin oder, wenn man 6^h in Dezimalteilen des Tages ausdrückt, für Mai $12 \cdot 25$ berechnet werden. In dem gegenwärtigen Falle hat man unter dem Argumentwert a den mittleren Berliner Mittag (= 0^h mittlerer Zeit Berlin) des 10. Mai zu verstehen, es wird also

$$n = \frac{\text{Mai } 12 \cdot 25 - \text{Mai } 10 \cdot 00}{3} = 0.75 = \frac{3}{4}$$

und somit

$$\nu = \frac{1}{4}, \qquad \frac{\nu-1}{2} = -\frac{3}{8}, \qquad \frac{\nu+1}{3} = \frac{5}{12}$$

Ferner gibt die Tabelle unter der jetzt für a gemachten Annahme

$$f(a+1) = 18^\circ\,13'\,30''.7, \qquad f'(a+\tfrac{1}{2}) = +\,46'\,22''.6, \qquad f''(a+1) = -\,2'\,46''.0,$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2}) = -\,8''.2$$

Bei der Substitution dieser Werte in die Formel (20) kann man in derselben Weise verfahren wie beim vorigen Beispiel. Zieht man zunächst durch den Ort, wo in der Tabelle das Argument Mai $12\cdot25$ liegen würde (also oberhalb Mai 13) eine Horizontale, so stellen die dieser Horizontalen unmittelbar benachbarten Differenzen $+\,46'\,22''.6$, $-\,2'\,46''.0$ und $-\,8''.2$ die für die Gleichung (20) zu benutzenden Werte von $f'(a+\frac{1}{2})$, $f''(a+1)$ und $f'''(a+\frac{1}{2})$ dar. Man bilde nun das Produkt aus $|f'''(a+\frac{1}{2})| = 8''.2$ und $\left|\frac{\nu+1}{3}\right| = \frac{5}{12}$ und erhält so $8''.2 \times \frac{5}{12} = 3''.4$. Dieser Wert ist mit einem solchen Vorzeichen zu $|f''(a+1)| = 2'\,46''.0$ hinzuzufügen, daß das entstehende Resultat zwischen $2'\,46''.0$ und dem absoluten Wert $2'\,37''.8$ der auf der entgegengesetzten Seite der Horizontalen befindlichen Differenz f'' zu liegen kommt, man hat also zu bilden $2'\,46''.0 - 3''.4 = 2'\,42''.6$. Hierauf multipliziere man $2'\,42''.6$ mit $\left|\frac{\nu-1}{2}\right| = \frac{3}{8}$ und füge das Produkt $(2'\,42''.6)\,\frac{3}{8} = 1'\,1''.0$ mit einem solchen Vorzeichen versehen zu $|f'(a+\frac{1}{2})| = 46'\,22''.6$ hinzu, daß das entstehende Resultat zwischen $46'\,22''.6$ und dem absoluten Wert $43'\,36''.6$ der jenseits der Horizontalen befindlichen Differenz f' zu liegen kommt; man hat also zu bilden $46'\,22''.6 - 1'\,1''.0 = 45'\,21''.6$. Zum Schluß hat man noch $45'\,21''.6$ mit $\nu = \frac{1}{4}$ zu multiplizieren und das Produkt $(= 10'\,20''.4)$ von der für Mai 13 gültigen Deklination $18^\circ\,13'\,30''.7$ zu subtrahieren; für die Deklination der Sonne am 12. Mai, 6^h m. Zt. Berlin, ergibt sich damit $18^\circ\,3'\,10''.3$.

Bei den vorigen zwei Beispielen sind die vierten Differenzen vernachlässigt worden. Sind letztere klein, so lassen sich dieselben dadurch berücksichtigen, daß man als Wert von $f'''(a+\frac{1}{2})$ das Mittel aus den zu beiden Seiten der Horizontalen befindlichen Werten von f''' nimmt; man hätte also bei dem ersten Beispiele $f'''(a+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(8''.7 + 9''.1) = -8''.9$ und bei dem zweiten $f'''(a+\frac{1}{2}) = -7''.8$ zu setzen. Bei einigermaßen großen Werten der vierten Differenz reicht dieses Verfahren aber nicht aus, sondern es muß dann in (19) $f'''(a+\frac{1}{2})$ durch $f'''(a+\frac{1}{2}) + \frac{n-2}{4} f^{IV}(a)$, bzw. in (20) durch $f'''(a+\frac{1}{2}) - \frac{\nu-2}{4} f^{IV}(a+1)$ ersetzt werden.

III. Ist $n = \frac{1}{2}$, so gilt die Formel

$$(21) \qquad f(a+\tfrac{1}{2}) = \frac{f(a)+f(a+1)}{2} - \frac{1}{8}\frac{f''(a)+f''(a+1)}{2} + \frac{3}{128}\frac{f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)}{2} - \cdots$$

Beispiel. Die zweite Kolumne der folgenden Tabelle gibt zwischen den Grenzen $x = 0^\circ\,3'\,30''$ und $x = 0^\circ\,6'\,0''$ von $30''$ zu $30''$ die Werte des $\log\sin x$; verlangt wird die Berechnung des $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,4'\,45''$.

x	$\log\sin x$	f'	f''	f'''	f^{IV}
$0^\circ\ 3'\ 30''$	7.007 79				
		$+\ 5800$			
$4\ \ 0$	7.065 79		$-\ 685$		
		$+\ 5115$		$+\ 146$	
$4\ 30$	7.116 94		$-\ 539$		$-\ 44$
	[7.139 82]	$+\ 4576$	[$-\ 488$]	$+\ 102$	[$-\ 34$]
$5\ \ 0$	7.162 70		$-\ 437$		-25
		$+\ 4139$		$+\ 77$	
$5\ 30$	7.204 09		$-\ 360$		
		$+\ 3779$			
$6\ \ 0$	7.241 88				

Setzt man $\log\sin 0^\circ 4'\ 30'' = f(a)$, so erhält man für $\frac{1}{2}[f(a)+f(a+1)]$, $\frac{1}{2}[f''(a)+f''(a+1)]$, $\frac{1}{2}[f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)]$ die in der vorigen Tabelle in eckigen Klammern stehenden Zahlen. Hiermit findet man

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[f(a)+f(a+1)] &= 7.139\,82 \\ -\tfrac{1}{8}\{\tfrac{1}{2}[f''(a)+f''(a+1)]\} &= +\ 61.0 \\ \tfrac{3}{128}\{\tfrac{1}{2}[f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)]\} &= -\ 0.8 \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Zahlen gibt nach (21) den gesuchten Logarithmus; es wird also $\log\sin 0^\circ 4'\ 45'' = 7.140\,42$.

3. Ein Trugschluß. Fügt man in (19) zu $f'''(a+\frac{1}{2})$ das auf S. 7 erwähnte Glied $\frac{n-2}{4} f^{IV}(a)$ hinzu, so lautet die Formel

$$(22)\quad f(a+n) = f(a)+n\left[f'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-1}{2}\left[f''(a)+\frac{n+1}{3}\left[f'''(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-2}{4}f^{IV}(a)\right.\right.\right.$$

Man stelle sich jetzt zur Aufgabe, mit Hilfe der vorhin gegebenen Tabelle den $\log\sin 0^\circ 3'\ 40''$ zu berechnen. Da $0^\circ 3'\ 30''$ dem Wert a des Arguments entspricht, und das Intervall $w = 30''$ ist, so folgt:

$$n = \frac{0^\circ 3'\,40'' - 0^\circ 3'\,30''}{30''} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{n+1}{3} = \frac{4}{9}, \qquad \frac{n-2}{4} = -\frac{5}{12}$$

Damit sind die Koeffizienten der in (22) enthaltenen Differenzen gefunden, aber von diesen Differenzen kommt nur die erste, nämlich $f'(a+\frac{1}{2}) = +\ 5800$, in der Tabelle vor. Nun gilt aber auch folgende Interpolationsformel

$$(23)\quad f(a+n) = f(a)+n\left[f'(a+\tfrac{1}{2})+\frac{n-1}{2}\left[f''(a+1)+\frac{n-2}{3}\left[f'''(a+\tfrac{3}{2})+\frac{n-3}{4}f^{IV}(a+2)\right.\right.\right.$$

Die Werte der hierin enthaltenen Differenzen können sämtlich der obigen Tabelle entnommen werden, und zwar hat man

$$f'(a+\tfrac{1}{2}) = +\ 5800, \quad f''(a+1) = -\ 685, \quad f'''(a+\tfrac{3}{2}) = +\ 146, \quad f^{IV}(a+2) = -\ 44$$

Es könnte also scheinen, als ob für das vorliegende Beispiel die Anwendung der Formel (23) geboten wäre; dem ist aber nicht so. Berechnet man zunächst mit Hilfe von (23) den Wert von $\log\sin 0^\circ 3'\ 40''$, so ergibt sich dieser zu 7.027 99. Ebendenselben Wert erhält man aber auch, wenn man die letzte für die Formel (23) benutzte Differenz als konstant betrachtet, d. h. wenn man in der für $\log\sin x$ gege-

benen Tabelle $f^{IV}(a) = f^{IV}(a+1) = f^{IV}(a+2) = -44$ annimmt, hierauf die fehlenden Differenzen ergänzt und nun die Formel (22) benutzt. Die ergänzten Differenzen sind in der folgenden Tabelle in Klammern gesetzt.

x	$\log\sin x$	f'	f''	f'''	f^{IV}
$0^\circ\,3'\,30''$	7.007 79		$(-\,875)$		$(-\,44)$
		$+\,5800$		$(+\,190)$	
4 0	7.065 79		$-\,685$		$(-\,44)$
		$+\,5115$		$+\,146$	
4 30	7.116 94		$-\,539$		$-\,44$

4. Numerische Bestimmung der Differentialquotienten. Es seien für die Werte $a-2w$, $a-w$, a, ... eines Arguments die Funktionswerte $f(a-2)$, $f(a-1)$, $f(a)$, ... gegeben und von letzteren auf die in § 2 beschriebene Weise die ersten, zweiten, ... Differenzen gebildet. Um dann den ersten und zweiten Differentialquotienten von $f(x)$ für $x = a$ zu finden, hat man die Formeln anzuwenden (*Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 16 ff).:

$$(24)\qquad \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=a} = \frac{1}{w}\left[\frac{f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a-\tfrac{1}{2})}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})}{2} + \cdots\right]$$

$$(25)\qquad \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=a} = \frac{1}{w^2}\left[f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{IV}(a) + \cdots\right]$$

Als Beispiel möge die Berechnung der Differentialquotienten von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ gewählt werden. Mit Hilfe der in § 2, S. 8 angegebenen Tabelle erhält man, wenn jetzt $\log\sin 0^\circ\,5'\,0'' = f(a)$ gesetzt wird,

$$\tfrac{1}{2}[f'(a+\tfrac{1}{2}) + f'(a-\tfrac{1}{2})] = +\,4357.5$$

$$\tfrac{1}{2}[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})] = +\,89.5, \quad -\tfrac{1}{6}\{\tfrac{1}{2}[f'''(a+\tfrac{1}{2}) + f'''(a-\tfrac{1}{2})]\} = -\,14.9$$

Die Summe der rechts untereinander stehenden Zahlen ist $+\,4342.6$. Da das Intervall w zwischen je zwei aufeinander folgenden Argumenten der Tabelle $30''$ beträgt, so wird der erste Differentialquotient von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ gleich $+\,4342.6 : 30 = +\,144.8$ Einheiten der fünften Dezimale.

Aus der Tabelle erhält man ferner $f''(a) = -\,437$, $f^{IV}(a) = -\,25$. Demnach ist $f''(a) - \frac{1}{12}f^{IV}(a) = -\,435$. Der zweite Differentialquotient von $\log\sin x$ für $x = 0^\circ\,5'\,0''$ wird somit $-\,435 : 900 = -\,0.48$ Einheiten der fünften Dezimale.

Wollte man nun beispielsweise $\log\sin 0^\circ\,5'\,9''$ berechnen, so hätte man nach dem *Taylor*schen Satze, wenn die vorhin abgeleiteten Differentialquotienten mit Δ' und Δ'' bezeichnet werden,

$$\log\sin 0^\circ\,5'\,9'' = \log\sin 0^\circ\,5'\,0'' + 9\Delta' + 81\,\frac{\Delta''}{2}$$

Nach Substitution der Werte $\log\sin 0^\circ\,5'\,0'' = 7.16270$, $\Delta' = +\,144.8$ und $\frac{1}{2}\Delta'' = -\,0.24$ Einheiten der fünften Dezimale erhält man hieraus $\log\sin 0^\circ\,5'\,9'' = 7.17554$.

Kapitel II.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

5. Mittelwerte. Wird eine unveränderliche Größe, z. B. die Länge einer festen Strecke, die Größe eines konstanten Winkels usw., wiederholt gemessen, so stimmen die erhaltenen Einzelwerte durchweg nicht genau miteinander überein. Hat man nun keinen Grund, die eine Beobachtung für weniger sicher als die andere zu halten, so betrachtet man das arithmetische Mittel aus den Einzelwerten als den wahrscheinlichsten Wert der gemessenen Größe. Anstatt die Beobachtungen als gleich genau zu bezeichnen, bedient man sich gewöhnlich des Ausdrucks, daß dieselben gleiches Gewicht haben; setzt man dieses gleich 1, so hat man das Gewicht des arithmetischen Mittels gleich der Zahl der Einzelwerte anzunehmen.

Das arithmetische Mittel hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Es sei x die zu bestimmende Größe, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ seien die für x gefundenen, als gleich genau vorausgesetzten Einzelwerte; nimmt man dann für x irgend einen Wert an und bildet die Differenzen

$$\begin{aligned} x - a_1 &= v_1 \\ x - a_2 &= v_2 \\ &\cdots \\ x - a_m &= v_m , \end{aligned} \tag{1}$$

so sind die v Funktionen von x. Man kann sich jetzt die Frage vorlegen: Welches ist der Wert von x, für den die Summe der Quadrate der v am kleinsten ist? Bekanntlich ergibt sich dieser aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{n=m} (x - a_n)^2 = 0$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so folgt

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \cdots + (x - a_m) = 0$$

oder

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$$

Der gesuchte Wert von x ist also gleich dem arithmetischen Mittel aus den beobachteten Einzelwerten.

Das Mittel aus m gleich genauen Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ läßt sich auch in der Form

$$x = \frac{\nu \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{\nu} + (m - \nu) \dfrac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_m}{m - \nu}}{\nu + (m - \nu)}$$

darstellen. Setzt man hierin

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_\nu}{\nu}, \qquad x_2 = \frac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_m}{m - \nu}$$

$$p_1 = \nu, \qquad p_2 = m - \nu,$$

so wird

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} \tag{1a}$$

Wenn man nun das Gewicht einer Beobachtung gleich 1 annimmt, so sind ν und $m - \nu$ und demnach auch p_1 und p_2 die Gewichte der Partialmittel x_1 und x_2. Aus dem Vorigen ergibt sich also der Satz: Teilt man eine Anzahl gleich genauer Einzelwerte in zwei Gruppen und bildet für jede Gruppe ein Partialmittel, so ist der Quotient aus der Summe der Produkte der Partialmittel in die zugehörigen Gewichte und der Summe dieser Gewichte gleich dem Gesamtmittel.

Auf den zuletzt für x gefundenen Quotienten stößt man auch bei der Lösung der folgenden Aufgabe. Es seien V_1 und V_2 die Differenzen zwischen irgend einem Werte von x und den vorhin mit x_1 und x_2 bezeichneten Partialmitteln, es sei also

$$x - x_1 = V_1$$
$$x - x_2 = V_2$$

Multipliziert man jede dieser Gleichungen mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht des in ihr enthaltenen Partialmittels, so folgt

$$x\sqrt{p_1} - x_1\sqrt{p_1} = V_1\sqrt{p_1}$$
$$x\sqrt{p_2} - x_2\sqrt{p_2} = V_2\sqrt{p_2}$$

Will man jetzt denjenigen Wert von x finden, für den die Summe der Quadrate der auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke, also die Summe $p_1 V_1^2 + p_2 V_2^2$ ein Minimum wird, so ergibt sich dieser aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\{p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2\} = 0$$

oder

$$p_1(x - x_1) + p_2(x - x_2) = 0$$

Der gesuchte Wert von x ist somit

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

Ist die Zahl der aus den gleich genauen Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gebildeten Partialmittel größer wie zwei, hat man z. B. die Mittel $x_1, x_2, x_3, \ldots$ und bezeichnet man mit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Anzahl der den $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zugrunde liegenden Einzelwerte also auch die Gewichte der Partialmittel, so erhält man für das arithmetische Mittel aus $a_1, a_2, \ldots, a_m$ den Ausdruck

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} \tag{2}$$

Hierbei ist der Voraussetzung nach $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = m$; der Divisor des Quotienten (2) ist also gleich dem Gewicht von x.

Für den unter (2) gegebenen Ausdruck von x gilt ein dem vorhin für (1a) bewiesenen ganz analoger Satz. Wenn man nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x - x_1 &= v_1 \\ x - x_2 &= v_2 \\ x - x_3 &= v_3 \\ &\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

mit $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$, ... multipliziert und in die so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x\sqrt{p_1} - x_1\sqrt{p_1} &= v_1\sqrt{p_1} \\ x\sqrt{p_2} - x_2\sqrt{p_2} &= v_2\sqrt{p_2} \\ x\sqrt{p_3} - x_3\sqrt{p_3} &= v_3\sqrt{p_3} \\ &\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

den Wert (2) von x substituiert, so erhält die Summe $p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + p_3v_3^2 + \cdots$ ihren kleinsten Wert.

Bisher sind die Beobachtungen als gleich genau vorausgesetzt worden. Haben aber die beobachteten Werte verschiedene Genauigkeit, so kann man sich denken, daß dieselben Partialmittel einer Reihe gleich genauer Beobachtungen vorstellen, wobei jedoch jedes Partialmittel aus einer verschieden großen Anzahl von Einzelwerten gebildet ist; wie man diese Anzahl, also die Gewichte der beobachteten Werte bestimmt, ergibt sich aus den im nächsten Paragraphen enthaltenen Ausführungen. Damit ist aber der Fall verschieden genauer Beobachtungen auf denjenigen gleich genauer zurückgeführt. Man hat jetzt nur unter den vorhin mit x_1, x_2, x_3, ... bezeichneten Partialmitteln die beobachteten Werte und unter p_1, p_2, p_3, ... die Gewichte der letzteren zu verstehen; der Ausdruck (2), für welchen gleichzeitig die Summe der Quadrate der auf der rechten Seite der Gleichungen (4) stehenden Größen ein Minimum wird, ist dann der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Größe, und das Gewicht dieses Wertes ist gleich der Summe der p.

6. Mittlerer Fehler und wahrscheinlicher Fehler. Denkt man sich in den Gleichungen (1) an Stelle von x seinen wahren Wert eingesetzt, und bezeichnet man die Werte, welche in diesem Falle die Differenzen v_1, v_2, ..., v_m annehmen, mit Δ_1, Δ_2, ..., Δ_m, so stellen diese Δ die wahren Beobachtungsfehler dar. Haben dann alle Beobachtungen dasselbe Gewicht, und bezeichnet man mit $[\Delta\Delta]$ die Summe der Quadrate $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_m^2$, so nennt man $\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}}$ den mittleren Fehler einer Beobachtung. Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist also ein Fehler, dessen Quadrat gleich dem Mittel aus der Summe der Quadrate der wirklich begangenen Fehler ist. Außer von dem mittleren spricht man auch noch von dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung; man versteht darunter einen Fehler, der so beschaffen ist, daß von allen in einer Reihe von Messungen begangenen und ihrem absoluten Werte nach genommenen Fehlern die eine Hälfte der Wahrscheinlichkeit nach unter-, die andere oberhalb jenes Fehlers liegt. Da die Wahrscheinlichkeit eines positiven Fehlers dieselbe ist wie die eines gleich großen negativen, so versieht man die für den wahrscheinlichen Fehler erhaltenen Werte mit dem

doppelten Vorzeichen. Wenn man also beispielsweise für einen Winkel x durch Beobachtung den Wert a gefunden hat, und der wahrscheinliche Fehler von a seinem absoluten Betrage nach gleich 0″.5 ist, so schreibt man: $x = a$, w. F. $\pm$ 0″.5. In Worten kann man dies folgendermaßen ausdrücken: Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert von x zwischen den Grenzen $a - 0''.5$ und $a + 0''.5$ eingeschlossen ist, ist ebenso groß wie diejenige, daß der wahre Wert außerhalb der angeführten Grenzen liegt. Zwischen dem wahrscheinlichen Fehler (r) und dem mittleren Fehler (ε) gilt der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge die Beziehung

$$r = 0.6745\,\varepsilon \tag{5}$$

Man hat somit auch

$$\varepsilon = 1.4826\,r \tag{5a}$$

Nimmt man vorläufig den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung als bekannt an, so läßt sich auch der mittlere, bzw. wahrscheinliche Fehler des Mittels aus mehreren Beobachtungen berechnen. Hierzu dient der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewiesene Satz: Hat man einen Ausdruck von der Form

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m,$$

wo $y_1, y_2, \ldots$ voneinander unabhängige Quantitäten und $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Konstanten bedeuten, sind ferner $r_1, r_2, \ldots$ die wahrscheinlichen Fehler von $y_1, y_2, \ldots$, und bezeichnet man den wahrscheinlichen Fehler von $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$ mit $R(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m)$, so ist

$$R(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m) = \sqrt{\beta_1^2 r_1^2 + \beta_2^2 r_2^2 + \cdots + \beta_m^2 r_m^2} \tag{6}$$

Der Gleichung (5a) zufolge hat man aber, wenn ε_n den mittleren Fehler von y_n bedeutet, $\varepsilon_n = 1.4826\,r_n$; multipliziert man also die Gleichung (6) mit 1.4826 und setzt $1.4826\,R(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots) = E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots)$, wo nun $E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots)$ als der mittlere Fehler von $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots$ zu bezeichnen ist, so erhält man

$$E(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_m y_m) = \sqrt{\beta_1^2 \varepsilon_1^2 + \beta_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + \beta_m^2 \varepsilon_m^2} \tag{6a}$$

Für den Fall, daß $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \frac{1}{m}$ und $r_1 = r_2 = \cdots = r$, also, wenn $1.4826\,r = \varepsilon$ gesetzt wird, auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon$ ist, folgt aus (6) und (6a)

$$R\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}\right) = \frac{r}{\sqrt{m}}, \tag{7}$$

$$E\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_m}{m}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \tag{7a}$$

Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus m gleich genauen Beobachtungen ist demnach gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler einer Beobachtung, dividiert durch die Quadratwurzel aus m. Da eine Beobachtung vom Gewichte m als das arithmetische Mittel aus m Beobachtungen vom Gewichte 1 aufgefaßt werden kann, so gilt auch der Satz: Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte m ist gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus m.

Setzt man

$$\beta_1 = \frac{p_1}{\Sigma p}, \quad \beta_2 = \frac{p_2}{\Sigma p}, \quad \cdots, \quad \beta_m = \frac{p_m}{\Sigma p},$$

wo

$$\Sigma p = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$$

sein soll, so folgt aus (6)

$$R\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{1}{\Sigma p}\sqrt{p_1^2 r_1^2 + p_2^2 r_2^2 + \cdots + p_m^2 r_m^2}$$

Der auf der linken Seite in Klammern stehende Ausdruck gibt nach obigem das Mittel aus den y an, wenn diese die Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_m$ haben; in diesem Falle stellt Σp das Gewicht des Mittels dar. Bezeichnet man jetzt den wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit mit r, so ist dem vorhin bewiesenen Satze gemäß $r_1 = r : \sqrt{p_1}$, $r_2 = r : \sqrt{p_2}$, usw. Substituiert man diese Werte in die vorige Gleichung, so erhält man

$$R\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{r}{\sqrt{\Sigma p}} \tag{8}$$

In analoger Weise folgt aus (6ª), wenn ε den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet,

$$E\left(\frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + \cdots + p_m y_m}{\Sigma p}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Sigma p}} \tag{8ª}$$

Es ergibt sich also der Satz: Der wahrscheinliche, bzw. mittlere Fehler des mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Mittels aus ungleich genauen Werten ist gleich dem wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler der Gewichtseinheit, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Gewichte des Mittels.

Man denke sich jetzt wieder eine größere Anzahl gleich guter Beobachtungen in zwei Gruppen mit p_1, bzw. p_2 Gliedern zerlegt und für jede Gruppe den Mittelwert gebildet. Bezeichnet man dann die wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte mit R_1, bzw. R_2 und ihre mittleren Fehler mit E_1, bzw. E_2, so folgt aus (7) und (7ª), wenn r den wahrscheinlichen und ε den mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet,

$$R_1 = \frac{r}{\sqrt{p_1}}, \quad R_2 = \frac{r}{\sqrt{p_2}}; \quad E_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_2}}$$

Hieraus erhält man

$$p_1 : p_2 = R_2^2 : R_1^2 = E_2^2 : E_1^2 \tag{9}$$

Da man nun zwei beobachtete Werte mit den Gewichten p_1 und p_2 als Mittelwerte von p_1, bzw. p_2 gleich genauen Beobachtungen betrachten kann, so folgt aus der letzten Gleichung: Die Gewichte zweier ungleich genauen Beobachtungen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer wahrscheinlichen, bzw. mittleren Fehler.

Zur Vervollständigung des Vorigen ist noch anzugeben, wie man den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung, bzw., bei ungleich genauen Beobachtungen, den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit bestimmt. Es soll zunächst angenommen werden, daß die Beobachtungen gleich genau sind. Der für diesen Fall zur Definition des mittleren Fehlers einer Beobachtung auf S. 12

gegebene Ausdruck $\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m}}$ ist allein nicht hinreichend, weil derselbe die Kenntnis des wahren Wertes der zu bestimmenden Größe verlangt; man kennt eben nur den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten, also das arithmetische Mittel aus den beobachteten Werten $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Versteht man aber unter $v_1, v_2, \ldots, v_m$ die Abweichungen der beobachteten Werte von ihrem arithmetischen Mittel, und bezeichnet man die Abweichung des arithmetischen Mittels von dem wahren Wert der Unbekannten mit δ, so gelten die Gleichungen

$$\Delta_1 = v_1 + \delta, \quad \Delta_2 = v_2 + \delta, \quad \ldots, \quad \Delta_m = v_m + \delta$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen gibt, wenn zur Abkürzung

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = [v]$$
$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_m^2 = [vv]$$

gesetzt wird,

$$[\Delta\Delta] = [vv] + 2[v]\delta + m\delta^2$$

Infolge der Bedeutung der v ist aber $[v] = 0$, und somit erhält man

(A) $$[\Delta\Delta] = [vv] + m\delta^2$$

Unter der Voraussetzung nun, daß die Beobachtungen nicht alle nach derselben Seite hin von der Wahrheit abweichen, also nicht mit einem konstanten Fehler behaftet sind, kann man als Näherungswert von δ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels aus den m Beobachtungen annehmen; man hat also nach (7a), wenn ε wieder den mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung (A) und berücksichtigt, daß, der Definition von ε gemäß, $[\Delta\Delta] = m\varepsilon^2$ ist, so folgt

$$m\varepsilon^2 = [vv] + \varepsilon^2$$

Damit ergibt sich für den mittleren, bzw., unter Benutzung der Gleichung (5a), für den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung

(10) $$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}, \qquad r = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{m-1}}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (7) und (7a) folgt hieraus für den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus den m Beobachtungen

(10a) $$E = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{m(m-1)}}, \qquad R = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[vv]}{m(m-1)}}$$

Sind die Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit, haben also beispielsweise die für eine Unbekannte x erhaltenen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_m$, so leite man mit Hilfe der Gleichung (2) den wahrscheinlichsten Wert von x ab und bilde die Differenzen $x - x_1 = v_1$, $x - x_2 = v_2$, usw.; wird dann die Summe $v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \cdots + v_m^2 p_m = [pvv]$ gesetzt, so erhält man in ganz ähnlicher Weise

wie vorhin*), wenn ε und r den mittleren, bzw. wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit bedeuten,

$$(11) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{m-1}}, \qquad r = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{m-1}},$$

$$(11^a) \qquad E = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{m(m-1)}}, \qquad R = \pm 0.6745\sqrt{\frac{[pvv]}{m(m-1)}}$$

Beispiel. An der *v. Kuffner*schen Sternwarte wurden für 10 Sterne die in der mit δ bezeichneten Kolumne der folgenden Tabelle mitgeteilten Winkelabstände vom Äquator beobachtet; alle diese Werte sollen als gleich genau angesehen werden. In der zweiten Kolumne ist für jeden Stern das Mittel aus den in der ersten Kolumne stehenden Sekunden angeführt. Die mit $+v$ bezeichnete Kolumne enthält die absolut genommenen Differenzen zwischen den beobachteten δ und ihren Mittelwerten; die vierte Kolumne gibt die Quadrate der v.

δ	M	$+v$	v^2	δ	M	$+v$	v^2
7° 52′ 24″.0	23″.8	0″.2	0.04	7° 14′ 21″.1	21″.2	0″.1	0.01
23.6		0.2	0.04	21.7		0.5	0.25
				21.2		0.0	0.00
7 59 45.6	47.0	1.4	1.96	21.0		0.2	0.04
47.7		0.7	0.49				
47.1		0.1	0.01	7 56 15.7	16.6	0.9	0.81
47.6		0.6	0.36	17.5		0.9	0.81
7 17 41.4	41.0	0.4	0.16	7 19 40.0	39.8	0.2	0.04
40.5		0.5	0.25	39.7		0.1	0.01
7 12 47.1	47.1	0.0	0.00	7 6 20.4	20.7	0.3	0.09
47.0		0.1	0.01	21.0		0.3	0.09
7 10 4.5	3.7	0.8	0.64	7 28 45.7	46.3	0.6	0.36
3.9		0.2	0.04	46.8		0.5	0.25
2.7		1.0	1.00				

Um nun den mittleren Fehler einer Beobachtung zu erhalten, nehme man zunächst allgemein an, daß die Zahl der beobachteten Sterne gleich n sei, und daß man für den ersten Stern m_1 Beobachtungen erhalten habe, für den zweiten m_2 Beobachtungen, usw. Bezeichnet man jetzt die dem ersten Sterne entsprechende Summe der v^2 mit $[vv]_1$, die dem zweiten Stern entsprechende mit $[vv]_2$ usw., so erhält man der ersten Gleichung (10) zufolge

$$\varepsilon^2 = \frac{[vv]_1}{m_1 - 1}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{[vv]_2}{m_2 - 1}, \qquad \cdots, \qquad \varepsilon^2 = \frac{[vv]_n}{m_n - 1}$$

*) *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 306f.

Da das Gewicht des ersten dieser n Werte von ε^2 gleich $m_1 - 1$, das des zweiten gleich $m_2 - 1$ usw. ist, so ist der wahrscheinlichste Wert von ε^2, nach Gleichung (2), gleich

$$\frac{\varepsilon^2(m_1 - 1) + \varepsilon^2(m_2 - 1) + \cdots + \varepsilon^2(m_n - 1)}{(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1)} = \frac{[vv]_1 + [vv]_2 + \cdots + [vv]_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n}$$

In dem vorliegenden Falle ist nun die Summe aller v^2, d. h. die Summe $[vv]_1 + [vv]_2 + \cdots + [vv]_n = 7{\cdot}76$, ferner ist $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 25$ und $n = 10$; somit ergibt sich für den wahrscheinlichsten Wert des Quadrates des mittleren Fehlers einer Beobachtung $\varepsilon^2 = 7{\cdot}76 : 15$. Hieraus folgt

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{7{\cdot}76}{15}} = \pm 0''.72$$

Da für den ersten Stern zwei Beobachtungen vorliegen, so ist der mittlere Fehler des Mittels $7^\circ 52' 23''.8$ gleich $\varepsilon : \sqrt{2} = \pm 0''.51$. Für denselben Stern sei nun durch eine andere Beobachtungsreihe $\delta = 7^\circ 52' 23''.0$ und als mittlerer Fehler dieses δ der Wert $\pm 0''.33$ gefunden worden. Will man jetzt den wahrscheinlichsten Wert von δ ableiten und den mittleren Fehler desselben bestimmen, so hat man zunächst die Gewichte der zwei für δ erhaltenen Resultate zu berechnen. Mit Hilfe der Gleichung (9) erhält man aber, wenn p_1 das Gewicht des ersten und p_2 das Gewicht des zweiten Wertes von δ bedeutet,

$$p_2 = \left(\frac{0{\cdot}51}{0{\cdot}33}\right)^2 p_1$$

oder, wenn $p_1 = 1$ gesetzt wird,

$$p_1 = 1{\cdot}0, \qquad p_2 = 2{\cdot}4$$

Somit ist der wahrscheinlichste Wert von δ

$$\delta = 7^\circ 52' \frac{23''.8 + 2{\cdot}4 \times 23''.0}{3{\cdot}4} = 7^\circ 52' 23''.24$$

Dieser Wert hat das Gewicht $3{\cdot}4$. Da nun der mittlere Fehler desjenigen Wertes von δ, dessen Gewicht als Einheit gewählt wurde, gleich $0''.51$ ist, so ist der mittlere Fehler von $7^\circ 52' 23''.24$ gleich $0''.51 : \sqrt{3 \cdot 4} = 0''.28$.

7. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Zwischen den Unbekannten x, y, z, ..., den als gegeben betrachteten Koeffizienten a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... und den durch Beobachtung zu ermittelnden Größen n_1, n_2, ... mögen die linearen Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - n_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - n_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \tag{12}$$

deren Zahl größer als diejenige der Unbekannten sein soll. Substituiert man für n_1, n_2, ... ihre beobachteten und demnach mehr oder weniger fehlerhaften Werte, so ist es im allgemeinen nicht möglich, Werte von x, y, z, ... zu finden, welche die vorigen Gleichungen völlig befriedigen; vielmehr unterscheiden sich die

auf der linken Seite der Gleichungen (12) stehenden Ausdrücke durchweg mehr oder weniger von 0, welche Werte man auch für die Unbekannten annimmt. Um dies durch Gleichungen auszudrücken, setze man

$$(12^a)\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \cdots - n_1 &= v_1\\ a_2x + b_2y + c_2z + \cdots - n_2 &= v_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo v_1, v_2, ... die Werte bezeichnen, welche man für die linken Seiten erhält, wenn für x, y, z, ... irgend ein Wertsystem angenommen wird. Es werde jetzt vorausgesetzt, daß die beobachteten Werte n_1, n_2, ... gleich genau sind oder, anders ausgedrückt, daß die Gleichungen (12^a) dasselbe Gewicht haben; in Übereinstimmung mit dem bei den Gleichungen (1) angewandten Prinzip sollen dann als wahrscheinlichste Werte von x, y, z, ... diejenigen betrachtet werden, für welche die Summe der Fehlerquadrate, d. h. die Summe $v_1^2 + v_2^2 + \cdots = [vv]$ ein Minimum ist. Aus (12^a) erhält man als Summe der Fehlerquadrate

$$(a_1x + b_1y + c_1z + \cdots - n_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z + \cdots - n_2)^2 + \cdots$$

Damit dieser Ausdruck seinen kleinsten Wert erhalte, müssen die ersten partiellen Differentialquotienten desselben, genommen nach x, y, z, ... verschwinden. Führt man die Differentiation aus und setzt zur Abkürzung

$$(13)\qquad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots &= [aa]\\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots &= [ab] = [ba]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 + \cdots &= [an] = [na]\\ b_1^2 + b_2^2 + b_2^2 + \cdots &= [bb]\\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \cdots &= [bc] = [cb]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man die zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von x, y, z, ... dienenden Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [an]\\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bn]\\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \cdots &= [cn]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, deren Zahl gleich derjenigen der Unbekannten ist, nennt man die Normalgleichungen, während die Gleichungen (12^a) als Bedingungsgleichungen bezeichnet werden.

Sind die Gewichte der Bedingungsgleichungen voneinander verschieden, hat z. B. n_1 das Gewicht p_1, n_2 das Gewicht p_2 usw., so multipliziere man jede Gleichung mit der Quadratwurzel aus dem zugehörigen Gewicht, wie das bereits früher bei der Bildung der Gleichungen (4) aus den Gleichungen (3) geschehen ist. Setzt man dann

$$\begin{aligned} a_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{a}_1, \quad b_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{b}_1, \quad \ldots, \quad n_1\sqrt{p_1} = \mathfrak{n}_1,\\ a_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{a}_2, \quad b_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad n_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{n}_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man Gleichungen von der Form (12ª), denen allen dasselbe Gewicht zukommt*). Der Fall, wo die Bedingungsgleichungen verschiedene Gewichte haben, ist damit auf denjenigen zurückgeführt, wo die Gewichte für alle Gleichungen dieselben sind. In der Folge wird nun vorausgesetzt, daß die Gleichungen (12ª) bereits die mit den Quadratwurzeln aus den zugehörigen Gewichten multiplizierten Bedingungsgleichungen darstellen.

Bevor gezeigt wird, in welcher Weise man die Normalgleichungen auflöst und die mittleren Fehler der Unbekannten bestimmt, sind noch einige Bemerkungen bezüglich der numerischen Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen zu machen. Sind die in (12), bzw. (12ª) enthaltenen Koeffizienten an Größe wesentlich voneinander verschieden, so empfiehlt es sich, zunächst den größten Koeffizienten jeder Unbekannten aufzusuchen; für x sei dies a_m, für y sei es b_n, für z sei es c_s, usw., endlich sei n_z der größte der Werte n. Man dividiere nun sämtliche a durch a_m, sämtliche b durch b_n usw. und setze

$$\frac{a_m x}{n_z} = \xi, \qquad \frac{b_n y}{n_z} = \eta, \qquad \frac{c_s z}{n_z} = \zeta, \qquad \ldots;$$

die Gleichungen (12ª) nehmen dann die Form an

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{a_m}\xi + \frac{b_1}{b_n}\eta + \frac{c_1}{c_s}\zeta + \cdots - \frac{n_1}{n_z} = v_1' \\ &\frac{a_2}{a_m}\xi + \frac{b_2}{b_n}\eta + \frac{c_2}{c_s}\zeta + \cdots - \frac{n_2}{n_z} = v_2' \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{15}$$

Es entstehen also wieder Gleichungen von der Form (12ª), deren Koeffizienten aber sämtlich zwischen den Grenzen ± 1 liegen.

Man nehme jetzt an, daß die Gleichungen (12ª) bereits die in der eben erläuterten Weise transformierten oder homogen gemachten Bedingungsgleichungen darstellen. Um dann die Koeffizienten der Normalgleichungen (14) zu erhalten, kann man sich einer Produktentafel bedienen; indessen ist es notwendig, die Richtigkeit der Endresultate zu prüfen. Zu diesem Zwecke bildet man die Summen

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 + c_1 + \cdots + n_1 = s_1 \\ &a_2 + b_2 + c_2 + \cdots + n_2 = s_2 \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{16}$$

und ferner

$$\begin{aligned} &a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots = [as] \\ &b_1 s_1 + b_2 s_2 + \cdots = [bs] \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots = [ns] \\ &n_1^2 + n_2^2 + \cdots = [nn] \end{aligned} \tag{17}$$

Wenn man jetzt die erste der Gleichungen (16) mit a_1, die zweite mit a_2, ... multipliziert und dann alle Gleichungen addiert, wenn man ferner die erste der Glei-

*) Ist nämlich ε_1 der mittlere Fehler von n_1 und ε der m. F. der Gewichtseinheit, so ist $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_1}}$; folglich ist der m. F. von $n_1\sqrt{p_1}$ gleich $\varepsilon_1\sqrt{p_1} = \varepsilon$. Ebenso ist der m. F. von $n_2\sqrt{p_2}$ gleich ε, usw.

chungen (16) mit b_1, die zweite mit b_2, ... multipliziert und wieder alle Gleichungen addiert usw., so erhält man

$$(18)\qquad \begin{array}{l} [aa] + [ab] + [ac] + \cdots + [an] = [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] + \cdots + [bn] = [bs] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [an] + [bn] + [cn] + \cdots + [nn] = [ns] \end{array}$$

Sind also die berechneten Werte $[aa]$, $[ab]$, ..., $[nn]$ fehlerfrei, so müssen sie die Gleichungen (18) befriedigen.

Zur Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen kann man auch eine Quadrattafel benutzen. Für die Anwendung der letzteren ist zu berücksichtigen, daß beispielsweise

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$$

gesetzt werden kann und demnach, wenn in Übereinstimmung mit der vorhin angewandten Bezeichnung

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots = [(a+b)^2]$$

gesetzt wird,

$$(18^a)\qquad [ab] = \tfrac{1}{2}\{[(a+b)^2] - [aa] - [bb]\}$$

ist. Man bilde nun die folgenden Quadratsummen:

$$\begin{array}{rrrrr} [aa], & [(a+b)^2], & [(a+c)^2], & \ldots, & [(a+n)^2] \\ & [bb], & [(b+c)^2], & \ldots, & [(b+n)^2] \\ & & [cc], & \ldots, & [(c+n)^2] \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & [nn] \end{array}$$

Außerdem berechne man

$$s_1^2 + s_2^2 + \cdots = [ss]$$

Um eine Kontrollformel für die Quadratsummen zu erhalten, erhebe man die Gleichungen (16) ins Quadrat, addiere sie dann und mache hierauf von der Gleichung (18^a) und den dieser analogen Gleichungen Gebrauch. Bedeutet m die Anzahl der Unbekannten, so ergibt sich

$$(19)\qquad \begin{array}{l} [ss] + (m-1)\{[aa] + [bb] + [cc] + \cdots + [nn]\} \\ \quad = [(a+b)^2] + [(a+c)^2] + \cdots + [(a+n)^2] \\ \qquad + [(b+c)^2] + \cdots + [(b+n)^2] \\ \qquad + \cdots \end{array}$$

Genügen die für die Quadratsummen gefundenen Werte dieser Gleichung, so wendet man die Formel (18^a) und die ihr analogen an und erhält damit die gesuchten Koeffizienten $[ab]$, $[ac]$, ..., $[an]$, $[bc]$, ... $[bn]$, ... Zum Schluß bilde man noch die Summe

$$(20)\qquad \begin{array}{l} S = [ab] + [ac] + \cdots + [an] \\ \quad + [bc] + \cdots + [bn] \\ \quad + \cdots \end{array}$$

und hat dann zur Kontrolle der Berechnung die durch Summierung der ins Quadrat erhobenen Gleichungen (16) entstehende Formel

$$(21)\qquad 2S = [ss] - \{[aa] + [bb] + \cdots + [nn]\}$$

8. Auflösung der Normalgleichungen. Mittlere Fehler der Unbekannten. Bei den in der sphärischen Astronomie vorkommenden Aufgaben handelt es sich gewöhnlich um Normalgleichungen mit 2, 3 oder 4 Unbekannten. Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt nach demselben Prinzip; aus didaktischen Gründen soll aber die Auflösung der Normalgleichungen mit 3 Unbekannten voraufgestellt werden.

I. Normalgleichungen mit 3 Unbekannten. Die Normalgleichungen seien

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [an] \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bn] \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cn] \end{aligned} \tag{22}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{[ab]}{[aa]}$ und subtrahiert das Produkt von der zweiten Gleichung, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} = [bb]_1, \qquad [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} = [bc]_1, \qquad [bn] - \frac{[ab][an]}{[aa]} = [bn]_1 \tag{22^1}$$

gesetzt wird,

$$[bb]_1 y + [bc]_1 z = [bn]_1 \tag{22^2}$$

Multipliziert man die erste Gleichung (22) mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ und subtrahiert das Produkt von der dritten Gleichung (22), so folgt, wenn

$$[cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} = [cc]_1, \qquad [cn] - \frac{[ac][an]}{[aa]} = [cn]_1 \tag{22^3}$$

gesetzt und die zweite Gleichung (22^1) berücksichtigt wird,

$$[bc]_1 y + [cc]_1 z = [cn]_1 \tag{22^4}$$

Wenn man jetzt das Produkt aus (22^2) und $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$ von (22^4) subtrahiert und

$$[cc]_1 - \frac{[bc]_1[bc]_1}{[bb]_1} = [cc]_2, \qquad [cn]_1 - \frac{[bc]_1[bn]_1}{[bb]_1} = [cn]_2 \tag{22^5}$$

setzt, so erhält man die zur Bestimmung von z dienende Gleichung

$$[cc]_2 z = [cn]_2 \tag{22^6}$$

Es läßt sich nun zeigen (vergl. *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung, II. Band, S. 353 ff.), daß der Koeffizient $[cc]_2$ gleichzeitig das Gewicht von z angibt; wenn also ε den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet, so ergibt sich für den mittleren Fehler von z

$$E(z) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[cc]_2}} \tag{22^7}$$

Die zur Berechnung von ε dienende Gleichung soll hier ohne Beweis mitgeteilt werden; ihre Ableitung findet man bei *Oppolzer*, a. a. O., S. 336 ff. Man bilde zunächst

$$[nn]_1 = [nn] - \frac{[an][an]}{[aa]}, \qquad [nn]_2 = [nn]_1 - \frac{[bn]_1[bn]_1}{[bb]_1}, \qquad [nn]_3 = [nn]_2 - \frac{[cn]_2[cn]_2}{[cc]_2} \tag{22^8}$$

Bedeutet dann m die Anzahl der Bedingungsgleichungen, so hat man

$$(22^9) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_3}{m-3}}$$

Zur Kontrolle der vorigen Rechnungen bilde man die Summen

$$(23) \qquad \begin{aligned} [as] &= [aa]+[ab]+[ac]+[an] \\ [bs] &= [ab]+[bb]+[bc]+[bn] \\ [cs] &= [ac]+[bc]+[cc]+[cn] \\ [ns] &= [an]+[bn]+[cn]+[nn] \end{aligned}$$

und ferner

$$(23^1) \quad [bs]_1 = [bs] - \frac{[ab][as]}{[aa]}, \quad [cs]_1 = [cs] - \frac{[ac][as]}{[aa]}, \quad [cs]_2 = [cs]_1 - \frac{[bc]_1[bs]_1}{[bb]_1},$$

$$(23^2) \quad [ns]_1 = [ns] - \frac{[an][as]}{[aa]}, \quad [ns]_2 = [ns]_1 - \frac{[bn]_1[bs]_1}{[bb]_1}, \quad [ns]_3 = [ns]_2 - \frac{[cn]_2[cs]_2}{[cc]_2};$$

ist nun alles richtig gerechnet, so müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein

$$(23^3) \qquad \begin{aligned} [bs]_1 &= [bb]_1 + [bc]_1 + [bn]_1 \\ [cs]_2 &= [cc]_2 + [cn]_2 \\ [nn]_3 &= [ns]_3 \end{aligned}$$

Die Anwendung der vorhin angegebenen Formeln gestaltet sich sehr einfach, wenn man sich des folgenden aus den Abteilungen A und B bestehenden Schemas bedient; um die nachstehende Erläuterung desselben zu vereinfachen, sind die Kolumnen in A mit X, Y, Z, N, S, in B mit I, II, III und die Zeilen mit arabischen Ziffern bezeichnet worden.

A.

	X	Y	Z	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log[aa]$	$\log[ab]$	$\log[ac]$	$\log[an]$	$\log[as]$
3		$[bb]$	$[bc]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bc]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log[bb]_1$	$\log[bc]_1$	$\log[bn]_1$	$\log[bs]_1$
7			$[cc]$	$[cn]$	$[cs]$
8	$\log\frac{[ac]}{[aa]}$		$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
9			$[cc]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
10	$\log\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
11			$[cc]_2$	$[cn]_2$	$[cs]_2$
12			$\log[cc]_2$	$\log[cn]_2$	$\log[cs]_2$

B.

	I	*II*	*III*
1		$[nn]$	$[ns]$
2	$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$\frac{[an]}{[aa]}[an]$	$\frac{[an]}{[aa]}[as]$
3		$[nn]_1$	$[ns]_1$
4	$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
5		$[nn]_2$	$[ns]_2$
6	$\log \frac{[cn]_2}{[cc]_2}$	$\frac{[cn]_2}{[cc]_2}[cn]_2$	$\frac{[cn]_2}{[cc]_2}[cs]_2$
7		$[nn]_3$	$[ns]_3$
8		$\log [nn]_3$	

Zeile 1 der Abteilung A enthält die Zahlenwerte von $[aa]$, ..., $[as]$, Zeile 2 ihre Logarithmen; Zeile 3 enthält die Zahlenwerte von $[bb]$, ..., $[bs]$. In X 4 setzt man den $\log \frac{[ab]}{[aa]}$ und daneben die Zahlenwerte von $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$, ..., $\frac{[ab]}{[aa]}[as]$. Durch Subtraktion der in den Zeilen 3 und 4 übereinander stehenden Zahlen ergeben sich, den Gleichungen (22^1) und (23^1) zufolge, die Werte von $[bb]_1$, ..., $[bs]_1$; diese setzt man in die fünfte Zeile und ihre Logarithmen in die darauf folgende. In die siebente Zeile setze man $[cc]$, $[cn]$, $[cs]$ und in X, 8 den $\log \frac{[ac]}{[aa]}$; sodann bilde man die Produkte $\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$, ..., $\frac{[as]}{[aa]}[as]$. Zeile 9 enthält die durch die Gleichungen (22^3) und (23^1) definierten Differenzen $[cc]_1$, ..., $[cs]_1$. In X, 10 wird der $\log \frac{[bc]_1}{[bb]_1}$ angegeben; auf gleicher Höhe stehen die Produkte $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$, ..., $\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$. Zeile 11 enthält die durch die Gleichungen (22^5) und (23^1) definierten Differenzen $[cc]_2$, ..., $[cs]_2$. Mit Hilfe von $[cc]_2$ und $[cn]_2$ läßt sich dann der Gleichung (22^6) zufolge x bestimmen.

Die Abteilung B dient zur Berechnung von $[nn]_3$ und $[ns]_3$, unter Zuhilfenahme der Gleichungen (22^8) und (23^2). Hat man $[nn]_3$ gefunden, so läßt sich aus (22^9) der mittlere Fehler der Gewichtseinheit (ε) bestimmen und endlich aus (22^7) $E(x)$, d. h. der mittlere Fehler von x. Das Produkt aus $E(x)$ und 0.6745 gibt, der Gleichung (5) zufolge, den wahrscheinlichen Fehler von x.

Um den Wert von y und seinen mittleren Fehler zu finden, gibt man den Normalgleichungen die Anordnung

$$\begin{aligned} [aa]x + [ac]z + [ab]y &= [an] \\ [ac]x + [cc]z + [bc]y &= [cn] \\ [ab]x + [bc]z + [bb]y &= [bn], \end{aligned}$$

wo also wieder die symmetrisch zu einer Diagonale gelegenen Koeffizienten der Unbekannten einander gleich sind. Die Gleichungen werden sodann nach demselben Verfahren aufgelöst, welches für die ursprüngliche Anordnung der Gleichungen angewandt wurde. Man hat also an Stelle der Abteilung A des obigen Schemas die folgende zu benutzen, in der lauter aus der vorhergehenden Rechnung bereits bekannte Größen vorkommen, mit Ausnahme der in Zeile 10 stehenden Produkte und der in Zeile 11 enthaltenen Differenzen

$$[bb]_2 = [bb]_1 - \frac{[bc]_1}{[cc]_1}[bc]_1, \quad \ldots, \quad [bs]_2 = [bs]_1 - \frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cs]_1$$

	X	Z	Y	N	S
1	$[aa]$	$[ac]$	$[ab]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ac]$	$\log [ab]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[cc]$	$[bc]$	$[cn]$	$[cs]$
4	$\log \frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
5		$[cc]_1$	$[bc]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
6		$\log [cc]_1$	$\log [bc]_1$	$\log [cn]_1$	$\log [cs]_1$
7			$[bb]$	$[bn]$	$[bs]$
8	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$		$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
9			$[bb]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
10	$\log \frac{[bc]_1}{[cc]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[cc]_1}[cs]_1$
11			$[bb]_2$	$[bn]_2$	$[bs]_2$
12			$\log [bb]_2$	$\log [bn]_2$	

Zur Kontrolle der Rechnung dienen die Formeln

$$[cs]_1 = [cc]_1 + [bc]_1 + [cn]_1$$
$$[bs]_2 = [bb]_2 + [bn]_2$$

Der Wert von y folgt aus der Gleichung

$$[bb]_2 y = [bn]_2,$$

wobei $[bb]_2$ auch das Gewicht von y angibt. Mit Benutzung des durch die vorhergehende Rechnung bereits gefundenen mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (ε) erhält man als mittleren Fehler von y

$$E(y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb]_2}}$$

Jetzt ist noch x, bzw. der mittlere Fehler von x zu bestimmen. Zu diesem Zwecke schreibe man die Normalgleichungen, wie folgt:

$$[cc]x + [bc]y + [ac]x = [cn]$$
$$[bc]x + [bb]y + [ab]x = [bn]$$
$$[ac]x + [ab]y + [aa]x = [an]$$

und behandle diese in analoger Weise, wie es in der Abteilung A mit den Gleichungen (22) geschehen ist. Die Kolumnen folgen sich also jetzt in der Ordnung Z, Y, X, N, S. Multipliziert man den Koeffizienten, welcher dann in X, 11 erhalten wird, mit x und setzt das Produkt der in N, 11 auftretenden Zahl gleich, so hat man die zur Bestimmung von x dienende Gleichung. Der mittlere Fehler des für x erhaltenen Wertes ist gleich dem obigen ε, dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Koeffizienten von x.

Auf S. 19 wurde erwähnt, daß man ein gegebenes System von Bedingungsgleichungen unter gewissen Verhältnissen so transformiert, daß die Koeffizienten der neuen Gleichungen ihrem absoluten Betrage nach gleich oder kleiner als 1 sind. Die ursprünglichen, aber mit der Quadratwurzel aus dem zugehörigen Gewicht bereits multiplizierten Bedingungsgleichungen seien nun

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\mathfrak{x} + \beta_1\mathfrak{y} + \zeta_1\mathfrak{z} + \cdots - \nu_1 = v_1\\
&\alpha_2\mathfrak{x} + \beta_2\mathfrak{y} + \zeta_2\mathfrak{z} + \cdots - \nu_2 = v_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \nu_2, \ldots$ beliebige Werte haben mögen. Bedeuten $\alpha_m, \beta_n, \zeta_s, \ldots$ die größten unter den in diesen Gleichungen vorkommenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \zeta, \ldots$, und ist ν_z der größte Wert unter den ν, so lauten die nach S. 19 transformierten Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} + \frac{\beta_1}{\beta_n}\frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} + \frac{\zeta_1}{\zeta_s}\frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} + \cdots - \frac{\nu_1}{\nu_z} = v'_1\\
&\frac{\alpha_2}{\alpha_m}\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} + \frac{\beta_2}{\beta_n}\frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} + \frac{\zeta_2}{\zeta_s}\frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} + \cdots - \frac{\nu_2}{\nu_z} = v'_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

Führt man hierin die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{\alpha_m} = a_1, \quad \frac{\beta_1}{\beta_n} = b_1, \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_s} = c_1, \quad \ldots, \quad \frac{\nu_1}{\nu_z} = n_1\\
&\frac{\alpha_2}{\alpha_m} = a_2, \quad \frac{\beta_2}{\beta_n} = b_2, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_s} = c_2, \quad \ldots, \quad \frac{\nu_2}{\nu_z} = n_2\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\\
&\frac{\alpha_m\mathfrak{x}}{\nu_z} = x, \quad \frac{\beta_n\mathfrak{y}}{\nu_z} = y, \quad \frac{\zeta_s\mathfrak{z}}{\nu_z} = z, \quad \ldots,
\end{aligned}$$

so erhält man Gleichungen von der Form (12a). Aus letzteren lassen sich in der vorhin angegebenen Weise die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ und ihre mittleren Fehler ableiten. Multipliziert man die für $x, y, z, \ldots$ und ihre mittleren Fehler gefundenen Werte mit ν_z und dividiert diese Produkte durch α_m, bzw. β_n, bzw. $\zeta_s, \ldots$, so erhält man die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ und ihre mittleren Fehler.

II. Normalgleichungen mit 2 Unbekannten. Nach der ausführlichen Darstellung des bei der Auflösung der Normalgleichungen mit 3 Unbekannten einzuschlagenden Verfahrens bedarf das folgende für zwei Normalgleichungen geltende Schema keiner Erläuterung mehr. Die Gleichungen mögen lauten:

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y &= [an]\\
[ab]x + [bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

Man bilde zunächst die Summen:

$$[aa] + [ab] + [an] = [as]$$
$$[ab] + [bb] + [bn] = [bs]$$

Sodann wende man das Schema an:

A′.

	X	Y	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ab]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[bb]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log [bb]_1$	$\log [bn]_1$	$\log [bs]_1$

B′.

I	II	III
$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$[nn]$ $\frac{[an]}{[aa]}[an]$	$[ns]$ $\frac{[an]}{[aa]}[as]$
$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$[nn]_1$ $\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$[ns]_1$ $\frac{[bn]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
	$[nn]_2$ $\log [nn]_2$	$[ns]_2$

Kontrollformeln:

$$[bs]_1 = [bb]_1 + [bn]_1$$
$$[nn]_2 = [ns]_2$$

Für den wahrscheinlichsten Wert von y, den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit und den mittleren Fehler von y erhält man, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet,

$$y = \frac{[bn]_1}{[bb]_1}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_2}{m-2}}, \qquad E(y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb]_1}}$$

Um x zu finden, schreibe man die Normalgleichungen wie folgt:

$$[bb]y + [ab]x = [bn]$$
$$[ab]y + [aa]x = [an]$$

und wende an Stelle der Abteilung A′ des vorigen Schemas eine neue an, in der die Kolumnen in der Ordnung Y, X, N, S aufeinander folgen. Setzt man das Produkt aus dem dann in X, 5 erhaltenen Koeffizienten und x gleich der in N, 5 auftretenden Zahl, so hat man damit die zur Bestimmung von x dienende Gleichung.

Der Quotient aus dem vorhin gefundenen ε und der Quadratwurzel des Koeffizienten von x gibt den mittleren Fehler von x.

III. Normalgleichungen mit 4 Unbekannten.

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t = [an]$$
$$[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t = [bn]$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cd]t = [cn]$$
$$[ad]x + [bd]y + [cd]z + [dd]t = [dn]$$

Man bilde die Summen:

$$[aa] + [ab] + [ac] + ad] + [an] = [as]$$
$$[ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [bn] = [bs]$$
$$[ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [cn] = [cs]$$
$$[ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [dn] = [ds]$$

Hierauf wende man das Schema an:

A″.

	X	Y	Z	T	N	S
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[an]$	$[as]$
2	$\log [aa]$	$\log [ab]$	$\log [ac]$	$\log [ad]$	$\log [an]$	$\log [as]$
3		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bn]$	$[bs]$
4	$\log \frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[as]$
5		$[bb]_1$	$[bc]_1$	$[bd]_1$	$[bn]_1$	$[bs]_1$
6		$\log [bb]_1$	$\log [bc]_1$	$\log [bd]_1$	$\log [bn]_1$	$\log [bs]_1$
7			$[cc]$	$[cd]$	$[cn]$	$[cs]$
8	$\log \frac{[ac]}{[aa]}$		$\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$
9			$[cc]_1$	$[cd]_1$	$[cn]_1$	$[cs]_1$
10	$\log \frac{[bc]_1}{[bb]_1}$		$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bd]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
11			$[cc]_2$	$[cd]_2$	$[cn]_2$	$[cs]_2$
12			$\log [cc]_2$	$\log [cd]_2$	$\log [cn]_2$	$\log [cs]_2$
13				$[dd]$	$[dn]$	$[ds]$
14	$\log \frac{[ad]}{[aa]}$			$\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[an]$	$\frac{[ad]}{[aa]}[as]$
15				$[dd]_1$	$[dn]_1$	$[ds]_1$
16	$\log \frac{[bd]_1}{[bb]_1}$			$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bd]_1$	$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bn]_1$	$\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bs]_1$
17				$[dd]_2$	$[dn]_2$	$[ds]_2$
18	$\log \frac{[cd]_2}{[cc]_2}$			$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cd]_2$	$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cn]_2$	$\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cs]_2$
19				$[dd]_3$	$[dn]_3$	$[ds]_3$
20				$\log [dd]_3$	$\log [dn]_3$	$\log [ds]_3$

B″.

I	*II*	*III*
$\log \frac{[an]}{[aa]}$	$\frac{[nn]}{[an]}[an]$	$\frac{[ns]}{[an]}[as]$
$\log \frac{[bn]_1}{[bb]_1}$	$\frac{[nn]_1}{[bn]_1}[bn]_1$	$\frac{[ns]_1}{[bn]_1}[bs]_1$
$\log \frac{[cn]_2}{[cc]_2}$	$\frac{[nn]_2}{[cn]_2}[cn]_2$	$\frac{[ns]_2}{[cn]_2}[cs]_2$
$\log \frac{[dn]_3}{[dd]_3}$	$\frac{[nn]_3}{[dn]_3}[dn]_3$	$\frac{[ns]_3}{[dn]_3}[ds]_3$
	$[nn]_4$ $\log [nn]_4$	$[ns]_4$

Kontrollformeln:

$$[bs]_1 = [bb]_1 + [bc]_1 + [bd]_1 + [bn]_1$$
$$[cs]_2 = [cc]_2 + [cd]_2 + [cn]_2$$
$$[ds]_3 = [dd]_3 + [dn]_3$$
$$[ns]_4 = [nn]_4$$

Für den wahrscheinlichsten Wert von t, den mittleren Fehler ε der Gewichtseinheit und den mittleren Fehler von t ergibt sich, wenn m die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet,

$$t = \frac{[dn]_3}{[dd]_3}, \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{[nn]_4}{m-4}}, \qquad E(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[dd]_3}}$$

Um den wahrscheinlichsten Wert von x zu finden, gebe man den Normalgleichungen die Anordnung

$$[aa]x + [ab]y + [ad]t + [ac]z = [an]$$
$$[ab]x + [bb]y + [bd]t + [bc]z = [bn]$$
$$[ad]x + [bd]y + [dd]t + [cd]z = [dn]$$
$$[ac]x + [bc]y + [cd]t + [cc]z = [cn]$$

Die Auflösung dieser Gleichungen erfolgt nach demselben Prinzip, welches bei der ursprünglichen Anordnung angewandt wurde und durch die Abteilung A″ des vorigen Schemas hinlänglich klar gestellt worden ist. Man hat also zunächst den Kolumnen die Reihenfolge *X*, *Y*, *T*, *Z*, *N*, *S* zu geben; setzt man dann das Produkt aus dem in *Z*, 19 erhaltenen Koeffizienten und x der in *N*, 19 gefundenen Zahl gleich, so ist damit die zur Bestimmung von x dienende Gleichung gewonnen. Der Quotient aus dem vorhin gefundenen ε und der Quadratwurzel des Koeffizienten von x gibt den mittleren Fehler von x.

Zur Bestimmung von x kann man die Normalgleichungen in folgender Weise anordnen:

$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [bd]y + [ad]x &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [bc]y + [ac]x &= [cn]\\
[bd]t + [bc]z + [bb]y + [ab]x &= [bn]\\
[ad]t + [ac]z + [ab]y + [aa]x &= [an]
\end{aligned}$$

Hat man hieraus x gefunden, so setze man, um y zu bestimmen,

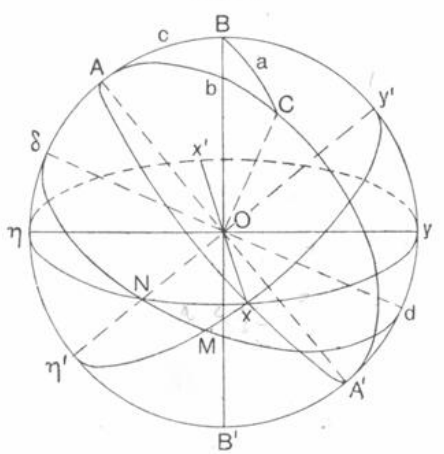
$$\begin{aligned}
[dd]t + [cd]z + [ad]x + [bd]y &= [dn]\\
[cd]t + [cc]z + [ac]x + [bc]y &= [cn]\\
[ad]t + [ac]z + [aa]x + [ab]y &= [an]\\
[bd]t + [bc]z + [ab]x + [bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

Kapitel III.

Sphärische Trigonometrie.

9. Einleitung. Man beschreibe um den Punkt O (Fig. 1) eine Kugel mit dem Radius 1 und lege durch O die Ebenen OAB, OAC, OBC; die Bögen AB, AC, BC der größten Kreise, in denen die Kugelfläche von den genannten Ebenen geschnitten wird, bilden dann ein sphärisches Dreieck und werden als Seiten dieses Dreiecks bezeichnet. Da der Radius der Kugel als Längeneinheit gewählt wurde, so ist AB gleich dem Winkel AOB, desgleichen ist AC gleich dem Winkel AOC und BC gleich dem Winkel BOC. Unter dem Winkel, den zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks z. B. AB und AC miteinander bilden, versteht man den Winkel zwischen den in A an AB und AC gezogenen Tangenten; derselbe ist also gleich dem Winkel, den die Ebenen AOB und AOC miteinander bilden.

Fig. 1.



Errichtet man in O senkrecht zu der Ebene AOB eine Gerade, und sind x und x' die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Kugelfläche, so ist der von O aus gesehene Winkelabstand zwischen x, bzw. x' und einem beliebigen Punkte des größten Kreises $ABA'A$ gleich 90°. Die beiden Punkte der Sphäre nun, welche von allen Punkten eines dieser Sphäre angehörigen größten Kreises um 90° abstehen, werden die Pole des betreffenden Kreises genannt; x und x' sind also die Pole des Kreises $ABA'A$. Man lege jetzt durch Ox eine Ebene senkrecht zu OB und eine zweite senkrecht zu OA, diese Ebenen schneiden die Kugelfläche in den größten Kreisen

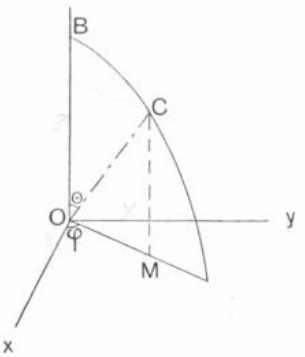
ηxy, bzw. $\eta' xy'$. Die Pole des Kreises ηxy sind B und B', diejenigen des Kreises $\eta' xy'$ sind A und A'; da aber die Durchschnittspunkte x und x' dieser größten Kreise die Pole des größten Kreises $ABA'A$ darstellen, so hat man den Satz: Bezeichnet man mit P und Q Pole zweier größten Kreise, so sind die Durchschnittspunkte dieser größten Kreise gleichzeitig die Pole des durch P und Q gelegten größten Kreises.

Der sphärische Winkel yxy' ist der Definition nach gleich dem Winkel zwischen den Ebenen Oxy und Oxy'; da nun Oy und Oy' senkrecht zu der Durchschnittslinie Ox der eben genannten Ebenen sind, so ist der Winkel zwischen diesen Ebenen gleich dem Winkel $y'Oy$ oder, da $Oy = Oy' = 1$ angenommen wurde, gleich dem Bogen $y'y$. Berücksichtigt man jetzt noch, daß $y'y$ einen Bogen des größten Kreises darstellt, welcher den Scheitel des Winkels yxy' zum Pol hat, so erhält man den Satz: Ein sphärischer Winkel oder der Winkel zwischen zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem Bogen, welchen die Schenkel des Winkels auf dem größten Kreise abschneiden, dessen Pol der Scheitel des Winkels ist. Dieser Satz läßt sich durch einen anderen ersetzen. Da OB senkrecht zu Oy, und OA senkrecht zu Oy' ist, so folgt zunächst $yy' = AB$. Wenn man sich nun zwei bewegliche Punkte denkt, die beide von dem Scheitel des Winkels yxy' ausgehen, und von denen der eine den Schenkel xy und der andere den Schenkel xy' durchläuft, so ist die Bewegungsrichtung des ersteren Punktes, gesehen von dem Pol A aus, gleich derjenigen des zweiten Punktes, gesehen von dem Pol B aus. Bezeichnet man in einem solchen Falle A und B als gleichnamige Pole, so hat man den Satz: Ein sphärischer Winkel ist gleich dem Abstand der gleichnamigen Pole seiner Schenkel.

Mit Hilfe des zuletzt bewiesenen Satzes lassen sich aus den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks ABC diejenigen des Dreiecks NMx bestimmen, dessen Ecken die Durchschnittspunkte der zu den Polen A, B, C gehörigen größten Kreise $\eta' xy'$, ηxy und δNd bilden. Man setze $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Da B und C gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels xNM sind, so ist dieser Winkel gleich dem Bogen $BC = a$; in derselben Weise findet man, daß der Winkel MxN gleich dem Bogen $AB = c$ ist. Gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels NMx sind C und der dem A gegenüberliegende Pol A'; da nun $CA' = 180^\circ - AC = 180^\circ - b$ ist, so folgt $NMx = 180^\circ - b$. Um die Beziehungen zwischen den Seiten des Dreiecks NMx und den Winkeln des Dreiecks ABC zu finden, gehe man von dem oben bewiesenen Satze aus, wonach N als Durchschnittspunkt der größten Kreise ηNy und δNd, einen Pol des durch die Pole B und C gehenden größten Kreises darstellt, ferner M einen Pol des durch die Pole A und C, und x einen Pol des durch die Pole A und B gehenden größten Kreises bedeutet. Nun sind x und M gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels BAC; bezeichnet man diesen Winkel mit A, so ist also der Bogen xM gleich A. Ebenso findet man, daß, wenn der Winkel BCA gleich C gesetzt wird, der Bogen $NM = C$ ist. Ferner ist der Winkel $ABC = 180^\circ - y'BC$ oder, wenn man den Winkel ABC mit B bezeichnet, $y'BC = 180^\circ - B$; da nun x und N gleichnamige Pole der Schenkel des Winkels $y'BC$ sind, so folgt $Nx = y'BC$, also $Nx = 180^\circ - B$.

10. Fundamentalformeln. Die drei zueinander senkrechten Geraden Ox, Oy und OB in Fig. 1 sollen nun zu Koordinatenachsen gewählt werden. Es sei φ der Winkel, den die Projektion OM (Fig. 2) des Radiusvektors OC auf die xy-Ebene mit Ox bildet, und zwar werde φ von Ox aus in der Richtung nach Oy von 0° bis 360° gezählt; ferner möge Θ den von OB aus von 0° bis 180° gezählten Winkel BOC bezeichnen. Da der Voraussetzung nach $OC = 1$ ist, so erhält man, wenn x, y, z die auf die Achsen Ox, Oy, OB bezogenen Koordinaten von C bedeuten,

Fig. 2.



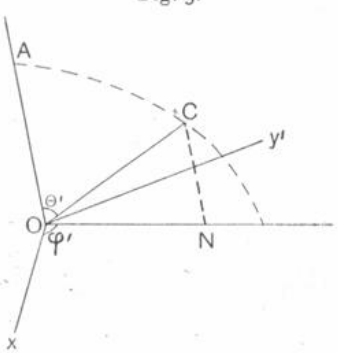
$$x = \sin\Theta\cos\varphi, \quad y = \sin\Theta\sin\varphi, \quad z = \cos\Theta$$

Nun lehrt die Fig. 1, daß der nach § 9 mit B bezeichnete sphärische Winkel ABC gleich der Summe der Winkel ABx und xBC ist; da der Winkel $ABx = 90°$, und der Winkel $xBC = \varphi$ ist, so ergibt sich also $\varphi = -(90° - B)$. Ferner ist Θ gleich der in Fig. 1 mit a bezeichneten Seite BC des sphärischen Dreiecks ABC. Die vorigen Gleichungen werden demnach

$$(1) \qquad x = \sin a \sin B, \qquad y = -\sin a \cos B, \qquad z = \cos a$$

Wählt man jetzt die drei zueinander senkrecht stehenden Geraden Ox, Oy', OA in Fig. 1 zu Koordinatenachsen, und sind x', y' und z' die auf diese Achsen bezogenen Koordinaten von C, so erhält man, wenn ON (Fig. 3) die Projektion von OC auf die Ebene Oxy' bedeutet, und die Winkel $xON = \varphi'$, $AOC = \Theta'$ gesetzt werden,

Fig. 3.



$$x' = \sin\Theta'\cos\varphi', \quad y' = \sin\Theta'\sin\varphi', \quad z' = \cos\Theta'$$

In dem sphärischen Dreiecke ABC (Fig. 1) ist nun der in § 9 mit A bezeichnete Winkel BAC gleich der Differenz der Winkel xAB und xAC. Der Winkel xAB ist aber gleich 90°, und der Winkel xAC ist identisch mit dem vorhin mit φ' bezeichneten Winkel. Man hat also $A = 90° - \varphi'$. Berücksichtigt man noch, daß Θ' gleich der oben mit b bezeichneten Seite AC des sphärischen Dreiecks ABC ist, so werden die drei letzten Gleichungen

$$(2) \qquad x' = \sin b \sin A, \qquad y' = \sin b \cos A, \qquad z' = \cos b$$

Nun ist das Koordinatensystem x', y', z' aus x, y, z entstanden, indem man letzteres um die x-Axe usw. um den Winkel yOy' gedreht hat; dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel BOA in Fig. 1, also auch gleich dem Bogen $AB = c$. Die bekannten Formeln zur Verwandlung rechtwinkeliger Koordinaten geben demnach

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y'\cos c - z'\sin c \\ z &= y'\sin c + z'\cos c \end{aligned}$$

Substituiert man hierin die für die Koordinaten gefundenen Werte (1) und (2), so erhält man die folgenden Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie

$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \end{aligned} \tag{3}$$

Man wende jetzt diese Formeln auf das in Fig. 1 gezeichnete Dreieck xMN an und betrachte xM als Seite a, Nx als Seite b und NM als Seite c. Die erste Gleichung (3) gibt dann

$$\sin xM \sin NMx = \sin Nx \sin xNM$$

Wie aber oben gezeigt wurde, ist $xM = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $NM = C$, ferner $xNM = a$, $NMx = 180^\circ - b$ und $MxN = c$. Die vorige Gleichung wird demnach

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

d. h. sie wird mit der ersten Gleichung (3) identisch. Dagegen erhält man aus den zwei letzten der Gleichungen (3)

$$\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \end{aligned} \tag{4}$$

In den Gleichungen (3) und (4) lassen sich noch die Buchstaben a, b, c und die ihnen entsprechenden A, B, C miteinander vertauschen; beispielsweise erhält man aus (3)

I
$$\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \\ \sin c \sin A &= \sin a \sin C \end{aligned}$$

II
$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C \end{aligned}$$

III
$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (4)

IV
$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned}$$

und aus der ersten Gleichung (4)

V
$$\begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen (I) geben

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Ersetzt man demgemäß in der letzten der Gleichungen (II) $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ durch $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, so erhält man wieder die erste der Gleichungen (4), bzw. V.

11. Transformation der Fundamentalformeln, Gleichungen von Gauß und Napier. Mit Hilfe der bis jetzt gefundenen Formeln lassen sich andere ableiten, in denen die halben Seiten, bzw. Winkel auftreten. Aus der ersten Gleichung III ergibt sich zunächst

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Hieraus folgt

$$(5)\quad \begin{aligned} \sin^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b + c) \sin \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\sin b \sin c} \\ \cos^2 \tfrac{1}{2} A &= \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b + c) \sin \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

oder, wenn

$$a + b + c = 2s$$

gesetzt wird,

$$(6)\qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}$$

In derselben Weise erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung III oder einfach durch zyklische Vertauschung der Buchstaben A, B, C, a, b, c in den Gleichungen (6)

$$(7)\qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}$$

$$(8)\qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}, \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}$$

Durch Division der Gleichungen (6) ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}$$

Dividiert man auch die Gleichungen (7), bzw. (8) durcheinander und setzt

$$(9)\qquad k = +\sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}},$$

so wird

$$(10)\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \pm \frac{k}{\sin(s-a)}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \pm \frac{k}{\sin(s-b)}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \pm \frac{k}{\sin(s-c)}$$

Was die doppelten Vorzeichen betrifft, so folgt zunächst aus der Identität

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A}{\sin a},$$

wenn man für $\cos^2 \frac{1}{2}A$ seinen Wert aus (6) und für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}A$ die beiden in (10) gegebenen Werte substituiert,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \pm \frac{2k \sin s}{\sin a \sin b \sin c}$$

Denselben Ausdruck erhält man für $\frac{\sin B}{\sin b}$ und $\frac{\sin C}{\sin c}$. Nach (I) ist aber

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Wenn also in einer der Formeln (10) das obere Vorzeichen gewählt wird, so ist auch in den beiden anderen das obere Vorzeichen anzuwenden; dieselbe Bemerkung gilt für das untere Vorzeichen. Ist nun u ein Wert von $\frac{1}{2}A$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = + \frac{k}{\sin(s-a)}$$

genügt, so genügt ihr auch der Wert $\frac{1}{2}A = u + \pi$; die diesen beiden Werten von $\frac{1}{2}A$ entsprechenden Werte von A sind $2u$ und $2\pi + 2u$, sind also als identisch zu betrachten. Läßt man dem u seine eben angegebene Bedeutung, so erhält man für die Werte von $\frac{1}{2}A$, welche der Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = - \frac{k}{\sin(s-a)}$$

genügen, $-u$ und $\pi - u$; die entsprechenden Werte von A sind $-2u$ und $2\pi - 2u$, fallen also praktisch in einen zusammen.

Man wende jetzt die aus (5) folgende Formel

$$(10^a) \qquad \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}$$

auf das Dreieck xMN in Fig. 1 an, und zwar bezeichne man mit a die Seite xM, mit b die Seite Nx, mit c die Seite NM, also mit A den Winkel xNM. Da, wie oben gezeigt, $xM = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $NM = C$ und $xNM = a$ ist, so folgt

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B - C) \sin \frac{1}{2}(A - 180^\circ + B + C)}{\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C) \sin \frac{1}{2}(180^\circ - B + C - A)}$$

oder, wenn man $\sin \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C) = \sin[180^\circ - \frac{1}{2}(A + 180^\circ - B + C)]$ und

$$A + B + C - 180^\circ = E$$

setzt, wo E der sphärische Exzeß des Dreiecks ABC genannt wird,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin \frac{1}{2}E}{\sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)} = \frac{\sin^2(A - \frac{1}{2}E) \sin \frac{1}{2}E}{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)}$$

Ganz ähnliche Gleichungen ergeben sich für $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}b$ und $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}c$. Wird nun

$$K = + \sqrt{\frac{\sin(A - \frac{1}{2}E) \sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)}{\sin \frac{1}{2}E}}$$

gesetzt, so erhält man

$$(11)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \pm\frac{\sin(A-\frac{1}{2}E)}{K},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \pm\frac{\sin(B-\frac{1}{2}E)}{K},\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \pm\frac{\sin(C-\frac{1}{2}E)}{K}$$

Bezüglich des Vorzeichens gilt dieselbe Regel wie bei den Gleichungen (10).

Aus den Gleichungen (7), (8) und (6) folgt

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B\cos^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin^2 s\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin^2 a\sin b\sin c} = \frac{\sin^2 s\sin^2\frac{1}{2}A}{\sin^2 a}$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B\sin^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin s\sin(s-a)\sin^2(s-b)}{\sin^2 a\sin b\sin c} = \frac{\sin^2(s-b)\cos^2\frac{1}{2}A}{\sin^2 a}$$

usw. Es wird also

$$\alpha)\ \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin s}{\sin a} \qquad \beta)\ \frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-c)}{\sin a}$$

$$\gamma)\ \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-a)}{\sin a} \qquad \delta)\ \frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \pm\frac{\sin(s-b)}{\sin a}$$

Das Produkt aus den Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ gibt

$$\frac{\sin B\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin A} = \pm\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin^2 a}$$

oder, mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung (8),

$$\frac{\sin B\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin A} = \pm\frac{\sin b\cos^2\frac{1}{2}C}{\sin a}$$

Da aber $\sin B:\sin A = \sin b:\sin a$ ist, so gilt nur das positive Vorzeichen. Demnach ist in $\alpha)$ und $\beta)$ gleichzeitig entweder das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden; dieselbe Regel gilt auch für $\gamma)$ und $\delta)$.

Der Quotient aus $\gamma)$ und $\alpha)$ ist

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \pm\frac{\sin(s-a)}{\sin s}$$

oder, unter Benutzung der Gleichung (9),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \pm\frac{k^2}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Aus den Gleichungen (10) folgt aber mit Berücksichtigung der für sie gefundenen Vorzeichenregel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{k^2}{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Somit darf man in den Gleichungen $\alpha)$ und $\gamma)$ gleichzeitig entweder nur das obere oder nur das untere Vorzeichen anwenden; dieselbe Regel gilt auch für $\beta)$ und $\delta)$. Wählt man nun in den Gleichungen $\alpha)$ bis $\delta)$ das obere Vorzeichen, so wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)}{\sin a},\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-b)}{\sin a}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin s}{\sin a},\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-a)}{\sin a}$$

Durch Addition und Subtraktion der nebeneinander stehenden Gleichungen ergibt sich, wenn noch auf die Bedeutung von s Rücksicht genommen wird,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)+\sin(s-b)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin s-\sin(s-a)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin(s-c)-\sin(s-b)}{\sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}a}$$
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin s+\sin(s-a)}{\sin a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A\\
\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A\\
\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A\\
\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A
\end{aligned} \tag{12}$$

Diese Gleichungen werden gewöhnlich als die *Gaußschen Gleichungen* bezeichnet; die französischen Autoren nennen sie die *Delambres*chen Gleichungen und verstehen unter den *Gaußschen* Gleichungen die unter (3) angegebenen.

Durch Division der Gleichungen (12) entstehen die sogenannten *Napiers*chen Analogien, nämlich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B+C) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-C) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+c) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a
\end{aligned} \tag{13}$$

12. Rechtwinkelige sphärische Dreiecke. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie werden besonders einfach, wenn einer der Winkel ein Rechter ist. Man nehme an, daß $A = 90^\circ$ sei, und bezeichne a, also die Hypotenuse, mit h; ferner setze man $b = c'$, $B = C'$. Aus den Gleichungen (3) folgt dann

$$\begin{aligned}
\sin h\sin C' &= \sin c'\\
\sin h\cos C' &= \cos c'\sin c\\
\cos h &= \cos c'\cos c
\end{aligned}$$

Dividiert man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und die zweite durch die dritte, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sin c &= \operatorname{tang} c'\operatorname{cotg} C'\\
\cos C' &= \operatorname{tang} c\ \operatorname{cotg} h
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung (V) ergibt sich

$$\sin C'\cos c = \cos C$$

Ferner erhält man aus der ersten Gleichung (IV)

$$\cos h = \operatorname{cotg} C'\operatorname{cotg} C$$

Stellt man die gewonnenen Formeln zusammen, so folgt

$$\begin{array}{lll}
\sin c' = \sin h\sin C', & \cos C = \sin C'\cos c, & \cos h = \cos c'\cos c\\
\sin c = \operatorname{tang} c'\operatorname{cotg} C', & \cos C' = \operatorname{tang} c\operatorname{cotg} h, & \cos h = \operatorname{cotg} C\operatorname{cotg} C'
\end{array} \tag{14}$$

13. Differentialformeln. In der Praxis tritt häufig die folgende Aufgabe auf: Mit Hilfe der gegebenen Stücke eines sphärischen Dreiecks sind die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnet worden; es sollen nun die Korrektionen bestimmt werden, welche an die berechneten Werte anzubringen sind, wenn die für die gegebenen Stücke des Dreiecks gemachten Annahmen um ein weniges geändert werden. Zur Lösung dieser Aufgabe geht man von dem Satze aus: Bedeutet $F(a, b, c, A, B, C)$ eine Funktion von $a, b, \ldots, C$, und sind die Inkremente da, $db, \ldots, dC$ so klein, daß man ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen kann, so ist

$$F(a+da,\ b+db,\ \ldots,\ C+dC) = F(a,\ b,\ \ldots,\ C) + \frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \cdots + \frac{\partial F}{\partial C}dC$$

Wenn also mit $a, b, \ldots. C$ Werte bezeichnet werden, welche der Gleichung

$$F(a,\ b,\ \ldots,\ C) = 0 \tag{15}$$

genügen, so ist die Bedingung dafür, daß auch

$$F(a+da,\ b+db,\ \ldots,\ C+dC) = 0$$

sei,

$$\frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \frac{\partial F}{\partial c}dc + \frac{\partial F}{\partial A}dA + \frac{\partial F}{\partial B}dB + \frac{\partial F}{\partial C}dC = 0 \tag{16}$$

Beispielsweise werde unter der Gleichung (15) die letzte der Gleichungen (3) verstanden:

$$\cos a - \cos b\cos c - \sin b\sin c\cos A = 0$$

Soll diese Gleichung auch noch gelten, wenn a, b, c, A durch $a+da$, $b+db$, $c+dc$, $A+dA$ ersetzt werden, so muß der Gleichung (16) zufolge

$$\begin{aligned} -\sin a\,da &+ (\sin b\cos c - \cos b\sin c\cos A)\,db \\ &+ (\cos b\sin c - \sin b\cos c\cos A)\,dc \\ &+ \sin b\sin c\sin A\,dA = 0 \end{aligned}$$

sein. Unter Benutzung der Gleichungen (II) und (I), S. 32, wird hieraus

$$-da + \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin c\sin B\,dA = 0 \tag{17^1}$$

oder auch

$$-da + \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin b\sin C\,dA = 0 \tag{17^2}$$

Um die Anwendung dieser Gleichungen zu zeigen, werde angenommen, daß man mit Hilfe der gegebenen Werte $b = 40°$, $c = 60°$, $A = 60°$ die Seite a sowie die Winkel B und C berechnet habe, und daß nun die Korrektion ermittelt werden soll, welche an den für a erhaltenen Wert anzubringen ist, wenn die für b, c und A angenommenen Werte die Korrektionen $db = +10'$, $dc = +30'$ und $dA = +40'$ erfordern. Substituiert man zunächst die vorhin für b, c und A angeführten Werte in die Gleichungen (3) und in die unter (I) und (II) für $\sin a\sin C$ und $\sin a\cos C$ angegebenen Gleichungen, so erhält man, bei Anwendung fünfstelliger Logarithmentafeln, $a = 48°35'.8$, $B = 47°55'.0$, $C = 90°47'.2$; darauf ergibt sich aus (17^1) oder (17^2) $da = +45'.7$. Der für $b = 40°10'$, $c = 60°30'$, $A = 60°40'$ gültige Wert von a ist somit $48°35'.8 + 45'.7 = 49°21'.5$. Ebendenselben Wert findet man, wenn

in den Gleichungen (3) $b = 40^\circ 10'$, $c = 60^\circ 30'$, $A = 60^\circ 40'$ angenommen wird. Falls also eine Genauigkeit von $0'.1$ ausreichend ist, so darf die Gleichung (17^1), bzw. (17^2) zur Berechnung der den Korrektionen $db \leqq + 10'$, $dc \leqq + 30'$, $dA \leqq + 40'$ entsprechenden Werte von da verwandt werden.

Soll der Wert von a bis auf wenige Zehntel einer Bogensekunde richtig erhalten werden, so sind sechsstellige Logarithmentafeln anzuwenden. Unter der Annahme $b = 40^\circ$, $c = 60^\circ$, $A = 60^\circ$ erhält man dann aus (3) $a = 48^\circ 35' 4''.7$, $B = 47^\circ 54' 55''.7$, $C = 90^\circ 47' 16''.3$ und weiterhin aus (17^1), bzw. (17^2), wenn $db = + 10'$, $dc = + 30'$, $dA = + 40'$ angenommen wird, $da = + 45' 40''.7$. Der für $b = 40^\circ 10'$, $c = 60^\circ 30'$, $A = 60^\circ 40'$ gültige Wert von a würde hiernach $49^\circ 21' 28''.4$ sein, dagegen gibt die mit Hilfe der Gleichungen (3) ausgeführte direkte Rechnung $a = 49^\circ 21' 32''.9$. Die den Gleichungen (17^1) und (17^2) zugrunde liegende Voraussetzung, daß die Quadrate und Produkte von db, dc, dA vernachlässigt werden können, ist also für die gegenwärtig verlangte Genauigkeit nicht erfüllt.

Man wende jetzt die Gleichung (17^1) auf das Dreieck MNx in Fig. 1 an und identifiziere dabei Mx mit a, Nx mit b und MN mit c, also den Winkel MNx mit A, NMx mit B und MxN mit C. Berücksichtigt man, daß nach § 9 $Mx = A$, $Nx = 180^\circ - B$, $MN = C$, $MNx = a$, $NMx = 180^\circ - b$ und $MxN = c$ ist, so hat man bei der Anwendung der Gleichung (17^1) auf das Dreieck MNx den Buchstaben a mit A, ferner b mit $180^\circ - B$, c mit C, A mit a, B mit $180^\circ - b$ und C mit c zu vertauschen; es ergibt sich also

$$(18^1) \qquad -dA - \cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin C \sin b\, da = 0$$

oder auch

$$(18^2) \qquad -dA - \cos c\, dB - \cos b\, dC + \sin B \sin c\, da = 0$$

Um eine weitere Differentialformel zu finden, differenziere man die erste der Gleichungen (3) logarithmisch; man erhält damit

$$(19) \qquad \operatorname{cotg} a\, da + \operatorname{cotg} B\, dB - \operatorname{cotg} b\, db - \operatorname{cotg} A\, dA = 0$$

Wird ferner die zweite der Gleichungen (3) durch die erste dividiert, so folgt

$$\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A = \sin A \operatorname{cotg} B$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$(\operatorname{cotg} b \cos c + \sin c \cos A)\, dc + (\cos c \sin A - \cos A \operatorname{cotg} B)\, dA = \frac{\sin c}{\sin^2 b}\, db - \frac{\sin A}{\sin^2 B}\, dB$$

Wird diese Gleichung mit $\sin b \sin B$ multipliziert und auf die Gleichungen (III), (IV) und (I) Rücksicht genommen, so ergibt sich

$$(20) \qquad \cos a \sin B\, dc + \sin b \cos C\, dA - \sin C\, db + \sin a\, dB = 0$$

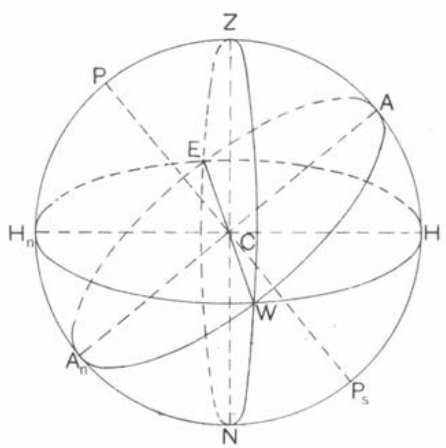
Kapitel IV.

Koordinaten.

14. Einleitung. Eine in dem Punkte C der freien Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit senkrecht zu dieser Oberfläche stehende Gerade schneidet die Himmelskugel in zwei Punkten, von denen der oberhalb der Flüssigkeit gelegene das Zenit und der diesem entgegengesetzte Punkt der Nadir von C genannt wird; die Gerade selbst bezeichnet man als Lotlinie oder auch als die Vertikale des Punktes C. Eine durch C senkrecht zur Lotlinie gelegte Ebene schneidet die Himmelskugel oder Sphäre, d. h. die um C mit einem unendlich großen Radius beschriebene Kugel in einem größten Kreise; diesen nennt man den Horizont von C.

In Fig. 1 sei nun C der Ort eines Beobachters, Z sei das Zenit, N der Nadir und HWH_nE der Horizont von C; ferner mögen P und P_s die Punkte bedeuten, in denen eine durch C parallel zur Rotationsachse der Erde gezogene Gerade (die sogenannte Weltachse) die Sphäre nach Norden, bzw. nach Süden hin schneidet. Legt man durch C senkrecht zur Weltachse eine Ebene, so schneidet diese die Himmelskugel längs eines größten Kreises AEA_nW, welcher der Himmelsäquator oder auch kurzweg der Äquator genannt wird; P nennt man den Nordpol des Himmelsäquators oder einfach den Pol. Von P aus gesehen, erfolgt die Drehung der Erde in der Richtung von rechts nach links, also von W über A nach E hin.

Fig. 1.



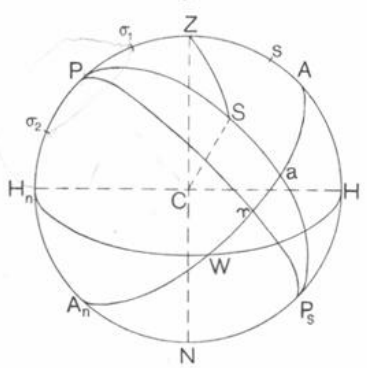
Unter der Polhöhe des Ortes C wird der spitze Winkel verstanden, welchen die von C zum sichtbaren Pole des Himmelsäquators gehende Richtung mit dem Horizont bildet; man rechnet die Polhöhe positiv, wenn der Nordpol des Himmelsäquators über dem Horizont liegt, negativ, wenn der Südpol über dem Horizont liegt. In Fig. 1 ist demnach die Polhöhe positiv und gleich dem Winkel PCH_n oder gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen H_nP: die Polhöhe ist auch noch gleich dem Winkel ZCA, bzw. gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen AZ. Wäre N das Zenit und Z der Nadir des Ortes C, so würde die Polhöhe von C negativ und gleich $-P_sCH$ sein. Aus der Definition der Polhöhe geht hervor, daß letztere denselben Wert hat wie die geographische Breite.

Die Ebene, in der die Lotlinie ZN und die Weltachse PP_s liegen, schneidet die Sphäre in dem größten Kreise PZP_sH_n; dieser wird der dem Punkte C entsprechende Himmelsmeridian oder kürzer der Meridian des Punktes C genannt.

Die Ebene des Meridians steht senkrecht zu den Ebenen des Horizonts und des Himmelsäquators, folglich auch senkrecht zu ihrer Durchschnittslinie EW; legt man also durch diese Durchschnittslinie und das Zenit Z eine Ebene, so schneidet diese die Himmelskugel in einem größten Kreise $ZENW$, welcher senkrecht zu dem Meridian PZP_sH_n steht. Dieser größte Kreis wird der erste Vertikal des Ortes C genannt. Da die Drehung der Erde in der Richtung WAE erfolgt, so findet die scheinbare oder die sogenannte tägliche Bewegung der Sterne in der umgekehrten Richtung statt. Der Punkt E, in dem ein im Äquator befindlicher Stern sich über den Horizont erhebt, heißt der Ostpunkt des Horizonts; den Punkt W nennt man den Westpunkt des Horizonts. Von den Durchschnittspunkten H_n und H des Horizonts mit dem Meridian wird der dem Nordpol zunächst gelegene (H_n) der Nordpunkt, der andere der Südpunkt des Horizonts genannt. Die vier zuletzt erwähnten Punkte zusammengenommen bezeichnet man als die Kardinalpunkte des Horizonts. Da der Meridian, der erste Vertikal und der Horizont senkrecht zueinander stehen, so sind je zwei benachbarte Kardinalpunkte, von C aus gesehen, um 90° voneinander entfernt; dasselbe gilt von den Punkten E, A_n, W, A.

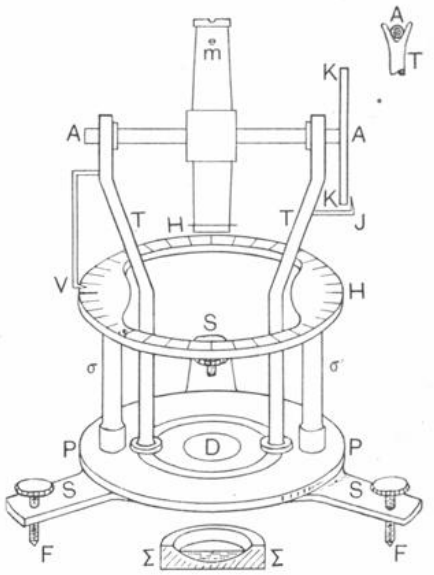
15. Koordinaten, bezogen auf den Horizont. In Fig. 2 mögen C, HH_n, AA_n, Z, N, P, P_s und W dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 1, ferner sei S der Punkt, in welchem die von C zu einem Stern hin gehende Richtung die Sphäre schneidet; man bezeichnet dann den Winkel ZCS oder den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen ZS als die Zenitdistanz und den sphärischen Winkel HZS, gerechnet von dem durch das Zenit und den Südpunkt des Horizonts gehenden Bogen ZH aus in der Richtung nach Westen hin, als das Azimut des Sterns. Die Zenitdistanz wird von 0° bis 180° und das Azimut von 0° bis 360° gezählt. Zur Bestimmung der Zenitdistanz und des Azimuts eines Sterns bedient man sich eines Universalinstruments. Die wesentlichsten Teile dieses Instruments sind die folgenden. Zwei Träger T, T (Fig. 3) endigen oben in zwei gabelförmige Lager (Fig 3[a]), welche zur Aufnahme der Achse AA dienen. Senkrecht zu dieser Achse ist das Fernrohr und ein in Grade und Minuten eingeteilter Kreis KK befestigt; zur Ablesung dieses Kreises dient ein ihm gegenüber befindlicher Index J, welcher mit dem einen der Träger T fest verbunden ist. Die unteren Enden der Träger tauchen in eine kreisförmige Nut der massiven Grundplatte PP ein und sind oberhalb der Nut scheibenförmig verbreitert. Infolge dieser Anordnung lassen sich die Träger samt den an ihnen befestigten Teilen um eine ideale, zur Grundplatte senkrechte Achse drehen. Parallel zur Grundplatte und durch die Stützen $\sigma\sigma$ fest mit ihr verbunden befindet sich der in Grade und Minuten eingeteilte Kreis HH; dieser wird mit Hilfe eines unmittelbar über ihm gelegenen, an einem der Träger T befestigten Index V abgelesen. An der Grundplatte PP sind drei an ihren äußeren Enden durchbohrte und mit Muttergewinden

Fig. 2.



versehene Ansätze S angebracht, in welche sich die unten zugespitzten Füße F einschrauben lassen. Mit diesen Füßen wird das Instrument auf einen isolierten Pfeiler aufgesetzt, und zwar so, daß die Achse AA eine horizontale Lage einnimmt; dies läßt sich, mit Benutzung einer auf AA aufgesetzten Libelle, durch Drehung der das obere Ende der Füße F bildenden Schraubenköpfe bewirken. Auf dem Pfeiler, und zwar unterhalb der in der Mitte der Grundplatte PP frei gelassenen Öffnung D, stellt man eine mit Quecksilber gefüllte Schale $\Sigma\Sigma$ auf. Richtet man das Fernrohr auf das Quecksilber, so sieht man außer einer im Brennpunkte des Objektivs angebrachten Marke m auch ihr Spiegelbild; werden diese beiden Bilder durch Drehung des Fernrohrs um die Achse AA zur Deckung gebracht, so steht die durch die Marke und den Mittelpunkt des Objektivs gehende Gerade senkrecht zur Oberfläche des Quecksilbers und stellt also die Lotlinie dar. Die dieser Stellung des Fernrohrs entsprechende Ablesung des Kreises KK gibt den Nadirpunkt dieses Kreises an; legt man zu der betreffenden Ablesung 180° hinzu, so erhält man den Zenitpunkt des Kreises. Nachdem man den Zenithpunkt bestimmt hat, richte man das Fernrohr auf einen Stern und lasse dessen Bild mit der Marke m zusammenfallen; wird dann die in dieser Lage des Fernrohrs erhaltene Ablesung des Kreises KK mit L bezeichnet, und bedeutet L_0 die dem Zenitpunkte des Kreises entsprechende Ablesung, so ist die Zenitdistanz des Sterns gleich $L - L_0$, vorausgesetzt, daß die Ablesung des Kreises zunimmt, wenn das Fernrohr vom Zenit zum Stern hin bewegt wird. Im entgegengesetzten Falle ist die Zenitdistanz gleich $L_0 - L$.

Fig. 3. Fig. 3a.



Um das Azimut eines Sterns zu erhalten, muß man zunächst die Richtung des Meridians bestimmen; diese läßt sich in folgender Weise finden. Man richtet das Fernrohr auf einen dem Äquator nahen Stern, der noch einige Stunden von seinem Durchgang durch den Meridian entfernt ist, läßt das Bild des Sterns mit der Marke m zusammenfallen und liest dann an dem Index V den Horizontalkreis HH ab. Indem nun die Neigung des Fernrohrs gegen den Horizont ungeändert gelassen wird, dreht man die Träger TT um die ideale zur Grundplatte PP senkrechte Achse, und zwar so lange, bis daß der Stern — nachdem er den Meridian passiert hat — wieder mit der Marke m zusammenfällt; in dieser Stellung liest man abermals den Horizontalkreis ab. Das Mittel aus den beiden Ablesungen des Horizontalkreises gibt dann die Ablesung, welche man machen wird, wenn sich das Fernrohr in der Ebene des Meridians befindet; diese Ablesung, die der Meridianpunkt des Kreises HH genannt wird, möge mit $\mathfrak{A}_m$ bezeichnet werden. Ist jetzt $\mathfrak{A}$ die Ablesung des Horizontalkreises, wenn das Fernrohr auf irgend einen Stern gerichtet ist, und nimmt die Ab-

lesung dieses Kreises zu, wenn man das Fernrohr von Süden nach Westen hin dreht, so gibt $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_m$ das Azimut des Sterns an.

Mit Hilfe eines Universalinstruments kann man ferner die Polhöhe des Beobachtungsorts finden. Zu diesem Zweck dreht man den Träger TT so weit, daß der Index V des Horizontalkreises auf den Meridianpunkt dieses Kreises zeigt, und klemmt den Träger fest; das Fernrohr kann sich dann also nur in der Ebene des Meridians bewegen. Man wählt nun einen Stern aus, der stets oberhalb des Horizonts bleibt, dessen Abstand vom Pol also kleiner als der Bogen PH_n in Fig. 2 d. h. kleiner als die Polhöhe des Beobachtungsorts ist; einen solchen Stern nennt man einen Zirkumpolarstern. Es seien σ_1 und σ_2 (Fig. 2) die beiden Punkte, in denen ein bestimmter Zirkumpolarstern den Meridian passiert. Ist der Stern in σ_1 angekommen, liegt er also in der das Zenit enthaltenden Hälfte (PZP_s) des Meridians, so sagt man, der Stern befinde sich in oberer Kulmination; der Durchgang des Sterns durch die andere Hälfte des Meridians wird als untere Kulmination bezeichnet. Beobachtet man nun die der oberen und unteren Kulmination eines Sterns entsprechenden Zenitdistanzen $Z\sigma_1$ und $Z\sigma_2$ und nimmt das Mittel aus ihnen, so erhält man den Bogen ZP. Das Komplement von ZP ist die Polhöhe.

16. Koordinaten, bezogen auf den Äquator und die Ekliptik. Nachdem man die Polhöhe gefunden hat, kann man aus der zur Zeit der oberen oder unteren Kulmination beobachteten Zenitdistanz eines beliebigen Sterns die Poldistanz desselben ableiten. Aus Fig. 2 folgt nämlich für einen Stern, der sich zur Zeit seiner oberen Kulmination in σ_1, also nördlich vom Zenit befindet, $P\sigma_1 = ZP - Z\sigma_1$ oder, wenn die Polhöhe des Beobachtungsortes mit φ, ferner die Poldistanz des Sterns mit p und seine Zenitdistanz in der oberen Kulmination mit ζ_o bezeichnet wird, $p = 90^\circ - \varphi - \zeta_o$. Das Komplement von p oder den Abstand des Sterns vom Äquator nennt man die Deklination des Sterns; dieselbe wird vom Äquator aus von 0° bis $\pm 90^\circ$ gerechnet, und zwar positiv, wenn der Stern auf derselben Seite des Äquators liegt wie der Nordpol. Bezeichnet man die Deklination mit δ, so folgt aus der vorhin für p erhaltenen Gleichung, daß für einen Stern, dessen obere Kulmination nördlich vom Zenit stattfindet, $\delta = \varphi + \zeta_o$ ist. Für einen Stern dagegen, der südlich vom Zenit, beispielsweise im Punkte s (Fig. 2) kulminiert, hat man $Ps = PZ + Zs$ oder, wenn auch hier $Ps = p$, $Zs = \zeta_o$ gesetzt wird, $p = 90^\circ - \varphi + \zeta_o$; mit Anwendung der vorigen Bezeichnung $90^\circ - p = \delta$ ergibt sich somit für die Deklination des Sterns $\delta = \varphi - \zeta_o$. Rechnet man aber die im Meridian gemessenen Zenitdistanzen negativ, wenn der Stern südlich vom Zenit kulminiert, so ist die letzte Gleichung durch

$$\delta = \varphi + \zeta_o \tag{1}$$

zu ersetzen; man erhält also dieselbe Gleichung, welche vorhin für den Fall gefunden wurde, daß die obere Kulmination eines Sterns nördlich vom Zenit stattfindet.

Um für die untere Kulmination eine der Gleichung (1) analoge Formel abzuleiten, berücksichtige man, daß, wenn σ_2 (Fig. 2) den Ort eines Sterns zur Zeit seiner unteren

Kulmination bedeutet, die Poldistanz $P\sigma_2 = Z\sigma_2 - ZP$ ist. Setzt man jetzt $P\sigma_2 = p$ und $Z\sigma_2 = \zeta_u$, so folgt $p = \zeta_u - (90^\circ - \varphi)$ und demnach

$$\delta = 180^\circ - (\varphi + \zeta_u) \tag{2}$$

Es werde jetzt angenommen, daß man die Deklination des Sterns S (Fig. 2), also den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen Sa des durch die Pole des Äquators und den Stern gehenden größten Kreises (des sogenannten Deklinationskreises des Sterns) bestimmt habe. Kann man nun auch noch den sphärischen Winkel bestimmen, welchen der durch den Stern gehende Halbmeridian PSP_s mit einem durch einen fixen Punkt des Äquators gehenden Halbmeridian $P\gamma P_s$ bildet, so hat man damit den Ort des Sterns am Himmel festgelegt. Die erste, hier zu lösende Aufgabe besteht darin, den Punkt des Äquators zu definieren, welcher als Fixpunkt dienen soll. Zu diesem Zwecke denke man sich zunächst durch den mit C bezeichneten Ort des Beobachters eine Ebene gelegt, welche parallel zu derjenigen der Erdbahn ist; diese schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise*), den man die Ekliptik nennt. Die Ekliptik stellt also auch die Bahn dar, welche die Sonne im Laufe eines Jahres an der Himmelskugel scheinbar durchläuft. Da die Ekliptik und der Äquator größte Kreise der Sphäre sind, so liegen ihre Durchschnittspunkte auf einem Durchmesser der Sphäre; diese Punkte bezeichnet man als Äquinoktial- und die um 90° von ihnen entfernten Punkte der Ekliptik als Solstitialpunkte. In ihrer scheinbaren Bewegung an der Himmelskugel passiert die Sonne den einen der Äquinoktialpunkte im Frühling, den anderen im Herbst; im ersten Falle geht die Deklination der Sonne von negativen Werten zu positiven über, im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Den Frühlingsäquinoktialpunkt, welcher in Fig. 2 mit γ bezeichnet ist, wählt man nun als Fixpunkt des Äquators. Der von dem Halbmeridian $P\gamma P_s$ aus in der Richtung der Drehung der Erde, also von Westen nach Osten gezählte Winkel γPS oder der diesem Winkel gleiche Bogen γa wird die Rektaszension des Sterns S genannt. Man zählt die Rektaszension von 0° bis 360° oder — indem man den Kreis, statt in 360 Grade, in 24 Stunden teilt — von 0^h bis 24^h.

Ehe das Verfahren, die Rektaszension eines Sterns zu bestimmen, auseinandergesetzt wird, mögen noch einige weitere Begriffe erläutert werden. Den Winkel ZPS, den der durch den Pol und den Stern gelegte Bogen größten Kreises mit dem das Zenit des Beobachtungsortes enthaltenden Halbmeridian PZP_s bildet, nennt man den Stundenwinkel des Sterns; derselbe wird von dem Halbmeridian PZP_s aus nach Westen hin von 0° bis 360° oder von 0^h bis 24^h gezählt. Da alle auf der Hälfte PSP_s eines Deklinationskreises gelegenen Sterne denselben Stundenwinkel haben, so bezeichnet man einen solchen Halbkreis auch als Stundenkreis. Wie aus Fig. 2 erhellt, entspricht der Stundenwinkel 0° oder 0^h der oberen, und der Stundenwinkel 180°, bzw. 12^h der unteren Kulmination des Sterns. Den Stundenwinkel des Frühlingsäquinoktialpunktes, also den Winkel $ZP\gamma$, bezeichnet man als Sternzeit; letztere kann man auch als die Rektaszension des Zenits definieren. Wird die Sternzeit

*) In Fig. 2 nicht gezeichnet.

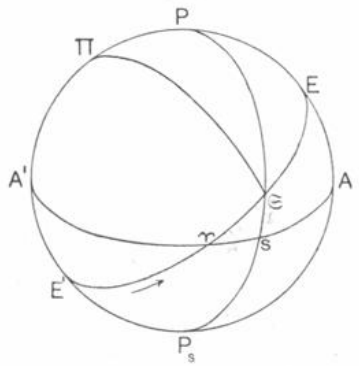
mit ϑ, der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit ϑ mit t und die Rektaszension des Sterns mit α bezeichnet, so folgt aus Fig. 2, daß

$$t = \vartheta - \alpha \tag{3}$$

ist. Diese Gleichung lehrt, daß, wenn $t = 0$ ist, d. h. wenn sich der Stern in oberer Kulmination befindet, $\vartheta = \alpha$ wird; die Sternzeit der oberen Kulmination eines Sterns ist also gleich der Rektaszension des Sterns. Ferner ergibt sich, daß die Sternzeit der unteren Kulmination eines Sterns gleich $\alpha + 12^h$ ist, und daß die Differenz der Sternzeiten, zu denen zwei verschiedene Sterne den Meridian in oberer oder unterer Kulmination passieren, zugleich die Rektaszensionsdifferenz dieser Sterne darstellt.

Es soll nun das zur Bestimmung der Rektaszension eines Sterns dienende Verfahren erläutert werden. Man beginnt damit, die Rektaszension der Sonne zu bestimmen. In Fig. 4 sei AA' der Äquator, EE' die Ekliptik, γ der Frühlingsäquinoktialpunkt, P und P_s seien die Pole des Äquators, Π sei der Nordpol der Ekliptik. Ist $\mathfrak{S}$ der für irgend eine Zeit T gültige Ort der Sonne, und bedeutet s den Punkt, in dem der Stundenkreis der Sonne den Äquator schneidet, so ist der Winkel γPs oder der in Teilen des Radius ausgedrückte Bogen γs gleich der Rektaszension, und der Bogen $s\mathfrak{S}$ gleich der Deklination der Sonne zur Zeit T. Wird jetzt $\gamma s = \mathfrak{A}$, $s\mathfrak{S} = \mathfrak{D}$ und $A\gamma E = \varepsilon$ gesetzt, so folgt aus dem bei s rechtwinkligen Dreieck $\gamma\mathfrak{S}s$

Fig. 4.



$$\sin \mathfrak{A} = \operatorname{tang} \mathfrak{D} \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{4}$$

Den Winkel ε, der die Neigung der Ekliptik gegen den Äquator angibt, bezeichnet man als die Schiefe der Ekliptik; ist diese Schiefe bekannt, so kann man, mit Hilfe der vorigen Gleichung, aus einer beobachteten Deklination der Sonne ihre Rektaszension berechnen. Um aber ε zu finden, mache man die folgende Überlegung. Da P und Π Pole des Äquators, bzw. der Ekliptik sind, so ist der mit γ bezeichnete Durchschnittspunkt des Äquators und der Ekliptik ein Pol des größten Kreises ΠPA; daraus folgt, daß ε auch gleich dem in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen AE ist. Nun gibt AE die größte nördliche Deklination der Sonne an; diese aber läßt sich ermitteln, wenn man auf einer nördlich gelegenen Sternwarte den Sommer hindurch Tag für Tag die Zenitdistanz der Sonne im Meridian bestimmt und aus der Zenitdistanz in Verbindung mit der Polhöhe des Beobachtungsortes die zugehörige Deklination ableitet. Für 1908 Juni 19 bis Juni 23 beispielsweise war die Deklination der Sonne zur Zeit ihrer Kulmination im Meridian von Paris:

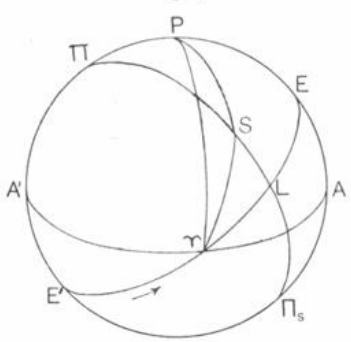
Juni	19	+ 23° 25′ 54″	Juni	22	+ 23° 26′ 57″
	20	26 40		23	23 26 29
	21	27 1			

Wählt man nun die Beobachtungstage als Abszissen und die zugehörigen Deklinationen der Sonne als Ordinaten und legt dann durch die Endpunkte der Ordinaten eine Kurve hindurch, so gibt diese für das Maximum der Deklination den Wert $+ 23^\circ 27' 2''$. Dies ist also der gesuchte Wert von ε.

Es werde jetzt angenommen, daß man am 4. April 1908 in Paris die Sonne im Meridian beobachtet und für ihre Deklination den Wert $\mathfrak{D} = + 5^\circ 38' 45''$ gefunden habe; substituiert man diesen und den vorhin für ε erhaltenen Wert in die Gleichung (4), so ergibt sich für die Rektaszension der Sonne $\mathfrak{A} = 13^\circ 10' 24'' = 0^h 52^m 41^s.6$. Dem oben Gesagten zufolge ist aber die Sternzeit der oberen Kulmination eines Gestirns gleich der Rektaszension des betreffenden Gestirns. Wenn demnach am 4. April 1908 außer der Deklination der Sonne auch die Zeit ihres Durchganges durch den Pariser Meridian beobachtet worden ist, und die Uhr hierfür etwa $0^h 52^m 30^s.0$ angegeben hat, so ist die Reduktion der Uhrzeit auf Sternzeit gleich $+ 11^s.6$. Diese Reduktion oder Uhrkorrektion gilt zwar zunächst nur für $0^h 52^m.5$ Uhrzeit; hat man aber die Uhr so reguliert, daß sie bei zwei aufeinanderfolgenden oberen oder unteren Kulminationen eines Fixsterns dieselbe Zeit zeigt, und daß demnach 24 Uhrstunden gleich 24 Stunden Sternzeit sind, so ist die vorhin gefundene Uhrkorrektion für einen ganzen Tag gültig. Man nehme nun an, daß man am 4. April 1908 auch noch die Zeit der oberen Kulmination von α Tauri beobachtet habe, und daß die Uhr in diesem Momente $4^h 30^m 25^s.6$ zeigte; mit Berücksichtigung der Uhrkorrektion $+ 11^s.6$ ergibt sich dann für die Sternzeit der Kulmination also auch für die Rektaszension von α Tauri $4^h 30^m 25^s.6 + 11^s.6 = 4^h 30^m 37^s.2$. Nachdem man so die Rektaszension von α Tauri gefunden hat, läßt sich auch die Rektaszension eines beliebigen anderen Sterns bestimmen. Zu diesem Zweck beobachtet man an einer nach Sternzeit regulierten Uhr die Zeiten, zu denen α Tauri und der zu bestimmende Stern den Meridian passieren. Die Differenz zwischen diesen Durchgangszeiten ist, wie oben gezeigt wurde, gleich der Rektaszensionsdifferenz der beiden Sterne; da die Rektaszension von α Tauri bekannt ist, so ergibt sich ohne weiteres die Rektaszension des zweiten Sterns.

Der Ort eines Sterns läßt sich auch in bezug auf die Ekliptik festlegen. Wenn nämlich in Fig. 5 EE' die Ekliptik, AA' den Äquator, Π den Nordpol der Ekliptik, Π_s ihren Südpol, P den Nordpol des Äquators, Υ den Frühlingsäquinoktialpunkt, S den Ort eines Sterns und L den Punkt bedeutet, in dem der durch die Pole der Ekliptik und den Stern gehende Halbkreis die Ekliptik schneidet, so ist die Lage von S bestimmt, wenn man 1. den von $\Pi\Upsilon$ aus in der Richtung der Drehung der Erde gerechneten Winkel $\Upsilon\Pi L$ oder die sogenannte Länge des Sterns und 2. den Abstand SL des Sterns von der Ekliptik oder die sogenannte Breite des Sterns kennt. Die Länge zählt man von 0° bis 360° und die Breite von 0° bis $\pm 90^\circ$; die Breite wird positiv gerechnet, wenn sich der Stern auf derselben Seite der Ekliptik befindet wie der Nordpol der Ekliptik. Die Länge und Breite eines Sterns leitet man durch Rechnung aus der

Fig. 5.



Rektaszension und Deklination ab; die hierzu dienenden Formeln werden in § 18 mitgeteilt werden. Den durch die Pole der Ekliptik und einen Stern gehenden größten Kreis nennt man den Breitenkreis des Sterns; der Breitenkreis der Äquinoktialpunkte wird der Kolur der Nachtgleichen, der Breitenkreis der Solstitialpunkte wird der Kolur der Sonnenwenden genannt.

17. Berechnung der Zenitdistanz und des Azimuts eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Parallaktischer Winkel. Es sei φ die Polhöhe und ϑ die Sternzeit des Ortes, für welchen die Zenitdistanz und das Azimut eines Sterns gesucht werden; ferner sei α die Rektaszension, t der Stundenwinkel, δ die Deklination, ζ die Zenitdistanz und A das Azimut des Sterns. In dem sphärischen Dreieck PZS (Fig. 2), wo P den Pol des Äquators, Z das Zenit und S den Ort des Sterns an der Himmelskugel bedeutet, ist dann $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$, $ZS = \zeta$, $ZPS = t = \vartheta - \alpha$ und $PZS = 180^\circ - A$. Mit Hilfe der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie erhält man also

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin A &= \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos A &= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \\ \cos\zeta &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \end{aligned}$$

Für die numerische Auflösung dieser Gleichungen bedient man sich mit Vorteil der Additions- und Subtraktionslogarithmen; will man diese aber nicht benutzen, so setze man

$$\begin{aligned} \sin m \sin M &= \sin\delta \\ \sin m \cos M &= \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha), \end{aligned} \tag{5}$$

es wird dann

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin A &= \cos\delta \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos A &= \sin m \sin(\varphi - M) \\ \cos\zeta &= \sin m \cos(\varphi - M) \end{aligned} \tag{6}$$

Den Winkel PSZ zwischen dem Deklinations- und dem Vertikalkreise des Sterns nennt man den parallaktischen Winkel; wird dieser mit q bezeichnet, so folgt aus dem Dreieck PSZ

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin q &= \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \\ \sin\zeta \cos q &= \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos(\vartheta - \alpha) \\ \cos\zeta &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\vartheta - \alpha) \end{aligned}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} \sin n \sin N &= \cos\varphi \cos(\vartheta - \alpha) \\ \sin n \cos N &= \sin\varphi \\ \cos n &= \cos\varphi \sin(\vartheta - \alpha) \end{aligned} \tag{7}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin\zeta \sin q &= \cos n \\ \sin\zeta \cos q &= \sin n \cos(N + \delta) \\ \cos\zeta &= \sin n \sin(N + \delta) \end{aligned} \tag{8}$$

Dividiert man die beiden ersten der Gleichungen (8) durch die dritte, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\zeta \sin q &= \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + \delta)} \\ \operatorname{tang}\zeta \cos q &= \operatorname{cotg}(N + \delta) \end{aligned} \tag{9}$$

18. Berechnung der Länge und Breite eines Sterns von bekannter Rektaszension und Deklination. Winkel zwischen Breiten- und Deklinationskreis eines Sterns. Es sei α die Rektaszension und λ die Länge des Sterns S in Fig. 5, man hat dann $\gamma PS = \alpha$ und $\gamma \Pi S = \lambda$. Da nun der mit γ bezeichnete Frühlingsäquinoktialpunkt ein Pol des durch Π und P gehenden größten Kreises ist, so stehen die Bögen $\gamma\Pi$ und γP senkrecht zu ΠP. In dem sphärischen Dreieck ΠPS ist demnach der Winkel bei P gleich $90^\circ + \alpha$ und der Winkel bei Π gleich $90^\circ - \lambda$. Bedeutet ferner δ die Deklination des Sterns, β seine Breite und ε die Schiefe der Ekliptik, so ist $PS = 90^\circ - \delta$, $\Pi S = 90^\circ - \beta$ und $\Pi P = \varepsilon$. Die Anwendung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf das Dreieck ΠPS gibt also

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\lambda &= \sin\varepsilon \sin\delta + \cos\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha \\ \sin\beta &= \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} f \sin F &= \sin\delta \\ f \cos F &= \cos\delta \sin\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

so werden die vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos\beta \sin\lambda &= f \cos(F - \varepsilon) \\ \cos\beta \cos\lambda &= \cos\delta \cos\alpha \\ \sin\beta &= f \sin(F - \varepsilon) \end{aligned} \tag{11}$$

In der zweiten dieser Gleichungen kann man $\cos\delta \cos\alpha = \cos\delta \sin\alpha \operatorname{cotg}\alpha = f \cos F \operatorname{cotg}\alpha$ setzen; dividiert man dann die beiden ersten Gleichungen durch die dritte, so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\beta \sin\lambda &= \operatorname{cotg}(F - \varepsilon) \\ \operatorname{cotg}\beta \cos\lambda &= \frac{\cos F}{\sin(F - \varepsilon) \operatorname{tang}\alpha} \end{aligned} \tag{12}$$

Es läßt sich nun auch leicht der Winkel ΠSP zwischen dem Breiten- und Deklinationskreise des Sterns S berechnen; bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit $\varkappa$ und den Winkel $\gamma S\Pi$ mit y, setzt man ferner $\gamma S = h$ und berücksichtigt, daß $\gamma\Pi = \gamma P = 90^\circ$ ist, so erhält man aus den Dreiecken $\gamma S\Pi$ und γSP

$$\begin{aligned} \sin h \sin y &= \sin\lambda & \sin h \sin(y + \varkappa) &= \sin\alpha \\ \sin h \cos y &= -\cos\lambda \sin\beta & \sin h \cos(y + \varkappa) &= -\cos\alpha \sin\delta \end{aligned} \tag{13}$$

Die Werte von λ, β und $\varkappa$ kann man auch noch auf andere Weise finden. Wendet man nämlich die *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck ΠPS (Fig. 5) an und setzt $90^\circ - \beta = B$, $90^\circ - \varkappa = K$, $90^\circ + \alpha = A$, $90^\circ - \varepsilon = E$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(K - \lambda) &= \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(E - \delta) \\ \sin\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(K - \lambda) &= \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}(E + \delta) \\ \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(K + \lambda) &= \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(E + \delta) \\ \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(K + \lambda) &= \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}(E - \delta) \end{aligned} \tag{14}$$

Von diesen Gleichungen kann man Gebrauch machen, um die mit Hilfe von (10), (11) und (13), bzw. von (10), (12) und (13) berechneten Werte von λ, β und $\varkappa$ zu kontrollieren.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die Änderungen berechnen zu können, welche λ und β erfahren, wenn α, δ, ε durch $\alpha + d\alpha$, $\delta + d\delta$, $\varepsilon + d\varepsilon$ ersetzt werden. Diese Änderungen ergeben sich durch Anwendung der Differentialformeln § 13, (20) und (17²):

$$\begin{aligned} \sin a\, dB &= -\sin b \cos C\, dA + \sin C\, db - \sin B \cos a\, dc \\ da &= \sin b \sin C\, dA + \cos C\, db + \cos B\, dc \end{aligned}$$

auf das Dreieck ΠPS, und zwar erhält man

$$\begin{aligned} \cos\beta\, d\lambda &= -\cos\delta \cos\varkappa\, d\alpha + \sin\varkappa\, d\delta + \cos\lambda \sin\beta\, d\varepsilon \\ d\beta &= -\cos\delta \sin\varkappa\, d\alpha + \cos\varkappa\, d\delta - \sin\lambda\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{15}$$

19. Verwandlung der Länge und Breite in Rektaszension und Deklination. Unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen angewandten Bezeichnungen gibt das Dreieck ΠPS (Fig. 5)

$$\begin{aligned} \cos\delta \sin\alpha &= -\sin\varepsilon \sin\beta + \cos\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \sin\delta &= \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda \end{aligned} \tag{15a}$$

Wird jetzt

$$\begin{aligned} g \sin G &= \sin\beta \\ g \cos G &= \cos\beta \sin\lambda \end{aligned} \tag{16}$$

gesetzt, so folgt

$$\begin{aligned} \cos\delta \sin\alpha &= g \cos(G + \varepsilon) \\ \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta \cos\lambda \\ \sin\delta &= g \sin(G + \varepsilon) \end{aligned} \tag{17}$$

In der zweiten Gleichung (17) kann man $\cos\beta \cos\lambda = \cos\beta \sin\lambda \operatorname{cotg}\lambda = g \cos G \operatorname{cotg}\lambda$ setzen; dividiert man dann die beiden ersten Gleichungen durch die dritte, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\delta \sin\alpha &= \operatorname{cotg}(G + \varepsilon) \\ \operatorname{cotg}\delta \cos\alpha &= \frac{\cos G}{\sin(G + \varepsilon) \operatorname{tang}\lambda} \end{aligned} \tag{18}$$

Um noch andere Formeln zur Berechnung von α und δ zu erhalten, wende man die *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck ΠPS an. Wird der Winkel ΠSP wieder mit $\varkappa$ bezeichnet und $90^\circ - \delta = D$, $90^\circ - \varkappa = K$, $90^\circ + \lambda = L$, $90^\circ - \varepsilon = E$ gesetzt, so folgt

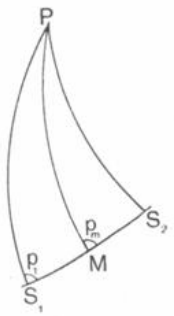
$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(K + \alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}L \sin\tfrac{1}{2}(E - \beta) \\ \sin\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(K + \alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}L \cos\tfrac{1}{2}(E + \beta) \\ \cos\tfrac{1}{2}D \sin\tfrac{1}{2}(K - \alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}L \sin\tfrac{1}{2}(E + \beta) \\ \cos\tfrac{1}{2}D \cos\tfrac{1}{2}(K - \alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}L \cos\tfrac{1}{2}(E - \beta) \end{aligned} \tag{19}$$

Mit Benutzung der im vorigen Paragraphen angegebenen Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie findet man für die Änderungen, welche α und δ erfahren, wenn die angenommenen Werte von λ, β und ε um $d\lambda$, $d\beta$ und $d\varepsilon$ korrigiert werden,

$$\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= \cos\beta \cos\varkappa\, d\lambda - \sin\varkappa\, d\beta - \cos\alpha \sin\delta\, d\varepsilon \\ d\delta &= \cos\beta \sin\varkappa\, d\lambda + \cos\varkappa\, d\beta + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{20}$$

20. Positionswinkel und Distanz. Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes eines zwei Sterne verbindenden Bogens größten Kreises. In Fig. 6 sei P der Nordpol des Äquators, S_1 und S_2 seien zwei Sterne, deren Deklination mit δ_1, bzw. δ_2 und deren Rektaszensionen mit α_1, bzw. α_2 bezeichnet werden mögen. Den Winkel nun, um den man S_1P in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen drehen muß, damit S_1P mit S_1S_2 zusammenfalle, nennt man den Positionswinkel des Sterns S_2 in bezug auf S_1; ist also $\alpha_2 > \alpha_1$, so ist der Positionswinkel von S_2 in bezug auf S_1 gleich PS_1S_2 und der Positionswinkel von S_1 in bezug auf S_2 gleich $360^\circ - PS_2S_1$. Man setze jetzt $PS_1S_2 = p_1$ und den Bogen S_1S_2 oder die Distanz der beiden Sterne gleich Δ; aus dem Dreiecke PS_1S_2 folgt dann

Fig. 6.



$$\begin{aligned} \sin\Delta \sin p_1 &= \cos\delta_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \sin\Delta \cos p_1 &= \sin\delta_2 \cos\delta_1 - \cos\delta_2 \sin\delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \tag{21}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich Δ und p_1 berechnen. Es möge nun M den Mittelpunkt des Bogens S_1S_2 bedeuten, und demnach $S_1M = \frac{1}{2}\Delta$ sein, ferner sei α_m die Rektaszension, δ_m die Deklination von M und p_m der Positionswinkel von S_2 in bezug auf M; setzt man dann $\alpha_m = \alpha_1 + d\alpha$, $90^\circ - \delta_m = D_m$ und $90^\circ - \delta_1 = D_1$, so ist der Winkel $S_1PM = d\alpha$ und der Winkel $PMS_1 = 180^\circ - p_m$, ferner $PM = D_m$, $PS_1 = D_1$. Durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck PS_1M erhält man also

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_1 \sin\tfrac{1}{2}[D_1 + \tfrac{1}{2}\Delta] \\ \sin\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_1 \sin\tfrac{1}{2}[D_1 - \tfrac{1}{2}\Delta] \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \sin\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \sin\tfrac{1}{2}p_1 \cos\tfrac{1}{2}[D_1 + \tfrac{1}{2}\Delta] \\ \cos\tfrac{1}{2}D_m \cos\tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \cos\tfrac{1}{2}p_1 \cos\tfrac{1}{2}[D_1 - \tfrac{1}{2}\Delta] \end{aligned} \tag{22}$$

Nachdem man hieraus p_m, $d\alpha$ und D_m gefunden hat, bilde man $\alpha_m = \alpha_1 + d\alpha$, $\delta_m = 90^\circ - D_m$.

Sucht man nur die Werte von Δ und p_m, so kann man die Rechnung in folgender Weise führen. Durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck PS_1S_2 ergibt sich, wenn der Winkel $PS_2S_1 = 180^\circ - p_2$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}\Delta \sin\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) &= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos\tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) \\ \sin\tfrac{1}{2}\Delta \cos\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) &= \cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \sin\tfrac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \tag{23}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(p_2 + p_1) = p, \qquad \tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) = \delta,$$

so erhält man für p_m die Gleichung*)

$$p_m = p - \tfrac{1}{16}(1 + 2\,\mathrm{tang}^2\delta)\,\Delta^2 \sin 1'' \sin 2p, \tag{24}$$

wo Δ in Sekunden ausgedrückt zu denken ist, und dann auch das von Δ^2 abhängige Glied in Sekunden ausgedrückt erhalten wird; dieses Glied wird aber nur bei großen Distanzen oder bei Sternen in der Nähe des Pols merklich.

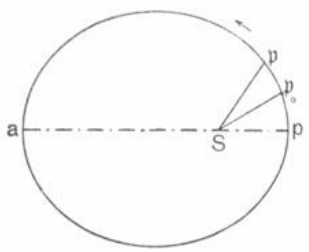
*) Eine Ableitung dieser selten gebrauchten Gleichung findet man in *Chauvenet*, Spherical Astronomy, Vol. II, Art. 263.

Sind die Distanzen nur mäßig groß, so lassen sich die Gleichungen (23) durch die folgenden ersetzen:

$$\begin{aligned} \Delta \sin p &= (\alpha_2 - \alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_2 + \delta_1) \\ \Delta \cos p &= \delta_2 - \delta_1 \end{aligned} \tag{25}$$

21. Erläuterung einiger in der Theorie der Bahnbestimmung vorkommenden Ausdrücke. Die Bahn, welche ein Planet beschreiben würde, wenn er nur der Anziehung der Sonne unterworfen wäre, ist eine Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt. In Fig. 7 sei S der Mittelpunkt der Sonne, $p\mathfrak{p}a$ die von einem Planeten beschriebene Ellipse, ap die große Achse dieser Ellipse und $\mathfrak{p}$ der Ort des Planeten zur Zeit t. Den der Sonne am nächsten liegenden Punkt p der Ellipse nennt man das Perihel und den diesem gegenüberliegenden Punkt das Aphel; der von Sp aus in der Richtung der Bewegung des Planeten gezählte Winkel $pS\mathfrak{p}$ wird die wahre Anomalie des Planeten zur Zeit t genannt.

Fig. 7.



Die Umlaufszeit des Planeten sei gleich T; setzt man dann $2\pi : T = n$, so wird n als die mittlere Bewegung des Planeten bezeichnet. Ist ferner τ die Zeit, zu der sich der Planet im Perihel befindet, so nennt man das Produkt $n(t - \tau)$ die mittlere Anomalie des Planeten zur Zeit t; die mittlere Anomalie soll im folgenden mit g bezeichnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit eines Planeten ist am größten im Perihel und am kleinsten im Aphel. Man kann sich aber einen Punkt denken, der ebenfalls die Ellipse $p\mathfrak{p}a$, und zwar in derselben Richtung wie der Planet durchläuft, jedoch mit einer der mittleren Bewegung n gleichen konstanten Winkelgeschwindigkeit; geht nun dieser Punkt zur selben Zeit mit dem Planeten durch das Perihel, so trifft er auch im Aphel wieder mit dem Planeten zusammen. Um den Ort zu finden, welchen der fingierte Punkt zu der Zeit t, wo der Planet in $\mathfrak{p}$ angekommen ist, einnimmt, hat man nur an Sp in der Richtung der Bewegung des Planeten den Winkel $pS\mathfrak{p}_0 = g$ anzulegen; der Punkt $\mathfrak{p}_0$, in dem der Schenkel $S\mathfrak{p}_0$ die Ellipse schneidet, ist dann der gesuchte Ort.

Bezeichnet man die Exzentrizität der von dem Planeten beschriebenen Ellipse mit e, bedeutet ferner W die wahre Anomalie des Planeten, so hat man, wie in der Theorie der Bahnbestimmung gezeigt wird,

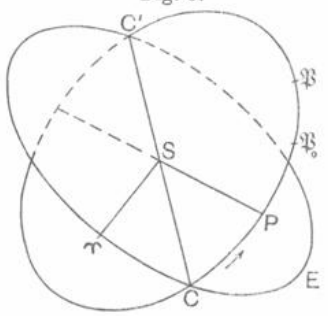
$$W = g + 2e\sin g + \tfrac{5}{4}e^2 \sin 2g + \cdots \tag{26}$$

Die Summe der Glieder, welche man zu g hinzuzulegen hat, um die wahre Anomalie zu erhalten, wird die Mittelpunktsgleichung genannt.

Man denke sich jetzt die Bahnebene des Planeten verlängert, bis daß sie die um den Mittelpunkt der Sonne (S) beschriebene Sphäre in dem größten Kreise $C\mathfrak{P}C'$ (Fig. 8) schneidet; ferner sei CEC' die Ekliptik, also CC' die Durchschnittslinie der Ebene der Planetenbahn mit der Ebene der Ekliptik oder die sogenannte Knotenlinie. Es werde nun angenommen, daß der Halbkreis $C\mathfrak{P}C'$

auf der nördlichen Seite der Ekliptik gelegen sei, und daß die Bewegung des Planeten in der Richtung des Pfeils erfolge; wenn dann der Planet, von der Sonne aus gesehen, den Punkt C passiert, so geht die heliozentrische Breite des Planeten von negativen zu positiven Werten über. Man nennt nun C den aufsteigenden und den ihm entgegengesetzten Punkt C' den niedersteigenden Knoten der Planetenbahn in bezug auf die Ekliptik. Bedeutet γ den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt, so bezeichnet man den von $S\gamma$ aus in der Richtung der Bewegung des Planeten gerechneten Winkel γSC, bzw. den in Teilen des Radius ausgedrückten Bogen γC als die Länge des aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik; der Bogen $\gamma EC' = 180^\circ + \gamma C$ wird die Länge des niedersteigenden Knotens genannt. Der sphärische Winkel $EC\mathfrak{P}$ gibt die Neigung der Bahn des Planeten in bezug auf die Ekliptik an.

Fig. 8.



Die Punkte, in denen die in Fig. 7 mit Sp, $S\mathfrak{p}_0$, $S\mathfrak{p}$ bezeichneten Richtungen verlängert die Sphäre treffen, sind in Fig. 8 mit P, $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}$ bezeichnet worden. Die Summe der Bögen $\gamma C + CP$ nennt man die Länge des Perihels, die Summe der Bögen $\gamma C + C\mathfrak{P}_0$ ist die sogenannte mittlere Länge des Planeten und die Summe der Bögen $\gamma C + C\mathfrak{P}$ die Länge des Planeten in seiner Bahn. Da $C\mathfrak{P}_0 = CP + P\mathfrak{P}_0$, $C\mathfrak{P} = CP + P\mathfrak{P}$ gesetzt werden kann, und $P\mathfrak{P}_0$ gleich der mittleren Anomalie, ferner $P\mathfrak{P}$ gleich der wahren Anomalie ist, so kann man die mittlere Länge auch als die Summe der Länge des Perihels und der mittleren Anomalie, und die Länge in der Bahn als die Summe aus der Länge des Perihels und der wahren Anomalie definieren. Addiert man also zu beiden Seiten der Gleichung (26) die Länge des Perihels, und bezeichnet man mit l die Länge in der Bahn und mit L die mittlere Länge des Planeten, so folgt

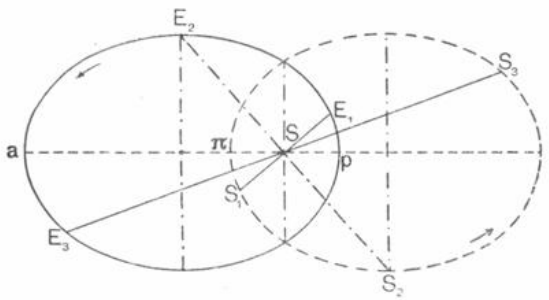
$$l = L + 2e \sin g + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2g + \cdots \tag{27}$$

Würde der Mond allein von der Erde angezogen, so wäre seine Bahn eine Ellipse, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfiele. Unter der Annahme, daß in Fig. 7 S den Mittelpunkt der Erde und $p\mathfrak{p}a$ die Mondbahn darstellt, wird p das Perigäum und a das Apogäum des Mondes genannt. In Fig. 8 möge nun $C\mathfrak{P}C'$ den größten Kreis bedeuten, in dem die Ebene der Mondbahn die Himmelskugel schneidet, ferner gebe der Pfeil die Richtung der Bewegung des Mondes in seiner Bahn an; S sei der Mittelpunkt der Erde, CEC' bedeute wieder die Ekliptik. Ist dann P der Punkt, in dem die Richtung: Erde—Mondperigäum die Sphäre trifft, so bezeichnet man die Summe der Bögen $\gamma C + CP$ als die Länge des Mondperigäums.

In Fig. 9 sei S der Mittelpunkt der Sonne und $E_1 E_2 E_3$ die Erdbahn; der Pfeil gebe die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn an. Man denke sich jetzt SE_1 in der Richtung von E_1 nach S hin verschoben, und zwar so weit, daß E_1 den Ort von S einnimmt; ist dann $S_1 S = SE_1$, so gibt S_1 die neue Lage von S an. Die

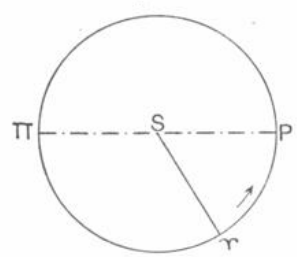
hier mit SE_1 vorgenommene Operation läßt sich nun für jeden Radiusvektor der Ellipse $E_1E_2E_3$ ausführen; man erhält damit eine neue Ellipse $S_1S_2S_3$, welche als die Bahn der Sonne relativ zur Erde bezeichnet werden kann. Die Achsen der Ellipsen $S_1S_2S_3$ und $E_1E_2E_3$ sind einander gleich und zueinander parallel; die Richtung der Bewegung der Sonne in ihrer relativen Bahn ist dieselbe wie die der Erde in ihrer Bahn um die Sonne. Was den scheinbaren Ort der Sonne am Firmament oder die Richtung, in der wir die Sonne sehen, betrifft, so ist es gleichgültig, ob man die Sonne die Ellipse $S_1S_2S_3$ um die ruhende Erde beschreiben läßt, oder ob man die Sonne als ruhend betrachtet und die Erde in der Ellipse $E_1E_2E_3$ beweglich annimmt. Den dem Brennpunkte S zunächst gelegenen Punkt π der Ellipse $S_1S_2S_3$ nennt man das Sonnenperigäum; der von $S\pi$ aus in der Richtung des Pfeils gezählte Winkel zwischen $S\pi$ und einem Radiusvektor der Ellipse $S_1S_2S_3$ wird die wahre Anomalie der Sonne genannt. Aus den Gleichungen $\pi SS_1 = pSE_1$, $\pi SS_2 = pSE_2$ usw. folgt, daß zu jeder Zeit die wahre Anomalie der Sonne gleich der wahren Anomalie der Erde ist; dasselbe gilt auch für die mittlere Anomalie.

Fig. 9.



Die Ebene der Ellipsen $E_1E_2E_3$ und $S_1S_2S_3$ schneide die um S beschriebene Sphäre in dem die Ekliptik darstellenden größten Kreise $\Pi\gamma P$ (Fig. 10), Π und P seien die Punkte, in denen die in Fig. 9 mit $S\pi$ und Sp bezeichneten Richtungen die Sphäre treffen, γ sei der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt; man nennt dann den von γ aus in der Richtung des Pfeils gezählten Bogen $\gamma P\Pi$ die Länge des Sonnenperigäums. Bezeichnet man diese Länge mit Π_s und die Länge des Erdperihels oder den Bogen γP mit P, so folgt $\Pi_s = 180^\circ + P$. Die Summe aus Π_s und der wahren Anomalie der Sonne gibt die wahre Länge der Sonne an, die Summe aus Π_s und der mittleren Anomalie ist die mittlere Länge der Sonne.

Fig. 10.



Die Anziehung der Planeten aufeinander hat zur Folge, daß die Bahn irgend eines dieser Himmelskörper in Wirklichkeit keine Ellipse ist, sondern daß nur das während eines unendlich kleinen Zeitraums von einem Planeten beschriebene Bahnstück als einer Ellipse angehörig betrachtet werden kann; eine solche Ellipse bezeichnet man als die der betreffenden Zeit entsprechende oskulierende Ellipse und ihre Elemente, d. h. ihre große Achse, ihre Exzentrizität, die Neigung ihrer Ebene gegen die Ekliptik usw. als oskulierende Elemente der Bahn des Planeten. Die oskulierenden Elemente ändern sich also mit der Zeit; die Änderungen selbst werden als Störungen bezeichnet. Die Störungen sind teils säkular, d. h. der Zeit oder deren höheren Potenzen proportional, teils periodisch.

Im Anschluß an das vorhin Gesagte läßt sich jetzt auch eine genauere Definition der Ekliptik geben, als dies in § 16 möglich war. Wäre nämlich die Erde und der Mond nur der Anziehung der Sonne unterworfen, so würde der Schwerpunkt des Systems: Erde–Mond eine Ellipse um die Sonne beschreiben. Die wahre, d. h. die durch die Anziehung der Planeten gestörte Bewegung erfolgt aber in der Weise, daß jedesmal nur ein unendlich kleines Stück der Bahn des Schwerpunktes als mit einem Ellipsenbogen zusammenfallend angesehen werden darf, und daß ferner, wenn man sich durch je zwei unendlich nahe Örter des Schwerpunktes und den Mittelpunkt der Sonne eine Ebene (G) gelegt denkt, diese an verschiedenen Stellen der Bahn eine verschiedene Lage einnimmt. In Fig. 8 (S. 51) sei nun wieder S der Mittelpunkt der Sonne, CEC' sei der größte Kreis, in dem die Ebene G in ihrer für den Ort des Schwerpunktes: Erde–Mond zur Zeit $t = 0$ gültigen Lage die Sphäre schneidet, CPC' sei die Durchschnittslinie der Sphäre und der Ebene G in ihrer Lage zur Zeit $t = t$. Bezeichnet man dann mit Π den von einer festen Richtung $S\gamma$ aus, in dem Sinne der Bewegung des Schwerpunktes des Systems: Erde–Mond gezählten Winkel γSC, wird ferner der sphärische Winkel PCE mit π bezeichnet, so hat man der Mechanik des Himmels zufolge, wenn a, b, c, b', c' Konstanten und $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ periodische Glieder bedeuten,

$$\Pi = a + bt + ct^2 + \mathfrak{P}$$
$$\pi = b't + c't^2 + \mathfrak{P}'$$

Denkt man sich nun, daß die periodischen Glieder $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ nicht vorhanden wären, so wird der größte Kreis, in dem dann die Ebene G zur Zeit $t = t$ die Himmelskugel schneidet, als die der Epoche t entsprechende Ekliptik bezeichnet. Die Werte, welche die Konstanten a, b, c, b', c' annehmen, wenn unter CEC' die Ekliptik zu Anfang des Jahres 1850 und unter γ das dieser Epoche entsprechende Frühlingsäquinox verstanden wird, findet man am Schluß des § 29 angegeben; dabei ist als Zeiteinheit ein julianisches Jahrhundert gewählt.

Da die Sphäre als eine mit einem unendlich großen Radius beschriebene Kugelfläche definiert wurde, so fallen die Kreise, in denen die Himmelskugel von zwei zueinander parallelen und in endlicher Entfernung voneinander befindlichen Ebenen geschnitten wird, miteinander zusammen; legt man also beispielsweise durch den Mittelpunkt der Erde eine Ebene parallel zu der Ebene der Ekliptik, so stellt die Durchschnittslinie einer solchen Ebene mit der Sphäre ebenfalls die Ekliptik dar.

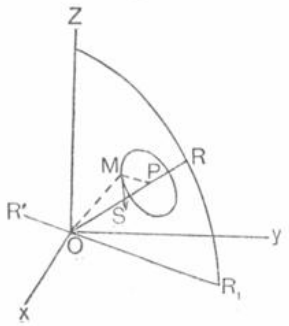
Kapitel V.

Theorie der Drehung der Erde.

I. Bewegung der Rotationsachse und der kleinen Achse der Erde.

22. Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes eines rotierenden Körpers. Um durch eine einfache Gerade nicht nur die Richtung der Rotationsachse, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation eines Körpers darzustellen, trage man auf der Drehungsachse, von einem ihrer Punkte O aus, eine der Winkelgeschwindigkeit ω proportionale Strecke OR ab, und zwar in einem solchen Sinne, daß für einen Beobachter, dessen Kopf in R und dessen Füße in O sich befinden, die Drehung von rechts nach links erfolgt; eine solche Drehung möge als positiv bezeichnet werden. Es seien x, y, z die Koordinaten und v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes M des rotierenden Körpers, bezogen auf ein durch O gelegtes festes rechtwinkliges Koordinatensystem; ferner gebe MS die Richtung der Geschwindigkeit v des Punktes M an, so daß also MS senkrecht zur Ebene MOR, folglich auch senkrecht zu OR und OM ist. Bezeichnet man dann mit α, β, γ die Richtungswinkel von OR, so hat man die Gleichungen

Fig. 1.



$$\begin{aligned} v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma &= 0 \\ x v_x + y v_y + z v_z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn nun f den Abstand MP des Punktes M von der Rotationsachse bedeutet, so ist

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = \omega^2 f^2 \tag{2}$$

Aus den vorigen Gleichungen ergibt sich, wenn noch $OM = \delta$ gesetzt wird, so daß also

$$f = \delta \sin MOR$$

ist,

$$\begin{aligned} (2^a) \qquad & \frac{v_x}{z\cos\beta - y\cos\gamma} = \frac{v_y}{x\cos\gamma - z\cos\alpha} = \frac{v_z}{y\cos\alpha - x\cos\beta} = \\ &= \pm \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{(z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)^2 + (y\cos\alpha - x\cos\beta)^2}} = \\ &= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}} = \\ &= \pm \frac{\omega f}{\sqrt{\delta^2 - \delta^2\cos^2 MOR}} = \pm\omega \end{aligned}$$

Um zu bestimmen, welches der beiden Vorzeichen gewählt werden muß, betrachte man den Spezialfall, wo die Rotationsachse mit der x-Achse zusammenfällt, und demnach $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ ist. Die vorigen Gleichungen geben dann

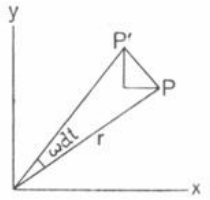
$$v_x = \mp\,\omega y, \qquad v_y = \pm\,\omega x$$

Mit Hilfe von Fig. 2 ergibt sich aber ohne weiteres, daß, wenn der in der xy-Ebene gelegene Punkt P in dem Zeitelement dt den kleinen Kreisbogen $PP' = r\,\omega\,dt$ beschreibt, die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes gleich

$$v_x = -\,\omega y, \qquad v_y = +\,\omega x$$

sind. Somit muß in (2ª) das obere Vorzeichen gewählt werden, und man erhält

Fig. 2.



$$\begin{aligned} v_x &= \omega(x\cos\beta - y\cos\gamma) \\ v_y &= \omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha) \\ v_z &= \omega(y\cos\alpha - x\cos\beta) \end{aligned} \tag{3}$$

Die Komponenten $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ der Achse $OR = \omega$ in bezug auf die Koordinatenachsen mögen der Reihe nach mit p, q, r bezeichnet werden; man hat dann

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 \tag{4}$$

und die Gleichungen (3) nehmen die Form an

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx \end{aligned} \tag{5}$$

Da p, q, r die Projektionen der Strecke OR auf die Koordinatenachsen darstellen, und OR die Richtung der Rotationsachse des Körpers, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angibt, so kann man auch sagen: Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Gerade OR dreht, welche mit drei zueinander senkrechten Achsen Ox, Oy, Oz die Winkel α, β, γ bildet, so läßt sich diese Drehung durch drei andere um die genannten Achsen ersetzen, und zwar sind die Winkelgeschwindigkeiten dieser Drehungen bezüglich gleich $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$. Hat eine dieser Drehungen, zum Beispiel $\omega\cos\alpha$ einen negativen Wert, so bedeutet das, daß die Drehung um die x-Achse, von deren positivem Ende aus betrachtet, von links nach rechts stattfindet; vom negativen Ende der x-Achse aus gesehen, würde eine solche Drehung von rechts nach links erfolgen. Einer Drehung $\omega\cos\alpha$ um die positive x-Achse ist also die Drehung $-\,\omega\cos\alpha$ um die negative x-Achse äquivalent.

23. Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers. Ist ein System von Massenpunkten gegeben, und bedeuten — mit bezug auf ein im Raume festes rechtwinkliges Koordinatensystem — x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines Punktes von der Masse m und X, Y, Z die auf diesen Punkt wirkenden Kraftkomponenten,

so lehrt das *d'Alembert*sche Prinzip, daß für alle mit den Verbindungen des Systems verträglichen Bewegungen (δx_ν, δy_ν, δz_ν) die Gleichung bestehen muß

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta x_\nu + \left(Y - m\frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right)\delta y_\nu + \left(Z - m\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right)\delta z_\nu\right\} = 0 \tag{6}$$

Unter dem System von Massenpunkten soll jetzt ein fester Körper verstanden werden. Die allgemeinste Bewegung des Systems setzt sich dann zusammen aus einer fortschreitenden und aus einer drehenden Bewegung. Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der fortschreitenden Bewegung mit u, v, w und die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit mit p, q, r, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (5)

$$\begin{aligned}\frac{dx_\nu}{dt} &= u + qz_\nu - ry_\nu\\ \frac{dy_\nu}{dt} &= v + rx_\nu - pz_\nu\\ \frac{dz_\nu}{dt} &= w + py_\nu - qx_\nu;\end{aligned} \tag{7}$$

ferner ist

$$\delta x_\nu = \frac{dx_\nu}{dt}\delta t, \qquad \delta y_\nu = \frac{dy_\nu}{dt}\delta t, \qquad \delta z_\nu = \frac{dz_\nu}{dt}\delta t \tag{8}$$

Die aus den Gleichungen (8) und (7) folgenden Werte von δx_ν, δy_ν, δz_ν sind nun in (6) zu substituieren. Damit die so gewonnene neue Gleichung für beliebige Werte von u, v, w, p, q, r erfüllt sei, müssen die Koeffizienten dieser sechs Variabelen jeder für sich verschwinden; man erhält demnach

$$\Sigma m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = \Sigma X, \qquad \Sigma m\frac{d^2y_\nu}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad \Sigma m\frac{d^2z_\nu}{dt^2} = \Sigma Z \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma m\left(y_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2} - z_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(y_\nu Z - z_\nu Y)\\ \Sigma m\left(z_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - x_\nu\frac{d^2z_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(z_\nu X - x_\nu Z)\\ \Sigma m\left(x_\nu\frac{d^2y_\nu}{dt^2} - y_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right) &= \Sigma(x_\nu Y - y_\nu X)\end{aligned} \tag{10}$$

Wählt man den Schwerpunkt des Körpers zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems, dessen Achsen den vorhin benutzten festen Achsen stets parallel bleiben sollen, so hat man, wenn $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten des Schwerpunktes in bezug auf das alte Koordinatensystem, und x, y, z die Koordinaten des Massenelementes m in bezug auf das neue System bedeuten,

$$x_\nu = \bar{x} + x, \qquad y_\nu = \bar{y} + y, \qquad z_\nu = \bar{z} + z \tag{11}$$

Ferner ist

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0,$$

folglich auch

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Durch Substitution von (11) in (9) ergibt sich also, wenn $\Sigma m = M$ gesetzt wird,

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = \Sigma Z, \tag{12}$$

das heißt: Die Bewegung des Schwerpunktes eines irgend welchen Kräften unterworfenen festen Körpers ist dieselbe, als wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert wäre, und alle Kräfte direkt an letzterem wirkten. Substituiert man die Werte (11) von x_1, y_1, z_1 in die Gleichungen (10), so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (12)

$$\begin{aligned}
\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma(yZ - zY)\\
\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma(zX - xZ)\\
\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma(xY - yX)
\end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen (10); dem Inhalte nach besteht aber der Unterschied, daß die Gleichungen (10) für ein im Raume festes, die Gleichungen (13) dagegen für ein im Raume bewegliches Koordinatensystem gelten, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen eine konstante Richtung haben. Die Bewegung eines festen Körpers um den beweglichen Schwerpunkt, welche naturgemäß nur in einer Drehung bestehen kann, ist also dieselbe, als wenn der Schwerpunkt fest wäre.

Unter Einführung der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z kann man den Gleichungen (13) die Form geben

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Sigma m(yv_z - zv_y) &= \Sigma(yZ - zY)\\
\frac{d}{dt}\Sigma m(zv_x - xv_z) &= \Sigma(zX - xZ)\\
\frac{d}{dt}\Sigma m(xv_y - yv_x) &= \Sigma(xY - yX)
\end{aligned} \tag{14}$$

Es lassen sich nun $\Sigma m(yv_z - zv_y)$, ..., $\Sigma m(xv_y - yv_x)$ als die Koordinaten K_x, K_y, K_z eines Punktes K, oder, wenn O den zum Anfangspunkt der Koordinaten gewählten Schwerpunkt des Körpers bezeichnet, als die Projektionen der Strecke OK auf die Koordinatenachsen auffassen; man hat also

$$K_x = \Sigma m(yv_z - zv_y), \qquad K_y = \Sigma m(zv_x - xv_z), \qquad K_z = \Sigma m(xv_y - yv_x) \tag{15}$$

Die Strecke OK wird im folgenden die Impulsachse des Körpers genannt werden. Es lassen sich aber auch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (14) als Koordinaten eines Punktes G definieren; werden diese mit G_x, G_y, G_z bezeichnet, so ist

$$G_x = \Sigma(yZ - zY), \qquad G_y = \Sigma(zX - xZ), \qquad G_z = \Sigma(xY - yX) \tag{16}$$

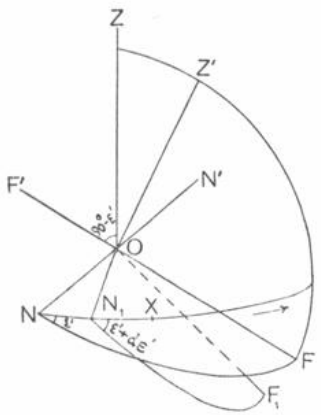
Die Strecke OG soll die Achse des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt O genannt werden. Die Gleichungen (14) nehmen jetzt die Gestalt an

$$\frac{dK_x}{dt} = G_x, \qquad \frac{dK_y}{dt} = G_y, \qquad \frac{dK_z}{dt} = G_z \tag{17}$$

Die drei letzten Gleichungen sagen aus: Wenn man für einen in Bewegung begriffenen festen Körper in jedem Augenblick die Impulsachse OK und die Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt O bestimmt, so ist OG gleich und parallel der Geschwindigkeit des Punktes K.

24. Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids. Bei der Anwendung der vorigen Formeln auf die Erde machen wir die Annahme, daß letztere ein aus unendlich dünnen ellipsoidalen und homogenen Schichten gebildetes abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Der Mittelpunkt dieses Ellipsoids, welcher also mit dem Schwerpunkt der Erde gleichbedeutend ist, werde zum Anfangspunkt eines neuen Koordinatensystems X', Y', Z' gewählt, und zwar soll die Z'-Achse mit der kleinen Achse der Erde zusammenfallen. Um die Achsen X' und Y' zu definieren, setze man zunächst fest, daß die in § 23 benutzte, durch den Schwerpunkt gelegte XY-Ebene die einer bestimmten, im übrigen aber beliebig zu wählenden Epoche $t = 0$ entsprechende Ebene der Ekliptik sei (NOX in Fig. 3), und daß die X-Achse durch das Frühlingsäquinox dieser Epoche hindurch gehe. Die zur Z'-Achse senkrechte Ebene NOF, das heißt die Ebene des terrestrischen Äquators zur Zeit t, schneide die feste Ekliptik NOX in der Linie NON' und werde selbst durch die Ebene ZOZ' in der Linie FOF' geschnitten; es stehen dann die Linien OZ', NON', FOF' senkrecht zueinander. Bedeutet nun N den niedersteigenden Knoten des terrestrischen Äquators auf der festen Ekliptik, und bezeichnet man mit F den im Sinne der Erdrotation um 90° von N entfernten Punkt des Äquators oder auch den Durchschnittspunkt des Äquators mit dem über Z' hinaus verlängerten Bogen ZZ', so soll zur Zeit t die Gerade ON als X'- und OF als Y'-Achse gewählt werden. Die Länge des Punktes N, gezählt von X aus, werde ψ genannt; in Fig. 3 ist somit der Bogen $NX = 360° - \psi$. Der Winkel FNX oder die Neigung des terrestrischen Äquators gegen die feste Ekliptik möge mit ε' bezeichnet werden. In dem Zeitelemente dt rücke der Äquator von NF nach N_1F_1, wobei $N_1F_1 = NF = 90°$ sein soll; zur Zeit $t + dt$ wähle man dann ON_1 als X'- und OF_1 als Y'-Achse. Bezeichnet man die Länge von N_1 gezählt von X aus mit $\psi + d\psi$, so ist der Bogen $NN_1 = d\psi$; der Winkel F_1N_1X werde gleich $\varepsilon' + d\varepsilon'$ gesetzt. Die der Zeit t entsprechenden Koordinatenachsen ON und OF lassen sich nun dadurch in ihre neuen Lagen ON_1 und OF_1 zur Zeit $t + dt$ überführen, daß man sie um die Achse OZ um den Winkel $d\psi$ und um die Achse ON' um den Winkel $d\varepsilon'$ dreht; sind $d\psi$ und $d\varepsilon'$ positiv, so erfolgt die Drehung um OZ und ON' in positivem Sinne, das heißt von Z beziehungsweise N' aus gesehen von rechts nach links. Man trage jetzt auf der Achse OZ eine der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ proportionale Strecke ab: die Projektionen derselben auf die Achsen OF' und OZ' sind bezüglich gleich $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ und

Fig. 3.



$\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$. Nach § 22 läßt sich somit die Drehung um OZ durch eine Drehung um OF' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, verbunden mit einer Drehung um OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ ersetzen. Da aber eine Drehung um OF', deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$ ist, dieselbe Bedeutung hat wie eine Drehung um OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und da eine analoge Bemerkung für die Drehung $d\varepsilon'$ um ON' zutrifft, so folgt, daß sich die Achsen X' und Y' dadurch aus ihrer Lage zur Zeit t in diejenige zur Zeit $t+dt$ überführen lassen, daß man dieselben 1. um die Achse ON mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, 2. um die Achse OF mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, und 3. um die Achse OZ' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ dreht. Sind nun die Achsen X' und Y' in ihrer Lage zur Zeit $t+dt$ angelangt, so ist dasselbe mit der Z'-Achse der Fall; damit aber auch jeder Meridian der Erde aus der Lage, die er zur Zeit t hat, in diejenige gelange, welche er zur Zeit $t+dt$ einnimmt, lasse man die Erde außerdem noch um die Z'-Achse eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ausführen, wo φ den von $Z'N$ aus im Sinne der Erdrotation gezählten Winkel zwischen $Z'N$ und einem beliebigen Erdmeridian bedeutet. Es ist jedoch wesentlich, zu bemerken, daß die Achsen X' und Y' an dieser Drehung nicht teilnehmen sollen. Zeigt nun OR*), nach der in § 22 gegebenen Definition, nicht nur die Richtung der Rotationsachse der Erde, sondern auch die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation der Erde an, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß OR die Resultante aus folgenden drei auf die Richtungen ON, OF, OZ', das heißt also auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t bezogenen Komponenten ist:

$$(18)\qquad p=-\frac{d\varepsilon'}{dt},\qquad q=-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon',\qquad r=\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'+\frac{d\varphi}{dt}$$

Den Gleichungen (5) zufolge sind aber die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x', y', z' der Erde, bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t

$$(\mathrm{I})\qquad v_{x'}=qz'-ry',\qquad v_{y'}=rx'-pz',\qquad v_{z'}=py'-qx'$$

Führt man diese Werte in die den Gleichungen (15) entsprechenden Relationen

$$(\mathrm{II})\quad K_{x'}=\Sigma m(y'v_{z'}-z'v_{y'}),\qquad K_{y'}=\Sigma m(z'v_{x'}-x'v_{z'}),\qquad K_{z'}=\Sigma m(x'v_{y'}-y'v_{x'})$$

ein, so erhält man die Projektionen der Impulsachse OK der Erde, bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Da jedoch die Erde als ein aus homogenen Schichten gebildetes Rotationsellipsoid aufgefaßt wird, dessen Drehungsachse die Z'-Achse sein soll, so entspricht jedem positiven Gliede der Summen

*) In Fig. 3 nicht gezeichnet.

$\Sigma mx'y'$, $\Sigma my'z'$, $\Sigma mx'z'$ ein gleich großes negatives; diese Summen sind also gleich o. Ferner folgt $\Sigma my'^2 = \Sigma mx'^2$, und hieraus $\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \Sigma m(x'^2 + z'^2)$. Somit erhält man durch die Substitution von (I) in (II), wenn noch

$$\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \Sigma m(x'^2 + z'^2) = A, \qquad \Sigma m(x'^2 + y'^2) = 2\Sigma mx'^2 = C$$

gesetzt wird,

$$K_{x'} = Ap, \qquad K_{y'} = Aq, \qquad K_{z'} = Cr,$$

wo p, q, r durch die Gleichungen (18) bestimmt sind.

Da nun Ap, Aq, Cr die Koordinaten des Punktes K in bezug auf die beweglichen Achsen X', Y', Z' bedeuten, und A und C konstant sind, so werden die relativen Geschwindigkeitskomponenten von K bezogen auf die genannten Achsen

$$A\frac{dp}{dt}, \qquad A\frac{dq}{dt}, \qquad C\frac{dr}{dt}$$

In den Gleichungen (17) beziehen sich die Komponenten der Geschwindigkeit von K auf Achsen von konstanter Richtung; diese Geschwindigkeit ist aber bekanntlich die Resultierende aus der relativen Geschwindigkeit des Punktes K, bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z', und der Geschwindigkeit g, welche der Punkt K haben würde, wenn er fest mit den beweglichen Achsen verbunden wäre. Unserer Annahme nach besteht die Bewegung dieser Achsen in einer Drehung, deren Komponenten, bezogen auf die Lage der Achsen X', Y', Z' zur Zeit t, bezüglich gleich $-\frac{d\varepsilon'}{dt}$, $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$, $\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$ sind. Wenn also in den Gleichungen (I) an Stelle von p, q, r der Reihe nach die eben angegebenen Komponenten, und an Stelle von x', y', z' die Koordinaten Ap, Aq, Cr des Punktes K gesetzt werden, so erhält man für die Komponenten der Geschwindigkeit g

$$g_{x'} = -Cr\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon' - Aq\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$$

$$g_{y'} = Ap\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + Cr\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

$$g_{z'} = -Aq\frac{d\varepsilon'}{dt} + Ap\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'$$

Dem vorhin Gesagten zufolge stellen die Summen $g_{x'} + A\frac{dp}{dt}$, $g_{y'} + A\frac{dq}{dt}$, $g_{z'} + C\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dK_{x'}}{dt}$, $\frac{dK_{y'}}{dt}$, $\frac{dK_{z'}}{dt}$ des Punktes K dar, und zwar bezogen auf die Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t. Werden nun in den Ausdrücken für $g_{x'}$, $g_{y'}$, $g_{z'}$ sowie in $A\frac{dp}{dt}$ und $A\frac{dq}{dt}$ an Stelle von p und q ihre Werte aus (18) substituiert, r und $\frac{dr}{dt}$ aber beibehalten, und bezeichnet man die nach den Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Projektionen der Achse OG des resultierenden Kräftepaares der äußeren Kräfte mit L, M, N, so folgt aus (17)

$$
\begin{aligned}
&- Cr\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} - A\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + A\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = L\\
&Cr\frac{d\varepsilon'}{dt} - A\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - A\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} = M \qquad (19)\\
&C\frac{dr}{dt} = N
\end{aligned}
$$

25. Berechnung von L, M, N. Den Gleichungen (16) gemäß ist, wenn X', Y', Z' die nach den Achsen X', Y', Z' genommenen Kraftkomponenten bedeuten,

$$L = G_{x'} = \Sigma(y'Z' - z'Y')$$

Dieser Ausdruck und die entsprechenden für M und N sollen jetzt weiter entwickelt werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß unter den auf die Erde wirkenden Kräften die Anziehung der Sonne und des Mondes zu verstehen ist. Jeder dieser beiden Himmelskörper soll als aus homogenen konzentrischen Kugelschichten bestehend angesehen werden, so daß also die von Sonne und Mond auf ein Erdelement ausgeübte Anziehung dieselbe ist, als wenn ihre Massen in den bezüglichen Mittelpunkten vereinigt wären. Man betrachte zunächst nur einen anziehenden Körper mit der Masse M_1 und bezeichne mit x_1', y_1', z_1' die Koordinaten seines Mittelpunktes bezogen auf die beweglichen Achsen X', Y', Z'. Ist m die Masse eines Erdelementes mit den Koordinaten x', y', z', und setzt man

$$(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2 = u^2,$$

so hat man für die nach den Achsen X', Y' und Z' in ihrer Lage zur Zeit t genommenen Komponenten der seitens M_1 auf m ausgeübten Anziehung, wenn noch k^2 die *Gaußsche* Konstante bedeutet,

$$X' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(x_1' - x'), \qquad Y' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(y_1' - y'), \qquad Z' = k^2\frac{M_1 m}{u^3}(z_1' - z')$$

Durch Substitution der Werte von Y' und Z' in die Gleichung

$$
\begin{aligned}
L &= \Sigma(y'Z' - z'Y')\\
&= y_1'\Sigma Z' - z_1'\Sigma Y' + \Sigma Y'(z_1' - z') - \Sigma Z'(y_1' - y')
\end{aligned}
$$

ergibt sich

$$L = y_1' k^2 M_1 \sum\frac{m(z_1' - z')}{u^3} - z_1' k^2 M_1 \sum\frac{m(y_1' - y')}{u^3}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke erhält man für M und N. Führt man jetzt die Funktion

$$V = k^2 M_1 \sum\frac{m}{u} \qquad (20)$$

ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
L &= z_1'\frac{\partial V}{\partial y_1'} - y_1'\frac{\partial V}{\partial z_1'},\\
M &= x_1'\frac{\partial V}{\partial z_1'} - z_1'\frac{\partial V}{\partial x_1'}, \qquad (21)\\
N &= y_1'\frac{\partial V}{\partial x_1'} - x_1'\frac{\partial V}{\partial y_1'}
\end{aligned}
$$

Um V zu berechnen, berücksichtige man, daß, wenn r_1' und r' die Entfernungen des Schwerpunktes der anziehenden Masse M_1 beziehungsweise eines Erdelementes vom Mittelpunkte der Erde bedeuten,

$$u^2 = r_1'^2 + r'^2 - 2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')$$

ist; man hat somit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{r_1'}\left\{1 - \frac{2}{r_1'^2}(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{r'^2}{r_1'^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

und folglich

$$V = \frac{k^2 M_1}{r_1'}\Sigma m\left\{1 - \frac{2}{r_1'^2}(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{r'^2}{r_1'^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Mit Rücksicht darauf, daß r', also auch x', y', z' klein im Verhältnis zu r_1' sind, ist es vorteilhaft, den unter dem Summenzeichen stehenden Klammerausdruck in eine Reihe zu entwickeln. Vernachlässigt man dabei die Glieder von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf die Koordinaten eines Erdelementes, so ergibt sich

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{k^2 M_1}{r_1'}\Sigma m + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\frac{\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')}{r_1'^2} \\ & + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\left[-\frac{1}{2r_1'^2}\Sigma m r'^2 + \frac{3}{2r_1'^4}\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^2\right] \\ & + \frac{k^2 M_1}{r_1'}\left[-\frac{3}{2r_1'^4}\Sigma m r'^2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') + \frac{5}{2r_1'^6}\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^3\right] \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1') &= x_1'\Sigma mx' + y_1'\Sigma my' + z_1'\Sigma mz', \\ \Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^2 &= x_1'^2\Sigma mx'^2 + y_1'^2\Sigma my'^2 + z_1'^2\Sigma mz'^2 + \\ &\quad + 2x_1'y_1'\Sigma mx'y' + 2x_1'z_1'\Sigma mx'z' + 2y_1'z_1'\Sigma my'z', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Im vorigen Paragraphen wurde aber bereits gezeigt, daß wegen unserer Annahme über die Beschaffenheit der Erde und mit Rücksicht auf die Wahl der Koordinatenachsen die Summen $\Sigma mx'y'$, $\Sigma mx'z'$, $\Sigma my'z'$ jede für sich verschwinden müssen. Dieselbe Schlußweise wie die damals angewandte führt zu dem Resultat, daß auch jede der Summen $\Sigma mx'$, $\Sigma my'$, $\Sigma mz'$, $\Sigma mr'^2(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')$, $\Sigma m(x'x_1' + y'y_1' + z'z_1')^3$, gleich o ist. Setzt man also die Masse der Erde $\Sigma m = E$ und berücksichtigt die Gleichung $\Sigma mx'^2 = \Sigma my'^2$, so erhält man

$$\begin{aligned} V &= k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma mr'^2}{2r_1'^3} + \frac{3}{2r_1'^5}[(x_1'^2 + y_1'^2)\Sigma mx'^2 + z_1'^2\Sigma mz'^2]\right\} \\ &= k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} - \frac{\Sigma mr'^2}{2r_1'^3} + \frac{3}{2r_1'^3}\left[\Sigma mx'^2 - \frac{z_1'^2}{r_1'^2}(\Sigma mx'^2 - \Sigma mz'^2)\right]\right\} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma mr'^2 &= 2\Sigma mx'^2 + \Sigma mz'^2, \\ \Sigma m(x'^2 + z'^2) &= A, \qquad 2\Sigma mx'^2 = C \end{aligned}$$

Somit wird

$$V = k^2 M_1\left\{\frac{E}{r_1'} + \frac{(C - A)}{2r_1'^3}\left(1 - 3\frac{z_1'^2}{r_1'^2}\right)\right\} \tag{22}$$

Da aber die Drehung der Achsen X', Y', Z' ohne Einfluß auf die Entfernungen r' und r'_1 ist, so ergibt sich aus (21) und (22)

$$
\begin{aligned}
L &= 3k^2 M_1 \left(\frac{C-A}{r_1'^3}\right) \frac{y_1' z_1'}{r_1'^2} \\
M &= -3k^2 M_1 \left(\frac{C-A}{r_1'^3}\right) \frac{x_1' z_1'}{r_1'^2} \qquad (23) \\
N &= 0
\end{aligned}
$$

Da $N = 0$ ist, so folgt aus der dritten der Gleichungen (19), wenn mit n eine Konstante bezeichnet wird,

$$r = n; \qquad (24)$$

somit lauten die beiden ersten Gleichungen (19)

$$
\begin{aligned}
\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{L}{Cn} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) + \frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\
\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{M}{Cn} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) + \frac{A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}
\end{aligned} \qquad (25)
$$

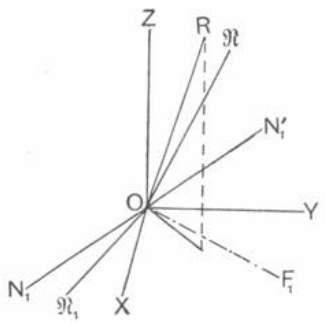
Die Gleichungen (23) geben die Werte von L und M für den Fall, daß die Erde nur von einem Körper angezogen wird. Indem nun die Bewegung der Erdachse mit Berücksichtigung der durch die Sonne und den Mond ausgeübten Anziehung abgeleitet werden soll, mögen die für diese Himmelskörper gültigen Werte von M_1, x'_1, ..., r'_1 durch $M_\odot$, $x_\odot$, ..., $r_\odot$, bzw. M_c, x_c, ..., r_c bezeichnet werden. Wenn ferner in Hinsicht auf die in den Sonnen- und Mondtafeln angewandten Einheiten von r_c, bzw. $r_\odot$ die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde H und die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne Δ eingeführt werden, so erhält man für die in den Gleichungen (25) zu benutzenden Ausdrücke von L und M

$$
\begin{aligned}
L &= 3k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{y_c z_c}{r_c^2} + 3k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2} \\
M &= -3k^2 M_c \frac{C-A}{H^3}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \frac{x_c z_c}{r_c^2} - 3k^2 M_\odot \frac{C-A}{\Delta^3}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2}
\end{aligned}
$$

26. Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde. Aus den Beobachtungen hat sich ergeben, daß die Rotationsachse der Erde zwar sehr nahe, aber nicht völlig mit der kleinen Achse des Erdellipsoids zusammenfällt. Da die Gleichungen (25) die Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse des Erdellipsoids darstellen, die Beobachtungen sich jedoch auf die Rotationsachse beziehen, so müssen nun die der letzteren entsprechenden Differentialgleichungen abgeleitet werden. Es möge in Fig. 4 der Vektor $OR = \omega$ die Richtung der Rotationsachse der Erde zur Zeit t, die Winkelgeschwindigkeit und den Sinn der Rotation angeben; $OXYZ$ sei das durch den Schwerpunkt der Erde gelegte, sich selbst stets parallel bleibende Koordinatensystem, und zwar soll wie früher als XY-Ebene die Ebene der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ gewählt werden und die X-Achse durch das der Epoche $t = 0$ entsprechende Frühlingsäquinox hindurchgehen.

Die senkrecht zu OR gelegte Ebene, welche der instantane Äquator genannt werden soll, schneide die XY-Ebene nach der Linie $N_1 O N_1'$ und werde durch die Ebene ZOR in OF_1 geschnitten; die Linien ON_1', OF_1 und OR stellen somit drei zueinander senkrechte Achsen dar. Im folgenden wird die von OX aus in der Richtung nach OY gerechnete Länge des niedersteigenden Knotens N_1 des instantanen Äquators auf der festen Ekliptik mit ψ_1 und der Winkel ZOR mit ε_1' bezeichnet werden. Zur Zeit $t + dt$ sei $O\mathfrak{R} = \omega + d\omega$ die Rotationsachse der Erde und $O\mathfrak{R}_1$ die Schnittlinie der zu $O\mathfrak{R}$ senkrechten Ebene mit der XY-Ebene; die von X aus gerechnete Länge von $\mathfrak{R}_1$ möge mit $\psi_1 + d\psi_1$ und der Winkel $ZO\mathfrak{R}$ mit $\varepsilon_1' + d\varepsilon_1'$ bezeichnet werden. Der Punkt R rückt also in dem Zeitelement dt von R nach $\mathfrak{R}$. Diese Ortsveränderung läßt sich dadurch bewirken, daß man den Punkt R 1. um die Z-Achse um den Winkel $d\psi_1$, 2. um die Achse ON_1' um den Winkel $d\varepsilon_1'$ dreht und 3. in der Richtung OR um $d\omega$ verschiebt. Da die Projektion von OR auf die xy-Ebene gleich $\omega \sin \varepsilon_1'$ ist, so beschreibt R bei der Drehung um die Z-Achse den Bogen $\omega \sin \varepsilon_1' d\psi_1$, und zwar ist die Richtung der Bewegung parallel zu ON_1'; bezogen auf die ON_1' entgegengesetzte Richtung ON_1 ist also die Geschwindigkeitskomponente von R gleich $-\omega \sin \varepsilon_1' \frac{d\psi_1}{dt}$. Bei der Drehung um die Achse ON_1' bewegt sich R parallel zu der Richtung OF_1 um den Bogen $\omega d\varepsilon_1'$; die Geschwindigkeitskomponente von R bezogen auf OF_1 ist also gleich $\omega \frac{d\varepsilon_1'}{dt}$.

Fig. 4.



Die Gleichungen (18) geben die Koordinaten p, q, r von R, bezogen auf die in § 24 definierten beweglichen Achsen X', Y', Z' in ihrer Lage zur Zeit t, und der Gleichung (24) zufolge ist $r = n$. Ersetzt man die Buchstaben p, q, r durch ξ', η', ζ', so folgt aus (18) und (24)

$$\text{(a)} \qquad \xi' = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad \eta' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad \zeta' = n$$

Die relativen Geschwindigkeitskomponenten von R sind demnach

$$\text{(b)} \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad -\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0$$

Nach § 24 (S. 59) besteht die Bewegung der Achsen X', Y', Z' in einer Drehung, deren Komponenten, genommen nach eben diesen Achsen in ihrer Lage zur Zeit t, durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\text{(c)} \qquad p' = -\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad q' = -\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon', \qquad r' = \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'$$

Denkt man sich den Punkt R fest mit den beweglichen Achsen verbunden, so ergeben sich seine bei der Drehung dieser Achsen erlangten Geschwindigkeitskomponenten $\gamma_{x'}$, $\gamma_{y'}$, $\gamma_{z'}$, indem man in den Formeln (I) (S. 59) statt x', y', z' die Werte

(a) von ξ', η', ζ' und statt p, q, r die Werte (c) von p', q', r' substituiert; man erhält so

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} \gamma_{x'} &= -n\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon' + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin\varepsilon'\cos\varepsilon' \\ \gamma_{y'} &= -\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' + n\frac{d\varepsilon'}{dt} \\ \gamma_{z'} &= 0 \end{aligned}$$

Die Summe der einander entsprechenden Gleichungen (b) und (d), nämlich

$$\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right), \qquad \gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right), \qquad 0$$

geben nach einem in § 24 benutzten Satze die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes R bezogen auf die Lage der Achsen X', Y', Z' zur Zeit t an. Die Achsen X' und Y' fallen mit den in Fig. 3 mit ON und OF' bezeichneten Richtungen zusammen; den Beobachtungen zufolge bilden aber diese Richtungen einen so kleinen Winkel mit den in Fig. 4 mit ON_1 und OF_1' bezeichneten, daß man die Komponenten $\gamma_{x'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$, $\gamma_{y'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon'\right)$ auch als auf ON_1 und OF_1' bezogen annehmen kann. Da nun früher (S. 64) für die Geschwindigkeitskomponenten von R in bezug auf ON_1 und OF_1' die Werte $-\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt}$ und $\omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt}$ gefunden wurden, so erhält man durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} -\omega\sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt} &= -n\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} + \sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) \\ \omega\frac{d\varepsilon_1'}{dt} &= n\frac{d\varepsilon'}{dt} - \cos\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dt}\frac{d\psi}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) \end{aligned}$$

Den Gleichungen (18) und (24) zufolge ist

$$\omega = OR = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 + \left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + n^2};$$

da aber $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$ sehr klein gegenüber n sind, so kann man in den vorigen Gleichungen $\omega = n$ setzen. Substituiert man ferner noch an Stelle von $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ ihre Werte aus (25), so folgt

$$26) \qquad \begin{aligned} \sin\varepsilon_1'\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{L}{Cn} + \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ \frac{d\varepsilon_1'}{dt} &= \frac{M}{Cn} - \frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt} \end{aligned}$$

Die für die Rotationsachse gültigen Gleichungen (26) unterscheiden sich wesentlich von den der kleinen Achse des Erdellipsoids entsprechenden Gleichungen (25); während nämlich in (25) die Glieder zweiter Ordnung $\frac{A}{Cn}$ als Faktor enthalten, ist dieser in (26) nur mehr $\frac{C-A}{Cn}$. Da aber $\frac{C-A}{C}$ sehr klein ist, so kann man in

den Gleichungen (26) die Glieder zweiter Ordnung zunächst vernachlässigen und erhält dann

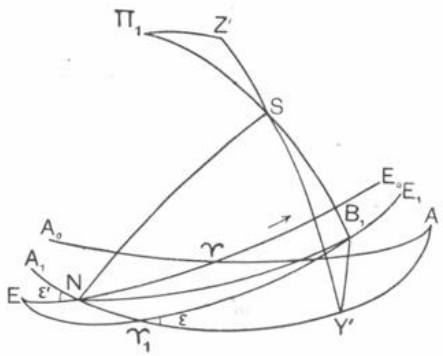
$$(26^a)\qquad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{L}{Cn\sin\varepsilon'_1}, \qquad \frac{d\varepsilon'_1}{dt} = \frac{M}{Cn}$$

Führt man in diese Gleichungen die in (25^a) gegebenen Ausdrücke für L und M ein und setzt zur Vereinfachung ψ und ε' an Stelle von ψ_1 und ε'_1, so ergibt sich

$$(27)\qquad \begin{aligned} -\frac{d\psi}{dt} &= \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\frac{y_c z_c}{r_c^2\sin\varepsilon'} + \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3\frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2\sin\varepsilon'} \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= -\frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\frac{x_c z_c}{r_c^2} - \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3\frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Koordinaten der Sonne und des Mondes müssen den Theorien dieser beiden Himmelskörper oder den bezüglichen Tafeln entlehnt werden; da aber die weiterhin zur Anwendung kommenden Theorien direkt nur die Polarkoordinaten von Sonne und Mond geben, so erscheint es angezeigt, die Gleichungen (27) dementsprechend umzuformen. In Fig. 5 sei EE_0 die feste, EE_1 die bewegliche Ekliptik, AA_0 der feste, AA_1 der bewegliche Äquator; der Pol der beweglichen Ekliptik werde mit Π_1, der Pol des beweglichen Äquators mit Z' bezeichnet; endlich möge S den Ort des Mondes und $\Pi_1 S B_1$ den Breitenkreis von S bezogen auf die bewegliche Ekliptik vorstellen. Setzt man die Länge des Mondes $\gamma_1 B_1 = l_c$ und seine Breite $B_1 S = b_c$, setzt man ferner die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t oder den Winkel $E_1\gamma_1 A = \varepsilon$, so ist in dem Dreieck $\Pi_1 Z' S$ der Winkel $S\Pi_1 Z' = 90^0 - l_c$, und der Bogen $\Pi_1 Z' = \varepsilon$, folglich

Fig. 5.



$$(28)\qquad \cos SZ' = \frac{z_c}{r_c} = \sin b_c\cos\varepsilon + \cos b_c\sin l_c\sin\varepsilon$$

Ferner ergibt sich aus dem Dreiecke SNB_1, wenn man berücksichtigt, daß die X'-Achse durch N gehen soll,

$$\cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c\cos NB_1 + \sin b_c\sin NB_1\sin NB_1\gamma_1$$

Wenn der Bogen $N\gamma_1$ mit a bezeichnet wird, so läßt sich die letzte Gleichung ersetzen durch

$$(29)\qquad \cos SN = \frac{x_c}{r_c} = \cos b_c[\cos l_c\cos a - \sin l_c\sin a\cos\varepsilon] + \sin b_c\sin a\sin\varepsilon$$

Endlich folgt aus dem Dreieck SB_1Y'

$$\cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c\cos B_1Y' - \sin b_c\sin B_1Y'\sin\gamma_1B_1Y',$$

oder, wenn das Dreieck $B_1 \gamma_1 Y'$ zu Hilfe genommen wird, worin $\gamma_1 Y' = 90^\circ - a$ ist,

$$(30) \qquad \cos SY' = \frac{y_c}{r_c} = \cos b_c [\cos l_c \sin a + \sin l_c \cos a \cos \varepsilon] - \sin b_c \cos a \sin \varepsilon$$

Aus den Gleichungen (28) und (30) ergibt sich

$$\frac{y_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos \varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \cos a \sin 2\varepsilon + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos 2\varepsilon$$

Da die Gleichung (29) aus (30) entsteht, wenn man in letzterer a durch $90^\circ + a$ ersetzt, so führt dieselbe Substitution, auf die vorige Gleichung angewandt, ohne weiteres zu dem Ausdruck für $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$. Man erhält demnach für die in den Gleichungen (27) vorkommenden Quotienten $\frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'}$ und $\frac{x_c z_c}{r_c^2}$

$$(31) \qquad \frac{y_c z_c}{r_c^2 \sin \varepsilon'} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ + \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'}$$

$$(32) \qquad \frac{x_c z_c}{r_c^2} = \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin \varepsilon + \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos \varepsilon - \\ - \tfrac{1}{2}(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon - \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) leitet man durch Vertauschung des Index c mit $\odot$ die entsprechenden für die Sonne gültigen Gleichungen ab; da aber für die vorliegende Untersuchung die Breite der Sonne gleich o gesetzt werden darf, so ergibt sich

$$(31^a) \qquad \frac{y_\odot z_\odot}{r_\odot^2 \sin \varepsilon'} = \tfrac{1}{2} \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \tfrac{1}{2} \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'}$$

$$(32^a) \qquad \frac{x_\odot z_\odot}{r_\odot^2} = \tfrac{1}{2} \sin 2 l_\odot \cos a \sin \varepsilon - \tfrac{1}{2} \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon$$

Durch Substitution der Ausdrücke (31) bis (32a) in die Gleichungen (27) erhält man

$$(33^1) \qquad -\frac{d\psi}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} \left[\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \right. \\ + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \\ \left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} \right] + \\ + \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2 l_\odot \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} \right]$$

$$(33^2)\quad \frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{3k^2M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big[\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \cos a \sin\varepsilon +$$
$$+\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos a \cos\varepsilon -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) \sin a \sin 2\varepsilon -$$
$$-\Big(\frac{H}{r_c}\Big)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \sin a \cos 2\varepsilon\Big] -$$
$$-\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta}{r_\odot}\Big)^3 \sin 2l_\odot \cos a \sin\varepsilon - \frac{1}{2}\Big(\frac{\Delta}{r_\odot}\Big)^3 \sin^2 l_\odot \sin a \sin 2\varepsilon\Big]$$

27. Reihenentwicklungen. Um die Differentialgleichungen (33) integrieren zu können, muß man ihre rechten Seiten als Funktionen der Zeit darstellen; zu diesem Zweck sind zunächst a und ε nach Potenzen der Zeit zu entwickeln. Es bedeute Π die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik EE_1 (Fig. 5) auf der festen, vom festen Äquinox γ aus in der Richtung γE_0 gerechnet; der Winkel E_0EE_1 werde mit π bezeichnet. Unter ψ soll die von γ aus gerechnete und in der Richtung nach N hin negativ gezählte Länge des niedersteigenden Knotens des beweglichen Äquators auf der festen Ekliptik verstanden werden; in Fig. 5 ist also ψ negativ, und somit der Bogen $N\gamma$ absolut genommen gleich $-\psi$. Da der Bogen $E\gamma$ nach dem vorhin Gesagten gleich $180^\circ - \Pi$ ist, so ist der Bogen $EN = 180^\circ - \Pi + \psi$; ferner hat man $EN\gamma_1 = 180^\circ - \varepsilon'$, $N\gamma_1 E = \varepsilon$, $N\gamma_1 = a$. Setzt man noch $E\gamma_1 = b$, so gibt das Dreieck $NE\gamma_1$

$$(34)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+a) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'+\pi)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\pi)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) \end{aligned}$$

Auf die erste dieser Gleichungen wende man die bekannte Reihenentwicklung [§ 1, (17) und (18)] an, wonach, wenn die Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{h}{\iota}\operatorname{tang}\varphi$$

gegeben ist und

$$\frac{h-\iota}{h+\iota} = p$$

gesetzt wird,

$$\varphi_1 = \varphi + p\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}p^2 \sin 4\varphi + \cdots$$

ist; man erhält dann

$$(35)\quad \tfrac{1}{2}(b+a) = \tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi-\psi) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) + \cdots$$

Wie die Vergleichung der beiden Gleichungen (34) miteinander lehrt, erhält man aus der Reihe für $\frac{1}{2}(b+a)$ diejenige für $\frac{1}{2}(b-a)$, wenn man in der ersteren ε' durch $180^\circ + \varepsilon'$ ersetzt; es wird also

$$(36)\quad \tfrac{1}{2}(b-a) = \tfrac{1}{2}(180-\Pi+\psi) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin(\Pi-\psi) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' \sin 2(\Pi-\psi) - \cdots$$

Der in § 21 gegebenen Definition der Ekliptik zufolge ist die Lage der Ekliptik nur säkularen, von der Anziehung der Planeten auf den Schwerpunkt des Systems: Erde—Mond herrührenden Änderungen unterworfen. Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} \pi \sin \Pi &= p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots \\ \pi \cos \Pi &= q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{37}$$

so ist nach *Newcomb*, wenn die Zeit vom Beginn des Jahres 1850 an gezählt und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert = 36525 mittlere Sonnentage angenommen wird,

$$\begin{aligned} p_1 &= +\ 5''.341, & p_2 &= +\ 0''.1935, & p_3 &= -\ 0''.00019 \\ q_1 &= -\ 46.838, & q_2 &= +\ 0.0563, & q_3 &= +\ 0.00035 \end{aligned} \tag{37a}$$

Die Formeln, zu welchen die Theorie der Drehung der Erde führt, sollen im folgenden nur mit einer Genauigkeit gegeben werden, wie sie für den Zeitraum von 1750 bis 1950 ausreichend ist. Da vorhin 1850.0 als Ausgangspunkt der Zeitrechnung gewählt wurde, so wird t höchstens gleich $\pm$ 1, und demnach ergibt sich aus (37) und (37a), daß der Maximalwert von π gleich 47″ ist. Den Beobachtungen zufolge weicht ε' im Laufe von 200 Jahren stets um weniger wie 10″ von seinem mittleren Werte ab; setzt man

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon,$$

wo $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 31''.68$ (*Newcomb*) den für 1850.0 gültigen Wert von ε' bedeutet und nach der zweiten Gleichung (26a)

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{Cn}\int_0^t M dt$$

ist, so kann man in (35) und (36)

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\varepsilon}{2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{\Delta\varepsilon}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0}$$

annehmen. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{2}{\sin \varepsilon_0} - 2\,\frac{\Delta\varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varepsilon' = 2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - 2\,\frac{\Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0}$$

Für $\pi = 47''$ und $\varepsilon_0 = 23^\circ 27'$ wird der Koeffizient von $\sin 2(\Pi - \psi)$ in (35) gleich 0″.03 und in (36) verschwindend klein. Im dritten Gliede auf der rechten Seite von (35) kann demnach $\varepsilon' = \varepsilon_0$ gesetzt werden, und das entsprechende Glied in (36) ist ganz zu vernachlässigen. Endlich läßt sich tang $\frac{1}{2}\pi$ mit $\frac{1}{2}\pi$ vertauschen. Somit erhält man aus (35) und (36)

$$a = \frac{\pi \sin(\Pi - \psi)}{\sin \varepsilon_0} - \frac{\pi \Delta\varepsilon \sin(\Pi - \psi) \cos \varepsilon_0}{\sin^2 \varepsilon_0} - \tfrac{1}{8}\pi^2 \sin 2(\Pi - \psi) \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0,$$

$$b = 180^\circ - \Pi + \psi + \\ + \pi \sin(\Pi - \psi) \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{\pi \Delta\varepsilon \sin(\Pi - \psi)}{\sin^2 \varepsilon_0} - \tfrac{1}{8}\pi^2 \sin 2(\Pi - \psi) \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0$$

Die Beobachtungen ergeben, daß $-\psi$ für ein Jahrhundert nicht größer als $1^{\circ}24'$ wird. Man setze nun auf der rechten Seite der zwei letzten Gleichungen in den Gliedern erster Ordnung

$$\varkappa \sin(\Pi - \psi) = \varkappa \sin \Pi (1 - \tfrac{1}{2}\psi^2) - \psi \varkappa \cos \Pi,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (37)

$$\varkappa \sin(\Pi - \psi) = p_1 t + p_2 t^2 - \psi q_1 t - \tfrac{1}{2}\psi^2 p_1 t - \psi q_2 t^2,$$

ferner setze man in den mit $\varkappa \Delta\varepsilon$ und $\varkappa^2$ multiplizierten Gliedern

$$\begin{aligned} \varkappa \sin(\Pi - \psi) &= p_1 t \\ \varkappa^2 \sin 2(\Pi - \psi) &= 2 p_1 q_1 t^2 - 2 \psi q_1^2 t^2 \end{aligned}$$

Wenn man jetzt zur Abkürzung schreibt

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p_1}{\sin \varepsilon_0} t \\ a_2 &= \left(\frac{p_2}{\sin \varepsilon_0} - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \right) t^2 - \frac{\psi q_1}{\sin \varepsilon_0} t - \frac{p_1 \Delta\varepsilon \operatorname{cotg} \varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0} t \\ a_3 &= \left(\tfrac{1}{4} q_1^2 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - \frac{q_2}{\sin \varepsilon_0} \right) \psi t^2 - \frac{p_1}{2 \sin \varepsilon_0} \psi^2 t \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 180 - \Pi + \psi \\ b_1 &= p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \\ b_2 &= (p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t \\ b_3 &= (\tfrac{1}{4} q_1^2 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 - q_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0) \psi t^2 - \tfrac{1}{2} p_1 \psi^2 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0, \end{aligned} \tag{39}$$

wobei die Indizes die Ordnung der Glieder angeben sollen, so wird

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned} \tag{40}$$

Unter der vorhin gemachten Voraussetzung, daß $+1 \leqq t \leqq -1$ sein soll, wird a_1 höchstens gleich $13''.4$ und b_1 höchstens gleich $12''.3$, während a_2 und b_2 im Maximum nur Bruchteile einer Sekunde betragen. Die sehr kleinen Glieder a_3 und b_3 sind mit Rücksicht auf einige späterhin abzuleitende Formeln mitgeteilt worden; für die zunächst folgenden Rechnungen können sie vernachlässigt werden.

Man setze nun $b_1 + b_2 = \beta$, so daß nach (40) und (39) $b = 180^{\circ} - \Pi + \psi + \beta$ wird; es folgt dann aus dem Dreieck $EN\gamma_1$ (Fig. 5)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\cos(\Pi - \psi - \tfrac{1}{2}\beta)}{\cos \tfrac{1}{2}\beta} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varkappa$$

und hieraus mit hinreichender Genauigkeit

$$2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon') = \varkappa \cos(\Pi - \psi)$$

Setzt man jetzt

$$\cos \psi = 1 - \tfrac{1}{2}\psi^2, \qquad \sin \psi = \psi,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (37)

$$\varepsilon = \varepsilon' + q_1 t + q_2 t^2 + p_1 t \psi + p_2 t^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t \psi^2 \tag{41}$$

Diese Gleichung wird noch in einer anderen Form angewandt werden. Wenn man nämlich wie oben

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

setzt und die Abkürzungen einführt

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon + q_1 t &= E_1 \\ q_2 t^2 + p_1 \psi t &= E_2 \\ p_2 t^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t \psi^2 &= E_3, \end{aligned}$$

so verwandelt sich die Gleichung (41) in

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + E_1 + E_2 + E_3 \tag{42}$$

Für $t = 1$ ist $E_1 < 57''$ und $E_2 < 0''.2$. Das sehr kleine Glied E_3 kann man vernachlässigen; wenn es trotzdem angeführt ist, so geschieht dies aus demselben Grunde, der für die Mitteilung der in (38) und (39) gegebenen Werte von a_3 und b_3 bestimmend war.

Nachdem im vorhergehenden die Ausdrücke für a und ε abgeleitet worden sind, lassen sich die in den Gleichungen (33) auftretenden Faktoren $\frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'}, \ldots, \sin a \cos 2\varepsilon$ leicht entwickeln. Mit Rücksicht auf die angegebenen Maximalwerte von a_1, a_2, E_1, E_2 setze man

$$\sin a = a_1 + a_2, \quad \cos a = 1, \quad \sin(E_1 + E_2) = E_1 + E_2, \quad \cos(E_1 + E_2) = 1 - \tfrac{1}{2} E_1^2$$

Sieht man auch weiterhin von allen Gliedern dritter und höherer Ordnung ab, so ergibt sich zunächst unter Benutzung der Gleichung (41)

$$\begin{aligned} \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= a_1 + a_2 + a_1 q_1 t \operatorname{cotg}\varepsilon' \\ \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= (a_1 + a_2)\operatorname{cotg}\varepsilon' - a_1 q_1 t \end{aligned}$$

Da aber

$$\operatorname{cotg}\varepsilon' = \operatorname{cotg}\varepsilon_0 - \frac{\Delta\varepsilon}{\sin^2\varepsilon_0}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= a_1 + a_2 + a_1 q_1 t \operatorname{cotg}\varepsilon_0 \\ \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} &= (a_1 + a_2)\operatorname{cotg}\varepsilon_0 - \frac{a_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2\varepsilon_0} - a_1 q_1 t \end{aligned} \tag{43}$$

Ferner hat man unter Anwendung der Gleichung (42)

$$\begin{aligned} \cos a \sin 2\varepsilon &= \sin 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2)\sin 2\varepsilon_0 + 2(E_1 + E_2)\cos 2\varepsilon_0 \\ \cos a \cos 2\varepsilon &= \cos 2\varepsilon = (1 - 2E_1^2)\cos 2\varepsilon_0 - 2(E_1 + E_2)\sin 2\varepsilon_0 \end{aligned}$$

Wird nun

$$\frac{1}{\sin\varepsilon'} = \frac{1}{\sin\varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1 + \cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2\right)$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2 - 2E_1^2\right) +$$
$$+ \frac{2\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}(E_1 + E_2 - E_1\Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0)$$

(44)

$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}\left(1 - \Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0 + \frac{1+\cos^2\varepsilon_0}{2\sin^2\varepsilon_0}\Delta\varepsilon^2 - 2E_1^2\right) -$$
$$- \frac{2\sin 2\varepsilon_0}{\sin \varepsilon_0}(E_1 + E_2 - E_1\Delta\varepsilon \operatorname{cotg}\varepsilon_0)$$

Endlich erhält man mit Hilfe der Gleichung (42)

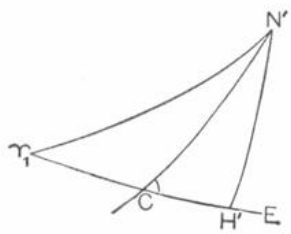
$$\cos a \sin\varepsilon = (1 - \tfrac{1}{2}E_1^2)\sin\varepsilon_0 + (E_1 + E_2)\cos\varepsilon_0$$
$$\cos a \cos\varepsilon = (1 - \tfrac{1}{2}E_1^2)\cos\varepsilon_0 - (E_1 + E_2)\sin\varepsilon_0 \quad (45)$$

und

$$\sin a \sin 2\varepsilon = (a_1 + a_2)\sin 2\varepsilon_0 + 2a_1E_1\cos 2\varepsilon_0$$
$$\sin a \cos 2\varepsilon = (a_1 + a_2)\cos 2\varepsilon_0 - 2a_1E_1\sin 2\varepsilon_0 \quad (46)$$

28. Es sind nun auch die in den Gleichungen (33) enthaltenen, von den Polarkoordinaten des Mondes und der Sonne abhängigen Faktoren $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$, ... als Funktionen der Zeit darzustellen. Zuvor aber soll an Stelle der Länge und Breite des Mondes seine Länge in der Bahn und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik eingeführt werden. Zur Zeit t sei $\gamma_1 E$ (Fig. 6) die Ebene der Ekliptik, γ_1 das Frühlingsäquinox und CN' die Mondbahn; die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, also der Bogen $\gamma_1 C$, möge mit Ω und die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, oder der Winkel $N'CH'$, mit i bezeichnet werden; ferner stelle $N'H'$ den Breitenkreis des Mondes dar. Es ist somit $b_c = N'H'$ und $l_c = \Omega + CH'$. Legt man durch γ_1 und N' einen Bogen größten Kreises und bestimmt $\cos \gamma_1 N'$ und $\sin \gamma_1 N' \cos N'\gamma_1 H'$ sowohl aus dem Dreieck $\gamma_1 H'N'$ als aus dem Dreieck $\gamma_1 CN'$, so ergibt sich durch Gleichstellung der einander entsprechenden Ausdrücke, wenn noch der Bogen $CN' = w$ gesetzt wird,

Fig. 6.



$$\cos l_c \cos b_c = \cos w \cos\Omega - \sin w \sin\Omega \cos i$$
$$\sin l_c \cos b_c = \cos w \sin\Omega + \sin w \cos\Omega \cos i$$

Durch eine kleine Umformung erhält man hieraus die zwei ersten der folgenden Gleichungen; die dritte Gleichung ergibt sich aus dem Dreiecke $CN'H'$

$$\cos l_c \cos b_c = \cos(w+\Omega)\cos^2\tfrac{1}{2}i + \cos(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\sin l_c \cos b_c = \sin(w+\Omega)\cos^2\tfrac{1}{2}i - \sin(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i \quad (47)$$
$$\sin b_c = \sin w \sin i$$

Die Neigung i schwankt zwischen $5^\circ 0'$ und $5^\circ 18'$; vernachlässigt man $\sin^4\frac{1}{2}i$, so erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$\sin l_c \cos l_c \cos^2 b = \sin(w+\Omega)\cos(w+\Omega)\cos^4\tfrac{1}{2}i + \sin 2\Omega \sin^2\tfrac{1}{2}i \cos^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\cos l_c \sin b_c \cos b_c = \cos(w+\Omega)\sin w \cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i + \cos(w-\Omega)\sin w \sin^2\tfrac{1}{2}i \sin i$$
$$\sin^2 l_c \cos^2 b_c = \sin^2(w+\Omega)\cos^4\tfrac{1}{2}i - 2\sin(w+\Omega)\sin(w-\Omega)\sin^2\tfrac{1}{2}i \cos^2\tfrac{1}{2}i$$
$$\sin^2 b_c = \sin^2 w \sin^2 i$$
$$\sin l_c \sin b_c \cos b_c = \sin(w+\Omega)\sin w \cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i - \sin(w-\Omega)\sin w \sin^2\tfrac{1}{2}i \sin i$$

Jetzt lassen sich die Formeln anwenden

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\sin(x+y) + \tfrac{1}{2}\sin(x-y)$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y)$$

und es ergibt sich, wenn man hierbei die Glieder $\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}i \sin i \sin(2w-\Omega)$ und $\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}i \sin i \cos(2w-\Omega)$ vernachlässigt und auf beiden Seiten mit $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$, bzw. $\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ multipliziert,

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = \tfrac{1}{2}\cos^4\tfrac{1}{2}i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega$$
$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = \tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+\Omega) - \tfrac{1}{4}\sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin\Omega$$

(48)

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = \tfrac{1}{4}(\cos^4\tfrac{1}{2}i - \sin^2 i)\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\cos^4\tfrac{1}{2}i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+2\Omega) +$$
$$+ \tfrac{3}{8}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2w - \tfrac{1}{8}\sin^2 i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega$$
$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = -\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{1}{2}i \sin i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos(2w+\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin 2i \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos\Omega$$

Die Lösung der Aufgabe, die rechten Seiten dieser Gleichungen mit Hilfe der durch die Mondtheorie gegebenen Formeln als Funktionen der Zeit darzustellen, erfordert dem ersten Anscheine nach sehr umständliche Rechnungen; in Wirklichkeit aber ist die aufzuwendende Mühe nicht groß, und läßt sich die ganze Arbeit auf die Entwicklung der zwei Ausdrücke $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2i \sin\Omega$ zurückführen. Die Berechnung des Ausdruckes $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w+2\Omega)$ soll im folgenden auf Grund der *Delaunay*schen Theorie der Mondbewegung vorgenommen werden; es genügt aber vollkommen, nur die Hauptglieder dieser Theorie zu berücksichtigen.

Es sei

e, e' = Exzentrizität der Mond-, bzw. der Erdbahn
n, n' = mittlere Bewegung des Mondes, bzw. der Sonne
$m = \dfrac{n'}{n}$
g, g' = mittlere Anomalie des Mondes, bzw. der Sonne
ω, ω' = Abstand des Mond-, bzw. des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik
$D = g + \omega - g' - \omega'$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4}e'^2)m^2 = \frac{1}{K_0}$$
$$[e - \tfrac{7}{12}em^2 - \tfrac{285}{64}em^3 - \tfrac{45091}{2304}em^4]K_0 = e_1$$
$$[e^2 - \tfrac{1}{3}e^4 - \tfrac{5}{6}e^2m^2 - \tfrac{735}{64}e^2m^3]K_0 = e_2$$
$$[m^2 + \tfrac{19}{6}m^3 + \tfrac{15}{4}e^2m + \tfrac{131}{18}m^4 + \tfrac{189}{16}e^2m^2 + \tfrac{10483}{256}e^2m^3 + \tfrac{383}{27}m^5 - \tfrac{5}{2}e'^2m^2]K_0 = \sigma_2$$
$$[\tfrac{15}{8}em + \tfrac{187}{32}em^2 + \tfrac{29513}{1536}em^3 + \tfrac{1161961}{18432}em^4 - \tfrac{75}{16}ee'^2m]K_0 = \tau_2$$
$$[\tfrac{33}{16}em^2 + \tfrac{101}{16}em^3 + \tfrac{405}{64}e^3m + \tfrac{5037}{256}e^3m^2 + \tfrac{53303}{384}em^4]K_0 = \omega_3$$

so ist nach *Delaunay*

$$(49)\quad \frac{H}{r_c} = 1 + e_1\cos g + e_2\cos 2g + \sigma_2\cos 2D + \tau_2\cos(2D - g) + \omega_3\cos(2D + g)$$

Mit Benutzung der von *Delaunay* angewandten Werte

$$e = 0.05490, \qquad e' = 0.01677, \qquad m = 0.07480$$

ergibt sich

$$\log e_1 = 8.7368 \qquad \log\sigma_2 = 7.917 \qquad \log\omega_3 = 6.95$$
$$\log e_2 = 7.474 \qquad \log\tau_2 = 8.001$$

Wird die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (49) auf $e_1\cos g$ folgenden Glieder mit f bezeichnet, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\frac{H}{r_c} = 1 + e_1\cos g + f$$

Hieraus erhält man mit hinreichender Genauigkeit

$$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = 1 + 3(e_1\cos g + f) + 3(e_1^2\cos^2 g + 2fe_1\cos g + f^2)$$

In dem letzten Gliede darf man, indem für f sein Wert substituiert wird,

$$f^2 = \sigma_2^2\cos^2 2D + \tau_2^2\cos^2(2D - g) + 2\sigma_2\tau_2\cos 2D\cos(2D - g)$$

setzen oder, unter Anwendung der Formel

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a + b) + \tfrac{1}{2}\cos(a - b)$$

und mit Vernachlässigung einiger für die Folge einflußloser Glieder,

$$f^2 = \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 + \tfrac{1}{2}\tau_2^2 + \sigma_2\tau_2\cos g$$

Substituiert man diesen Ausdruck und den von f in die Gleichung für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$, so ergibt sich, wenn zur Abkürzung

$$1 + \tfrac{3}{2}(e_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_2^2) = \alpha_0 \qquad \log\alpha_0 = 0.00204$$
$$3e_1 + 3e_1e_2 + 3\sigma_2\tau_2 = \beta_1 \qquad \beta_1 = 9.2159$$
$$3e_2 + \tfrac{3}{2}e_1^2 = \beta_2 \qquad \beta_2 = 8.127$$
$$3\sigma_2 + 3e_1\tau_2 + 3e_1\omega_3 = \delta_2 \qquad \delta_2 = 8.424$$
$$3\tau_2 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 = 8.497$$
$$3\omega_3 + 3e_1\sigma_2 = \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_3 = 7.60$$
$$3e_1\tau_2 = \eta_3 \qquad \eta_3 = 7.21$$

gesetzt, und die Summe $3e_1e_2\cos 3g + 3e_1\omega_3\cos(2D+2g)$ vernachlässigt wird,

$$(50)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 = \alpha_0 + \beta_1\cos g + \beta_2\cos 2g + \delta_2\cos 2D + \varepsilon_2\cos(2D-g) + \varepsilon_3\cos(2D+g) + \\ + \eta_3\cos(2D-2g)$$

Den Ausdruck für $w+\Omega$, d. h. für die Länge des Mondes in seiner Bahn, kann man ebenfalls der *Delaunay*schen Theorie entnehmen. Wird nämlich

$$4e - \tfrac{1}{2}e^3 = k_1$$
$$\tfrac{5}{2}e^2 - \tfrac{11}{12}e^4 - \tfrac{7}{8}e^2m^2 - \tfrac{2595}{128}e^2m^3 = k_2$$
$$\tfrac{11}{4}m^2 + \tfrac{59}{6}m^3 + \tfrac{75}{8}e^2m + \tfrac{893}{36}m^4 + \tfrac{1101}{32}e^2m^2 + \tfrac{2855}{54}m^5 + \tfrac{64271}{512}e^2m^3 = \lambda_2$$
$$\tfrac{15}{2}em + \tfrac{263}{8}em^2 + \tfrac{48217}{384}em^3 + \tfrac{1880537}{4608}em^4 = \mu_2$$
$$\tfrac{17}{4}em^2 + \tfrac{169}{12}em^3 + \tfrac{195}{16}e^3m + \tfrac{9577}{288}em^4 + \tfrac{2655}{64}e^3m^2 = \mu_3$$
$$\tfrac{45}{8}e^2m + \tfrac{53}{2}e^2m^2 + \tfrac{263089}{1536}e^2m^3 + \tfrac{77001107}{9216}e^2m^4 + \tfrac{193216363643}{442368}e^2m^5 = \nu_3$$

gesetzt, und bedeutet c die mittlere Länge des Mondes in seiner Bahn, so hat man

$$(51)\quad 2w + 2\Omega = 2c + k_1\sin g + k_2\sin 2g + \lambda_2\sin 2D + \mu_2\sin(2D-g) + \mu_3\sin(2D+g) + \\ + \nu_3\sin(2D-2g)$$

Mit Hilfe der oben angegebenen Werte von e und m ergibt sich

$\log k_1 = 9.3415$	$\log \lambda_2 = 8.3664$	$\log \mu_3 = 7.273$
$\quad k_2 = 7.874$	$\quad \mu_2 = 8.6482$	$\quad \nu_3 = 7.310$

Wenn man die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (51) auf $2c$ folgenden periodischen Glieder mit p bezeichnet, so erhält man unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung

$$(52)\quad \begin{aligned} \sin(2w+2\Omega) &= \sin[2c+p] = (1-\tfrac{1}{2}p^2)\sin 2c + (p-\tfrac{1}{6}p^3)\cos 2c \\ \cos(2w+2\Omega) &= \cos[2c+p] = (1-\tfrac{1}{2}p^2)\cos 2c - (p-\tfrac{1}{6}p^3)\sin 2c \end{aligned}$$

Es reicht nun völlig aus, wenn man setzt

$$\tfrac{1}{6}p^3 = \tfrac{1}{6}[k_1^3\sin^3 g + 3k_1^2k_2\sin^2 g\sin 2g + 3k_1^2\lambda_2\sin^2 g\sin 2D + 3k_1^2\mu_2\sin^2 g\sin(2D-g)]$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Formel

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)$$

an und vernachlässigt alle Glieder, welche von anderen Argumenten als den in (50) und (51) enthaltenen abhängen, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{6}p^3 = \tfrac{1}{8}k_1^3\sin g + \tfrac{1}{4}k_1^2k_2\sin 2g + \tfrac{1}{4}k_1^2\lambda_2\sin 2D + \tfrac{1}{4}k_1^2\mu_2\sin(2D-g) - \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2\sin(2D+g) - \\ - \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2\sin(2D-2g)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und unter Einführung des Wertes von p erhält man

$$(53)\quad p - \tfrac{1}{6}p^3 = k_1(1-\tfrac{1}{8}k_1^2)\sin g + k_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin 2g + \lambda_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin 2D + \\ + \mu_2(1-\tfrac{1}{4}k_1^2)\sin(2D-g) + (\mu_3+\tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2)\sin(2D+g) + (\nu_3+\tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2)\sin(2D-2g)$$

Ferner genügt es, zu setzen

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}k_1^2\sin^2 g + k_1k_2\sin 2g\sin g + k_1\lambda_2\sin 2D\sin g + k_1\mu_2\sin(2D-g)\sin g + \\ + k_1\mu_3\sin(2D+g)\sin g + k_1\nu_3\sin(2D-2g)\sin g + \\ + \tfrac{1}{2}\lambda_2^2\sin^2 2D + \lambda_2\mu_2\sin 2D\sin(2D-g) + \tfrac{1}{2}\mu_2^2\sin^2(2D-g)$$

Macht man jetzt wieder von der obigen Formel für $\sin a \sin b$ Gebrauch und beschränkt sich auf solche Glieder, welche die in (50) und (51) auftretenden Argumente enthalten, so ergibt sich

$$(54)\quad 1 - \tfrac{1}{2}p^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) - \tfrac{1}{2}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2)\cos g + \tfrac{1}{4}k_1^2 \cos 2g + \\ + \tfrac{1}{2}k_1(\mu_2 - \mu_3)\cos 2D - \tfrac{1}{2}k_1(\lambda_2 - \nu_3)\cos(2D - g) + \tfrac{1}{2}k_1\lambda_2\cos(2D + g) - \\ - \tfrac{1}{2}k_1\mu_2\cos(2D - 2g)$$

Aus den Gleichungen (52), (53) und (54) folgt, wenn zur Abkürzung

$1 - \tfrac{1}{4}(k_1^2 + \lambda_2^2 + \mu_2^2) = s_0$	$\log s_0 = 9.99446$
$\tfrac{1}{2}k_1(1 - \tfrac{1}{8}k_1^2) - \tfrac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = s_1$	» $s_1 = 9.0352$
$\tfrac{1}{2}k_1(1 - \tfrac{1}{8}k_1^2) + \tfrac{1}{4}(k_1 k_2 + \lambda_2\mu_2) = t_1$	» $t_1 = 9.0406$
$\tfrac{1}{8}k_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) = s_2$	» $s_2 = 7.9877$
$\tfrac{1}{8}k_1^2 - \tfrac{1}{2}k_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) = t_2$	» $t_2 = 7.367$
$\tfrac{1}{2}\lambda_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) + \tfrac{1}{4}k_1(\mu_2 - \mu_3) = u_2$	» $u_2 = 8.1406$
$\tfrac{1}{2}\lambda_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) - \tfrac{1}{4}k_1(\mu_2 - \mu_3) = v_2$	» $v_2 = 7.9612$
$\tfrac{1}{2}\mu_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) - \tfrac{1}{4}k_1(\lambda_2 - \nu_3) = x_2$	» $x_2 = 8.3182$
$\tfrac{1}{2}\mu_2(1 - \tfrac{1}{4}k_1^2) + \tfrac{1}{4}k_1(\lambda_2 - \nu_3) = y_2$	» $y_2 = 8.3642$
$\tfrac{1}{4}k_1\lambda_2 + \tfrac{1}{2}(\mu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2) = s_3$	» $s_3 = 7.371$
$\tfrac{1}{4}k_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\mu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\mu_2) = t_3$	» $t_3 = 6.31$
$\tfrac{1}{4}k_1\mu_2 - \tfrac{1}{2}(\nu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2) = u_3$	» $u_3 = 7.131$
$\tfrac{1}{4}k_1\mu_2 + \tfrac{1}{2}(\nu_3 + \tfrac{1}{8}k_1^2\lambda_2) = v_3$	» $v_3 = 7.548$

gesetzt wird,

$$(55)\quad \sin(2w + 2\Omega) = \underset{9919.8}{s_0}\sin 2c + \underset{1089}{s_1}\sin[2c + g] - \underset{1103}{t_1}\sin[2c - g] + \\ + \underset{98}{s_2}\sin[2c + 2g] + \underset{23}{t_2}\sin[2c - 2g] + \underset{139}{u_2}\sin[2c + 2D] - \underset{92}{v_2}\sin[2c - 2D] + \\ + \underset{209}{x_2}\sin[2c + 2D - g] - \underset{232}{y_2}\sin[2c - 2D + g] + \underset{24}{s_3}\sin[2c + 2D + g] + \\ + \underset{2}{t_3}\sin[2c - 2D - g] - \underset{14}{u_3}\sin[2c + 2D - 2g] - \underset{35}{v_3}\sin[2c - 2D + 2g]$$

Um nun das Produkt $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin(2w + 2\Omega)$ zu entwickeln, setze man für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$ seinen durch die Gleichung (50) bestimmten Ausdruck ein. Als erstes Glied des Produktes erhält man dann $\alpha_0 \sin(2w + 2\Omega)$. Die Zahlenwerte der mit α_0 multiplizierten Koeffizienten der Gleichung (55), ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, findet man unterhalb der Koeffizienten angegeben; bei dem Koeffizienten von $\sin 2c$ ist auch die fünfte Dezimale mitgeteilt. Das zweite Glied des Produktes ist $\beta_1 \cos g \sin(2w + 2\Omega)$. Unter Anwendung der Gleichung (55) und mit Benutzung der Formel

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a + b) + \tfrac{1}{2}\sin(a - b)$$

wird, wenn alle die kleinen Glieder unberücksichtigt bleiben, welche nicht von den in (55) vorkommenden Argumenten abhängen,

$$(56^1)\quad \beta_1 \cos g \sin(2w+2\Omega) = -\underset{1.1}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(t_1 - s_1)\sin 2c + \underset{820}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(s_0 + s_2)\sin[2c+g] +$$

$$+\underset{814}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(s_0+t_2)\sin[2c-g] + \underset{89}{\tfrac{1}{2}\beta_1 s_1}\sin[2c+2g] - \underset{90}{\tfrac{1}{2}\beta_1 t_1}\sin[2c-2g] +$$

$$+\underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(x_2+s_3)\sin[2c+2D] - \underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(y_2-t_3)\sin[2c-2D] +$$

$$+\underset{10}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(u_2-u_3)\sin[2c+2D-g] - \underset{10}{\tfrac{1}{2}\beta_1}(v_2+v_3)\sin[2c-2D+g] +$$

$$+\underset{11}{\tfrac{1}{2}\beta_1 u_2}\sin[2c+2D+g] - \underset{8}{\tfrac{1}{2}\beta_1 v_2}\sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\beta_1 x_2}\sin[2c+2D-2g] - \underset{19}{\tfrac{1}{2}\beta_1 y_2}\sin[2c-2D+2g]$$

In dieser Formel sind unterhalb der Koeffizienten deren Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben; dieselbe Bemerkung gilt für die folgenden Gleichungen, in denen wiederum alle Glieder vernachlässigt wurden, welche von anderen Argumenten abhängen als den in der Formel (55) auftretenden, außerdem aber auch diejenigen, deren Koeffizienten weniger als eine halbe Einheit der vierten Dezimale betragen. Man erhält so

$$56^2)\quad \beta_2 \cos 2g \sin(2w+2\Omega) = \underset{0.8}{\tfrac{1}{2}\beta_2}(s_2+t_2)\sin 2c - \underset{7}{\tfrac{1}{2}\beta_2 t_1}\sin[2c+g] + \underset{7}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_1}\sin[2c-g] +$$

$$+\underset{66}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_0}\sin[2c+2g] + \underset{66}{\tfrac{1}{2}\beta_2 s_0}\sin[2c-2g] +$$

$$+\underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 x_2}\sin[2c+2D+g] - \underset{2}{\tfrac{1}{2}\beta_2 y_2}\sin[2c-2D-g] +$$

$$+\underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 u_2}\sin[2c+2D-2g] - \underset{1}{\tfrac{1}{2}\beta_2 v_2}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^3)\quad \delta_2 \cos 2D \sin(2w+2\Omega) = \underset{0.6}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(u_2 - v_2)\sin 2c - \underset{3}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(y_2 - s_3)\sin[2c+g] +$$

$$+\underset{3}{\tfrac{1}{2}\delta_2}(x_2+t_3)\sin[2c-g] + \underset{131}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_0}\sin[2c+2D] +$$

$$+\underset{131}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_0}\sin[2c-2D] - \underset{15}{\tfrac{1}{2}\delta_2 t_1}\sin[2c+2D-g] +$$

$$+\underset{14}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_1}\sin[2c-2D+g] + \underset{14}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_1}\sin[2c+2D+g] -$$

$$-\underset{15}{\tfrac{1}{2}\delta_2 t_1}\sin[2c-2D-g] + \underset{1}{\tfrac{1}{2}\delta_2 s_2}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^4)\quad \varepsilon_2\cos(2D-g)\sin(2w+2\Omega)=\tfrac{1}{2}\varepsilon_2(u_2-v_3)\sin[2c+g]-\tfrac{1}{2}\varepsilon_2(v_2+u_3)\sin[2c-g]+$$
$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_1}\sin[2c+2D]-\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 t_1}\sin[2c-2D]+$$
$$+\underset{155}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_0}\sin[2c+2D-g]+\underset{155}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_0}\sin[2c-2D+g]+$$
$$+\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_2}\sin[2c+2D+g]-\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 t_1}\sin[2c+2D-2g]+$$
$$+\underset{17}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 s_1}\sin[2c-2D+2g]$$

$$(56^5)\quad \varepsilon_3\cos(2D+g)\sin(2w+2\Omega)=-\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 t_1}\sin[2c+2D]+\underset{2}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_1}\sin[2c-2D]+$$
$$+\underset{20}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_0}\sin[2c+2D+g]+\underset{20}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 s_0}\sin[2c-2D-g]$$

$$(56^6)\quad \eta_3\cos(2D-2g)\sin(2w+2\Omega)=\underset{8}{\tfrac{1}{2}\eta_3 s_0}\sin[2c+2D-2g]+\underset{8}{\tfrac{1}{2}\eta_3 s_0}\sin[2c-2D+2g]$$

Die Summe der mit α_0 multiplizierten Gleichung (55)*) und der Gleichungen (56^1) bis (56^6) ist gleich $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)$, und zwar folgt mit Benutzung der unterhalb der Koeffizienten der genannten Gleichungen mitgeteilten Zahlen

$$(57)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)=\underset{[9.9965]}{0.9920}\sin 2c+\underset{[9.2790]}{0.1901}\sin[2c+g]-\underset{[8.4487]}{0.0281}\sin[2c-g]+$$
$$+\underset{[8.4031]}{0.0253}\sin[2c+2g]-\underset{[6.00]}{0.0001}\sin[2c-2g]+\underset{[8.4829]}{0.0304}\sin[2c+2D]+$$
$$+\underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c-2D]+\underset{[8.5551]}{0.0359}\sin[2c+2D-g]-$$
$$-\underset{[7.863]}{0.0073}\sin[2c-2D+g]+\underset{[7.857]}{0.0072}\sin[2c+2D+g]-$$
$$-\underset{[6.48]}{0.0003}\sin[2c-2D-g]-\underset{[6.70]}{0.0005}\sin[2c+2D-2g]-$$
$$-\underset{[7.462]}{0.0029}\sin[2c-2D+2g]$$

In dieser Gleichung sind unterhalb der Koeffizienten ihre Logarithmen angegeben.

Aus den Gleichungen (52) und (50) folgt, daß, wenn man auf der rechten Seite von (57) $2c$ durch $90^\circ+2c$ oder auch sin durch cos ersetzt, der Ausdruck für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+2\Omega)$ erhalten wird. Ferner lehrt die Gleichung (51), daß man, um $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3$

*) Man achte auf die S. 76, Zeile 9 v. u. gemachte Bemerkung.

$\sin(2w+\Omega)$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+\Omega)$ zu erhalten, in den Formeln für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin(2w+2\Omega)$, beziehungsweise $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos(2w+2\Omega)$ an Stelle von $2c$ zu setzen hat $2c-\Omega$; ersetzt man dagegen $2c$ durch $2c-2\Omega$, so ergeben sich die Gleichungen für $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin 2w$ und $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos 2w$.

Es soll jetzt noch der Ausdruck $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin\Omega$ entwickelt werden; dabei ist aber auf die periodischen Störungen der Elemente i und Ω Rücksicht zu nehmen. Bedeuten i_0 und Ω_0 die mittleren Werte von i und Ω, bedeuten ferner γ, γ', δ, δ' vier Konstanten, und bezeichnet man mit L die mittlere Länge der Sonne, so ist*)

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0+\gamma\sin(2L-2\Omega_0)+\delta\sin 2\omega\\ i &= i_0+\gamma'\cos(2L-2\Omega_0)+\delta'\cos 2\omega\end{aligned}\tag{58}$$

$$\begin{aligned}\log\gamma &= 8.440, & \log\delta &= 7.152\\ \gamma' &= 7.393, & \delta' &= 6.106\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (58) ergibt sich, wenn die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sin 2i_0 &= i_1 & \log i_1 &= 8.64992\\ \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\gamma\sin 2i_0+\gamma'\cos 2i_0) &= i_2 & i_2 &= 7.088\\ \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\delta\sin 2i_0+\delta'\cos 2i_0) &= i_3 & i_3 &= 5.800\end{aligned}$$

eingeführt werden, wo $i_0 = 5^\circ 8' 43''$ anzunehmen ist,

$$\tfrac{1}{4}\sin 2i\sin\Omega = i_1\sin\Omega_0+i_2\sin(2L-\Omega_0)+i_3\sin(2\omega+\Omega_0)$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (50) zu multiplizieren. Unter Vernachlässigung sehr kleiner und für die Folge bedeutungsloser Glieder erhält man, wenn nach Ausführung der Multiplikation an Stelle von Ω_0 wieder Ω gesetzt wird,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\sin\Omega = {}& \underset{8.65196}{\alpha_0 i_1}\sin\Omega+\underset{7.565}{\tfrac{1}{2}\beta_1 i_1}\sin(\Omega+g)+\underset{7.565}{\tfrac{1}{2}\beta_1 i_1}\sin(\Omega-g)+\\ &+\underset{6.77}{\tfrac{1}{2}\delta_2 i_1}\sin(\Omega+2D)+\underset{6.77}{\tfrac{1}{2}\delta_2 i_1}\sin(\Omega-2D)+\underset{6.85}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 i_1}\sin(\Omega+2D-g)+\\ &+\underset{6.85}{\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 i_1}\sin(\Omega-2D+g)+\underset{7.090}{\alpha_0 i_2}\sin(2L-\Omega)+\underset{5.802}{\alpha_0 i_3}\sin(2\omega+\Omega)\end{aligned}\tag{59}$$

Unterhalb der Koeffizienten sind ihre Logarithmen angegeben. Ersetzt man auf der rechten Seite von (59) sin durch cos, so erhält man die Entwicklung für $\frac{1}{4}\sin 2i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3\cos\Omega$.

Der Einfluß der periodischen Störungen von i und Ω auf die Glieder $\frac{1}{4}\sin^2 i\sin 2\Omega$ und $\frac{1}{8}\sin^2 i\cos 2\Omega$ ist zu vernachlässigen; es wird dann hinreichend genau

*) *Perchot*, Sur les mouvements des nœuds et du périgée de la Lune, p. 40, Thèse, Paris 1892.

(60)
$$\tfrac{1}{4}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin 2\Omega = \tfrac{1}{4}\alpha_0 \sin^2 i_0 \sin 2\Omega \qquad \log \tfrac{1}{4}\alpha_0 \sin^2 i_0 = 7.3054$$
$$\tfrac{1}{8}\sin^2 i\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos 2\Omega = \tfrac{1}{8}\alpha_0 \sin^2 i_0 \cos 2\Omega \qquad \log \tfrac{1}{8}\alpha_0 \sin^2 i_0 = 7.0044$$

wo rechts Ω statt Ω_0 gesetzt wurde. Der Einfluß der periodischen Störungen der Elemente i und Ω auf die übrigen Glieder der Gleichungen (48) ist ohne Bedeutung für das Endresultat der Untersuchung und kann demnach unberücksichtigt bleiben.

Im vorigen sind alle Formeln abgeleitet worden, deren man bedarf, um die gesuchten Entwicklungen der auf der rechten Seite der Gleichungen (48) stehenden Ausdrücke zu erhalten. Zur Anwendung gelangen die Formeln (57), (59), (60) und, wegen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der dritten der Gleichungen (48), noch die Formel (50); für die in den Gleichungen (48) vorkommenden Koeffizienten, insoweit deren Werte nicht schon mitgeteilt wurden, hat man

$\log \tfrac{1}{2}\cos^4 \tfrac{1}{2} i = 9.6972$ $\quad \log \tfrac{1}{4}(\cos^4 \tfrac{1}{2} i - \sin^2 i) = 9.39267$ $\quad \log \tfrac{3}{8}\sin^2 i = 7.4794$
$\log \tfrac{1}{2}\cos^2 \tfrac{1}{2} i \sin i = 8.6508$ $\quad \log \tfrac{1}{4}\cos^4 \tfrac{1}{2} i = 9.3962$

Wenn nun einige belanglose Glieder fortgelassen und die Koeffizienten logarithmisch angesetzt werden, so erhält man

(61¹) $$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c = 9.6937 \sin 2c + 8.9762 \sin[2c+g] + 8_n1459 \sin[2c-g] +$$
$$+ 8.1003 \sin[2c+2g] + 8.1801 \sin[2c+2D] +$$
$$+ 6.40 \sin[2c-2D] + 8.2523 \sin[2c+2D-g] +$$
$$+ 7_n560 \sin[2c-2D+g] + 7.554 \sin[2c+2D+g] +$$
$$+ 7_n159 \sin[2c-2D+2g] + 7.3054 \sin 2\Omega$$

(61²) $$\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c = 8.6473 \sin[2c-\Omega] + 7.9298 \sin[2c+g-\Omega] +$$
$$+ 7_n099 \sin[2c-g-\Omega] + 7.054 \sin[2c+2g-\Omega] +$$
$$+ 7.134 \sin[2c+2D-\Omega] + 7.206 \sin[2c+2D-g-\Omega] +$$
$$+ 8_n65196 \sin\Omega + 7_n565 \sin(\Omega+g) + 7_n565 \sin(\Omega-g) +$$
$$+ 6_n77 \sin(\Omega+2D) + 6_n77 \sin(\Omega-2D) +$$
$$+ 6_n85 \sin(\Omega+2D-g) + 6_n85 \sin(\Omega-2D+g) +$$
$$+ 7_n090 \sin(2L-\Omega) + 5_n802 \sin(2\omega+\Omega)$$

(61³) $$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 (\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c) = 9.39471 + 8.6086 \cos g + 7.520 \cos 2g +$$
$$+ 7.817 \cos 2D + 7.890 \cos(2D-g) +$$
$$+ 6.99 \cos(2D+g) + 6.60 \cos(2D-2g) +$$
$$+ 9_n3927 \cos 2c + 8_n6752 \cos[2c+g] +$$
$$+ 7.845 \cos[2c-g] + 7_n799 \cos[2c+2g] +$$
$$+ 7_n879 \cos[2c+2D] + 6_n10 \cos[2c-2D] +$$
$$+ 7_n951 \cos[2c+2D-g] + 7.259 \cos[2c-2D+g] +$$
$$+ 7_n253 \cos[2c+2D+g] +$$
$$+ 6.858 \cos[2c-2D+2g] +$$
$$+ 7.476 \cos[2c-2\Omega] + 7_n004 \cos 2\Omega$$

$$(61^4)\quad \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c = {}_n6473\cos[2c-\Omega] + {}_n9298\cos[2c+g-\Omega] +$$
$$+ 7.0995\cos[2c-g-\Omega] + {}_n054\cos[2c+2g-\Omega] +$$
$$+ {}_n134\cos[2c+2D-\Omega] + {}_n206\cos[2c+2D-g-\Omega] +$$
$$+ 8.65196\cos\Omega + 7.565\cos(\Omega+g) + 7.565\cos(\Omega-g) +$$
$$+ 6.77\cos(\Omega+2D) + 6.77\cos(\Omega-2D) +$$
$$+ 6.85\cos(\Omega+2D-g) + 6.85\cos(\Omega-2D+g) +$$
$$+ 7.090\cos(2L-\Omega) + 5.802\cos(2\omega+\Omega)$$

Die in diesem Artikel gegebenen Entwicklungen können noch dazu benutzt werden, die in den Gleichungen (33^1) und (33^2) vorkommenden Ausdrücke $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ als Funktionen der Zeit darzustellen; dabei kann man von allen periodischen Störungen der Erdbahn absehen und letztere als elliptisch betrachten. Wenn unter dieser Voraussetzung Δ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, e' die Exzentrizität der Erdbahn und g' die mittlere Anomalie der Sonne bedeutet, so hat man

$$\frac{\Delta}{r_\odot} = 1 + e'\cos g' + e'^2\cos 2g'$$

Aus der Vergleichung dieser Relation mit (49) folgt, daß, wenn man in der Gleichung (50), bzw. in den Ausdrücken für die Koeffizienten dieser Gleichung, e_1, e_2, g der Reihe nach mit e', e'^2, g' vertauscht und außerdem $\sigma_2 = \tau_2 = \omega_3 = 0$ setzt, man die Entwicklung für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3$ erhält. Es ergibt sich also bis auf Glieder von der Ordnung e'^2 genau

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 = 1 + \tfrac{3}{2}e'^2 + 3e'\cos g' + \tfrac{9}{2}e'^2\cos 2g'$$

Wird t von 1850.0 an gezählt, und als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert gewählt, so ist nach *Newcomb*

$$e' = 0.01677 - 0.000042\,t,$$

oder, wie zur Abkürzung gesetzt werden soll,

$$e' = e'_0 + e'_1 t$$

Es genügt nun, das säkulare Glied von e' nur bei der Berechnung von $\frac{3}{2}e'^2$ in Rechnung zu ziehen; setzt man dementsprechend

$\alpha'_0 = 1 + \frac{3}{2}e'^2_0$	$\log \alpha'_0 = 0.00018$
$\alpha'_1 = 3e'_1e'_0$	» $\alpha'_1 = 4_n325$
$\beta'_1 = 3e'_0$	» $\beta'_1 = 8.7016$
$\beta'_2 = \frac{9}{2}e'^2_0$	» $\beta'_2 = 7.102$,

so wird

$$(62)\quad \left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 = \alpha'_0 + \alpha'_1 t + \beta'_1\cos g' + \beta'_2\cos 2g'$$

Wenn ferner wieder L die mittlere Länge der Sonne bedeutet, und die Bezeichnungen eingeführt werden

$k'_1 = 4e'_0$	$\log k'_1 = 8.8266$
$k'_2 = \frac{5}{2}e'^2_0$	» $k'_2 = 6.847$

so ist der Theorie der elliptischen Bewegung zufolge

$$2l_\odot = 2L + k_1' \sin g' + k_2' \sin 2g'$$

Ebendieselbe Gleichung erhält man, wenn man in der Gleichung (51) $2w + 2\Omega$, c, k_1, k_2, g der Reihe nach mit $2l_\odot$, L, k_1', k_2', g' vertauscht und außerdem $\lambda_2 = \mu_2 = \mu_3 = \nu_3 = 0$ setzt. Mit Hilfe dieser Substitutionen kann man also auch aus der Gleichung (55) unmittelbar die entsprechende für $\sin 2l_\odot$ erhalten. Geht man auf die Bedeutung der in (55) auftretenden Koeffizienten zurück und setzt

$$\begin{aligned} s_0' &= 1 - \tfrac{1}{4}k_1'^2 & \log s_0' &= 9.99951 \\ s_1' &= \tfrac{1}{2}k_1' & \text{» } s_1' &= 8.5256 \\ t_1' &= \tfrac{1}{2}k_1' = s_1' & \text{» } t_1' &= 8.5256, \end{aligned}$$

so erhält man mit Vernachlässigung der von $2L \pm 2g'$ abhängigen Glieder

$$\sin 2l_\odot = \underset{9992.8}{s_0' \sin 2L} + \underset{336}{s_1' \sin(2L + g')} - \underset{336}{t_1' \sin(2L - g')} \tag{63}$$

Diese Gleichung ist mit der Gleichung (62) zu multiplizieren. In (63) sind bereits unterhalb der Koeffizienten ihre mit α_0' multiplizierten Zahlenwerte, ausgedrückt in Einheiten der vierten Dezimale, angegeben. Die durch die Multiplikation des Gliedes $\alpha_1' t$ mit der Gleichung (63) entstehenden Produkte können vernachlässigt werden. Weiterhin erhält man

$$\beta_1' \cos g' \sin 2l_\odot = \underset{251}{\tfrac{1}{2}\beta_1' s_0' \sin(2L + g')} + \underset{251}{\tfrac{1}{2}\beta_1' s_0' \sin(2L - g')}$$

$$\beta_2' \cos 2g' \sin 2l_\odot = \underset{0}{-\tfrac{1}{2}\beta_2' t_1' \sin(2L + g')} + \underset{0}{\tfrac{1}{2}\beta_2' s_1' \sin(2L - g')}$$

Die Summe aus den beiden letzten Gleichungen und der mit α_0' multiplizierten Gleichung (63) stellt den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot$ dar, und zwar ergibt sich mit Hilfe der unterhalb der Koeffizienten der drei letzten Gleichungen stehenden Zahlen

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot = 0.99928 \sin 2L + 0.0587 \sin(2L + g') - 0.0085 \sin(2L - g') \tag{64}$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung sin durch cos, so erhält man den Ausdruck für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot$. Endlich ist

$$\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot \tag{64'}$$

Mit Berücksichtigung von (62) und der der Formel (64) entsprechenden Formel für $\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \cos 2l_\odot$ ergeben sich aus (64) und (64') die folgenden Gleichungen, in denen die Koeffizienten logarithmisch angesetzt sind

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot = 9.69866 \sin 2L + 8.4676 \sin(2L + g') + 7_n628 \sin(2L - g') \tag{65^1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot = 9.39812 + 3_n723\, t + 8.0995 \cos g' + 6.50 \cos 2g' + \\ + 9_n39763 \cos 2L + 8_n1666 \cos(2L + g') + 7.327 \cos(2L - g') \tag{65^2}$$

29. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse der Erde. Unter Benutzung der in den zwei letzten Paragraphen gewonnenen Reihenentwicklungen sollen zunächst die Differentialgleichungen (33) in eine zur Integration geeignete Form gebracht werden. Den Differentialgleichungen (33) gemäß ist die Gleichung (61^1) mit der ersten der Gleichungen (43) zu multiplizieren, ferner ist die Gleichung (61^2) mit der zweiten der Gleichungen (43) zu multiplizieren, usw. Diese Rechnung wird übersichtlicher, wenn man sie in zwei Teilen ausführt, und zwar folgendermaßen. Die Glieder, welche aus der Multiplikation mit den Gleichungen (43) und mit der zweiten der Gleichungen (46) hervorgehen, sollen einstweilen ganz vernachlässigt werden, oder es soll, was auf dasselbe herauskommt,

m) $$\frac{\sin a \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 0, \qquad \frac{\sin a \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 0, \qquad \sin a \cos 2\varepsilon = 0$$

angenommen werden.

In den Gleichungen (44) und (45) berücksichtige man vorläufig nur die Glieder nullter Ordnung und setze demnach

n)
$$\frac{\cos a \sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} \qquad \log\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 0.26356$$
$$\frac{\cos a \cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} \qquad \log\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} = 0.23447$$
$$\cos a \sin\varepsilon = \sin\varepsilon_0 \qquad \log\sin\varepsilon_0 = 9.59998$$
$$\cos a \cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 \qquad \log\cos\varepsilon_0 = 9.96253$$

Ferner berücksichtige man in der ersten der Gleichungen (46) nur das Hauptglied und setze also

o) $$\sin a \sin 2\varepsilon = a_1 \sin 2\varepsilon_0 ,$$

wo nach (38) $a_1 = p_1 t : \sin\varepsilon_0$ ist; hierbei hat man, wenn $p_1 = 5''.341$ in Teilen des Radius ausgedrückt wird,

$$\log\frac{a_1 \sin 2\varepsilon_0}{t} = 5.6767$$

Substituiert man die Werte m), n), o) in die Gleichungen (33) und setzt zur Abkürzung

(66) $$-\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c\cos^2 b_c - \sin^2 b_c)\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \sin b_c \cos b_c \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}\right\}$$

(67) $$-\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot \frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$$

(68) $$\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c \sin\varepsilon_0 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \cos l_c \sin b_c \cos b_c \cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c\cos^2 b_c - \sin^2 b_c)a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\}$$

(69) $$\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} = -\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin 2l_\odot \sin\varepsilon_0 - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot\right] a_1 \sin 2\varepsilon_0\right\},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \frac{d\psi_c}{dt} + \frac{d\psi_\odot}{dt} + \delta\frac{d\psi_c}{dt} + \delta\frac{d\psi_\odot}{dt}\\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_c}{dt} + \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt},\end{aligned} \tag{70}$$

wo die später zu bestimmenden Zusatzglieder $\delta\frac{d\psi_c}{dt}, \ldots, \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt}$ aus der Multiplikation der vorhin vernachlässigten Glieder der Gleichungen (43) bis (46) in die Gleichungen (61[1]) bis (61[4]), bzw. (65[1]) und (65[2]) hervorgehen.

Man führe jetzt in die Gleichungen (66) bis (69) die in (61[1]) bis (61[4]) sowie in (65[1]) und (65[2]) gegebenen Ausdrücke von $\left(\frac{H}{r_c}\right)^3 \sin l_c \cos l_c \cos^2 b_c$, usw. ein und substituiere gleichzeitig für $\log\frac{\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$, $\log\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0}$, usw. ihre oben angeführten numerischen Werte. In dem letzten Gliede des Klammerausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (68), bzw. der Gleichung (69) genügt es, nur den konstanten Teil von $\frac{1}{2}\left(\frac{H}{r_c}\right)^3(\sin^2 l_c \cos^2 b_c - \sin^2 b_c)$, bzw. von $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{r_\odot}\right)^3 \sin^2 l_\odot$ zu berücksichtigen; ferner soll in der Gleichung (65[2]) das Glied $3_n723\,t$ vorläufig vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$\begin{aligned}-\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&9.65827 + 8.8722\cos g + 7.784\cos 2g + 8.081\cos 2D + \\ &+8.154\cos(2D-g)+7.25\cos(2D+g)+6.86\cos(2D-2g)+\\ &+9_n6563\cos 2c+8_n9388\cos[2c+g]+8.109\cos[2c-g]+\\ &+8_n063\cos[2c+2g]+8_n143\cos[2c+2D]+6_n36\cos[2c-2D]+\\ &+8_n215\cos[2c+2D-g]+7.523\cos[2c-2D+g]+\\ &+7_n517\cos[2c+2D+g]+7.122\cos[2c-2D+2g]+\\ &+7.740\cos[2c-2\Omega]+7_n268\cos 2\Omega+8_n8818\cos[2c-\Omega]+\\ &+8_n1643\cos[2c+g-\Omega]+7.334\cos[2c-g-\Omega]+\\ &+7_n288\cos[2c+2g-\Omega]+7_n368\cos[2c+2D-\Omega]+\\ &+7_n440\cos[2c+2D-g-\Omega]+8.88643\cos\Omega+\\ &+7.799\cos(\Omega+g)+7.799\cos(\Omega-g)+7.00\cos(\Omega+2D)+\\ &+7.00\cos(\Omega-2D)+7.08\cos(\Omega+2D-g)+\\ &+7.08\cos(\Omega-2D+g)+7.324\cos(2L-\Omega)+\\ &+6.036\cos(2\omega+\Omega)\Big\}\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}-\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&9.66168+8.3631\cos g'+6.76\cos 2g'+9_n66119\cos 2L+\\ &+8_n4302\cos(2L+g')+7.591\cos(2L-g')\Big\}\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = -\frac{3k^2 M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn}\Big\{&5_n0714\,t+9.2937\sin 2c+8.5762\sin[2c+g]+\\ &+7_n746\sin[2c-g]+7.700\sin[2c+2g]+\\ &+7.780\sin[2c+2D]+6.00\sin[2c-2D]+\\ &+7.852\sin[2c+2D-g]+7_n160\sin[2c-2D+g]+\\ &+7.154\sin[2c+2D+g]+6_n759\sin[2c-2D+2g]+\end{aligned} \tag{73}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6.9054 \sin 2\Omega + 8.6098 \sin[2c - \Omega] + \\
&+ 7.892 \sin[2c + g - \Omega] + 7_{n}062 \sin[2c - g - \Omega] + \\
&+ 7.017 \sin[2c + 2g - \Omega] + 7.097 \sin[2c + 2D - \Omega] + \\
&+ 7.169 \sin[2c + 2D - g - \Omega] + 8_{n}61449 \sin \Omega + \\
&+ 7_{n}528 \sin(\Omega + g) + 7_{n}528 \sin(\Omega - g) + \\
&+ 6_{n}73 \sin(\Omega + 2D) + 6_{n}73 \sin(\Omega - 2D) + \\
&+ 6_{n}81 \sin(\Omega + 2D - g) + 6_{n}81 \sin(\Omega - 2D + g) + \\
&+ 7_{n}053 \sin(2L - \Omega) + 5_{n}765 \sin(2\omega + \Omega)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
(74) \qquad \frac{d\varepsilon'_{\odot}}{dt} = -\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}\Big\{5_{n}0749\,t + 9.29864 \sin 2L + 8.0676 \sin(2L + g') + 7_{n}228 \sin(2L - g')\Big\}
$$

Nimmt man an, daß die Faktoren $\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_{c}}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ bekannt wären, so würde die Integration der vier vorhergehenden Differentialgleichungen keine Schwierigkeiten bereiten. Denn wenn man sich in diesen Gleichungen die Logarithmen durch ihre Numeri ersetzt denkt, so haben die Glieder auf der rechten Seite sämtlich eine der vier Formen

$$
(D) \qquad \alpha, \qquad \beta t, \qquad \gamma \sin(F_{\circ} + f_{\circ} t), \qquad \delta \cos(G_{\circ} + g_{\circ} t),
$$

wo α, β, γ, δ in Teilen des Radius ausgedrückte Zahlengrößen, und $f_{\circ}$ und $g_{\circ}$ die Änderungen von $F_{\circ}$ und $G_{\circ}$ im Laufe der Zeiteinheit bedeuten; die entsprechenden Integrale lauten also

$$
(J) \qquad \alpha t, \qquad \tfrac{1}{2}\beta t^2, \qquad -\frac{\gamma}{f_{\circ}} \cos(F_{\circ} + f_{\circ} t), \qquad \frac{\delta}{g_{\circ}} \sin(G_{\circ} + g_{\circ} t)
$$

Sind auch $f_{\circ}$ und $g_{\circ}$ in Teilen des Radius gegeben, und soll das Resultat der Integration in Bogensekunden ausgedrückt erhalten werden, so muß man die vorigen Integrale noch durch arc 1″ dividieren. Nach den Tafeln von *Hansen* und *Leverrier* hat man aber für die Produkte aus arc 1″ und den in Teilen des Radius ausgedrückten, auf das als Zeiteinheit gewählte julianische Jahrhundert bezogenen Werten der mittleren Bewegung von g, g', …, 2ω

Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″	Argument	Mittl. Beweg. × arc 1″
g . . .	+ 0.040 3786	$2L$ . . .	+ 0.006 092 5
g' . . .	+ 0.003 0461	$2D$ . . .	+ 0.075 353 34
$2c$ . . .	+ 0.081 4458	Ω . . .	− 0.000 163 66
		2ω . . .	+ 0.001 015 94

Es ist jetzt zu zeigen, in welcher Weise sich die Faktoren $\frac{3k^2 M_{c}}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\frac{3k^2 M_{\odot}}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ bestimmen lassen. Wie man mit Hilfe der für die Produkte aus arc 1″ und der mittleren Bewegung der Argumente g, g', …, 2ω gegebenen Werte sieht, ist das Integral aus dem den Faktor $\sin\Omega$ enthaltenden Gliede der Gleichung (73)

weit größer als alle aus den übrigen Gliedern dieser Gleichung hervorgehenden Integrale, und zwar ergibt sich, wenn N den Wert des genannten Integrals bedeutet,

$$N = \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} 251''.506 \cos \Omega$$

Der Wert des Koeffizienten von $\cos \Omega$ läßt sich nun direkt aus den Beobachtungen ableiten (Kap. 16). Als wahrscheinlichsten Wert dieses Koeffizienten oder der sog. Nutationskonstante nimmt man gegenwärtig 9".21 an; somit wird

$$\frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} 251''.506 = 9''.21,$$

also

$$\log \frac{3k^2 M_c}{H^3} \frac{C-A}{Cn} = 8.56371$$

Dieser Logarithmus ist zu sämtlichen in den Klammern auf der rechten Seite der Gleichungen (71) und (73) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren und dann die Integration nach dem oben angegebenen Schema vorzunehmen. Bezeichnet man das Integral $\int_0^t \frac{d\varepsilon_c'}{dt} dt$ mit $\Delta\varepsilon_c$, so erhält man, wenn noch die Argumente $2c - 2D + g$ und $2c - 2D$ mit den gleichbedeutenden $2L + g$, bzw. $2L$ vertauscht werden,

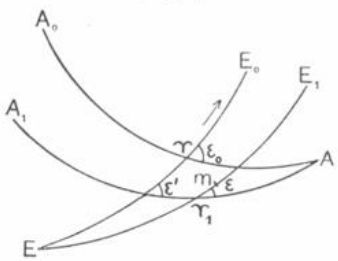
(75)
$$\begin{aligned} -\psi_c = {} & 3438''.8\, t \\ & + 0.068 \sin g \\ & + 0.003 \sin 2g \\ & + 0.006 \sin 2D \\ & + 0.015 \sin (2D - g) \\ & + 0.001 \sin (2D + g) \\ & - 0.005 \sin (2D - 2g) \\ & - 0.204 \sin 2c \\ & - 0.026 \sin (2c + g) \\ & + 0.011 \sin (2c - g) \\ & - 0.003 \sin (2c + 2g) \\ & - 0.003 \sin (2c + 2D) \\ & - 0.001 \sin 2L \\ & - 0.005 \sin [2c + 2D - g] \\ & + 0.003 \sin [2L + g] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D + g] \\ & + 0.001 \sin [2c - 2D + 2g] \\ & + 0.002 \sin [2c - 2\Omega] \\ & + 0.207 \sin 2\Omega \\ & - 0.034 \sin [2c - \Omega] \\ & - 0.004 \sin [2c + g - \Omega] \\ & + 0.002 \sin [2c - g - \Omega] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D - \Omega] \\ & - 0.001 \sin [2c + 2D - g - \Omega] - \end{aligned}$$

(76)
$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_c = {} & + 0''.0445\, t^2 \\ & + 0.088 \cos 2c \\ & + 0.011 \cos [2c + g] \\ & - 0.005 \cos [2c - g] \\ & + 0.001 \cos [2c + 2g] \\ & + 0.001 \cos [2c + 2D] \\ & + 0.001 \cos 2L \\ & + 0.002 \cos [2c + 2D - g] \\ & - 0.001 \cos [2c - 2D + g] \\ & - 0.090 \cos 2\Omega \\ & + 0.018 \cos [2c - \Omega] \\ & + 0.002 \cos [2c + g - \Omega] \\ & - 0.001 \cos [2c - g - \Omega] \\ & + 9.210 \cos \Omega \\ & - 0.003 \cos [\Omega + g] \\ & + 0.003 \cos [\Omega - g] \\ & - 0.001 \cos [\Omega + 2D - g] \\ & + 0.001 \cos [\Omega - 2D + g] \\ & - 0.007 \cos [2L - \Omega] \\ & - 0.003 \cos [2\omega + \Omega] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 17''.227 \sin \Omega \\
&+ 0.006 \sin (\Omega + g) \\
&- 0.006 \sin (\Omega - g) \\
&+ 0.001 \sin (\Omega + 2D - g) \\
&+ 0.001 \sin (\Omega - 2D + g) \\
&+ 0.012 \sin (2L - \Omega) \\
&+ 0.005 \sin (2\omega + \Omega)
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung des Faktors $\frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3} \frac{C-A}{Cn}$ ist ebenfalls nur mit Hilfe der Beobachtungen möglich. Zum Verständnis sei Folgendes bemerkt. Die vorhin abgeleiteten Formeln für $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ zeigen, daß die Lage des Äquators in bezug auf die feste Ekliptik Veränderungen unterworfen ist, welche teils säkular, teils periodisch sind. Da die Gleichungen (72) und (74) ganz ähnlich gebaut sind wie die zur Bestimmung von $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ dienenden Gleichungen (71) und (73), so müssen auch die Ausdrücke für $-\psi_\odot$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ aus säkularen und periodischen Gliedern zusammengesetzt sein. Ebendasselbe gilt demnach für $-\psi$ und $\Delta\varepsilon$. In Fig. 7 bedeute jetzt AA_1 die Lage, welche der Äquator zur Zeit t haben würde, wenn die periodischen Glieder in ψ und $\Delta\varepsilon$ nicht vorhanden wären, oder, wie man sich ausdrückt, es bezeichne AA_1 den mittleren Äquator zur Zeit t; ferner stelle AA_0 den mittleren Äquator zur Zeit $t = 0$ dar. Ist dann EE_0, bzw. EE_1 die Lage der Ekliptik zur Zeit $t = 0$, bzw. $t = t$, und wird die Richtung der Bewegung der Erde in ihrer Bahn durch den Pfeil angezeigt, so nennt man Υ, bzw. Υ_1 das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$, bzw. $t = t$.

Fig. 7.



Nach den früheren Bezeichnungen (S. 68)*) ist nun $E\Upsilon = 180^\circ - \Pi$, $E\Upsilon_1 = b$, somit $E\Upsilon - E\Upsilon_1 = 180^\circ - \Pi - b$, oder nach Einsetzung des durch die Gleichungen (40) und (39) bestimmten Wertes von b, wobei aber b_3 wieder vernachlässigt werden kann,

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = -\psi - p_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - b_2,$$

$$b_2 = (p_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \tfrac{1}{4} p_1 q_1 \operatorname{cotg}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon_0) t^2 - \psi q_1 t \operatorname{cotg} \varepsilon_0 - \frac{p_1 \Delta\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon_0} t$$

Der vorhin gemachten Voraussetzung gemäß sollen hier bei ψ und $\Delta\varepsilon$ nur diejenigen Glieder berücksichtigt werden, welche die Zeit oder deren Quadrat mit konstanten Koeffizienten multipliziert enthalten. Da die niedrigste Potenz von t in ψ die erste und in $\Delta\varepsilon$ die zweite ist, so ist b_2 in bezug auf t mindestens vom zweiten Grade. Differenziert man also die Gleichung für $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ nach t und setzt dann $t = 0$, so ergibt sich, wenn noch die Bezeichnung

$$\left[\frac{d(E\Upsilon - E\Upsilon_1)}{dt}\right]_{t=0} = l$$

*) Dort ist noch nicht angegeben, daß Υ (Fig. 5, S. 66) das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$ bedeuten soll; diese Definition wird erst jetzt verständlich.

eingeführt wird,

$$l = -\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} - p_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_0 \tag{77}$$

Hierin ist

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} \tag{77^1}$$

Da von allen periodischen Gliedern abgesehen werden soll, so hat man nach (75)

$$\left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0} = -\,3438''.8 \tag{77^2}$$

Der Wert, welchen $-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0}$ bei Vernachlässigung der periodischen Glieder annimmt, oder die sog. Konstante der Lunisolarpräzession kann durch Beobachtungen ermittelt werden (Kap. 15); wählt man das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit, so hat man nach *Newcomb*

$$-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = 5036''.95 \tag{77^3}$$

Aus (77^1), (77^2) und (77^3) folgt somit

$$-\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} = 1598''.15$$

Die Gleichung (72) gibt aber, wenn die periodischen Glieder vernachlässigt werden, und das konstante Glied durch arc 1″ dividiert wird,

$$-\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} = \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\,94\,648''$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\log \frac{3k^2 M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn} = 8.22751$$

Dieser Logarithmus ist nun zu allen in den Klammerausdrücken auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (72) und (74) gegebenen logarithmischen Koeffizienten zu addieren. Darauf erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} -\psi_\odot = {} & 1598''.15\, t \\ & + 0.128 \sin g' \\ & + 0.002 \sin 2g' \\ & - 1.270 \sin 2L \\ & - 0.050 \sin (2L + g') \\ & + 0.021 \sin (2L - g') \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_\odot = {} & + 0''.0207\, t^2 \\ & + 0.551 \cos 2L \\ & + 0.022 \cos (2L + g') \\ & - 0.009 \cos (2L - g') \end{aligned} \tag{79}$$

Jetzt erübrigt nur mehr die Berechnung der in (70) mit $\delta\frac{d\psi_c}{dt}$, ... bezeichneten Zusatzglieder, bzw. der ihnen entsprechenden Korrektionsglieder der Integrale (75), (76), (78) und (79); dazu aber bedarf man der Kenntnis genäherter Werte von ψ und $\Delta\varepsilon$. Die Summe aus den Gleichungen (75) und (78) stellt einen Näherungs-

wert von ψ dar, die Summe aus (76) und (79) einen Näherungswert von $\Delta\varepsilon$. Berücksichtigt man nur die Hauptglieder, so folgt

$$\psi = -5036''.95\,t + 17''.23\,\sin\Omega + 1''.27\,\sin 2L$$
$$\Delta\varepsilon = 0''.065\,t^2 + 9''.21\,\cos\Omega$$

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich aus den Gleichungen (43) bis (46), wenn statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen gesetzt werden,

$$\frac{\sin a\,\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 1.12764\,t + 0_n37786\,t^2 + 7.992\,t\,\sin\Omega + 7_n140\,t\,\cos\Omega + 6.86\,t\,\sin 2L$$

$$\frac{\sin a\,\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = 1.49019\,t + 0_n73889\,t^2 + 8.3547\,t\,\sin\Omega + 7_n843\,t\,\cos\Omega + 7.224\,t\,\sin 2L$$

(80[1])

$$\frac{\cos a\,\sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{{}^*\sin 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + 2_n20610\,t + 9_n539\,t^2 + 0_n8653\,\cos\Omega + 7.185\,t\,\sin\Omega + 8.5037\,t\,\cos\Omega$$

$$\frac{\cos a\,\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{{}^*\cos 2\varepsilon_0}{\sin\varepsilon_0} + 7.489 + 2.23519\,t + 9_n415\,t^2 + 1_n84660\,\cos\Omega + 7.489\,\cos 2\Omega + 7_n214\,t\,\sin\Omega + 7_n523\,t\,\cos\Omega$$

(80[2])

$$\cos a\,\sin\varepsilon = {}^*\sin\varepsilon_0 + 1_n63313\,t + 8_n021\,t^2 + 0.9270\,\cos\Omega + 6.61\,t\,\sin\Omega + 6.92\,t\,\cos\Omega$$
$$\cos a\,\cos\varepsilon = {}^*\cos\varepsilon_0 + 1.27058\,t + 7_n095\,t^2 + 0_n5644\,\cos\Omega + 6_n25\,t\,\sin\Omega + 7.283\,t\,\cos\Omega$$
$$\sin a\,\sin 2\varepsilon = {}^* a_1\,\sin 2\varepsilon_0 + 0_n24116\,t^2 + 7.856\,t\,\sin\Omega + 6_n28\,t\,\cos\Omega + 6.72\,t\,\sin 2L$$
$$\sin a\,\cos 2\varepsilon = 0.96211\,t + 0_n20986\,t^2 + 7.827\,t\,\sin\Omega + 7_n260\,t\,\cos\Omega + 6.70\,t\,\sin 2L$$

Die vorigen acht Gleichungen sind mit den nach Maßgabe von (33[1]) und (33[2]) ihnen entsprechenden Gleichungen (61[1]) bis (61[4]), bzw. (65[1]) und (65[2]) zu multiplizieren. Wie aber die Gleichungen (66) bis (69) zeigen, ist die Multiplikation mit den in den Gleichungen (80) mit einem Sternchen versehenen Gliedern bereits ausgeführt worden; es sind also nur noch diejenigen Produkte in Rechnung zu ziehen, welche bei Berücksichtigung der übrigen Glieder der Gleichungen (80) entstehen. Außerdem soll auch die Multiplikation des Gliedes $3_n723\,t$ der Gleichung (65[2]) mit der 3ten und 7ten der Gleichungen (80) nachgeholt werden*). Der größte Teil der bisher vernachlässigten Produkte ist ohne Einfluß auf das Endresultat; die allein zu berücksichtigenden liefern für die in den Gleichungen (70) mit $\delta\frac{d\psi_c}{dt}$, ... bezeichneten Zusatzglieder die folgenden Ausdrücke, in denen statt der in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten ihre Logarithmen mitgeteilt sind.

$$(81)\quad -\delta\frac{d\psi_c}{dt} = \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[1_n60082\,t + 8_n934\,t^2 + 0_n2591\,\cos\Omega + 0_n198\,\cos 2\Omega + 0.8876\,t\,\cos\Omega + 0_n1420\,t\,\sin\Omega\right]$$

$$(82)\quad -\delta\frac{d\psi_\odot}{dt} = \frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[1_n60638\,t + 8_n937\,t^2 + 0_n2634\,\cos\Omega\right]$$

*) Siehe S. 84, Z. 13. Bei der Multiplikation dieses Gliedes mit $\sin 2\varepsilon_0$: $\sin\varepsilon_0$ ist letzterer Quotient in Bogensekunden auszudrücken.

$$(83)\qquad \delta\frac{d\varepsilon'_c}{dt} = \frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}\left[9_n6359\,t^2 + 9.6140\,t\cos\Omega + 9.9235\,t\sin\Omega\right]$$

$$(84)\qquad \delta\frac{d\varepsilon'_\odot}{dt} = \frac{3k^2M_\odot}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}\,9_n6393\,t^2$$

Setzt man jetzt $\Omega = \Omega_0 + \sigma t$, wo σ die mittlere Bewegung des Mondknotens in der Zeiteinheit bezeichnet, und bedeutet m einen konstanten Koeffizienten, so ist

$$m\int t\cos\Omega = \frac{mt}{\sigma}\sin\Omega + \frac{m}{\sigma^2}\cos\Omega$$

$$m\int t\sin\Omega = -\frac{mt}{\sigma}\cos\Omega + \frac{m}{\sigma^2}\sin\Omega$$

Bei der Anwendung dieser Formeln auf die vorigen Differentialgleichungen ist zu beachten, daß die den logarithmischen Koeffizienten entsprechenden Numeri Bogensekunden angeben; will man also die in den Integralen auftretenden Koeffizienten ebenfalls in Bogensekunden ausgedrückt erhalten, so ist für σ sein in Teilen des Radius ausgedrückter Wert zu substituieren. Dieselbe Bemerkung gilt für die Integration der nur von $\cos\Omega$, bzw. $\cos 2\Omega$ abhängigen Glieder. Nach S. 85 hat man aber für den in Teilen des Radius ausgedrückten Wert von σ

$$\sigma = -\frac{0.000\,163\,66}{\text{arc}\,1''}, \qquad \log\sigma = 1_n5284$$

Wird jetzt noch von den früher für $\log\frac{3k^2M_c}{H^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ und $\log\frac{3k^2M_\odot}{\mathcal{A}^3}\,\frac{C-A}{Cn}$ gefundenen Werten Gebrauch gemacht, so erhält man als Integrale der Differentialgleichungen (81) bis (84)

$$(85)\qquad -\delta\psi_c = -0''.7303\,t^2 - 0''.0011\,t^3 + 0''.002\sin\Omega + 0''.001\sin 2\Omega - \\ - 0''.008\,t\sin\Omega - 0''.002\,t\cos\Omega$$

$$(86)\qquad -\delta\psi_\odot = -0''.3411\,t^2 - 0''.0005\,t^3 + 0''.001\sin\Omega$$

$$(87)\qquad \delta\mathcal{A}\varepsilon_c = -0''.0053\,t^3 + 0''.001\,t\cos\Omega$$

$$(88)\qquad \delta\mathcal{A}\varepsilon_\odot = -0''.0025\,t^3$$

Die Summen aus den Gleichungen (75), (78), (85), (86) einerseits und den Gleichungen (76), (79), (87), (88) andrerseits stellen die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (33) dar. Läßt man alle Glieder unberücksichtigt, deren Koeffizienten kleiner als $0''.002$ sind, mit Ausnahme des von $t\cos\Omega$ abhängigen, so erhält man

$$(89)\qquad -\psi = 5036''.95\,t - 1''.071\,t^2 - 0''.002\,t^3 - \\ - 17.224\sin\Omega \\ - 0.008\,t\sin\Omega \\ - 0.002\,t\cos\Omega \\ - 1.271\sin 2L \\ + 0.208\sin 2\Omega \\ - 0.204\sin 2c \\ + 0.128\sin g' \\ + 0.068\sin g \\ - 0.050\sin[2L + g'] -$$

$$(90)\qquad \varepsilon' = \varepsilon_0 + 0''.065\,t^2 - 0''.008\,t^3 + \\ + 9.210\cos\Omega \\ + 0.001\,t\cos\Omega \\ + 0.552\cos 2L \\ - 0.090\cos 2\Omega \\ + 0.088\cos 2c \\ + 0.022\cos[2L + g'] \\ + 0.018\cos[2c - \Omega] \\ + 0.011\cos[2c + g] \\ - 0.009\cos[2L - g'] -$$

$$
\begin{aligned}
&- 0''.034 \sin[2c - \Omega] \\
&- 0.026 \sin[2c + g] \\
&+ 0.021 \sin[2L - g'] \\
&+ 0.015 \sin[2D - g] \\
&+ 0.012 \sin[2L - \Omega] \\
&+ 0.011 \sin[2c - g] \\
&+ 0.006 \sin 2D \\
&+ 0.006 \sin[\Omega + g] \\
&- 0.006 \sin[\Omega - g] \\
&+ 0.005 \sin[2\omega + \Omega] \\
&- 0.005 \sin[2c + 2D - g] \\
&- 0.005 \sin[2D - 2g] \\
&- 0.004 \sin[2c + g - \Omega] \\
&- 0.003 \sin[2c + 2D] \\
&+ 0.003 \sin 2g \\
&- 0.003 \sin[2c + 2g] \\
&+ 0.003 \sin[2L + g] \\
&+ 0.002 \sin[2c - 2\Omega] \\
&+ 0.002 \sin[2c - g - \Omega] \\
&+ 0.002 \sin 2g'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&- 0''.007 \cos[2L - \Omega] \\
&- 0.005 \cos[2c - g] \\
&- 0.003 \cos[\Omega + g] \\
&+ 0.003 \cos[\Omega - g] \\
&- 0.003 \cos[2\omega + \Omega] \\
&+ 0.002 \cos[2c + 2D - g] \\
&+ 0.002 \cos[2c + g - \Omega]
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (89) und (90) bestimmen direkt nur die Lage des Äquators mit bezug auf die Ekliptik der Epoche 1850.0; sie ermöglichen es aber, auch diejenigen Formeln abzuleiten, welche für irgend eine Zeit die Lage des Äquators gegen die jeweilige Ebene der Ekliptik festlegen. Trägt man nämlich auf der beweglichen Ekliptik EE_1 (Fig. 7, S. 87) von E aus in der Richtung nach E_1 hin den Bogen $Em = E\Upsilon$ ab, so gibt der Abstand des beweglichen Äquinox Υ_1 von m an, um wie viel sich der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt innerhalb der Zeit t auf der beweglichen Ekliptik verschoben hat; der Abstand $\Upsilon_1 m$ in Verbindung mit dem Winkel $E_1\Upsilon_1 A = \varepsilon$ bestimmt die Lage des Äquators gegen die bewegliche Ekliptik. Es ist aber $\Upsilon_1 m = E\Upsilon - E\Upsilon_1$, und die Differenz $E\Upsilon - E\Upsilon_1$ ist, wie schon oben (S. 87) bemerkt, gleich $180^\circ - \Pi - b$. Ferner hat man den Gleichungen (40) und (39) zufolge, wenn b_3 mitgenommen wird, und für p_1, p_2, q_1, q_2, ε_0 ihre Zahlenwerte eingesetzt werden,

$$
\begin{aligned}
(91) \qquad b = {} & 180^\circ - \Pi + \psi + 12''.31t + 0''.453t^2 + [6.71873 - 10]t\psi + \\
& + [6_n2132 - 10]t\Delta\varepsilon + [3_n5185 - 10]t^2\psi + [5_n4747 - 10]t\psi^2,
\end{aligned}
$$

wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Wenn man jetzt noch in den vier letzten Gliedern der vorigen Gleichung an Stelle von ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) setzt, so ergibt sich für den Abstand $\Upsilon_1 m$, der mit A bezeichnet werden möge,

$$
\begin{aligned}
(91^a) \qquad A = {} & - \psi - 12''.31t + 2''.183t^2 + 0''.001t^3 - 0''.009t \sin\Omega + \\
& + 0''.002t \cos\Omega
\end{aligned}
$$

Der Winkel ε ist durch die Gleichung (41) gegeben, und zwar hat man, wenn für p_1, p_2, q_1, q_2, ψ ihre Werte eingeführt werden,

$$(91^b) \qquad \varepsilon = \varepsilon' - 46''.838\,t - 0''.074\,t^2 + 0''.009\,t^3,$$

wo für ε' sein Wert aus (90) zu substituieren ist. Führt man diese Substitution aus und setzt auch in der vorigen Gleichung für Δ an Stelle von $-\psi$ seinen durch (89) bestimmten Wert ein, so ergibt sich

(92)
$$\begin{aligned}\Delta = {} & 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0.001\,t^3 \\ & - 17.224 \sin\Omega \\ & - 0.017\,t \sin\Omega \\ & - 1.271 \sin 2L \\ & + 0.208 \sin 2\Omega \\ & - 0.204 \sin 2c \\ & + 0.128 \sin g' \\ & + 0.068 \sin g \\ & - 0.050 \sin[2L + g'] \\ & - 0.034 \sin[2c - \Omega] \\ & - 0.026 \sin[2c + g] \\ & + 0.021 \sin[2L - g'] \\ & + 0.015 \sin[2D - g] \\ & + 0.012 \sin[2L - \Omega] \\ & + 0.011 \sin[2c - g] \\ & + 0.006 \sin 2D \\ & + 0.006 \sin[\Omega + g] \\ & - 0.006 \sin[\Omega - g] \\ & + 0.005 \sin[2\omega + \Omega] \\ & - 0.005 \sin[2c + 2D - g] \\ & - 0.005 \sin[2D - 2g] \\ & - 0.004 \sin[2c + g - \Omega] \\ & - 0.003 \sin[2c + 2D] \\ & + 0.003 \sin 2g \\ & - 0.003 \sin[2c + 2g] \\ & + 0.003 \sin[2L + g] \\ & + 0.002 \sin[2c - 2\Omega] \\ & + 0.002 \sin[2c - g - \Omega] \\ & + 0.002 \sin 2g'\end{aligned}$$

(93)
$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3 + \\ & + 9.210 \cos\Omega \\ & + 0.001\,t \cos\Omega \\ & + 0.552 \cos 2L \\ & - 0.090 \cos 2\Omega \\ & + 0.088 \cos 2c \\ & + 0.022 \cos[2L + g'] \\ & + 0.018 \cos[2c - \Omega] \\ & + 0.011 \cos[2c + g] \\ & - 0.009 \cos[2L - g'] \\ & - 0.007 \cos[2L - \Omega] \\ & - 0.005 \cos[2c - g] \\ & - 0.003 \cos[\Omega + g] \\ & + 0.003 \cos[\Omega - g] \\ & - 0.003 \cos[2\omega + \Omega] \\ & + 0.002 \cos[2c + 2D - g] \\ & + 0.002 \cos[2c + g - \Omega]\end{aligned}$$

Für die Reduktion der Beobachtungen ist auch die Kenntnis des in Fig. 5 (S. 66) mit $N\Upsilon_1 = a$ bezeichneten Bogens von Wichtigkeit. Der Wert von a ist durch die Gleichungen (38) und (40) bestimmt; unter Berücksichtigung von a_3 und mit Benutzung der Zahlenwerte von p_1, p_2, q_1, q_2 und ε_0 erhält man

$$\begin{aligned}(94) \quad a = {} & 13''.417\,t + 0''.493\,t^2 + [6.75619 - 10]\,t\psi + \\ & + [6_n1758 - 10]\,t\Delta\varepsilon + [3_n5873 - 10]\,t^2\psi + [5_n5122 - 10]\,t\psi^2,\end{aligned}$$

wo die in Klammern gesetzten Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Werden in (94) für ψ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$ ihre Werte aus (89) und (90) substituiert, so ergibt sich

$$(95) \qquad a = 13''.417\,t - 2''.380\,t^2 - 0''.001\,t^3 + 0''.010\,t\sin\Omega - 0''.001\,t\cos\Omega$$

Die Gleichungen (89), (90), (92), (93) und (95) bestehen aus Gliedern, welche teils periodisch, teils säkular sind. Werden die Aggregate der säkularen Glieder in (89), (90), (92), (93), (95) mit $(-\psi)$, (ε'), (Δ), (ε), (a) bezeichnet, so hat man

$$(96) \qquad \begin{aligned} (-\psi) &= 5036''.95\,t - 1''.071\,t^2 - 0''.002\,t^3 \\ (\varepsilon') &= \varepsilon_0 + 0''.065\,t^2 - 0''.008\,t^3 \\ (\Delta) &= 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0''.001\,t^3 \\ (\varepsilon) &= \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3 \\ (a) &= 13''.417\,t - 2''.380\,t^2 - 0''.001\,t^3 \end{aligned}$$

Man nennt $(-\psi)$ die Lunisolarpräzession in Länge, $(\varepsilon') - \varepsilon_0$ die Lunisolarpräzession in Schiefe, (Δ) die allgemeine Präzession in Länge, (ε) die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$, (a) die Präzession durch die Planeten. Die periodischen Glieder der Gleichungen (89), (90), ..., (95) bezeichnet man als Nutationsglieder.

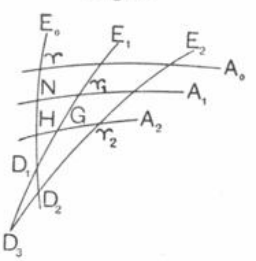
An dieser Stelle mögen auch die aus (37) und (37a) für π und Π folgenden Formeln angegeben werden. Berechnet man nämlich mit Hilfe der genannten Gleichungen für drei verschiedene Werte von t, z. B. für $t = -1$, $+1$, $+2$ die zugehörigen Werte von π und Π, so lassen sich diese durch die Formeln darstellen

$$(97) \qquad \begin{aligned} \pi &= 47''.142\,t - 0''.034\,t^2 \\ \Pi &= 173^\circ 29'\,40''.7 - 869''.0\,t - 0''.07\,t^2 \end{aligned}$$

Hier wird also π negativ gerechnet, wenn t negativ ist.

30. Änderung der Fundamentalebene. Bisher ist die Ekliptik der Epoche 1850.0 zur Fundamentalebene gewählt und t von 1850.0 an gezählt worden. Es sollen nun die Formeln abgeleitet werden, welche an Stelle von (96) und (97) anzuwenden sind, wenn die für eine andere Epoche gültige Ekliptik als Fundamentalebene angenommen, und die Zeit von dieser neuen Epoche aus gezählt wird. Um zunächst die Formel für die allgemeine Präzession zu erhalten, gehe man von Fig. 8 aus, worin die größten Kreise ΥA_0, NA_1, HA_2 die Lage des mittleren Äquators zu den Zeiten 1850.0, $1850 + t_1$, $1850 + t_2$ darstellen sollen, während D_2E_0, D_3E_1, D_3E_2 die für die eben angegebenen Epochen gültige Ekliptik bezeichnen. Es ist dann $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ die aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_1$ folgende allgemeine Präzession, bezogen auf die Ekliptik von 1850, und $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2$ die zu suchende allgemeine Präzession für das Zeitintervall $t_2 - t_1$, bezogen auf die Ekliptik zur Zeit $1850 + t_1$. Man hat aber

Fig. 8.



$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_3D_1 + D_1\Upsilon_1 - D_3D_2 - D_2\Upsilon_2$$

Nun ergibt sich aus den Formeln (97), daß selbst, wenn die Ekliptik D_2E_2 dem Jahre 1950 entspricht, also $t = 1$ ist, der Winkel π zwischen D_2E_2 und D_2E_0 nur $47''$ beträgt, und der Bogen $D_1D_2 = 869''.0$ ist; unter diesen Umständen kann man $D_3D_2 + D_2D_1 = D_3D_1$, also

$$D_3D_1 - D_3D_2 = D_2D_1 = D_2\Upsilon - D_1\Upsilon$$

setzen. Somit wird

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2 - (D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1)$$

Die Differenzen $D_2\Upsilon - D_2\Upsilon_2$ und $D_1\Upsilon - D_1\Upsilon_1$ sind aber mit den aus der dritten der Formeln (96) für $t = t_2 = t_1 + (t_2 - t_1)$, bzw. $t = t_1$ folgenden Werten von $(\mathcal{A})$ identisch. Bezeichnet man den für $(\mathcal{A})$ gegebenen Ausdruck mit $f(t)$, so daß also

$$f(t) = 5024''.64\,t + 1''.112\,t^2 - 0''.001\,t^3$$

wird, und setzt

$$t_2 - t_1 = \tau,$$

so erhält man

$$D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = f(t_1 + \tau) - f(t_1)$$

Zur Abkürzung werde nun $D_3\Upsilon_1 - D_3\Upsilon_2 = (\mathcal{A})_\tau$ gesetzt; der *Taylor*sche Satz gibt dann

$$\begin{aligned}(\mathcal{A})_\tau = {} & (5024''.64 + 2''.224\,t_1 - 0''.003\,t_1^2)\,\tau \\ & + (1''.112 - 0''.003\,t_1)\,\tau^2 - 0''.001\,\tau^3\end{aligned} \tag{98}$$

Für den Winkel (ε), den die irgend einer Epoche $1850 + t$ entsprechende Ekliptik mit dem für dieselbe Epoche gültigen mittleren Äquator bildet, wurde in (96) die Formel erhalten

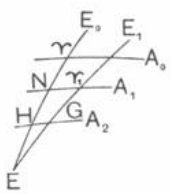
$$(\varepsilon) = \varepsilon_0 - 46''.838\,t - 0''.009\,t^2 + 0''.001\,t^3$$

Wird der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck mit $F(t)$ und der für die Epoche $1850 + t_2 = 1850 + t_1 + \tau$ gültige Wert von (ε) mit $(\varepsilon)_\tau$ bezeichnet, so hat man $(\varepsilon)_\tau = F(t_1 + \tau)$, also nach dem *Taylor*schen Satz

$$\begin{aligned}(\varepsilon)_\tau = {} & \varepsilon_0 - 46''.838\,t_1 - 0''.009\,t_1^2 + 0''.001\,t_1^3 \\ & - (46''.838 + 0''.018\,t_1 - 0''.003\,t_1^2)\,\tau \\ & - (0''.009 - 0''.003\,t_1)\,\tau^2 + 0''.001\,\tau^3\end{aligned} \tag{99}$$

In Fig. 9 mögen ΥA_0, NA_1, HA_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 8, ferner stelle EE_0, bzw. EE_1 die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850.0 und $1850 + t_1$ dar. Um nun den Bogen $\Upsilon_1 G$, also die Lunisolarpräzession in Länge für das Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf die Ekliptik zur Zeit $1850 + t_1$ zu erhalten, gehe man von der Gleichung $\Upsilon_1 G = E\Upsilon_1 - EG$ aus. Der Bogen $E\Upsilon_1$, der früher mit b bezeichnet wurde, ergibt sich aus der Formel (91), indem man $t = t_1$ setzt und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte substituiert. Setzt man ferner $HG = a^{(2)}$, $EG = b^{(2)}$, so erhält man aus den Gleichungen (34) die entsprechenden für $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b^{(2)} + a^{(2)})$ und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b^{(2)} - a^{(2)})$, indem man in ersteren den Größen ε' und ψ ihre für $t = t_2$ gültigen Werte E_0HA_2 und ΥH beilegt, dagegen die zur Bestimmung der Lage von EE_1 zu EE_0 dienenden Winkel π und Π ungeändert läßt. Der Wert von $b^{(2)}$, d. h. die Länge des Bogens EG folgt demnach

Fig. 9.



unmittelbar aus (91), indem man das in dieser Gleichung explicite vorkommende, von der Entwicklung der Größen $\pi \sin \Pi$ und $\pi \cos \Pi$ herrührende $t = t_1$ setzt, aber für ψ und $\Delta\varepsilon$ ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) folgenden, für $t = t_2$ gültigen Werte substituiert. Wenn also der aus (91) durch die Substitution $t = t_1$ erhaltene Wert von b mit $\varphi(t)$ bezeichnet wird und demnach

$$\varphi(t) = 180^\circ - \Pi + \psi + 12''.31 t_1 + 0''.453 t_1^2 + [6.71873 - 10] t_1 \psi + \\ + [6_n2132 - 10] t_1 \Delta\varepsilon + [3_n5185 - 10] t_1^2 \psi + [5_n4747 - 10] t_1 \psi^2$$

ist, wo ψ und $\Delta\varepsilon$ Funktionen von t sind, so hat man $EG = \varphi(t_2) = \varphi(t_1 + \tau)$ und $E\gamma_1 = \varphi(t_1)$; folglich ergibt sich $\gamma_1 G = \varphi(t_1) - \varphi(t_1 + \tau)$. Bezeichnet man nun $\gamma_1 G$ mit $(-\psi)_\tau$, und bedeuten $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1$, $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1$, ... die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von $\varphi(t)$, so wird

$$(-\psi)_\tau = -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 \tau - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 \tau^3$$

Aus der Gleichung für $\varphi(t)$ folgt aber mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_1 = \{1 + [6.71873] t_1 + [3_n5185] t_1^2\} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 + [5_n7757] t_1 \psi_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$
$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_1 = (1 + [6.719] t_1) \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 + [5_n776] t_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$
$$\left(\frac{d^3\varphi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1,$$

wo die für $t = t_1$ gültigen Werte von ψ und seiner Differentialquotienten mittels der ersten der Gleichungen (96) zu berechnen sind. Durch Substitution der Werte der Differentialquotienten von φ in die Gleichung für $(-\psi)_\tau$ erhält man schließlich

$$(100) \qquad (-\psi)_\tau = (5036''.95 + 0''.494 t_1 - 0''.001 t_1^2)\tau \\ - (1''.071 + 0''.003 t_1)\tau^2 - 0''.002 \tau^3$$

Die Differenz $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1$ (Fig. 9) stellt die lunisolare Präzession der Schiefe der Ekliptik in der Zeit $t_2 - t_1$ bezogen auf die der Epoche $1850 + t_1$ entsprechende Ekliptik dar. Um den Winkel $E_1 \gamma_1 A_1$ zu erhalten, hat man in der Gleichung (41) $t = t_1$ zu setzen und auch für ψ und ε' ihre aus den beiden ersten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Werte zu substituieren. Mit Hilfe einer ganz ähnlichen Schlußweise, wie sie vorhin bei der Berechnung des Bogens EG aus der Gleichung (91) angewandt wurde, ergibt sich ferner, daß man den Winkel $E_1 G A_2$ erhält, indem man in der Gleichung (41) das explicite vorkommende $t = t_1$ setzt, dagegen für ψ und ε' ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ sich ergebenden Werte einführt. Setzt man also

$$\varepsilon' + q_1 t_1 + q_2 t_1^2 + p_1 t_1 \psi + p_2 t_1^2 \psi - \tfrac{1}{2} q_1 t_1 \psi^2 = \chi(t),$$

wo ε' und ψ Funktionen von t sind, so ist $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1 = \chi(t_1 + \tau) - \chi(t_1)$. Man setze nun

$$E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1 = (\Delta\varepsilon)_\tau$$

und kennzeichne die für $t = t_1$ gültigen Werte der Differentialquotienten von χ durch den angehängten Index 1; es wird dann

$$(\Delta\varepsilon)_\tau = \left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1 \tau^3$$

Aus der Gleichung für $\chi(t)$ folgt aber mit Übergehung unbedeutender Glieder

$$\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)_1 + (p_1 t_1 + p_2 t_1^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 - q_1 t_1 \psi_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$$
$$\left(\frac{d^2\chi}{dt^2}\right)_1 = \left(\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2}\right)_1 - q_1 t_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1^2$$
$$\left(\frac{d^3\chi}{dt^3}\right)_1 = \left(\frac{d^3\varepsilon'}{dt^3}\right)_1$$

Die Differentialquotienten von ψ und ε' sind durch die zwei ersten Gleichungen (96) bestimmt; mit Rücksicht auf eine später abzuleitende Formel soll aber an Stelle der zweiten der Gleichungen (96) die aus (76), (79), (87) und (88) mit Berücksichtigung der vierten Dezimale folgende

$$(\varepsilon') = \varepsilon_0 + 0''.0652\, t^2 - 0''.0078\, t^3$$

angewandt werden. Man erhält dann

$$(\Delta\varepsilon)_\tau = (0''.0652 - 0''.0094\, t_1)\tau^2 - 0''.0078\, \tau^3 \tag{101}$$

Da $(\Delta\varepsilon)_\tau$ der Definition nach gleich $E_1 G A_2 - E_1 \gamma_1 A_1$ ist, und $E_1 \gamma_1 A_1$ den aus der vierten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (ε) bedeutet, so ergibt sich, wenn der Winkel $E_1 G A_2$ mit $(\varepsilon')_\tau$ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}(\varepsilon')_\tau = \varepsilon_0 &- 46''.838\, t_1 - 0''.009\, t_1^2 + 0''.001\, t_1^3 \\ &+ (0''.065 - 0''.009\, t_1)\tau^2 - 0''.008\, \tau^3\end{aligned} \tag{102}$$

Der in Fig. 8 mit $G\gamma_2 = H\gamma_2 - HG$ bezeichnete Bogen stellt die Präzession durch die Planeten in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ bezogen auf den Äquator zur Zeit $1850 + t_2$ dar. $H\gamma_2$ folgt aus (94), wenn das in dieser Gleichung explicite auftretende $t = t_2$ gesetzt wird, und auch für ψ und $\Delta\varepsilon = (\varepsilon') - \varepsilon_0$ ihre aus den zwei ersten der Gleichungen (96) für $t = t_2$ folgenden Werte ψ_2 und $\Delta\varepsilon_2$ substituiert werden. Um HG zu erhalten, hat man in (94) wiederum $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$, dagegen das explicite vorkommende $t = t_1$ zu setzen. Wenn also der aus (94) für $\psi = \psi_2$, $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_2$ folgende Wert von a mit $F(t)$ bezeichnet wird, und demnach

$$\begin{aligned}F(t) = 13''.417\, t + 0''.493\, t^2 + [6.75619 - 10]\, t\psi_2 + [6_n1758 - 10]\, t\Delta\varepsilon_2 + \\ + [3_n5873 - 10]\, t^2\psi_2 + [5_n5122 - 10]\, t\psi^2\end{aligned}$$

ist, so folgt

$$G\gamma_2 = F(t_1 + \tau) - F(t_1) = \left(\frac{dF}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 \tau^2$$

Hierbei genügt es

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = 13''.417 + 0''.986\, t_1 + [6.75619]\psi_2 + [3_n8883]\, t_1\psi_2 + [5_n5122]\psi_2^2$$
$$\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_1 = 0''.986 + [3_n8883]\psi_2$$

zu setzen. Ferner hat man

$$\psi_2 = \psi_1 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 \tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_1 \tau^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\psi}{dt^3}\right)_1 \tau^3,$$

also mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (96) und mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

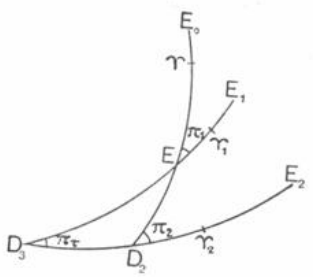
$$\psi_2 = -5036''.95\, t_1 + 1''.071\, t_1^2 - 5036''.95\, \tau + 2''.142\, t_1 \tau + 1''.071\, \tau^2$$
$$\psi_2^2 = +123''.0\, t_1^2 + 246''.0\, t_1 \tau + 123''.0\, \tau^2$$

Wird der Bogen $G\Upsilon_2$ (Fig. 8) mit $(a)_\tau$ bezeichnet, so erhält man schließlich

$$(a)_\tau = (13''.417 - 1''.887\, t_1)\tau - (2''.380 + 0''.001\, t_1)\tau^2 - 0''.001\, \tau^3 \tag{103}$$

In Fig. 10 werde die Lage der Ekliptik zu den Zeiten 1850, $1850 + t_1$, $1850 + t_2$ durch die größten Kreise EE_0, EE_1, D_3E_2 dargestellt; Υ, Υ_1, Υ_2 mögen die bezüglichen mittleren Äquinoktien bedeuten. Mit Hilfe der Gleichungen (97) läßt sich die Länge des aufsteigenden Knotens der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$ auf der Ekliptik EE_0, von dem mittleren Äquinox Υ aus gerechnet, und der Winkel zwischen EE_0 und der Ekliptik zur Zeit $1850 + t$ bestimmen. Es soll nun der Bogen $180^\circ - D_3\Upsilon_1 = \Pi_\tau$, d. h. die Länge des aufsteigenden Knotens der Ekliptik zur Zeit $1850 + t_2$ auf der Ekliptik EE_1, gerechnet von Υ_1 aus, und der Winkel $E_1 D_3 E_2 = \pi_\tau$ bestimmt werden. Es ist $D_3\Upsilon_1 = D_3E + E\Upsilon_1$. Bezeichnet man die aus den Gleichungen (97) für $t = t_1$, bzw. $t = t_2$ folgenden Werte von Π und π mit Π_1, π_1, bzw. Π_2, π_2, so ist in dem Dreieck D_3ED_2 die Seite $ED_2 = \Pi_1 - \Pi_2$, ferner ist der Winkel bei D_2 gleich $180^\circ - \pi_2$, und der Winkel bei E gleich π_1. Somit hat man, wenn der sin mit dem Bogen vertauscht wird,

Fig. 10.



$$D_3E = \frac{\pi_2}{\pi_\tau}(\Pi_1 - \Pi_2)$$

Ferner folgt aus einer der *Napier*schen Analogien

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi_\tau = \frac{\cos\frac{1}{2}(D_3E - D_3D_2)}{\cos\frac{1}{2}(D_3E + D_3D_2)} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi_2 - \pi_1)$$

oder hinreichend genau

$$\pi_\tau = \pi_2 - \pi_1$$

Demnach wird

$$D_3E = \frac{\pi_2}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2) = \Pi_1 - \Pi_2 + \frac{\pi_1}{\pi_2 - \pi_1}(\Pi_1 - \Pi_2)$$

Den Gleichungen (97) zufolge ist aber, wenn $t_2 - t_1 = \tau$ gesetzt wird,

$$\Pi_1 - \Pi_2 = (869''.0 + 0''.14\, t_1)\tau + 0''.07\, \tau^2$$
$$\pi_1 = (47''.142 - 0''.034\, t_1)\, t_1$$
$$\pi_2 - \pi_1 = (47''.142 - 0''.068\, t_1)\tau - 0''.034\, \tau^2$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$\frac{\pi_1}{\pi_2 - \pi_1} = \left(1 + \frac{0.034}{47.142}\, t_1 + \frac{0.034}{47.142}\, \tau\right) \frac{t_1}{\tau}$$

Somit wird

$$D_3 E = 869''.0\, t_1 + 0''.77\, t_1^2 + (869''.0 + 0''.84\, t_1)\, \tau + 0''.07\, \tau^2$$

Bedeutet ferner $(\Delta)_1$ den aus der dritten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgenden Wert von (Δ), so ist

$$E\Upsilon - E\Upsilon_1 = (\Delta)_1;$$

da aber $E\Upsilon = 180^\circ - \Pi_1$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung

$$E\Upsilon_1 = 180^\circ - \Pi_1 - (\Delta)_1$$

Es ergibt sich also

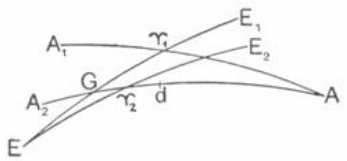
$$\Pi_\tau = 180^\circ - D_3 E - E\Upsilon_1 = \Pi_1 + (\Delta)_1 - D_3 E,$$

oder nach Substitution der Werte von Π_1, $(\Delta)_1$ und $D_3 E$

$$\begin{aligned} \Pi_\tau &= 173^\circ\, 29'\, 40''.7 + 3286''.6\, t_1 + 0''.27\, t_1^2 - (869''.0 + 0''.84\, t_1)\, \tau - 0''.07\, \tau^2 \\ \pi_\tau &= (47''.142 - 0''.068\, t_1)\, \tau - 0''.034\, \tau^2 \end{aligned} \tag{104}$$

31. Die Änderung der Lage des mittleren Äquators und Aquinoktiums in bezug auf die einer beliebigen Zeit entsprechende Lage des mittleren Äquators und Äquinoktiums. In Fig. 11 mögen EE_1 und EE_2 die Ekliptik für $1850 + t_1$, bzw. für $1850 + t_2$, und AA_1 und AA_2 die entsprechende Lage des mittleren Äquators darstellen. Da sich späterhin ergeben wird, daß $\Upsilon_1 A$ und GA nur wenig von 90° abweichen, so setze man $\Upsilon_1 A = 90^\circ - p$, $GA = 90^\circ - q$. Ferner setze man $\Upsilon_1 G = l'$, $A_1 AA_2 = \pi$, $E_1 \Upsilon_1 A = \varepsilon$, $E_1 GA = \varepsilon + \Delta\varepsilon$, wo l' und $\Delta\varepsilon$ mit den durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Größen $(-\psi)_\tau$ und $(\Delta\varepsilon)_\tau$ identisch sind, während unter ε der aus der vierten der Gleichungen (96) für $t = t_1$ folgende Wert von (ε) zu verstehen ist. Aus dem Dreiecke $AG\Upsilon_1$ folgt dann

Fig. 11.



$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{\cos(\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}\Delta\varepsilon} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \cos\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' - \sin\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l'$$

Da

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l' + \tfrac{1}{24} l'^3, \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{4}\Delta\varepsilon l'$$

gesetzt werden kann, so wird

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) = \tfrac{1}{2} l' \cos\varepsilon + \tfrac{1}{24} l'^3 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{4}\Delta\varepsilon l' \sin\varepsilon$$

Man hat aber hinreichend genau

$$\tfrac{1}{2}(p - q) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2}(p - q) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - q) - \tfrac{1}{24} l'^3 \cos^3\varepsilon$$

Mit Rücksicht auf die vorige Gleichung erhält man demnach

$$p - q = l' \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{12} l'^3 \cos\varepsilon \sin^2\varepsilon \tag{105}$$

Trägt man jetzt auf AA_2 von A aus den Bogen $Ad = A\Upsilon_1$ ab, so ist $\Upsilon_2 d$ gleich dem Bogen, um den sich das Frühlingsäquinox Υ_1 innerhalb der Zeit $t_2 - t_1 = \tau$

auf dem der Epoche $1850 + t_2$ entsprechenden Äquator bewegt hat. Da $G\gamma_2$ gleich dem durch die Gleichung (103) bestimmten Bogen $(a)_t$ ist, so hat man, wenn $\gamma_2 d$ mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet wird,

$$\mathfrak{m} = p - q - (a)_t \tag{106}$$

Ferner erhält man aus dem Dreiecke $A G \gamma_1$

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} \cos \tfrac{1}{2}(p+q) = \sin \tfrac{1}{2} l' \sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon)$$

Da aber $p+q$, wie sich gleich zeigen wird, sehr klein ist, so kann

$$\cos \tfrac{1}{2}(p+q) = 1$$

gesetzt werden. Setzt man außerdem noch

$$\sin \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l' - \tfrac{1}{48} l'^3$$
$$\sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon) = \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \cos\varepsilon,$$

so folgt

$$\sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \tfrac{1}{2} l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{4} l' \Delta\varepsilon \cos\varepsilon - \tfrac{1}{48} l'^3 \sin\varepsilon$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} + \tfrac{1}{6}\sin^3 \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} = \sin \tfrac{1}{2}\mathfrak{n} + \tfrac{1}{48} l'^3 \sin^3\varepsilon,$$

somit ergibt sich

$$\mathfrak{n} = l' \sin\varepsilon + \tfrac{1}{2} l' \Delta\varepsilon \cos\varepsilon - \tfrac{1}{24} l'^3 \sin\varepsilon \cos^2\varepsilon \tag{107}$$

Endlich folgt aus dem Dreiecke $A G \gamma_1$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p+q) = -\frac{\sin \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon}{\sin(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} l' = -\frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon}{(\sin\varepsilon + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta\varepsilon \cos\varepsilon) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l'}$$

Es ist aber $\Delta\varepsilon$ sehr klein im Verhältnis zu l' und folglich auch $(p+q)$ ein kleiner Winkel; demnach erhält man aus der vorigen Gleichung, wenn noch $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l' = \tfrac{1}{2} l'$ gesetzt wird,

$$p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{l' \sin\varepsilon}$$

oder, mit Berücksichtigung von (107),

$$p + q = -\frac{2\Delta\varepsilon}{\mathfrak{n}} \tag{108}$$

In den Gleichungen (105) und (107) ist der vierten der Gleichungen (96) zufolge

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46''.838\, t_1 - 0''.009\, t_1^2 + 0''.001\, t_1^3$$

und demnach

$$\sin\varepsilon = \sin\varepsilon_0 + [6_n 35617]\, t_1 \cos\varepsilon_0 = [9.599981] + [6_n 31870]\, t_1$$
$$\cos\varepsilon = \cos\varepsilon_0 + [6.35617]\, t_1 \sin\varepsilon_0 = [9.962533] + [5.95615]\, t_1$$

zu setzen, wo die in Klammern stehenden Zahlen Logarithmen bedeuten, deren Numeri in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Führt man ferner an Stelle von l' und $\Delta\varepsilon$ die durch die Gleichungen (100) und (101) bestimmten Werte von $(-\psi)_t$, bzw. $(\Delta\varepsilon)_t$ ein und substituiert für $(a)_t$ seinen Wert (103), so erhält man aus den Gleichungen (105) bis (108)

$$\begin{aligned}
p - q &= (4620''.63 + 0''.908\, t_1 - 0''.001\, t_1^2)\, \tau - (0''.982 + 0''.003\, t_1)\, \tau^2 + 0''.035\, \tau^3 \\
\mathfrak{m} &= (4607''.21 + 2''.795\, t_1 - 0''.001\, t_1^2)\, \tau + (1''.398 - 0''.002\, t_1)\, \tau^2 + 0''.036\, \tau^3 \\
\mathfrak{n} &= (2005''.16 - 0''.852\, t_1)\, \tau - (0''.426 + 0''.001\, t_1)\, \tau^2 - 0''.042\, \tau^3 \\
p + q &= -(13''.41 - 1''.93\, t_1)\, \tau + 1''.60\, \tau^2
\end{aligned} \tag{109}$$

Hieraus folgt noch

$$(110)\qquad \begin{aligned} p &= +(2303''.61 + 1''.42\,t_1)\,\tau + 0''.31\,\tau^2 \\ q &= -(2317''.02 - 0''.51\,t_1)\,\tau + 1''.29\,\tau^2 \end{aligned}$$

32. Präzessionsformeln, gültig für das tropische Jahr als Zeiteinheit. In den Formeln (98) bis (110) bedeutet t_1 die von 1850.0 bis zur neuen Anfangsepoche $1850 + t_1$, und τ die von $1850 + t_1$ bis $1850 + t_2$ verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten. Will man aber das tropische Jahr als Zeiteinheit wählen, so ist zu berücksichtigen, daß die Länge desselben veränderlich ist, aber nur in so geringem Grade, daß man für die Zeit von 1750 bis 1950 unbedenklich ein julianisches Jahr $= 0.9999786$ tropisches Jahr annehmen kann; man hat also die Koeffizienten von t_1 und von τ mit $\frac{0.9999786}{100}$ zu multiplizieren, die Koeffizienten von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $\left(\frac{0.9999786}{100}\right)^2$, usw. Bedeutet ferner t_0 die vorhin mit $1850 + t_1$ bezeichnete neue Anfangsepoche und t die Epoche, für welche man die Werte der auf der linken Seite der Formeln (98) bis (110) stehenden Unbekannten sucht, so ist in den genannten Formeln t_1 durch $t_0 - 1850$ und τ durch $t - t_0$ zu ersetzen, wo nun $t_0 - 1850$ und $t - t_0$ als in tropischen Jahren ausgedrückt zu denken sind. Für das Resultat der Rechnung ist es aber gleichgültig, ob die Gleichungen (98) bis (110) in der eben angegebenen oder in folgender Weise geändert werden: Man multipliziere die Koeffizienten von t_1 und τ mit 0.9999786, diejenigen von t_1^2 und $t_1\tau$ mit $(0.9999786)^2$, ..., und ersetze t_1 durch $\frac{t_0 - 1850}{100}$ und τ durch $\frac{t - t_0}{100}$.

Auf diese Art ergeben sich die folgenden für das tropische Jahr als Zeiteinheit gültigen Formeln:

$$\begin{aligned}
(-\psi)_\tau = &\left[5036''.84 + 0''.494\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&- \left[1''.071 + 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.002\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon')_\tau = &\ 23^\circ 27'\,31''.68 - 46''.837\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.009\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^3 \\
&+ \left[0''.065 - 0''.009\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.008\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathit{\Delta})_\tau = &\left[5024''.53 + 2''.224\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.003\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&+ \left[1''.112 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.001\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon)_\tau = &\ 23^\circ 27'\,31''.68 - 46''.837\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.009\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^3 \\
&- \left[46''.837 + 0''.018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.003\left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right]\frac{t - t_0}{100} \\
&- \left[0''.009 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 + 0''.001\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3
\end{aligned}$$

$$(a)_t = \left[13''.417 - 1''.887\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[2''.380 + 0''.001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''.001\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\pi_t = \left[47''.141 - 0''.068\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''.034\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$\Pi_t = 173^\circ\,29'\,40''.7 + 3286''.5\,\frac{t_0-1850}{100} + 0''.27\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2 - \left[869''.0 + 0''.84\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - 0''.07\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p-q = \left[4620''.53 + 0''.908\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[0''.982 + 0''.003\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''.035\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\mathfrak{m} = \left[4607''.11 + 2''.795\,\frac{t_0-1850}{100} - 0''.001\left(\frac{t_0-1850}{100}\right)^2\right]\frac{t-t_0}{100} + \left[1''.398 - 0''.002\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + 0''.036\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$\mathfrak{n} = \left[2005''.12 - 0''.852\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} - \left[0''.426 + 0''.001\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 - 0''.042\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$p+q = -\left[13''.41 - 1''.93\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 1''.60\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$p = +\left[2303''.56 + 1''.42\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 0''.31\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

$$q = -\left[2316''.97 - 0''.51\,\frac{t_0-1850}{100}\right]\frac{t-t_0}{100} + 1''.29\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$

33. Integration der Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse der Erde. Durch die Gleichungen (89) und (90) ist die Bewegung der Rotationsachse der Erde in bezug auf die der Epoche 1850.0 entsprechende Ebene der Ekliptik bestimmt; es sollen nun die analogen für die kleine Achse der Erde gültigen Gleichungen abgeleitet werden. Dieselben ergeben sich durch Integration der Differentialgleichungen (25), doch ist zuvor der in letzteren vorkommende Quotient $\frac{A}{C}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke läßt sich die auf S. 88 gefundene Gleichung

$$(\alpha) \qquad \log\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\,\frac{C-A}{Cn} = 8.22751 - 10$$

benutzen. Wenn T die Umlaufszeit der Erde in ihrer Bahn und E die Masse der Erde in Teilen der Sonnenmasse $M_\odot$ darstellt, so ist bekanntlich*)

$$k^2 = \frac{4\pi^2\Delta^3}{T^2(1+E)M_\odot}$$

*) *Bauschinger*, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, S. 133.

Gauß nimmt $E = 1 : 354710$ und die Umlaufszeit der Erde gleich $365 \cdot 2563835$ mittlere Sonnentage an. Da wir als Zeiteinheit das julianische Jahrhundert gewählt haben, so ist

$$T = \frac{365 \cdot 2563835}{36525}$$

zu setzen; es ergibt sich dann

$$\log \frac{k^2 M_\odot}{\mathcal{A}^3} = \log \frac{4\pi^2}{T^2(1+E)} = 5 \cdot 59634$$

n bedeutet die auf die kleine Achse der Erde bezogene Komponente der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Würde man den Sterntag als Zeiteinheit festsetzen, so wäre $n = 2\pi$; da aber das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt wurde, so erhält man, wenn f das Verhältnis eines mittleren Sonnentages zum Sterntag angibt, $n = 2\pi f \cdot 36525$. Nun ist $\log f = 0 \cdot 0011874$, somit wird

$$\log n = 5 \cdot 36196$$

Mit Hilfe der im vorigen bestimmten Werte von $\log \frac{k^2 M_\odot}{\mathcal{A}^3}$ und $\log n$ ergibt sich aus der Gleichung (α)

$$\frac{C-A}{C} = 0 \cdot 00328, \qquad (\log = 7 \cdot 51601 - 10),$$

also

$$\frac{A}{C} = 0 \cdot 99672, \qquad (\log = 9 \cdot 99857 - 10)$$

Was nun die Differentialgleichungen (25) betrifft, so kann man bei jeder von ihnen das letzte Glied auf der rechten Seite vernachlässigen; denn das größte derselben, nämlich $\frac{A}{Cn} \cos\varepsilon' \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ in der Gleichung für $\frac{d\psi}{dt}$, gibt, wenn $\varepsilon' = \varepsilon_0$, $\frac{d\psi}{dt} = -5037''$ gesetzt und dann integriert wird, nur $0''.0004\, t$. Die Gleichungen werden demnach

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} = -\frac{L}{Cn} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{M}{Cn} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\right),$$

oder, wenn man auf die Gleichungen (26^a) Rücksicht nimmt und $\sin\varepsilon'_1 = \sin\varepsilon'$ setzt,

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} = \sin\varepsilon' \frac{d\psi_1}{dt} - \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon'_1}{dt} + \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt}\right) \qquad (111)$$

Hierin sind ψ_1 und ε'_1 mit den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Integralen ψ und ε' der Gleichungen (26^a) identisch*). Setzt man jetzt

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\delta\psi_1}{dt}$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{d\varepsilon'_1}{dt} + \frac{d\delta\varepsilon'_1}{dt}, \qquad (112)$$

*) Vgl. S. 66, Z. 6

so erhält man aus (111) die folgenden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}\right)+\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}&=-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon_1'}{dt}\right)\\ \frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}\right)-\frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}&=-\frac{A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}\right)\end{aligned}\tag{113}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich nach der Methode der Variation der Konstanten integrieren. Wenn nämlich die rechten Seiten gleich o wären, so würde man als Integrale erhalten

$$\begin{aligned}\sin\varepsilon'\frac{d\delta\psi_1}{dt}&=m\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\\ \frac{d\delta\varepsilon_1'}{dt}&=m\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right),\end{aligned}\tag{114}$$

wo m und σ zwei Konstanten bedeuten. Betrachtet man aber m und σ als veränderlich, so lassen sich $m\sin\sigma$, $m\cos\sigma$ so bestimmen, daß die Gleichungen (114) auch den Differentialgleichungen (113) Genüge leisten. Nach Substitution dieser Werte in die Gleichungen (114) erhält man durch Integration die Werte von $\delta\psi_1$ und $\delta\varepsilon_1'$, welche zu ψ_1, bzw. ε_1' addiert die Integrale der Differentialgleichungen (25) darstellen. Einfacher ist der folgende Weg: Aus den Gleichungen (111) erhält man, wenn

$$\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)+\frac{\operatorname{cotg}\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)$$

gesetzt und von den Integrationskonstanten abgesehen wird,

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_1-\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}\\ \varepsilon&=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right),\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (112) und (114),

$$\begin{aligned}-\psi&=-\psi_1+\frac{A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon_1'}{dt}+\frac{Am}{Cn\sin\varepsilon'}\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\\ \varepsilon'&=\varepsilon_1'+\frac{A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi_1}{dt}+\frac{Am}{Cn}\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (89) und (90) folgt aber mit Vernachlässigung aller für das Folgende bedeutungslosen Glieder

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1'}{dt}=&-0''.552\sin 2L\frac{d2L}{dt}-0''.088\sin 2c\frac{d2c}{dt}-0''.011\sin[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}-\\&-9''.210\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt}-0''.018\sin[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}\\ \frac{d\psi_1}{dt}=&-5036''.95+1''.271\cos 2L\frac{d2L}{dt}+0''.204\cos 2c\frac{d2c}{dt}+\\&+0''.026\cos[2c+g]\frac{d[2c+g]}{dt}+17''.224\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt}+0''.034\cos[2c-\Omega]\frac{d[2c-\Omega]}{dt}\end{aligned}$$

In den Gleichungen (89) und (90) ist das julianische Jahrhundert als Zeiteinheit gewählt worden; es bedeuten also in den vorigen Differentialgleichungen $\frac{d_2 L}{dt}$, $\frac{d_2 c}{dt}$, ... die in Teilen des Radius ausgedrückten Werte der mittleren Bewegung von $_2L$, $_2c$, ... in einem julianischen Jahrhundert. Auf S. 85 sind die Produkte aus diesen Werten und arc 1″ mitgeteilt; dividiert man dieselben durch arc 1″, so ergeben sich die folgenden hier anzuwendenden Werte der Differentialquotienten, bzw. ihrer Logarithmen

$$\log \frac{d_2 L}{dt} = 3.0992 \qquad \log \frac{d\Omega}{dt} = 1_n 5284$$

$$\log \frac{d_2 c}{dt} = 4.2253 \qquad \log \frac{d[2c - \Omega]}{dt} = 4.2262$$

$$\log \frac{d[2c + g]}{dt} = 4.4002$$

Ferner folgt unter Anwendung der auf S. 102 gegebenen Werte von $A : C$ und n, wenn $\sin \varepsilon' = \sin \varepsilon_0$ gesetzt wird,

$$\log \frac{A}{Cn \sin \varepsilon'} = 5.0366 - 10, \qquad \log \frac{A}{Cn} \sin \varepsilon' = 4.2366 - 10$$

Somit erhält man als vollständige Integrale der Differentialgleichungen (111), bzw. (25)

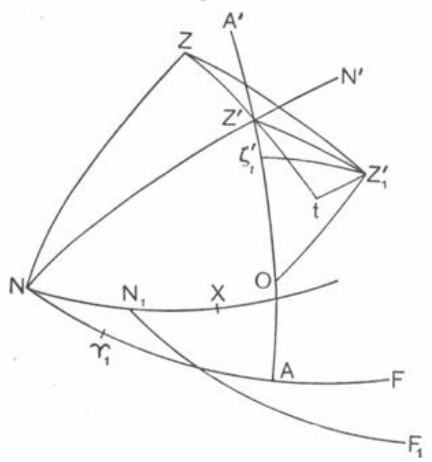
$$-\psi = -\psi_1 - 0''.008 \sin 2L - 0''.016 \sin 2c - 0''.003 \sin[2c + g] + 0''.003 \sin \Omega - \\ - 0''.003 \sin[2c - \Omega] + \frac{Am}{Cn \sin \varepsilon'} \cos\left(\frac{Cn}{A} t - \sigma\right)$$

(115)

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' - 0''.009 + 0''.003 \cos 2L + 0''.006 \cos 2c + 0''.001 \cos[2c + g] - \\ - 0''.001 \cos \Omega + 0''.001 \cos[2c - \Omega] + \frac{Am}{Cn} \sin\left(\frac{Cn}{A} t - \sigma\right),$$

wo m und σ die Integrationskonstanten bezeichnen. Die Periode der beiden von $\frac{Cn}{A} t - \sigma$ abhängigen Glieder ist gleich $2\pi \frac{A}{Cn}$. Nimmt man den Sterntag als Einheit, so ist $n = 2\pi$; die Periode ist also gleich $0.99672 = \frac{305}{306}$ Sterntage.

Fig. 12.



Die Werte von m und σ sind durch die Beobachtungen zu bestimmen; in welcher Weise dies geschehen kann, soll jetzt gezeigt werden. Es sei (Fig. 12) Z der Pol der festen Ekliptik NX, und X der zugehörige Frühlings Tag- und Nachtgleichepunkt. Z' sei der Punkt, in dem die verlängerte kleine Achse der Erde die Sphäre trifft, und NF der größte Kreis, in dem die zur kleinen Achse der Erde senkrechte Ebene die Himmelskugel schneidet. Ferner sei Z_1' der instantane Drehungspol der Erde und $N_1 F_1$ der zur Rotationsachse senkrechte instantane Äquator. Es ist

dann $ZZ' = \varepsilon'$, $ZZ_1' = \varepsilon_1'$, $NX = -\psi$, $N_1X = -\psi_1$, also NN_1 und somit auch der Winkel $Z'ZZ_1' = \psi_1 - \psi$. Wenn endlich O das Zenit, also $Z'OA$ den Meridian eines Beobachtungsortes bedeutet, so stellt $NZ'A = A'Z'N'$ den auf S. 59 mit φ bezeichneten Winkel dar. Da N der Pol von ZZ' ist, so stehen NN' und ZZ' senkrecht zueinander. Man ziehe jetzt den Bogen $Z_1't$ senkrecht zu ZZ'; aus dem Dreieck $Z_1'Zt$ folgt dann $\sin Z_1't = \sin\varepsilon_1' \sin(\psi_1 - \psi)$ oder, wenn $\sin\varepsilon_1' = \sin\varepsilon'$ gesetzt wird,

$$Z_1't = (\psi_1 - \psi)\sin\varepsilon'$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $Z_1'Zt$

$$\sin\varepsilon_1' \cos(\psi_1 - \psi) = \cos Z_1't \sin(\varepsilon' + Z't)$$

Setzt man hier $\cos(\psi_1 - \psi)$ und $\cos Z_1't$ gleich 1, so ergibt sich

$$Z't = \varepsilon_1' - \varepsilon'$$

Es werde jetzt auf OZ' der Bogen $O\zeta_1' = OZ_1'$ abgetragen und $OZ' = 90^\circ - \Phi$, $O\zeta_1' = OZ_1' = 90^\circ - \Phi'$ gesetzt, ferner werde der Winkel $N'Z'Z_1'$ mit $\varkappa$ bezeichnet. Da $Z'Z_1'$ äußerst klein ist und, für die in der Praxis in Frage kommenden Beobachtungsorte, als verschwindend gegenüber OZ' und OZ_1' betrachtet werden darf, so kann man den Winkel $Z_1'\zeta_1'Z' = 90^\circ$ setzen; aus dem Dreieck $Z_1'Z'\zeta_1'$, worin der Winkel bei Z' gleich $180^\circ - (\varkappa + \varphi)$ und die Seite $Z'\zeta_1' = \Phi' - \Phi$ ist, folgt demnach

$$\Phi' - \Phi = -Z'Z_1' \cos(\varkappa + \varphi)$$

oder, da $Z'Z_1' \cos\varkappa = Z_1't$ und $Z'Z_1' \sin\varkappa = Z't$ ist,

$$\Phi' - \Phi = -Z_1't \cos\varphi + Z't \sin\varphi$$

Nach Substitution der vorhin für $Z_1't$ und $Z't$ gefundenen Werte ergibt sich also

$$\Phi' - \Phi = -(\psi_1 - \psi)\sin\varepsilon' \cos\varphi + (\varepsilon_1' - \varepsilon')\sin\varphi$$

oder mit Einsetzung der durch die Gleichungen (115) bestimmten Werte von $\psi_1 - \psi$ und $\varepsilon_1' - \varepsilon'$

$$\begin{aligned}(116)\quad \Phi' - \Phi = &-\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{Cn}{A}t - \varphi - \sigma\right) + 0''.009\sin\varphi - 0''.006\sin(\varphi - 2c) - \\ &- 0''.003\sin(\varphi - 2L) - 0''.001\sin(\varphi - 2c - g) + 0''.001\sin(\varphi - \Omega) - \\ &- 0''.001\sin(\varphi - 2c + \Omega)\end{aligned}$$

In dieser Gleichung kommt noch die Unbekannte φ vor. Es sei Υ_1 (Fig. 12) der aufsteigende Knoten der beweglichen, der Epoche $1850 + t$ entsprechenden Ekliptik auf dem derselben Epoche angehörigen beweglichen Äquator NF; es ist dann $N\Upsilon_1$ oder der Winkel $NZ'\Upsilon_1$ gleich dem durch die Gleichung (95) bekannten Bogen a. Ferner gibt der Winkel $\Upsilon_1Z'A$ die Sternzeit des Ortes an; wird diese mit Θ bezeichnet, so ist $\varphi = \Theta + a$. Aus der dritten der Gleichungen (18) in Verbindung mit (24) folgt jetzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\Theta + a)}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon',$$

also, wenn φ_0 eine Konstante bezeichnet,

$$\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt - \int\frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'\,dt$$

Das auf der rechten Seite vorkommende Integral ist verschwindend klein gegenüber nt. Setzt man nämlich $\cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0$ und berücksichtigt von ψ nur das größte Glied $-5036''.9\,t$, so wird das Integral gleich $-5036''.9\,t\cos\varepsilon_0 = -4620''.6\,t$, wo die Einheit von t das julianische Jahrhundert ist. Würde man also den Sterntag als Zeiteinheit wählen, so wäre $\int \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon'\,dt = -0''.13\,t$, während dann $n = 1296000''$ anzunehmen ist. Für den hier in Betracht kommenden Fall kann man demnach $\varphi = \Theta + a = \varphi_0 + nt$ setzen. Zählt man ferner t von dem Augenblicke an, wo der Meridian $Z'A$ des Ortes O mit $Z'N$ zusammenfällt, so ist $\varphi_0 = 0$, also $\varphi = \Theta + a = nt$. Da a der Gleichung (95) zufolge selbst nach Ablauf eines Jahrhunderts nur rund eine Zeitsekunde beträgt, so hat man ausreichend genau

$$\varphi = \Theta = nt$$

Setzt man jetzt in dem ersten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung (116) $\varphi = nt$ und in den übrigen $\varphi = \Theta$, so wird

$$(117)\quad \Phi' - \Phi = -\frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt - \sigma\right) + 0''.009\sin\Theta - 0''.006\sin[\Theta - 2c] - \\ - 0''.003\sin[\Theta - 2L] - 0''.001\sin[\Theta - 2c - g] + 0''.001\sin[\Theta - \Omega] - \\ - 0''.001\sin[\Theta - 2c + \Omega]$$

Aus den auf S. 102 angegebenen Werten von $(C-A):C$ und $A:C$ folgt aber

$$\frac{C-A}{A} = 0.00329 \qquad (\log = 7.51744 - 10)$$

Berücksichtigt man noch, daß, wenn der Sterntag als Zeiteinheit gewählt wird, $n = 2\pi$ zu setzen ist, so ergibt sich für die Periode des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (117) 303.8 Sterntage = 303.0 mittlere Tage. Nun bedeutet Φ' die beobachtete Polhöhe und Φ das Komplement des Winkels zwischen der kleinen Achse der Erde und der Vertikalen. Da Φ für die als starr vorausgesetzte Erde konstant ist, so müßten die Werte von

$$(118)\quad \Phi' - 0''.009\sin\Theta + 0''.006\sin[\Theta - 2c] + \cdots + 0''.001\sin[\Theta - 2c + \Omega] = \Phi''$$

eine zehnmonatliche Periode zeigen, und man könnte also aus Beobachtungsreihen, die sich über diesen Zeitraum ausdehnen, mittels der Gleichung

$$(119)\qquad \Phi'' = \Phi - \frac{Am}{Cn}\cos\left(\frac{C-A}{A}nt - \sigma\right)$$

die Werte von $m\sin\sigma$ und $m\cos\sigma$ ableiten.

Die Gleichungen (89) und (90) stellen die Integrale der Gleichungen (26^a) dar, und letztere unterscheiden sich von den strengen Differentialgleichungen (26) nur dadurch, daß die Glieder

$$\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

bezüglich

$$-\frac{C-A}{Cn}\frac{d}{dt}\left(\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{C-A}{Cn}\cos\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon'}{dt}$$

vernachlässigt worden sind. Betrachtet man zunächst das erste Glied jedes dieser beiden Aggregate, so würde man als Zusatzglieder zu den Integralen (89) und (90) erhalten

$$\frac{C-A}{Cn\sin\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dt}, \qquad -\frac{C-A}{Cn}\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$$

Substituiert man hierin die aus den Gleichungen (112) und (114) folgenden Werte von $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt}$, so ergibt sich, daß selbst wenn der aus den beobachteten Polhöhen mit Hilfe von (119) berechnete Koeffizient $\frac{Am}{Cn} = 0''.1$ wäre, das durch (89) gegebene ψ nur die Korrektion $0''.0008\cos\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$ und das durch (90) bestimmte ε' die Korrektion $0''.0003\sin\left(\frac{Cn}{A}t-\sigma\right)$ erfordern würde. Der Beitrag, den die von $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ und $\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varepsilon}{dt}$ abhängigen Glieder geben, ist noch viel geringer. Es beschreibt also freilich auch die Rotationsachse im Laufe eines (genauer 0.9967) Sterntages einen kleinen Kreis um ihre mittlere Lage, aber der Radius dieses Kreises ist so minimal, daß man die Drehungsachse, wenn man von den durch die Gleichungen (89) und (90) bestimmten Änderungen ihrer Lage absieht, als unbeweglich betrachten kann.

34. Bestimmung der Mondmasse. Aus den auf S. 86 und 88 erhaltenen Gleichungen

$$\log\frac{3k^2M_c}{H^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.56371$$

$$\log\frac{3k^2M_\odot}{\Delta^3}\frac{C-A}{Cn} = 8.22751$$

folgt

$$\frac{M_c}{M_\odot}\frac{\Delta^3}{H^3} = \text{Num } 0.33620,$$

wo Num 0.33620 die zu dem Logarithmus 0.33620 gehörige Zahl bedeutet.

Bezeichnet man die in Einheiten der Erdmasse ausgedrückten Massen von Mond und Sonne mit M, bzw. M' und ihre mittleren Bewegungen mit μ, bzw. μ', so ist

$$\mu^2H^3 = k^2(1+M)$$
$$\mu'^2\Delta^3 = k^2(1+M')$$

und

$$\frac{M_c}{M_\odot} = \frac{M}{M'}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{M(1+M')}{M'(1+M)}\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \frac{M}{1+M}\left(1+\frac{1}{M'}\right)\frac{\mu^2}{\mu'^2} = \text{Num } 0.33620$$

Da $\frac{\mu}{\mu'} = \text{Num } 1.12610$ und $M' > 300000$ ist, so folgt

$$M = \frac{1}{81.4}$$

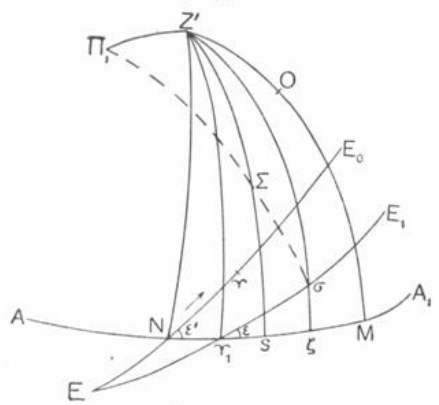
II. Zeitmessung.

35. Grundlagen der Zeitmessung. Mittlere und wahre Zeit. Aus der dritten der Gleichungen (18) des § 24 folgt, wenn der Gleichung (24) gemäß $r = n$ gesetzt wird,

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon' \tag{A}$$

In Fig. 13 sei nun EE_0 die der Zeit $t = 0$ entsprechende Ekliptik und γ das mittlere Äquinox zur Zeit $t = 0$, ferner mögen EE_1 und AA_1 die Ekliptik, bzw. den wahren Äquator zur Zeit $t = t$ bedeuten; man hat dann $N\gamma = \psi$, $E_0NA_1 = \varepsilon'$, und es gibt das γ_1 wahre Äquinox zur Zeit $t = t$ an. Der Pol des Äquators AA_1 werde mit Z' bezeichnet, ferner sei O das Zenit eines Beobachtungsortes und demnach $Z'OM$ der Meridian und $MZ'\gamma_1$ die Sternzeit des Beobachtungsortes. Wird diese Sternzeit mit Θ und der Bogen $N\gamma_1$, bzw. der ihm gleiche Winkel $NZ'\gamma_1$, wie früher (S. 66), mit a bezeichnet, so folgt, da $NZ'M = \varphi$ ist, $\varphi = \Theta + a$.

Fig. 13.



Man setze setzt $\varepsilon' = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, wo ε_0 die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit $t = 0$ bedeutet; mit Vernachlässigung des Quadrates und der höheren Potenzen von $\Delta\varepsilon$ ergibt sich dann

$$\cos\varepsilon' = \cos\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon \sin\varepsilon_0$$

Substituiert man diesen Ausdruck und den vorhin gefundenen Wert von φ in die Gleichung (A), so folgt

$$\frac{d(\Theta + a)}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt}\cos\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\sin\varepsilon_0$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man, wenn die Integrationskonstante mit C bezeichnet wird,

$$\Theta = C + nt - a - \psi\cos\varepsilon_0 + \sin\varepsilon_0 \int \Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt \tag{120}$$

Es möge nun 1900 Januar 0, 0^h mittlerer Zeit Berlin als Anfangspunkt der Zeitrechnung gewählt werden und demnach t die seit 1900 Jan. 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit und EE_1 (Fig. 13) die der Epoche $1900 + t$ entsprechende Lage der Ekliptik darstellen, ferner werde als Einheit von t ein julianisches Jahrhundert angenommen. Um dann den für die Gleichung (120) zu benutzenden Wert von $-\psi$ zu finden, hat man in der Gleichung (100) $t_1 = 0.50$ und $\tau = t$ zu setzen und zu dem damit erhaltenen Resultat die periodischen Glieder der Gleichung (89), deren Komplex mit Ψ bezeichnet werden möge, hinzuzufügen. In analoger Weise erhält man aus der Verbindung von (103) mit den periodischen Gliedern der Gleichung (95)

den Wert von a; die periodischen Glieder sind jedoch zu klein, um einen merklichen Einfluß ausüben zu können, und sollen deshalb übergangen werden. Mit Anwendung des für 1900.0 gültigen Wertes $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 8''.3$ ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} -\psi &= 5037''.20\,t - 1''.072\,t^2 + {}^1\Psi \\ -\psi\cos\varepsilon_0 &= 4621.08\,t - 0.983\,t^2 + {}^1\Psi\cos\varepsilon_0 \\ a &= \quad 12.47\,t - 2.380\,t^2 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des in der Gleichung (120) vorkommenden Integrals ist noch die Kenntnis des Wertes von $\Delta\varepsilon$ erforderlich. Man erhält diesen Wert, indem man in der Gleichung (101) $t_1 = 0.50$, $\tau = t$ setzt und zu dem so für $(\Delta\varepsilon)_t$ sich ergebenden Wert die periodischen Glieder der Gleichung (90) addiert. Es ist indessen nicht nötig, den strengen Wert von $\Delta\varepsilon$ anzuwenden, sondern es genügt, $\Delta\varepsilon = 9''.2\cos\Omega$ zu setzen; benutzt man außerdem noch den Näherungswert $\frac{d\psi}{dt} = -5037''$, so wird

$$\sin\varepsilon_0\int\Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt = -\sin\varepsilon_0\int 9''.2 \times 5037''\sin 1''\cos\Omega\,dt$$

oder, wenn man $\Omega = \Omega_0 + \sigma t$ und, wie auf S. 90, $\log\sigma = 1.5284$ setzt, wo σ in Teilen des Radius ausgedrückt ist,

$$\sin\varepsilon_0\int\Delta\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt}\,dt = 0''.003\,\sin\Omega$$

Hierbei ist für Ω sein der Zeit $1900 + t$ entsprechender Wert zu substituieren; das Glied ist aber so klein, daß es ohne weiteres vernachlässigt werden darf.

Unter Benutzung der im vorigen gefundenen Werte und mit Einführung der Bezeichnung

$$(121) \qquad {}^1\Psi\cos\varepsilon_0 = P'$$

erhält man aus (120)

$$(122) \qquad \Theta = C + (n + 4608''.61)\,t + 1''.397\,t^2 + P'$$

Ehe die Bestimmung der Konstanten C und n ausgeführt werden kann, ist zu zeigen, wie man mit Hilfe der Sonnentafeln die Rektaszension der Sonne findet. In Fig. 13 sei Σ der Ort der Sonne, Π_1 sei der Pol der Ekliptik EE_1, $\Pi_1\sigma$ der Breitenkreis der Sonne, $Z'\zeta$ der Deklinationskreis des Punktes σ und $Z's$ der Deklinationskreis der Sonne. Setzt man $\Upsilon_1\sigma = \odot$, $\sigma\Sigma = B$, $\Upsilon_1 s = A$, $s\Sigma = D$, so daß $\odot$ die Länge, B die Breite, A die Rektaszension, D die Deklination der Sonne, bezogen auf die Ekliptik, bzw. den Äquator zur Zeit $1900 + t$, bedeuten, setzt man ferner $\Upsilon_1\zeta = A_0$, $\zeta\sigma = D_0$, $s\zeta = sZ'\zeta = \Delta A_0$, $E_1\Upsilon_1 A_1 = \varepsilon$, so folgt aus dem Dreieck $\Upsilon_1\sigma\zeta$

$$(123) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} A_0 &= \cos\varepsilon\,\operatorname{tang}\odot \\ \sin D_0 &= \sin\varepsilon\,\sin\odot \end{aligned}$$

Um den Wert von ε zu finden, hat man in der Gleichung (99) den für 1850.0 gültigen Wert $\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 31''.68$ zu substituieren, ferner $t_1 = 0.50$, $\tau = t$ zu setzen und zu dem damit erhaltenen $(\varepsilon)_t$ die periodischen Glieder der Gleichung (93) zu addieren.

Durch Anwendung der in § 1 abgeleiteten Reihenentwicklung (18ª) auf die erste der Gleichungen (123) ergibt sich

$$A_0 = \odot - \frac{1}{\sin 1''} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\odot + \frac{1}{2\sin 1''} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\odot - \cdots, \tag{124}$$

wo die von ε abhängigen Glieder in Bogensekunden ausgedrückt erhalten werden.

Ferner ergibt sich aus dem Dreieck $Z'\Sigma\sigma$

$$\sin \measuredangle A_0 : \sin B = \sin \Pi_1 \Sigma Z' : \cos D_0$$

und aus dem Dreieck $\Pi_1 Z'\Sigma$, worin der Winkel bei Z' gleich $90^0 + A_0$ ist,

$$\sin \Pi_1 \Sigma Z' : \sin \varepsilon = \cos A_0 : \cos B$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen erhält man, wenn $\sin \measuredangle A_0 = \measuredangle A_0 \sin 1''$, $\sin B = B \sin 1''$, $\cos B = 1$ gesetzt wird,

$$\measuredangle A_0 = \frac{\sin \varepsilon \cos A_0}{\cos D_0} B \tag{125}$$

Nun ist $A = A_0 - \measuredangle A_0$. Substituiert man hier für A_0 und $\measuredangle A_0$ die Ausdrücke (124) und (125) und setzt

$$-\frac{\sin \varepsilon \cos A_0}{\cos D_0} B - \frac{1}{\sin 1''} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2\odot + \frac{1}{2\sin 1''} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 4\odot - \cdots = \varrho, \tag{126}$$

so folgt

$$A = \odot + \varrho \tag{127}$$

Es sei jetzt L die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Äquinox der Epoche 1900.0, ferner bedeute $(\measuredangle)$ die allgemeine Präzession in Länge für das Zeitintervall von 1900.0 bis $1900 + t$ (so daß, wenn γ_1 in Fig. 13 das der Epoche $1900 + t$ entsprechende mittlere Äquinox darstellen würde, $(\measuredangle) = E\gamma - E\gamma_1$ wäre); es ist dann $L + (\measuredangle)$ die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Äquinox der Epoche $1900 + t$. Hierbei hat man für $(\measuredangle)$ den aus der Gleichung (98) für $t_1 = 0.50$ und $\tau = t$ folgenden Wert von $(\measuredangle)_\tau$ zu substituieren. Um nun die wahre Sonnenlänge $\odot$ zu erhalten, sind, der Theorie der Bewegung der Erde gemäß, zu $L + (\measuredangle)$ folgende Glieder zu addieren: 1. die sogenannte Mittelpunktsgleichung (M), 2. der Betrag der durch die Planeten und den Mond bewirkten Störungen in Länge (S) und 3. die Nutation in Länge (ν), d. h. die Summe der periodischen Glieder des für die Bewegung des Äquinoktiums auf der beweglichen Ekliptik gültigen Ausdrucks (92); es ergibt sich demnach

$$\odot = L + (\measuredangle) + M + S + \nu \tag{128}$$

Die Werte von L, M und S kann man den Sonnentafeln entnehmen; da $(\measuredangle)$ und ν bekannt sind, so läßt sich also für jede Zeit der Wert von $\odot$ berechnen. Ist dieser Wert gefunden, und hat man mit Hilfe der Sonnentafeln auch den Wert von B berechnet, so können die Gleichungen (123) bis (127) zur Berechnung von A benutzt werden.

Die so erhaltene Rektaszension der Sonne würde aber noch nicht mit der aus der Beobachtung folgenden übereinstimmen. Der Umstand, daß die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn ein angebbares Verhältnis zu der Geschwindigkeit des Lichtes hat, bewirkt nämlich, daß, wenn in Fig. 13 Σ den Punkt angibt, in dem die von einem Orte der Erde zum wahren Orte des Mittelpunktes der Sonne gezogene Gerade die Sphäre trifft, der Mittelpunkt der Sonne — von der Erde aus gesehen — nicht mit Σ, sondern mit einem Punkte Σ'*) zusammenzufallen scheint, welcher dieselbe Breite, aber eine kleinere Länge wie Σ hat; dies wird im 10. Kapitel noch genauer auseinandergesetzt werden. Man bezeichnet nun Σ' als den scheinbaren und Σ als den wahren Ort der Sonne; dem entsprechend wird die Länge von Σ' die scheinbare Länge und die Rektaszension von Σ' die scheinbare Rektaszension der Sonne genannt. Bezeichnet man die scheinbare Länge der Sonne mit $\odot'$, ist ferner k die sogenannte Aberrationskonstante (für welche man aus Beobachtungen den Wert $20''.47$ gefunden hat), und bedeutet e' ein kleines von der Exzentrizität der Erdbahn abhängiges periodisches Glied, dessen Betrag stets kleiner als $0''.4$ ist, so hat man, wie in § 59 gezeigt werden wird, $\odot' = \odot - k + e'$ oder, mit Benutzung der Gleichung (128),

$$\odot' = L - k + (\mathcal{A}) + M + S + \nu + e' \tag{129}$$

Hierbei gibt $L - k + (\mathcal{A})$ die scheinbare mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das mittlere Äquinox der Epoche $1900 + t$ an. Wird jetzt die scheinbare Rektaszension der Sonne mit A' bezeichnet, und bedeutet ϱ' den Wert, den der in (126) gegebene Ausdruck von ϱ annimmt, wenn $\odot = \odot'$ gesetzt wird, aber in dem kleinen von B abhängigen Gliede die aus (123) für A_0 und D_0 folgenden Werte beibehalten werden, so hat man für A' die der Gleichung (127) entsprechende Gleichung

$$A' = \odot' + \varrho' = L - k + (\mathcal{A}) + M + S + \nu + e' + \varrho'$$

oder, wenn die Summe der periodischen Glieder

$$M + S + \nu + e' + \varrho' = P \tag{130}$$

gesetzt wird,

$$A' = L - k + (\mathcal{A}) + P \tag{131}$$

Unter Annahme des Wertes $k = 20''.47$ ist nach den *Newcomb*schen Sonnentafeln, wenn t wie oben die seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten, bedeutet

$$L - k + (\mathcal{A}) = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.089\,t^2 \tag{132}$$

Denkt man sich diesen und den Wert von P in die Gleichung (131) substituiert, so erhält man die scheinbare Rektaszension der Sonne. Der dieser Rektaszension entsprechende Stundenwinkel der Sonne ist $\Theta - A'$; führt man nun die Bezeichnung ein

$$\Theta - A' = H,$$

so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (122), (131) und (132)

$$H = C - 279^\circ 39' 15''.54 + (n - 129\,598\,159''.52)t + 0''.308\,t^2 + P' - P \tag{133}$$

*) In Fig. 13 nicht gezeichnet.

oder, wenn

$$H_0 = C - 279^\circ 39' 15''.54 + (n - 129\,598\,159''.52)t \tag{134}$$

gesetzt wird,

$$H = H_0 + 0''.308\,t^2 + P' - P \tag{135}$$

Der durch die Gleichung (134) bestimmte Winkel H_0 läßt sich ebenfalls als Stundenwinkel definieren. Nimmt man nämlich eine Sonne an, deren Rektaszension durch den Ausdruck

$$\mathfrak{A} = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.397\,t^2 + P' \tag{136}$$

dargestellt wird, so ist der Stundenwinkel dieser fingierten, sogenannten mittleren Sonne gleich $\Theta - \mathfrak{A}$; substituiert man hier für Θ und $\mathfrak{A}$ ihre in (122) und (136) gegebenen Werte, so folgt

$$\Theta - \mathfrak{A} = H_0 \tag{137}$$

Den Stundenwinkel H nennt man die wahre und H_0 die mittlere Zeit. Den Moment, wo an einem Beobachtungsorte $H_0 = 0$ ist, und sich demnach die mittlere Sonne im Meridian dieses Ortes befindet, bezeichnet man als 0^h mittlere Zeit oder als mittleren Mittag des betreffenden Meridians. Berücksichtigt man nun, daß t von dem mittleren Berliner Mittage Jan. 0, 1900 aus gezählt wird, daß also, wenn $t = 0$ ist, für den Berliner Meridian auch $H_0 = 0$ ist, so folgt aus (134)

$$C = 279^\circ 39' 15''.54 = 18^h 38^m 37^s.036 \tag{138}$$

Die Zeit, innerhalb deren H_0 um $360^\circ = 1296000''$ zunimmt, nennt man einen mittleren Tag; für das als Zeiteinheit gewählte julianische Jahrhundert ändert sich also H_0 um $36525 \times 1\,296\,000'' = 47\,336\,400\,000''$. Da nun diese Änderung, nach (134), auch durch $n - 129\,598\,159''.52$ ausgedrückt wird, so folgt

$$n = 47\,465\,998\,159''.52 \tag{139}$$

Dieser Wert von n gilt für ein julianisches Jahrhundert als Zeiteinheit; wird derselbe durch 36525 dividiert, so erhält man den einem mittleren Tage als Zeiteinheit entsprechenden Wert $n = 1\,299\,548''.2042$.

36. Sternzeit im mittleren Mittage. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt. Durch Substitution der in (138) und (139) mitgeteilten Werte von C und n in (122) erhält man als Ausdruck für die Sternzeit

$$\Theta = 18^h 38^m 37^s.036 + 47\,466\,002\,768''.13\,t + 1''.397\,t^2 + P' \tag{140}$$

Wählt man nun einen mittleren Tag als Zeiteinheit und dividiert demnach die Koeffizienten von t und t^2 durch 36525, bzw. $(36525)^2$, dividiert man ferner noch die in Bogensekunden ausgedrückten Koeffizienten durch 15, so wird, wenn d die seit 1900, Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in mittleren Tagen, bedeutet

$$\Theta = 18^h 38^m 37^s.036 + (24^h + 3^m 56^s.5554)d + \frac{0^s.093}{(36525)^2}d^2 + \tfrac{1}{15}P' \tag{141}$$

Setzt man in dieser Gleichung $d = 0, 1, 2, \ldots$, so erhält man die für 1900 Jan. 0, 1, 2, ... gültige Sternzeit im mittleren Berliner Mittage. Um die Sternzeit im mittleren Mittage eines anderen Meridians zu finden, berücksichtige man zunächst, daß, wenn l den Längenunterschied eines Ortes gegen Berlin bedeutet, und l positiv oder negativ gerechnet wird, jenachdem der Ort westlich oder östlich von Berlin liegt, die dem mittleren Mittage des Ortes entsprechende mittlere Berliner Zeit gleich l ist. Übergeht man nun die kleinen, von d^2 und P' abhängigen Glieder der Gleichung (141), so ergibt sich, daß im Laufe eines mittleren Tages die Sternzeit der mittleren Zeit um $3^m 56^s.555$ vorauseilt. Wenn also l in Teilen eines Tages ausgedrückt wird, so hat man, um die für den in Frage kommenden Ort gültige Sternzeit im mittleren Mittage zu erhalten, zu der für den Berliner mittleren Mittag gültigen Sternzeit $l \times 3^m 56^s.555$ hinzuzulegen. Die für die verschiedenen Sternwarten anzuwendenden Werte dieser Korrektion findet man im Berliner astronomischen Jahrbuche angegeben.

Durch Differentiation der Gleichung (141) erhält man, wenn die Änderung von P' vernachlässigt wird,

$$\delta\Theta = \left[24^h + 236^s.5554 + \frac{0^s.186}{(36525)^2}\, d\right]\delta d$$

Setzt man jetzt $\delta d = 1$, versteht man also, mit Rücksicht auf die für d gewählte Einheit, unter δd einen mittleren Tag, so gibt der Koeffizient von δd die im Verlaufe eines mittleren Tages stattfindende Änderung der Sternzeit an. Folglich hat man, wenn noch ein Intervall von 24^h Sternzeit als ein Sterntag bezeichnet wird,

$$1 \text{ mittlerer Tag} = 1 \text{ Sterntag} + \left[236.5554 + \frac{0.186}{(36525)^2}\, d\right] \text{ Sternzeitsekunden}$$

Unter Vernachlässigung des von d abhängigen Gliedes ergibt sich hieraus

$$1 \text{ mittlerer Tag} = 1.0027379 \text{ Sterntag} \tag{142}$$

und somit

$$1 \text{ Sterntag} = 0.9972696 \text{ mittlerer Tag} \tag{143}$$

Der Sterntag unterscheidet sich nur wenig von der Zeit, welche die Erde nötig hat, um sich einmal um ihre Achse zu drehen. Diese Zeit, die mit τ' bezeichnet werden möge, ergibt sich aus der Gleichung $\omega\tau' = 360^0$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet. Wie schon früher bemerkt wurde, kann ω mit der auf die kleine Achse der Erde bezogenen Komponente n der Winkelgeschwindigkeit der Erde vertauscht werden; wird für n der oben gefundene, für den mittleren Tag als Zeiteinheit gültige Wert $1\,299\,548''.2042$ eingesetzt, so ergibt sich (in mittleren Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt) $\tau' = 23^h 56^m 4^s.099 = 0.9972697$ mittlerer Tag.

Es läßt sich jetzt leicht zeigen, in welcher Weise aus der Sternzeit eines Ortes die mittlere Ortszeit und aus der mittleren Ortszeit die Sternzeit des Ortes abgeleitet werden kann. Ist Θ' die einem gegebenen Augenblicke eines Tages entsprechende Ortssternzeit, ist ferner Θ_0 die für den betreffenden Tag gültige Sternzeit im mittleren Mittage Berlin, und bedeutet R die Reduktion von Θ_0 auf die Sternzeit im mittleren

Mittage des Beobachtungsortes, so gibt die Differenz $\Theta' - (\Theta_0 + R)$ die seit dem mittleren Mittage dieses Ortes verflossene Sternzeit an. Multipliziert man dann $\Theta' - (\Theta_0 + R)$ mit der für das Verhältnis eines Sterntages zu einem mittleren Tage gefundenen Zahl 0.9972696, so erhält man die der Zeit Θ' entsprechende mittlere Ortszeit. Die Multiplikation läßt sich umgehen, wenn man eine Tafel konstruiert, welche für jedes in Sternzeit ausgedrückte Intervall die zugehörige Reduktion auf mittlere Zeit angibt; eine solche Tafel findet man in allen astronomischen Jahrbüchern mitgeteilt.

Um die mittlere Ortszeit T' in Sternzeit zu verwandeln, multipliziert man T' mit der für das Verhältnis eines mittleren Tages zu einem Sterntage gefundenen Zahl 1.002 7379 und erhält damit zunächst die seit dem mittleren Mittage verflossene Sternzeit; wird diese zu der vorhin mit $\Theta_0 + R$ bezeichneten Sternzeit im mittleren Mittage des Ortes addiert, so stellt das Resultat die gesuchte Ortssternzeit dar. Zur Erleichterung der Rechnung gibt jedes astronomische Jahrbuch eine Tafel, aus der man mit dem Argument T' den Wert von $0.002\,7379\,T'$ entnehmen kann.

37. Zeitgleichung. Verwandlung der wahren Zeit in mittlere Zeit. Nach Gleichung (135) hat man, wenn $H_0 - H$ in Zeitsekunden ausgedrückt wird,

$$H_0 - H = -0^s.0205\,t^2 + \tfrac{1}{15}(P - P') \tag{144}$$

Die Differenz $H_0 - H$, welche man zu der wahren Zeit H hinzufügen muß, um die mittlere zu erhalten, nennt man die Zeitgleichung; wie man sieht, enthält diese, außer einem kleinen säkularen Gliede, noch die Differenz der durch die Gleichungen (130) und (121) definierten periodischen Glieder P und P'. Aus (130) und (121) folgt

$$P - P' = M + S + \nu + e' + \varrho' - \Psi \cos\varepsilon_0 \tag{144a}$$

Geht man nun auf die auf S. 110 und 108 gegebene Bedeutung von ν und Ψ zurück und berücksichtigt, daß $\cos\varepsilon_0 = 0.92$ ist, so findet man daß $\nu - \Psi\cos\varepsilon_0$ absolut genommen kleiner als $2''$ ist. Was die übrigen in (144a) vorhandenen Glieder betrifft, so wurde schon oben bemerkt, daß $e' < 0''.4$ ist; hinzuzufügen ist jetzt nur noch, daß S sehr klein gegenüber M und ϱ' ist. Um also einen Überblick über den Verlauf der Zeitgleichung zu erhalten, kann man in (144) $P - P' = M + \varrho'$ setzen und außerdem das säkulare Glied vernachlässigen; damit ergibt sich als Näherungswert der Zeitgleichung $\frac{1}{15}(M + \varrho')$ oder, da ϱ' nur sehr wenig von dem durch die Gleichung (126) bestimmten ϱ verschieden ist, $\frac{1}{15}(M + \varrho)$. Dieser Ausdruck soll nun für das Jahr 1900 berechnet werden. Nach den *Newcomb*schen Sonnentafeln hat man für 1900, wenn g die mittlere Anomalie der Sonne bedeutet,

$$M = 6910'' \sin g + 72'' \sin 2g \tag{145}$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (126), wenn $B = 0$ gesetzt, und der für 1900.0 gültige Wert $\varepsilon = 23^\circ\,27'\,8''$ substituiert wird,

$$\varrho = -8886'' \sin 2\odot + 191'' \sin 4\odot \tag{145a}$$

Hier soll jetzt an Stelle der wahren Sonnenlänge $\odot$ die mittlere Anomalie der Sonne eingeführt werden. Zunächst folgt aus (128), wenn nach *Newcomb* die Länge des Sonnenperigäums für 1900.0, bezogen auf das mittlere Äquinox der Epoche 1900.0,

gleich $281^\circ 13'$ angenommen und demnach für die mittlere Länge der Sonne der Wert $L = 281^\circ 13' + g$ substituiert wird,

$$\odot = 281^\circ 13' + g + (\mathit{A}) + M + S + \nu$$

Aus der auf S. 110 gegebenen Bedeutung von (A) ergibt sich nun, daß (A) für das Jahr 1900 und auch für die diesem benachbarten Jahre sehr klein ist; vernachlässigt man deshalb (A) und auch noch S und ν, so erhält man $\odot = 281^\circ 13' + g + M$, oder wenn für M das Hauptglied des Ausdrucks (145) substituiert wird,

$$\odot = 281^\circ 13' + g + 6910'' \sin g$$

Setzt man jetzt $\cos(13820'' \sin g) = 1$, $\sin(13820'' \sin g) = 13820'' \sin 1'' \sin g$ und wendet die Formel

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\sin(a+b) - \tfrac{1}{2}\sin(b-a)$$

an, so ergibt sich

$$\sin 2\odot = \sin(2g + 202^\circ 26') + 6910'' \sin 1'' \sin(3g + 202^\circ 26') - \\ - 6910'' \sin 1'' \sin(g + 202^\circ 26')$$

In derselben Weise folgt

$$\sin 4\odot = \sin(4g + 44^\circ 52') + 13820'' \sin 1'' \sin(5g + 44^\circ 52') - \\ - 13820'' \sin 1'' \sin(3g + 44^\circ 52')$$

Diese Ausdrücke sind in die Gleichung (145a) einzuführen. Mit Hilfe des damit erhaltenen Wertes von ϱ und unter Benutzung des in (145) für M angegebenen Ausdrucks ergibt sich für $\frac{1}{15}(M + \varrho)$ d. h. für den dem Jahre 1900 entsprechenden genäherten Wert (E) der Zeitgleichung

$$(146)\quad E = 442^s.4 \sin(g - 0^\circ 59') + 596^s.9 \sin(2g + 22^\circ 15') + 19^s.1 \sin(3g + 21^\circ 17') + \\ + 12^s.8 \sin(4g + 44^\circ 52') + 0^s.9 \sin(5g + 44^\circ 52')$$

Hierin ist nach *Newcomb*

$$g = 358^\circ 30'.8 + (1^\circ - 0'.86)\,d$$

zu setzen, wo d die seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in mittleren Tagen bedeutet.

Berechnet man mit Hilfe der Gleichung (146) die für die einzelnen Tage des Jahres 1900 und den mittleren Berliner Mittag gültigen Werte von E, so findet man, daß die Momente, in denen die Zeitgleichung gleich 0 ist, auf die Tage April 15, Juni 14, September 1 und Dezember 24 fallen; ferner ergibt sich, daß die Zeitgleichung vom Beginn des Jahres bis zu ihrem ersten Verschwinden positiv ist und bei jedem Durchgang durch den Nullpunkt das Vorzeichen wechselt. Daß die Formel (146) der Wahrheit schon ziemlich nahe kommt, ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung, in der die Zeitgleichung für je vier, den Epochen ihres Verschwindens, bzw. ihres Maximums naheliegende Zeiten mitgeteilt ist, und zwar 1. nach den im Berliner astronomischen Jahrbuch auf Grund der strengen Berechnung gemachten Angaben, 2. nach der mit Hilfe von (146) ausgeführten genäherten Rechnung.

Zeitgleichung im mittleren Mittage Berlin:

	April 15	Juni 14	Sept. 1	Dez. 25	Febr. 11	Mai 15	Juli 27	Nov. 3
Berl. Jahrb.	$+7^s.2$	$-5^s.1$	$+0^s.4$	$+7^s.6$	$+14^m27^s.2$	$-3^m49^s.5$	$+6^m17^s.2$	$-16^m20^s.4$
Formel (146)	$+6.8$	-3.9	$+0.1$	$+8.1$	$+14\ 27.5$	$-3\ 50.5$	$+6\ 17.8$	$-16\ 21.5$

38. Tropisches, siderisches, anomalistisches Jahr. Normalmeridian. Der Gleichung (132) zufolge hat man

$$L - k + (\Delta) = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,602\,768''.13\,t + 1''.089\,t^2$$

Hierin bedeutet t die seit Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin verflossene Zeit, ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten; k bezeichnet die Aberrationskonstante und $L + (\Delta)$ die mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das dieser Zeit entsprechende mittlere Äquinox. Das Zeitintervall, innerhalb dessen $L + (\Delta)$, also auch $L - k + (\Delta)$ um $360^\circ = 1\,296\,000''$ zunimmt, nennt man ein tropisches Jahr. Nun findet man durch Differentiation der vorigen Gleichung, daß die Änderung der mittleren Länge der Sonne in der Zeiteinheit, d. h. in einem julianischen Jahrhundert, gleich $129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t$ ist; somit ergibt sich für die Dauer des tropischen Jahres, ausgedrückt in Teilen eines julianischen Jahrhunderts, $1\,296\,000'' : 129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t$. Will man aber die Dauer des tropischen Jahres in mittleren Tagen ausgedrückt erhalten, so ist der letzte Bruch noch mit 36 525 zu multiplizieren; man erhält damit

(147) 1 tropisches Jahr $= [365.242\,198\,78 - 0.000\,006\,14\,t]$ mittlere Tage

Als Beginn des tropischen Jahres wählt man nach *Bessel* den Augenblick, in dem die vorhin mit $L - k + (\Delta)$ bezeichnete scheinbare mittlere Länge der Sonne gleich $280^\circ = 18^h 40^m$ ist; dieser Moment läßt sich in folgender Weise berechnen. Für 1900, Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin hat man, wenn $L - k + (\Delta) = L'$ gesetzt wird, $L' = 279^\circ 39' 15''.54 = 18^h 38^m 37^s.036$; wenn also $\Delta\tau$ die Zeit bedeutet, innerhalb deren L' um $1^m 22^s.964$ zunimmt, so bezeichnet Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin $+ \Delta\tau$ den Beginn des tropischen Jahres 1900. Da sich L' in einem mittleren Tage um

$$\frac{129\,602\,768''.13 + 2''.178\,t}{36525} = 3^m 56^s.5554 + 0^s.000\,000\,397\,t$$

ändert, so wird, mit Vernachlässigung des minimalen, von t abhängigen Gliedes

$$\Delta\tau = \frac{1^m 22^s.964}{3\ 56.555} = 0.3507 \text{ mittlerer Tag}$$

Das tropische Jahr 1900 beginnt demnach um 1900, Januar 0.3507 m. Zt. Berlin.

Da die Dauer eines tropischen Jahres, der Gleichung (147) zufolge, gleich $365.242\,198\,78 - 0.000\,006\,14\,t$ mittlere Tage ist, so sind zu Beginn des tropischen Jahres 1901 seit 1900 Januar 0, 0^h m. Zt. Berlin, im ganzen $0.3507 + 365.2422 =$ $= 365.5929$ mittlere Tage verflossen; das Jahr 1900 hat aber 365 Tage, somit fällt der Beginn des tropischen Jahres 1901 auf 1901, Januar 0.5929 m. Zt. Berlin. In derselben Weise läßt sich die mittlere Berliner Zeit zu Beginn der übrigen auf das Jahr 1900 folgenden, bzw. der ihm vorausgehenden tropischen Jahre berechnen; man

erhält so als mittlere Berliner Zeit des Anfangs der vier auf 1901 folgenden tropischen Jahre: 1902 Januar 0.8351, 1903 Jan. 1.0773, 1904 Jan. 1.3195, 1905 Jan. 0.5617.

Der Beginn eines tropischen Jahres ist seiner Definition nach ein absoluter Moment, d. h. der gleiche für die ganze Erde; wird also die diesem Moment entsprechende Berliner Zeit mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, und bedeutet l, wie oben, die westlich von Berlin positiv gerechnete Längendifferenz eines Ortes der Erde gegen den Meridian von Berlin, so fällt der Anfang des tropischen Jahres auf die Zeit $\mathfrak{T} - l$ des betreffenden Ortes. Beispielsweise würde der Beginn des tropischen Jahres 1905 — der, wie vorhin angegeben, auf 1905 Januar 0.5617 m. Zt. Berlin fällt — für einen $0^d.5617$ westlich von Berlin gelegenen Ort auf 1905 Januar 0, 0^h mittlere Ortszeit fallen.

Es soll jetzt der Begriff des Normalmeridians eingeführt werden. In einem Gemeinjahre versteht man darunter den Meridian der Erde, auf welchem man zu Beginn des tropischen Jahres Januar 0, 0^h mittlere Zeit zählt; in einem Schaltjahre dagegen wird derjenige Meridian der Normalmeridian genannt, für welchen der Anfang des tropischen Jahres mit dem mittleren Mittage Januar 1 zusammenfällt. Unter Benutzung der oben über die mittlere Berliner Zeit des Anfangs der tropischen Jahre 1900 bis 1905 gemachten Angaben findet man, daß der Normalmeridian im Jahre 1900 um $0^d.3507$, im Jahre 1901 um $0^d.5929$, in dem Schaltjahre 1904 um $0^d.3195$ und im Jahre 1905 um $0^d.5617$ westlich von Berlin liegt; der Normalmeridian nimmt also in jedem Jahre eine andere Lage auf der Erdoberfläche ein. Bezeichnet man nun die Länge von Berlin, bezogen auf den Normalmeridian, mit k', und wird k' positiv oder negativ gezählt, je nachdem Berlin westlich oder östlich vom Normalmeridian liegt, so entspricht der Berliner Zeit $\mathfrak{T}$ die Zeit $\mathfrak{T} + k'$ des Normalmeridians; für 1900 ist hier dem Vorhergehenden zufolge $k' = -0^d.3507$ zu setzen, für 1901 hat man $k' = -0^d.5929$ anzunehmen, usw. Wenn ferner die Längendifferenz irgend eines Ortes der Erde gegen Berlin wieder mit l bezeichnet und positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem der Ort westlich oder östlich von Berlin liegt, so ist die der Ortszeit Θ entsprechende Zeit des Normalmeridians gleich $\Theta + l + k'$. Umgekehrt ist die der Zeit T des Normalmeridians entsprechende Ortszeit gleich $T - l - k'$; verbindet man hiermit die oben gegebene Definition des Normalmeridians, so erhält man den Satz: Für einen Ort, dessen Längendifferenz gegen Berlin (l) in der vorhin festgesetzten Weise gezählt wird, ist die mittlere Ortszeit des Beginns eines tropischen Jahres gleich Januar $0.0 - l - k'$ in einem Gemein- und gleich Januar $1.0 - l - k'$ in einem Schaltjahre. Die Werte von k' findet man in den Tafeln zur theoretischen Astronomie von *J. Bauschinger* für die Jahre 1600 bis 2000 angegeben.

Außer von dem vorhin behandelten tropischen Jahre macht man noch von dem siderischen und dem anomalistischen Jahre Gebrauch. Unter einem siderischen Jahre versteht man das Zeitintervall, innerhalb dessen die auf ein festes Äquinox bezogene mittlere Länge der Sonne um 360° zunimmt. Um die Dauer eines siderischen Jahres zu finden, bilde man zunächst den Ausdruck für die scheinbare mittlere Länge der Sonne zur Zeit $1900 + t$, bezogen auf das mittlere Äquinox 1900.0; dieser ergibt

sich, indem man von dem in (132) für $L - k + (\mathcal{A})$ gegebenen Ausdruck den von *Newcomb* für $(\mathcal{A})$ angenommenen Wert subtrahiert. Man erhält so

$$L - k = 279^\circ 39' 15''.54 + 129\,597\,743''.20\,t - 0''.020\,t^2$$

Hieraus folgt, daß die Änderung, welche $L - k$, also auch L in einem julianischen Jahrhundert erfährt, gleich $129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$ ist. Die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in Teilen eines julianischen Jahrhunderts, ist demnach gleich $1\,296\,000'' : 129\,597\,743''.20 - 0''.040\,t$. Multipliziert man diesen Quotienten mit 36 525, so erhält man die Dauer eines siderischen Jahres, ausgedrückt in mittleren Tagen, und zwar wird

(148) 1 siderisches Jahr $= (365.256\,360\,42 + 0.000\,000\,11\,t)$ mittlere Tage

Als anomalistisches Jahr bezeichnet man die Zeit, innerhalb deren die mittlere Anomalie der Sonne um 360° zunimmt. Nach *Newcomb* hat man

(149) 1 anomalistisches Jahr $= (365.259\,641\,34 + 0.000\,003\,04\,t)$ mittlere Tage.

Kapitel VI.

Berechnung der Kulminationszeit und der Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns.

39. Kulminationszeit. Für verschiedene Zwecke ist es notwendig, im voraus die mittlere Zeit der Kulmination eines Gestirns und auch die für diese Zeit gültige Rektaszension und Deklination des Gestirns zu kennen. Um an einem Beispiel zu zeigen, wie man zu dieser Kenntnis gelangt, soll zunächst für den Pariser Meridian die mittlere Zeit der auf den 5. April 1910 fallenden oberen Kulmination des Mondes berechnet werden; hierbei wird der in § 16 gefundene Satz benutzt, daß die Sternzeit der oberen Kulmination eines Gestirns gleich der Rektaszension des Gestirns zur Zeit der oberen Kulmination ist. Geht man nun in erster Näherung von der Annahme aus, daß die obere Kulmination des Mondes auf April 5, 12^h mittlerer Zeit Paris falle, so findet man mit Hilfe der in der Connaissance des Temps gegebenen Mondephemeride, daß die der oberen Kulmination entsprechende Rektaszension des Mondes also auch die Sternzeit seiner oberen Kulmination gleich $21^h 43^m$ ist. Da die Sternzeit im mittleren Mittage Paris für 1910 April 5 gleich $0^h 51^m 36^s.35$ ist, so kann man für die mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes in zweiter Näherung $21^h.7 - 0^h.9$ oder einfach 21^h annehmen. In der Connaissance des Temps findet man nun die folgenden Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes mitgeteilt:

1910 April 5

m. Zt. Paris	Rektaszension	1. Diff.	2. Diff.	Deklination	1. Diff.	2. Diff.
20^h	$22^h\,1^m\,43^s.81$			$-\,17^\circ\,34'\,28''.8$		
		$+\,2^m\,18^s.55$			$+\,12'\,\,8''.4$	
21	4 2.36		$-\,0^s.12$	$-\,17\;22\;20.4$		$+\,7''.0$
		$+\,2\;18.43$			$+\,12\;15.4$	
22	6 20.79		$-\,0.11$	$-\,17\;10\;\;5.0$		$+\,7.0$
		$+\,2\;18.32$			$+\,12\;22.4$	
23	8 39.11			$-\,16\;57\;42.6$		

Die Rektaszension des Mondes ist also um 21^h m. Zt. Paris gleich $22^h\,4^m$. Subtrahiert man hiervon die vorhin für den 5. April 1910 angegebene Sternzeit im mittleren Pariser Mittage und verwandelt die Differenz $22^h\,4^m - 0^h\,52^m = 21^h\,12^m$ in ein Intervall mittlerer Zeit, so erhält man für die Kulminationszeit in dritter Näherung den Wert $21^h\,9^m$ m. Zt. Paris. Es sei jetzt n das in Bruchteilen einer mittleren Stunde ausgedrückte Zeitintervall, das man zu 21^h hinzuzufügen hat, um die genaue mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes zu erhalten, und es bedeute $f(21^h + n)$ die dieser Zeit entsprechende Rektaszension des Mondes; die in § 2 erläuterte Interpolationsformel (19) in Verbindung mit der vorigen Tabelle gibt dann

a) $$f(21^h + n) = 22^h\,4^m\,2^s.36 + n\left[2^m\,18^s.43 - \frac{n-1}{2}\,0^s.12\right]$$

Mit Benutzung der genäherten Kulminationszeit $21^h\,9^m = 21^h.15$ erhält man $n = 0.15$, also $\frac{n-1}{2}\,0^s.12 = -\,0^s.05$; folglich wird die vorige Gleichung

$$f(21^h + n) = 22^h\,4^m\,2^s.36 + 138^s.48n$$

Nun ist $f(21^h + n)$ auch gleich der im Moment der oberen Kulmination gezählten Sternzeit; für diese läßt sich aber ein zweiter Ausdruck gewinnen, indem man die mittlere Zeit der Kulmination oder $21^h + n$ in Sternzeit verwandelt. Zunächst sind 21 Stunden mittlerer Zeit gleich einem Intervall von $21^h\,3^m\,26^s.986$ Sternzeit; da ferner 1 Stunde mittlerer Zeit, in Sternzeit ausgedrückt, gleich $3609^s.856$ ist, so enthält der mit n bezeichnete Bruchteil einer mittleren Stunde $3609.856n$ Sternzeitsekunden. Unter Anwendung der für 1910, April 5 gültigen Sternzeit im mittleren Pariser Mittage ergibt sich also für die der mittleren Zeit $21^h + n$ entsprechende Sternzeit $0^h\,51^m\,36^s.35 + 21^h\,3^m\,26^s.986 + 3609^s.856n = 21^h\,55^m\,3^s.336 + 3609^s.856n$. Setzt man diesen Ausdruck dem zuletzt für $f(21^h + n)$ gefundenen gleich, so erhält man

$$21^h\,55^m\,3^s.336 + 3609^s.856n = 22^h\,4^m\,2^s.36 + 138^s.48n$$

oder

$$3471^s.376n = 539^s.024$$

Hieraus folgt in Bruchteilen einer mittleren Stunde $n = 0.155\,277$ oder, in Minuten und Sekunden ausgedrückt, $n = 9^m\,19^s.00$. Somit ergibt sich für 1910 April 5 als mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes im Pariser Meridian $21^h.155\,277 = 21^h\,9^m\,19^s.00$. Substituiert man den Wert $n = 0.155\,277$ in die Gleichung (a), so erhält man die Rektaszension (α) des Mondes zur Zeit

der oberen Kulmination, und zwar wird $\alpha = 22^h 4^m 23^s.86$. Für die zugehörige Deklination (δ) ergibt sich die der Gleichung (a) analoge Formel

$$\delta = -17^\circ 22' 20''.4 + n\left[12' 15''.4 + \frac{n-1}{2}\, 7''.0\right];$$

für $n = 0.155\,277$ wird also $\delta = -17^\circ 20' 26''.7$.

Um ein zweites Beispiel zu geben, soll für einen 5^h östlich von Paris gelegenen Ort die mittlere Ortszeit der auf den 5. April 1910 fallenden oberen Kulmination des Mondes berechnet werden. Man geht hierbei von der für Paris gültigen Kulminationszeit aus, die in der Connaissance des Temps von Tag zu Tag angegeben ist und am 5. April 1910 — in Übereinstimmung mit dem vorhin gefundenen Resultate — auf $21^h 9^m$ m. Zt. Paris fällt. Sieht man nun von der Bewegung des Mondes in Rektaszension ab, so würde der Mond an dem Orte O um 5 Stunden früher wie in Paris, also um $16^h 9^m$ m. Zt. Paris kulminieren. Nach der in der Connaissance des Temps enthaltenen Mondephemeride ist aber die für 16^h mittlere Pariser Zeit gültige Rektaszension des Mondes um 12^m kleiner wie die für 21^h gültige; demnach ergibt sich als Näherungswert der Kulminationszeit an dem Orte O $15^h 57^m$ m. Zt. Paris. Für die beiden dieser Zeit vorausgehenden Stunden und für die zwei folgenden findet man in der Connaissance des Temps die nachstehenden Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes angegeben:

1910 April 5

m. Zt. Paris	Rektaszension	1. Diff.	2. Diff.	Deklination	1. Diff.	2. Diff.
14^h	$21^h 47^m 50^s.14$			$-18^\circ 44' 48''.8$		
		$+2^m 19^s.23$			$+11' 25''.1$	
15	50 9.37		$-0^s.11$	$-18\ 33\ 23.7$		$+7''.4$
		$+2\ 19.12$			$+11\ 32.5$	
16	52 28.49		-0.12	$-18\ 21\ 51.2$		$+7.3$
		$+2\ 19.00$			$+11\ 39.8$	
17	54 47.49			$-18\ 10\ 11.4$		

Bezeichnet man jetzt mit $15^h + n$ die genaue mittlere Pariser Zeit der oberen Kulmination des Mondes am Orte O und mit $f(15^h + n)$ die dieser Zeit entsprechende Rektaszension des Mondes, denkt man sich ferner n in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückt und macht, da hier $n > \frac{1}{2}$ ist, von der Interpolationsformel § 2, (20) Gebrauch, so folgt

b) $$f(15^h + n) = 21^h 52^m 28^s.49 - \nu\left[2^m 19^s.12 + \frac{\nu - 1}{2}\, 0^s.12\right],$$

wo $\nu = 1 - n$ ist. Unter Anwendung des für die Kulminationszeit gefundenen Näherungswertes $15^h 57^m = 15^h.95$ wird $n = 0.95$, also $\nu = 0.05$ und demnach $\frac{\nu - 1}{2}\, 0^s.12 = -0^s.06$; somit wird die Rektaszension des Mondes zur Zeit seiner oberen Kulmination am Orte O

$$f(15^h + n) = 21^h 52^m 28^s.49 - 139^s.06\,\nu$$

Man verwandle nun die für die obere Kulmination des Mondes in O gültige mittlere Pariser Zeit $15^h + n = 16^h - \nu$ in Sternzeit. Da ein Intervall von $(16 - \nu)$ mittleren Stunden dem Sternzeitintervall $16^h\,2^m\,37^s.704 - 3609^s.856\,\nu$ gleich ist, und da die am 5. April 1910 im mittleren Pariser Mittage gezählte Sternzeit $0^h\,51^m\,36^s.35$ beträgt, so entspricht der mittleren Pariser Zeit $15^h + n = 16^h - \nu$ die Pariser Sternzeit $16^h\,54^m\,14^s.054 - 3609^s.856\,\nu$, also die am Orte O gezählte Sternzeit $21^h\,54^m\,14^s.054 - 3609^s.856\,\nu$. Setzt man diese Sternzeit, welche gleichzeitig die Rektaszension des Mondes zur Zeit seiner oberen Kulmination am Orte O angibt, dem für $f(15^h + n)$ gefundenen Ausdruck gleich, so erhält man

$$21^h\,54^m\,14^s.054 - 3609^s.856\,\nu = 21^h\,52^m\,28^s.49 - 139^s.06\,\nu$$

Hieraus ergibt sich der in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückte Wert von ν

$$\nu = \frac{105^s.564}{3470^s.796} = 0.030415;$$

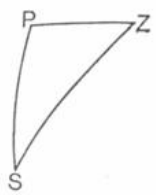
in Minuten und Sekunden ausgedrückt, wird also $\nu = 1^m\,49^s.49$ und demnach $n = 58^m\,10^s.51$. Somit ist die genaue mittlere Pariser Zeit der Kulmination des Mondes am Orte O gleich $15^h\,58^m\,10^s.51$ und die entsprechende mittlere Ortszeit in O gleich $20^h\,58^m\,10^s.51$. Um die für diese Zeit gültige Rektaszension (α) des Mondes zu finden, hat man in der Gleichung (b) $\nu = 0.030415$ zu setzen; es wird dann $\alpha = 21^h\,52^m\,24^s.26$. Die zugehörige Deklination (δ) ergibt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\delta = -18^\circ 21' 51''.2 - \nu\left[11' 32''.5 + \frac{\nu - 1}{2}\,7''.3\right];$$

für $\nu = 0.030415$ folgt $\delta = -18^\circ 22' 12''.4$.

40. Auf- und Untergangszeit eines Sterns. Aus dem Dreieck PZS (Fig. 1), worin P den Nordpol des Äquators, Z das Zenit eines Beobachtungsortes O und S den Ort eines Sterns bedeutet, folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination, z die Zenitdistanz und t den Stundenwinkel des Sterns angibt,

Fig. 1.



$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{1}$$

Im Moment des Auf- oder Unterganges ist $z = 90^\circ$; durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung (1) erhält man, wenn der für $z = 90^\circ$ gültige Wert von t mit t_0 bezeichnet wird,

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta \tag{2}$$

Diese Gleichung läßt sich durch keinen Wert von t_0 befriedigen, wenn δ algebraisch größer als $90^\circ - \varphi$ oder kleiner als $\varphi - 90^\circ$ ist; sie gibt einen Wert von t_0, wenn $\delta = 90^\circ - \varphi$ oder $\delta = \varphi - 90^\circ$ ist, und zwei Werte, wenn $\delta < 90^\circ - \varphi$ oder $\delta > \varphi - 90^\circ$ ist. Im ersten Falle bleibt der Stern entweder stets über oder stets unter dem Horizont, im zweiten Falle berührt er in der unteren oder in der oberen Kulmination den Horizont; im dritten Falle endlich geht der Stern auf und unter, und zwar entspricht der zwischen 180° und 360° liegende Wert von t_0 dem Aufgange, der andere dem Untergange des Sterns. Zwischen der Sternzeit (Θ_0), dem

Stundenwinkel (t_0) eines Sterns zur Zeit Θ_0 und der Rektaszension (α) des Sterns besteht aber die Gleichung $\Theta_0 = t_0 + \alpha$; wird also der Gleichung (2) durch zwei Werte von t_0 Genüge geleistet, so erhält man auch zwei Werte von Θ_0, die nun die Sternzeiten des Auf- und Untergangs des Sternes angeben. Aus diesen läßt sich dann noch die mittlere Zeit des Auf-, bzw. Unterganges ableiten.

Die vorhin gemachte Annahme, daß zur Zeit des Auf- und Unterganges eines Sterns $z = 90^\circ$ sei, ist in Wirklichkeit nicht richtig; die durch die Atmosphäre verursachte Strahlenbrechung hat nämlich zur Folge, daß der Stern schon sichtbar wird, wenn er sich noch unter dem Horizont befindet, und noch gesehen werden kann, wenn seine Zenitdistanz bereits 90° überschritten hat. Um nun den wahren Wert der Zenitdistanz zur Zeit des Auf- und Unterganges zu erhalten, beobachte man die Sternzeit des Auf-, bzw. Unterganges eines hellen Sterns; wird diese mit Θ und die Rektaszension des Sterns mit α bezeichnet, so ist $\Theta - \alpha = t$ der Stundenwinkel des Sterns zur Zeit des Auf-, bzw. Unterganges. Substituiert man den für t gefundenen Wert und die als bekannt vorausgesetzten Werte von φ und δ in die Gleichung (1), so läßt sich z berechnen. Im Mittel aus einer größeren Zahl solcher Bestimmungen hat sich ergeben, daß für den Auf- und Untergang $z = 90^\circ 34'$ ist. Dementsprechend sind die aus der Gleichung (1) unter der Annahme $z = 90^\circ$ folgenden Werte von $t = t_0$ zu verbessern. Differenziert man zu diesem Zwecke die Gleichung (1), indem man nur z und t als variabel betrachtet, und setzt nach vollzogener Differentiation $\sin z = 1$, $dz = 34' = 136^s$, $t = t_0$, so erhält man für die Korrektion (dt) der mit Hilfe der Gleichung (2) berechneten Werte von t_0

$$dt = \frac{34'}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} = \frac{136^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} \tag{3}$$

Die Korrektion ist somit negativ für den Aufgang eines Sterns ($180^\circ < t_0 < 360^\circ$) und positiv für den Untergang ($0^\circ < t_0 < 180^\circ$). Den zwischen 0° und 180° gelegenen Wert von $t = t_0 + dt$ bezeichnet man als den halben Tagbogen des Sterns; wird dieser mit 2 multipliziert und das Produkt in Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt, so erhält man die Zeit, während derer sich der Stern über dem Horizont befindet.

Die Formeln (2) und (3) werden unbrauchbar, wenn t_0 in der Nähe von 0° oder 180° liegt. Um die in einem solchen Falle zu benutzende Formel zu erhalten, gehe man von der aus (1) folgenden Gleichung aus

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Bildet man nun die Ausdrücke für $1 - \cos t$ und $1 + \cos t$ und dividiert diese durch einander, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(z - \varphi + \delta) \sin \tfrac{1}{2}(z + \varphi - \delta)}{\cos \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

oder, wenn $z = 90^\circ 34'$ und sodann

$$S = \tfrac{1}{2}(90^\circ 34' + \varphi + \delta) \tag{4}$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(S - \varphi) \sin(S - \delta)}{\cos S \cos(S - 90^\circ 34')}} \tag{5}$$

41. Auf- und Untergangszeit der Sonne. Unter der Zeit des Auf-, bzw. Unterganges der Sonne wird in den astronomischen Jahrbüchern der Moment verstanden, in dem der Mittelpunkt der Sonne auf-, bzw. untergeht, in dem also — dem § 40 zufolge — die Zenitdistanz dieses Mittelpunktes gleich $90^\circ 34'$ ist. Die Berechnung der Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne wird am besten an einem Beispiel erläutert, und so sollen im folgenden die Zeiten bestimmt werden, zu denen die Sonne am 1. Sept. 1910 (bürgerliches Datum) in Paris auf- und untergeht. Der Connaissance des Temps zufolge ist im wahren Pariser Mittage des 1. Sept. 1910 die Deklination des Mittelpunktes der Sonne gleich $+ 8^\circ 31'$ und die stündliche Änderung der Deklination gleich $- 0.'9$; die Polhöhe von Paris (Sternwarte) ist $\varphi = + 48^\circ 50.'2$. Aus einer Tafel, welche die halben Tagbogen angibt, findet man, daß der für $\varphi = + 49^\circ$ und $\delta = + 8.^\circ 5$ gültige halbe Tagbogen gleich $6^h.7$ ist; als Näherungswert des Stundenwinkels der Sonne oder der wahren Zeit im Moment des Sonnenaufganges ergibt sich also $24^h - 6^h.7 = 17^h.3$, der entsprechende Wert für den Sonnenuntergang ist gleich $6^h.7$. Mit Hilfe der vorhin angeführten, für den wahren Pariser Mittag gültigen Deklination der Sonne und ihrer stündlichen Änderung erhält man demnach als Werte der Deklination der Sonne bei Sonnenauf-, bzw. -untergang: $+ 8^\circ 37'$, bzw. $+ 8^\circ 25'$. Wäre nun die Zenitdistanz des Mittelpunktes der Sonne zur Zeit des Auf- und Unterganges gleich 90°, so würde man, durch Substitution von $\delta = + 8^\circ 37'$ und $\delta = + 8^\circ 25'$ in die Gleichung (2), für den Aufgang $t_0 = 17^h 20^m.1$ und für den Untergang $t_0 = 6^h 39^m.0$ erhalten. Da aber die Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes zur Zeit des Auf- und Unterganges $90^\circ 34'$ beträgt, so muß zu den vorigen Werten von t_0 noch die in (3) angegebene Korrektion

$$dt = \frac{136^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0}$$

hinzugefügt werden. Für den Aufgang erhält man $dt = - 3^m.5$, für den Untergang $dt = + 3^m.5$; die wahre Zeit des Sonnenaufganges ist also $17^h 16^m.6$ und die des Unterganges $6^h 42^m.5$. Addiert man zu diesen Zeiten die in der Connaissance des Temps gegebenen Werte der Zeitgleichung $+ 0^m.2$, bzw. $+ 0^m.1$, so findet man, daß der Aufgang der Sonne, astronomisch gerechnet, am 31. August, $17^h 16^m.8$ mittlerer Zeit, oder, nach der im gewöhnlichen Leben üblichen Bezeichnung, am 1. September, $5^h 16^m.8$ vormittags und der Untergang der Sonne am 1. September, $6^h 42^m.6$ nachmittags erfolgt.

Will man wissen, wann der obere Sonnenrand auf-, bzw. untergeht, wann also der erste Sonnenstrahl erscheint, bzw. der letzte verschwindet, so hat man Folgendes zu berücksichtigen. Zur Zeit des Auf- und Unterganges des Sonnenrandes ist seine wahre Zenitdistanz gleich $90^\circ 34'$; nimmt man den Halbmesser der Sonne zu $16'$ an, so ist also die Zenitdistanz des Sonnenmittelpunktes gleich $90^\circ 50'$. Man erhält demnach die wahre Zeit des Auf- und Unterganges des oberen Sonnenrandes, wenn man zu den mit Hilfe der Gleichung (2) für den Mittelpunkt der Sonne gefundenen Werten von t_0 die aus der Gleichung

$$(6) \qquad dt_\odot = \frac{50'}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0} = \frac{200^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0}$$

folgenden Werte von $dt_\odot$ addiert.

42. Auf- und Untergangszeit des Mondes. Die in den Jahrbüchern gegebenen Zeiten des Auf- und Unterganges des Mondes sind für den Mittelpunkt des Mondes berechnet. Wenn nun der Mittelpunkt des Mondes auf- oder untergeht, so ist seine wahre Zenitdistanz, dem § 40 zufolge, gleich $90°34'$. Dies ist aber die für den Beobachtungsort gültige Zenitdistanz, während man in der Gleichung (1), — wenn für δ die aus der Ephemeride entnommene, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehene oder geozentrische Deklination des Mondes angewandt wird — auch für z seinen geozentrischen Wert zu substituieren hat. In welcher Weise man aus der beobachteten Zenitdistanz die geozentrische ableitet, wird in § 69 gezeigt werden; für den gegenwärtigen Zweck möge die Angabe genügen, daß, wenn sich der Mond im Horizont befindet, der geozentrische Wert von z im Mittel um $57'$ kleiner als der für den Beobachtungsort gültige ist. Die geozentrische Zenitdistanz des Mondes zur Zeit seines Auf- oder Unterganges ist demnach gleich $89°37'$. Anstatt diesen Wert in die Gleichung (1) zu substituieren, berechnet man zunächst wieder mittels der Gleichung (2) den für $z = 90°$ gültigen Wert t_0 und fügt zu diesem die Korrektion

$$(7) \qquad dt_{\mathbb{C}} = -\frac{23'}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0} = -\frac{92^s}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0}$$

hinzu. Bei kleinen Werten von $\sin t_0$ hat man die Gleichungen (4) und (5) zu benutzen, in denen aber zuvor $90°34'$ durch $89°37'$ ersetzt werden muß.

Um den Gang der Rechnung zu erläutern, soll jetzt für San Francisco die Zeit desjenigen Mondaufganges berechnet werden, welcher der am 1. Juni 1892 stattgefundenen oberen Kulmination des Mondes vorausging, sowie auch die Zeit des auf diese Kulmination folgenden Monduntergange; hierbei wird die Polhöhe von San Francisco zu $+37°48'$ und seine Länge zu $8^h19^m.0$ westlich von Paris angenommen. — In der Connaissance des Temps findet man für jeden Tag die nach § 39 berechnete mittlere Ortszeit der Kulmination des Mondes sowohl für Paris als für die von Paris um 1, 2, ..., 12 Stunden in Länge entfernten Meridiane angegeben, desgleichen die für diese Zeiten gültigen Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes. So hat man für 1892 Juni 1, wenn λ die westliche Länge eines Meridians in bezug auf Paris, T die auf diesem Meridian im Moment der Kulmination des Mondes gezählte mittlere Zeit, α und δ die Rektaszension, bzw. Deklination des Mondes zur Zeit der Kulmination, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die einer Änderung der Länge des Meridians um 1^m entsprechenden Änderungen von α und δ bedeuten,

1892 Juni 1

λ	T	α	$\Delta\alpha$	δ	$\Delta\delta$
7^h	$6^h1^m\ 7^s$	$10^h44^m57^s$	$+2^s.0$	$+13°14'.2$	$-0'.2$
8	6 2 55	10 46 56	+2.0	+13 1.3	−0.2
9	6 4 43	10 48 54	+2.0	+12 48.3	−0.2

Mit Hilfe dieser Angaben und der vorhin mitgeteilten Länge von San Francisco erhält man als Näherungswert für die mittlere Ortszeit der Kulmination des Mondes in San Francisco 6^h3^m und als Näherungswert für die Deklination des Mondes zu dieser Zeit $\delta = +13°$. Da nun der halbe Tagbogen für $\varphi = +38°$ und $\delta = +13°$

gleich $6^h 44^m$ ist, so ergibt sich als genäherte Zeit des Mondaufganges Juni 1, $6^h 3^m - 6^h 44^m =$ Juni 0, $23^h 19^m$ m. Zt. San Francisco und als genäherte Zeit des Mondunterganges Juni 1, $6^h 3^m + 6^h 44^m = 12^h 47^m$ m. Zt. San Francisco. Die entsprechenden mittleren Pariser Zeiten sind Juni 0, $23^h 19^m + 8^h 19^m =$ Juni 1, $7^h 38^m$ und Juni 1, $21^h 6^m$.

In der Connaissance des Temps findet man nun folgende Örter des Mondes angegeben:

1892 Juni 1

m. Zt. Paris	α	δ	m. Zt. Paris	α	δ
7^h	$10^h 33^m 19^s$	$+ 14^\circ 28.'8$	20^h	$10^h 58^m 13^s$	$+ 11^\circ 45.'8$
8	10 35 16	+ 14 16.6	21	11 0 6	+ 11 33.0
9	10 37 12	+ 14 4.2	22	11 1 59	+ 11 20.1

Aus dieser Tabelle folgt, daß um $7^h 38^m$ und $21^h 6^m$ m. Zt. Paris die Deklination des Mondes gleich $+ 14^\circ 23'$, bzw. gleich $+ 11^\circ 32'$ ist; die zugehörigen Werte der Rektaszension sind $10^h 34^m.5$ und $11^h 0^m.3$. Substituiert man die für die Deklination erhaltenen Werte in die Gleichung (2), so ergibt sich für den Aufgang des Mondes $t_0 = 17^h 14^m.1$ und für den Untergang $t_0 = 6^h 36^m.4$; ferner werden die zugehörigen, durch die Gleichung (7) bestimmten Korrektionen $dt_{\mathbb{C}} = + 2^m.0$, bzw. $dt_{\mathbb{C}} = - 2^m.0$. Die wahren Werte von t sind also $17^h 16^m.1$ und $6^h 34^m.4$; addiert man hierzu die vorhin angegebenen Werte der Rektaszension des Mondes, so erhält man die in San Francisco beim Auf-, bzw. Untergang des Mondes gezählten Sternzeiten $3^h 50^m.6$ und $17^h 34^m.7$. Diesen entsprechen die Pariser Sternzeiten $12^h 9^m.6$ und $1^h 53^m.7$. Um die mittleren Pariser Zeiten zu erhalten, berücksichtige man, daß, wie oben gefunden wurde, der Auf- und Untergang des Mondes in San Francisco auf das Pariser Datum 1892 Juni 1 fällt; man hat also zunächst die Sternzeit im mittleren Pariser Mittage des 1. Juni 1892 aufzusuchen und findet dafür $4^h 41^m.7$. Hieraus, in Verbindung mit den vorhin erhaltenen Pariser Sternzeiten und unter Benutzung der zur Verwandlung eines Sternzeitintervalls in ein Intervall mittlerer Zeit dienenden Tafeln, ergeben sich die mittleren Pariser Zeiten des Auf- und Unterganges des Mondes in San Francisco Juni 1, $7^h 26^m.7$, bzw. Juni 1, $21^h 8^m.5$. Mit Hilfe der für diese Zeiten gültigen Werte der Rektaszension und Deklination des Mondes kann man nun die vorige Rechnung wiederholen; die damit erhaltenen genaueren Zeiten sind Juni 1, $7^h 26^m.4$, bzw. Juni 1, $21^h 8^m.6$ m. Zt. Paris. Verwandelt man die Pariser Zeit in Ortszeit, so findet man für die Aufgangszeit des Mondes in San Francisco Juni 1, $7^h 26^m.4 - 8^h 19^m.0 =$ Juni 0, $23^h 7^m.4$ m. Zt. San Francisco oder Juni 1 (bürgerliches Datum) $11^h 7^m.4$ vormittags; für die Untergangszeit erhält man Juni 1, $12^h 49^m.6$ m. Zt. San Francisco oder Juni 2 (bürgerliches Datum), $0^h 49^m.6$ vormittags.

43. Morgen- und Abendweite. Außer der Zeit des Auf- und Unterganges eines Sterns muß auch der Punkt des Horizonts bestimmt werden, in dem der Stern auf-, bzw. untergeht. In Fig. 1 (S. 121) bedeute nun S den Ort eines Sterns zur Zeit seines Auf- oder Unterganges. Setzt man den Winkel $PZS = 90^\circ - a$, so ist a positiv, wenn der Aufgangspunkt nördlich vom Ostpunkte, bzw. der Untergangspunkt nördlich vom Westpunkte des Horizonts liegt; im entgegengesetzten Falle ist a

negativ. Den dem Aufgangspunkt entsprechenden Wert von a, also den Abstand des Aufgangspunktes vom Ostpunkte des Horizonts, bezeichnet man als Morgenweite; der zum Untergangspunkte gehörige Wert von a oder der Abstand des Untergangspunktes vom Westpunkte des Horizonts wird die Abendweite genannt. Zur Berechnung von a dient die aus dem Dreieck PZS (Fig. 1) folgende Gleichung

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z}{\cos\varphi\sin z} \tag{8}$$

oder, da der Voraussetzung nach $z = 90^\circ 34'$ ist,

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos 90^\circ 34'}{\cos\varphi\sin 90^\circ 34'} \tag{8a}$$

Anstatt die Morgen- und Abendweite mit Hilfe der Gleichung (8), bzw. (8a) zu bestimmen, kann man auch das in § 40 bei der Auflösung der Gleichung (1) benutzte Verfahren anwenden. Wird nämlich der für $z = 90^\circ$ gültige Wert von a mit a_0 bezeichnet, so folgt aus (8)

$$\sin a_0 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \tag{9}$$

Andererseits erhält man durch Differentiation der Gleichung (8), indem man nur z und a als veränderlich betrachtet,

$$\cos\varphi\sin z\cos a\,da = (\sin\varphi\sin z - \cos\varphi\cos z\sin a)\,dz$$

Für $z = 90^\circ$ und $a = a_0$ wird also

$$da = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos a_0}\,dz \tag{10}$$

Setzt man jetzt $dz = +34' = +0^\circ\!.57$, so ergibt sich für den wahren Wert von a

$$a = a_0 + 0^\circ\!.57\,\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\cos a_0} \tag{11}$$

Falls $\cos a_0$ sehr klein ist, kann man die Gleichungen (9) bis (11) nicht benutzen; der Wert von a läßt sich dann in folgender Weise finden. Aus (8) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z}{\cos\varphi\sin z}$$

Bildet man jetzt die Ausdrücke für $1 - \sin a$ und $1 + \sin a$ und dividiert dieselben durch einander, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + z - \delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi + z + \delta)}{\sin\frac{1}{2}(z + \delta - \varphi)\cos\frac{1}{2}(\varphi + \delta - z)}$$

Setzt man hierin $z = 90^\circ 34'$ und sodann

$$S = \tfrac{1}{2}(90^\circ 34' + \varphi + \delta),$$

so wird

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\frac{\sin(S-\delta)\cos S}{\sin(S-\varphi)\cos(S - 90^\circ 34')}} \tag{12}$$

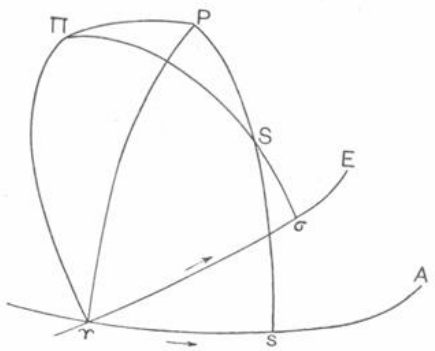
Kapitel VII.

Präzession und Nutation.

44. Definitionen. Wie in der Theorie der Drehung der Erde gezeigt wurde, hat die Anziehung der Sonne und des Mondes auf das Erdellipsoid zur Folge, daß die Durchschnittslinie der Äquatorebene mit einer festen Ebene — als welche die einer bestimmten Epoche zugehörige Ebene der Ekliptik gewählt wurde — fortwährend ihre Lage ändert, und daß gleichzeitig die Neigung des Äquators gegen die feste Ebene veränderlich ist. Der Ausdruck, welcher für die Neigung des Äquators gegen eine fest gewählte Ekliptik gefunden wurde, setzt sich aus Gliedern zusammen, welche teils die Potenzen der Zeit mit konstanten Faktoren multipliziert enthalten — den sogenannten Präzessionsgliedern —, teils periodisch sind — den Nutationsgliedern. Dasselbe gilt von dem Ausdruck des Winkels, den die Durchschnittslinie des Äquators und der festen Ekliptik mit einer in dieser Ekliptik gewählten festen Geraden bildet. Im Laufe der Zeit ändert auch die Ekliptik ihre Lage im Raume; die zur Bestimmung der jeweiligen Lage der Ekliptik gegen eine feste Ekliptik (1850.0) dienenden Größen, d. h. die Neigung der beweglichen Ekliptik gegen die feste und die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik auf der festen sind durch die Gleichungen (97) des § 29 gegeben.

In Fig. 1 sei nun γE die Ekliptik zur Zeit t und Π der Nordpol der Ekliptik, der Pfeil gebe die Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne an. Wenn dann γA diejenige Lage des Äquators darstellt, welche er zur Zeit t haben würde, wenn die Nutationsglieder nicht vorhanden wären, so bezeichnet man γA als den mittleren Äquator, γ als den mittleren Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt oder als das mittlere Äquinox und den Winkel $E\gamma A$ als die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit t. Wenn aber γA die wahre Lage des Äquators zur Zeit t angibt, so nennt man γ das wahre Äquinox und den Winkel $E\gamma A$ die wahre (oder auch die scheinbare) Schiefe der Ekliptik zur Zeit t. Es sei jetzt S der Ort eines Sterns an der Sphäre und P der Nordpol von γA, ferner sei σ der Durchschnittspunkt des Breitenkreises von S mit der Ekliptik und s der Durchschnittspunkt des Deklinationskreises von S mit dem Äquator. Jenachdem nun γA den mittleren oder wahren Äquator bedeutet, wird $\gamma\Pi\sigma$ die auf das mittlere, bzw. wahre Äquinox bezogene Länge und γPs die auf das mittlere, bzw. wahre Äquinox bezogene Rektaszension des Sterns genannt; in analoger Weise drückt man sich hinsichtlich der Deklination aus. Die Breite eines gegebenen Sterns hängt nur von

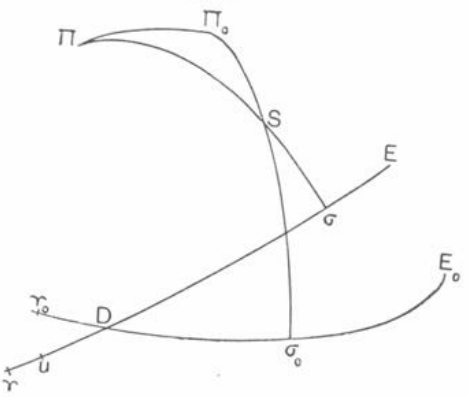
Fig. 1.



der Lage der Ekliptik ab; da nun letztere durch Ausdrücke bestimmt wird, welche von periodischen Gliedern frei sind, so entfällt die Möglichkeit, von einer mittleren und wahren Breite zu sprechen.

45. Präzession in Länge und Breite. Zur Zeit t_0 sei DE_0 (Fig. 2) die Ekliptik, γ_0 das mittlere Äquinox und Π_0 der Nordpol der Ekliptik; eine entsprechende Bedeutung mögen DE, γ und Π für die Zeit t haben. Ist nun S ein Stern, so ist $\gamma_0\sigma_0$ die Länge und $\sigma_0 S$ die Breite des Sterns, bezogen auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0, während $\gamma\sigma$ und σS die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogene Länge und Breite bezeichnen. Man setze jetzt $\gamma_0\sigma_0 = \lambda_0$, $\sigma_0 S = \beta_0$, $\gamma\sigma = \lambda$, $\sigma S = \beta$ und stelle sich zur Aufgabe, die Differenzen $\lambda - \lambda_0$ und $\beta - \beta_0$ zu berechnen.

Fig. 2.



Wird auf $D\gamma$ der Bogen $Du = D\gamma_0$ abgetragen und $\Pi\Pi_0 = \pi_t$, $\gamma_0 D = \Pi_t$, $\gamma u = \mathcal{A}_t$, also $\gamma D = \Pi_t + \mathcal{A}_t$ gesetzt, so ist in dem Dreieck $\Pi_0\Pi S$ der Winkel bei Π gleich $90^\circ - (\lambda - \Pi_t - \mathcal{A}_t)$ und der Winkel bei Π_0 gleich $90^\circ + \lambda_0 - \Pi_t$. Es ergibt sich demnach

$$\cos\beta \sin(\lambda - \Pi_t - \mathcal{A}_t) = \cos\beta_0 \sin(\lambda_0 - \Pi_t)\cos\pi_t + \sin\beta_0 \sin\pi_t$$
$$\cos\beta \cos(\lambda - \Pi_t - \mathcal{A}_t) = \cos\beta_0 \cos(\lambda_0 - \Pi_t)$$

Setzt man hierin $\cos\pi_t = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\pi_t$ und berücksichtigt, daß

$$\sin\beta_0 \sin\pi_t - 2\cos\beta_0 \sin(\lambda_0 - \Pi_t)\sin^2\tfrac{1}{2}\pi_t = \\ = \cos\beta_0 \sin\pi_t\{\operatorname{tang}\beta_0 - \sin(\lambda_0 - \Pi_t)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi_t\}$$

ist, so folgt, wenn noch zur Abkürzung

$$\sin\pi_t\{\operatorname{tang}\beta_0 - \sin(\lambda_0 - \Pi_t)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi_t\} = \sigma \tag{1}$$

gesetzt wird,

$$\cos\beta \sin(\lambda - \Pi_t - \mathcal{A}_t) = \cos\beta_0 \sin(\lambda_0 - \Pi_t) + \sigma\cos\beta_0$$
$$\cos\beta \cos(\lambda - \Pi_t - \mathcal{A}_t) = \cos\beta_0 \cos(\lambda_0 - \Pi_t)$$

Man multipliziere nun die erste dieser Gleichungen mit $\cos(\lambda_0 - \Pi_t)$, die zweite mit $-\sin(\lambda_0 - \Pi_t)$ und addiere die Produkte; hierauf multipliziere man die erste Gleichung mit $\sin(\lambda_0 - \Pi_t)$, die zweite mit $\cos(\lambda_0 - \Pi_t)$ und addiere wieder die Produkte; es wird dann

$$\cos\beta \sin(\lambda - \lambda_0 - \mathcal{A}_t) = \sigma\cos\beta_0 \cos(\lambda_0 - \Pi_t)$$
$$\cos\beta \cos(\lambda - \lambda_0 - \mathcal{A}_t) = \cos\beta_0 + \sigma\cos\beta_0 \sin(\lambda_0 - \Pi_t)$$

und somit

$$\operatorname{tang}(\lambda - \lambda_0 - \mathcal{A}_t) = \frac{\sigma\cos(\lambda_0 - \Pi_t)}{1 + \sigma\sin(\lambda_0 - \Pi_t)} \tag{2}$$

Ferner erhält man durch Anwendung einer der *Napier*schen Analogien auf das Dreieck $\Pi_0 \Pi S$, wenn

$$\lambda - \lambda_0 - \Lambda_t = L \tag{3}$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \beta_0) = - \frac{\sin(\lambda_0 - \Pi_t + \frac{1}{2}L)}{\cos \frac{1}{2}L} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \pi_t \tag{4}$$

Die für die vorigen Gleichungen zu benutzenden Werte von π_t, Π_t, Λ_t sind nach § 32, wenn das tropische Jahr als Zeiteinheit gewählt wird,

$$\pi_t = \left[47''.141 - 0''.068 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} - 0''.034 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2$$

$$\Pi_t = 173^\circ 29' 40''.7 + 3286''.5 \frac{t_0 - 1850}{100} + 0''.27 \left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2$$

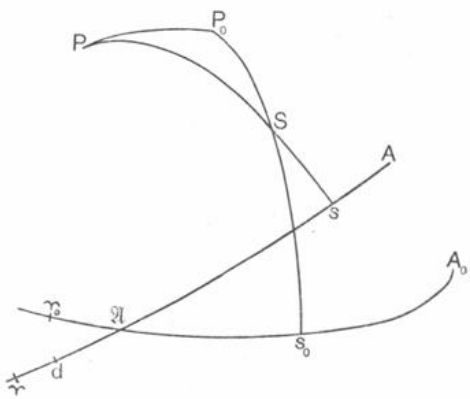
$$- \left[869''.0 + 0''.84 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} - 0''.07 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2$$

$$\Lambda_t = \left[5024''.53 + 2''.224 \frac{t_0 - 1850}{100} - 0''.003 \left(\frac{t_0 - 1850}{100}\right)^2\right] \frac{t - t_0}{100}$$

$$+ \left[1''.112 - 0''.003 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2$$

46. Präzession in Rektaszension und Deklination. I. In Fig. 3 sei $\mathfrak{A} A_0$ der mittlere Äquator und γ_0 das mittlere Äquinox zur Zeit t_0, $\mathfrak{A} A$ und γ mögen die analoge Bedeutung für die Epoche t haben, P_0 und P seien die Pole von $\mathfrak{A} A_0$ und $\mathfrak{A} A$. Man trage nun auf $\mathfrak{A}\gamma$ den Bogen $\mathfrak{A} d = \mathfrak{A}\gamma_0$ ab und setze wie in der Theorie der Drehung der Erde $PP_0 = \mathfrak{n}$, $\gamma_0 \mathfrak{A} = 90^\circ - p = P$, $\gamma d = \mathfrak{m}$ und somit $\gamma \mathfrak{A} = 90^\circ - p + \mathfrak{m}$. Wird jetzt die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0 bezogene Rektaszension und Deklination des Sterns S mit α_0, bzw. δ_0 bezeichnet, und sind α und δ die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten von S, so ist in dem Dreieck $P_0 PS$ der Winkel bei P_0 gleich $90^\circ + \alpha_0 - P$ und der Winkel bei P gleich $90^\circ - (\alpha - P - \mathfrak{m})$. Aus der Gegenüberstellung der Bezeichnungen der Seiten und Winkel des Dreiecks $P_0 PS$ mit den für das Dreieck $\Pi_0 \Pi S$ in Fig. 2 gewählten folgt nun unmittelbar, daß man aus den Formeln (1) bis (4) die entsprechenden für den Äquator gültigen erhält, wenn man in ersteren

Fig. 3.



λ_0, β_0 mit α_0, δ_0 — π_t, Π_t mit $\mathfrak{n}$, $P = 90^\circ - p$

λ, β » α, δ — Λ_t » $\mathfrak{m}$

vertauscht. Setzt man demgemäß an Stelle von (1)

$$\sin \mathfrak{n} [\operatorname{tang} \delta_0 + \cos(\alpha_0 + p) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{n}] = \sigma', \tag{5}$$

so ergibt sich aus (2)

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0 - \mathfrak{m}) = \frac{\sigma' \sin(\alpha_0 + p)}{1 - \sigma' \cos(\alpha_0 + p)}$$

Wenn ferner in (3) und (4) die vorhin angegebene Vertauschung der Buchstaben vorgenommen und

$$\text{(7)} \qquad \alpha - \alpha_0 - \mathfrak{m} = L'$$

gesetzt wird, so erhält man

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_0) = \frac{\cos(\alpha_0 + p + \frac{1}{2}L')}{\cos \frac{1}{2}L'} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}$$

Die für diese Gleichungen zu benutzenden Werte von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und p sind in § 32 mitgeteilt worden und zwar hat man, wenn das tropische Jahr als Zeiteinheit gewählt wird,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} &= \left[4607''.11 + 2''.795 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} \\
&\quad + \left[1''.398 - 0''.002 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 + 0''.036 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3 \\
\mathfrak{n} &= \left[2005''.12 - 0''.852 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} \\
&\quad - \left[0''.426 + 0''.001 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - 0''.042 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^3 \\
p &= \left[2303''.56 + 1''.42 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} + 0''.31 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2
\end{aligned}$$

II. Wenn die Differenz $t - t_0$ nicht zu groß oder der Stern dem Pol nicht sehr nahe ist, so entwickelt man die Gleichungen (6) und (8) in Reihen. Nach § 1, (12) und (14) ergibt sich aus (6)

$$\alpha = \alpha_0 + \mathfrak{m} + \sigma' \sin(\alpha_0 + p) + \tfrac{1}{2}\sigma'^2 \sin(2\alpha_0 + 2p) + \tfrac{1}{3}\sigma'^3 \sin(3\alpha_0 + 3p) + \cdots$$

Nun ist allgemein

$$\sigma'^m \sin(m\alpha_0 + mp) = \sigma'^m \sin m\alpha_0 \cos mp + \sigma'^m \cos m\alpha_0 \sin mp$$

oder, wenn

$$\sin mp = mp - \cdots, \qquad \cos mp = 1 - \tfrac{1}{2}m^2p^2 + \cdots$$

gesetzt wird,

$$\sigma'^m \sin(m\alpha_0 + mp) = \sigma'^m(1 - \tfrac{1}{2}m^2p^2 + \cdots) \sin m\alpha_0 + \sigma'^m(mp - \cdots) \cos m\alpha_0$$

Wie nun aus der Gleichung (5) und den für $\mathfrak{n}$ und p gegebenen Ausdrücken hervorgeht, sind σ' und p in bezug auf $t - t_0$ von der ersten Ordnung; setzt man also in der letzten Gleichung $m = 1, 2, 3 \ldots$ und substituiert die damit erhaltenen Werte von $\sigma' \sin(\alpha_0 + p)$, $\sigma'^2 \sin(2\alpha_0 + 2p)$, ... in die obige Gleichung für α, so erhält man mit Vernachlässigung aller Glieder, welche in bezug auf $t - t_0$ von höherer als der dritten Ordnung sind,

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_0 + \mathfrak{m} + \sigma' \sin\alpha_0 + \tfrac{1}{2}\sigma'^2 \sin 2\alpha_0 + \sigma' p \cos\alpha_0 + \tfrac{1}{3}\sigma'^3 \sin 3\alpha_0 + \sigma'^2 p \cos 2\alpha_0 \\
- \tfrac{1}{2}\sigma' p^2 \sin\alpha_0
\end{aligned}$$

Aus (5) ergibt sich aber bis auf Glieder von der Ordnung $(t-t_0)^3$ genau

$$\sigma' = \mathfrak{n} \operatorname{tang}\delta_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2 \cos\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2 p \sin\alpha_0 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{n}^3 \operatorname{tang}\delta_0$$

Somit wird

$$\begin{aligned}(9)\qquad \alpha = \alpha_0 &+ \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 \\ &+ \tfrac{1}{4}\mathfrak{n}^2 \sin 2\alpha_0 + p\mathfrak{n}\cos\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2 \sin 2\alpha_0 \operatorname{tang}^2\delta_0 \\ &+ \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2 p \cos 2\alpha_0 + \tfrac{1}{4}\mathfrak{n}^3 \sin 3\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 + \tfrac{1}{12}\mathfrak{n}^3 \sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 \\ &- \tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{n}\sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 + \mathfrak{n}^2 p \cos 2\alpha_0 \operatorname{tang}^2\delta_0 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{n}^3 \sin 3\alpha_0 \operatorname{tang}^3\delta_0\end{aligned}$$

Um eine entsprechende Formel für die Deklination abzuleiten, berücksichtige man, daß der Gleichung (8) zufolge

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_0) = \cos(\alpha_0+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{n} - \sin(\alpha_0+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}L' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{n}$$

ist. Da $L' = \alpha - \alpha_0 - \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ in bezug auf $t-t_0$ von der ersten Ordnung sind, so kann man auf der rechten Seite der vorigen Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}L' = \frac{1}{2}\operatorname{tang}L'$ setzen; substituiert man dann noch für $\operatorname{tang}L' = \operatorname{tang}(\alpha-\alpha_0-\mathfrak{m})$ seinen in (6) gegebenen Wert, so erhält man bis auf Glieder von der Ordnung $(t-t_0)^3$ genau

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_0) = \cos(\alpha_0+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\sigma' \sin^2(\alpha_0+p)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{n} - \tfrac{1}{2}\sigma'^2 \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{n}$$

Man löse jetzt $\cos(\alpha_0+p)$ und $\sin^2(\alpha_0+p)$ auf, setze $\sin p = p$, $\cos p = 1 - \frac{1}{2}p^2$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathfrak{n} = \frac{1}{2}\mathfrak{n} + \frac{1}{24}\mathfrak{n}^3$ und vernachlässige alle Glieder, welche in bezug auf $t-t_0$ von höherer Ordnung als der dritten sind; wird sodann noch die Gleichung angewandt

$$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_0) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_0) - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}(\delta-\delta_0),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta - \delta_0 = \mathfrak{n}\cos\alpha_0 &- p\mathfrak{n}\sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\sigma'\mathfrak{n}\sin^2\alpha_0 - \tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{n}\cos\alpha_0 \\ &- \tfrac{1}{2}\sigma' p\mathfrak{n}\sin 2\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\sigma'^2\mathfrak{n}\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0 + \tfrac{1}{12}\mathfrak{n}^3\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0\end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn mit Vernachlässigung der in dem Ausdruck für σ' (S. 129) enthaltenen Glieder dritter Ordnung

$$\sigma' = \mathfrak{n}\operatorname{tang}\delta_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2\cos\alpha_0$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}(10)\qquad \delta = \delta_0 &+ \mathfrak{n}\cos\alpha_0 - p\mathfrak{n}\sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^2\sin^2\alpha_0\operatorname{tang}\delta_0 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{n}^3\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0 \\ &- \tfrac{1}{2}p^2\mathfrak{n}\cos\alpha_0 - \tfrac{1}{2}p\mathfrak{n}^2\sin 2\alpha_0\operatorname{tang}\delta_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{n}^3\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0\operatorname{tang}^2\delta_0\end{aligned}$$

In die Gleichungen (9) und (10) sind jetzt die auf S. 130 gegebenen Ausdrücke von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und p zu substituieren; wendet man diese in der abgekürzten Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &= m_1\frac{t-t_0}{100} + m_2\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + m_3\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3 \\ \mathfrak{n} &= n_1\frac{t-t_0}{100} + n_2\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + n_3\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3 \\ p &= p_1\frac{t-t_0}{100} + p_2\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2\end{aligned}$$

an, so folgt, wenn nach den Potenzen von $\dfrac{t-t_0}{100}$ geordnet wird,

$$(11)\quad \alpha = \alpha_0 + [m_1 + n_1 \sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0]\,\frac{t-t_0}{100}$$
$$+ [m_2 + \tfrac{1}{4}n_1^2 \sin 2\alpha_0 + (n_2 \sin\alpha_0 + p_1 n_1 \cos\alpha_0)\operatorname{tang}\delta_0 + \tfrac{1}{2}n_1^2 \sin 2\alpha_0 \operatorname{tang}^2\delta_0]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$
$$+ [m_3 + \tfrac{1}{2}n_1 n_2 \sin 2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}p_1 n_1^2 \cos 2\alpha_0 + (n_3 \sin\alpha_0 + p_2 n_1 \cos\alpha_0 +$$
$$+ p_1 n_2 \cos\alpha_0 + \tfrac{1}{4}n_1^3 \sin 3\alpha_0 + \tfrac{1}{12}n_1^3 \sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2}p_1^2 n_1 \sin\alpha_0)\operatorname{tang}\delta_0$$
$$+ (n_1 n_2 \sin 2\alpha_0 + p_1 n_1^2 \cos 2\alpha_0)\operatorname{tang}^2\delta_0 + \tfrac{1}{3}n_1^3 \sin 3\alpha_0 \operatorname{tang}^3\delta_0]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

$$(11^a)\quad \delta = \delta_0 + n_1 \cos\alpha_0\,\frac{t-t_0}{100}$$
$$+ [n_2 \cos\alpha_0 - p_1 n_1 \sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2}n_1^2 \sin^2\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2$$
$$+ [(n_3 - \tfrac{1}{2}p_1^2 n_1)\cos\alpha_0 - (n_1 p_2 + n_2 p_1)\sin\alpha_0 - \tfrac{1}{6}n_1^3 \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0$$
$$- (n_1 n_2 \sin^2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}p_1 n_1^2 \sin 2\alpha_0)\operatorname{tang}\delta_0 - \tfrac{1}{2}n_1^3 \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 \operatorname{tang}^2\delta_0]\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

Da oben die Werte von m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, ... in Bogensekunden angegeben sind, so hat man bei der numerischen Berechnung der Gleichungen (11) und (11^a) $n_1^2 = n_1^2 \sin 1''$, $p_1 n_1 = p_1 n_1 \sin 1''$, ..., $p_1 n_1^2 = p_1 n_1^2 \sin^2 1''$, $n_1^3 = n_1^3 \sin^2 1''$, ... zu setzen und erhält dann die mit diesen Koeffizienten behafteten Glieder in Bogensekunden ausgedrückt.

Aus der Vergleichung der Reihenentwicklungen (11) und (11^a) mit

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dt}\,\frac{t-t_0}{100} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{d^3\alpha}{dt^3}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$
$$\delta = \delta_0 + \frac{d\delta}{dt}\,\frac{t-t_0}{100} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\delta}{dt^2}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{d^3\delta}{dt^3}\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

ergibt sich

$$(12)\quad \frac{d\alpha}{dt} = m_1 + n_1 \sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0$$
$$\frac{d\delta}{dt} = n_1 \cos\alpha_0$$

$$(13)\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2(m_2 + \tfrac{1}{4}n_1^2 \sin 2\alpha_0) + 2(n_2 \sin\alpha_0 + p_1 n_1 \cos\alpha_0)\operatorname{tang}\delta_0 + n_1^2 \sin 2\alpha_0 \operatorname{tang}^2\delta_0$$
$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = 2(n_2 \cos\alpha_0 - p_1 n_1 \sin\alpha_0) - n_1^2 \sin^2\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0$$
. . . . . .

Man führt nun die Bezeichnungen ein

$\frac{1}{100}\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{1}{100}\frac{d\delta}{dt}$ = Jährliche Präzession in Rektaszension und Deklination
$\frac{1}{100}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{1}{100}\frac{d^2\delta}{dt^2}$ = Variatio saecularis » » » »
$\frac{1}{6}\frac{d^3\alpha}{dt^3}$, $\frac{1}{6}\frac{d^3\delta}{dt^3}$ = Drittes Glied der Präzession » » »

und erhält damit

$$(14)\quad \alpha = \alpha_0 + \left[\text{jährl. Präz.} + \text{var. saec.}\ \frac{t-t_0}{200}\right](t-t_0) + \text{drittes Glied}\ \left(\frac{t-t_0}{100}\right)^3$$

sowie eine entsprechende Gleichung für δ.

Die Berechnung der jährlichen Präzession, der Variatio saecularis und des dritten Gliedes wird sehr vereinfacht durch die Benutzung der Präzessionstafeln. Setzt man zunächst

$$\frac{m_1}{100} = m\,, \qquad \frac{n_1}{100} = n\,,$$

so folgt

$$(15)\quad \begin{aligned} &\text{Jährliche Präzession in Rekt.} = m + n \sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 \\ &\quad\text{»}\qquad\quad\text{»}\qquad\quad\text{» Dekl.} = n\cos\alpha_0 \end{aligned}$$

Die Präzessionstafeln geben nun mit dem Argument α_0 die für den Beginn eines bestimmten tropischen Jahres gültigen Werte von m, $n\sin\alpha_0$ und $n\cos\alpha_0$, sowie deren Änderungen in 100 Jahren; man kann also ohne Mühe die der Zeit t_0 entsprechenden Werte von m, $n\sin\alpha_0$ und $n\cos\alpha_0$ ableiten.

Was die Variatio saecularis betrifft, so erhält man, wenn

$$(16)\quad \begin{aligned} &\tfrac{2}{100}(m_2 + \tfrac{1}{4}n_1^2 \sin 2\alpha_0) = A\,, && \tfrac{2}{100}(n_2\cos\alpha_0 - p_1 n_1 \sin\alpha_0) = A' \\ &\tfrac{2}{100}(n_2\sin\alpha_0 + p_1 n_1 \cos\alpha_0) = B\,, && -\tfrac{1}{100}n_1^2 \sin^2\alpha_0 = B' \\ &\tfrac{1}{100}n_1^2 \sin 2\alpha_0 = C\,, \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(17)\quad \begin{aligned} &\text{Variatio saec. in Rekt.} = A + B\operatorname{tang}\delta_0 + C\operatorname{tang}^2\delta_0 \\ &\quad\text{»}\qquad\quad\text{»}\qquad\quad\text{» Dekl.} = A' + B'\operatorname{tang}\delta_0 \end{aligned}$$

Die Werte von A, A' und die Logarithmen von B, C und B' lassen sich wieder den Präzessionstafeln entnehmen.

Um das dritte Glied der Präzession zu berechnen, führe man die Abkürzungen ein

$$(18)\quad \begin{aligned} &m_3 + \tfrac{1}{2}n_1 n_2 \sin 2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}p_1 n_1^2 \cos 2\alpha_0 = P \\ &(n_3 + \tfrac{1}{12}n_1^3 - \tfrac{1}{2}p_1^2 n_1)\sin\alpha_0 + (p_2 n_1 + p_1 n_2)\cos\alpha_0 + \tfrac{1}{4}n_1^3 \sin 3\alpha_0 = P_1 \\ &n_1 n_2 \sin 2\alpha_0 + p_1 n_1^2 \cos 2\alpha_0 = P_2 \\ &\tfrac{1}{3}n_1^3 \sin 3\alpha_0 = P_3 \end{aligned}$$

$$(18^a)\quad \begin{aligned} &(n_3 - \tfrac{1}{2}p_1^2 n_1)\cos\alpha_0 - (n_1 p_2 + n_2 p_1)\sin\alpha_0 - \tfrac{1}{6}n_1^3 \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 = Q \\ &-(n_1 n_2 \sin^2\alpha_0 + \tfrac{1}{2}p_1 n_1^2 \sin 2\alpha_0) = Q_1 \\ &-\tfrac{1}{2}n_1^3 \sin^2\alpha_0 \cos\alpha_0 = Q_2; \end{aligned}$$

es folgt dann

$$(19)\quad \begin{aligned} &\text{Drittes Glied der Präz. in Rekt.} = P + P_1 \operatorname{tang}\delta_0 + P_2 \operatorname{tang}^2\delta_0 + P_3 \operatorname{tang}^3\delta_0 \\ &\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{» Dekl.} = Q + Q_1 \operatorname{tang}\delta_0 + Q_2 \operatorname{tang}^2\delta_0 \end{aligned}$$

Die Werte von P, Q und die Logarithmen von P_1, P_2, P_3, Q_1 und Q_2 findet man in den Präzessionstafeln für jede Minute der Rektaszension angegeben.

III. Ein anderes Verfahren, die Präzession in Rektaszension und Deklination zu berechnen, ist das folgende. Es sei α_m die auf das mittlere Äquinox zur Zeit $\frac{1}{2}(t_0+t) = t_m$ bezogene Rektaszension. Da $t_m - t_0 = t - t_m = \frac{1}{2}(t-t_0)$ ist, so hat man, wenn α'_0,

α_c'', α_o''', bzw. α', α'', α''', bzw. α_m', α_m'', α_m''' die für die Zeit t_o, bzw. t, bzw. t_m gültigen Werte der drei ersten Differentialquotienten der Rektaszension nach der Zeit bedeuten und die höheren Differentialquotienten vernachlässigt werden, also $\alpha_o''' = \alpha''' = \alpha_m'''$ gesetzt wird,

(A)
$$\alpha_m = \alpha_o + \alpha_o' \frac{t - t_o}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha_o'' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$
$$\alpha_m = \alpha - \alpha' \frac{t - t_o}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha'' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$

(B)
$$\alpha_m'' = \alpha_o'' + \alpha_m''' \frac{t - t_o}{2}$$
$$\alpha_m'' = \alpha'' - \alpha_m''' \frac{t - t_o}{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (A) ergibt sich

$$\alpha - \alpha_o = (\alpha' + \alpha_o') \frac{t - t_o}{2} - \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \alpha_o'') \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$

Ebenso erhält man aus (B)

$$\alpha'' - \alpha_o'' = \alpha_m'''(t - t_o)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

(20)
$$\alpha - \alpha_o = (\alpha' + \alpha_o') \frac{t - t_o}{2} - \tfrac{2}{3}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$

Nun gelten auch die Entwicklungen

$$\alpha_o = \alpha_m - \alpha_m' \frac{t - t_o}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha_m'' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$
$$\alpha = \alpha_m + \alpha_m' \frac{t - t_o}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha_m'' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$

Hieraus erhält man aber

(21)
$$2(\alpha - \alpha_o) = 2\alpha_m'(t - t_o) + \tfrac{2}{3}\alpha_m''' \left(\frac{t - t_o}{2}\right)^3$$

Addiert man die Gleichungen (20) und (21), so ergibt sich

(22)
$$\alpha - \alpha_o = \left\{\alpha_m' + \tfrac{1}{3}\left[\frac{\alpha_o' + \alpha'}{2} - \alpha_m'\right]\right\}(t - t_o)$$

Wenn man also α_o', α_m', α', d. h. die Werte der jährlichen Präzession in Rektaszension für die Epochen t_o, $\frac{1}{2}(t_o + t)$, t berechnet und diese in die Gleichung (22) substituiert, so erhält man den Betrag der Präzession $\alpha - \alpha_o$ bis auf Glieder dritter Ordnung genau. Eine entsprechende Bemerkung gilt auch für die Deklination.

Aus (21) folgt, wenn $\alpha_m''' = 0$ gesetzt wird,

(23)
$$\alpha - \alpha_o = \alpha_m'(t - t_o)$$

Um also die Präzession bis auf Glieder zweiter Ordnung genau zu erhalten, hat man nur die jährliche Präzession für die Zeit $\frac{1}{2}(t + t_o)$ zu berechnen und mit $t - t_o$ zu multiplizieren.

47. Nutation in Länge und Schiefe. Bei der vorhin durchgeführten Berechnung der Änderungen, welche die auf die Ekliptik oder den Äquator bezogenen Koordinaten eines Sterns im Laufe der Zeit erfahren, kamen nur die säkularen Glieder der in der Theorie der Drehung der Erde gegebenen Gleichungen § 29, (89) und (90), bzw. (92) und (93) in Betracht; im folgenden sollen nun die durch die periodischen oder Nutationsglieder bewirkten Änderungen berechnet werden.

Da die periodischen Glieder in den für die Schiefe der Ekliptik geltenden Gleichungen (90) und (93) nur von der Änderung der Lage des Äquators herrühren, so sind diese Glieder ohne Einfluß auf die Breite eines Sterns; die Nutation in Breite ist also gleich 0. Dagegen haben die in § 29, (89) und (92) vorkommenden Nutationsglieder zur Folge, daß die Länge eines Sterns periodischen Änderungen unterworfen ist. Denkt man sich nämlich zunächst, daß der in Fig. 2 mit Υ bezeichnete Punkt das mittlere Äquinox zur Zeit t bedeute, so ist nach § 45 der Bogen $\Upsilon D = \Pi_t + \mathit{A}_t$; wenn also $D\sigma = s$ gesetzt wird, und λ die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogene Länge des Sterns S bedeutet, so folgt $\lambda = \Pi_t + \mathit{A}_t + s$. Wird dagegen unter Υ das wahre Äquinox zur Zeit t verstanden, und bezeichnet man den Komplex der in § 29, (92) enthaltenen periodischen Glieder mit $d\lambda$, so ist $\Upsilon D = \Pi_t + \mathit{A}_t + d\lambda$ und die auf das wahre Äquinox zur Zeit t bezogene Länge $\lambda' = \Pi_t + \mathit{A}_t + d\lambda + s$. Man hat somit

$$\lambda' = \lambda + d\lambda \tag{24}$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung bezeichnet man das Aggregat der in § 29, (92) enthaltenen periodischen Glieder als die Nutation in Länge. Die periodischen Glieder der Gleichung § 29, (93) werden unter dem Namen der Nutation in Schiefe zusammengefaßt. Die numerischen Werte der Nutation in Länge und Schiefe findet man in den astronomischen Jahrbüchern angegeben, doch ist dabei nur ein Teil der in § 29, (92) und (93) vorkommenden Nutationsglieder berücksichtigt; welches diese Glieder sind, wird ebenfalls in den Jahrbüchern mitgeteilt.

48. Nutation in Rektaszension und Deklination. In dem Dreieck $P\Pi S$ (Fig. 1) bedeute P den Pol des mittleren Äquators zur Zeit t, Π sei wieder der Pol der Ekliptik zur Zeit t und S der Ort des Sterns. Bezeichnet man mit ε die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit t, mit λ und β die Länge und Breite, und mit α und δ die Rektaszension und Deklination von S, bezogen auf das mittlere Äquinox zur Zeit t, so ist $\Pi P = \varepsilon$, $P\Pi S = 90^\circ - \lambda$, $\Pi S = 90^\circ - \beta$, $\Pi PS = 90^\circ + \alpha$, $PS = 90^\circ - \delta$. Bezeichnet man jetzt noch den Winkel bei S mit S und wendet auf das Dreieck $P\Pi S$ die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie [§ 13, (20) und (17^1)]

$$\begin{aligned} \sin a\, dB &= \sin C\, db - \sin b \cos C\, dA - \cos a \sin B\, dc \\ da &= \cos C\, db + \sin c \sin B\, dA + \cos B\, dc \end{aligned}$$

an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos\delta\, d\alpha &= -\sin S d\beta + \cos\beta \cos S d\lambda - \sin\delta \cos\alpha\, d\varepsilon \\ d\delta &= \cos S d\beta + \sin\varepsilon \cos\alpha\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned}$$

Um hieraus die Formeln für die Nutation in Rektaszension und Deklination zu erhalten, hat man anzunehmen, daß $d\beta$, $d\lambda$ und $d\varepsilon$ die Nutation in Breite, Länge und Schiefe bedeuten. Dem vorigen Paragraphen zufolge ist aber die Nutation in Breite gleich 0; wenn demnach $d\beta = 0$ gesetzt und außerdem für $\cos\beta \cos S$ sein aus dem Dreieck ΠPS (Fig. 1) folgender Wert substituiert wird, so geben die beiden letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} d\alpha &= (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \operatorname{tang}\delta)\, d\lambda - \cos\alpha \operatorname{tang}\delta\, d\varepsilon \\ d\delta &= \sin\varepsilon \cos\alpha\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{25}$$

Wird jetzt die auf das wahre Äquinox zur Zeit t bezogene Rektaszension und Deklination des Sterns mit α' und δ' bezeichnet, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \cos\varepsilon\, d\lambda + (\sin\varepsilon \sin\alpha\, d\lambda - \cos\alpha\, d\varepsilon) \operatorname{tang}\delta \\ \delta' &= \delta + \sin\varepsilon \cos\alpha\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{26}$$

49. Reduktion eines Sternortes von dem mittleren Äquinox zu Anfang eines tropischen Jahres t_0 auf das wahre Äquinox zur Zeit t. Es seien α_0 und δ_0 die Rektaszension und Deklination eines Sterns, bezogen auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0, und zwar möge t_0 mit dem Anfange eines bestimmten tropischen Jahres zusammenfallen. Um jetzt die auf das wahre Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten zu finden, addiert man zu α_0 und δ_0 zunächst die Präzession für das Intervall zwischen t_0 und dem Beginn des tropischen Jahres T, dem der Zeitpunkt t angehört; man erhält damit die auf das mittlere Äquinox zur Zeit T bezogene Rektaszension und Deklination des Sterns. Zu diesen Werten, die mit α und δ bezeichnet werden sollen, ist dann noch die Präzession für das Intervall $t - T$ und die Nutation hinzuzufügen. Die dem Intervall $t - T$ entsprechende Präzession erhält man, indem man mit Hilfe der Gleichungen (15) zunächst die jährliche Präzession für die Zeit T berechnet und diese dann mit dem in Teilen eines tropischen Jahres ausgedrückten Zeitintervall $t - T$ multipliziert. Ist die Differenz $t - T$ ursprünglich in mittleren Tagen angegeben, so ergibt sich der in Teilen eines tropischen Jahres ausgedrückte Wert von $t - T$ aus der Gleichung

$$\tau' = \frac{t - T}{365.2422}$$

Zur Berechnung der Nutation dienen die Gleichungen (25). In diesen beziehen sich α und δ auf das mittlere Äquinox zur Zeit t; wenn aber der Stern nicht sehr nahe beim Pol steht, so kann man für α und δ ihre auf das mittlere Äquinox des Jahresanfangs T bezogenen Werte annehmen.

Dem Gesagten zufolge hat man also, wenn α' und δ' die auf das wahre Äquinox zur Zeit t bezogene Rektaszension und Deklination bedeuten,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \tau'(m + n \sin\alpha \operatorname{tang}\delta) + \cos\varepsilon\, d\lambda + (\sin\varepsilon \sin\alpha\, d\lambda - \cos\alpha\, d\varepsilon) \operatorname{tang}\delta \\ \delta' &= \delta + \tau' n \cos\alpha + \sin\varepsilon \cos\alpha\, d\lambda + \sin\alpha\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{27}$$

In der Praxis werden diese Ausdrücke in zwei verschiedenen Formen angewandt. Setzt man zunächst

$$\begin{aligned} f &= \tau' m + \cos\varepsilon\, d\lambda \\ g \sin G &= -\, d\varepsilon \\ g \cos G &= \tau' n + \sin\varepsilon\, d\lambda \end{aligned} \tag{28}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + f + g \sin(G + \alpha) \tang\delta \\ \delta' &= \delta + g \cos(G + \alpha) \end{aligned} \tag{29}$$

Die Werte von f, $\log g$ und G findet man in den Jahrbüchern angegeben; wie aber schon in § 47 erwähnt wurde, berücksichtigen die Jahrbücher nur einen Teil der in den Ausdrücken für $d\lambda$ und $d\varepsilon$ enthaltenen Glieder. Bezeichnet man die vernachlässigten Glieder mit $d_2\lambda$ und $d_2\varepsilon$ und die in den Jahrbüchern berücksichtigten mit $d_1\lambda$ und $d_1\varepsilon$, so ist $d\lambda = d_1\lambda + d_2\lambda$, $d\varepsilon = d_1\varepsilon + d_2\varepsilon$. Will man nun nachträglich den Einfluß von $d_2\lambda$ und $d_2\varepsilon$ in Rechnung bringen, so setze man

$$f' = \cos\varepsilon\, d_2\lambda, \qquad g' \sin G' = -\, d_2\varepsilon, \qquad g' \cos G' = \sin\varepsilon\, d_2\lambda$$

und addiere dann zu den aus (29) mit Benutzung der Jahrbuchwerte von f, g und G folgenden α' und δ'

$$\begin{aligned} d_2\alpha &= f' + g' \sin(G' + \alpha) \tang\delta \\ d_2\delta &= g' \cos(G' + \alpha) \end{aligned}$$

Eine andere Form, die Reduktion auf den wahren Ort zu berechnen, ist die folgende. Man setze

$$\begin{aligned} \tau' m + \cos\varepsilon\, d\lambda &= A m + E \\ \tau' n + \sin\varepsilon\, d\lambda &= A n \\ -\, d\varepsilon &= B \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} A &= \tau' + \frac{\sin\varepsilon}{n}\, d\lambda \\ B &= -\, d\varepsilon \\ E &= \left(\cos\varepsilon - \frac{m}{n}\sin\varepsilon\right) d\lambda \end{aligned} \tag{30}$$

Ferner setze man

$$\begin{aligned} a &= m + n \sin\alpha \tang\delta, & a' &= n \cos\alpha \\ b &= \cos\alpha \tang\delta, & b' &= -\sin\alpha \end{aligned} \tag{31}$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + Aa + Bb + E \\ \delta' &= \delta + Aa' + Bb' \end{aligned} \tag{32}$$

Die in den Jahrbüchern gegebenen Werte von A, B und E sind ebenfalls unter Vernachlässigung eines Teils der Glieder von $d\lambda$ und $d\varepsilon$ berechnet. Um die vernachlässigten Glieder, die wieder mit $d_2\lambda$ und $d_2\varepsilon$ bezeichnet werden mögen, zu berücksichtigen, setze man

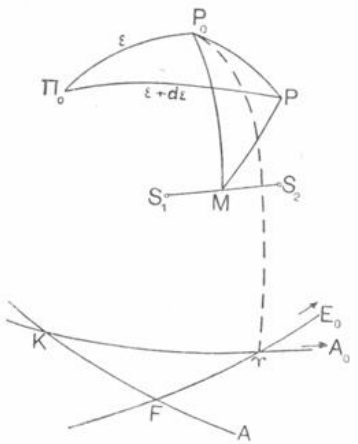
$$A' = \frac{\sin\varepsilon}{n}\, d_2\lambda, \qquad B' = -\, d_2\varepsilon$$

und addiere zu den Werten von α' und δ', welche sich unter Anwendung der dem Jahrbuche entnommenen Werte von A, B und E ergeben haben,

$$d_2\alpha = A'a + B'b$$
$$d_2\delta = A'a' + B'b'$$

50. Einfluß der Präzession und Nutation auf den Positionswinkel zweier Fixsterne. In Fig. 4 sei γA_0 der mittlere Äquator zur Zeit t_0 und P_0 sein Pol, KA sei der wahre Äquator zur Zeit t und P sein Pol, γE_0 sei die Ekliptik zur Zeit t_0 und Π_0 ihr Pol, M sei der Mittelpunkt des die beiden Sterne S_1 und S_2 verbindenden Bogens. Setzt man jetzt $P_0MS_2 = p_0$, $PMS_2 = p$, $PM = 90^\circ - \delta$, so folgt aus dem Dreieck P_0PM

Fig. 4.



$$\cos\delta \sin(p - p_0) = -\sin PP_0 \sin PP_0M$$

Es ist aber der Winkel $PP_0M = PP_0\Pi_0 - MP_0\Pi_0$ und, wenn die Rektaszension von M, bezogen auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0, mit α_0 bezeichnet wird, $MP_0\Pi_0 = \alpha_0 - 270^\circ = 90^\circ + \alpha_0$. Somit wird $PP_0M = PP_0\Pi_0 - MP_0\Pi_0 = -(90^\circ - PP_0\Pi_0) - \alpha_0$ und demnach

$$(33)\quad \cos\delta \sin(p - p_0) = \sin PP_0 \sin PP_0\Pi_0 \sin\alpha_0 + \\ + \sin PP_0 \cos PP_0\Pi_0 \cos\alpha_0$$

Nun ist γ der Pol von Π_0P_0 und F der Pol von Π_0P; also ist in dem Dreieck $P\Pi_0P_0$ der Winkel bei Π_0 gleich dem Bogen γF, und dieser ist (wenn das tropische Jahr als Zeiteinheit angenommen wird) gleich der Summe aus dem in § 32 für $(-\psi)_t$ gefundenen Ausdruck und den periodischen Gliedern der Gleichung § 29, (89). Setzt man den Winkel $P\Pi_0P_0 = {}^1\!F$ und beschränkt sich auf die Hauptglieder, so erhält man

$$(34)\quad {}^1\!F = \left[5036''.8 + 0''.5\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\frac{t - t_0}{100} - 1''.1\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - \\ - 17''.2 \sin\Omega + 0''.2 \sin 2\Omega - 1''.3 \sin 2L$$

Die Seite $P_0\Pi_0$ des Dreiecks $P\Pi_0P_0$ ist gleich der mittleren Schiefe der Ekliptik zur Zeit t_0, d. h. gleich dem Werte, den der in § 32 mit $(\varepsilon)_t$ bezeichnete Winkel für $t = t_0$ annimmt. Die Seite $P\Pi_0$ ist gleich der Summe aus dem in § 32 mit $(\varepsilon')_t$ bezeichneten Winkel und den periodischen Gliedern der Gleichung § 29, (90). Setzt man $P_0\Pi_0 = \varepsilon$ und $P\Pi_0 = \varepsilon + \delta\varepsilon$, wo

$$(35)\quad \delta\varepsilon = 9''.2 \cos\Omega - 0''.1 \cos 2\Omega + 0''.6 \cos 2L$$

angenommen werden kann, so folgt aus dem Dreieck $P\Pi_0P_0$

$$\sin PP_0 \sin PP_0\Pi_0 = \sin(\varepsilon + \delta\varepsilon) \sin {}^1\!F$$
$$\sin PP_0 \cos PP_0\Pi_0 = \cos(\varepsilon + \delta\varepsilon) \sin\varepsilon - \sin(\varepsilon + \delta\varepsilon) \cos\varepsilon \cos {}^1\!F$$

Diese Ausdrücke sind nun in die Gleichung (33) einzuführen; setzt man dann noch die Sinus der Winkel $p - p_0$, Ψ und $\delta\varepsilon$ ihren Bögen gleich, sowie ihre Cosinus gleich 1, so erhält man

$$p - p_0 = [\Psi \sin\varepsilon \sin\alpha_0 - \delta\varepsilon \cos\alpha_0] \sec\delta \tag{36}$$

51. Einfluß einer Korrektion der Nutationskonstante, bzw. der Konstante der Lunisolarpräzession auf die Nutation. Ist der wahre Wert der Nutationskonstante gleich $9''.21(1+i)$, so ergibt sich aus § 29, daß die dort für $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ gegebenen Ausdrücke (75) und (76) mit $1+i$ multipliziert werden müssen, oder daß an die aus (75) und (76) folgenden Werte von $-\psi_c$ und $\Delta\varepsilon_c$ die Korrektionen $i(-\psi_c)$, bzw. $i\Delta\varepsilon_c$ anzubringen sind.

Man nehme jetzt an, daß auch der in § 29 angenommene, für 1850.0 gültige Wert der Konstante der Lunisolarpräzession, d. h. der Wert $-\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t=0} = 5036''.95$ eine Korrektion erfordere, und daß der wahre Wert dieser Konstante gleich $5036''.95(1+\omega)$ sei; es folgt dann aus (77'), wenn gleichzeitig für $-\left(\frac{d\psi_c}{dt}\right)_{t=0}$ der aus (75) sich ergebende Wert $3438''.8$, multipliziert mit $1+i$, eingesetzt wird

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} &= 5036''.95(1+\omega) - 3438''.8(1+i) \\ &= 1598''.15(1+3.15\,\omega - 2.15\,i) \end{aligned}$$

Da nun bei der Berechnung der in § 29 für $-\psi_\odot$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ gegebenen Ausdrücke (78) und (79)

$$-\left(\frac{d\psi_\odot}{dt}\right)_{t=0} = 1598''.15$$

angenommen wurde, so sind die aus (78) und (79) folgenden Werte von $-\psi_\odot$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ um $-\psi_\odot(3.15\,\omega - 2.15\,i)$, bzw. $\Delta\varepsilon_\odot(3.15\,\omega - 2.15\,i)$ zu korrigieren.

Die Summe der im vorigen für $-\psi_c$ und $-\psi_\odot$ gefundenen Korrektionen stellt die Korrektion des in § 29 für $-\psi = -\psi_c - \psi_\odot$ gegebenen Ausdrucks (89) dar; desgleichen gibt die Summe der für $\Delta\varepsilon_c$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ erhaltenen Korrektionen die an $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_\odot$, d. h. an den aus § 29, (90) für $\varepsilon' - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon$ sich ergebenden Ausdruck anzubringende Korrektion an. Bezeichnet man also die Korrektionen der aus (89) und (90) folgenden Werte von $-\psi$ und $\varepsilon' - \varepsilon_0 = \Delta\varepsilon$ mit $\Delta(-\psi)$, bzw. $\Delta(\Delta\varepsilon)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta(-\psi) &= 3.15\,\omega(-\psi_\odot) - i[2.15(-\psi_\odot) - (-\psi_c)] \\ \Delta(\Delta\varepsilon) &= 3.15\,\omega\cdot\Delta\varepsilon - i[2.15\,\Delta\varepsilon_\odot - \Delta\varepsilon_c] \end{aligned}$$

Multipliziert und dividiert man die von ω abhängigen Glieder mit $5036''.95$ und die von i abhängigen mit $9''.21$, setzt man dann $5036''.95\,\omega = \Delta p$ und $9''.21\,i = \Delta\nu$, wo nun Δp und $\Delta\nu$ die Korrektionen der für die Konstante der Lunisolarpräzession, bzw. die Nutationskonstante angenommenen Werte bedeuten, so folgt

$$
\begin{aligned}
\Delta(-\psi) &= \Delta p\,\frac{3.15\,(-\psi_\odot)}{5036''.95} - \Delta\nu\,\frac{2.15\,(-\psi_\odot)-(-\psi_c)}{9''.21}\\
\Delta(\Delta\varepsilon) &= \Delta p\,\frac{3.15\,\Delta\varepsilon_\odot}{5036''.95} - \Delta\nu\,\frac{2.15\,\Delta\varepsilon_\odot-\Delta\varepsilon_c}{9''.21}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Man bezeichne jetzt mit $d\lambda''$ und $d\varepsilon''$ den Komplex der in $-\psi$, bzw. $\Delta\varepsilon$ enthaltenen Nutationsglieder. Um dann den Einfluß der Korrektionen Δp und $\Delta\nu$ auf die Werte von $d\lambda''$ und $d\varepsilon''$ zu erhalten, führe man in die Gleichungen (37) an Stelle von $-\psi_c$, $-\psi_\odot$, $\Delta\varepsilon_c$ und $\Delta\varepsilon_\odot$ die in den Ausdrücken § 29, (75) und (76), bzw. (78) und (79) enthaltenen Nutationsglieder ein; mit Rücksicht aber darauf, daß Δp und $\Delta\nu$ als sehr klein angenommen werden dürfen, brauchen nur die Hauptglieder in Betracht gezogen zu werden. Setzt man demgemäß

$$
\begin{aligned}
-\psi_c &= -\,17''.23\,\sin\Omega & \Delta\varepsilon_c &= 9''.21\,\cos\Omega\\
-\psi_\odot &= -\,1.27\,\sin 2L & \Delta\varepsilon_\odot &= 0.55\,\cos 2L,
\end{aligned}
$$

so folgt, wenn die Korrektionen von $d\lambda''$ und $d\varepsilon''$ aus einem alsbald ersichtlichen Grunde mit $\Delta(d\lambda)$, bzw. $\Delta(d\varepsilon)$ bezeichnet werden,

$$
\begin{aligned}
\Delta(d\lambda) &= -\,0.0008\,\Delta p\,\sin 2L + \Delta\nu(-\,1.87\,\sin\Omega + 0.30\,\sin 2L)\\
\Delta(d\varepsilon) &= +\,0.0003\,\Delta p\,\cos 2L + \Delta\nu(\cos\Omega - 0.13\,\cos 2L)
\end{aligned}
$$

Der oben für die Konstante der Lunisolarpräzession angegebene Wert ist aller Wahrscheinlichkeit nach um weniger wie 1″ fehlerhaft; nimmt man aber selbst an, daß die mit Δp bezeichnete Korrektion dieser Konstante, absolut genommen, gleich 1″ wäre, so sind die von Δp abhängigen Glieder der zwei letzten Ausdrücke kleiner als 0″.001 und können daher vernachlässigt werden. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\Delta(d\lambda) &= \Delta\nu(-\,1.87\,\sin\Omega + 0.30\,\sin 2L)\\
\Delta(d\varepsilon) &= \Delta\nu(\cos\Omega - 0.13\,\cos 2L)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Wie aus den in § 29 für Δ und ε abgeleiteten Gleichungen (91[a]) und (91[b]) erhellt, müssen die durch die Gleichungen (38) bestimmten Korrektionen der Nutationsglieder von $-\psi$ und $\Delta\varepsilon$ auch an die in § 29 für Δ und ε gegebenen Ausdrücke (92) und (93) angebracht werden. Da nun die periodischen Glieder der zwei letztgenannten Ausdrücke in §§ 47 und 48 mit $d\lambda$ und $d\varepsilon$ bezeichnet worden sind, so wurden vorhin die aus den Gleichungen (38) folgenden Korrektionen dieser Glieder mit $\Delta(d\lambda)$, bzw. $\Delta(d\varepsilon)$ bezeichnet. Dem § 47 zufolge stellt $d\lambda$ die Nutation in Länge dar und $d\varepsilon$ die Nutation in Schiefe; $\Delta(d\lambda)$ und $\Delta(d\varepsilon)$ geben also die Korrektionen der Nutation in Länge, bzw. Schiefe an.

Um die Korrektion der Nutation in Rektaszension und Deklination zu erhalten, gehe man von der Gleichung (26) aus. Dieser zufolge ergibt sich für die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Äquatorealkoordinaten eines Sterns, wenn α' und δ' die auf das wahre Äquinox zur Zeit t bezogene Rektaszension und Deklination, und $d\lambda$ und $d\varepsilon$ die Nutation in Länge und Schiefe bedeuten,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha' - \cos\varepsilon\,d\lambda - (\sin\varepsilon\,\sin\alpha\,d\lambda - \cos\alpha\,d\varepsilon)\,\tan\delta\\
\delta &= \delta' - \sin\varepsilon\,\cos\alpha\,d\lambda - \sin\alpha\,d\varepsilon
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Denkt man sich jetzt, daß α' und δ' beobachtete Werte darstellen, und bezeichnet man mit $[\alpha]$ und $[\delta]$ die Werte, welche sich für α und δ ergeben, wenn in den Gleichungen (39) die der Nutationskonstante 9.″21 entsprechenden Werte von $d\lambda$ und $d\varepsilon$ angewandt werden, so erhält man für die der Korrektion $\Delta\nu$ der Nutationskonstante entsprechenden Korrektionen von $[\alpha]$ und $[\delta]$

$$\begin{aligned}\Delta[\alpha] &= -\cos\varepsilon\,\Delta(d\lambda) - [\sin\varepsilon\sin\alpha\,\Delta(d\lambda) - \cos\alpha\,\Delta(d\varepsilon)]\tan\delta\\ \Delta[\delta] &= -\sin\varepsilon\cos\alpha\,\Delta(d\lambda) - \sin\alpha\,\Delta(d\varepsilon)\end{aligned}$$

Hierin sind für $\Delta(d\lambda)$ und $\Delta(d\varepsilon)$ ihre Ausdrücke (38) zu substituieren. Führt man diese Substitution aus und setzt $\varepsilon = 23^\circ 27'$, so erhält man

$$\begin{aligned}\Delta[\alpha] = -\Delta\nu[&-1.72\sin\Omega - (0.744\sin\alpha\sin\Omega + 1.000\cos\alpha\cos\Omega)\tan\delta +\\ &+ 0.28\sin 2L + (0.119\sin\alpha\sin 2L + 0.129\cos\alpha\cos 2L)\tan\delta]\\ \Delta[\delta] = -\Delta\nu[&-0.744\cos\alpha\sin\Omega + 1.000\sin\alpha\cos\Omega +\\ &+ 0.119\cos\alpha\sin 2L - 0.129\sin\alpha\cos 2L]\end{aligned}$$

Wird noch zur Abkürzung

(40)
$$\begin{aligned} u\sin U &= -1.000\cos\alpha & v\sin V &= +0.129\cos\alpha\\ u\cos U &= -0.744\sin\alpha & v\cos V &= +0.119\sin\alpha\end{aligned}$$

und

(40a)
$$\begin{aligned} u'\sin U' &= +1.000\sin\alpha & v'\sin V' &= -0.129\sin\alpha\\ u'\cos U' &= -0.744\cos\alpha & v'\cos V' &= +0.119\cos\alpha\end{aligned}$$

gesetzt, so folgt

(41)
$$\begin{aligned}\Delta[\alpha] &= -\Delta\nu[-1.72\sin\Omega + 0.28\sin 2L + \{u\sin(\Omega + U) + v\sin(2L + V)\}\tan\delta]\\ \Delta[\delta] &= -\Delta\nu[u'\sin(\Omega + U') + v'\sin(2L + V')]\end{aligned}$$

Die strengen Werte von α und δ sind dann

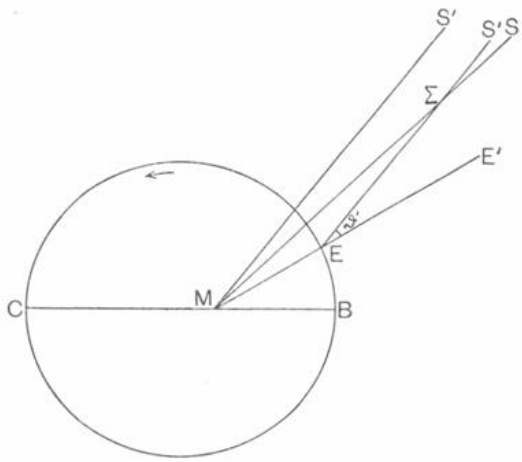
(41a)
$$\begin{aligned}\alpha &= [\alpha] + \Delta[\alpha]\\ \delta &= [\delta] + \Delta[\delta]\end{aligned}$$

Kapitel VIII.

Jährliche Parallaxe.

52. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. In Fig. 1 sei M der Mittelpunkt der Sonne, BEC sei die Erdbahn, Σ der Ort eines Fixsterns. Befindet sich die Erde in E, so ist ES' die geozentrische und MS die heliozentrische Richtung zum Stern hin; den Winkel $M\Sigma E$ zwischen diesen beiden Richtungen nennt man die jährliche Parallaxe des Sterns. Wird der Winkel $M\Sigma E$ mit σ, der Winkel $S'EE'$ mit ϑ', der Radiusvektor ME der Erde mit R und die Entfernung $M\Sigma$ des Sterns von der Sonne mit r bezeichnet, so hat man

Fig. 1.



$$\sin\sigma = \frac{R}{r}\sin\vartheta'$$

Den in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Werten von R liegt als Längeneinheit die halbe große Achse der Erdbahn zugrunde; denkt man sich auch r durch diese Einheit gemessen und setzt

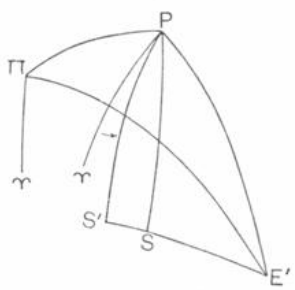
$$\sin\pi = \frac{1}{r},$$

so folgt $\sin\sigma = R\sin\pi\sin\vartheta'$ oder hinreichend genau

$$\sigma = R\pi\sin\vartheta' \tag{1}$$

Der Winkel π wird die Parallaxe des Sterns genannt.

Fig. 2.



Es sei nun H (Fig. 2) der Pol der Ekliptik, P der Pol des Äquators, $H\curlyvee$ und $P\curlyvee$ seien Stücke der den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt mit H, bzw. P verbindenden Bögen, ferner seien E', S, S' die auf einem größten Kreise liegenden Punkte, in denen die in Fig. 1 mit ME, $M\Sigma$ bezeichneten Richtungen und die von M aus parallel zu $E\Sigma$ gezogene Gerade MS' die Sphäre schneiden; S ist somit der heliozentrische und S' der geozentrische Ort des Sterns an der Sphäre. Die Äquatorealkoordinaten von S' und S mögen mit α', δ', bzw. α, δ bezeichnet werden. Da der Bogen $S'S = \sigma$ klein

ist, und da dasselbe von den Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ gilt, so folgt aus dem Dreieck $PS'S$, wenn noch der Winkel bei S' gleich q' gesetzt wird,

$$(2)\qquad \begin{aligned}(\alpha - \alpha')\cos\delta &= \sigma \sin q' = R\pi \sin\vartheta' \sin q' \\ \delta - \delta' &= \sigma \cos q' = R\pi \sin\vartheta' \cos q'\end{aligned}$$

Es sei jetzt φ die Rektaszension und d die Deklination des heliozentrischen Ortes der Erde E'; das Dreieck $PS'E'$, worin der Winkel bei P gleich $\varphi - \alpha'$, ferner $S'E' = \vartheta'$ und $PE' = 90^\circ - d$ ist, gibt dann

$$\begin{aligned}\sin\vartheta' \sin q' &= \cos d \sin(\varphi - \alpha') \\ \sin\vartheta' \cos q' &= \sin d \cos\delta' - \cos d \sin\delta' \cos(\varphi - \alpha')\end{aligned}$$

Die Werte von φ und d lassen sich mit Hilfe des Dreieckes $\Pi PE'$ berechnen. Man hat nämlich, wenn die heliozentrische Länge der Erde mit l und die Schiefe der Ekliptik mit ε bezeichnet wird, $P\Pi E' = 90^\circ - l$, $\Pi P = \varepsilon$, ferner ist $\Pi PE' = 90^\circ + \varphi$, $PE' = 90^\circ - d$ und $\Pi E' = 90^\circ$; somit erhält man

$$\begin{aligned}\cos d \cos\varphi &= \cos l \\ \cos d \sin\varphi &= \cos\varepsilon \sin l \\ \sin d &= \sin\varepsilon \sin l\end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned}\sin\vartheta' \sin q' &= \cos\varepsilon \sin l \cos\alpha' - \cos l \sin\alpha' \\ \sin\vartheta' \cos q' &= \sin\varepsilon \sin l \cos\delta' - (\cos l \cos\alpha' + \cos\varepsilon \sin l \sin\alpha') \sin\delta'\end{aligned}$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (2) und setzt $l = 180^\circ + \odot$, wo $\odot$ die Länge der Sonne bedeutet, so folgt

$$(3)\qquad \begin{aligned}\alpha' &= \alpha + R\pi\,[\cos\varepsilon \cos\alpha' \sin\odot - \sin\alpha' \cos\odot] \sec\delta \\ \delta' &= \delta + R\pi\,[(\sin\varepsilon \cos\delta' - \cos\varepsilon \sin\alpha' \sin\delta') \sin\odot - \cos\alpha' \sin\delta' \cos\odot]\end{aligned}$$

In den mit π multiplizierten Gliedern dieser Gleichungen kann man α' und δ' mit α und δ vertauschen; setzt man dann noch

$$(4)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{m} \sin\mathfrak{M} &= \sin\alpha & \mathfrak{n} \sin\mathfrak{N} &= \cos\alpha \sin\delta \\ \mathfrak{m} \cos\mathfrak{M} &= \cos\alpha \cos\varepsilon & \mathfrak{n} \cos\mathfrak{N} &= \sin\varepsilon \cos\delta - \cos\varepsilon \sin\alpha \sin\delta,\end{aligned}$$

so wird

$$(5)\qquad \begin{aligned}\alpha' &= \alpha + R\pi\mathfrak{m} \sin(\odot - \mathfrak{M}) \sec\delta \\ \delta' &= \delta + R\pi\mathfrak{n} \sin(\odot - \mathfrak{N})\end{aligned}$$

An Stelle der Gleichungen (5) lassen sich auch die folgenden anwenden. Man setze

$$(6)\qquad C_1 = R \sin\odot \cos\varepsilon \qquad D_1 = -R \cos\odot$$

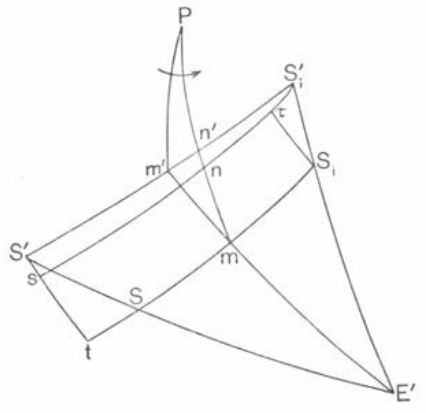
$$(7)\qquad \begin{aligned}c_1 &= \pi \cos\alpha \sec\delta & c_1' &= \pi\,(\operatorname{tang}\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) \\ d_1 &= \pi \sin\alpha \sec\delta & d_1' &= \pi \cos\alpha \sin\delta\end{aligned}$$

und erhält dann

$$(8)\qquad \begin{aligned}\alpha' &= \alpha + c_1 C_1 + d_1 D_1 \\ \delta' &= \delta + c_1' C_1 + d_1' D_1\end{aligned}$$

53. Einfluß der jährlichen Parallaxe auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Sterne. In Fig. 3 bedeute E' den heliozentrischen Ort der Erde, S und S_i seien die heliozentrischen Örter zweier Sterne, S' und S_i' ihre geozentrischen Örter; die Distanz der beiden Sterne soll kleiner als 2° vorausgesetzt werden. Bezeichnet m' den Mittelpunkt von $S'S_i'$ und m den Mittelpunkt von SS_i, bedeutet ferner P den Nordpol des Äquators, und nehmen die Rektaszensionen in der Richtung des Pfeils zu, so ist $Pm'S_i' = p'$ der geozentrische und $PmS_i = p$ der heliozentrische Positionswinkel des Sterns S_i, bezogen auf m', bzw. m. Die geozentrische Distanz der beiden Sterne werde mit Δ' und ihre heliozentrische Distanz mit Δ bezeichnet, man hat also $S'S_i' = \Delta'$ und $SS_i = \Delta$.

Fig. 3.



Die Bögen SS' und S_iS_i' sind stets kleiner als 1″, SS_i und $S'S_i'$ sind demnach sehr nahe einander gleich und bilden auch nur einen kleinen Winkel miteinander. Man ziehe jetzt $S_i's$ parallel zu S_iS, ferner $S't$ und $S_i\tau$ senkrecht zu S_iS. Da der Winkel $Pn'S_i'$ nur unmerklich von $Pm'S_i' = p'$ verschieden und $PnS_i' = PmS_i = p$ ist, so ist $S'S_i's = p' - p$, also, wenn $S'S_i' = \Delta'$ in Sekunden ausgedrückt wird, $S's = \Delta' \sin 1'' (p' - p)$. Die Strecke $S's$ läßt sich aber noch anders ausdrücken. Man hat nämlich $S's = S't - S_i\tau = SS' \cos E'S't - S_iS_i' \sin E'S_i's$ und mit Berücksichtigung der Gleichung (1), wenn π und π_i die Parallaxen der Sterne S und S_i bedeuten, $SS' = R\pi \sin E'S'$, $S_iS_i' = R\pi_i \sin E'S_i'$; hieraus folgt

$$S's = R\pi \sin E'S' \cos E'S't - R\pi_i \sin E'S_i' \sin E'S_i's$$

Da der Winkel $S'S_i's$ klein ist, so ist $S't$ auch nahe senkrecht zu $S'S_i'$ und demnach $E'S't$ nahe gleich $90° - E'S'm'$; ferner ist $E'S_i's$ nahe gleich $E'S_i'm'$. Somit wird die vorige Gleichung

$$\begin{aligned} S's &= R\pi \sin E'S' \sin E'S'm' - R\pi_i \sin E'S_i' \sin E'S_i'm' \\ &= R(\pi - \pi_i) \sin E'm' \sin E'm'S_i' \end{aligned}$$

Wegen des kleinen Faktors $\pi - \pi_i$ kann man hier $\sin E'm' \sin E'm'S_i' = \sin E\,m \sin E'mS_i$ setzen; substituiert man ferner noch für $S's$ seinen oben gefundenen Wert $(p' - p)\Delta' \sin 1'' =$ $= (p' - p)\Delta \sin 1''$, so erhält man

$$(p' - p)\Delta \sin 1'' = R(\pi - \pi_i) \sin E'm \sin E'mS_i \tag{9}$$

Um eine entsprechende Gleichung für $\Delta' - \Delta$ zu finden, projiziere man die gebrochene Strecke $S'SS_iS_i'$ auf $S'S_i'$; mit Rücksicht darauf, daß der Cosinus des Winkels zwischen SS_i und $S'S_i'$ gleich 1 gesetzt werden darf, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \Delta' &= \Delta + SS' \cos E'S'm' + S_iS_i' \cos E'S_i'm' \\ &= \Delta + R\pi \sin E'S' \cos E'S'm' + R\pi_i \sin E'S_i' \cos E'S_i'm' \end{aligned}$$

Aus den Dreiecken $E'S'm'$ und $E'S_i'm'$ folgt aber

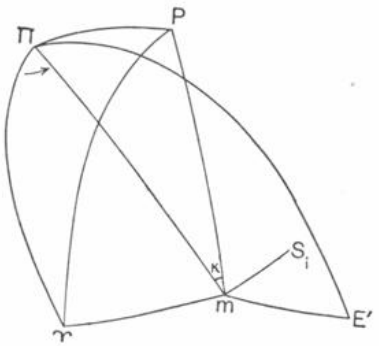
$$\sin E'S' \cos E'S'm' = \cos E'm' \sin \tfrac{1}{2}\Delta' + \sin E'm' \cos \tfrac{1}{2}\Delta' \cos E'm'S_i'$$
$$\sin E'S_i' \cos E'S_i'm' = \cos E'm' \sin \tfrac{1}{2}\Delta' - \sin E'm' \cos \tfrac{1}{2}\Delta' \cos E'm'S_i'$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung, setzt dann $\cos \frac{1}{2}\Delta' = 1$, $\sin E'm' \cos E'm'S_i' = \sin E'm \cos E'mS_i$ und vernachlässigt die Produkte aus $\sin \frac{1}{2}\Delta'$ und π, bzw. π_i, so erhält man

$$\Delta' - \Delta = R(\pi - \pi_i) \sin E'm \cos E'mS_i \tag{10}$$

In Fig. 4 mögen nun P, S_i, m und E' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 3, Π bezeichne den Pol der Ekliptik und Υ den Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt, der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Längen gezählt werden. Setzt man $\Pi mP = \varkappa$, $\Pi mE' = \gamma$ und berücksichtigt, daß $PmS_i = p$ ist, so folgt $E'mS_i = = \gamma - (\varkappa + p)$; wird jetzt noch $E'm = \omega$ gesetzt, so lauten die Gleichungen (9) und (10)

Fig. 4.



$$(p' - p)\Delta \sin 1'' = R(\pi - \pi_i) \sin\omega \sin[\gamma - (\varkappa + p)]$$
$$\Delta' - \Delta = R(\pi - \pi_i) \sin\omega \cos[\gamma - (\varkappa + p)]$$

Wenn aber λ die Länge und β die Breite des Punktes m bedeutet, wenn ferner die Länge der Sonne mit $\odot$, also die Länge von E' mit $180^\circ + \odot$ bezeichnet, und die Sonnenbreite vernachlässigt wird, so gibt das Dreieck $\Pi mE'$

$$\sin\omega \sin\gamma = -\sin(\odot - \lambda)$$
$$\sin\omega \cos\gamma = \sin\beta \cos(\odot - \lambda)$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen erhält man

$$(p' - p)\Delta \sin 1'' = -R(\pi - \pi_i)[\cos(\odot - \lambda) \sin(\varkappa + p) \sin\beta + \sin(\odot - \lambda) \cos(\varkappa + p)]$$
$$\Delta' - \Delta = R(\pi - \pi_i)[\cos(\odot - \lambda) \cos(\varkappa + p) \sin\beta - \sin(\odot - \lambda) \sin(\varkappa + p)]$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$m \sin M = -\cos(\varkappa + p) \qquad n \sin N = -\sin(\varkappa + p) \tag{11}$$
$$m \cos M = -\sin(\varkappa + p) \sin\beta \qquad n \cos N = \cos(\varkappa + p) \sin\beta$$

gesetzt wird,

$$(p' - p)\Delta \sin 1'' = Rm(\pi - \pi_i) \cos[\odot - (\lambda + M)] \tag{12}$$
$$\Delta' - \Delta = Rn(\pi - \pi_i) \cos[\odot - (\lambda + N)]$$

Der Winkel $\varkappa$ läßt sich mit Hilfe der Dreiecke $\Pi\Upsilon m$ und $P\Upsilon m$ berechnen. Wird nämlich die Rektaszension und Deklination von m mit α und δ bezeichnet, und setzt man $\Upsilon m\Pi = y$, $\Upsilon m = h$, so ergibt sich

$$\sin h \sin y = \sin\lambda \qquad \sin h \sin(y + \varkappa) = \sin\alpha \tag{13}$$
$$\sin h \cos y = -\cos\lambda \sin\beta \qquad \sin h \cos(y + \varkappa) = -\cos\alpha \sin\delta$$

Aus den Gleichungen (11) folgt noch

$$m^2 = 1 - \sin^2(\varkappa + p) \cos^2\beta \tag{14}$$
$$n^2 = 1 - \cos^2(\varkappa + p) \cos^2\beta$$

Es erreicht somit m seinen Maximalwert, wenn p gleich $180^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $360^\circ - \varkappa$ ist, dagegen ist n ein Maximum, wenn p gleich $90^\circ - \varkappa$, bzw. gleich $270^\circ - \varkappa$ ist. Haben also mehrere Sternpaare gleiche Distanz und Parallaxendifferenz, so wird der Einfluß der Parallaxe auf den Positionswinkel für dasjenige Paar am größten, dessen Komponenten auf demselben Breitenkreise liegen; dagegen wird der Einfluß einer gegebenen Parallaxendifferenz auf die Distanz zweier Sterne am größten, wenn der durch die Sterne gelegte Bogen größten Kreises senkrecht zu dem Breitenkreise des Mittelpunktes dieses Bogens steht. Im ersten Falle findet das Maximum der parallaktischen Verschiebung statt, wenn $\odot = \lambda + M$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + M$ ist, im zweiten wenn $\odot = \lambda + N$, bzw. gleich $180^\circ + \lambda + N$ ist.

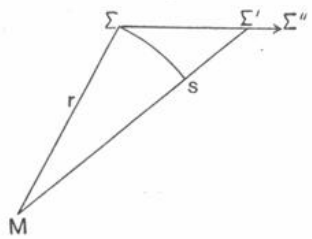
Kapitel IX.

Eigenbewegung der Fixsterne.

54. Einleitung. Werden die zu verschiedenen Zeiten beobachteten Örter eines Fixsterns auf ein und dasselbe Äquinox reduziert und gleichzeitig durch Anbringung einer etwaigen Korrektion wegen jährlicher Parallaxe in heliozentrische verwandelt, so zeigen die so erhaltenen Positionen nicht selten einen Gang. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist dieser der Zeit proportional; nur sehr wenige Sterne kennt man, deren Örter periodischen Änderungen unterworfen sind. Zur Erklärung eines fortschreitenden Ganges nimmt man an, daß der betreffende Stern eine Bewegung im Raume besitzt, die selbst innerhalb eines viele Jahre umfassenden Zeitraumes als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann. Periodische Ortsveränderungen kommen zustande, wenn beispielsweise der Stern einen Begleiter besitzt, und beide Sterne eine Ellipse um ihren gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben; auch in diesem Falle können die beobachteten Örter nebenbei noch einen der Zeit proportionalen Gang aufweisen, zu dessen Erklärung die Annahme einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Schwerpunktes im Raume hinreicht.

Es soll nun genauer untersucht werden, welche Folgerung sich für die von der Sonne aus gesehene Bewegung eines Sterns, bzw. des Schwerpunktes eines Sternsystems an der Sphäre ergibt, wenn die Bewegung des Sterns oder des Schwerpunktes im Raume als geradlinig und gleichförmig angenommen wird. In Fig. 1 sei Σ der Ort eines Sterns zur Zeit $t = 0$, $\Sigma\Sigma''$ sei die Richtung, in der sich der Stern relativ zur Sonne bewegt, und v die Geschwindigkeit dieser Bewegung; bedeutet dann $\Sigma\Sigma'$ die von dem Stern in dem Zeitelement dt relativ zur Sonne durchlaufene Strecke, so ist $\Sigma\Sigma' = v dt$. Von der Sonne (M) aus gesehen erscheint diese Strecke unter dem Winkel $\Sigma M \Sigma'$; wird dieser gleich $n dt$ gesetzt, so ist n die Winkel-

Fig. 1.



geschwindigkeit des Sterns in bezug auf die Sonne und wird als die Eigenbewegung des Sterns, gemessen im größten Kreise, bezeichnet. Setzt man noch $M\Sigma\Sigma'' = W$, $M\Sigma'\Sigma'' = W + dW$, so folgt $dW = \Sigma M\Sigma'$ oder $dW = ndt$.

Man beschreibe jetzt mit dem Radius $M\Sigma$ einen Kreis, welcher $M\Sigma'$ in s schneidet, und setze $M\Sigma = r$, $\Sigma's = dr$ und $dr = \varrho dt$, wo ϱ die radiale Geschwindigkeit des Sterns genannt wird; es ergibt sich dann $\Sigma s = rndt$ und $\Sigma's = \varrho dt$. Nun kann $\Sigma s\Sigma'$ als ein rechtwinkliges Dreieck angesehen werden, dessen Winkel bei Σ gleich $W - 90^0$ ist; mit Benutzung der für die Seiten dieses Dreiecks gefundenen Ausdrücke erhält man also

$$rn = v \sin W, \qquad \varrho = -v \cos W$$

Differenziert man die erste dieser Gleichungen, indem man der obigen Voraussetzung gemäß v als konstant betrachtet, so ergibt sich mit Berücksichtigung der für ϱ erhaltenen Gleichung

$$rdn = -\varrho dW - ndr$$

oder, wenn nach dem Obigen $dW = ndt$, $dr = \varrho dt$ gesetzt wird,

$$\frac{dn}{dt} = -2\frac{n\varrho}{r} \tag{1}$$

Zur numerischen Berechnung von $\frac{dn}{dt}$ bedarf man der Werte von n, ϱ und r, diese aber hängen von den für die Zeit, bzw. die Länge gewählten Einheiten ab. Als Zeiteinheit werde ein tropisches Jahr und als Längeneinheit die halbe große Achse der Erdbahn angenommen. Infolge der über die Längeneinheit gemachten Annahme kann man, wenn π die Parallaxe des Sterns bedeutet, $1 : r = \sin\pi$ setzen; hat man also nach einer der in Kapitel 16 und 17 gegebenen Methoden den Wert von π bestimmt, so ist r bekannt. In welcher Weise man n findet, wird im folgenden Paragraphen gezeigt werden. Der Wert der radialen Geschwindigkeit (ϱ) ergibt sich mit Hilfe von spektroskopischen Beobachtungen. Die aus solchen Beobachtungen folgende Geschwindigkeit wird aber in Kilometern ausgedrückt angegeben und bezieht sich auf die mittlere Sekunde als Zeiteinheit; um nun aus diesem Werte der radialen Geschwindigkeit den auf die hier gewählten Einheiten der Länge und Zeit bezogenen Wert, der mit ϱ' bezeichnet werden möge, zu erhalten, hat man ϱ durch die in Kilometern ausgedrückte Länge der halben großen Achse der Erdbahn (= 149 Millionen Kilometer) zu dividieren und mit der in einem tropischen Jahre enthaltenen Anzahl von mittleren Sekunden (= 365.2422×86400) zu multiplizieren. Führt man die angegebenen Operationen durch, so erhält man $\varrho' = 0.212\varrho$, und die Gleichung (1) wird

$$\frac{dn}{dt} = -0.424 n\varrho \sin\pi \tag{2}$$

Bezeichnet man nun mit ds das von dem Stern in der Zeit dt an der Sphäre beschriebene Bogenelement, so ergibt sich

$$\frac{ds}{dt} = n, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dn}{dt},$$

demnach wird der von dem Stern in dem Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t$ beschriebene Bogen, wenn man Glieder von der Ordnung t^3 vernachlässigt, gleich

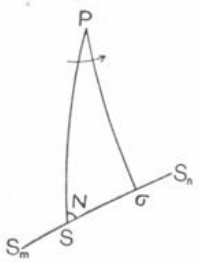
$$\left(\frac{ds}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}t\right)t = \left(n + \frac{1}{2}\frac{dn}{dt}t\right)t, \tag{2a}$$

wo für $\frac{dn}{dt}$ sein aus (2) folgender Wert zu substituieren ist.

Als Beispiel wähle man den Stern Nr. 1830 des Katalogs von *Groombridge*, für welchen $n = 7''$, $\varrho = -95$ km, $\pi = 0''.1$ und somit $\frac{dn}{dt} = +0''.00014$ ist; substituiert man die Werte von n und $\frac{dn}{dt}$ in die Gleichung (2a), so erhält man für den von dem genannten Stern in t tropischen Jahren durchlaufenen Bogen den Ausdruck $(7'' + 0''.00007\,t)t$. Das hier von t^2 abhängige Glied würde in 50 Jahren bereits $0''.2$ ausmachen, in 100 Jahren $0''.7$ und in 150 Jahren $1''.6$; der von *Groombridge* 1830 innerhalb der Zeit t durchlaufene Bogen darf also bei größeren Werten von t nicht einfach der Zeit proportional angenommen werden. Gegenwärtig sind nur ganz vereinzelte Sterne bekannt, bei denen auf das von t^2 abhängige Glied Rücksicht genommen werden muß, und auch bei diesen nur, wenn es sich um lange Zeiträume handelt; es soll deshalb im folgenden nur der Fall betrachtet werden, wo der von einem Stern beschriebene Bogen als der Zeit proportional oder die mit n bezeichnete Eigenbewegung als konstant angesehen werden darf.

55. Einfluß der Eigenbewegung auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. Bestimmung der Größe und Richtung der Eigenbewegung. In Fig. 2 seien S und σ die Örter eines Sterns zu den Zeiten t, bzw. $t + dt$, P sei der Ort des Pols zu einer beliebigen Zeit T, der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Rektaszension gezählt wird. Wenn dann α und δ, bzw. $\alpha + d\alpha$ und $\delta + d\delta$ die Rektaszension und Deklination von S, bzw. σ, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T bedeuten, und $S\sigma = n\,dt$, $PSS_n = N$, $P\sigma S_n = N + dN$ gesetzt wird, so folgt aus dem Dreieck $PS\sigma$

Fig. 2.



$$\frac{d\alpha}{dt} = n \sin N \sec\delta, \qquad \frac{d\delta}{dt} = n \cos N \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet man $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ als die Eigenbewegung des Sterns in Rektaszension und Deklination, gültig für die Epoche t und bezogen auf das Äquinox zur Zeit T.

Aus dem Dreieck $PS\sigma$ folgt ferner nach einer der *Napier*schen Analogien

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}dN = \frac{\sin(\delta + \frac{1}{2}d\delta)}{\cos\frac{1}{2}d\delta}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}d\alpha$$

oder hinreichend genau

$$\frac{dN}{dt} = \sin\delta\,\frac{d\alpha}{dt} \tag{4}$$

Man differenziere jetzt die Gleichungen (3) und berücksichtige dabei, daß n als konstant angenommen worden ist; substituiert man dann für $\frac{dN}{dt}$ seinen Wert (4) und denkt sich $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ in Bogensekunden ausgedrückt, so erhält man die ebenfalls in Bogensekunden ausgedrückten zweiten Differentialquotienten

$$(5)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\,\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{d\delta}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta, \qquad \frac{d^2\delta}{dt^2} = -\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \sin 1''\,\sin\delta\,\cos\delta$$

Wenn nun S_m und S_n die Örter des Sterns zu den Zeiten t_m, bzw. t_n darstellen und wenn die Äquatorealkoordinaten von S_m und S_n, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T, mit α_m, δ_m, bzw. α_n, δ_n bezeichnet werden, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$(6)\qquad \alpha_n - \alpha_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m (t_n - t_m)^2,$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m$ die für die Zeit t_m gültigen Werte von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ bedeuten. Substituiert man in die Gleichung (6) und in die ihr entsprechende, für $\delta_n - \delta_m$ gültige Gleichung die in (5) gegebenen Werte der zweiten Differentialquotienten von α und δ, so erhält man

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha_n - \alpha_m &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1''\,\operatorname{tang}\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \\ \delta_n - \delta_m &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1''\,\sin\delta_m\,\cos\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, wie man mit Hilfe dieser Gleichungen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$, und hieraus die Eigenbewegung im größten Kreise nach Größe und Richtung bestimmen kann, werde angenommen, daß ein Stern zu den Zeiten t_0, t_1, t_2, ... beobachtet worden sei; die aus diesen Beobachtungen sich ergebenden, auf das Äquinox zur Zeit T reduzierten Werte der Rektaszension und Deklination des Sterns mögen mit α_0, α_1, α_2, ..., bzw. δ_0, δ_1, δ_2, ... bezeichnet werden. Versteht man dann unter t_m das Mittel aus t_0, t_1, t_2, ... und bedeutet t_n irgend eine der Zeiten t_0, t_1, t_2, ..., bezeichnet man ferner mit α_m und δ_m die der Zeit t_m und mit α_n und δ_n die der Zeit t_n entsprechende, auf das Äquinox zur Zeit T bezogene Rektaszension und Deklination, so müssen die Differenzen $\alpha_n - \alpha_m$ und $\delta_n - \delta_m$ den Gleichungen (7) genügen. Die Werte von α_m und δ_m sind zunächst unbekannt; man setze daher $\alpha_m = \alpha_m^{(0)} + \Delta\alpha$, $\delta_m = \delta_m^{(0)} + \Delta\delta$, wo $\alpha_m^{(0)}$ und $\delta_m^{(0)}$ irgendwelche für α_m und δ_m angenommene Werte (etwa die Mittel aus α_0, α_1, α_2, ..., bzw. δ_0, δ_1, δ_2, ...) bedeuten, und wo $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ die zu bestimmenden Korrektionen von $\alpha_m^{(0)}$ und $\delta_m^{(0)}$ angeben. Damit werden die Gleichungen (7)

$$(8)\qquad \begin{aligned} \Delta\alpha + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) &= \alpha_n - \alpha_m^{(0)} - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1''\,\operatorname{tang}\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \\ \Delta\delta + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) &= \delta_n - \delta_m^{(0)} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1''\,\sin\delta_m\,\cos\delta_m\,(t_n - t_m)^2 \end{aligned}$$

Als Maximalwerte der auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Glieder zweiter Ordnung erhält man, wenn für die Differentialquotienten von α und δ ihre aus (3) folgenden Werte substituiert werden, $\frac{1}{2}n^2 \sin 1'' \sec\delta_m \operatorname{tang}\delta_m (t_n - t_m)^2$, bzw. $\frac{1}{2}n^2 \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_m (t_n - t_m)^2$. Die genannten Glieder können also in der Nähe des Pols und bei großen Eigenbewegungen merklich werden, indessen bleiben sie selbst für die (gegenwärtig bekannten) Sterne größter Eigenbewegung so klein, daß es genügt, dieselben mit Hilfe genäherter Werte von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ zu berechnen; diese ergeben sich, indem man die Differenzen zwischen den zu zwei weit voneinander entfernten Epochen beobachteten Werten der Rektaszension und Deklination durch die Differenz der Epochen dividiert. Die Glieder zweiter Ordnung dürfen somit als bekannt angesehen werden; da dasselbe auch von α_n, δ_n, $\alpha_m^{(o)}$ und $\delta_m^{(c)}$ gilt, so treten auf der rechten Seite der Gleichungen (8) lauter bekannte Glieder auf. Substituiert man nun in (8) für α_n der Reihe nach die gegebenen Rektaszensionen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und tut das Entsprechende für δ_n, so kann man mit Hilfe dieser Gleichungen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ bestimmen. Nachdem dies geschehen ist, ersetze man in den Gleichungen (3) $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ durch die für $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ gefundenen Werte und erhält dann die mit n bezeichnete Eigenbewegung im größten Kreise und den Positionswinkel N dieser Bewegung.

Ist die Eigenbewegung groß und aus früheren Untersuchungen bereits annähernd bekannt, so wendet man an Stelle der Gleichungen (8) andere an, welche die Korrektionen der genäherten Werte der Eigenbewegung geben. Setzt man nämlich in den Gleichungen (8)

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)} + \Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m, \qquad \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)} + \Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m,$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)}$ Näherungswerte und $\Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ die gesuchten Korrektionen der Näherungswerte bedeuten, so erhält man, wenn die Abkürzungen

$$A = \alpha_m^{(o)} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}(t_n - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)} \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_m^{(o)} (t_n - t_m)^2$$

$$D = \delta_m^{(o)} + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m^{(o)}(t_n - t_m) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^{(o)}\right]^2 \sin 1'' \sin\delta_m^{(o)} \cos\delta_m^{(o)} (t_n - t_m)^2$$

eingeführt werden,

$$\Delta\alpha + \Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \alpha_n - A$$

$$\Delta\delta + \Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \delta_n - D$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ und $\Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$ bestimmen.

Hat man nach einer der beiden vorhin erläuterten Methoden die Eigenbewegung eines Sterns gefunden, so lassen sich die Gleichungen (7) dazu benutzen, um die in

einem gegebenen Zeitintervall durch die Eigenbewegung bewirkte Änderung der Rektaszension und Deklination des Sterns zu berechnen. Zu demselben Ziele kann man aber auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Bedeutet nämlich α_s die der Zeit t_s entsprechende Rektaszension, so hat man der ersten Gleichung (7) zufolge

$$\alpha_s - \alpha_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_s - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \tang \delta_m (t_s - t_m)^2$$

Ist nun $t_m = \frac{t_n + t_s}{2}$, so wird

$$t_s - t_m = \tfrac{1}{2}(t_s - t_n), \qquad t_n - t_m = -\tfrac{1}{2}(t_s - t_n)$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung für $\alpha_s - \alpha_m$ und in die erste der Gleichungen (7) und subtrahiert dann die beiden Gleichungen, so folgt

$$\alpha_s - \alpha_n = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_s - t_n),$$

wo $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$ den der Zeit $\frac{1}{2}(t_n + t_s)$ entsprechenden Wert des Differentialquotienten von α bezeichnet; eine analoge Gleichung ergibt sich für $\delta_s - \delta_n$. Man erhält also den einem beliebigen Zeitintervall $t_s - t_n$ entsprechenden Betrag der Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination bis auf Glieder zweiter Ordnung genau, indem man die für die Mitte des Intervalls gültigen Werte der ersten Differentialquotienten von α und δ mit $t_s - t_n$ multipliziert.

56. Reduktion der Eigenbewegung auf verschiedene Epochen und auf verschiedene Äquinoktien. Dem *Taylor*schen Satze zufolge hat man, wenn $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ für die Zeit t gelten,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_m (t - t_m), \qquad \frac{d\delta}{dt} = \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m + \left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)_m (t - t_m)$$

Substituiert man für die zweiten Differentialquotienten von α und δ ihre aus (5) sich ergebenden Werte, so folgt

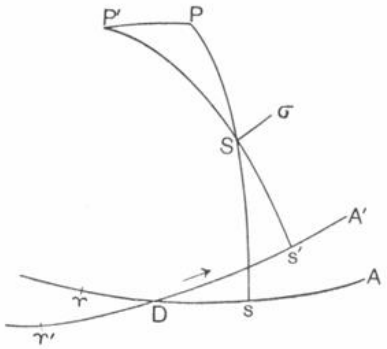
$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \tang \delta_m (t - t_m) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m) \end{aligned} \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus der für die Epoche t_m gültigen und auf das Äquinox einer beliebigen Zeit T bezogenen Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination die ebenfalls auf das Äquinox zur Zeit T bezogene, aber der Epoche t entsprechende Eigenbewegung berechnen.

Jetzt sind noch die Formeln abzuleiten, mit Hilfe derer man aus der für die Epoche t gültigen und auf das Äquinox zur Zeit T bezogenen Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination die ebenfalls der Epoche t entsprechende, aber auf

das Äquinox zur Zeit T' bezogene Eigenbewegung finden kann. In Fig. 3 sei γA der Äquator zur Zeit T, P sei der zugehörige Ort des Pols und γ das der Zeit T entsprechende Frühlingsäquinox; eine analoge Bedeutung sollen $\gamma' A'$, P' und γ' für die Epoche T' haben. Mit S werde der Ort eines Sterns zur Zeit t und mit σ der Ort des Sterns zur Zeit $t + dt$ bezeichnet. Es sei nun $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die Eigenbewegung des Sterns in Rektaszension und Deklination, gültig für die Epoche t und bezogen auf das Äquinox zur Zeit T; $\frac{d\alpha'}{dt}$ und $\frac{d\delta'}{dt}$ seien die ebenfalls für die Epoche t gültigen, aber auf das Äquinox zur Zeit T' bezogenen Komponenten der Eigenbewegung; setzt man dann $PS = 90^\circ - \delta$, $P'S = 90^\circ - \delta'$, $S\sigma = n dt$, $P'SP = S$, $PS\sigma = N$, so ist den Gleichungen (3) zufolge

Fig. 3.



$$\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta = n\sin N \qquad \frac{d\delta}{dt} = n\cos N$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' = n\sin(N+S) \qquad \frac{d\delta'}{dt} = n\cos(N+S)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\cos S + \frac{d\delta}{dt}\sin S \\ \frac{d\delta'}{dt} &= -\frac{d\alpha}{dt}\cos\delta\sin S + \frac{d\delta}{dt}\cos S \end{aligned} \tag{10}$$

Um den Winkel S zu bestimmen, betrachte man das sphärische Dreieck $P'PS$. Wird der Winkel γPs oder die für die Epoche t gültige Rektaszension des Sterns, bezogen auf das Äquinox zur Zeit T, mit α bezeichnet, so ergibt sich, daß der Winkel $P'PS = 90^\circ + DPs = 90^\circ + \alpha - \gamma D$ ist, wobei der Bogen γD den ihm gleichen Winkel γPD vertritt. Mit Benutzung einer in § 31 eingeführten Bezeichnung wird $\gamma D = 90^\circ - p$, und demnach $P'PS = \alpha + p$. Berücksichtigt man noch, daß PP' oder der Winkel $A'DA$ gleich dem in § 31 mit π bezeichneten Winkel ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \cos\delta'\sin S &= \sin(\alpha+p)\sin\pi \\ \cos\delta'\cos S &= \cos\pi\cos\delta - \sin\pi\sin\delta\cos(\alpha+p), \end{aligned} \tag{11}$$

worin nach § 32

$$p = \left(2303''.6 + 1''.4\,\frac{T-1850}{100}\right)\frac{T'-T}{100} + 0''.3\left(\frac{T'-T}{100}\right)^2$$

$$\pi = \left(2005''.1 - 0''.85\,\frac{T-1850}{100}\right)\frac{T'-T}{100} - 0''.4\left(\frac{T'-T}{100}\right)^2$$

zu setzen ist. Zur Berechnung von S genügt übrigens in den meisten Fällen die erste der Gleichungen (11).

56a. Reduktion der für ein beliebiges mittleres Äquinox und die zugehörige Epoche gültigen Koordinaten und Eigenbewegung eines Sterns auf ein anderes mittleres Äquinox und die zugehörige Epoche. Gegeben seien die für die Epoche t_m gültigen und auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogenen Koordinaten und Komponenten der jährlichen Eigenbewegung eines Sterns α_m, δ_m, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m$; gesucht werden die für die Epoche t gültigen und auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten und Komponenten der Eigenbewegung α, δ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$. — Zur Lösung dieser Aufgabe kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Die hierbei zu benutzenden Formeln sind bereits in den vorhergehenden Paragraphen enthalten, doch sollen dieselben jetzt übersichtlich zusammengestellt werden, und zwar unter Anwendung einer dem Zweck entsprechenden, teilweise neuen Bezeichnung.

A. Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die für die Epoche t gültigen, jedoch noch auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogene Rektaszension und Deklination, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (7)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} - \alpha_m &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t - t_m) + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \operatorname{tang} \delta_m (t - t_m)^2 \\ \mathfrak{d} - \delta_m &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m)^2\end{aligned} \tag{12}$$

Wenn aber die für die Epoche t gültige, jedoch noch auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_m bezogene Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination mit $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$, bzw. $\frac{d\mathfrak{d}}{dt}$ bezeichnet wird, so folgt aus (9)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m \sin 1'' \operatorname{tang} \delta_m (t - t_m) \\ \frac{d\mathfrak{d}}{dt} &= \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m - \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m^2 \sin 1'' \sin \delta_m \cos \delta_m (t - t_m)\end{aligned} \tag{I}$$

Somit werden die Gleichungen (12)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \alpha_m + \frac{1}{2}\left[\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\right](t - t_m) \\ \mathfrak{d} &= \delta_m + \frac{1}{2}\left[\frac{d\mathfrak{d}}{dt} + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\right](t - t_m)\end{aligned} \tag{II}$$

Addiert man nun zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die Präzession von t_m bis t, so ergeben sich die gesuchten Koordinaten α, δ.

Um $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ zu erhalten, hat man zunächst den im vorigen Paragraphen mit S bezeichneten Winkel zu berechnen. Die hierzu dienenden Gleichungen (11), von denen aber in den meisten Fällen die erste ausreichend ist, werden mit Benutzung der im obigen angewandten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\cos\delta \sin S &= \sin(\mathfrak{a} + p) \sin \mathfrak{u} \\ \cos\delta \cos S &= \cos \mathfrak{u} \cos \mathfrak{d} - \sin \mathfrak{u} \sin \mathfrak{d} \cos(\mathfrak{a} + p),\end{aligned} \tag{III}$$

wo

$$p = \left(2303''.6 + 1''.4\,\frac{t_m - 1850}{100}\right)\frac{t - t_m}{100} + 0''.3\left(\frac{t - t_m}{100}\right)^2$$
$$\pi = \left(2005''.1 - 0''.85\,\frac{t_m - 1850}{100}\right)\frac{t - t_m}{100} - 0''.4\left(\frac{t - t_m}{100}\right)^2$$

ist. Indem man jetzt auch in (10) die neuen Bezeichnungen einführt, erhält man die zur Berechnung von $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ dienenden Gleichungen

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta &= \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\cos\mathfrak{d}\cos S + \frac{d\mathfrak{d}}{dt}\sin S \\ \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\cos\mathfrak{d}\sin S + \frac{d\mathfrak{d}}{dt}\cos S \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (I) bis (IV) ist die gestellte Aufgabe gelöst.

B. Man füge zu α_m und δ_m die Präzession für das Zeitintervall $t - t_m$ hinzu und erhält damit die für die Epoche t_m gültigen, aber auf das mittlere Äquinox zur Zeit t bezogenen Koordinaten des Sterns; diese mögen mit α' und δ' bezeichnet werden. Man berechne sodann den Winkel S. Die hierbei zu benutzenden Gleichungen (11) werden mit Rücksicht auf die gegenwärtig angenommenen Bezeichnungen

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned} \cos\delta'\sin S &= \sin(\alpha_m + p)\sin\pi \\ \cos\delta'\cos S &= \cos\pi\cos\delta_m - \sin\pi\sin\delta_m\cos(\alpha_m + p), \end{aligned}$$

wo für p und π dieselben Ausdrücke gelten wie vorhin.

Unter Anwendung des aus (V) folgenden Wertes von S berechne man weiter die für die Epoche t_m gültigen, aber auf das Äquinox zur Zeit t bezogenen Komponenten der Eigenbewegung $\frac{d\alpha'}{dt}$ und $\frac{d\delta'}{dt}$; die zu diesem Zwecke dienenden Gleichungen (10) lauten mit Einführung der neuen Bezeichnungen

$$\text{(VI)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt}\cos\delta' &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\cos\delta_m\cos S + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\sin S \\ \frac{d\delta'}{dt} &= -\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m\cos\delta_m\sin S + \left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m\cos S \end{aligned}$$

Nun folgt aus (7), wenn α und δ die oben angegebene Bedeutung haben,

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \frac{d\alpha'}{dt}(t - t_m) + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{d\delta'}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta'(t - t_m)^2 \\ \delta - \delta' &= \frac{d\delta'}{dt}(t - t_m) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin 1''\sin\delta'\cos\delta'(t - t_m)^2 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man jetzt die aus (9) sich ergebenden Gleichungen

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{d\alpha'}{dt} + 2\,\frac{d\alpha'}{dt}\frac{d\delta'}{dt}\sin 1''\,\operatorname{tang}\delta'(t - t_m) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{d\delta'}{dt} - \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2\sin 1''\sin\delta'\cos\delta'(t - t_m), \end{aligned}$$

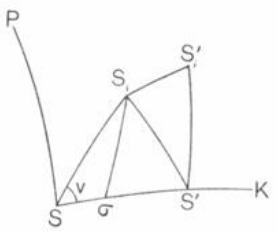
so werden die Gleichungen (13)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \frac{1}{2}\left[\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\right](t - t_m) \\ \delta &= \delta' + \frac{1}{2}\left[\frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta'}{dt}\right](t - t_m) \end{aligned}$$

Die in (V), (VI), (VII) und (VIII) gegebenen Formeln bilden die zweite Lösung der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe.

57. Einfluß der Eigenbewegung auf den Positionswinkel und die Distanz zweier Fixsterne. In Fig. 4 sei P der Ort des Pols zur Zeit T. Mit S und σ mögen die Örter eines Sterns zu den Zeiten t und $t + dt$ bezeichnet werden; wenn also n die Eigenbewegung des Sterns, gemessen im größten Kreise, bedeutet, so ist $S\sigma = n dt$. Ein zweiter Stern, dessen Eigenbewegung zunächst gleich o angenommen werden soll, befinde sich in S_i; mit Rücksicht auf die größten, direkt meßbaren Distanzen werde der Abstand der Sterne S und S_i kleiner als 2° vorausgesetzt. Setzt man jetzt $SS_i = \Delta$, $\sigma S_i = \Delta + d\Delta$, $S_i SK = v$, $S_i \sigma K = v + dv$, so erhält man aus dem Dreieck $SS_i\sigma$

Fig. 4.



$$\text{(14)} \qquad \frac{d\Delta}{dt} = -\, n \cos v$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} = n \sin v \frac{dv}{dt}$$

Aus dem Dreieck $SS_i\sigma$ ergibt sich aber, wenn berücksichtigt wird, daß der Winkel bei S_i sehr nahe gleich dv ist,

$$\text{(15)} \qquad dv = \frac{n dt}{\Delta} \sin v$$

Somit wird die vorige Gleichung

$$\text{(16)} \qquad \frac{d^2\Delta}{dt^2} = \frac{n^2 \sin^2 v}{\Delta}$$

Bezeichnet man noch den Winkel PSK mit N und den Winkel PSS_i mit p, so daß N den mit Hilfe der Gleichungen (3) zu berechnenden Positionswinkel der Eigenbewegung des Sterns S, und p den durch Beobachtung zu ermittelnden Positionswinkel von S_i, bezogen auf S, bedeutet, so folgt

$$\text{(17)} \qquad v = N - p$$

Wenn nun der Stern S zur Zeit t' in S' angekommen ist, und $S_i S' = \Delta'$ gesetzt wird, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\Delta' = \Delta + \frac{d\Delta}{dt}(t' - t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\Delta}{dt^2}(t' - t)^2$$

Hier sind für $\frac{d\Delta}{dt}$ und $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$ ihre aus (14), (16) und (17) folgenden Werte zu substituieren; denkt man sich dabei n und Δ in Bogensekunden ausgedrückt, so erhält man für den auf dieselbe Einheit bezogenen Wert von $\Delta' - \Delta$

$$\Delta' - \Delta = -n(t' - t)\cos(N - p) + \frac{n^2(t' - t)^2}{2\Delta}\sin^2(N - p) \tag{18}$$

Um die entsprechende Formel für den Positionswinkel abzuleiten, differenziere man die Gleichung (17); wird hierbei der aus (4) folgende, durchwegs kleine Wert von dN vernachlässigt, so ergibt sich $dp = -dv$. Mit Berücksichtigung der Gleichung (15) erhält man also für den in Bogensekunden ausgedrückten Differentialquotienten von p

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{n \sin v}{\Delta \sin 1''} \tag{19}$$

Differenziert man diese Gleichung und substituiert für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\Delta}{dt}$ ihre in (15) und (14) gegebenen Werte, so folgt

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{n^2 \sin 2v}{\Delta^2 \sin 1''} \tag{20}$$

Nun ist, wenn p' den Positionswinkel von S_i, bezogen auf S', bedeutet,

$$p' = p + \frac{dp}{dt}(t' - t) + \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dt^2}(t' - t)^2$$

Substituiert man hierin die aus (19), (20) und (17) folgenden Werte von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{d^2p}{dt^2}$, so ergibt sich

$$p' - p = -\frac{n(t' - t)}{\Delta \sin 1''}\sin(N - p) - \frac{n^2(t' - t)^2}{2\Delta^2 \sin 1''}\sin 2(N - p) \tag{21}$$

Im vorigen ist der Stern S_i als unbeweglich vorausgesetzt worden. Läßt man diese Voraussetzung fallen und nimmt an, daß sich S_i innerhalb des Zeitintervalls $t' - t$ von S_i nach S_i' bewegt, so ist die Distanz der Sterne S und S_i zur Zeit t' gleich $S'S_i' = \Delta''$. Es sei nun n_i die jährliche Eigenbewegung des Sterns S_i, gemessen im größten Kreise, und N_i der Positionswinkel dieser Eigenbewegung. Man erhält dann die Gleichung für $\Delta'' - \Delta'$, indem man in (18) n und N durch n_i und N_i ersetzt, ferner Δ' mit Δ'', Δ mit Δ' vertauscht und an Stelle von p den Positionswinkel von S' in bezug auf S_i substituiert; dieser Positionswinkel kann aber (vorausgesetzt, daß sich die Sterne nicht in der Nähe des Pols befinden) gleich $180^\circ + p'$ angenommen werden, wo p' durch die Gleichung (21) bestimmt ist. Es wird somit

$$\Delta'' - \Delta' = n_i(t' - t)\cos(N_i - p') + \frac{n_i^2(t' - t)^2}{2\Delta'}\sin^2(N_i - p')$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (18) folgt

$$\begin{aligned}\Delta'' = \Delta &- [n\cos(N - p) - n_i\cos(N_i - p')](t' - t) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{\Delta}\sin^2(N - p) + \frac{n_i^2}{\Delta'}\sin^2(N_i - p')\right](t' - t)^2\end{aligned} \tag{22}$$

In ähnlicher Weise läßt sich die Formel für den Positionswinkel ableiten. Man setze $PS'S_i' = p''$, so daß p'' den Positionswinkel von S_i', bezogen auf S', bedeutet. Um zunächst $p'' - p'$ zu erhalten, hat man in der Gleichung (21) n und N durch n_i, bzw. N_i, Δ durch Δ' und p durch $180^\circ + p'$ zu ersetzen. Es ergibt sich so

$$p'' - p' = \frac{n_i(t'-t)}{\Delta' \sin 1''} \sin(N_i - p') - \frac{n_i^2 (t'-t)^2}{2\Delta'^2 \sin 1''} \sin 2(N_i - p')$$

Addiert man diese Gleichung zu (21), so erhält man

$$(23) \qquad p'' = p - \frac{1}{\sin 1''}\left[\frac{n}{\Delta} \sin(N-p) - \frac{n_i}{\Delta'} \sin(N_i - p')\right](t'-t)$$
$$- \frac{1}{2 \sin 1''}\left[\frac{n^2}{\Delta^2} \sin 2(N-p) + \frac{n_i^2}{\Delta'^2} \sin 2(N_i - p')\right](t'-t)^2$$

Ist eine der Eigenbewegungen, beispielsweise n_i, sehr klein, und beträgt die Differenz $t' - t$ nur wenige Jahre, so kann man die in (22) und (23) von n_i^2 abhängigen Glieder vernachlässigen und $\Delta' = \Delta$, $p' = p$ annehmen; damit wird

$$(22^a) \qquad \Delta'' = \Delta - [n \cos(N-p) - n_i \cos(N_i - p)](t'-t) + \frac{n^2 \sin^2(N-p)}{2\Delta}(t'-t)^2$$

$$(23^a) \qquad p'' = p - \frac{1}{\Delta \sin 1''}[n \sin(N-p) - n_i \sin(N_i - p)](t'-t) - \frac{n^2 \sin 2(N-p)}{2\Delta^2 \sin 1''}(t'-t)^2$$

57a. Sternströme. Wenn man auf einem Himmelsglobus die Richtungen der Eigenbewegungen der Sterne aufzeichnet, so findet man wiederholt, daß mehrere dieser Richtungen gegen einen Punkt hin konvergieren; diese Erscheinung weist auf die Existenz von Sterngruppen hin, deren Glieder sich im Raum in parallelen, von Gruppe zu Gruppe verschiedenen Richtungen bewegen. Stellen nämlich die zueinander parallelen Geraden Ss, $S's'$, $S''s''$ (Fig. 5) die Richtungen dar, in denen sich drei Sterne relativ zur Sonne (M) bewegen, und zieht man durch M die Gerade $K'K$ parallel zu Ss, $S's'$, $S''s''$, so schneiden die Ebenen $MSsK$, $MS's'K$, $MS''s''K$ die um M beschriebene Sphäre in drei größten Kreisen, welche den gemeinsamen Durchmesser $K'K$ haben und somit durch die beiden Punkte hindurchgehen, in denen dieser Durchmesser die Sphäre trifft. Um die Durchschnittspunkte der Geraden $K'K$ mit der Sphäre zu finden, betrachte man zunächst nur zwei zueinander parallele Sternbahnen, beispielsweise Ss und $S's'$, und nehme an, daß S und S' die Örter der beiden Sterne zur Zeit t seien. Die Punkte, in denen die Richtungen MS, MS' und MK verlängert die Sphäre treffen, sind in Fig. 6 mit S, S' und K bezeichnet; SK und $S'K$ geben somit die Richtungen der Eigenbewegungen der beiden Sterne an der Sphäre an. Ist dann P der Nordpol des Äquators, und werden die Rektaszensionen in der Richtung des Pfeils gezählt, so sind $PSK = N$ und $PS'K = N'$ die Positionswinkel der Eigenbewegungen; die Werte von N und N' ergeben sich

Fig. 5.

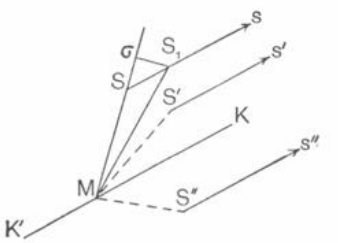
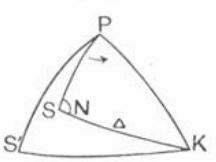


Fig. 6.



mit Hilfe der Gleichungen (3) des § 55, wenn für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die für die Sterne S und S' gültigen Komponenten der Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination substituiert werden. Es seien nun α, δ, bzw. α', δ', bzw. A, D die Rektaszension und Deklination von S, S' und K, ferner werde $SK = \Delta$ und $S'K = \Delta'$ gesetzt; aus dem Dreieck PSK folgt dann

$$\begin{aligned} \sin\Delta \sin N &= \cos D \sin(A-\alpha) \\ \sin\Delta \cos N &= \cos\delta \sin D - \sin\delta \cos D \cos(A-\alpha) \\ \cos\Delta &= \sin\delta \sin D + \cos\delta \cos D \cos(A-\alpha) \end{aligned} \tag{24}$$

Durch Division der beiden ersten Gleichungen erhält man

$$\sin N \left[\cos\delta \operatorname{tang} D - \sin\delta \cos(A-\alpha)\right] = \sin(A-\alpha)\cos N$$

Setzt man hier

$$\begin{aligned} m \sin M &= \sin N \sin\delta \\ m \cos M &= \cos N, \end{aligned} \tag{25}$$

so ergibt sich

$$\sin N \cos\delta \operatorname{tang} D = m \sin(A - \alpha + M) \tag{26}$$

oder

$$\sin N \cos\delta \operatorname{tang} D = m \cos(M-\alpha)\sin A + m \sin(M-\alpha)\cos A \tag{26a}$$

Ebenso erhält man für den zweiten Stern, wenn

$$\begin{aligned} m' \sin M' &= \sin N' \sin\delta' \\ m' \cos M' &= \cos N' \end{aligned} \tag{27}$$

gesetzt wird,

$$\sin N' \cos\delta' \operatorname{tang} D = m' \cos(M'-\alpha')\sin A + m' \sin(M'-\alpha')\cos A \tag{28}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} &\sin N \cos\delta = c, && m\cos(M-\alpha) = a, && m\sin(M-\alpha) = b, \\ &\sin N' \cos\delta' = c', && m'\cos(M'-\alpha') = a', && m'\sin(M'-\alpha') = b', \end{aligned} \tag{29}$$

so werden die Gleichungen (26a) und (28)

$$\begin{aligned} a\sin A + b\cos A &= c \operatorname{tang} D \\ a'\sin A + b'\cos A &= c' \operatorname{tang} D \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wenn $\operatorname{tang} D$ eliminiert wird,

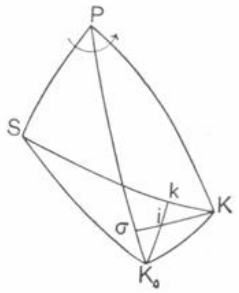
$$\operatorname{tang} A = -\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c} \tag{30}$$

Diese Gleichung liefert zwei um 180° voneinander verschiedene Werte von A; der eine derselben gilt für den Punkt K, der andere für den dem K diametral gegenüberliegenden Punkt der Sphäre. Die den beiden Werten von A entsprechenden Werte von D ergeben sich mit Hilfe der Gleichung (26).

Ist für mehrere Sterne der gemeinsame Konvergenzpunkt ihrer Eigenbewegungen zu bestimmen, so benutzt man die vorigen Formeln dazu, um zunächst aus den

Eigenbewegungen zweier der Sterne genäherte Werte der Rektaszension und Deklination des gesuchten Punktes zu finden; diese mögen mit A_0, bzw. D_0 bezeichnet werden. In Fig. 7 sei nun K_0 der durch die Koordinaten A_0 und D_0 bestimmte Punkt der Sphäre, K sei der wahre Ort des Konvergenzpunktes, P und S sollen dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 6. Zieht man K_0k senkrecht zu SK und $K\sigma$ senkrecht zu PK_0, bezeichnet man ferner den Winkel PK_0S mit ω, so ist der Winkel σK_0k sehr nahe gleich $90^0 - \omega$ und $\sigma i K_0 = \omega$; indem man dann die kleinen rechtwinkligen Dreiecke $K\sigma K_0$ und KkK_0 als eben betrachtet, findet man

Fig. 7.



$$K_0k = \sigma K_0 \sin\omega + \sigma K \cos\omega \tag{31}$$

Es seien jetzt A und D die Äquatorealkoordinaten von K, ferner setze man $A - A_0 = dA$, $D - D_0 = dD$, $PSK = N$, $PSK_0 = N_0$, $SK_0 = \Delta_0$; man erhält dann $\sigma K_0 = dD$ und, mit Zuhilfenahme der sphärischen Dreiecke SK_0k, bzw. $P\sigma K$, $K_0k = (N_0 - N)\sin\Delta_0$, $\sigma K = \cos D dA$. Werden die hier gefundenen Werte in die Gleichung (31) substituiert, so folgt, wenn $\cos D dA = \cos D_0 dA$ gesetzt wird,

$$(N_0 - N)\sin\Delta_0 = \sin\omega\, dD + \cos\omega\, \cos D_0\, dA \tag{32}$$

Die zur Berechnung von ω dienenden Formeln ergeben sich aus dem Dreieck PSK_0, und zwar erhält man, wenn man die Rektaszension und Deklination des Sterns mit α, bzw. δ bezeichnet,

$$\begin{aligned} \sin\Delta_0 \sin\omega &= \sin(A_0 - \alpha)\cos\delta \\ \sin\Delta_0 \cos\omega &= \sin\delta \cos D_0 - \cos\delta \sin D_0 \cos(A_0 - \alpha) \end{aligned} \tag{33}$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} h \sin H &= \sin\delta \\ h \cos H &= \cos\delta \cos(A_0 - \alpha) \end{aligned} \tag{33ª}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin\Delta_0 \sin\omega &= \sin(A_0 - \alpha)\cos\delta \\ \sin\Delta_0 \cos\omega &= h \sin(H - D_0) \\ \cos\Delta_0 &= h \cos(H - D_0) \end{aligned} \tag{33ᵇ}$$

Um die wahrscheinlichsten Werte von $\cos D_0 dA$ und dD zu finden, hat man in (32) an Stelle von N die mit Hilfe der Gleichungen (3) des § 55 erhaltenen Positionswinkel der Eigenbewegungen und an Stelle von N_0 und Δ_0 die aus (24) für $A = A_0$, $D = D_0$ folgenden Werte von N und Δ einzusetzen; werden die so entstehenden Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, so erhält man als Koordinaten des Konvergenzpunktes $A = A_0 + dA$, $D = D_0 + dD$.

Sind nun A und D gefunden, und kennt man außerdem die radialen Geschwindigkeiten der Sterne, so lassen sich auch die totalen Geschwindigkeiten und die Parallaxen der Sterne bestimmen. In Fig. 5 sei $SS_1 = v$ die Geschwindigkeit des Sterns S im Raum; zieht man dann $S_1\sigma$ senkrecht zu MS und setzt $S\sigma = \varrho$, so gibt ϱ die radiale Geschwindigkeit des Sterns an. Nun ist der Winkel $\sigma SS_1 = SMK$,

und SMK ist gleich dem mit Δ bezeichneten Bogen SK in Fig. 6; es folgt also aus dem Dreieck $S_1 S\sigma$ in Fig. 5

$$v = \varrho \sec \Delta \tag{34}$$

Wie schon in § 54 bemerkt wurde, sind die von den Beobachtern angegebenen Werte von ϱ in Kilometern ausgedrückt und beziehen sich auf die mittlere Sekunde als Zeiteinheit; multipliziert man diese Werte mit 0.212, so erhält man dem § 54 zufolge die auf die halbe große Achse der Erdbahn als Längeneinheit und auf ein tropisches Jahr als Zeiteinheit bezogenen radialen Geschwindigkeiten. Wird die auf die zuletzt genannten Einheiten bezogene totale Geschwindigkeit mit v' bezeichnet, so ergibt sich

$$v' = 0.212\ \varrho \sec \Delta \tag{34a}$$

Hier, wie auch in der Gleichung (34), hat man für Δ seinen aus den Gleichungen (24) für $A = A_0 + dA$ und $D = D_0 + dD$ folgenden Wert zu substituieren.

Der Winkel $\sigma M S_1$ (Fig. 5) ist die Eigenbewegung des Sterns, im größten Kreise gemessen; wird diese wie oben mit n bezeichnet, und setzt man $MS_1 = r$, so folgt, wenn n in Bogensekunden ausgedrückt wird, $\sigma S_1 = rn \sin 1''$. Nun ist σS_1 auch gleich $v \sin \Delta$; somit wird

$$r = \frac{v \sin \Delta}{n \sin 1''}$$

Substituiert man hier für v seinen in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückten Wert v', so wird auch r in dieser Einheit ausgedrückt erhalten; da aber dann $\frac{1}{r} = \sin \pi$ ist, wo π die Parallaxe des Sterns bedeutet, so ergibt sich, wenn noch $\sin \pi = \pi \sin 1''$ gesetzt wird,

$$\pi = \frac{n}{v' \sin \Delta} \tag{35}$$

Mit Rücksicht darauf, daß v' auf das tropische Jahr als Zeiteinheit bezogen ist, hat man unter n die jährliche Eigenbewegung im größten Kreise gemessen zu verstehen.

Beispiel. Die vorhin abgeleiteten Formeln sollen jetzt auf die in der ersten Kolumne der folgenden Tabelle erwähnten Sterne angewandt werden. Die auf das mittlere Äquinox 1900.0 bezogenen Koordinaten dieser Sterne sind in der zweiten und dritten Kolumne mitgeteilt, die vierte und fünfte Kolumne enthalten die jährlichen Eigenbewegungen in Rektaszension und Deklination nach den Angaben von *L. Boss* (Preliminary General Catalogue of 6188 stars for the epoch 1900); unter Benutzung dieser Werte findet man mittels der Gleichungen (3) des § 55 die in der 6. und 7. Kolumne angegebene Eigenbewegung im größten Kreise, bzw. den Positionswinkel der Eigenbewegung. Die Bedeutung der in der 8. Kolumne enthaltenen Zahlen wird unten erläutert werden.

Tafel I.

	α	δ	$\frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{d\delta}{dt}$	n	N	$\mathfrak{N}$
β Aurigae	$5^h 52^m$	$+44^\circ 56'$	$-0''.066$	$-0''.005$	$0''.047$	$263^\circ 53'$	$261^\circ 44'$
Sirius	6 41	-16 35	-0.549	-1.206	1.315	203 34	204 14
β Ursae maj.	10 56	$+56$ 55	$+0.153$	$+0.028$	0.088	71 28	69 28
δ Leonis	11 9	$+21$ 4	$+0.159$	-0.145	0.207	134 21	131 28
γ Ursae maj.	11 49	$+54$ 15	$+0.160$	$+0.003$	0.094	88 10	87 26
δ » »	12 10	$+57$ 35	$+0.205$	$+0.003$	0.110	88 26	87 26
ε » »	12 50	$+56$ 30	$+0.208$	-0.011	0.115	95 28	96 43
ζ^1 » »	13 20	$+55$ 27	$+0.222$	-0.030	0.129	103 24	103 19
α Coronae b.	15 30	$+27$ 3	$+0.135$	-0.102	0.158	130 19	132 20

Auf Grund einer von *Hertzsprung* ausgeführten Untersuchung kann man für die Rektaszension und Deklination des Konvergenzpunktes der Eigenbewegungen der obigen Sterne die Näherungswerte $A_0 = 309^\circ$, $D_0 = -42^\circ$ annehmen. Unter Benutzung dieser Koordinaten und der in der zweiten und dritten Kolumne der vorigen Tafel enthaltenen Rektaszensionen und Deklinationen wurden mittels der Gleichungen (24) Δ_0 und N_0 berechnet; hierauf wurde für jeden Stern das Produkt $(N_0 - N)\sin\Delta_0$ gebildet, wo N den in der 7. Kolumne angegebenen Positionswinkel bedeutet. Nachdem dann noch mit Hilfe der Gleichungen (33) die Werte von $\sin\omega$ und $\cos\omega$ berechnet waren, ergaben sich die hierunter mitgeteilten Bedingungsgleichungen. Die rechts neben dem ersten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen stellen die Werte von $(N_0 - N)\sin\Delta_0$, ausgedrückt in Bogenminuten, dar; dividiert man diese Zahlen (der in § 7 gegebenen Vorschrift gemäß) durch die größte unter ihnen (163′), so erhält man die rechts neben dem zweiten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen.

β Aurigae	$+0.339\cos D_0\, dA$	$-0.941\, dD$	$=-$	86′	$=-$	0.528
Sirius	-0.859 »	-0.512 »	$=-$	8	$=-$	0.050
β Ursae maj.	$+0.719$ »	$+0.695$ »	$=-$	8	$=-$	0.050
δ Leonis	-0.361 »	$+0.933$ »	$=-$	86	$=-$	0.528
γ Ursae maj.	$+0.618$ »	$+0.786$ »	$=+$	22	$=+$	0.132
δ » »	$+0.693$ »	$+0.721$ »	$=+$	10	$=+$	0.059
ε » »	$+0.677$ »	$+0.735$ »	$=+$	97	$=+$	0.596
ζ^1 » »	$+0.673$ »	$+0.740$ »	$=+$	42	$=+$	0.258
α Coronae b.	$+0.484$ »	$+0.875$ »	$=+$	163	$=+$	1.000

Allen diesen Gleichungen möge dasselbe Gewicht beigelegt werden; mit Anwendung der rechts neben dem zweiten Gleichheitszeichen stehenden Zahlen erhält man dann die folgenden Normalgleichungen und die mit $[nn]$ bezeichnete Summe der Fehlerquadrate.

$$3.508\cos D_0\, dA + 2.688\, dD = 1.202$$
$$2.688 \quad » \quad + 5.492 \quad » \quad = 1.647$$
$$[nn] = 2.005$$

Löst man diese Normalgleichungen nach dem in § 8, II erläuterten Verfahren auf, so ergeben sich die folgenden Werte von $\cos D_0 dA$ und dD nebst ihren mittleren Fehlern

$$\cos D_0 dA = +0.1807 \pm 0.3063, \qquad dD = +0.2115 \pm 0.2448$$

Um diese Werte in Bogenminuten ausgedrückt zu erhalten, sind dieselben mit der Fehlereinheit (= 163′) zu multiplizieren; es wird also

$$\cos D_0 dA = +29'.5 \pm 50', \qquad dD = +35' \pm 40',$$

folglich

$$dA = +40' \pm 67', \qquad dD = +35' \pm 40'$$

Somit ergibt sich

$$A = 309^\circ 40', \qquad D = -41^\circ 25'$$

Mit Hilfe dieser Koordinaten wurden die Gleichungen (24) nochmals aufgelöst; die dadurch erhaltenen Werte von N sind in der 8. Kolumne der obigen Tafel unter der Bezeichnung $\mathfrak{N}$ eingetragen, die Werte von $\log \sin \Delta$ und $\log \cos \Delta$ findet man in Tafel II angegeben. Der Unterschied zwischen N und $\mathfrak{N}$ ist am größten für δ Leonis; nimmt man den in Tafel I für δ Leonis gegebenen Wert $n = 0''.207$ als richtig an, so erhält man für die dem Positionswinkel $\mathfrak{N} = 131^\circ 28'$ entsprechende jährliche Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination $+0''.166$, bzw. $-0''.137$.

Tafel II.

	$\log \sin \Delta$	$\log \cos \Delta$	ϱ km	r km	$\log v' \sin \Delta$	π
β Aurigae	9.7018	9_n9366	− 17.9	− 16.7	0.3137	0″.023
Sirius	9.9539	9_n6404	− 8.1	− 8.4	0.5658	0.357
β Ursae maj.	9.6542	9_n9506	− 16.8	− 17.2	0.2661	0.048
δ Leonis	9.7851	9_n8991			0.3970	0.083
γ Ursae maj.	9.7429	9_n9206			0.3548	0.041
δ » »	9.7775	9_n9035			0.3894	0.045
ε » »	9.8268	9_n8700			0.4387	0.042
ζ^1 » »	9.8607	9_n8377	− 12.6	− 13.3	0.4726	0.044
α Coronae b.	9.9949	9_n1796	+ 0.4	− 2.9	0.6068	0.039

Die vierte Kolumne der vorstehenden Tafel enthält für 5 Sterne die beobachteten radialen Geschwindigkeiten ϱ; infolge des Mangels an hinreichend scharf begrenzten Linien in den Spektren der vier anderen Sterne lassen sich für letztere die Werte von ϱ nicht bestimmen. Mit Hilfe von ϱ und Δ kann man nach (34) die totale Geschwindigkeit (v) berechnen, indessen soll zuerst das Gewicht einer solchen Geschwindigkeitsbestimmung ermittelt werden. Bezeichnet man mit ε den mittleren Fehler von ϱ, so ergibt sich aus (34) für den mittleren Fehler von v der Wert $\varepsilon \sec \Delta$. Es werde nun angenommen, daß die mittleren Fehler der beobachteten ϱ einander gleich seien; wenn sich dann zwei Sterne im Abstande Δ_1, bzw. Δ_2 vom Konvergenzpunkt befinden, und v_1 und v_2 die totalen Geschwindigkeiten der beiden

Sterne im Raum bedeuten, so erhält man, wenn die Gewichte von v_1 und v_2 mit p_1, bzw. p_2 bezeichnet werden, und $p_1 = 1$ gesetzt wird,

$$p_2 = \frac{\sec^2 \Delta_1}{\sec^2 \Delta_2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man, daß, wenn das Gewicht des für β Ursae maj. folgenden Wertes von v als Einheit angenommen wird, das Gewicht des für α Coronae sich ergebenden Wertes von v nur mehr 0.03 ist. Läßt man den zuletzt genannten Stern vorläufig unberücksichtigt, so erhält man die hierunter angeführten Werte der totalen Geschwindigkeit nebst ihren Gewichten.

	v	Gewicht		v	Gewicht
	km			km	
β Aurigae	+ 20.7	0.94	β Ursae maj.	+ 18.8	1.00
Sirius	+ 18.5	0.24	ξ^1 » »	+ 18.3	0.59

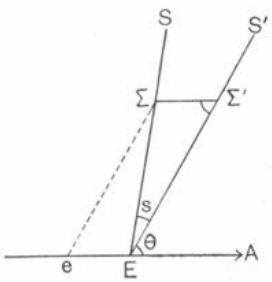
Die Differenzen zwischen diesen 4 Werten von v lassen sich vollständig durch Beobachtungsfehler erklären; nimmt man demnach an, daß sich die vier Sterne in Wirklichkeit mit gleicher Geschwindigkeit im Raum bewegen, so erhält man als wahrscheinlichsten Wert dieser Geschwindigkeit 19.3^{km}. Für $v = 19.3^{km}$ gibt die Gleichung (34) die in der 5. Kolumne der Tafel II mit r bezeichneten Werte von ϱ. Der größte Unterschied zwischen der beobachteten und berechneten radialen Geschwindigkeit findet für α Coronae statt und beträgt 3.3^{km}. Auch diese Differenz kann gegenwärtig noch teils auf Rechnung der Beobachtungsfehler, teils auf Rechnung des für v angenommenen Wertes gesetzt werden. Macht man nun die Hypothese, daß sich alle in der Tafel I aufgeführten Sterne mit der Geschwindigkeit 19.3^{km} in der Sekunde, also mit der in Einheiten der halben großen Achse der Erdbahn ausgedrückten und auf das tropische Jahr als Zeiteinheit bezogenen Geschwindigkeit $v' = 4.092$ im Raum bewegen, so erhält man die in der 6. Kolumne der Tafel II angegebenen Werte von $\log v' \sin \Delta$; werden diese und die in Tafel I mitgeteilten Werte von n in die Gleichung (35) substituiert, so ergeben sich die in der 7. Kolumne der Tafel II enthaltenen Parallaxen.

Kapitel X.

Aberration des Lichtes.

58. Erklärung der Aberration. Ein Punkt S bewege sich mit der Geschwindigkeit V in der Richtung SE (Fig. 1) und treffe in E die Oberfläche der Erde; der Moment, in dem S mit E zusammentrifft, möge mit t bezeichnet werden, eEA sei die Richtung der Bewegung des Punktes E zur Zeit t, und v bedeute die Geschwindigkeit dieser Bewegung. Wird dann das Stück ΣE der Bahn des Punktes S nur so groß gewählt, daß innerhalb des Zeitintervalls τ, in dem der Punkt S die Strecke ΣE durchläuft, die Bewegung der Erde als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden kann, und ist e der Punkt, in dem sich E zur Zeit $t - \tau$ befand, so hat man $eE = v\tau$ und $\Sigma E = V\tau$. Die Bewegung des Punktes S von Σ nach E werde jetzt durch zwei andere ersetzt: man lasse nämlich S innerhalb des Zeitintervalls τ mit der Geschwindigkeit v die zu eE gleiche und parallele Strecke $\Sigma\Sigma'$ zurücklegen, gleichzeitig aber soll sich $\Sigma\Sigma'$ parallel zu sich selbst nach eE hin bewegen, und zwar so, daß der Endpunkt Σ entlang der Verbindungslinie von Σ und e gleitet und nach der Zeit τ in e ankommt. Da e den Punkt der Geraden eA bedeutet, in dem sich der Punkt E befunden hat, als der bewegliche Punkt in Σ war, so wird durch die Komponente $\Sigma\Sigma'$ $(= eE)$ der Bewegung von S die relative Lage des Beobachters zum beweglichen Punkt nicht geändert. Es bleibt somit nur die zweite Komponente $\Sigma' E$ übrig, und diese hat naturgemäß zur Folge, daß der Beobachter die Richtung $\Sigma' E$ als diejenige betrachtet, aus der der bewegliche Punkt S herkommt.

Fig. 1.



Wendet man die vorigen Betrachtungen auf den Fall an, wo SE einen von einem Stern ausgehenden Lichtstrahl bedeutet, so kommt man zu dem Resultat, daß ein in E befindlicher Beobachter den Stern nicht in der Richtung ES, sondern in der um den Winkel SES' von ihr abweichenden, in der Ebene SEA gelegenen Richtung ES' sieht; der Ort des Sterns an der Sphäre erscheint also verschoben, und zwar nach der Richtung hin, in der sich der Beobachter bewegt. Diese Erscheinung nennt man die Aberration des Lichtes. Der Punkt S', in dem die Richtung ES' verlängert die um E beschriebene Sphäre trifft, wird der scheinbare Ort des Sterns genannt; der Punkt S, in dem die Richtung ES die Sphäre schneidet, ist der sogenannte wahre Ort des Sterns. Demgemäß bezeichnet man die Koordinaten des Punktes S' als die scheinbaren Koordinaten des Sterns (scheinbare Länge und Breite, scheinbare Rektaszension und Deklination) und die Koordinaten des Punktes S als die wahren Koordinaten des Sterns. Da die Geschwindigkeit des Lichtes sehr groß im Verhältnis zu derjenigen eines Punktes der Erde ist, so ist der Winkel SES' sehr klein, und man erhält, wenn $SES' = s$, ferner $\sin s = s \sin 1''$

gesetzt und der Winkel $S'EA$ zwischen der scheinbaren Richtung zum Stern hin und der Bewegungsrichtung des Beobachters mit Θ bezeichnet wird,

$$s = \frac{v}{V \sin 1''} \sin \Theta \tag{1}$$

59. Jährliche Aberration. Es soll nun zunächst der Fall betrachtet werden, wo unter v die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne zu verstehen ist. Wenn dann r den Radiusvektor der Erde, a die halbe große Achse der Erdbahn, m die in Teilen der Sonnenmasse ausgedrückte Masse der Erde und K^2 die *Gaußsche* Attraktionskonstante bedeutet, so ist nach der Theorie der elliptischen Bewegung

$$v^2 = K^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

oder, indem mittels der Gleichung

$$K^2(1+m) = n^2a^3$$

die mittlere Bewegung der Erde (n), ausgedrückt in Teilen des Radius, eingeführt wird,

$$v^2 = n^2a^2\left(\frac{2a}{r} - 1\right) \tag{2}$$

Da aber, wenn e die Exzentrizität der Erdbahn, $\varphi = \arcsin e$ den Exzentrizitätswinkel, $\odot$ die wahre Länge der Sonne, $l = 180^\circ + \odot$ die Länge der Erde in ihrer Bahn, π' die Länge des Perihels, also $l - \pi' = 180^\circ + \odot - \pi'$ die wahre Anomalie der Erde bezeichnet,

$$\frac{a}{r} = \frac{1 - e\cos(\odot - \pi')}{\cos^2\varphi} \tag{3}$$

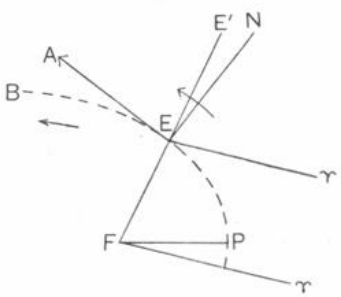
und $1 - \cos^2\varphi = e^2$ ist, so folgt aus (2)

$$v = na \sec\varphi \sqrt{1 - 2e\cos(\odot - \pi') + e^2} \tag{4}$$

Wird dieser Ausdruck in die Gleichung (1) substituiert, so gibt der für s folgende Wert den Winkel an, um den ein Lichtstrahl — infolge der Bewegung der Erde um die Sonne — von seiner wahren Richtung abgelenkt erscheint; diesen Winkel nennt man die jährliche Aberration.

Es sei jetzt PEB (Fig. 2) ein Teil der als elliptisch gedachten Erdbahn, P sei das Perihel, F die Sonne, $F\Upsilon$ die Richtung zum Frühlings-Tagundnachtgleichepunkte, E sei der Ort der Erde zur Zeit der Beobachtung, EA sei die im Sinne der Bewegung der Erde gezogene Tangente an PEB und EN die zugehörige Normale; parallel zu $F\Upsilon$ ziehe man $E\Upsilon$, so daß der Winkel $\Upsilon EE' = \Upsilon FE = l = 180^\circ + \odot$, also der Winkel $PFE = l - \pi' = 180^\circ + \odot - \pi'$ ist. Wird nun der Winkel NEE' mit χ bezeichnet, so sind die Komponenten der Geschwindigkeit der Erde, bezogen auf EE' und eine in der Richtung der Bewegung der Erde senkrecht zu EE' gezogene Gerade*), gleich $v\sin\chi$, bzw. $v\cos\chi$. Wenn aber $r = f(\psi)$ die in Polar-

Fig. 2.



*) In Fig. 2 nicht gezeichnet.

koordinaten ausgedrückte Gleichung einer ebenen Kurve ist, und χ, wie vorhin, den Winkel bezeichnet, den die dem Punkte (r, ψ) entsprechende Normale der Kurve mit der Richtung des Radiusvektors bildet, so hat man bekanntlich

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\psi}$$

Versteht man also unter $r = f(\psi)$ die Gleichung (3) der von der Erde beschriebenen Ellipse und setzt demgemäß $\psi = \odot - \pi'$, so erhält man

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{-e\sin(\odot - \pi')}{1 - e\cos(\odot - \pi')}$$

Hieraus folgt

$$\cos\chi = \frac{1 - e\cos(\odot - \pi')}{\sqrt{1 - 2e\cos(\odot - \pi') + e^2}}, \qquad \sin\chi = \frac{-e\sin(\odot - \pi')}{\sqrt{1 - 2e\cos(\odot - \pi') + e^2}}$$

Mit Rücksicht auf (4) wird somit

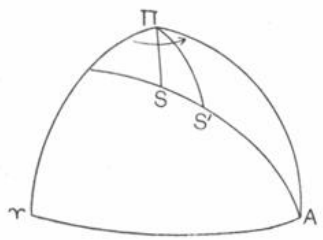
$$\begin{aligned} v\cos\chi &= na\sec\varphi\,[1 - e\cos(\odot - \pi')] \\ v\sin\chi &= -nae\sec\varphi\sin(\odot - \pi') \end{aligned} \tag{5}$$

Aus Fig. 2 folgt noch $\gamma EA = \gamma EN + 90^\circ = \gamma EE' - NEE' + 90^\circ$ oder, wenn $\gamma EA = u$ gesetzt wird,

$$u = 270^\circ + \odot - \chi \tag{6}$$

59ª. Einfluß der jährlichen Aberration auf die Länge und Breite. In Fig. 1 (S. 164) möge SE einen von einem Stern ausgesandten Lichtstrahl, EA eine Parallele zu der Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne, also $S'E$ die infolge dieser Bewegung abgelenkte oder scheinbare Richtung des Lichtstrahls darstellen. Verlängert man dann die Richtungen ES, ES' und EA, bis sie die Sphäre in den in Fig. 3 mit S, S' und A bezeichneten Punkten schneiden, so ist A der Punkt, auf den sich der Beobachter infolge der Bewegung der Erde um die Sonne hinbewegt, ferner ist S der wahre und S' der scheinbare Ort des Sterns; dabei liegen A, S und S' auf einem größten Kreise, und es ist $SS' = s$ und $S'A = \Theta$. Mit γ werde der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt zur Zeit der Beobachtung, also mit γA die dieser Zeit entsprechende Ekliptik, und mit Π der Pol der Ekliptik bezeichnet; es ist dann der sphärische Winkel $\gamma\Pi A$ gleich dem Winkel γEA in Fig. 2, d. h. gleich dem durch die Gleichung (6) bestimmten u. Bedeuten nun λ' und β' die scheinbare Länge und Breite des Sterns und λ und β seine wahre Länge und Breite, so folgt aus dem Dreieck $\Pi SS'$, wenn noch der Winkel $\Pi S'A = q$ gesetzt und die Gleichung (1) berücksichtigt wird,

Fig. 3.



$$(\lambda' - \lambda)\cos\beta = s\sin q = \frac{v}{V\sin 1''}\sin\Theta\sin q$$

$$\beta' - \beta = s\cos q = \frac{v}{V\sin 1''}\sin\Theta\cos q$$

Ferner folgt aus dem Dreieck $\Pi S'A$, worin der Winkel bei Π gleich $u - \lambda'$ und die Seite $\Pi A = 90^\circ$ ist,

$$\sin\Theta \sin q = \sin(u - \lambda'), \qquad \sin\Theta \cos q = -\sin\beta' \cos(u - \lambda')$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorigen Gleichungen und unter Berücksichtigung der Gleichung (6) ergibt sich

$$(\lambda' - \lambda)\cos\beta = -\frac{v}{V \sin 1''} \cos(\odot - \lambda' - \chi)$$

$$\beta' - \beta = -\frac{v}{V \sin 1''} \sin\beta' \sin(\odot - \lambda' - \chi)$$

Hierin lassen sich die in (5) für $v\cos\chi$ und $v\sin\chi$ erhaltenen Ausdrücke einführen; setzt man dann

$$k = \frac{na \sec\varphi}{V \sin 1''}, \tag{7}$$

wo k die Aberrationskonstante genannt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -k \sec\beta \cos(\lambda' - \odot) + ke \sec\beta \cos(\lambda' - \pi') \\ \beta' - \beta &= \quad k \sin\beta' \sin(\lambda' - \odot) - ke \sin\beta' \sin(\lambda' - \pi') \end{aligned} \tag{8}$$

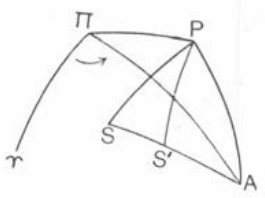
Mit Rücksicht darauf, daß k nur ein kleiner Winkel ist, kann man in den Ausdrücken auf der rechten Seite statt λ' und β' die Werte λ und β benutzen.

Für die Sonne wird $\lambda = \odot$ und (wenn B die Breite der Sonne bedeutet) $\beta = B$; da nun $k \sin B = 0$ und $\cos B = 1$ gesetzt werden darf, so ergibt sich aus (8), wenn die scheinbare Länge der Sonne mit $\odot'$ und ihre scheinbare Breite mit B' bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} \odot' - \odot &= -k + ke\cos(\odot - \pi') \\ B' - B &= 0 \end{aligned} \tag{8a}$$

60. Einfluß der jährlichen Aberration auf die Rektaszension und Deklination. Um die den Gleichungen (8) analogen, für den Äquator gültigen Formeln zu erhalten, bediene man sich der Fig. 4, wo P den Pol des wahren Äquators zur Zeit der Beobachtung bezeichnet, und wo Π, S, S', A und Υ dieselbe Bedeutung wie in Fig. 3 haben. Mit Anwendung der früheren Bezeichnungen ist zunächst $SS' = s$, $S'A = \Theta$, $\Upsilon\Pi A = u$. Setzt man nun den Winkel $PS'A = q'$, und bezeichnet man mit α' und δ' die scheinbare, und mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die wahre Rektaszension und Deklination des Sterns, so folgt aus dem Dreieck PSS', unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Gleichung (1),

Fig. 4.



$$\begin{aligned} (\alpha' - \mathfrak{a})\cos\mathfrak{d} = s\sin q' &= \frac{v}{V \sin 1''} \sin\Theta \sin q' \\ \delta' - \mathfrak{d} = s\cos q' &= \frac{v}{V \sin 1''} \sin\Theta \cos q' \end{aligned} \tag{9}$$

Wenn jetzt Φ die Rektaszension und d die Deklination des Punktes A darstellt, so ergibt sich aus dem Dreieck $S'PA$, worin der Winkel bei P gleich $\Phi - \alpha'$ ist,

$$\sin\Theta \sin q' = \cos d \sin(\Phi - \alpha')$$
$$\sin\Theta \cos q' = \sin d \cos\delta' - \cos d \sin\delta' \cos(\Phi - \alpha')$$

In dem Dreieck ΠPA ist nun der Winkel bei P gleich $90^\circ + \Phi$, ferner ist der Winkel bei Π gleich $90^\circ - u$ oder, wenn für u der Ausdruck (6) substituiert wird, gleich $180^\circ - (\odot - \chi)$; nimmt man also noch $\Pi A = 90^\circ$ an und setzt $\Pi P = \varepsilon$, wo ε die wahre Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung bedeutet, so erhält man

$$\cos d \sin\Phi = -\cos\varepsilon \cos(\odot - \chi)$$
$$\cos d \cos\Phi = \sin(\odot - \chi)$$
$$\sin d = -\sin\varepsilon \cos(\odot - \chi)$$

Demnach wird

$$\sin\Theta \sin q' = -\cos\varepsilon \cos\alpha' \cos(\odot - \chi) - \sin\alpha' \sin(\odot - \chi)$$
$$\sin\Theta \cos q' = (\sin\delta' \cos\varepsilon \sin\alpha' - \sin\varepsilon \cos\delta') \cos(\odot - \chi) - \sin\delta' \cos\alpha' \sin(\odot - \chi)$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (9) und benutzt dann die aus (5) sich ergebenden Gleichungen

$$v \sin(\odot - \chi) = na \sec\varphi (\sin\odot - e \sin\pi')$$
$$v \cos(\odot - \chi) = na \sec\varphi (\cos\odot - e \cos\pi'),$$

so folgt mit Berücksichtigung von (7)

$$(\alpha' - \mathfrak{a}) \cos\mathfrak{d} = -k \sin\alpha' (\sin\odot - e \sin\pi') - k \cos\alpha' \cos\varepsilon (\cos\odot - e \cos\pi')$$
$$\delta' - \mathfrak{d} = k (\sin\alpha' \sin\delta' \cos\varepsilon - \cos\delta' \sin\varepsilon) (\cos\odot - e \cos\pi')$$
$$- k \sin\delta' \cos\alpha' (\sin\odot - e \sin\pi')$$

oder, wenn $\cos\mathfrak{d} = \cos\delta$ und

$$\mathfrak{a} + ke \sec\delta (\sin\alpha' \sin\pi' + \cos\alpha' \cos\pi' \cos\varepsilon) = \alpha$$
$$\mathfrak{d} + ke \cos\pi' (\cos\delta' \sin\varepsilon - \sin\delta' \cos\varepsilon \sin\alpha') + ke \sin\pi' \sin\delta' \cos\alpha' = \delta \quad (10)$$

gesetzt wird,

$$\alpha' = \alpha - k \sec\delta (\sin\alpha' \sin\odot + \cos\alpha' \cos\varepsilon \cos\odot)$$
$$\delta' = \delta - k \cos\odot (\cos\delta' \sin\varepsilon - \sin\delta' \cos\varepsilon \sin\alpha') - k \sin\odot \sin\delta' \cos\alpha' \quad (11)$$

Setzt man in (10) und (11) $\varepsilon = 0$ und vertauscht die Rektaszension und Deklination des Sterns mit der Länge, bzw. Breite, so erhält man wieder die Gleichungen (8).

Die kleinen von e abhängigen Glieder der Gleichungen (10) ändern sich für einen Fixstern, selbst innerhalb langer Zeiträume, unmerklich wenig; wenn man also aus beobachteten Werten α' und δ' mit Hilfe der Gleichungen (11) die Werte von α und δ ableitet, so unterscheiden sich diese von der wahren Rektaszension und Deklination um Größen, welche für jeden Stern als konstant betrachtet werden können. In Wirklichkeit enthalten die in den Sternkatalogen gegebenen Rektaszensionen und Deklinationen sämtlich noch die von der Exzentrizität der Erdbahn abhängigen Glieder; dasselbe gilt also auch von den Planeten- und Kometenörtern, welche im Anschluß an die aus den Sternkatalogen entnommenen Positionen der Vergleichsterne gewonnen worden sind. Infolge der Ortsveränderung der Planeten

und Kometen sind aber für diese Gestirne die in den Gleichungen (10) von e abhängigen Glieder nicht mehr konstant und müssen daher in Rechnung gezogen werden. Führt man nun die Hilfsgrößen

$$h_0 \sin H_0 = -ke \cos\pi' \cos\varepsilon, \qquad h_0 \cos H_0 = -ke \sin\pi', \qquad i_0 = -ke \cos\pi' \sin\varepsilon$$

ein und vertauscht in den mit ke multiplizierten Gliedern der Gleichungen (10) α' mit α, und δ' mit δ, so ergibt sich für die von der jährlichen Aberration vollständig befreite Rektaszension und Deklination

$$\mathfrak{a} = \alpha + h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sec\delta$$
$$\mathfrak{d} = \delta + h_0 \cos(H_0 + \alpha) \sin\delta + i_0 \cos\delta$$

Hier ist für die Jahre 1900 und 2000

	$\log h_0$	H_0	i_0
1900	9.534	$169^\circ.7$	$+ 0''.026$
2000	9.534	168.1	+ 0.030

Die Gleichungen (11) wendet man in der Praxis in zwei verschiedenen Formen an. Setzt man zunächst

$$(12) \qquad h \sin H = -k \cos\odot \cos\varepsilon, \qquad h \cos H = -k \sin\odot, \qquad i = -k \cos\odot \sin\varepsilon$$

und vertauscht in den von k abhängigen Gliedern α' mit α und δ' mit δ, so folgt aus (11)

$$(13) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + h \sin(H + \alpha) \sec\delta \\ \delta' &= \delta + h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta \end{aligned}$$

Die Werte von H, $\log h$ und $\log i$ findet man in den astronomischen Jahrbüchern von Tag zu Tag angegeben.

Um die zweite Form zu erhalten, setze man

$$(14) \qquad \begin{aligned} C &= -k \cos\odot \cos\varepsilon & D &= -k \sin\odot \\ c &= \cos\alpha \sec\delta & c' &= \cos\delta \operatorname{tang}\varepsilon - \sin\delta \sin\alpha \\ d &= \sin\alpha \sec\delta & d' &= \sin\delta \cos\alpha \end{aligned}$$

Damit werden die Gleichungen (11)

$$(15) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + Cc + Dd \\ \delta' &= \delta + Cc' + Dd' \end{aligned}$$

Die Werte von C und D kann man ebenfalls den Jahrbüchern entnehmen.

61. Tägliche Aberration. Außer der im vorigen betrachteten jährlichen Aberration gibt es noch eine durch die Drehung der Erde verursachte tägliche Aberration. Nimmt man den Äquatorealradius der Erde zu 6378 km an und berücksichtigt, daß die Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse 86 164 mittlere Sekunden beträgt, so ergibt sich für die lineare Geschwindigkeit eines Äquatorpunktes, bezogen auf die mittlere Sekunde, 0.465 km. Demnach erhält man für die lineare Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche, dessen Abstand vom Mittelpunkte der Erde, aus-

gedrückt in Teilen des Äquatorealradius, gleich ϱ und dessen geozentrische Breite gleich φ' ist,

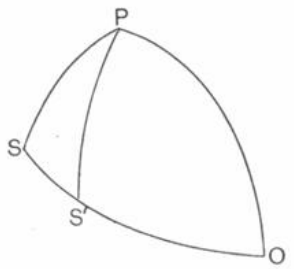
$$v = [0.465\,\varrho \cos\varphi']\,\text{km} \tag{16}$$

Substituiert man diesen Wert in die Gleichung (1) und setzt $V = 299860$ km, so folgt, wenn noch φ' mit der geographischen Breite φ vertauscht wird,

$$s = 0''.32\,\varrho \sin\Theta \cos\varphi \tag{16a}$$

Da die von der Drehung der Erde herrührende Bewegung eines Beobachtungsortes zum Ostpunkte des Horizonts hin gerichtet ist, so hat man jetzt unter Θ den Winkel zwischen der Richtung zum Ostpunkte des Horizonts und der Richtung zum scheinbaren Ort eines Sterns hin zu verstehen.

Fig. 5.



In Fig. 5 möge nun P den Pol des Äquators, O den Ostpunkt des Horizonts eines Beobachtungsortes, S' den infolge der täglichen Aberration verschobenen und S den von dieser Aberration befreiten Sternort darstellen; es ist demnach $SS' = s$, $S'O = \Theta$, $PO = 90°$. Ferner werde der Winkel $PS'O = p$ und $S'PO = 90° + t$ gesetzt, so daß also t den Stundenwinkel von S' bedeutet. Bezeichnet man dann die Rektaszension und Deklination von S und S' mit α, δ, bzw. α', δ', so ergibt sich aus dem Dreieck PSS' und mit Berücksichtigung der Gleichung (16a)

$$\begin{aligned}(\alpha' - \alpha)\cos\delta &= s \sin p = 0''.32\,\varrho \cos\varphi \sin\Theta \sin p\\ \delta' - \delta &= s \cos p = 0''.32\,\varrho \cos\varphi \sin\Theta \cos p\end{aligned}$$

Substituiert man hier für $\sin\Theta \sin p$ und $\sin\Theta \cos p$ ihre aus dem Dreieck $S'PO$ folgenden Ausdrücke, so erhält man

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= 0^s.021\,\varrho \cos\varphi \cos t \sec\delta\\ \delta' - \delta &= 0''.32\,\varrho \cos\varphi \sin t \sin\delta\end{aligned} \tag{17}$$

Für den Meridian wird $\delta' - \delta = 0$ und $\alpha' - \alpha = \pm 0^s.021\,\varrho \cos\varphi \sec\delta$, wobei das obere Vorzeichen für die obere Kulmination und das untere für die untere Kulmination gilt.

62. Säkulare Aberration. Das Sonnensystem bewegt sich bekanntlich im Raume fort; es wird damit Anlaß zu einer Aberration gegeben, welche man als säkulare bezeichnet. Über die Natur der Bewegung des Sonnensystems ist uns gegenwärtig nichts weiteres bekannt, als daß die Beobachtungen für die Annahme einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung sprechen, deren Geschwindigkeit sehr klein gegenüber der Geschwindigkeit des Lichtes ist. Um die dieser Annahme entsprechende Verschiebung eines Sterns an der Sphäre zu erhalten, hat man nur die in § 58 angestellten Betrachtungen zu wiederholen und dabei E in Fig. 1 als den Schwerpunkt des Sonnensystems und EA als die Richtung der Bewegung des Schwer-

punktes aufzufassen. Für die Verschiebung ergibt sich dann der in (1) angegebene Ausdruck

$$s = \frac{v}{V \sin 1''} \sin \Theta, \tag{A}$$

wo jetzt unter v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Sonnensystems und unter Θ der Winkelabstand des scheinbaren Ortes des Sterns von dem Zielpunkte der Bewegung des genannten Schwerpunktes zu verstehen ist. Da dieser Zielpunkt als konstant vorausgesetzt wird, so folgt, wenn man vorläufig von der Eigenbewegung des Sterns absieht, daß auch Θ konstant ist. Da dasselbe von v angenommen wurde, so gibt die vorige Gleichung einen konstanten Wert für s. Um s berechnen zu können, muß man die Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung des Sonnensystems kennen; beides ist aber nur sehr unvollkommen der Fall. Substituiert man in (A) den gegenwärtig angenommenen, für die mittlere Sekunde gültigen Wert $v = 18$ km und setzt $V = 299860$ km, so findet man, daß die durch die Bewegung des Sonnensystems hervorgerufene Verschiebung eines Fixsterns im Maximum $12''$ beträgt. Die Beobachtungen der dem Sonnensystem angehörigen Körper werden durch die säkulare Aberration selbstverständlich nicht beeinflußt.

Durch Differentiation der Gleichung (A) ergibt sich

$$ds = \frac{v}{V \sin 1''} \cos \Theta \, d\Theta$$

Setzt man hierin, entsprechend dem gegenwärtig bekannten größten Betrag der hundertjährigen Eigenbewegung eines Fixsterns, $d\Theta = 870'' \sin 1''$ und substituiert für v und V ihre vorhin angegebenen Werte, so folgt, daß ds, für $\Theta = 0$, den Wert $0''.05$ erhält. Dies ist nun das Maximum der in 100 Jahren durch die Eigenbewegung bewirkten Änderung von s und somit läßt sich der Satz aufstellen: Sieht man von den Sternen mit abnorm großer Eigenbewegung ab, so hat die durch die Bewegung des Sonnensystems bewirkte (säkulare) Aberration zur Folge, daß der Ort eines Fixsterns an der Sphäre um eine konstante Größe verschoben erscheint.

63. Planetenaberration. Mittels der bisher abgeleiteten Formeln läßt sich aus der beobachteten Richtung eines Lichtstrahls seine wahre Richtung berechnen. Diese in Fig. 1 mit ES bezeichnete Richtung verbindet den der Beobachtungszeit entsprechenden Ort der Erde mit dem Orte, welchen der Stern einnahm, als der Strahl ES ausgesandt wurde. Innerhalb der Zeit t, welche das Licht gebraucht, um von dem Stern bis zur Erde zu gelangen, bewegt sich aber der Stern; wenn man also die Richtung erhalten will, in der sich der Stern zur Zeit der Beobachtung wirklich befindet, so muß man zu den die Richtung ES bestimmenden Koordinaten noch die Änderungen hinzufügen, welche die Koordinaten infolge der Bewegung des Sterns innerhalb des Zeitintervalls t erleiden. Für den Stern Cordoba, Zone $5^h 213$ beispielsweise, dessen Koordinaten, bezogen auf das mittlere Äquinox 1900, $\alpha = 5^h 7^m.7$, $\delta = -44^\circ 59'$ sind, hat sich für die jährliche Parallaxe der Wert $0''.31$ ergeben; das Licht hat somit 11 Jahre nötig, um die Erde zu erreichen. Da sich nun der genannte Stern in einem Jahre um $8''.7$ (im Bogen größten Kreises gemessen) bewegt,

so bewegt er sich in 11 Jahren um 1″.6. Die Richtung, in der sich der Stern zur Zeit der Beobachtung (t) wirklich befindet, ist also um 1″.6 von derjenigen verschieden, in der sich der Stern (gesehen von dem Orte der Erde zur Zeit t) befunden hat, als das unser Auge treffende Licht von ihm ausgegangen ist; letztere Richtung erhält man — wie schon bemerkt —, indem man den beobachteten Ort mittels der in den vorigen Paragraphen gegebenen Formeln von der Aberration befreit.

Für einen dem Sonnensystem angehörigen Körper läßt sich die Richtung, in der sich der Körper zu einer gegebenen Zeit wirklich befindet, in einfacherer Weise bestimmen. Dies beruht darauf, daß die Bewegung der Erde während der Zeit, welche das Licht nötig hat, um von irgend einem Körper des Sonnensystems bis zur Erde zu gelangen, als geradlinig und gleichförmig betrachtet werden darf. Es sei $t - \mathrm{t}$ die Zeit, zu der ein Lichtstrahl, welcher die Erde zur Zeit t trifft, von einem Planeten ausgegangen ist, und es sei Σ (Fig. 1) der Ort des Planeten zur Zeit $t - \mathrm{t}$; nimmt man dann an, daß während des Zeitintervalls t, in dem das Licht die Strecke ΣE zurücklegt, die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Strecke eE durchläuft, so folgt aus § 58, daß die zu $e\Sigma$ parallele Richtung $E\Sigma'$ diejenige Richtung angibt, in der sich der Planet zur Zeit t scheinbar befindet. Da aber $e\Sigma$ die Verbindungslinie der Orte der Erde und des Planeten zur Zeit $t - \mathrm{t}$ ist, so ergibt sich der Satz (I): Die scheinbare oder zur Zeit t beobachtete Richtung ($E\Sigma'$) ist parallel zu der Richtung, in der sich der Planet zur Zeit $t - \mathrm{t}$, gesehen von dem dieser selben Zeit entsprechenden Ort der Erde aus, wirklich befindet. Hieraus folgt unmittelbar der Satz (II): Die Richtung, in der sich der Planet zur Zeit der Beobachtung (t) wirklich befindet, ist gleich der scheinbaren Richtung zur Zeit $t + \mathrm{t}$. Um also die erstere Richtung zu erhalten, hat man nur mit Hilfe der Ephemeride des Planeten die dem Zeitintervall t entsprechende Änderung der Rektaszension und Deklination zu berechnen und diese zu der beobachteten Rektaszension und Deklination hinzuzulegen. Den Unterschied nun zwischen der Richtung, in der ein Planet oder irgend ein anderer dem Sonnensystem angehöriger Körper zu einer gegebenen Zeit t sich wirklich befindet, und derjenigen Richtung, in der er zur Zeit t beobachtet wurde, bezeichnet man als Planetenaberration.

Der Wert von t läßt sich berechnen, wenn die Bahn und demnach auch die Distanz des Planeten von der Erde bekannt ist. Bezeichnet man diese Distanz, ausgedrückt in Einheiten der halben großen Achse a der Erdbahn, mit Δ, und bedeutet μ die Zeit, welche das Licht gebraucht, um die halbe große Achse der Erdbahn zu durchlaufen, so wird $\mathrm{t} = \mu\Delta$. Die hier mit μ bezeichnete Zeit ist gleich $a : V$, wo V die Geschwindigkeit des Lichtes angibt; substituiert man für $a : V$ seinen aus (7) folgenden Wert, so erhält man

$$\mu = \frac{k \sin 1'' \cos\varphi}{n},$$

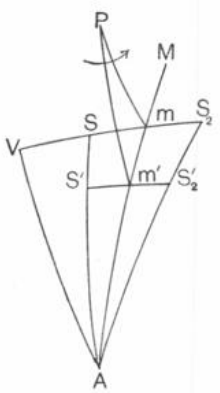
wo n die in Teilen des Radius auszudrückende mittlere Bewegung der Erde während einer mittleren Zeitsekunde bedeutet. Unter Anwendung der Werte $n = 0''.04107 \sin 1''$, $k = 20''.47$ und $\varphi = 3455''$ folgt aus der letzten Gleichung $\mu = 498^{s}.4$. Der vorhin gefundene Satz (I) läßt sich jetzt in folgender Form ausdrücken: Wenn zur Zeit t

ein Planet oder irgend ein anderer dem Sonnensystem angehöriger Himmelskörper beobachtet wurde, dessen Distanz von der Erde gleich Δ ist, und wenn dann von der Beobachtungszeit das Intervall $t = 498^s.4\,\Delta$ subtrahiert wird, so gibt die beobachtete Richtung zugleich die Richtung an, in der sich der Himmelskörper zur Zeit $t - t$, von dem dieser Zeit entsprechenden Orte der Erde aus gesehen, wirklich befunden hat.

Mitunter muß aus einer Ephemeride, welche die der Zeit t entsprechenden wahren Örter eines dem Sonnensystem angehörigen Körpers enthält, eine andere abgeleitet werden, welche die der Zeit t entsprechenden scheinbaren Örter angibt. Dem vorhin Gesagten zufolge ist nun der scheinbare Ort eines der genannten Körper zur Zeit t gleich dem wahren Ort zur Zeit $t - 498^s.4\,\Delta$. Bezeichnet man also mit $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die Änderungen, welche die Rektaszension und Deklination des Himmelskörpers in einer mittleren Zeitsekunde erfahren, so erhält man die scheinbare Rektaszension und Deklination zur Zeit t, indem man zu den für diese Zeit gültigen wahren Koordinaten $-[498.4\,\Delta]\frac{d\alpha}{dt}$, bzw. $-[498.4\,\Delta]\frac{d\delta}{dt}$ hinzufügt.

64. Einfluß der jährlichen Aberration auf den Positionswinkel und die Distanz. In Fig. 6 seien S' und S_2' die scheinbaren, und S und S_2 die wahren Örter zweier Sterne; entsprechend den größten direkt meßbaren Distanzen werde der Abstand der beiden Sterne voneinander kleiner als 2° vorausgesetzt. Ferner sei m der Mittelpunkt des Bogens SS_2, P sei der Pol des Äquators und A der Punkt, in dem die Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne die Sphäre schneidet. Den Gleichungen (1), (4) und (7) zufolge hat man, wenn die Exzentrizität der Erdbahn vernachlässigt wird, $SS' = k \sin AS'$, $S_2S_2' = k \sin AS_2'$ oder, hinreichend genau, $SS' = k \sin AS$, $S_2S_2' = k \sin AS_2$; setzt man nun $SS_2 < 2^\circ$ voraus und berücksichtigt, daß k nur $20''$ beträgt, so folgt, daß SS' und S_2S_2' sich an Größe nur wenig voneinander unterscheiden. Bezeichnet man also die von Pm, bzw. Pm' aus, in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen gezählten Positionswinkel PmS_2 und $Pm'S_2'$ mit p, bzw. p' und setzt die in derselben Richtung wie p und p' gezählten Winkel $PmM = x$, $Pm'M = x'$, so ist sehr nahe $x - x' = p - p'$.

Fig. 6.



Es werde jetzt die Deklination von m mit δ und die Deklination von m' mit $\delta' = \delta - \Delta\delta$ bezeichnet, ferner bezeichne man den Winkel mPm' mit τ; mit Benutzung der Gleichung $x - x' = p - p'$ folgt dann aus dem Dreieck Pmm'

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p - p') = \frac{\sin(\delta - \frac{1}{2}\Delta\delta)}{\cos \frac{1}{2}\Delta\delta} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\tau$$

oder einfach

$$p - p' = \tau \sin \delta \tag{18}$$

Das Dreieck Pmm' gibt ferner, wenn die Seite $mm' = s$ gesetzt wird,

$$\tau = s \frac{\sin x}{\cos \delta'}$$

Nun kann m' als der scheinbare Ort eines Sterns bezeichnet werden, dessen wahrer Ort m ist; demnach hat man $s = k \sin Am'$ oder, mit ausreichender Genauigkeit, $s = k \sin Am$. Bezeichnet man jetzt Am mit ϑ, so wird $s = k \sin \vartheta$ und somit

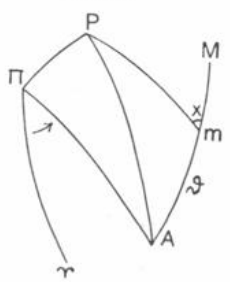
$$\tau = k \frac{\sin \vartheta \sin x}{\cos \delta'}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung (18) und setzt $\cos \delta' = \cos \delta$, so erhält man

$$p - p' = k \operatorname{tang} \delta \sin \vartheta \sin x \tag{19}$$

In Fig. 7 mögen nun P, A und m dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 6, ferner sei Π der Pol der Ekliptik und γ der Frühlings-Tagundnachtgleichepunkt; wird dann die Rektaszension und Deklination von A mit Φ, bzw. d, und die Rektaszension und Deklination von m mit α, bzw. δ bezeichnet, so folgt aus dem Dreieck PmA, worin der Winkel bei m gleich $180^\circ - x$ und $Am = \vartheta$ ist,

Fig. 7.



$$\sin \vartheta \sin x = \cos d \sin (\alpha - \Phi) \tag{20}$$

Bezeichnet man die Länge der Sonne mit $\odot$, so ist die Länge der Erde gleich $180^\circ + \odot$ und die Länge des Punktes A — vorausgesetzt, daß die Exzentrizität der Erdbahn vernachlässigt wird — gleich $270^\circ + \odot$; in dem Dreieck ΠPA ist demnach der Winkel bei Π gleich $180^\circ - \odot$. Ferner ist der Winkel $\Pi PA = 90^\circ + \Phi$ und die Seite $\Pi A = 90^\circ$. Wenn also noch $\Pi P = \varepsilon$ gesetzt wird, wo ε die Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung bedeutet, so ergibt sich

$$\cos d \sin \Phi = - \cos \varepsilon \cos \odot, \qquad \cos d \cos \Phi = \sin \odot$$

Folglich wird die Gleichung (20)

$$\sin \vartheta \sin x = \sin \alpha \sin \odot + \cos \varepsilon \cos \alpha \cos \odot$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung (19) und setzt dann

$$\begin{aligned} u \sin U &= k \operatorname{tang} \delta \sin \alpha \\ u \cos U &= k \operatorname{tang} \delta \cos \alpha \cos \varepsilon, \end{aligned} \tag{21}$$

so erhält man

$$p = p' + u \cos (\odot - U) \tag{22}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich aus dem beobachteten Positionswinkel p' der von der Aberration befreite ableiten.

Um eine analoge Gleichung für die Distanz zu erhalten, projiziere man die gebrochene Linie $SS'S_2'S_2$ (Fig. 6) auf SS_2; mit Rücksicht darauf, daß der Kosinus des Winkels zwischen $SS_2 = \Delta$ und $S'S_2' = \Delta'$ gleich 1 gesetzt werden darf, folgt dann

$$\Delta = \Delta' + S_2 S_2' \cos A S_2 V - SS' \cos ASV$$

oder, wenn die oben gefundenen Ausdrücke $S_2S_2' = k \sin AS_2$, $SS' = k \sin AS$ eingeführt werden,

$$\Delta = \Delta' + k\,(\sin AS_2 \cos AS_2V - \sin AS \cos ASV)$$

Zieht man nun in Fig. 6 den Bogen AV senkrecht zu SS_2, so ergibt sich

$$\sin AS_2 \cos AS_2V = \cos AV \sin VS_2$$
$$\sin AS \cos ASV = \cos AV \sin VS$$

Werden diese Gleichungen voneinander subtrahiert und berücksichtigt man, daß der in Fig. 6 mit m bezeichnete Punkt den Mittelpunkt von $SS_2 = \Delta$ darstellt, so folgt

$$\sin AS_2 \cos AS_2V - \sin AS \cos ASV = 2 \cos AV \cos mV \sin \tfrac{1}{2}\Delta = 2 \cos Am \sin \tfrac{1}{2}\Delta$$

Das Dreieck ΠAm (Fig. 7) gibt aber, wenn λ die Länge und β die Breite des Punktes m bedeutet,

$$\cos Am = \cos\beta \sin(\odot - \lambda)$$

Demnach wird

$$\Delta = \Delta' + 2k \sin \tfrac{1}{2}\Delta \cos\beta \sin(\odot - \lambda) \tag{23}$$

Kapitel XI.

Reduktion auf den scheinbaren Ort.

65. Man bezeichne mit α und δ die Rektaszension und Deklination eines Sterns, bezogen auf das mittlere Äquinox und die Epoche des Anfangs eines bestimmten tropischen Jahres, ferner sei t die von diesem Jahresanfang bis zu einem gegebenen Moment des Jahres verflossene, in Teilen eines Jahres ausgedrückte Zeit; wenn dann mit α' und δ' die diesem Moment entsprechende scheinbare Rektaszension und Deklination des Sterns bezeichnet wird, und μ und μ' die jährliche Eigenbewegung des Sterns in Rektaszension und Deklination bedeuten, so hat man den §§ 49 und 60 zufolge

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= f + g \sin(G + \alpha) \tan\delta + h \sin(H + \alpha) \sec\delta + \mu t \\ &\quad + f' + g' \sin(G' + \alpha) \tan\delta + \text{jährliche Parallaxe} + \text{tägliche Aberration} \\ \delta' - \delta &= g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta + \mu' t \\ &\quad + g' \cos(G' + \alpha) + \text{jährliche Parallaxe} + \text{tägliche Aberration} \end{aligned} \tag{1}$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + E + \mu t \\ &\quad + A'a + B'b + \text{jährl. Par.} + \text{tägl. Aberr.} \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \mu' t \\ &\quad + A'a' + B'b' + \text{jährl. Par.} + \text{tägl. Aberr.} \end{aligned} \tag{2}$$

Das Berliner astronomische Jahrbuch gibt für jeden Tag des Jahres die Werte der Größen f, g, G, h, H, i, t oder ihrer Logarithmen, gültig für 12^h m. Zt. Berlin. Mit Hilfe dieser Angaben kann man durch eine leichte Interpolation die irgend einer Berliner Zeit entsprechenden Werte von f, g, ..., t finden und sodann die von letzteren abhängigen Glieder in (1) berechnen. Die von der jährlichen Parallaxe und der täglichen Aberration abhängigen Glieder bleiben gewöhnlich unberücksichtigt. Dasselbe gilt auch von den von g' und G' abhängigen Gliedern, ausgenommen, wenn es sich um polnahe Sterne handelt. Nach einer seitens der Pariser Konferenz vom Jahre 1896 getroffenen Vereinbarung wird das Glied f' bei allen Sternen vernachlässigt.

Die Werte der Koeffizienten A, B, C, D, E, t werden im Berliner Jahrbuch für den Beginn des tropischen Jahres und für die von dem Jahresanfang um 24, 48, ... Sternzeitstunden entfernten Momente angegeben. Der Anfang des tropischen Jahres, d. h. der für die ganze Erde gleiche Augenblick, in dem die scheinbare mittlere Länge der Sonne, bezogen auf das gleichzeitige mittlere Äquinox, gleich $280^\circ = 18^h 40^m$ ist, fällt in einem Gemeinjahre auf den mittleren Mittag Jan. 0 und in einem Schaltjahre auf den mittleren Mittag Jan. 1 des Normalmeridians (§ 38). Von diesem Moment ausgehend, wird in den älteren Jahrgängen des Berliner Jahrbuchs nach Ablauf von je 24 Sternzeitstunden das Datum um einen Tag geändert; das Datum ist also nicht das mittlere, sondern, wie man sich ausdrücken kann, das siderische Datum des Normalmeridians. So gelten beispielsweise in einem Gemeinjahre die unter Jan. 2, 3, ... mitgeteilten Werte von A, B, ..., E, t für einen Augenblick, der um 48, 72, ... Sternzeitstunden vom mittleren Mittage Jan. 0 des Normalmeridians entfernt liegt, in einem Schaltjahre dagegen für einen Augenblick, dessen Abstand vom mittleren Mittage Jan. 1 des Normalmeridians gleich 24, 48, ... Sternzeitstunden ist. Da die Werte der Koeffizienten A, B, ..., E, t in Intervallen von je 24 Sternzeitstunden gegeben werden, so beziehen sie sich alle auf eine und dieselbe Sternzeit und zwar ist das diejenige, welche dem mittleren Mittage Jan. 0, bzw. Jan. 1 des Normalmeridians entspricht. Nun ist die Sternzeit im mittleren Mittag eines Ortes gleich der diesem Moment entsprechenden scheinbaren mittleren Länge der Sonne, bezogen auf das gleichzeitige mittlere Äquinox*); die Sternzeit im mittleren Mittage Jan. 0, bzw. Jan. 1 des Normalmeridians ist also gleich $18^h 40^m$.

Die von A' und B' abhängigen Glieder werden meistens vernachlässigt; dasselbe geschieht, wie schon oben bemerkt wurde, mit der jährlichen Parallaxe und der täglichen Aberration. Sieht man also von diesen Gliedern ab und substituiert nun die im Berliner Jahrbuch von Tag zu Tag (oder von 10 zu 10 Tagen) gegebenen Werte von A, B, ..., E, t und die einem bestimmten Stern entsprechenden Konstanten a, b, ..., d', μ' in die Gleichungen (2), so stellen die für $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ erhaltenen Werte die für die Sternzeit $18^h 40^m$ des Normalmeridians gültige Reduktion auf den scheinbaren Ort dar. Es werde jetzt angenommen, daß man für einen Stern

*) Nach § 36 ist die Sternzeit im mittleren Mittage, streng genommen, gleich der durch die Gleichung (136) des § 35 definierten Rektaszension ($\mathfrak{A}$) der mittleren Sonne zur Zeit des mittleren Mittags; der Unterschied zwischen dem Wert von $\mathfrak{A}$ und der aus § 35, (132) sich ergebenden scheinbaren mittleren Länge der Sonne ist aber für das Folgende ohne Belang.

von der Rektaszension $18^h 50^m$ die für die siderischen Daten 1868 Jan. 1, 2, 3, ... und die Sternzeit $18^h 40^m$ des Normalmeridians gültige Reduktion auf den scheinbaren Ort berechnet habe, und daß man nun die Reduktion auf den scheinbaren Ort für die Zeit einer am 2. und einer anderen am 4. Jan. 1868 in Berlin beobachteten oberen Kulmination des Sterns ableiten wolle; dabei soll unter Jan. 2 und Jan. 4 das mittlere Berliner Datum verstanden werden. Um die gestellte Aufgabe zu lösen, untersuche man zunächst, welche Daten den beiden Berliner Beobachtungen entsprechen, wenn man — in analoger Weise, wie dies für den Normalmeridian geschehen ist — von dem mittleren Berliner Mittage Jan. 1 (1868 ist Schaltjahr!) ausgehend, nach je 24 Sternzeitstunden das Datum um einen Tag ändert. Zu diesem Zwecke muß man die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage kennen. Nun hat man nach dem Berliner Jahrbuch:

1868

Mittl. Datum	Sternzeit im mittl. Mittag Berlin	Mittl. Datum	Sternzeit im mittl. Mittag Berlin	Mittl. Datum	Sternzeit im mittl. Mittag Berlin
Jan. 1	$18^h 41^m 34^s$	Jan. 3	$18^h 49^m 27^s$	Jan. 5	$18^h 57^m 20^s$
2	45 31	4	53 24	6	19 1 17

Der Stern von der Rektaszension $18^h 50^m$ kulminiert also am 1. und 2. Januar kurz nach Mittag; am 3. Januar (mittleres Datum) finden aber zwei obere Kulminationen statt: die erste ebenfalls kurz nach Mittag, die zweite gegen Ende des Tages. Am 4. Jan. kulminiert der Stern wiederum nur einmal und ebenso an allen übrigen Tagen des Jahres. Betrachtet man jetzt Jan. 1, 0^h mittl. Zeit $= 18^h 41^m 34^s$ Sternzeit Berlin als den Anfang des siderischen Datums Jan. 1 und ändert man nach Verlauf von 24 Sternzeitstunden das Datum um einen Tag *), so ergibt sich, daß das siderische Datum für die Zeit der am 1. und 2. Jan. stattfindenden oberen Kulmination dem mittleren Datum gleich ist; diese Gleichheit besteht auch noch für die erste Kulmination am 3. Jan., aber bei der zweiten oberen Kulmination ist das siderische Datum bereits Jan. 4. Der oberen Kulmination am 4. Jan. (mittleres Datum)

*)

Mittl. Datum	Sternzeit	Sider. Datum
Jan. 1	$18^h 41^m 34^s$	Jan. 1
»	50	»
»	18 41 34	2
2	45 31	»
»	50	»
»	18 41 34	3
3	49 27	»
»	50	»
»	18 41 34	4
»	50	»
4	53 24	»
»	18 41 34	5
»	50	»
5	57 20	»
»	18 41 34	6

entspricht das siderische Datum Jan. 5., der oberen Kulmination am 5. Jan. (mittleres Datum) entspricht das siderische Datum Jan. 6, usw. Das siderische Datum ist also vom Anfange des Jahres bis zur ersten oberen Kulmination an dem mittleren Tage, auf den zwei obere Kulminationen des Sterns fallen, dem mittleren Datum gleich; für die zweite an diesem Tage stattfindende obere Kulmination und für alle folgenden ist das siderische Datum dem mittleren um einen Tag voraus.

In dem vorliegenden Falle ist die Reduktion auf den scheinbaren Ort für die folgenden, durch das siderische Datum und die Sternzeit Berlin bestimmten Momente zu suchen: 1. 1868 Jan. 2, $18^h 50^m$; 2. Jan. 5, $18^h 50^m$. Man denke sich nun zunächst, daß die Reduktion nicht für $18^h 50^m$, sondern für $18^h 40^m$ Sternzeit Berlin gesucht würde. Da Berlin im Jahre 1868 um $0^d.397$ westlich vom Normalmeridian liegt, so entspricht der Berliner Sternzeit $18^h 40^m$ die Sternzeit $18^h 40^m + 0^d.397$ des Normalmeridians; folglich wären die Argumente, mit denen man in die für das siderische Datum und die Sternzeit $18^h 40^m$ des Normalmeridians berechnete Ephemeride der Reduktion auf den scheinbaren Ort einzugehen hätte, 1. Jan. 2.397, 2. Jan. 5.397. Fügt man zu diesen Argumenten noch $\frac{18^h 50^m - 18^h 40^m}{24^h}$ hinzu (wobei die im Zähler stehende Differenz in Teilen einer Stunde ausgedrückt zu denken ist), so erhält man die für die Berliner Sternzeit $18^h 50^m$ gültigen Argumentwerte; letztere sind also 1. Jan. $2 + 0^d.397 + \frac{18^h 50^m - 18^h 40^m}{24^h}$; 2. Jan. $5 + 0^d.397 + \frac{18^h 50^m - 18^h 40^m}{24^h} =$

$=$ Jan. $4 + 1$ Tag $+ 0^d.397 + \frac{18^h 50^m - 18^h 40^m}{24^h}$.

Um ein zweites Beispiel zu geben, nehme man einen Stern an, dessen Rektaszension, bezogen auf das mittlere Äquinox 1861.0, gleich $1^h 40^m$ sei, und stelle sich nun zur Aufgabe, die Reduktion auf den scheinbaren Ort für die mittleren Daten 1861 April 15, bzw. 17 und die Zeit der oberen Kulmination des Sterns in Berlin zu ermitteln. Für die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage hat man jetzt:

1861

Mittl. Datum	Sternzeit im mittl. Mittag Berlin	Mittl. Datum	Sternzeit im mittl. Mittag Berlin
Jan. 0	$18^h 40^m 23^s$	April 15	$1^h 34^m 21^s$
1	18 44 20	16	1 38 18
2	18 48 16	17	1 42 14
3	18 52 13	18	1 46 11
. . . . .		. . . . .	

Der Stern kulminiert hiernach am 0. Januar um $24^h + 1^h 40^m - 18^h 40^m = 7$ Sternzeitstunden nach dem mittleren Mittage und das siderische Datum zur Zeit der Kulmination ist dasselbe wie das mittlere, also gleich Jan. 0. Am 1. Januar (mittleres Datum) kulminiert der Stern um 6 Stunden 56 Minuten, am 2. Januar um 6 Stunden 52 Minuten nach dem mittleren Berliner Mittag; die Zeit der Kulmination nähert sich also mehr und mehr dem mittleren Mittage, und das siderische Datum

bleibt vorläufig dem mittleren gleich. Am 16. April (mittleres Datum) kulminiert der Stern zweimal; bei der ersten, kurz nach Mittag erfolgenden oberen Kulmination stimmt das siderische Datum noch mit dem mittleren überein, aber von der zweiten Kulmination angefangen, ist das siderische Datum um 1 Tag dem mittleren voraus. Die siderischen Daten und die Sternzeit Berlin, für welche die Reduktion auf den scheinbaren Ort zu suchen ist, sind also 1. 1861, April 15, 1^h40^m; 2. April 18, 1^h40^m. Im Jahre 1861 liegt Berlin $0^d.095$ westlich vom Normalmeridian. Wäre also die Berliner Sternzeit, für welche die Reduktion auf den scheinbaren Ort gesucht werden müßte, gleich 18^h40^m, so würde dieser Sternzeit die Sternzeit $18^h40^m + 0^d.095$ des Normalmeridians entsprechen, und man erhielte als Argumente, mit denen man in die für den Normalmeridian berechnete Ephemeride der Reduktion auf den scheinbaren Ort einzugehen hätte, 1. April 15.095, 2. April 18.095. Da aber die Reduktion für die Sternzeit 1^h40^m gesucht wird, so sind die eben angegebenen Argumentwerte noch um $\frac{(24^h + 1^h40^m) - 18^h40^m}{24^h}$ zu vergrößern; die Argumente sind also

1. April $15 + 0^d.095 + \frac{(24^h + 1^h40^m) - 18^h40^m}{24^h}$, 2. April $18 + 0^d.095 +$

$+ \frac{(24^h + 1^h40^m) - 18^h40^m}{24^h} =$ April $17 + 1$ Tag $+ 0^d.095 + \frac{(24^h + 1^h40^m) - 18^h40^m}{24^h}$

Auf Grund der erläuterten Beispiele läßt sich folgende Regel aufstellen: Will man die Reduktion auf den scheinbaren Ort zur Zeit der oberen Kulmination eines Sterns in Berlin finden, so substituiert man zunächst die im Berliner Jahrbuch von Tag zu Tag (bzw. von 10 zu 10 Tagen) mitgeteilten Werte der Koeffizienten A, B, ..., E, t und die dem Stern zugehörigen Konstanten a, b, ..., d', μ' in die Formeln (2) und erhält damit die für die siderischen Daten und die Sternzeit 18^h40^m des Normalmeridians gültigen Werte der Reduktion auf den scheinbaren Ort. Zwischen diesen Werten ist nun zu interpolieren. Um das hierzu nötige Argument bilden zu können, hat man zuerst zu bestimmen, an welchem mittleren Tage des Jahres in Berlin zwei obere Kulminationen des Sterns stattfinden; dies geschieht mit Hilfe der im Berliner Jahrbuch für jeden Tag angegebenen Sternzeit im mittleren Mittag. Ein Stern, dessen Rektaszension gleich α ist, kulminiert an einem Tage zweimal in Berlin, wenn die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage an diesem Tage kleiner, am folgenden aber größer als α ist. Bedeutet jetzt k' die in Einheiten eines Tages ausgedrückte Länge Berlins gegen den Normalmeridian (westlich von letzterem positiv gerechnet), so ist das Argument für die Zeit vom mittleren Berliner Mittage Jan. 0 (in einem Gemein-), bzw. Jan. 1 (in einem Schaltjahre) bis zur ersten oberen Kulmination an dem Tage, auf den in Berlin zwei obere Kulminationen fallen,

$$\text{(a)} \qquad \text{Argument} = \text{Mittleres Datum} + k' + \frac{\left.\begin{matrix} 24^h + \alpha \\ \alpha \end{matrix}\right\} - 18^h40^m}{24^h};$$

dagegen hat man für die zweite obere Kulmination an dem Tage, auf den in Berlin zwei obere Kulminationen fallen, und für alle folgenden bis zum Schlusse des Jahres

$$\text{(b)} \qquad \text{Argument} = \text{Mittleres Datum} + 1 \text{ Tag} + k' + \frac{\left.\begin{matrix} 24^h + \alpha \\ \alpha \end{matrix}\right\} - 18^h40^m}{24^h}$$

In beiden Fällen ist in dem Zähler des auf der rechten Seite stehenden Bruches $24^h + \alpha$ oder α anzuwenden, jenachdem α zwischen 0^h und $18^h 40^m$ oder zwischen $18^h 40^m$ und 24^h liegt; für $\alpha = 18^h 40^m$ ist der Zähler gleich 0 zu setzen. Den Zähler hat man sich in Einheiten einer Stunde ausgedrückt zu denken.

Sucht man die Reduktion auf den scheinbaren Ort für das mittlere Datum und die Zeit der oberen Kulmination eines Sterns an einem von Berlin verschiedenen Orte, so muß zunächst die Sternzeit im mittleren Mittage des Ortes bestimmt werden. Zu diesem Zwecke addiere man zu der für den Berliner mittleren Mittag gültigen Sternzeit das Produkt $3^m 56^s.555 \times d$, wo d die in Teilen eines Tages ausgedrückte, westlich von Berlin positiv gezählte Länge des Ortes gegen Berlin bedeutet (§ 36). Nachdem so für den betreffenden Ort die Sternzeit im mittleren Mittage gefunden ist, läßt sich das mittlere Datum bestimmen, an dem ein gegebener Stern den Meridian des Ortes zweimal in oberer Kulmination passiert. Das Argument, mit dem man dann in die für den Normalmeridian berechnete Ephemeride der Reduktion auf den scheinbaren Ort einzugehen hat, ergibt sich, indem man in den für Berlin gültigen Formeln (a) und (b) statt der auf den Normalmeridian bezogenen Länge k' von Berlin die auf den Normalmeridian bezogene Länge $k' + d$ des Ortes substituiert. Für die Zeit vom mittleren Mittage Jan. 0 (Gemeinjahr), bzw. Jan. 1 (Schaltjahr) des Ortes bis zur ersten oberen Kulmination an dem Tage, auf den für den Ort zwei obere Kulminationen des Sterns fallen, ist also das

$$\text{(c)} \qquad \text{Argument} = \text{Mittleres Datum} + \frac{\left.\begin{matrix} 24^h + \alpha \\ \alpha \end{matrix}\right\} - 18^h 40^m}{24^h} + k' + d;$$

dagegen hat man, angefangen von der zweiten oberen Kulmination an dem Tage, auf den für den Ort zwei obere Kulminationen des Sterns fallen, bis zum Schlusse des Jahres

$$\text{(d)} \qquad \text{Argument} = \text{Mittleres Datum} + 1\ \text{Tag} + \frac{\left.\begin{matrix} 24^h + \alpha \\ \alpha \end{matrix}\right\} - 18^h 40^m}{24^h} + k' + d$$

In den Ausdrücken (c) und (d) muß $24^h + \alpha$ angewandt werden, wenn α zwischen 0^h und $18^h 40^m$ liegt; dagegen ist α zu wählen, wenn $\alpha \geqq 18^h 40^m$ ist.

In den neueren Jahrgängen des Berliner Jahrbuchs wird jedesmal das mittlere Berliner Datum und die in Dezimalteilen des Tages ausgedrückte mittlere Berliner Zeit angegeben, für welche die Werte der Koeffizienten A, B, ..., E, t, bzw. ihre Logarithmen gelten. Beispielsweise hat man nach dem Berliner Jahrbuch für 1901

M. Zt. Berlin	$\log A$	$\log B$	$\log C$	$\log D$	E
Februar 6.492	9.6263	0.6749	1.1413	1.1408	+ 0.04
7.489	9.6267	0.6737	1.1482	1.1323	+ 0.04
. . . . .					

Sucht man nun die Reduktion auf den scheinbaren Ort für einen durch das mittlere Datum und die Sternzeit eines beliebigen Ortes der Erde gegebenen Zeitpunkt, so verwandle man die Sternzeit des Ortes zunächst in mittlere Ortszeit und bestimme mit Hilfe der Längendifferenz des Ortes gegen Berlin das dem mittleren Ortsdatum

und der mittleren Ortszeit entsprechende mittlere Berliner Datum, sowie die zugehörige mittlere Berliner Zeit. Eine einfache Interpolation zwischen den mit Hilfe der Konstanten A, B, ..., E, t des Berliner Jahrbuchs erhaltenen Werten der Reduktion liefert dann die für den in Frage kommenden Ort gültige Reduktion.

66. Formeln von *Fabritius*. Bei der Berechnung der Reduktion auf den scheinbaren Ort sind bisher nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt worden; dies genügt aber nicht mehr, wenn es sich um Sterne in der Nähe des Pols handelt. Anstatt nun in solchen Fällen auch die Glieder zweiter Ordnung zu berechnen, zieht man es vor, ein von *W. Fabritius* angegebenes Verfahren zu benutzen, welches zwar kein streng richtiges, aber doch für die Praxis hinreichend genaues Resultat liefert. Die hierzu nötigen Formeln ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (7) des § 55, wenn man annimmt, daß die Lage des Pols, bzw. des Äquinoktiums vom Anfange des Jahres an bis zu dem Augenblicke, für den die Reduktion auf den scheinbaren Ort gesucht wird, ungeändert bleibt, daß aber der Stern in dem genannten Zeitintervall mit konstanter Geschwindigkeit einen Bogen beschreibt, dessen Endpunkte die durch die scheinbaren und mittleren Koordinaten bestimmten Punkte der Sphäre bilden. In den Gleichungen (7) des § 55 sei also t_m der Jahresanfang und t_n die Zeit, für welche der scheinbare Ort gesucht wird; ferner sei $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m)$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m)$ die mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) des gegenwärtigen Paragraphen berechnete Reduktion auf den scheinbaren Ort in Rektaszension und Deklination; vertauscht man dann in den Gleichungen (7) des § 55 α_m, δ_m mit α, δ und α_n, δ_n mit α', δ', so erhält man, wenn zur Abkürzung $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \Delta\alpha$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_m (t_n - t_m) = \Delta\delta$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \Delta\alpha + \Delta\alpha\,\Delta\delta \sin 1'' \tang \delta \\ \delta' - \delta &= \Delta\delta - \tfrac{1}{2}(\Delta\alpha)^2 \sin 1'' \sin\delta\cos\delta \end{aligned} \tag{3}$$

Dies sind die nach *Fabritius* benannten Formeln. Aus einer Vergleichung der hiernach berechneten Reduktion auf den scheinbaren Ort mit den Werten, welche die strengen Formeln*) geben, fand *F. Boquet***) als größten absoluten Betrag der Differenz in Rektaszension: für λ Ursae min. ($\delta = +89°$) $0^s.04$ und für den Stern Schwerd 594 ($\delta = +89°.5$) $0^s.09$.

Beispiel. Es soll der scheinbare Ort von λ Ursae min. für die Zeit der am 9. Dezember 1908 im Pariser Meridian stattgefundenen oberen Kulmination gesucht werden. — Der Connaissance des Temps zufolge sind die auf das mittlere Äquinox und die Epoche 1908.0 bezogenen Koordinaten und Komponenten der jährlichen Eigenbewegung des Sterns $\alpha = 19^h\,13^m\,18^s.58$, $\delta = +89°\,0'\,9''.4$, $\mu = -0^s.105$, $\mu' = +0''.01$. Da die Sternzeit im mittleren Mittage für 1908 Dez. 9 gleich $17^h\,11^m$

*) *A. Gaillot*, Détermination géométrique des positions apparentes des étoiles circompolaires (Bulletin astronomique, Band I, p. 375 ff. und p. 575 ff.). — *F. Boquet*, Note sur la détermination géométrique etc. (Bull. astr., Band V, p. 137).

**) *F. Boquet*, Application de la méthode de M. A. Gaillot (Bull. astr., Band V, p. 233).

ist, so fällt die obere Kulmination auf 2^h mittlerer Zeit Paris; für diese Zeit ist der Connaissance des Temps zufolge, wenn f, g, h, i und g' in Bogensekunden ausgedrückt werden,

$$f = 26''.96, \quad \log g = 1.0699, \quad G = 359^\circ 9', \quad \log h = 1.3094, \quad H = 11^\circ 50'$$
$$\log i = 0.2589, \quad \log g' = 8.958, \quad G' = 73^\circ, \quad t = 0.94$$

Mit Hilfe dieser und der obigen Werte von μ und μ' erhält man aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\Delta\alpha = -108^s.70, \qquad \Delta\delta = +13''.9$$

Wendet man nun die Gleichungen (3) an, so ergibt sich zunächst

$$\Delta\alpha \cdot \Delta\delta \sin 1'' \operatorname{tang}\delta = -0^s.42, \qquad \tfrac{1}{2}(\Delta\alpha)^2 \sin 1'' \sin\delta \cos\delta = +0''.1$$

und somit

$$\alpha' - \alpha = -109^s.12, \qquad \delta' - \delta = +13''.8$$

Folglich ist der gesuchte scheinbare Ort

$$\alpha' = 19^h\,11^m\,29^s.46, \qquad \delta' = +89^\circ 0'\,23''.2$$

Kapitel XII.

Parallaxe.

67. Einleitung. Die Richtungen, in denen ein dem Sonnensystem angehöriger Himmelskörper in einem und demselben Augenblick von verschiedenen Beobachtungsstationen aus gesehen wird, sind nicht zueinander parallel. Um nun die an verschiedenen Punkten der Erde angestellten Beobachtungen eines solchen Körpers miteinander vergleichbar zu machen, leitet man aus jeder beobachteten Richtung durch Rechnung diejenige ab, welche beobachtet worden wäre, wenn sich der Beobachter im Mittelpunkte der Erde befunden hätte; den Winkel zwischen der vom Beobachtungsorte und der vom Erdmittelpunkte aus gesehenen Richtung bezeichnet man als Parallaxe. Zur Berechnung der Parallaxe bedarf man einiger Angaben über die Figur und Größe der Erde.

Die Erde hat die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids; bezeichnet man die halbe große Achse der Erde mit a, und ihre halbe kleine Achse mit b, so ist nach *Helmert*

$$a = 6\,378\,000^m, \qquad b = 6\,356\,612^m$$

Hieraus ergibt sich, wenn

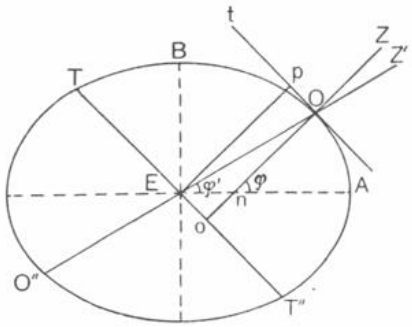
$$\frac{a-b}{a} = \alpha, \qquad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = e$$

gesetzt wird, und somit α die Abplattung und e die Exzentrizität einer Meridianellipse der Erde bedeutet,

$$\alpha = \frac{1}{298.20}, \qquad e = 0.081826$$

Es sei jetzt E (Fig. 1) der Mittelpunkt der Erde und O ein Beobachtungsort, $EA = a$ sei die halbe große und $EB = b$ die halbe kleine Achse der Erde, bzw. der durch O gelegten Meridianellipse BAO''. Ist Ot die diese Ellipse in O berührende Tangente, und zieht man TET'' parallel zu Ot, so sind OO'' und TT'' zwei zueinander konjugierte Durchmesser; nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie hat man also, wenn $OEA = \varphi'$ und $TEA = \chi'$ gesetzt wird,

Fig. 1.



$$\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\chi' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Wenn nun die Gerade nOZ senkrecht zu Ot gezogen und der Winkel OnA mit φ bezeichnet wird, so folgt $\chi' = 90^\circ + \varphi$; demnach gibt die vorige Gleichung

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang}\varphi \tag{1}$$

Der Punkt Z', in dem die Gerade EO verlängert die Sphäre trifft, wird das geozentrische Zenit, der Punkt Z, in dem die Richtung der Normale nO verlängert die Sphäre trifft, wird kurzweg das Zenit genannt. Den Winkel φ' nennt man die geozentrische, den Winkel φ die geographische Breite von O.

Man ziehe jetzt Ep senkrecht zu Ot. Da der Winkel, den die Tangente Ot mit der kleinen Achse der Ellipse bildet, gleich $pEA = OnA = \varphi$ ist, so ergibt sich, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, $Ep = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$. Es ist aber auch $Ep = EO\cos OEp$. Da nun der Winkel OEp gleich $\varphi - \varphi'$ ist, so folgt, wenn $EO = \varrho$ gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')} \tag{2}$$

Setzt man hier

$$\frac{\varrho}{a} = [\varrho],$$

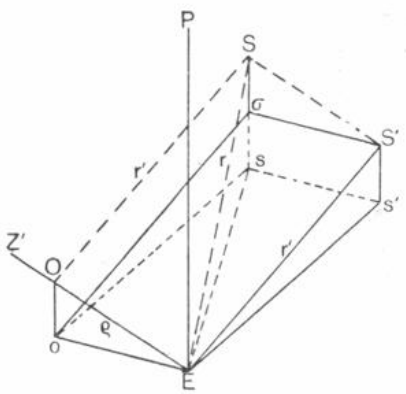
wo demnach $[\varrho]$ den Abstand des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde, ausgedrückt in Teilen des Äquatorealradius der Erde, bedeutet, so ergibt sich

$$[\varrho] = \frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')} \tag{2a}$$

Den Wert von φ kann man durch Beobachtungen finden; ist φ bekannt, so lassen sich aus (1) und (2a) die Werte von φ' und $[\varrho]$ berechnen. Die für die einzelnen Sternwarten gültigen Werte von φ' und $\log[\varrho]$ findet man in den astronomischen Jahrbüchern angegeben.

68. Parallaxe in Rektaszension und Deklination. Ist E (Fig. 2) der Mittelpunkt der Erde, O ein Beobachtungsort und S der Ort eines Himmelskörpers im Raum, so ist OS die beobachtete Richtung und ES die Richtung, in welcher ein im Mittelpunkte der Erde befindlicher Beobachter den Himmelskörper sehen würde. Man ziehe jetzt ES' parallel zu OS, so daß also ES' ebenfalls die beobachtete Richtung darstellt, ferner ziehe man SS' parallel zu OE; setzt man dann $OS = ES' = r'$ und $EO = \varrho$, wo ϱ durch die Gleichung (2) bestimmt ist, so folgt

Fig. 2.



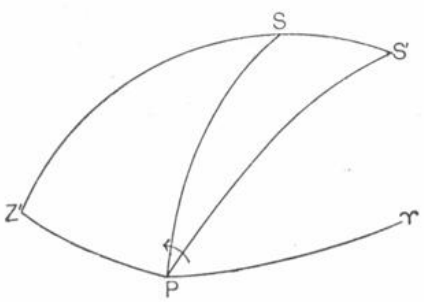
$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin SEO}{\sin OSE} = \frac{\sin SEO}{\sin SES'}$$

Wenn nun die in einer Ebene liegenden Richtungen EO, ES und ES' verlängert werden, bis sie die um E beschriebene Sphäre schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte Z', S und S' (Fig. 3) auf einem größten Kreise, und die Bögen $Z'S$ und SS' sind den in Fig. 2 mit SEO und SES' bezeichneten Winkeln beziehungsweise gleich; die vorige Gleichung wird demnach

$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin SZ'}{\sin SS'}$$

In Fig. 3 bedeutet Z' das geozentrische Zenit des Beobachtungsortes, S' ist der vom Beobachtungsorte aus und S der vom Mittelpunkte der Erde aus gesehene Ort des Himmelskörpers an der Sphäre, P ist der Nordpol des Äquators und γ das Frühlingsäquinox, der Pfeil gibt die Richtung an, in der die Rektaszensionen gezählt werden. Bezeichnet man jetzt den Winkel $\gamma PZ'$ oder die Sternzeit des Beobachtungsortes mit Θ, bezeichnet man ferner mit α' und δ' die Rektaszension und Deklination von S', und mit α und δ die Rektaszension und Deklination von S, so geben die Dreiecke $Z'SP$ und SPS', worin der Winkel $Z'PS = \Theta - \alpha$, der Winkel $SPS' = \alpha - \alpha'$, ferner $PS' = 90^\circ - \delta'$, $PZ' = 90^\circ - \varphi'$ ist,

Fig. 3.



$$\sin SZ' = \frac{\sin(\Theta - \alpha)\cos\varphi'}{\sin Z'SP} = \frac{\sin(\Theta - \alpha)\cos\varphi'}{\sin PSS'}, \qquad \sin SS' = \frac{\sin(\alpha - \alpha')\cos\delta'}{\sin PSS'}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorhin für $r' : \varrho$ gefundene Gleichung ergibt sich

$$r' \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) = -\varrho \cos\varphi' \sin(\Theta - \alpha) \tag{3}$$

Es sei nun (Fig. 2) $Eoss'$ ein Stück der Äquatorebene, Oo, Ss, $S's'$ seien senkrecht zu dieser Ebene, EP bezeichne die zu Oo parallele Erdachse; man hat

dann $Eo = \varrho \cos\varphi'$, $Es' = r' \cos\delta'$ und — wenn $ES = r$ gesetzt wird — $Es = r\cos\delta$. Die Strecke Es stellt die Resultante von Es' und $s's = Eo$ dar; mit Rücksicht darauf, daß der Winkel $sEs' = \alpha - \alpha'$ und der Winkel $Ess' = oEs = \Theta - \alpha$ ist, erhält man also

$$r' \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) = r\cos\delta - \varrho\cos\varphi' \cos(\Theta - \alpha) \tag{4}$$

Zieht man $o\sigma$ parallel zu OS, bzw. zu ES', so ergibt sich $\sigma s = S's' = r' \sin\delta'$ und $S\sigma = Oo = \varrho \sin\varphi'$. Es ist aber $\sigma s + S\sigma = Ss = r\sin\delta$; demnach wird

$$r' \sin\delta' = r\sin\delta - \varrho\sin\varphi' \tag{5}$$

Man multipliziere jetzt die Gleichung (3) mit $\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ und die Gleichung (4) mit $\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$; addiert man dann die beiden Produkte, so folgt

$$r' \cos\delta' = r\cos\delta - \varrho\cos\varphi' \cos[\Theta - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')] \sec\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \tag{6}$$

Durch die Einführung zweier Hilfsgrößen läßt sich den beiden letzten Gleichungen dieselbe Form geben; setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \beta \sin\gamma &= \sin\varphi' \\ \beta\cos\gamma &= \cos\varphi' \cos[\Theta - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')] \sec\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha), \end{aligned} \tag{7}$$

so werden die Gleichungen (5) und (6)

$$\begin{aligned} r' \sin\delta' &= r\sin\delta - \varrho\beta\sin\gamma \\ r'\cos\delta' &= r\cos\delta - \varrho\beta\cos\gamma \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} r' \sin(\delta' - \delta) &= -\varrho\beta\sin(\gamma - \delta) \\ r' \cos(\delta' - \delta) &= r - \varrho\beta\cos(\gamma - \delta) \end{aligned} \tag{9}$$

und auch

$$r\sin(\delta' - \delta) = -\varrho\beta\sin(\gamma - \delta') \tag{9a}$$

Dividiert man jetzt die Gleichungen (3) und (4), ferner die Gleichungen (7), sowie auch die Gleichungen (9) durcheinander, so erhält man

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = -\frac{\frac{\varrho\cos\varphi'}{r\cos\delta}\sin(\Theta - \alpha)}{1 - \frac{\varrho\cos\varphi'}{r\cos\delta}\cos(\Theta - \alpha)}$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi' \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \tag{9b}$$

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = \frac{-\frac{\varrho\beta}{r}\sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{\varrho\beta}{r}\cos(\gamma - \delta)}$$

Die für die vorigen Gleichungen zu verwendenden Werte von r und ϱ müssen in derselben Längeneinheit ausgedrückt sein. Als Längeneinheit soll jetzt die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne gewählt werden, da diese Einheit den in den astronomischen Ephemeriden mitgeteilten Werten von r zugrunde liegt. Für

ϱ folgt dann, wenn a die halbe große Achse der Erde, Δ_0 die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bedeutet und

$$\frac{a}{\Delta_0} = \sin \pi \tag{10}$$

gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{\varrho}{a}\,\frac{a}{\Delta_0} = [\varrho]\,\sin \pi\,, \tag{10a}$$

wo $[\varrho]$ durch die Gleichung (2a) bestimmt erscheint. Den Winkel π bezeichnet man als die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne; in welcher Weise sich der Wert dieses Winkels finden läßt, wird später gezeigt werden. Substituiert man nun in (9b) für ϱ und β ihre aus (10a), bzw. der ersten der Gleichungen (7) folgenden Werte, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = -\frac{\dfrac{[\varrho]\,\sin\pi\,\cos\varphi'}{r\,\cos\delta}\,\sin(\Theta - \alpha)}{1 - \dfrac{[\varrho]\,\sin\pi\,\cos\varphi'}{r\,\cos\delta}\,\cos(\Theta - \alpha)}$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi'\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \tag{11}$$

$$\operatorname{tang}(\delta' - \delta) = -\frac{\dfrac{[\varrho]\,\sin\pi\,\sin\varphi'}{r\,\sin\gamma}\,\sin(\gamma - \delta)}{1 - \dfrac{[\varrho]\,\sin\pi\,\sin\varphi'}{r\,\sin\gamma}\,\cos(\gamma - \delta)}$$

Für die Sonne und die Planeten ist r stets groß im Verhältnis zu $[\varrho]$; da außerdem der Winkel π nur 8″.8 beträgt, so sind nun $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ kleine Größen. Wenn also für die Sonne oder einen Planeten, bzw. Kometen die Parallaxe in Rektaszension und Deklination gerechnet werden soll, so genügt es, an Stelle der Gleichungen (11) die folgenden anzuwenden

$$\alpha' - \alpha = -\frac{[\varrho]\,\pi\,\cos\varphi'}{r\,\cos\delta}\,\sin(\Theta - \alpha)$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\cos(\Theta - \alpha)} \tag{12}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{[\varrho]\,\pi\,\sin\varphi'}{r\,\sin\gamma}\,\sin(\gamma - \delta)$$

Im Meridian ist $\Theta - \alpha$ gleich 0° oder gleich 180° und somit $\alpha' - \alpha = 0$; zur Zeit der oberen Kulmination ($\Theta - \alpha = 0°$) ist demnach den Gleichungen (7) zufolge $\gamma = \varphi'$, zur Zeit der unteren Kulmination ($\Theta - \alpha = 180°$) ist $\gamma = 180° - \varphi'$. Bedeutet also δ'_s die aus einer Beobachtung in der oberen Kulmination und δ'_i die aus einer Beobachtung in der unteren Kulmination erhaltene Deklination der Sonne oder eines Planeten, so hat man

$$\delta'_s - \delta = -\frac{[\varrho]\,\pi}{r}\,\sin(\varphi' - \delta), \qquad \delta'_i - \delta = -\frac{[\varrho]\,\pi}{r}\,\sin(\varphi' + \delta) \tag{12a}$$

Für den Mond geben die astronomischen Jahrbücher nicht die Werte von r an, sondern diejenigen eines Winkels p, der durch die Gleichung definiert ist

$$\sin p = \frac{a}{\mathfrak{r}}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{r}$ die in derselben Einheit wie a gemessene Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde bedeutet. Den Winkel p nennt man die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes. Gibt man der Gleichung (13) die Form

$$\frac{\frac{a}{\Delta_0}}{\frac{\mathfrak{r}}{\Delta_0}} = \sin p,$$

wobei nun $\frac{\mathfrak{r}}{\Delta_0}$ den in Teilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückten Radiusvektor (r) des Mondes darstellt, so folgt mit Rücksicht auf (10)

$$\frac{\sin \pi}{r} = \sin p \tag{13a}$$

Unter Anwendung dieser Gleichung und mit Einführung der Abkürzungen

$$f = \frac{[\varrho] \sin p \cos \varphi'}{\cos \delta}, \qquad g = \frac{[\varrho] \sin p \sin \varphi'}{\sin \gamma} \tag{14}$$

ergeben sich aus (11) die folgenden zur Berechnung der Parallaxe des Mondes in Rektaszension und Deklination dienenden Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) &= -\frac{f \sin(\Theta - \alpha)}{1 - f \cos(\Theta - \alpha)} \\ \operatorname{tang}\gamma &= \frac{\operatorname{tang}\varphi' \cos\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\cos[\Theta - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)]} \\ \operatorname{tang}(\delta' - \delta) &= -\frac{g \sin(\gamma - \delta)}{1 - g \cos(\gamma - \delta)} \end{aligned} \tag{15}$$

Der Ausdruck für $a : \mathfrak{r}$, dessen man bedarf, um aus (13) den Winkel p finden zu können, wird durch die Mondtheorie gegeben. Derselbe besteht aus einem konstanten Gliede und aus periodischen Gliedern; bezeichnet man ersteres mit $a : \mathfrak{r}_0$ und setzt

$$\frac{a}{\mathfrak{r}_0} = \sin \Pi,$$

so wird der Winkel Π die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes genannt. *Newcomb* nimmt den aus der Mondtheorie folgenden Wert $\Pi = 3422''.63$ an; wie in § 71 gezeigt werden wird, läßt sich der Wert von Π auch aus gleichzeitigen Beobachtungen des Mondes auf der nördlichen und südlichen Erdhalbkugel finden.

69. Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz. In Fig. 4 mögen E, O, S und S' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 2, $Eoss'$ sei die durch den Mittelpunkt der Erde parallel zur Ebene des Horizonts des Beobachtungsortes O gelegte Ebene, Oo, Ss und $S's'$ seien die von O, S und S' auf die Ebene $Eoss'$ gefällten Senkrechten. Da Oo senkrecht zu der Ebene des Horizonts von O ist, so ist oO, also auch die parallel zu oO gezogene Gerade EZ zum Zenit des Beobachtungsortes gerichtet; da ferner EO zum geozentrischen Zenit (Z') von O hin gerichtet ist, so folgt, daß die von E zum Pol des Äquators gezogene Gerade EP in der Ebene $Z'EZ$ liegt. Man verlängere nun die Richtungen EO, ES, ES', EZ und EP, bis

Fig. 4.

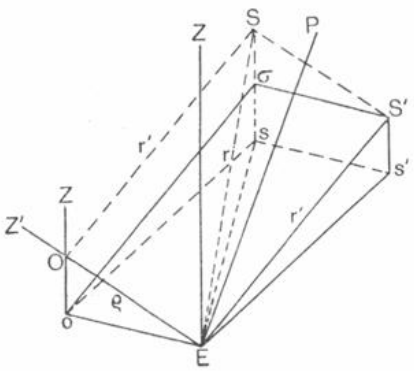
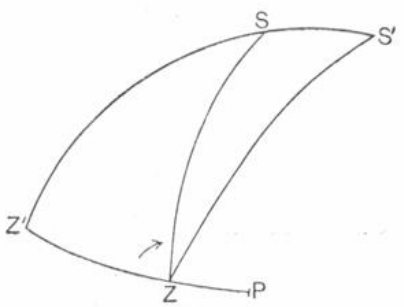


Fig. 5.



sie die um E beschriebene Sphäre in den Punkten Z', S, S', Z, P (Fig. 5) schneiden; es liegen dann Z', S, S' auf einem größten Kreise und ebenfalls Z', Z und P. Die Bögen $Z'S$ und SS' sind den in Fig. 4 mit SEO und SES' bezeichneten Winkeln beziehungsweise gleich; die aus Fig. 4 folgende Proportion $r' : \varrho = \sin SEO : \sin SES'$ wird somit

$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin Z'S}{\sin SS'}$$

Man bezeichne jetzt den Winkel $Z'ZS$ oder das geozentrische Azimut des Himmelskörpers mit A und den Winkel $Z'ZS'$ oder das vom Beobachtungsort aus gesehene Azimut mit A', ferner setze man die geozentrische Zenitdistanz oder den Bogen ZS gleich z und die vom Beobachtungsort aus gesehene Zenitdistanz ZS' gleich z'; berücksichtigt man dann, daß der Bogen ZZ' gleich $\varphi - \varphi'$ ist, so folgt aus den Dreiecken $Z'ZS$ und ZSS'

$$\sin Z'S = \frac{\sin(\varphi - \varphi')\sin A}{\sin ZSZ'}, \qquad \sin SS' = \frac{\sin z' \sin(A' - A)}{\sin ZSS'}$$

Damit wird die vorige Gleichung

$$\frac{r'}{\varrho} = \frac{\sin(\varphi - \varphi')\sin A}{\sin z' \sin(A' - A)}$$

oder

$$0 = r' \sin z' \sin(A' - A) - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A \tag{16}$$

In Fig. 4 ist der Winkel $OEo = 90^\circ - ZEZ' = 90^\circ - (\varphi - \varphi')$, $SEs = 90^\circ - z$, $S'Es' = 90^\circ - z'$ und demnach $s's = Eo = \varrho \sin(\varphi - \varphi')$, $Es = r \sin z$, $Es' = r \sin z'$; ferner ist der Winkel $oEs = Ess' = A$ und der Winkel $sEs' = A' - A$. Da nun Es die Resultante von Es' und $s's$ ist, so folgt

$$r \sin z = r' \sin z' \cos(A' - A) + \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A \tag{17}$$

Ferner ergibt sich aus Fig. 4, wenn $o\sigma$ parallel zu OS also auch parallel zu ES' gezogen und berücksichtigt wird, daß $\sigma S'$ parallel zu oE und zu ss' ist, $Ss = S's' + Oo$; demnach hat man

$$r \cos z = r' \cos z' + \varrho \cos(\varphi - \varphi') \tag{18}$$

Multipliziert man (16) mit $\sin\frac{1}{2}(A' - A)$, (17) mit $\cos\frac{1}{2}(A' - A)$ und addiert die beiden Produkte, so erhält man

$$r \sin z = r' \sin z' + \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos\tfrac{1}{2}(A' + A) \sec\tfrac{1}{2}(A' - A)$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\operatorname{tang} \Gamma = \operatorname{tang}(\varphi - \varphi') \cos\tfrac{1}{2}(A' + A) \sec\tfrac{1}{2}(A' - A) \tag{19}$$

gesetzt wird,

$$r \sin z = r' \sin z' + \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tang} \Gamma \tag{20}$$

Aus (18) und (20) folgt

$$\sin(z' - z) = \frac{\varrho \cos(\varphi - \varphi') \sin(z' - \Gamma)}{r \cos \Gamma} \tag{21}$$

Multipliziert man ferner (17) mit $\sin(A' - A)$ und (16) mit $\cos(A' - A)$, so ergibt sich durch Subtraktion der Produkte

$$\sin(A' - A) = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{r \sin z} \tag{22}$$

Bei der Anwendung der Formeln (22) und (21) auf die Sonne und die Planeten entnimmt man die Werte von r den astronomischen Jahrbüchern; da letztere aber als Einheit von r die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wählen, so hat man wie in § 68 für ϱ den durch die Gleichungen (10a) und (2a) bestimmten Wert $[\varrho] \sin\pi$ zu benutzen. Für den Mond ergibt sich aus (10a) und (13a)

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{[\varrho] \sin\pi}{r} = [\varrho] \sin p \tag{22a}$$

Die der Sonne und den Planeten entsprechenden Werte von $\frac{\varrho}{r}$ sind sehr klein, ferner ist $\varphi - \varphi' < 12'$; wenn man also Beobachtungen in großer Nähe des Zenits vermeidet, so ist auch $A' - A$ klein. Dasselbe gilt für Γ und $z' - z$. Mit Rücksicht hierauf ist es nicht notwendig, die Parallaxe in Azimut und Zenitdistanz — insoweit es sich um die Sonne oder einen Planeten handelt — mit Hilfe der

strengen Gleichungen (22), (19) und (21) zu berechnen; sondern es genügt vollständig, die folgenden Formeln anzuwenden

$$A' - A = \frac{[\varrho]\,\pi \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{r \sin z'}$$

$$\Gamma = (\varphi - \varphi') \cos A' \tag{23}$$

$$z' - z = \frac{[\varrho]\,\pi \sin(z' - \Gamma)}{r}$$

Für den Mond erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (22a) und mit Vernachlässigung kleiner Glieder

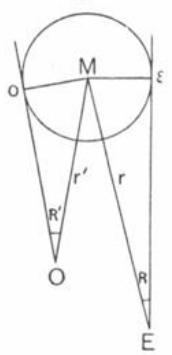
$$\sin(A' - A) = \frac{[\varrho] \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A'}{\sin z}$$

$$\Gamma = (\varphi - \varphi') \cos A' \tag{24}$$

$$\sin(z' - z) = [\varrho] \sin p \sin(z' - \Gamma)$$

70. Einfluß der Parallaxe auf den Winkelhalbmesser eines Himmelskörpers. In Fig. 6 sei E der Mittelpunkt der Erde, O ein Beobachtungsort, M der Mittelpunkt und Mo der Radius eines kugelförmigen Himmelkörpers; $E\varepsilon$ und Oo seien die von E und O aus an den Himmelskörper gezogenen Tangenten. Bezeichnet man mit d den linearen Radius $M\varepsilon = Mo$ des Himmelskörpers, und bedeuten R und R' die Winkel, unter denen dieser Radius von E, bzw. von O aus gesehen wird, so ergibt sich, wenn wieder $EM = r$ und $OM = r'$ gesetzt wird,

Fig. 6.



$$\sin R' = \frac{d}{r'}, \qquad \sin R = \frac{d}{r}$$

Demnach ist

$$\sin R' = \frac{r}{r'} \sin R \tag{25}$$

Aus den Gleichungen (8) folgt aber

$$r \sin(\delta - \gamma) = r' \sin(\delta' - \gamma) \tag{25a}$$

Somit wird

$$\sin R' = \frac{\sin(\delta' - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)} \sin R \tag{26}$$

Die für die Anwendung dieser Gleichung erforderlichen Werte von δ' und γ ergeben sich aus (12), bzw. aus (14) und (15).

Zur Zeit der oberen Kulmination ist $\gamma = \varphi'$ (S. 186); bedeutet also R'_m den dieser Kulmination entsprechenden Wert von R', so folgt aus (26)

$$\sin R'_m = \frac{\sin(\delta' - \varphi')}{\sin(\delta - \varphi')} \sin R \tag{26a}$$

Der Wert von R' läßt sich noch auf andere Weise berechnen. Multipliziert man die Gleichung (20) mit $\cos\Gamma$ und die Gleichung (18) mit $\sin\Gamma$, so ergibt sich durch Subtraktion der beiden Produkte

$$r \sin(z - \Gamma) = r' \sin(z' - \Gamma)$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung (25), so erhält man

$$\sin R' = \frac{\sin(z' - \Gamma)}{\sin(z - \Gamma)} \sin R \tag{27}$$

Der Wert von Γ folgt aus (24).

71. Bestimmung der Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes. Die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes (S. 187) läßt sich bestimmen, wenn man an zwei Sternwarten mit kleiner Längen- und großer Breitendifferenz die Deklination des nördlichen oder südlichen Mondrandes im Meridian beobachtet. Um möglichst genaue Resultate zu erhalten, mißt man an beiden Sternwarten die Deklinationsdifferenzen zwischen dem Mondrand und einigen symmetrisch zum Monde gelegenen Fixsternen; aus der Verbindung dieser Differenzen mit den Deklinationen der Sterne ergibt sich die Deklination des Mondrandes. Es sei nun D' die an einer der beiden Sternwarten beobachtete und D die dieser entsprechende geozentrische Deklination des Mondrandes, ferner sei r_u die Distanz des beobachteten Punktes des Mondrandes vom Mittelpunkte der Erde; berücksichtigt man dann, daß zur Zeit der oberen Kulmination des Mondes der S. 186 und den Gleichungen (7) zufolge $\gamma = \varphi'$ und $\beta = 1$ ist, so gibt die Gleichung (9^a)

$$\sin(D - D') = \frac{\varrho}{r_u} \sin(\varphi' - D') \tag{28}$$

In erster Näherung soll jetzt $r_u = r$ gesetzt werden, wo r die Entfernung des Mondzentrums vom Mittelpunkte der Erde bedeutet; die vorige Gleichung wird dann

$$\sin(D - D') = \frac{\varrho}{r} \sin(\varphi' - D') \tag{29}$$

Verbindet man hiermit die Gleichung (22^a), so folgt

$$\sin(D - D') = [\varrho] \sin(\varphi' - D') \sin p \tag{30}$$

Nach einer bekannten Reihenentwicklung ist aber

$$D - D' = \sin(D - D') + \tfrac{1}{6} \sin^3(D - D') + \cdots;$$

substituiert man hierin den für $\sin(D - D')$ gefundenen Wert und dividiert — um $D - D'$ in Sekunden ausgedrückt zu erhalten — die auf der rechten Seite vorkommenden Glieder durch $\sin 1''$, so erhält man

$$D - D' = \frac{[\varrho]}{\sin 1''} \sin(\varphi' - D') \sin p + \frac{1}{6} \frac{[\varrho]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi' - D') \sin^3 p \tag{31}$$

Ebenso ergibt sich, wenn die für die zweite Sternwarte gültigen Werte von D, D', $[\varrho]$, φ' und p durch den Index 1 gekennzeichnet werden,

$$D_1 - D'_1 = \frac{[\varrho_1]}{\sin 1''} \sin(\varphi'_1 - D'_1) \sin p_1 + \frac{1}{6} \frac{[\varrho_1]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi'_1 - D'_1) \sin^3 p_1 \tag{31^a}$$

Es seien nun t und t_1 die den Beobachtungszeiten der beiden Sternwarten entsprechenden mittleren Zeiten eines Hauptmeridians der Erde, δ bezeichne die geozentrische Deklination des Mondzentrums und R den geozentrischen Winkel-

halbmesser des Mondes zur Zeit t, ferner seien δ_1 und R_1 die Werte der geozentrischen Deklination des Mondzentrums, bzw. des geozentrischen Winkelhalbmessers des Mondes zur Zeit t_1; je nachdem dann der nördliche oder südliche Mondrand beobachtet wurde, hat man

$$D = \delta \pm R, \qquad D_1 = \delta_1 \pm R_1 \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix} \text{ Rand} \tag{32}$$

also

$$D_1 - D = \delta_1 - \delta \pm (R_1 - R) \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix} \text{ Rand} \tag{32a}$$

Wenn aber d den linearen Halbmesser des Mondes, a den Radius des Erdäquators und $\mathfrak{r}$ die in derselben Einheit wie d und a gemessene Entfernung des Mondes von der Erde bedeutet, so folgt, wenn noch

$$\frac{d}{a} = k \qquad [\log k = 9.43544] \tag{33}$$

gesetzt, und die Gleichung (13) berücksichtigt wird,

$$\sin R = \frac{d}{\mathfrak{r}} = \frac{d}{a}\,\frac{a}{\mathfrak{r}} = k \sin p$$

Dementsprechend ist

$$\sin R_1 = k \sin p_1$$

Durch Subtraktion der Gleichungen für $\sin R_1$ und $\sin R$ erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}(R_1 - R) \cos \tfrac{1}{2}(R_1 + R) = k \sin \tfrac{1}{2}(p_1 - p) \cos \tfrac{1}{2}(p_1 + p)$$

oder hinreichend genau

$$R_1 - R = k(p_1 - p)$$

Demnach wird die Gleichung (32a)

$$D_1 - D = \delta_1 - \delta \pm k(p_1 - p) \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix} \text{ Rand} \tag{34}$$

Bezeichnet man die nach der Zeit genommenen ersten Differentialquotienten von δ und p, gültig für die Epoche $\frac{1}{2}(t + t_1) = \tau$, mit $\frac{d\delta}{d\tau}$ und $\frac{dp}{d\tau}$, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\delta_1 - \delta = \frac{d\delta}{d\tau}(t_1 - t), \qquad p_1 - p = \frac{dp}{d\tau}(t_1 - t) \tag{35}$$

Ferner ergibt sich, wenn p_τ den der Zeit τ entsprechenden Wert von p bedeutet,

$$\begin{aligned} \sin p &= \sin p_\tau + (t - \tau)\,\frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \cos p_\tau \\ \sin p_1 &= \sin p_\tau + (t_1 - \tau)\,\frac{dp}{d\tau} \sin 1'' \cos p_\tau \end{aligned} \tag{36}$$

An Stelle von p_τ soll nun die in § 68 mit Π bezeichnete Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes eingeführt werden. Es sei $\mathfrak{r}_\tau$ die der Zeit τ entsprechende, und $\mathfrak{r}_0$ die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde; sind dann

$\mathfrak{r}_\tau$ und $\mathfrak{r}_0$ in derselben Einheit ausgedrückt wie a, so hat man der Definition von p_τ und Π gemäß

$$\sin p_\tau = \frac{a}{\mathfrak{r}_\tau} = \frac{a}{\mathfrak{r}_0}\frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}_\tau}, \qquad \sin \Pi = \frac{a}{\mathfrak{r}_0},$$

und folglich

$$\sin p_\tau = \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}_\tau} \sin \Pi$$

Die in der Ephemeride gegebenen Werte der Mondparallaxe (p_τ°) sind aber mit Hilfe der Gleichung

$$\sin p_\tau^\circ = \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}_\tau} \sin \Pi_0$$

berechnet worden, wo Π_0 einen für Π angenommenen Wert bedeutet; somit wird

$$\sin p_\tau = \frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin \Pi_0} \sin \Pi$$

Substituiert man diesen Wert in die Gleichungen (36), setzt dann $\cos p_\tau = 1$ und führt an Stelle von τ seinen Wert $\frac{1}{2}(t + t_1)$ ein, so folgt

$$\sin p = \frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin \Pi_0} \sin \Pi - \frac{t_1 - t}{2}\frac{dp}{d\tau} \sin 1''$$

$$\sin p_1 = \frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin \Pi_0} \sin \Pi + \frac{t_1 - t}{2}\frac{dp}{d\tau} \sin 1''$$

Diese Ausdrücke sind nun in die Gleichungen (31) und (31^a) zu substituieren; nimmt man dabei $\sin^3 p = \sin^3 p_1 = \sin^3 p_\tau^\circ$ an, so ergibt sich

$$D - D' = \frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin \Pi_0}\frac{[\varrho]}{\sin 1''} \sin(\varphi' - D') \sin \Pi + \frac{1}{6}\frac{[\varrho]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi' - D') \sin^3 p_\tau^\circ - \\ - \frac{t_1 - t}{2}\frac{dp}{d\tau}[\varrho] \sin(\varphi' - D')$$

$$D_1 - D_1' = \frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin \Pi_0}\frac{[\varrho_1]}{\sin 1''} \sin(\varphi_1' - D_1') \sin \Pi + \frac{1}{6}\frac{[\varrho_1]^3}{\sin 1''} \sin^3(\varphi_1' - D_1') \sin^3 p_\tau^\circ + \\ + \frac{t_1 - t}{2}\frac{dp}{d\tau}[\varrho_1] \sin(\varphi_1' - D_1')$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\sin p_\tau^\circ}{\sin 1'' \sin \Pi_0}\{[\varrho] \sin(\varphi' - D') - [\varrho_1] \sin(\varphi_1' - D_1')\} = f$$

(37)
$$\frac{\sin^3 p_\tau^\circ}{6 \sin 1''}\{[\varrho]^3 \sin^3(\varphi' - D') - [\varrho_1]^3 \sin^3(\varphi_1' - D_1')\} = g$$

$$\tfrac{1}{2}\{[\varrho] \sin(\varphi' - D') + [\varrho_1] \sin(\varphi_1' - D_1')\} = h$$

gesetzt wird,

$$f \sin \Pi = -(D_1 - D) + (D_1' - D') - g + h(t_1 - t)\frac{dp}{d\tau}$$

Nun folgt aber aus (34) und (35)

$$D_1 - D = \frac{d\delta}{d\tau}(t_1 - t) \pm k\frac{dp}{d\tau}(t_1 - t) \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix} \text{ Rand}$$

Somit ergibt sich

$$f \sin \Pi = D_1' - D' - (t_1 - t)\frac{d\delta}{d\tau} - g - (\pm k - h)(t_1 - t)\frac{dp}{d\tau} \tag{38}$$

Hier sind f und alle auf der rechten Seite vorkommenden Größen entweder durch Beobachtung bekannt oder lassen sich, wie $\frac{d\delta}{d\tau}$ und $\frac{dp}{d\tau}$, mit Hilfe der Mondephemeride, bzw. der Mondtafeln durch Rechnung finden; man kann demnach die Gleichung (38) zur Bestimmung von Π benutzen. Da aber der gegenwärtig für Π angenommene Wert schon nahe richtig ist, so ist es vorteilhafter, nur die Korrektion dieses Wertes zu ermitteln. Wird nun der angenommene Wert von Π wieder mit Π_0 und die in Sekunden ausgedrückte Korrektion von Π_0 mit $\Delta\Pi$ bezeichnet, so hat man

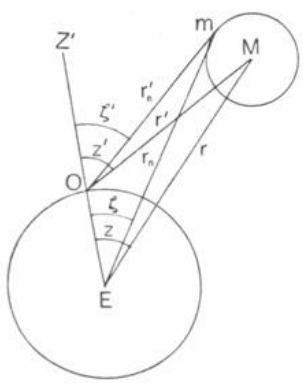
$$f \sin \Pi = f \sin(\Pi_0 + \Delta\Pi) = f \sin \Pi_0 + (f \cos \Pi_0)\Delta\Pi \sin 1''$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung (38) erhält man

$$f \cos \Pi_0 \sin 1'' \Delta\Pi = D_1' - D' - \left\{ f \sin \Pi_0 + (t_1 - t)\frac{d\delta}{d\tau} + g + (\pm k - h)(t_1 - t)\frac{dp}{d\tau} \right\}^{\text{nördl.}}_{\text{südl.}} \text{Rand} \tag{39}$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, welche Änderungen die im vorigen abgeleiteten Gleichungen erfahren, wenn in der Gleichung (29) an Stelle von r sein strenger Wert r_n angewandt wird. In Fig. 7 sei E der Mittelpunkt der Erde, O der Beobachtungsort, Z' das geozentrische Zenit des Beobachtungsortes, M der Mittelpunkt des Mondes, m der beobachtete Randpunkt und demnach Om eine Tangente an die Mondoberfläche. Den gewählten Bezeichnungen gemäß ist $EM = r$, $OM = r'$, $Em = r_n$ und $MOm = R'$, wo also R' den vom Beobachtungsorte aus gesehenen Winkelhalbmesser des Mondes bedeutet; setzt man jetzt $Om = r_n'$, so folgt

Fig. 7.



$$\frac{r}{r_n} = \frac{r}{r_n'}\frac{r_n'}{r_n} = \frac{r_n'}{r_n}\frac{r}{r'\cos R'} \tag{40}$$

Aus (25^a) erhält man aber für den beobachteten Punkt des Mondrandes und mit Rücksicht darauf, daß gegenwärtig $\gamma = \varphi'$ ist,

$$r_n \sin(D - \varphi') = r_n' \sin(D' - \varphi')$$

und ferner, wenn δ' die Deklination des Mondzentrums, gesehen vom Beobachtungsort bedeutet,

$$r \sin(\delta - \varphi') = r' \sin(\delta' - \varphi')$$

Mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen ergibt sich aus (40)

$$\frac{r}{r_n} = \frac{\sin(D - \varphi')\sin(\delta' - \varphi')}{\sin(D' - \varphi')\sin(\delta - \varphi')}\sec R' \tag{41}$$

Nun hat man die Identität

$$\frac{\sin(D-\varphi')\sin(\delta'-\varphi')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')} = 1 + \frac{\sin(D-\varphi')\sin(\delta'-\varphi') - \sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')}$$

In dem Zähler des auf der rechten Seite stehenden Bruches setze man $\sin(D-\varphi') = \sin[(D-D')+(D'-\varphi')]$ und $\sin(\delta-\varphi') = \sin[(\delta-\delta')+(\delta'-\varphi')]$. Entwickelt man diese beiden Sinus und setzt $\cos(D-D') = 1$, $\sin(\delta-\delta') = \sin(D-D')$, $\cos(\delta-\delta') = 1$, so folgt

$$\frac{\sin(D-\varphi')\sin(\delta'-\varphi')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')} = 1 + \frac{\sin(D-D')\sin(\delta'-D')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichung (28),

$$\frac{\sin(D-\varphi')\sin(\delta'-\varphi')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')} = 1 - \frac{\varrho\sin(\delta'-D')}{r_{\prime\prime}\sin(\delta-\varphi')} \tag{42}$$

Hierin ist $\delta'-D' = \mp R'$, wo man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden hat, jenachdem der nördliche oder südliche Rand beobachtet worden ist. Da also $\sin(\delta'-D')$ klein ist und da dasselbe von $\varrho : r_{\prime\prime}$ gilt, so kann man $r_{\prime\prime}$ mit r vertauschen. Indem dann noch für $\varrho : r$ sein in (22a) gegebener Wert substituiert wird, ergibt sich

$$\frac{\sin(D-\varphi')\sin(\delta'-\varphi')}{\sin(D'-\varphi')\sin(\delta-\varphi')} = 1 \pm \frac{[\varrho]\sin p\sin R'}{\sin(\delta-\varphi')} \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix}\ \text{Rand} \tag{43}$$

Aus (41) und (43) folgt, wenn an Stelle von R' der geozentrische Halbmesser R angewandt wird,

$$\frac{1}{r_{\prime\prime}} = \frac{1}{r}\left\{\sec R \pm \frac{R[\varrho]\sin 1''\sin p}{\sin(\delta-\varphi')}\right\} \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix}\ \text{Rand} \tag{44}$$

Führt man nun die Abkürzung ein

$$i = \sec R \pm \frac{R[\varrho]\sin 1''\sin p}{\sin(\delta-\varphi')}, \quad \begin{matrix}\text{nördl.}\\ \text{südl.}\end{matrix}\ \text{Rand} \tag{45}$$

wo i nahe gleich 1 ist, so wird

$$\frac{1}{r_{\prime\prime}} = \frac{i}{r} \tag{46}$$

Dieser Ausdruck ist in die Gleichung (28) zu substituieren, oder, was gleichbedeutend ist, es ist die rechte Seite der Gleichung (29) mit i zu multiplizieren. An Stelle der Gleichungen (30) und (31) erhält man dann neue, in denen $\sin p$ durch $i\sin p$ ersetzt ist; in dem kleinen von $\sin^3 p$ abhängigen Gliede darf man jedoch $i = 1$ annehmen. Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die Gleichung (31a). In letzterer muß nämlich $\sin p_1$ durch $i_1\sin p_1$ ersetzt werden, wo

$$i_1 = \sec R_1 \pm \frac{R_1[\varrho_1]\sin 1''\sin p}{\sin(\delta_1-\varphi_1')} \tag{47}$$

ist; in dem von $\sin^3 p_1$ abhängigen Gliede dagegen kann $i_1 = 1$ angenommen werden.

Geht man nun auf die Bildung der Gleichungen (38) und (39) zurück, so sieht man, daß man die strengen zur Bestimmung von Π, bzw. $\Delta\Pi$ dienenden Gleichungen erhält, wenn man in (38) und (39) den Koeffizienten f durch

(48) $$F = \frac{\sin p_1^\circ}{\sin 1'' \sin \Pi_0} \{[\varrho] i \sin(\varphi' - D') - [\varrho_1] i_1 \sin(\varphi_1' - D_1')\}$$

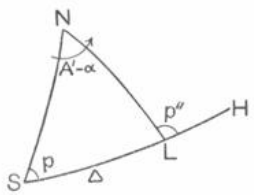
ersetzt.

Ein zweites Mittel, die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes zu finden, wird durch die Beobachtungen von Sternbedeckungen an weit voneinander entfernten Orten der Erde geboten; die hierzu erforderlichen Gleichungen findet man im 18. Kapitel angegeben.

72. Bestimmung der Sonnenparallaxe. Das beste Mittel, die Sonnenparallaxe zu bestimmen, besteht darin, daß man mit Hilfe eines Heliometers auf der nördlichen und südlichen Erdhälfte die Abstände eines der Erde nahe kommenden kleinen Planeten von einigen ihm benachbarten Fixsternen mißt, sowie auch den Positionswinkel jedes den Planeten mit einem der Sterne verbindenden Bogens, bezogen auf den Mittelpunkt des Bogens, beobachtet. Um die gemessenen Abstände und Positionswinkel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwenden zu können, muß man zunächst mittelst der als näherungsweise bekannt vorausgesetzten Örter des Planeten und seiner Vergleichsterne die Abstände und Positionswinkel berechnen.

Es seien α und δ die Rektaszension und Deklination eines Vergleichsterns, A und D seien die aus der Ephemeride genommene geozentrische Rektaszension und Deklination des Planeten, ΔA und ΔD seien die Werte der nach den Formeln (12) und unter Annahme eines Näherungswertes von π berechneten Parallaxe des Planeten in Rektaszension und Deklination, ferner werde $A + \Delta A = A'$ und $D + \Delta D = D'$ gesetzt; in dem sphärischen Dreieck (Fig. 8), welches gebildet wird von dem Nordpol des Äquators (N), dem vom Beobachter aus gesehenen Ort des Planeten (L) und dem Ort des Sterns (S), ist dann der Winkel bei N gleich $A' - \alpha$, die Seite $NL = 90^\circ - D'$ und $NS = 90^\circ - \delta$. Bezeichnet man jetzt den Winkelabstand SL des Planeten vom Stern mit Δ und setzt den Positionswinkel $NSL = p$, $NLH = p''$, so folgt aus dem Dreieck NSL

Fig. 8.



(49)
$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta \sin \tfrac{1}{2}(p'' + p) = \sin \tfrac{1}{2}(A' - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(D' + \delta)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\Delta \cos \tfrac{1}{2}(p'' + p) = \cos \tfrac{1}{2}(A' - \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(D' + \delta)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich Δ und $\frac{1}{2}(p'' + p)$ berechnen; wird dann noch der auf den Mittelpunkt des Bogens SL bezogene Positionswinkel von L mit p' bezeichnet, so hat man nach § 20, wenn Δ in Sekunden ausgedrückt ist,

(50) $$p' = \tfrac{1}{2}(p'' + p) - \tfrac{1}{16}[1 + 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(D' + \delta)] \Delta^2 \sin 1'' \sin 2p$$

Mit Rücksicht darauf, daß bei Planeten nur mäßig große Deklinationen in Frage kommen, ist das von Δ^2 abhängige Glied im allgemeinen zu vernachlässigen.

Sieht man zunächst von den Beobachtungsfehlern ab, so rühren die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Werten von p' und Δ zum Teil von den Fehlern der für die Vergleichsterne, bzw. für den Planeten angenommenen Örter her, zum Teil aber auch von dem Fehler des in den Gleichungen (12) für die Berechnung

der Parallaxe in Rektaszension und Deklination benutzten Wertes der Sonnenparallaxe. Nun lassen sich die Örter der Vergleichsterne gegenwärtig mit sehr großer Genauigkeit bestimmen, und von den minimalen in diesen Örtern noch vorhandenen Fehlern darf man annehmen, daß sie sich im Mittel aus mehreren Sternen gegenseitig aufheben; im folgenden sollen deshalb die Sternpositionen als fehlerfrei angesehen werden. Was die Fehler der Planetenephemeride betrifft, so kann man diese mit Hilfe einer sorgfältigen Untersuchung über die Bahn des Planeten sehr klein halten; der Fehler des gegenwärtig für die Sonnenparallaxe angenommenen Wertes endlich kann an und für sich nur äußerst klein sein. Es genügt demnach, nur die ersten Potenzen der Korrektionen der Planetenephemeride, bzw. der Sonnenparallaxe zu berücksichtigen. Wenn man jetzt die Gleichungen (49) differenziert und mit Rücksicht darauf, daß ein Fehler in Δ ohne Einfluß auf das kleine von Δ^2 abhängige Glied in (50) ist, $\frac{1}{2}d(p''+p) = dp'$ setzt, so erhält man mit einer für alle Fälle hinreichenden Genauigkeit

$$\begin{aligned} \sin p' d\Delta + \Delta \sin 1'' \cos p' dp' &= \cos D' dA' \\ \cos p' d\Delta - \Delta \sin 1'' \sin p' dp' &= dD' \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} d\Delta &= \sin p' \cos D' dA' + \cos p' dD' \\ \Delta \sin 1'' dp' &= \cos p' \cos D' dA' - \sin p' dD' \end{aligned} \tag{51}$$

Nun war oben $A' = A + \Delta A$ und $D' = D + \Delta D$ gesetzt, wo ΔA und ΔD die nach (12) berechneten Werte der Parallaxe des Planeten in Rektaszension und Deklination bedeuten; wenn jetzt mit dA und dD die Korrektionen der Planetenephemeride bezeichnet werden, und wenn $d\pi$ die Korrektion des Näherungswertes π_0 der Sonnenparallaxe bedeutet, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (12)

$$\begin{aligned} dA' &= dA - \frac{[\varrho]\cos\varphi'}{r\cos D}\sin(\Theta - A)\,d\pi \\ &= dA + [\text{Parallaxe in Rektaszension}]\,\frac{d\pi}{\pi_0} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$dD' = dD + [\text{Parallaxe in Deklination}]\,\frac{d\pi}{\pi_0}$$

Substituiert man die für dA' und dD' gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (51) und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \sin p' [\text{Parallaxe in Rekt.} \times \cos D'] + \cos p' [\text{Parallaxe in Dekl.}] &= u \\ \cos p' [\text{Parallaxe in Rekt.} \times \cos D'] - \sin p' [\text{Parallaxe in Dekl.}] &= w \end{aligned} \tag{52}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} d\Delta &= \sin p' \cos D' dA + \cos p' dD + u\,\frac{d\pi}{\pi_0} \\ \Delta \sin 1'' dp' &= \cos p' \cos D' dA - \sin p' dD + w\,\frac{d\pi}{\pi_0} \end{aligned} \tag{53}$$

Um mit Hilfe dieser Gleichungen die gesuchten Korrektionen dA, dD und $d\pi$ zu finden, hat man für $d\Delta$ die Differenz: beobachtete—berechnete Distanz, und für dp' die Differenz: beobachteter—berechneter Positionswinkel zu substituieren. Die

Werte von dA und dD sind aber nur während einer kurzen Zeit als konstant zu betrachten. Falls sich also die Beobachtungen auf einen längeren Zeitraum erstrecken, muß man die Gleichungen so in Gruppen zusammenfassen, daß zu jeder Gruppe nur zeitlich nahe liegende Beobachtungen gehören; aus jeder dieser Gruppen lassen sich dann die wahrscheinlichsten Werte von dA, dD und $d\pi$ bestimmen. Will man die Teilung der Beobachtungen vermeiden, so sind dA und dD mit Hilfe der in der Theorie der Bahnverbesserung gegebenen Formeln als Funktionen der Korrektionen der Bahnelemente des Planeten darzustellen und diese Ausdrücke in die Gleichungen (53) zu substituieren.

73. Beziehung zwischen der Aberrationskonstante und der Sonnenparallaxe. Nach § 59[a], (7) ist die dort mit k bezeichnete Aberrationskonstante durch die Gleichung definiert

$$k = \frac{an \sec \varphi}{V \sin 1''} \tag{54}$$

Hierin bedeutet a die halbe große Achse der Erdbahn, n die in Teilen des Radius ausgedrückte mittlere Bewegung der Erde, V die Geschwindigkeit des Lichtes und φ den Exzentrizitätswinkel der Erdbahn. Nimmt man nun den Radius des Erdäquators zu 6378.2 km an, und bezeichnet man mit $\pi_\odot$ die mittlere Horizontal-Äquatorealparallaxe der Sonne, so ist

$$a = \frac{6378.2}{\pi_\odot \sin 1''}$$

Ferner hat man, wenn eine mittlere Sekunde als Zeiteinheit gewählt wird,

$$V = 299\,860 \text{ km}$$

Da die Dauer eines siderischen Jahres 31 558 149 mittlere Zeitsekunden beträgt, so ist n durch die Gleichung bestimmt

$$n = \frac{1\,296\,000'' \sin 1''}{31\,558\,149}$$

Berücksichtigt man noch, daß $\varphi = 3455''$ ist, so folgt aus der Gleichung (54).

$$k\pi_\odot = 180.20$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich also $\pi_\odot$ finden, wenn k bekannt ist, und umgekehrt.

Kapitel XIII.

Refraktion.

74. Gesetz der Abnahme des Luftdrucks bei zunehmender Entfernung von der Erde. Die Theorie der Refraktion beruht auf der Annahme, daß die Atmosphäre aus unendlich dünnen, zum Mittelpunkte der Erde konzentrischen Kugelschichten bestehe; die Dichtigkeit der Luft wird innerhalb einer Schicht als konstant, aber von Schicht zu Schicht als stetig veränderlich betrachtet. Bedeutet nun P den Druck, t die Temperatur, Δ die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde und γ den dieser Entfernung entsprechenden Wert der Beschleunigung durch die Schwere, so ist die Änderung des Luftdrucks, welche einem Übergange von dem Abstande r zu dem Abstande $r + dr$ entspricht, gleich

$$dP = -\gamma \Delta dr \tag{1}$$

Wenn ferner P_0, t_0, Δ_0, γ_0 der Reihe nach den Luftdruck, die Temperatur, die Dichtigkeit der Luft und die Schwere am Beobachtungsorte bedeuten, und wenn l_0 die Höhe einer Luftsäule angibt, welche ebenfalls den Druck P_0 ausübt, und für deren sämtliche Teile die Temperatur, die Dichtigkeit und die Schwere dieselben Werte haben wie am Beobachtungsorte, so gilt die Gleichung

$$P_0 = \gamma_0 l_0 \Delta_0 \tag{2}$$

Als Maß des Luftdrucks wählt man den Druck einer Quecksilbersäule von $0^m{,}760$ Höhe und der Temperatur 0° C unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau oder, kurz ausgedrückt, den Druck einer Atmosphäre. Wenn also m die Dichtigkeit des Quecksilbers für die Temperatur 0° C bezeichnet, und Γ die durch die Schwere im Meeresniveau und unter der Breite 45° bewirkte Beschleunigung in Metern angibt, so ist der Druck einer Atmosphäre durch die Gleichung bestimmt

$$P' = 0^m{,}760\, \Gamma m \tag{2a}$$

Es läßt sich nun leicht die Höhe einer Säule trockener Luft von der Temperatur 0° C und der Dichtigkeit Δ', deren sämtliche Teile als unter dem Einflusse der Schwere Γ stehend angenommen werden, so bestimmen, daß der Druck dieser Luftsäule ebenfalls gleich P' ist. Wird nämlich die gesuchte Höhe mit l' bezeichnet, so hat man

$$P' = \Gamma l' \Delta' \tag{3}$$

also, wenn für P' sein in (2a) gegebener Wert substituiert wird,

$$l' = 0^m{,}760\, \frac{m}{\Delta'}$$

Nach *Regnault* wiegt aber ein Kubikmeter trockner Luft bei 0° C und 760^{mm} Barometerhöhe (unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau) $1292^{g}74$ und ein Kubikmeter Quecksilber bei 0° C $13\,595\,930^{g}$; somit ist

$$l' = 0^{m}760\,\frac{13\,595\,930}{1292.74} = 7993^{m}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergibt sich, wenn berücksichtigt wird, daß P' eine Konstante ist,

$$d\left(\frac{P}{P'}\right) = -\frac{\gamma \Delta}{\Gamma l' \Delta'}\,dr \tag{4}$$

Ferner folgt aus (2) und (3)

$$\frac{P_0}{P'} = \frac{\gamma_0 l_0 \Delta_0}{\Gamma l' \Delta'} \tag{5}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{P}{P'} &= p, & \frac{\Delta}{\Delta'} &= \mathfrak{r}, & \frac{\gamma}{\Gamma} &= g \\ \frac{P_0}{P'} &= p_0, & \frac{\Delta_0}{\Delta'} &= \mathfrak{r}_0, & \frac{\gamma_0}{\Gamma} &= g_0 \end{aligned} \tag{5a}$$

und nennt p den Luftdruck, $\mathfrak{r}$ die Dichtigkeit der Luft, g die Schwere in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, also p_0 den Luftdruck, $\mathfrak{r}_0$ die Dichtigkeit der Luft, g_0 die Schwere am Beobachtungsorte, d. i. in der Entfernung r_0 vom Erdzentrum, so ist damit als Einheit des Luftdrucks der Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Dichtigkeit die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur 0° C und unter dem Druck einer Atmosphäre, als Einheit der Schwere die Schwere unter der geographischen Breite 45° und im Meeresniveau gewählt, und die Gleichungen (4) und (5) nehmen die Form an

$$l'\,dp = -g\mathfrak{r}\,dr \tag{6}$$

$$l'p_0 = g_0\mathfrak{r}_0 l_0 \tag{7}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{l_0}{p_0}\,dp = -\frac{g\mathfrak{r}}{g_0\mathfrak{r}_0}\,dr = -\frac{r_0^2\mathfrak{r}}{r^2\mathfrak{r}_0}\,dr = r_0\,\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0}\,d\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

oder, wenn

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0} = 1 - \omega, \qquad \frac{r_0}{r} = 1 - s \tag{7a}$$

gesetzt wird,

$$dp = -p_0\,\frac{r_0}{l_0}\,(1-\omega)\,ds \tag{8}$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit einer im nächsten Paragraphen abzuleitenden Differentialgleichung zwischen p und ω wird sich eine Beziehung zwischen s und ω, also, nach der Bedeutung dieser Größen, das Gesetz ergeben, nach dem sich die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe ändert. Zunächst aber sollen die in (8) enthaltenen Unbekannten r_0 und l_0 bestimmt werden. Ist h die Seehöhe und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes, bezeichnet man ferner mit R die Ent-

fernung eines unter der geographischen Breite φ, aber im Meeresniveau gelegenen Punktes vom Mittelpunkte der Erde, so hat man

$$r_0 = R + h$$

Es möge nun a die halbe große Achse und e die Exzentrizität eines Erdmeridians bedeuten; aus der in § 67 gegebenen Formel (2) folgt dann näherungsweise

$$\frac{R}{a} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \cdots$$

Nimmt man jetzt

$$a(1 - \tfrac{1}{4} e^2) = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}, \qquad \frac{e^2}{4 - e^2} = 0.00168$$

an, so wird

$$R = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}(1 + 0.00168 \cos 2\varphi)$$

Folglich ergibt sich, wenn auch h in Metern ausgedrückt ist,

$$r_0 = 6\,366\,000^{\mathrm{m}}(1 + 0.00168 \cos 2\varphi + 0.000\,000\,157\, h) \tag{9}$$

Für l_0 folgt aus (7)

$$l_0 = \frac{p_0}{\mathfrak{r}_0} \frac{l'}{g_0} \tag{10}$$

Die Konstante l' ist bereits oben bestimmt worden. Was g_0 betrifft, so hat man aus den an zahlreichen Orten der Erde ausgeführten Schwerebestimmungen die Formel abgeleitet

$$g_0 = 1 - 0.00265 \cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\, h \tag{11}$$

Um den Wert von l_0 zu finden, ist also nur noch der Quotient $p_0 : \mathfrak{r}_0$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck bedient man sich des *Gay-Lussac—Mariotte*schen Gesetzes, welches, auf trockene Luft angewandt, lautet: Wenn der Ausdehnungskoeffizient der trockenen Luft mit a bezeichnet wird, so ist der Druck der trockenen Luft von der Temperatur t proportional dem Produkt aus der Dichtigkeit dieser Luft und dem Aggregat $1 + at$. Da jedoch die Dichtigkeit der trockenen Luft, welche unter dem Drucke 1 steht und die Temperatur 0° C hat, als Einheit der Dichtigkeit gewählt wurde, so muß die Proportionalitätskonstante gleich 1 sein; demnach erhält man für die Dichtigkeit der trockenen Luft von der Temperatur t

$$\text{Dichtigkeit} = \frac{\text{Druck}}{1 + at} \tag{A}$$

Die atmosphärische Luft enthält nun stets eine gewisse Menge Wasserdampf. Nach den Versuchen *Daltons* ist aber der Druck eines Gemenges von trockener Luft und Dampf bei der Temperatur t gleich der Summe der Drucke, welche diese beiden Substanzen jede für sich ausüben. Ist also p der Druck, welchen die feuchte Luft ausübt, und $\mathfrak{p}$ der Druck des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, so ist $p - \mathfrak{p}$ der Druck, welchen die trockene Luft allein ausübt; der Gleichung (A) zufolge ergibt sich somit für die Dichtigkeit ($\mathfrak{r}_1$) dieser trockenen Luft

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{p - \mathfrak{p}}{1 + at}$$

Würde der Wasserdampf von der Temperatur t, dessen Druck mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet wurde, durch trockene Luft von der Temperatur t ersetzt, welche ebenfalls den Druck $\mathfrak{p}$ ausübte, so würde die Dichtigkeit dieser Luft gleich $\mathfrak{p} : (1 + at)$ sein. Der Versuch lehrt aber, daß das Gewicht eines Volumens Wasserdampfes nur 0.622 des Gewichtes des gleichen Volumens trockener Luft von gleicher Temperatur und unter gleichem Druck beträgt; für gleiche Temperatur und gleichen Druck ist also auch die Dichtigkeit des Wasserdampfes gleich 0.622 mal der Dichtigkeit der trockenen Luft. Somit ergibt sich für die Dichtigkeit des Wasserdampfes, dessen Temperatur gleich t, und dessen Druck gleich $\mathfrak{p}$ ist,

$$\mathfrak{r}_2 = 0.622 \frac{\mathfrak{p}}{1 + at}$$

Die oben mit $\mathfrak{r}$ bezeichnete Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist gleich $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$; durch Substitution der Werte von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ erhält man demnach

$$\mathfrak{r} = \frac{p - 0.378\mathfrak{p}}{1 + at}$$

oder, indem man 0.378 durch $\frac{3}{8}$ ersetzt,

$$p = \frac{\mathfrak{r}(1 + at)}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}}{p}} \tag{12}$$

Wenn also die für den Beobachtungsort gültigen Werte von p, $\mathfrak{p}$, ... durch den angehängten Index o gekennzeichnet werden, so hat man

$$\frac{p_o}{\mathfrak{r}_o} = \frac{1 + at_o}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_o}{p_o}} \tag{13}$$

Substituiert man nun die für g_o und $\frac{p_o}{\mathfrak{r}_o}$ gefundenen Werte in die Gleichung (10) und setzt nach *Regnault* $a = 0.003663$, so folgt

$$l_o = l'(1 + 0.003663\, t_o + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_o}{p_o} + 0.00265 \cos 2\varphi + 0.000000310h) \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (9) und dem früher gefundenen Wert $l' = 7993^m$ erhält man, wenn das von h abhängige Glied vernachlässigt wird,

$$\frac{l_o}{r_o} = \frac{7993}{6366000}(1 + 0.003663\, t_o + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_o}{p_o} + 0.0010 \cos 2\varphi) \tag{15}$$

75. Änderung der Dichtigkeit mit der Höhe einer Luftschicht. Um die im vorigen Paragraphen angekündigte Differentialgleichung zwischen p und ω ableiten zu können, ist man genötigt, auf Grund der bei Ballonfahrten ausgeführten Messungen des Luftdrucks, der Temperatur und des Dunstdrucks sowie der hieraus nach § 76 berechneten Werte der Dichtigkeit der Luft einige Hypothesen zu machen. Die erste Annahme ist, daß für alle Schichten der Atmosphäre

$$\frac{\mathfrak{p}}{p} = \frac{\mathfrak{p}_o}{p_o} \tag{16}$$

vorausgesetzt wird. Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt dann

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\mathfrak{r}\,(1 + at)}{\mathfrak{r}_0 (1 + at_0)} \tag{16a}$$

oder, da $a = 0.003\,663 = 1 : 273$ ist,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0}\left(1 - \frac{t_0 - t}{273^0 + t_0}\right) \tag{17}$$

Macht man die weitere Annahme, daß bei zunehmender Entfernung von der Erdoberfläche die Änderung der Temperatur derjenigen der Dichtigkeit proportional ist, so hat man

$$t_0 - t = C\,(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}), \tag{18}$$

wo C noch von der Tages- oder Jahreszeit abhängig gedacht werden kann. Hieraus erhält man für $\mathfrak{r} = 0$, d. h. für die Grenze der Atmosphäre, wenn die dort herrschende Temperatur $t = -273^0 + T$ gesetzt wird,

$$t_0 + 273^0 - T = C\mathfrak{r}_0$$

Durch Division der zwei letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{t_0 - t}{273^0 + t_0} = \frac{\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_0}\left(1 - \frac{T}{273^0 + t_0}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (7a) und wenn

$$1 - \frac{T}{273^0 + t_0} = f \tag{19}$$

gesetzt wird,

$$\frac{t_0 - t}{273^0 + t_0} = f\omega \tag{20}$$

Somit nimmt die Gleichung (17) die Form an

$$\frac{p}{p_0} = (1 - \omega)\,(1 - f\omega) \tag{21}$$

Wenn nun p_0 und f gegebene Werte haben, so erhält man durch Differentiation von (21)

$$dp = -p_0\,[(1 - f) + 2f\,(1 - \omega)]\,d\omega$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit (8) ergibt sich

$$\frac{r_0}{l_0}\,ds = (1 - f)\,\frac{d\omega}{1 - \omega} + 2f\,d\omega$$

Integriert man diese Gleichung und bestimmt die Integrationskonstante durch die Bedingung, daß für den Beobachtungsort $\omega = s = 0$ sein muß, so erhält man die für die Folge wichtige Beziehung

$$\frac{r_0}{l_0}\,s = -(1 - f)\log(1 - \omega) + 2f\omega \tag{22}$$

76. Bestimmung des Drucks und der Dichtigkeit der Luft. Um die bisher abgeleiteten Gleichungen verwerten zu können, muß noch gezeigt werden, in welcher Weise sich der Druck und die Dichtigkeit der Luft bestimmen lassen. Ist $\mathfrak{B}$ die wahre Barometerhöhe, τ die Temperatur des Quecksilbers, m' seine Dichtigkeit bei der Temperatur τ und γ_0 die Schwere für den Beobachtungsort, so erhält man für den Druck der Luft am Beobachtungsort

$$P_0 = \gamma_0 m' \mathfrak{B}$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Gleichung (2^a), so ergibt sich mit Rücksicht auf (5^a)

$$p_0 = g_0 \frac{m' \mathfrak{B}}{m\, 760^{mm}} \tag{23}$$

Um aus der abgelesenen Barometerhöhe die wahre zu erhalten, ist erstere zunächst wegen eventueller Teilungsfehler der Skala oder des Nonius und auch wegen einer etwaigen, durch die Kapillarität bewirkten Depression des Quecksilbers zu korrigieren; die so verbesserte Ablesung werde mit B bezeichnet. Ist nun die Skala bei der Temperatur 0° C geteilt worden, und sind die Teilstriche auf einer messingnen Röhre eingraviert, welche das eigentliche Barometerrohr in seiner ganzen Länge umgibt, so erhält man die wahre Barometerhöhe aus der Gleichung

$$\mathfrak{B} = B\,(1 + 0.000019\tau), \tag{24}$$

wo der Koeffizient von τ den Ausdehnungskoeffizienten des Messings angibt.

Die Dichtigkeit m' des Quecksilbers bei der Temperatur τ findet man aus der für 0° gültigen Dichtigkeit m mit Hilfe der Formel

$$m' = \frac{m}{1 + 0.000\,181\,\tau} \tag{24a}$$

Substituiert man die Werte von $\mathfrak{B}$ und m', sowie den für g_0 gegebenen Ausdruck (11) in die Gleichung (23), so folgt

$$p_0 = (1 - 0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310h)\,\frac{B\,(1 - 0.000\,162\,\tau)}{760} \tag{25}$$

Der Gleichung (13) zufolge hat man aber auch, wenn $a = 0.003\,663$ gesetzt wird,

$$p_0 = \mathfrak{r}_0 \frac{1 + 0.003\,663\,t_0}{1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}} \tag{26}$$

Mit Hilfe eines Psychrometers läßt sich nun die Höhe einer Quecksilbersäule bestimmen, deren Druck gleich ist demjenigen des in der Luft vorhandenen Wasserdampfes; der Druck selbst ergibt sich aus der Gleichung (25), wenn man für B die Höhe jener Quecksilbersäule, ausgedrückt in Millimetern, substituiert. Bezeichnet man diese Höhe mit π_0, so wird

$$\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B};$$

die Gleichungen (25) und (26) geben dann

$$(27)\quad \mathfrak{r}_0 = \frac{B}{760}\,\frac{1-0.000\,162\,t_0}{1+0.003\,663\,t_0}\,[1+0.000\,162(t_0-\tau)- \\ -0.00265\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310h]\left(1-\frac{3}{8}\,\frac{\pi_0}{B}\right)$$

Wird der Wert, welchen $\mathfrak{r}_0$ für $B = 760^{mm}$, $t_0 = \tau = 0^\circ$ C, $h = 0$, $\varphi = 45^\circ$, $\pi_0 = 6^{mm}$ annimmt, mit $\mathfrak{r}'_0$ bezeichnet, so folgt aus (27)

$$(28)\quad \mathfrak{r}'_0 = 1 - \frac{3}{8}\,\frac{6}{760}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich mit Vernachlässigung verschwindend kleiner Glieder

$$\frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}'_0}\,\frac{1+0.003\,663\,t_0}{1-0.000\,162\,t_0} = \frac{B}{760}\,[1+0.000\,162(t_0-\tau)-0.002\,65\cos 2\varphi \\ -0.000\,000\,310h]+\frac{1}{760}\,\frac{3}{8}\left(6\,\frac{B}{760}-\pi_0\right)$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen. Bezeichnet man nämlich mit B_m die mittlere für den Beobachtungsort gültige Barometerhöhe und setzt

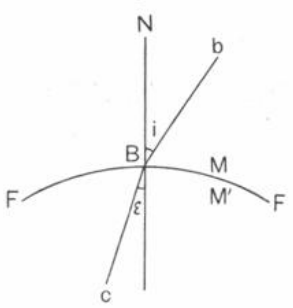
$$(29)\quad \mathfrak{b} = B + B_m\,[0.000\,162(t_0-\tau)-0.00265\cos 2\varphi - \\ -0.000\,000\,310h]+\frac{3}{8}\left(6\,\frac{B_m}{760}-\pi_0\right)$$

so erhält man mit einer für alle Fälle ausreichenden Genauigkeit

$$(30)\quad \frac{\mathfrak{r}_0}{\mathfrak{r}'_0} = \frac{\mathfrak{b}}{760}\,\frac{1-0.000\,162\,t_0}{1+0.003\,663\,t_0}$$

77. Differentialausdruck der Refraktion. Ein Lichtstrahl bB (Fig. 1) treffe in B auf die Grenzfläche FF zweier Medien M und M' und werde nach Bc gebrochen. Aus physikalischen Versuchen ergeben sich dann folgende drei Sätze: 1. Bc liegt mit Bb und der Normalen BN in einer Ebene. 2. Bezeichnen i und ε die Winkel, welche der einfallende, bzw. der gebrochene Strahl mit der Normalen BN bilden, und bedeutet ν eine Konstante, so ist

Fig. 1.



$$(31)\quad \frac{\sin i}{\sin\varepsilon} = \nu$$

Die Konstante ν wird der Brechungsexponent des Mediums M' in bezug auf das Medium M genannt. 3. Es seien μ' und μ die Brechungsexponenten von M', bzw. M in bezug auf ein Medium L; dann ist

$$(32)\quad \frac{\mu'}{\mu} = \nu$$

Ist unter dem Medium L der luftleere Raum zu verstehen, so werden μ' und μ kurzweg die Brechungsexponenten der Medien M', bzw. M genannt.

Aus den zwei letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\sin i}{\sin \varepsilon} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{33}$$

Wenn nun μ' nur wenig von μ verschieden ist, so unterscheidet sich i wenig von ε; setzt man dann

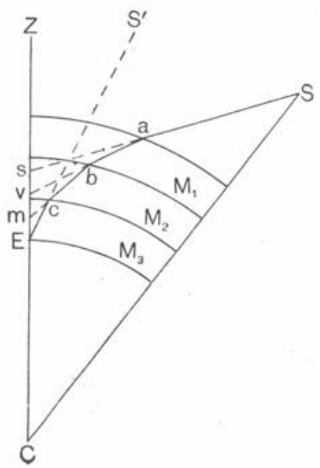
$$\mu' = \mu + d\mu, \qquad \varepsilon = i - d\Theta,$$

wo also $d\Theta$ den Winkel bezeichnet, den der über B hinaus verlängerte einfallende Strahl mit dem gebrochenen Strahl bildet, so folgt aus (33)

$$d\Theta = \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{tang} i \tag{34}$$

Es werde jetzt angenommen, daß die Atmosphäre aus einer Reihe sehr dünner Kugelschichten M_1, M_2, ... bestehe, deren Zentrum C der Mittelpunkt der Erde sei (Fig. 2). Wir setzen ferner voraus, daß der Brechungsexponent innerhalb jeder Schicht konstant ist und sich von Schicht zu Schicht nur wenig ändert. Ein Lichtstrahl Sa, der, aus dem luftleeren Raum kommend, die Grenze der Atmosphäre in a trifft, werde in der ersten Schicht nach ab gebrochen, in der zweiten nach bc, in der dritten nach cE, usw. Ist E ein Punkt der Erdoberfläche, so wird ein dort befindlicher Beobachter den Stern S, welchen wir als die Lichtquelle annehmen, in der Richtung EcS' wahrnehmen. Der Winkel ZES', wo Z das Zenit des Beobachters in E bezeichnet, wird die scheinbare Zenitdistanz des Sterns genannt.

Fig. 2.



Aus dem Dreiecke Ccb folgt, wenn $Cb = r_1$, $Cc = r_2$, $Ccb = 180^\circ - i_2$ und $Cbc = \varepsilon_1$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin i_2}{\sin \varepsilon_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (33), wenn der Winkel Cba mit $180^\circ - i_1$ und die Brechungsexponenten der Medien M_1 und M_2 mit μ_1, bzw. μ_2 bezeichnet werden,

$$\frac{\sin i_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$r_2 \mu_2 \sin i_2 = r_1 \mu_1 \sin i_1$$

Da diese Gleichung für je zwei aufeinander folgende Schichten gilt, so ergibt sich der Satz: Es seien M_m und M_n zwei beliebige nicht aufeinander folgende Schichten der Atmosphäre mit den Brechungsexponenten μ_m, bzw. μ_n, P und Q seien die Punkte, in denen ein Lichtstrahl die Grenzflächen der Schichten M_m und M_{m+1}, bzw. M_n und M_{n+1} schneidet; die Abstände der Punkte P und Q vom Mittelpunkte der Erde mögen mit r_m und r_n bezeichnet werden. Wenn dann der in

P einfallende Strahl mit der durch P normal zu der Grenzfläche der Schichten M_m und M_{m+1} gezogenen Geraden den Winkel i_m bildet, wenn ferner der in Q einfallende Strahl mit der durch Q normal zu der Grenzfläche der Schichten M_n und M_{n+1} gezogenen Geraden den Winkel i_n bildet, so ist

$$r_m \mu_m \sin i_m = r_n \mu_n \sin i_n$$

Nimmt man die Schichten als unendlich dünn an, so wird der Weg des Lichtes eine Kurve und die letzte Gleichung drückt jetzt folgendes aus: Bedeutet r die Entfernung eines Punktes U der Kurve vom Mittelpunkte der Erde, bedeutet ferner μ den dem Punkte U entsprechenden Wert des Brechungsexponenten der Luft, und bezeichnet i den Winkel zwischen der in U an die Kurve gezogenen Tangente und der Verbindungslinie von U mit dem Mittelpunkte der Erde, so hat das Produkt $r\mu \sin i$ für alle Punkte der Kurve denselben Wert. In dem Punkte E, in dem das Licht den Beobachter trifft, ist aber $r = EC = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$, wo z die scheinbare Zenitdistanz des Sterns bedeutet; somit ist

$$r\mu \sin i = r_0 \mu_0 \sin z \tag{35}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man aus (34)

$$d\Theta = \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu} \tag{36}$$

Man verlängere jetzt irgend einen einfallenden Strahl, beispielsweise ab in Fig. 2 und den entsprechenden gebrochenen Strahl bc bis zu ihren Durchschnittspunkten v, bzw. m mit CZ; der Definition von $d\Theta$ gemäß ist dann der Winkel vbm gleich dem Werte von $d\Theta$ im Punkte b. Nun ist aber $vbm = Zvb - Zmb$. Integriert man also die Gleichung (36), indem man auf der rechten Seite als Grenzen des Integrals die für die Grenze der Atmosphäre, bzw. für den Beobachtungsort gültigen Werte $\mu = 1$ und $\mu = \mu_0$ wählt, so erhält man, wenn der Winkel ZsS zwischen dem die Grenzschicht der Atmosphäre in a treffenden Lichtstrahl aS und CZ mit ζ bezeichnet wird,

$$\zeta = z + \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z}} \frac{d\mu}{\mu} \tag{37}$$

Wäre keine Atmosphäre vorhanden, so würde der Beobachter in E die wahre Zenitdistanz ZES beobachten; bezeichnet man diesen Winkel mit ζ und den Winkel sSE mit σ, so ist

$$\zeta = \zeta - \sigma$$

Wegen der im Verhältnis zu den Entfernungen der Himmelskörper kleinen Erddimensionen ist σ ein sehr kleiner Winkel; setzt man demgemäß $\sin\sigma = \sigma \sin 1''$, so folgt aus dem Dreieck sSE, wenn Es mit x und ES mit Δ bezeichnet wird,

$$\sigma \sin 1'' = \frac{x}{\Delta} \sin\zeta = \frac{x}{r_0} \frac{r_0}{\Delta} \sin\zeta$$

An Stelle des Quotienten $x : r_0$ läßt sich ein anderer Ausdruck einführen. Zunächst ergibt sich aus dem Dreieck saC, wenn $aC = H$ und $saC = \varphi$ gesetzt wird,

$$r_0 + x = \frac{H \sin\varphi}{\sin\zeta}$$

Oben wurde aber gefunden, daß das Produkt $r\mu \sin i$ in allen Punkten eines Lichtstrahls denselben Wert besitze. Im Punkte a des Strahls $SabcE$ ist nun $r = H$, $\mu = 1$, $i = \varphi$, und im Punkte E ist $r = r_0$, $\mu = \mu_0$, $i = z$; somit ist

$$H \sin\varphi = r_0 \mu_0 \sin z$$

Demnach wird die vorige Gleichung

$$1 + \frac{x}{r_0} = \frac{\mu_0 \sin z}{\sin\zeta} \tag{37a}$$

und die Gleichung für σ verwandelt sich in

$$\sigma = \frac{r_0}{\Delta \sin 1''} (\mu_0 \sin z - \sin\zeta)$$

Hier kann man Δ als die Entfernung des Gestirns vom Mittelpunkte der Erde auffassen; setzt man dann

$$\frac{r_0}{\Delta \sin 1''} = \Pi ,$$

wo Π die Horizontalparallaxe des Gestirns genannt wird, so folgt

$$\sigma = \Pi(\mu_0 \sin z - \sin\zeta)$$

Der physikalisch bestimmte Brechungsexponent der Luft mittlerer Dichtigkeit ist für die dem hellsten Teil des Spektrums angehörigen Lichtstrahlen gleich 1.000 292. Die Differenz zwischen ζ und z erreicht ihren Maximalwert, wenn sich das Gestirn im Horizont befindet ($z = 90^\circ$), und zwar folgt aus den in § 40 erwähnten Beobachtungen des Auf- und Unterganges der Gestirne, daß für $z = 90^\circ$ die wahre Zenitdistanz $\zeta = 90^\circ 6$ angenommen werden kann. Für den Mond, dessen mittlere Parallaxe $57'$ beträgt, wird somit σ selbst im Horizont nicht größer als $1''$; für alle übrigen Himmelskörper ist σ verschwindend klein. Mit Rücksicht hierauf bezeichnet man den durch die Gleichung (37) bestimmten Winkel ζ als die wahre Zenitdistanz.

78. Einfluß des Wasserdampfes auf die brechende Kraft der Luft. Es bedeute K den Brechungsexponenten und δ die Dichtigkeit eines Gases für die Temperatur t und den Druck v, ferner seien K' und δ' die für die Temperatur 0° C und den Druck einer Atmosphäre gültigen Werte von K und δ; den physikalischen Versuchen zufolge hat man dann

$$\frac{K^2 - 1}{K'^2 - 1} = \frac{\delta}{\delta'} ,$$

wo $K^2 - 1$ die brechende Kraft des Gases für die Temperatur t und den Druck v genannt wird. Ferner ergibt sich aus dem *Gay-Lussac—Mariotte*schen Gesetze, wenn der Ausdehnungskoeffizient des Gases mit e bezeichnet und der Druck einer Atmosphäre als Einheit des Drucks gewählt wird,

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{v}{1 + et}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$(B) \qquad K^2 - 1 = (K'^2 - 1)\frac{v}{1 + et}$$

Es sei nun p der in einem beliebigen Punkte der Atmosphäre herrschende Druck, $\mathfrak{p}$ sei der Druck des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, also $p - \mathfrak{p}$ der Druck der trockenen Luft; ferner mögen μ, ν und n die Brechungsindices der atmosphärischen Luft, des Wasserdampfes und der trockenen Luft für die Temperatur t und den Druck p, bzw. $\mathfrak{p}$, bzw. $p - \mathfrak{p}$ bezeichnen. Macht man dann von dem von *Biot* und *Arago* aufgestellten Gesetze Gebrauch, wonach die brechende Kraft eines Gemisches von Gasen, zwischen denen keine chemische Verwandtschaft besteht, der Summe der brechenden Kräfte der Bestandteile gleich ist, so erhält man

$$\mu^2 - 1 = (\nu^2 - 1) + (n^2 - 1)$$

Wenn aber ν' und n' die für die Temperatur 0° C. und den Druck einer Atmosphäre gültigen Werte von ν und n bedeuten, wenn ferner die Ausdehnungskoeffizienten des Wasserdampfes und der trockenen Luft mit e und a bezeichnet werden, so folgt aus der Gleichung (B)

$$\nu^2 - 1 = (\nu'^2 - 1)\frac{\mathfrak{p}}{1 + et}, \qquad n^2 - 1 = (n'^2 - 1)\frac{p - \mathfrak{p}}{1 + at}$$

Demnach wird

$$(\mu^2 - 1) = \frac{n'^2 - 1}{1 + at}\left[p - \mathfrak{p} + \frac{\nu'^2 - 1}{n'^2 - 1}\,\frac{1 + at}{1 + et}\,\mathfrak{p}\right]$$

Nach den Versuchen von *Lorenz* (Wiedemanns Annalen, Band 11) hat man

$$(n'^2 - 1) - (\nu'^2 - 1) = 0.000082$$

und für Strahlen von der Wellenlänge der Linie D des Spektrums

$$n'^2 - 1 = 0.000582$$

Damit erhält man

$$\mu^2 - 1 = \frac{n'^2 - 1}{1 + at}\left[p - \mathfrak{p} + 0.86\,\frac{1 + at}{1 + et}\,\mathfrak{p}\right]$$

Da $a = 0.0037$ und für den gesättigten Wasserdampf $e = 0.0042$ ist, so darf man in dem kleinen von $\mathfrak{p}$ abhängigen Gliede unbedenklich $(1 + at) : (1 + et) = 1$ annehmen; die vorige Gleichung wird dann

$$\mu^2 - 1 = (n'^2 - 1)\frac{p - 0.14\,\mathfrak{p}}{1 + at}$$

Für den in dieser Gleichung vorkommenden Koeffizienten von $\mathfrak{p}$ erhielt *Radau* aus den Versuchen von *Fizeau* und *Jamin* die Werte 0.13 und 0.115: gibt man dem Koeffizienten den Mittelwert $\frac{1}{8}$, so folgt

$$\mu^2 - 1 = (n'^2 - 1)\,\frac{p\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at}$$

oder, wenn

$$\frac{p\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at} = \varrho \tag{38}$$

und

$$n'^2 - 1 = 2c \tag{38a}$$

gesetzt wird,

$$\mu^2 - 1 = 2c\varrho \tag{39}$$

Aus der Gleichung (12) erhält man für die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft

$$\mathfrak{r} = \frac{p\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{p}}{p}\right)}{1 + at};$$

die vorhin mit ϱ bezeichnete Größe unterscheidet sich also von der Dichtigkeit der Luft dadurch, daß an Stelle des Faktors $\frac{3}{8}$ von $\frac{\mathfrak{p}}{p}$ der Faktor $\frac{1}{8}$ tritt. Nach *Radaus* Vorgange soll nun ϱ die optische Dichtigkeit der atmosphärischen Luft genannt werden; man hat dann den Satz, daß die brechende Kraft der Luft ihrer optischen Dichtigkeit proportional ist.

Den Gleichungen (38) und (39) zufolge hat man, wenn p_0 den Luftdruck, $\mathfrak{p}_0$ den Druck des atmosphärischen Wasserdampfes, t_0 die Temperatur, μ_0 den Brechungsexponenten und ϱ_0 die optische Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsort bedeutet,

$$\varrho_0 = \frac{p_0\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}\right)}{1 + at_0} \tag{40}$$

und

$$\mu_0^2 - 1 = 2c\varrho_0 \tag{40a}$$

Substituiert man für p_0 seinen Ausdruck (25) und setzt, wie früher $a = 0.003\,663$ und $\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$, so ergibt sich aus (40)

$$\varrho_0 = \frac{B\,(1 - 0.000\,162\,t_0)}{760\,(1 + 0.003\,663\,t_0)}\,[1 + 0.000\,162\,(t_0 - \tau) - 0.00265\,\cos 2\varphi - 0.000\,000\,310\,h]\left(1 - \frac{1}{8}\,\frac{\pi_0}{B}\right)$$

Demnach wird, wenn ϱ_0' die optische Dichtigkeit der Luft für $B = 760^{\text{mm}}$, $t_0 = \tau = 0^{\circ}\,\text{C}$, $h = 0$, $\varphi = 45^{\circ}$, $\pi_0 = 6^{\text{mm}}$ bedeutet,

$$\varrho_0' = 1 - \frac{1}{8}\,\frac{6}{760} \tag{41}$$

Bezeichnet man jetzt wieder mit B_m die mittlere Barometerhöhe des Beobachtungsortes und setzt

$$(41^a)\quad \beta = B + B_m[0.000162(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - 0.0000003 10h] + \frac{1}{8}\left(6\frac{B_m}{760} - \pi_0\right),$$

so erhält man

$$(41^b)\quad \frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \frac{\beta}{760}\,\frac{1 - 0.000162\,t_0}{1 + 0.003663\,t_0}$$

Für einen gegebenen Beobachtungsort wird die Berechnung von β sehr einfach, wenn man zwei kleine Tabellen konstruiert, von denen die eine mit dem Argument $t_0 - \tau$ das Glied

$$B_m[0.000162(t_0 - \tau) - 0.00265\cos 2\varphi - 0.0000003 10h]$$

gibt, während die zweite das von dem Dampfdruck π_0 abhängige Glied liefert. Nachdem man β gefunden hat, kann man aus meinen Refraktionstafeln*) $\log\frac{\beta}{760}$ entnehmen; diese Tafeln geben auch den log des von t_0 abhängigen Quotienten in (41^b).

79. Transformation des Refraktionsintegrals. Da der in § 75 gemachten Annahme gemäß

$$\frac{\mathfrak{p}}{p} = \frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}$$

sein soll, so folgt aus den Gleichungen (38) und (40)

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p(1 + at_0)}{p_0(1 + at)}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (16^a) ergibt sich demnach

$$\varrho : \varrho_0 = \mathfrak{r} : \mathfrak{r}_0$$

Man kann also unter Benutzung der durch die Gleichung (7^a) eingeführten Variabelen ω

$$(42)\quad 1 - \frac{\varrho}{\varrho_0} = \omega$$

setzen; setzt man ferner noch

$$(43)\quad \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0} = \mathfrak{a},$$

so erhält man aus (39) und (40^a)

$$(44)\quad \frac{\mu^2}{\mu_0^2} = 1 - 2\mathfrak{a}\omega$$

Die logarithmische Differentiation dieser Gleichung gibt

$$(44^a)\quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{\mathfrak{a}\,d\omega}{1 - 2\mathfrak{a}\omega}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (44) und (44^a) läßt sich nun in dem Integral (37) die Variabele μ durch ω ersetzen. Um die neuen Integrationsgrenzen zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach (39) dem Werte $\mu = 1$ der Wert $\varrho = 0$ entspricht;

*) *Wilhelm Engelmann*, Leipzig 1906.

für $\varrho = 0$ ist aber nach (42) $\omega = 1$. Der Wert $\mu = \mu_0$ gilt für den Beobachtungsort, und für diesen ist $\varrho = \varrho_0$, folglich $\omega = 0$. Bringt man also das Integral (37) in die Form

$$\mathfrak{R} = \zeta - z = \int_1^{\mu_0} \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 z} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} \frac{d\mu}{\mu}, \tag{45}$$

setzt dann, wie in (7a),

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s$$

und berücksichtigt, daß

$$\frac{1}{\sin^2 z} = 1 + \operatorname{cotg}^2 z$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{R} = \int_0^1 \frac{\mathfrak{a}(1-s)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-\frac{3}{2}} d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + (2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1}}}$$

Dieses Integral läßt sich vereinfachen, wie im folgenden gezeigt werden soll. Zuvor aber erscheint es wünschenswert, sich eine Vorstellung über die Größe von $\mathfrak{a}$ und s zu verschaffen. Wie oben erwähnt wurde, ist der Brechungsexponent der Luft mittlerer Dichtigkeit für gelbe Strahlen gleich $1 \cdot 000\,292$; den Gleichungen (40a) und (43) zufolge ist somit der zugehörige Wert von $\mathfrak{a} = 0 \cdot 0003$. Die durch die zweite Gleichung (7a) definierte Größe s ist an der Oberfläche der Erde gleich 0 und würde für $r = \infty$ gleich 1 werden. Die Höhe der Atmosphäre aber, insoweit letztere noch einen merklichen Beitrag zur Refraktion geben kann, darf zu 50 km veranschlagt werden*); nimmt man also für r_0 den mittleren Radius der Erde (6366 km) an, so ist r höchstens gleich 6416 km, und dem entspricht als Maximalwert von s der Betrag $0 \cdot 0078$. Vernachlässigt man nun in dem Zähler des oben unter dem Integralzeichen vorkommenden Bruches die Glieder von der Ordnung $\mathfrak{a}^2 s$ und von höherer Ordnung, so wird

$$\mathfrak{a}(1-s)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-\frac{3}{2}} = \mathfrak{a}(1 - s + 3\mathfrak{a}\omega)$$

Ferner erhält man, wenn in dem Nenner des genannten Bruches das Glied von der Ordnung $s^2\mathfrak{a}$ und die Glieder höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben,

$$(2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1} = 2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2 + 4s\mathfrak{a}\omega - 4\mathfrak{a}^2\omega^2$$

oder, wenn

$$s - \mathfrak{a}\omega = u \tag{46}$$

gesetzt wird,

$$(2s - 2\mathfrak{a}\omega - s^2)(1-2\mathfrak{a}\omega)^{-1} = 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2$$

Dividiert man noch den Wert des Integrals $\mathfrak{R}$ durch $\sin 1''$ und setzt

$$\frac{\mathfrak{a}}{\sin 1''} = \mathfrak{a}'',$$

*) Nach *J. Hann* (Lehrbuch der Meteorologie, II. Aufl., S. 9) beträgt die Luftdichte in dieser Höhe nur mehr $0 \cdot 0004$ von jener an der Erdoberfläche.

so ergibt sich für $\mathfrak{R}$, ausgedrückt in Bogensekunden,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a}'' \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2}} \tag{47}$$

Von den Entwicklungen, welche dieser Ausdruck zuläßt, sollen hier nur zwei, von *Radau* herrührende, mitgeteilt werden. Wie sich ergeben wird, eignet sich die erste dieser Entwicklungen für $z \leqq 80^0$, die zweite für $z > 80^0$.

80. Refraktion für $z \leqq 80^0$. Das Integral (47) läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \mathfrak{a}'' \operatorname{tang} z \int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega}{\left\{1 + 2\left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] \operatorname{tang}^2 z\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \mathfrak{a}'' \operatorname{tang} z \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega) \left\{1 - \left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] \operatorname{tang}^2 z + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^2 \operatorname{tang}^4 z - \cdots\right\} d\omega\end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\, d\omega &= A_0 \\ \mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right] d\omega &= A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\, \mathfrak{a}'' \int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\left[u - \frac{(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n d\omega &= A_n, \end{aligned} \tag{48}$$

so lautet die vorige Reihe

$$\mathfrak{R} = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + A_2 \operatorname{tang}^5 z - \cdots + (-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z + \cdots \tag{49}$$

Um die Koeffizienten A_n berechnen zu können, bedarf man der Kenntnis der Integrale $\int_0^1 u^n d\omega$ und $\int_0^1 u^n \omega\, d\omega$. Man setze

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n d\omega = U_n \tag{50}$$

Soll die Integration sich ausführen lassen, so muß u als Funktion von ω dargestellt werden. Nun ergibt sich, wenn man von beiden Seiten der Gleichung (22), nämlich

$$\frac{r_0}{l_0} s = -(1 - f)\log(1 - \omega) + 2f\omega,$$

$\frac{r_0}{l_0}\mathfrak{a}\omega$ subtrahiert und zur Abkürzung

$$\frac{r_0}{l_0}\mathfrak{a} = \varepsilon \tag{51}$$

setzt,

$$\frac{r_0}{l_0} u = -(1 - f)\log(1 - \omega) + (2f - \varepsilon)\omega$$

Wird jetzt noch

$$\frac{l_0(1-f)}{r_0} = a_0, \qquad \frac{2f-\varepsilon}{1-f} = k_0 \tag{52}$$

gesetzt, so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen u und ω

$$\frac{u}{a_0} = -\log(1-\omega) + k_0\omega \tag{53}$$

Es empfiehlt sich aber, statt ω eine andere Variable x einzuführen, wo x durch die Gleichung

$$1-\omega = e^{-x} \tag{54}$$

definiert werden soll; es wird dann

$$\frac{u}{a_0} = x + k_0(1-e^{-x}) \tag{55}$$

und

$$U_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{-x}dx \tag{56}$$

Durch Substitution des aus (55) folgenden Wertes von u in (56) erhält man

$$\frac{1}{a_0^n}U_n = \int_0^\infty \Big[\frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(1-e^{-x})k_0 + \frac{1}{2!}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}(1-e^{-x})^2k_0^2 + \cdots + \frac{1}{h!}\frac{1}{(n-h)!}x^{n-h}(1-e^{-x})^h k_0^h + \cdots + \frac{1}{n!}(1-e^{-x})^n k_0^n\Big]e^{-x}dx$$

Schreibt man diese Reihe in der Form

$$\frac{1}{a_0^n}U_n = \beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)}k_0 + \frac{1}{2!}\beta_n^{(2)}k_0^2 + \cdots + \frac{1}{h!}\beta_n^{(h)}k_0^h + \cdots + \frac{1}{n!}\beta_n^{(n)}k_0^n, \tag{57}$$

so sind die Koeffizienten β durch die Gleichungen definiert

$$\begin{aligned}
\beta_n^{(0)} &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n^{(h)} &= \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}dx \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n^{(n)} &= \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x}dx
\end{aligned} \tag{58}$$

Nun erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n), \tag{59}$$

so sagt die vorige Gleichung, daß

(60) $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n),$$

ist. Der Definition nach ist

(61) $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

Substituiert man also in der Gleichung (60) für n der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so erhält man

(62) $$\Gamma(n+1) = n!$$

Da nun

$$\beta_n^{(0)} = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\,\Gamma(n+1)$$

ist, so wird

(63) $$\beta_n^{(0)} = 1$$

Ferner ist

$$\beta_n^{(n)} = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n e^{-x}dx = \int_0^\infty (1-e^{-x})^n d(1-e^{-x})$$

oder

(64) $$\beta_n^{(n)} = \frac{1}{n+1}$$

Um den Wert von

$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}dx$$

zu erhalten, entwickle man $(1-e^{-x})^h$ und berücksichtige, daß, wenn $px = v$ gesetzt wird,

$$\int_0^\infty x^{n-h}e^{-px}dx = \frac{1}{p^{n-h+1}}\int_0^\infty v^{n-h}e^{-v}dv = \frac{1}{p^{n-h+1}}\,\Gamma(n-h+1)$$

ist, folglich nach (62)

(65) $$\int_0^\infty x^{n-h}e^{-px}dx = \frac{(n-h)!}{p^{n-h+1}}$$

Man erhält so für $0 < h < n$

(66) $$\beta_n^{(h)} = 1 - \frac{h}{2^{n-h+1}} + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{3^{n-h+1}} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{h-1}h\,\frac{1}{h^{n-h+1}} + (-1)^h\,\frac{1}{(h+1)^{n-h+1}}$$

Durch die Gleichungen (63), (64) und (66) sind die Koeffizienten β bestimmt; für die Logarithmen von $\beta_1^{(1)}$, $\beta_2^{(1)}$, ..., bzw. $\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}$, $\frac{1}{2}\beta_3^{(2)}$, ..., usw. ergeben sich die folgenden Werte:

log		log		log		log		log		log	
$\beta_1^{(1)}$ 9.6989700	$\frac{1}{2}\beta_2^{(2)}$	9.221849	$\frac{1}{6}\beta_3^{(3)}$	8.61979	$\frac{1}{24}\beta_4^{(4)}$	7.9208	$\frac{1}{120}\beta_5^{(5)}$	7.143	$\frac{1}{720}\beta_6^{(6)}$	6.30	$\frac{1}{5040}\beta_7^{(7)}$ 5.39
$\beta_2^{(1)}$ 9.8750613	$\frac{1}{2}\beta_3^{(2)}$	9.485090	$\frac{1}{6}\beta_4^{(3)}$	8.93855	$\frac{1}{24}\beta_5^{(4)}$	8.2794	$\frac{1}{120}\beta_6^{(5)}$	7.532	$\frac{1}{720}\beta_7^{(6)}$	6.71	
$\beta_3^{(1)}$ 9.9420081	$\frac{1}{2}\beta_4^{(2)}$	9.594965	$\frac{1}{6}\beta_5^{(3)}$	9.07947	$\frac{1}{24}\beta_6^{(4)}$	8.4444	$\frac{1}{120}\beta_7^{(5)}$	7.716			
$\beta_4^{(1)}$ 9.9719713	$\frac{1}{2}\beta_5^{(2)}$	9.647063	$\frac{1}{6}\beta_6^{(3)}$	9.14903	$\frac{1}{24}\beta_7^{(4)}$	8.5283					
$\beta_5^{(1)}$ 9.9862117	$\frac{1}{2}\beta_6^{(2)}$	9.672843	$\frac{1}{6}\beta_7^{(3)}$	9.18451							
$\beta_6^{(1)}$ 9.9931606	$\frac{1}{2}\beta_7^{(2)}$	9.685796									
$\beta_7^{(1)}$ 9.9965937											

Zur numerischen Berechnung der U_n sind noch die Werte von a_0 und k_0 erforderlich. Diese ergeben sich aus den Gleichungen (52) in Verbindung mit (51) und (15), vorausgesetzt, daß die in diesen Gleichungen vorkommenden Größen $\mathfrak{a}$ und f anderweitig bekannt sind. Der Gleichung (43) zufolge ist $\mathfrak{a}$ definiert durch

$$\mathfrak{a} = \frac{c\varrho_0}{1 + 2c\varrho_0},$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit der Luft am Beobachtungsorte bedeutet. Bezeichnet nun $\mathfrak{a}'$ den Wert von $\mathfrak{a}$, welcher einer fest gewählten Dichtigkeit ϱ'_0 entspricht, und ist demnach

$$\mathfrak{a}' = \frac{c\varrho'_0}{1 + 2c\varrho'_0},$$

so folgt durch Division der zwei letzten Gleichungen

$$\mathfrak{a} = \frac{\varrho_0}{\varrho'_0} \frac{\mathfrak{a}'}{1 - 2\mathfrak{a}'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho'_0}\right)} \tag{67}$$

Unter ϱ'_0 soll jetzt die durch die Gleichung (41) definierte Dichtigkeit

$$\varrho'_0 = 1 - \tfrac{1}{8}\,\tfrac{6}{760}$$

verstanden werden; für den zugehörigen Wert von $\mathfrak{a}'$ kann man dann nach *Bauschinger*

$$\mathfrak{a}' = 60''.15 \sin 1'' = 0.000\,291\,6\ldots$$

annehmen, wobei

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''} = 60''.15$$

als die der Dichtigkeit ϱ'_0 entsprechende Refraktionskonstante bezeichnet wird. Der hier für $\mathfrak{a}'$ gegebene Wert beruht ganz auf astronomischen Beobachtungen; in welcher Weise sich letztere zur Bestimmung von $\mathfrak{a}'$ verwenden lassen, wird in § 89 gezeigt werden. Berechnet man jetzt noch mit Hilfe der Gleichungen (41^a) und (41^b) den für die jeweiligen Ablesungen der meteorologischen Instrumente gültigen Wert von $\varrho_0 : \varrho'_0$, so erhält man durch Substitution dieses und des für $\mathfrak{a}'$ angenommenen Wertes in die Gleichung (67) den der Dichtigkeit ϱ_0 entsprechenden Wert von $\mathfrak{a}$.

Um f zu bestimmen, kann man sich der gelegentlich einer Ballonfahrt gewonnenen Messungen des Luftdruckes, der Temperatur und des Dunstdruckes in den durchstrichenen Schichten bedienen. Mit Hilfe dieser Angaben berechne man nämlich zunächst nach § 76 die Dichtigkeit der Luft; verbindet man hiermit und mit den im Ballon beobachteten Temperaturen die für die Luft an der Erdoberfläche geltenden Werte der Dichtigkeit und Temperatur, so ergibt sich aus der ersten Gleichung (7^a) und der Gleichung (20) der gesuchte Wert von f. Auf Grund der Ergebnisse der in früheren Jahren unternommenen Ballonfahrten ist man dazu gekommen, $f = 0.2$ anzunehmen.

Der in (52) vorkommende Quotient $\frac{l_0}{r_0}$ läßt sich mittels der Gleichung (15) berechnen. Für die Praxis empfiehlt es sich, die zwei letzten von p_0 und $\cos 2\varphi$ ab-

hängigen Glieder der Gleichung (15) zunächst zu vernachlässigen und den Einfluß derselben nachträglich zu bestimmen. Man setze also

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}\,(1 + 0.003\,663\,t_0)$$

Unter Benutzung dieses Ausdrucks und der vorhin angeführten Werte von f und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ erhält man aus (51) und (52) die für

$$\varrho'_0 = 1 - \tfrac{1}{8}\,\tfrac{6}{760}, \qquad t_0 = 0^\circ\,\mathrm{C}$$

gültigen Werte

$$\log \varepsilon = 9.365\,967, \qquad \log a_0 = 7.001\,933, \qquad \log k_0 = 9.321\,556$$

Die Gleichung (57) in Verbindung mit (63) und (64) sowie den oben angegebenen Werten von $\frac{1}{h!}\,\beta_n^{(h)}$ liefert sodann die nachstehenden für $\varrho'_0 = 1 - \frac{1}{8}\,\frac{6}{760}$ und $t_0 = 0^\circ\,\mathrm{C}$ gültigen Werte von $\log U_n$

$$\begin{aligned} \log U_1 &= 7.045\,233 - 10 & \log U_5 &= 5.097\,368 - 20 \\ \log U_2 &= 4.070\,038 - 10 & \log U_6 &= 2.10096 - 20 \\ \log U_3 &= 1.083\,999 - 10 & \log U_7 &= 9.1037 - 30 \\ \log U_4 &= 8.092\,199 - 20 \end{aligned}$$

Nachdem im vorigen die Mittel angegeben worden sind, die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültigen Werte von U_n zu bestimmen, ist jetzt noch die Berechnung des Integrals $\int_0^1 u^n\,\omega\,d\omega$ erforderlich. Da aber dieses Integral im folgenden mit dem kleinen Faktor $\mathfrak{a}''\mathfrak{a}$ versehen auftritt, so genügt es, einen genäherten Wert desselben zu kennen. Nun ist nach (53) und (54)

$$u = a_0(x + k_0\omega)$$

Somit hat man

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n\,\omega\,d\omega = a_0^n\left[\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\,\omega\,d\omega + \frac{1}{(n-1)!}\,k_0\int_0^1 x^{n-1}\,\omega^2\,d\omega + \cdots\right]$$

Den Gleichungen (58) zufolge und unter Berücksichtigung von (54) ist aber

$$\frac{1}{(n-h)!}\int_0^1 x^{n-h}\,\omega^h\,d\omega = \beta_n^{(h)}$$

Folglich wird die vorige Gleichung

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n\,\omega\,d\omega = a_0^n(\beta_{n+1}^{(1)} + \beta_{n+1}^{(2)}k_0 + \cdots),$$

Ferner ist nach (57) und (63)

$$a_0^n = U_n(1 - \beta_n^{(1)}k_0 - \cdots)$$

Vernachlässigt man jetzt die von k_0 abhängigen Glieder, so wird

(68) $$\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n\,\omega\,d\omega = U_n\beta_{n+1}^{(1)}$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 w^{n-1}\omega^2 d\omega = U_{n-1}\beta_{n+1}^{(2)} \tag{68*}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann an die Berechnung der A_n geschritten werden. Die erste der Gleichungen (48) liefert ohne weiteres

$$A_0 = \mathfrak{a}''(1+\mathfrak{a}-U_1) \tag{69}$$

Für A_1 erhält man aus der zweiten der Gleichungen (48)

$$A_1 = \mathfrak{a}''\int_0^1 (1-u+2\mathfrak{a}\omega)\left[u-\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]d\omega =$$

$$= \mathfrak{a}''\int_0^1 (u-\tfrac{3}{2}u^2+3u\mathfrak{a}\omega+\tfrac{1}{2}u^3-\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}^2\omega^2-2u^2\mathfrak{a}\omega+\tfrac{5}{2}u\mathfrak{a}^2\omega^2-\mathfrak{a}^3\omega^3)d\omega$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (50), (68) und (68*) wird der Beitrag, den die letzten fünf Glieder in der Klammer unter dem vorigen Integral zu $\mathfrak{R}$ liefern, gleich

$$-\mathfrak{a}''\operatorname{tang}^3 x\,(3U_3-\tfrac{1}{6}\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{a}\beta_3^{(1)}U_2+\tfrac{5}{2}\mathfrak{a}^2\beta_3^{(2)}U_1-\tfrac{1}{4}\mathfrak{a}^3)$$

Substituiert man hierin die oben gegebenen Werte von $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$, U_1, U_2, U_3, $\beta_3^{(1)}$, $\beta_3^{(2)}$, so erhält man selbst für $x=80^\circ$ eine verschwindend kleine Größe*). Somit wird

$$A_1 = \mathfrak{a}''\int_0^1 (u-\tfrac{3}{2}u^2+3u\mathfrak{a}\omega)d\omega$$

oder, wenn man von den Gleichungen (50) und (68) Gebrauch macht,

$$A_1 = \mathfrak{a}''[(1+3\mathfrak{a}\beta_2^{(1)})U_1-3U_2] \tag{69a}$$

Um allgemein A_n berechnen zu können, ist es nötig, das Produkt

$$(1-u+2\mathfrak{a}\omega)\left[u-\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n$$

zu entwickeln. Da vorhin gezeigt wurde, daß für $n=1$ nur diejenigen Glieder des Produktes beizubehalten sind, deren Ordnung nicht höher als die von u^2 und $u\mathfrak{a}$ ist, so genügt es, für ein beliebiges n nur die Glieder zu berücksichtigen, deren Ordnung diejenige von u^{n+1} und $u^n\mathfrak{a}$ nicht übertrifft. Man erhält dann zunächst

$$\left[u-\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n = u^n - nu^{n-1}\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}+\cdots = u^n-\frac{n}{2}(u^{n+1}-2u^n\mathfrak{a}\omega)+\cdots$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $1-u+2\mathfrak{a}\omega$ und vernachlässigt die Glieder, deren Ordnung höher als die von u^{n+1} und $u^n\mathfrak{a}$ ist, so ergibt sich

$$(1-u+2\mathfrak{a}\omega)\left[u-\frac{(u-\mathfrak{a}\omega)^2}{2}\right]^n = u^n-\frac{n+2}{2}u^{n+1}+(n+2)\mathfrak{a}u^n\omega$$

---

*) *Radau* behält in seinen Formeln das Produkt

$$-\mathfrak{a}''\operatorname{tang}^3 x\,(3U_3-\tfrac{1}{6}\mathfrak{a}^2)$$

bei, das aber für $x=80^\circ$ nur 0·0001 ausmacht, also zu vernachlässigen ist. Hiermit ist zugleich der Grund angegeben, warum die im folgenden für A_1, bzw. für A_n abgeleiteten Ausdrücke von den *Radau*schen abweichen.

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die unter (48) gegebene Gleichung für A_n und unter Berücksichtigung der Gleichungen (50) und (68) erhält man schließlich

$$(70)\quad A_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\mathfrak{a}''\left\{[1+(n+2)\mathfrak{a}\beta_{n+1}^{(1)}]U_n - \frac{(n+1)(n+2)}{2}U_{n+1}\right\}$$

Da der Gleichung (64) zufolge $\beta_1^{(1)} = \frac{1}{2}$ ist, so ist die Gleichung (69) für A_0 schon in (70) einbegriffen, wenn man nur festsetzt, daß für $n = 0$ das Produkt $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) \equiv 1$ sein soll, und wenn außerdem $U_0 \equiv 1$ angenommen wird. Setzt man noch

$$(71)\quad A_n 10^{2n+1} = (A_n),$$

so wird die Reihe (49)

$$(72)\quad \mathfrak{R} = (A_0)\frac{\tan z}{10} - (A_1)\left(\frac{\tan z}{10}\right)^3 + (A_2)\left(\frac{\tan z}{10}\right)^5 - \cdots$$

Für

$$\varrho_0' = 1 - \tfrac{1}{8}\,\tfrac{6}{760}, \qquad t = 0^\circ\,\mathrm{C}$$

ist

$$\begin{aligned} \log(A_0) &= 2.778\,880 & \log(A_4) &= 0.887\\ \log(A_1) &= 1.823\,368 & \log(A_5) &= 0.844\\ \log(A_2) &= 1.32414 & \log(A_6) &= 0.886\\ \log(A_3) &= 1.0355 \end{aligned}$$

Substituiert man diese Werte in die Reihe (72), so erhält man die für die eben angegebenen Werte von ϱ_0' und t gültige Refraktion in Bogensekunden.

Berücksichtigt man nur das Hauptglied von A_n, so folgt aus den Gleichungen (70), (57) und (63)

$$A_n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\mathfrak{a}''a_0^n$$

Unter Benutzung dieses Näherungswertes erhält man für das Verhältnis zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe (72)

$$\frac{(A_{n+1})}{(A_n)}\left(\frac{\tan z}{10}\right)^2 = \frac{A_{n+1}}{A_n}\tan^2 z = (2n+1)a_0\tan^2 z$$

Da nach dem Früheren $\log a = 7.0019$ ist, wenn $t = 0^\circ$, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung für $n = 5$ und $z = 84^\circ$ gleich 1; für $z \gtrless 84^\circ$ ist also die Reihe (72) nicht mehr brauchbar. Um nicht allzu viele Glieder berücksichtigen zu müssen, benutzt *Radau* die Reihe (72) nur bis zu $z = 80^\circ$.

Die oben mitgeteilten, der Dichtigkeit $\varrho_0' = 1 - \frac{1}{8}\,\frac{6}{760}$ und der Temperatur 0° C entsprechenden numerischen Werte von $\log U_n$ und $\log(A_n)$ sind mit Vernachlässigung der in der Gleichung (15), nämlich

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}\left(1 + 0.003\,663\,t_0 + 0.0010\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0}\right),$$

von $\cos 2\varphi$ und $\mathfrak{p}_0$ abhängigen Glieder berechnet worden. Um den Beitrag zu bestimmen, den diese Glieder zur Refraktion liefern, gehe man von der Gleichung (49)

$$\mathfrak{R} = A_0\tan z - A_1\tan^3 z + \cdots$$

aus, wo nach (69) und (69ª)

$$A_0 = \mathfrak{a}''(1 + \mathfrak{a} - U_1)$$
$$A_1 = \mathfrak{a}''[(1 + 3\mathfrak{a}\beta_2^{(1)})U_1 - 3U_2]$$

ist. Nun folgt aus den Gleichungen (57), (63) und (64)

$$U_1 = a_0(1 + \tfrac{1}{2}k_0)$$

oder, wenn für a_0 und k_0 ihre in (52) gegebenen Werte substituiert werden,

$$U_1 = \frac{l_0}{r_0}(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

Wird hier an Stelle von ε sein Wert (51) eingeführt, so ergibt sich

$$U_1 = \frac{l_0}{r_0} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}$$

Zieht man jetzt in dem Ausdrucke für A_1 nur das Hauptglied $\mathfrak{a}''U_1$ in Betracht und setzt wieder $\frac{\mathfrak{p}_0}{p_0} = \frac{\pi_0}{B}$ (S. 204), so erhält man für die Korrektion des ohne Rücksicht auf die von $\cos 2\varphi$ und π_0 abhängigen Glieder berechneten Wertes der Refraktion

$$\Delta\mathfrak{R} = -\mathfrak{a}''\frac{7{\cdot}993}{6366}\left[0.0010\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\frac{\pi_0}{B}\right]\operatorname{tang} z \sec^2 z$$

Das von $\cos 2\varphi$ abhängige Glied macht selbst für $\varphi = 0°$ und $z = 80°$ nur 0″.01 aus. Das von π_0 abhängige Glied beträgt für $\pi_0 = 10^{mm}$, $B = 760^{mm}$, $\alpha'' = 60''.15$, bei

$z = 75°$	$-0''.02$,	$z = 79°$	$-0''.05$
$= 77$	-0.03	$= 80$	-0.07

Bei der Berechnung von $U_2, U_3, \ldots$, also auch von $A_2, A_3, \ldots$ sind die von 2φ und π_0 abhängenden Glieder völlig zu vernachlässigen.

81. Berechnung der Refraktion für verschiedene Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft. Mit Hilfe der im vorigen Artikel gegebenen Formeln würde man für eine Reihe äquidistanter Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft die Refraktion berechnen können; durch Interpolation ergäbe sich dann die für eine beliebige Dichtigkeit und Temperatur der Luft gültige Refraktion. Einfacher aber ist es, die betreffenden Formeln nur zur Berechnung der sogenannten mittleren, d. h. der einer fest gewählten Dichtigkeit und Temperatur der Luft entsprechenden Refraktion anzuwenden und durch Differentiation die Korrektionen zu ermitteln, welche an die mittlere Refraktion anzubringen sind, um die dem jeweiligen Luftzustand entsprechende Strahlenbrechung zu erhalten. Die für die Berechnung dieser Korrektionen erforderlichen Formeln sollen jetzt abgeleitet werden.

Den Gleichungen (49), (70) und (67) zufolge hat man, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} : \sin 1''$ ist,

$$\mathfrak{R} = \Sigma(-1)^n A_n \operatorname{tang}^{2n+1} z$$
$$= \frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''\left[1 - 2\mathfrak{a}'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\right)\right]}\Sigma(-1)^n 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot$$
$$\cdot\left\{[1 + (n+2)\mathfrak{a}\beta_{n+1}^{(1)}]U_n - \frac{(n+1)(n+2)}{2}U_{n+1}\right\}\operatorname{tang}^{2n+1} z$$

Hierin ist nach S. 219

$$[1 \cdot 3 \cdots (2n-1)]_{n=0} \equiv 1\,, \qquad U_0 \equiv 1$$

und nach (57) und (63)

$$U_n = a_0^n \left(1 + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{1}{h!}\, \beta_n^{(h)} k_0^h\right), \qquad n > 0$$

Aus der letzten Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (52) und (51) ergibt sich — wenn wiederum

$$\frac{l_0}{r_0} = \frac{7.993}{6366}\,(1 + 0.003\,663\,t_0)$$

gesetzt wird — daß U_n von $\mathfrak{a}$ und t_0 abhängt. Da aber $\mathfrak{a}$ der Gleichung (67) zufolge eine Funktion von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ ist, so kann man auch sagen, daß U_n von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ und t_0 abhängt. Für ein gegebenes z und ein als konstant betrachtetes f ist demnach $\log \frac{\Re}{\left(\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}\right)}$ eine Funktion von $\frac{\varrho_0}{\varrho_0'}$ und t_0. Zur Abkürzung soll jetzt

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \varrho\,, \qquad t_0 = t \tag{73}$$

gesetzt werden; wenn dann der für $\varrho = 1$ und $t = 0^\circ$ C gültige Wert von $\Re$ mit $\Re_0$ bezeichnet wird, so gibt der *Taylor*sche Satz

$$\log \frac{\Re}{\varrho} = \log \Re_0 + t\left[\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\, t=0} + (\varrho - 1)\left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \log \frac{\Re}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\, t=0} + \cdots \tag{74}$$

Aus der oben für $\Re$ gegebenen Gleichung folgt nun

$$\begin{aligned} \log \frac{\Re}{\varrho} = {} & \log \frac{\mathfrak{a}'}{\sin 1''[1 - 2\mathfrak{a}'(1-\varrho)]} + \\ & + \log \Sigma (-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \left\{\left[1 + (n+2)\,\mathfrak{a}\,\beta_{n+1}^{(1)}\right] U_n - \right. \\ & \left. - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, U_{n+1}\right\} \operatorname{tang}^{2n+1} z \end{aligned} \tag{75}$$

Um die Differentialquotienten von $\log \frac{\Re}{\varrho}$ berechnen zu können, bedarf man zunächst der aus (67) und (73) sich ergebenden Formeln

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1} = \mathfrak{a}'(1 - 2\mathfrak{a}') \tag{76}$$

Ferner hat man die aus (51) und (52) unter Berücksichtigung des vorhin angegebenen Wertes von $\frac{l_0}{r_0}$ folgenden Gleichungen zu benutzen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_0}{\partial t}\right)_{t=0} &= (1-f)\,\frac{7.993}{6366}\,0.003\,663\,, & \frac{\partial a_0}{\partial \varrho} &= 0 \\ \left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)_{\varrho=1,\, t=0} &= \frac{\mathfrak{a}'}{1-f}\,\frac{6366}{7.993}\,0.003\,663\,, \\ \left(\frac{\partial k_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1,\, t=0} &= -\frac{\mathfrak{a}'(1-2\mathfrak{a}')}{1-f}\,\frac{6366}{7.993} \end{aligned} \tag{77}$$

Da $\frac{\partial a_0}{\partial \varrho} = 0$ ist, und da der oben getroffenen Bestimmung gemäß $U_0 \equiv 1$ sein soll, so wird, wenn man noch festsetzt, daß auch

$$[(h-1)!]_{h=1} \equiv 1$$

sein soll,

$$(78)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial U_n}{\partial t}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= n\left[\frac{1}{a_0}\,\frac{\partial a_0}{\partial t}\,U_n\right]_{\varrho=1,\,t=0} + \left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial t}\right)\sum_{h=1}^{h=n}{}'\,\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}k_0^{h-1}\right]_{\varrho=1,\,t=0} \\ \left[\frac{\partial U_n}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \left[a_0^n\left(\frac{\partial k_0}{\partial \varrho}\right)\sum_{h=1}^{h=n}{}'\,\frac{1}{(h-1)!}\,\beta_n^{(h)}k_0^{h-1}\right]_{\varrho=1,\,t=0} \end{aligned}$$

$$(78^*)\quad \frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{\partial U_0}{\partial \varrho} = 0$$

Schreibt man nun zur Abkürzung

$$(79)\quad \begin{aligned} &\left\{\left[1+(n+2)\mathfrak{a}'\beta_{n+1}^{(1)}\right]\frac{\partial U_n}{\partial t} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,\frac{\partial U_{n+1}}{\partial t}\right\}_{\varrho=1,\,t=0} = K_n \\ &\left\{(n+2)\beta_{n+1}^{(1)}U_n\,\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \varrho} + \left[1+(n+2)\mathfrak{a}'\beta_{n+1}^{(1)}\right]\frac{\partial U_n}{\partial \varrho} - \right. \\ &\qquad\left. - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,\frac{\partial U_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{\varrho=1,\,t=0} = L_n, \end{aligned}$$

so erhält man, wenn $\mathfrak{M}$ den Modul der *Briggs*schen Logarithmen bedeutet,

$$(80)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \mathfrak{M}\,\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{R}_0 \sin 1''}\,\Sigma(-1)^n 1\cdot 3\cdots(2n-1)K_n \tan^{2n+1}\!x \\ \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \mathfrak{M}\left\{-2\mathfrak{a}' + \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{R}_0 \sin 1''}\,\Sigma(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)L_n \tan^{2n+1}\!x\right\}, \end{aligned}$$

wo n der Reihe nach gleich 0, 1, 2, ... zu wählen und $1\cdot 3\cdots(2n-1)$ für $n=0$ gleich 1 zu setzen ist. Es werde jetzt wieder $\mathfrak{a}' = 60''.15 \sin 1''$ angenommen; gibt man dann den Gleichungen (80) die Form

$$(80^*)\quad \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= \frac{60''.15}{\mathfrak{R}_0}\left(k^{(0)}\tan x + k^{(1)}\tan^3 x + k^{(2)}\tan^5 x + \cdots\right. \\ \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} &= m + \frac{60''.15}{\mathfrak{R}_0}\left(l^{(0)}\tan x + l^{(1)}\tan^3 x + l^{(2)}\tan^5 x + \cdots\right. \end{aligned}$$

und drückt m sowie die Koeffizienten k und l in Teilen einer Bogensekunde aus, so wird

	$\log m = 6.40363_n - 10$
$\log k^{(0)} = 4.30046_n - 10$	$\log l^{(0)} = 6.27843 - 10$
$\log k^{(1)} = 4.29804_n - 10$	$\log l^{(1)} = 5.79733 - 10$
$\log k^{(2)} = 2.08852 - 10$	$\log l^{(2)} = 3.49028_n - 10$
$\log k^{(3)} = 9.96762_n - 20$	$\log l^{(3)} = 1.2794 - 10$
$\log k^{(4)} = 7.93763 - 20$	$\log l^{(4)} = 9.1674_n - 20$
$\log k^{(5)} = 5.9865_n - 20$	$\log l^{(5)} = 7.143 - 20$
$\log k^{(6)} = 4.1044 - 20$	$\log l^{(6)} = 5.194_n - 20$

Bei den für die astronomischen Beobachtungen in Frage kommenden Werten von ϱ und t stimmen die Werte der Refraktion, welche man mit Hilfe der Formeln (74) und (80*) erhält, auch bei $z = 80^\circ$ mit den direkt berechneten überein; bis zu dieser Zenitdistanz reicht man also mit den ersten Differentialquotienten von $\log \frac{\Re}{\varrho}$ aus.

82. Berechnung einiger bestimmter Integrale. Wie oben erwähnt wurde, wendet *Radau* die in § 80 gegebene Entwicklung des Integrals (47) nur für $z \leqq 80^\circ$ an. Ehe nun die für $z > 80^\circ$ geeignete Reihe abgeleitet wird, soll die Berechnung der dabei auftretenden Funktion

$$\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-x^2}\, dx$$

vorgenommen werden.

a) Wenn $Z = 0$ ist, so wird bekanntlich*)

$$\psi(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{81}$$

b) Wenn Z von 0 verschieden ist, so benutze man die Gleichung

$$\int_Z^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx - \int_0^Z e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^Z e^{-x^2}\, dx$$

Wird auf der rechten Seite an Stelle von e^{-x^2} die bekannte Exponentialreihe substituiert und dann integriert, so ergibt sich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \left(Z - \frac{Z^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{Z^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{Z^7}{7} + \cdots\right)\right], \tag{82}$$

wo

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0.886\,226\,925\,45$$

ist. Die Reihe (82) ist aber nur für kleine Werte von Z brauchbar; schon für $Z = 1$ ist noch das von Z^{21} abhängige Glied zu berücksichtigen, wenn man $\log \psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig erhalten will.

Ein zweites Verfahren, $\psi(Z)$ zu berechnen, besteht darin, daß man wie vorhin

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^Z e^{-x^2}\, dx\right)$$

setzt und das Integral $\int_0^Z e^{-x^2}\, dx$ nach *Th. v. Oppolzer*s Vorschlag durch mechanische Quadratur bestimmt**).

Die Werte von $\int_0^Z e^{-x^2}\, dx$ sind in der *Oppolzer*schen Tafel X (l. c., S. 587) auf 10 Dezimalen mitgeteilt. Da e^{Z^2} für $Z = 2.5$ gleich 518 ist, so erhält man $\psi(2.5)$ noch auf 7 Dezimalen richtig, wenn $\int_0^{2.5} e^{-x^2}\, dx$ auf 10 Dezimalen strenge berechnet

*) Eine elegante Ableitung dieser Formel gibt *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis, I. Bd., 5. Aufl., p. 459—460.

**) *Th. v. Oppolzer*, Lehrbuch zur Bahnbestimmung, Bd. 2, S. 36 ff.

ist. Ist aber $Z > 2.5$, so nimmt die Anzahl der Dezimalen, auf die $\int_0^Z e^{-z^2} dx$ bekannt sein muß, um $\psi(Z)$ auf 7 Dezimalen richtig zu erhalten, schnell zu; so z. B. würde $\psi(3.035)$ [da $e^{(3.035)^2} = 10009$ ist] um eine Einheit der 7. Dezimale unrichtig werden, wenn das Integral $\int_0^{3.035} e^{-z^2} dx$ um eine Einheit der 11. Dezimale fehlerhaft wäre.

Für $Z \geqq 2.5$ empfiehlt es sich, eine von *Schlömilch* herrührende Reihenentwicklung zu benutzen, welche bedeutend schneller konvergiert als die von anderen angewandte halbkonvergente Reihe

$$\psi(Z) = \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{1}{2Z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2Z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2Z^2)^3} + \cdots\right\}$$

Die Ableitung der Reihe soll hier, unter Einführung einiger Vereinfachungen, nach *Schlömilch**) gegeben werden; mit Rücksicht auf die spätere Anwendung ist aber die Entwicklung der Reihe weiter getrieben worden, als es von ihrem Erfinder geschehen ist. *Schlömilch* stützt sich auf eine für positive Werte von x und t gültige Reihenentwicklung von $\frac{1}{x+t}$, welche man in folgender Weise erhält. Wenn man von den identischen Gleichungen

$\frac{x+t}{x} = 1 + \frac{t}{x}$	Faktor: 1
$\frac{x+t}{x+1} = 1 + \frac{t-1}{x+1}$	» $-\frac{t}{x}$
$\frac{x+t}{x+2} = 1 + \frac{t-2}{x+2}$	» $\frac{t(t-1)}{x(x+1)}$
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
$\frac{x+t}{x+n-1} = 1 + \frac{t-(n-1)}{x+n-1}$	» $(-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-2])}$

jede mit dem rechts von ihr stehenden Faktor multipliziert und sodann die Gleichungen addiert, so erhält man

$$\frac{1}{x+t} - (-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+[n-1])} \frac{1}{x+t} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t(t-1)\ldots(t-[n-2])}{x(x+1)\ldots(x+[n-1])}$$

Von t soll jetzt vorausgesetzt werden, daß es zwischen zwei ganzen positiven Zahlen $k-1$ und k eingeschlossen sei. Ist $n > k$ und wird zur Abkürzung

$$(t-1)(t-2)\ldots(t-[k-2])(t-[k-1]) = P$$
$$(t-k)(t-[k+1])\ldots(t-[n-2])(t-[n-1]) = Q$$

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 4. Jahrgang, S. 390, und *Schlömilch*, Kompendium der höheren Analysis, 2. Band: Die Gammafunktionen.

gesetzt, so hat man

$$(t-1)(t-2)\dots(t-[n-2])(t-[n-1]) = PQ$$

Da $k-1 < t < k$ sein soll, so sind alle Faktoren von P positiv; ferner erhält man einen zu großen Wert für das Produkt P, wenn in jedem Faktor $t = k$ gesetzt wird. Bedeutet also Δ_1 einen positiven echten Bruch, so ist

$$P = \Delta_1 (k-1)(k-2)\dots 2\cdot 1$$

Aus der Gleichung für Q folgt

$$\frac{Q}{(-1)^{n-k}} = (k-t)([k+1]-t)\dots([n-2]-t)([n-1]-t)$$

Alle Faktoren des auf der rechten Seite stehenden Produktes sind wieder positiv. Da auch $t > 0$ sein soll, so sieht man, daß man für das Produkt einen zu großen Wert erhält, wenn in jedem Faktor $t = 0$ angenommen wird. Somit ergibt sich, wenn mit Δ_2 ein positiver echter Bruch bezeichnet wird,

$$Q = (-1)^{n-k}\Delta_2 k(k+1)\dots(n-2)(n-1)$$

Demnach erhält man

$$(-1)^n \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-[n-1])}{x(x+1)(x+2)\dots(x+[n-1])}\frac{1}{x+t} =$$
$$= (-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2 \frac{1\cdot 2\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+[n-1])}\frac{t}{x(x+t)}$$

Da x und t als positiv vorausgesetzt sind, so ist $\dfrac{t}{x(x+t)}$ ein positiver echter Bruch. Schreibt man noch zur Abkürzung

$$(-1)^{2n-k}\Delta_1\Delta_2\frac{t}{x(x+t)} = \eta_n,$$

wo also η_n einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet, so erhält man die gesuchte Reihe für $\dfrac{1}{x+t}$

$$(83)\quad \frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\dots(t-[n-2])}{x(x+1)\dots(x+[n-1])} + \eta_n \frac{1\cdot 2\dots(n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+[n-1])},$$
$$x > 0, \quad t > 0$$

Um nun die *Schlömilch*sche Reihe für $\psi(Z)$ abzuleiten, setze man in dem Integral

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-\lambda} dv,$$

wo x und λ positiv sein sollen,

$$v = (1+u)x$$

und betrachte u als neue Variable. Damit wird

$$(B)\qquad \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^\lambda} e^{-xu} du$$

Früher war gesetzt worden

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx = \Gamma(\lambda)$$

Führt man an Stelle von x eine neue Variable t ein, indem man setzt

$$x = (1+u)t,$$

wo $u > 0$ vorausgesetzt wird, so erhält man

$$(1+u)^\lambda \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt = \Gamma(\lambda),$$

also

$$\frac{1}{(1+u)^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt$$

Somit wird die Gleichung (B)

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = \frac{x^{1-\lambda} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{-xu} du \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt$$

Hier läßt sich die Reihenfolge der Integrationen umkehren, und es ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-xu} du \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-(1+u)t} dt = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt \int_0^\infty e^{-(x+t)u} du = \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t} e^{-t} dt$$

Demnach erhält man

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = \frac{x^{1-\lambda} e^{-x}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t} e^{-t} dt$$

Substituiert man jetzt für $\frac{1}{x+t}$ die in (83) angegebene Reihe und setzt zur Abkürzung

$$(83^a) \qquad \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\dots(t-[m-1]) t^{\lambda-1} e^{-t} dt = a_m,$$

so wird

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+1)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} - \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \right.$$
$$\left. + \eta_n \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \right\}$$

Aus der Annahme $x > 0$ folgt aber

$$\frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} <$$
$$< \frac{1}{1+x\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)}$$

Da nun bei unendlich wachsendem n

$$\lim \left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right\} = \infty$$

ist, so hat man

$$\lim \left\{\frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\right\} = 0$$

Folglich ist auch das Produkt aus dem echten Bruche η_n und dem zuletzt angeführten Grenzwert gleich 0. Es wird also

$$(84) \qquad \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v}\, dv = \frac{1}{x^\lambda} e^{-x} \left\{1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots \right\}$$

$$x > 0, \quad \lambda > 0$$

Um die Koeffizienten a_m zu berechnen, kann man sich einer Rekursionsformel bedienen, welche von Dr. *A. Wilkens* gefunden worden ist. Zerlegt man nämlich das Integral (83^a) in zwei Integrale, indem man den Integranden mittels des Faktors $t - (m-1)$ in eine Summe auflöst, und schreibt $a_m^{(\lambda)}$ statt a_m, so folgt

$$a_m^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-2])\, t^{(\lambda+1)-1} e^{-t}\, dt -$$

$$- (m-1) \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)\ldots(t-[m-2])\, t^{\lambda-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} a_{m-1}^{(\lambda+1)} - (m-1) a_{m-1}^{(\lambda)}$$

Wird jetzt m durch $m+1$ ersetzt und von der Gleichung (60) Gebrauch gemacht, so ergibt sich die *Wilkens*sche Formel

$$(83^b) \qquad a_{m+1}^{(\lambda)} = \lambda a_m^{(\lambda+1)} - m a_m^{(\lambda)}$$

Nach (83^a) hat man aber

$$a_1^{(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^\lambda e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda,$$

somit

$$a_1^{(\lambda+1)} = \lambda + 1$$

Da also $a_1^{(\lambda)}$ und $a_1^{(\lambda+1)}$ bekannt sind, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung (83^b) zunächst $a_2^{(\lambda)}$ bestimmen, sodann $a_3^{(\lambda)}$, usw. Die sich auf diese Weise ergebenden Werte von $a_m^{(\lambda)}$ oder, wie jetzt wieder gesetzt werden soll, von a_m sind:

$$a_1 = \lambda$$
$$a_2 = \lambda^2$$
$$a_3 = \lambda^3 + \lambda$$
$$a_4 = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda$$
$$a_5 = \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda$$
$$a_6 = \lambda^6 + 20\lambda^4 - 15\lambda^3 + 58\lambda^2 - 26\lambda$$
$$a_7 = \lambda^7 + 35\lambda^5 - 35\lambda^4 + 238\lambda^3 - 217\lambda^2 + 194\lambda$$
$$a_8 = \lambda^8 + 56\lambda^6 - 70\lambda^5 + 728\lambda^4 - 1008\lambda^3 + 2035\lambda^2 - 1142\lambda$$
$$a_9 = \lambda^9 + 84\lambda^7 - 126\lambda^6 + 1848\lambda^5 - 3444\lambda^4 + 11611\lambda^3 - 13470\lambda^2 + 9736\lambda$$
$$a_{10} = \lambda^{10} + 120\lambda^8 - 210\lambda^7 + 4116\lambda^6 - 9660\lambda^5 + 47815\lambda^4 - 85410\lambda^3 +$$
$$+ 134164\lambda^2 - 81384\lambda$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ wird die Reihe (84)

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\left\{1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} + \cdots\right\}$$

oder, wenn x^2 für x und darauf $v = t^2$ gesetzt wird,

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2}\left\{1 - \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{(x^2+1)(x^2+2)} - \cdots\right\}$$

Wählt man Z als untere Grenze des Integrals und ersetzt unter dem Integralzeichen den Buchstaben t durch x, so erhält man schließlich

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2Z}\left\{1 - \frac{a_1}{Z^2+1} + \frac{a_2}{(Z^2+1)(Z^2+2)} - \cdots\right\} \tag{85}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= +\ 0.5 & a_8 &= -\ 144.05859\\
a_2 &= +\ 0.25 & a_9 &= +\ 2793.0645\\
a_3 &= +\ 0.625 & a_{10} &= -\ 15077.546\\
a_4 &= +\ 0.5625 & a_{11} &= +\ 204110.94\\
a_5 &= +\ 4.03125 & a_{12} &= -\ 1807850.9\\
a_6 &= +\ 0.890625 & a_{13} &= +\ 24035187.7\\
a_7 &= +\ 71.4140625
\end{aligned}$$

Für $Z = 2.5$ macht das von a_{12} abhängige Glied in $\psi(Z)$ nur 3 Einheiten und das von a_{13} abhängige Glied nur 2 Einheiten der 8. Dezimale aus. — Es sei zum Schlusse noch erwähnt, daß *Radau* im 18. Bande der Annalen der Pariser Sternwarte eine Tafel veröffentlicht hat, aus der man für die zwischen -0.120 und $+1.010$ liegenden Werte von Z, sowie für die zwischen 0.000 und 1.000 liegenden Werte des $\log Z$ den $\log \psi(Z)$ auf 7 Dezimalen entnehmen kann.

Mit Hilfe der Funktion $\psi(Z)$ läßt sich das im folgenden vorkommende Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}}{\sqrt{Z^2+x}}\, dx$$

leicht berechnen. Setzt man, wenn $m = 0$ ist,

$$Z^2 + x = \frac{1}{n} t^2,$$

wo t eine neue, an die Stelle von x tretende Variable bedeuten soll, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \frac{2}{\sqrt{n}} e^{nZ^2}\int_{Z\sqrt{n}}^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{n}}\psi(Z\sqrt{n}) \tag{86}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\psi_n = \sqrt{n}\,\psi(Z\sqrt{n}) \tag{87}$$

gesetzt wird,

$$n\int_0^\infty \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{Z^2+x}} = 2\psi_n \tag{88}$$

Damit ist der Fall $m = 0$ erledigt.

Ist m von Null verschieden, so berücksichtige man, daß durch Differentiation erhalten wird

$$(89)\qquad d\{\sqrt{Z^2+x}\,x^{m-1}e^{-nx}\} = \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}}\{\tfrac{1}{2}x^{m-1} + [(m-1)x^{m-2} - nx^{m-1}](Z^2+x)\}$$

Wird hierin $m = 1$ gesetzt und dann integriert, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (88)

$$(90)\qquad n\int_0^\infty \frac{xe^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = Z + \left(\frac{1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = Z + \left(\frac{1}{n} - 2Z^2\right)\psi_n$$

Es werde jetzt auf der rechten Seite der Gleichung (89) die Multiplikation ausgeführt und darauf die Gleichung integriert; man erhält dann

$$(91)\qquad n\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \left(\frac{2m-1}{2} - nZ^2\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} + \\ + (m-1)Z^2\int_0^\infty \frac{x^{m-2}e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}}$$

Den Gleichungen (88) und (90) zufolge ist der Wert des auf der linken Seite der Gleichung (91) stehenden Integrals für $m = 0$ und $m = 1$ bekannt; mit Hilfe von (91) läßt er sich also auch für $m = 2$ und weiterhin für $m = 3, 4, \ldots$ bestimmen. Für $m = 2$ hat man

$$(91^*)\qquad n\int_0^\infty \frac{x^2e^{-nx}dx}{\sqrt{Z^2+x}} = \frac{3}{2n}Z - Z^3 + \left(\frac{3}{2n^2} - \frac{2}{n}Z^2 + 2Z^4\right)\psi_n$$

83. Refraktion für $z > 80°$. Nachdem die im vorigen Artikel behandelten Integrale als bekannt vorauszusetzen sind, soll jetzt die für $z > 80°$ gültige Entwicklung des Integrals (47)

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\,d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u - (u - \mathfrak{a}\omega)^2}}$$

vorgenommen werden. Mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der numerischen Rechnung empfiehlt sich dabei der folgende Weg. Man hat zunächst

$$(92)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{1 - u + 2\mathfrak{a}\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\,d\omega + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{(1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)(u - \mathfrak{a}\omega)^2}{(\operatorname{cotg}^2 z + 2u)^{\frac{3}{2}}}\,d\omega + \cdots$$

Um das erste auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Integral

$$(93)\qquad (\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{a}''\int_0^1 \frac{1 - u + 2\mathfrak{a}\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}\,d\omega$$

zu berechnen, erinnere man sich des Satzes: Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ stetig sind, und $\psi(x)$ außerdem positiv bleibt, so ist, wenn ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$(94)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi[a + \vartheta(b-a)]\int_a^b \psi(x)\,dx$$

Für $\psi(x) = 1$ folgt hieraus

$$\varphi[a + \vartheta(b-a)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{95}$$

In dem Integral (93), worin nach (53) u von ω abhängt, werde nun $1 - u + 2\mathfrak{a}\omega$ mit $\varphi(\omega)$ und die positive Quadratwurzel aus $\operatorname{cotg}^2 z + 2u$ mit $\psi(\omega)$ identifiziert. Die Gleichungen (94) und (95) lehren dann, daß man einen Näherungswert $\mathfrak{R}_0$ des Integrals (93) erhält, wenn man setzt

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{a}''\left[\int_0^1 (1 - u + 2\mathfrak{a}\omega)\,d\omega\right]\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}$$

oder, unter Anwendung der durch die erste der Gleichungen (48) eingeführten Bezeichnung,

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}, \tag{96}$$

wo der Wert von A_0 durch die Gleichung (69) bestimmt erscheint. Es läßt sich jetzt zeigen, daß die im folgenden zur Berechnung des Integrals (96) angewandte Methode auch auf die in der Gleichung (92) vorkommenden Integrale anwendbar ist, und ferner, daß der für irgend eine Zenitdistanz aus (96) folgende Wert von $\mathfrak{R}_0$ sich nur wenig von dem mittels der Gleichung (92) berechneten $\mathfrak{R}$ unterscheidet. Nun ist die Berechnung von $\mathfrak{R}$ weit mühevoller als diejenige von $\mathfrak{R}_0$. Wenn es sich also um die Konstruktion einer Tafel handelt, so wird man die Refraktion zunächst mit Hilfe der sehr bequemen Formeln, zu denen die Entwicklung des Integrals (96) führt, etwa von Minute zu Minute der Zenitdistanz berechnen; nachdem dies geschehen ist, benutzt man die in passender Weise entwickelte Formel (92), um die strengen Werte der Refraktion von Grad zu Grad zu ermitteln, und bildet dann die Differenzen $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$. Aus letzteren findet man durch eine leichte Interpolation die für die einzelnen Minuten jedes Grades gültigen Differenzen $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$, welche also nur zu den nach der Gleichung (96) berechneten Werten $\mathfrak{R}_0$ zu addieren sind, um die strengen Werte der Refraktion zu erhalten.

Die zunächst zu lösende Aufgabe bildet nach dem Vorstehenden die Berechnung des Integrals (96). Wird in (96) an Stelle der Variablen ω die durch die Gleichung (54) definierte Variable x eingeführt, so erhält man

$$\mathfrak{R}_0 = A_0\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 z + 2u}}, \tag{97}$$

wobei nach der Gleichung (55) in Verbindung mit (52)

$$\frac{r_0}{l_0}\,u = (1-f)\,x + (2f-\varepsilon)(1-e^{-x})$$

ist. Die letzte Gleichung läßt sich in der Form

$$\frac{r_0}{l_0}\,u = [1 - f + \lambda(2f-\varepsilon)]x - (2f-\varepsilon)(\lambda x - 1 + e^{-x})$$

schreiben, wobei λ eine zunächst unbestimmt gelassene Zahl bedeuten soll. Wird hierauf

$$\frac{r_0}{l_0}\,\frac{1}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = 2\gamma^2$$
$$\frac{2f-\varepsilon}{1-f+\lambda(2f-\varepsilon)} = k \tag{98}$$
$$k(\lambda x - 1 + e^{-x}) = \varphi(x)$$

gesetzt, so lautet die Gleichung

$$2u\gamma^2 = x - \varphi(x) \tag{99}$$

Somit hat man

$$\Re_0 = A_0\gamma\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{\gamma^2\operatorname{cotg}^2 z + x - \varphi(x)}}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$A_0\gamma = C, \qquad \gamma\operatorname{cotg} z = Z \tag{100}$$

gesetzt wird,

$$\Re_0 = C\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}} \tag{101}$$

Es werde jetzt mittels der Gleichung

$$x - \varphi(x) = w \tag{102}$$

an Stelle von x eine neue Variable w eingeführt. Der Nenner des Bruches unter dem vorigen Integral wird dann sofort zu einer Funktion von w, anders aber verhält es sich mit dem Zähler; um auch diesen als Funktion von w darstellen zu können, erinnere man sich des Satzes von *Lagrange**): Wenn zwischen zwei Variablen x und w eine Gleichung von der Form (102) besteht und mit $F(x)$ eine Funktion von x bezeichnet wird, so ist

$$F(x) = F(w) + \varphi(w)\,\frac{dF(w)}{dw} + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d}{dw}\left\{[\varphi(w)]^2\,\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \cdots$$

Hieraus folgt

$$\frac{dF(x)}{dw} = \frac{dF(w)}{dw} + \frac{d}{dw}\left\{\varphi(w)\,\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2}{dw^2}\left\{[\varphi(w)]^2\,\frac{dF(w)}{dw}\right\} + \cdots,$$

also, wenn $F(x) = e^{-x}$ gesetzt wird,

$$\frac{de^{-x}}{dw} = -\frac{e^{-x}dx}{dw} = -e^{-w} - \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} - \frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} - \cdots \tag{103}$$

Aus der durch die Gleichung (102) gegebenen Definition von w in Verbindung mit der letzten der Gleichungen (98) folgt

$$w = x - \varphi(x) = x - k(\lambda x - 1 + e^{-x})$$

*) *Duhamel*, Cours de Mécanique, t. II, chap. 13.

Somit ist für $x = 0$ auch $w = 0$ und für $x = \infty$ auch $w = \infty$. Substituiert man also die in (103) gegebene Reihe für $e^{-x}dx$ in (101), so wird

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{Z^2+w}}\left[e^{-w} + \frac{d}{dw}\{\varphi(w)e^{-w}\} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2}{dw^2}\{[\varphi(w)]^2 e^{-w}\} + \cdots\right]$$

oder, wenn die unter dem Integralzeichen angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden, und darauf der Buchstabe w durch x ersetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{Z^2+x}}\{1 + k(1+\lambda - \lambda x - 2e^{-x}) + k^2[\tfrac{1}{2} + 2\lambda + \lambda^2 - (1+2\lambda)\lambda x + \\ + \tfrac{1}{2}\lambda^2 x^2 - 4(1+\lambda)e^{-x} + 4\lambda x e^{-x} + \tfrac{9}{2}e^{-2x}] + \cdots\}$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (88), (90) und (91*) erhält man hieraus, wenn noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} L_0 &= 2\psi_1 \\ L_1 &= (2+\lambda)\psi_1 - 2\psi_2 - \lambda Z(1 - 2Z\psi_1) \\ L_2 &= (1 + 3\lambda + \tfrac{3}{4}\lambda^2)\psi_1 - (4+3\lambda)\psi_2 + 3\psi_3 + \lambda Z(1 + 2Z\psi_1 - 4Z\psi_2) - \\ &\qquad - \lambda^2 Z[\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}Z^2 - (3Z + Z^3)\psi_1] \end{aligned} \tag{104}$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{R}_0 = C(L_0 + kL_1 + k^2 L_2 + \cdots) \tag{105}$$

Wählt man für die bisher unbestimmt gelassene Zahl λ den Wert $\frac{1}{2}$, so ergeben die zwei ersten der Gleichungen (98)

$$k = \frac{4f - 2\varepsilon}{2 - \varepsilon}, \qquad \gamma^2 = \frac{r_0}{l_0}\,\frac{1}{2-\varepsilon} \tag{106}$$

γ wird also unabhängig von f, und, wie die Gleichungen (100) lehren, hängen darum auch C und Z nicht von f ab; dieser Umstand ist von Wichtigkeit, wenn man die Refraktion unter verschiedenen Annahmen für f berechnen will, wie es von *Radau* geschehen ist.

Im vorigen sind alle zur Bestimmung von $\mathfrak{R}_0$ nötigen Formeln abgeleitet worden, es soll jetzt nur noch der bei der numerischen Rechnung zu befolgende Gang angegeben werden. Mit Hilfe der nach § 80 bekannten Werte von $\frac{r_0}{l_0}$ und ε berechne man die durch die Gleichungen (106) definierten Größen k und γ, wobei wieder $f = 0.2$ angenommen werden möge; ferner führt die Gleichung (69) in Verbindung mit dem in § 80 bestimmten U_1 zur Kenntnis von A_0. Nachdem γ und A_0 gefunden sind, erhält man mittels der ersten der Gleichungen (100) den Koeffizienten C und mittels der zweiten der Gleichungen (100) das einer gegebenen Zenitdistanz entsprechende Z. Mit den Argumenten Z, $Z\sqrt{2}$, $Z\sqrt{3}$ geht man in die im § 82 erwähnte Tafel für $\psi(Z)$ ein und berechnet darauf nach (87)

$$\psi_1 = \psi(Z), \qquad \psi_2 = \sqrt{2}\,\psi(Z\sqrt{2}), \qquad \psi_3 = \sqrt{3}\,\psi(Z\sqrt{3})$$

Wird jetzt auch in den Gleichungen (104) $\lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt, so lassen sich L_0, L_1, L_2, ... ohne Mühe bestimmen und die Substitution dieser Werte sowie derjenigen von C und k in die Gleichung (105) ergibt schließlich den Wert von $\mathfrak{R}_0$.

Es wurde bereits oben bemerkt, daß das erste Glied der Reihe (92) kaum von $\Re_0$ verschieden ist; das zweite und die folgenden Glieder der Reihe (92) sind aber stets außerordentlich klein. Mit Rücksicht hierauf soll die strenge Berechnung des Ausdrucks (92) von $\Re$ unterbleiben; in welcher Weise sich dieselbe ausführen läßt, habe ich in meiner Arbeit über die *Radau*sche Theorie der Refraktion gezeigt (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Band 115, Abt. II, a). Dagegen sollen noch die Differenzen $\Re - \Re_0$ zwischen den aus (92) folgenden strengen Werten und den aus (96) folgenden genäherten Werten der Refraktion mitgeteilt werden, welche *Radau* unter Zugrundelegung der *Bessel*schen Refraktionskonstante und unter der Annahme $\varrho = 1$, $t = 0^\circ$ C, $f = 0.2$ gefunden hat; dieselben sind für

z	$\Re - \Re_0$	z	$\Re - \Re_0$	z	$\Re - \Re_0$
80°	+ 0".02	84°	+ 0".07	88°0	+ 0".36
81	+ 0.03	85	+ 0.10	89.0	+ 0.63
82	+ 0.04	86	+ 0.14	89.5	+ 0.85
83	+ 0.05	87	+ 0.21	90.0	+ 1.14

Gegenüber der Unsicherheit der Beobachtungen und noch mehr mit Rücksicht darauf, daß die für so große Zenitdistanzen berechnete Refraktion infolge der Abweichung des wirklichen Zustandes der Atmosphäre von dem in der Theorie vorausgesetzten ganz erheblich falsch sein kann, können die obigen Differenzen $\Re - \Re_0$ unbedenklich vernachlässigt werden.

84. Darstellung der Refraktion als Funktion der wahren Zenitdistanz. Der Ausdruck für die Refraktion läßt sich in die Form bringen

$$\Re = \alpha \operatorname{tang} z,$$

wo z die scheinbare Zenitdistanz und α einen von z abhängigen Koeffizienten bedeutet. Vergleicht man nämlich den hier für $\Re$ gegebenen Ausdruck mit der in § 80, unter der Annahme $z \leqq 80^\circ$, gefundenen Reihe (72), so folgt, daß für $z \leqq 80^\circ$

$$\alpha = \frac{(A_0)}{10} - \frac{(A_1)}{10}\left(\frac{\operatorname{tang} z}{10}\right)^2 + \cdots$$

ist. Wollte man die für größere Zenitdistanzen anzuwendenden Werte von α erhalten, so hätte man zunächst nach den in § 83 gegebenen Formeln $\Re$ zu berechnen und dann die Gleichung

$$\alpha = \frac{\Re}{\operatorname{tang} z}$$

zu benutzen.

In manchen Fällen ist es nun wünschenswert,

$$\Re = \alpha' \operatorname{tang} \zeta$$

setzen zu können, wo ζ die wahre Zenitdistanz bedeutet. Die praktische Anwendung dieser Formel erfordert eine Tafel, aus der man für jeden Wert von ζ den einer gegebenen Dichtigkeit und Temperatur der Luft entsprechenden $\log \alpha'$ entnehmen kann. In welcher Weise sich eine solche Tafel konstruieren läßt, wenn die Refraktion

als Funktion der scheinbaren Zenitdistanz bekannt ist, soll an einem Beispiel gezeigt werden: Für $z = 74^\circ$ findet man, wenn die Temperatur $+ 30^\circ$ C beträgt, und der durch die Gleichungen (73), (41^b) und (41^a) definierte $\log \varrho = 9.920\,000$ ist, $\mathfrak{R} = 171''.732$. Da also der scheinbaren Zenitdistanz $z = 74^\circ$ der Wert $\zeta = 74^\circ 2' 51''.732$ entspricht, so ergibt sich das diesem ζ zugehörige α' aus der Gleichung

$$\alpha' \operatorname{tang} 74^\circ 2' 51''.73 = 171''.732$$

und zwar wird $\log \alpha' = 1.690\,981$. Berechnet man $\log \alpha'$ auch noch für die Werte von ζ, welche den scheinbaren Zenitdistanzen $z = 73^\circ 30'$, $74^\circ 30'$ und $75^\circ 0'$ (für $t = + 30^\circ$ C und $\log \varrho = 9.920\,000$) entsprechen, so erhält man:

ζ	$\log \alpha'$	I. Diff.	II. Diff.
$73^\circ 32' 46''$	1.691 455		
		− 474	
74 2 52	1.690 981		− 45
		− 519	
74 32 57	1.690 462		− 50
		− 569	
75 3 3	1.689 893		

Um mit Hilfe dieser Tabelle den zu $\zeta = 74^\circ 0'$ gehörigen $\log \alpha'$ zu finden, benutze man die in § 2 angegebene Interpolationsformel (20)

$$f(a + n) = f(a + 1) - \nu \left[f'(a + \tfrac{1}{2}) - \frac{\nu - 1}{2} f''(a + 1) \right]$$

Versteht man hier unter $f(a + n)$ den gesuchten Logarithmus, also unter $f(a)$ den zu $\zeta = 73^\circ 32' 46''$ gehörigen und unter $f(a + 1)$ den zu $\zeta = 74^\circ 2' 52''$ gehörigen $\log \alpha'$, so wird mit Rücksicht darauf, daß das Intervall zwischen zwei in der Tabelle aufeinander folgenden Werten von ζ in runder Zahl $30' 6''$ oder $1806''$ beträgt,

$$n = \frac{74^\circ 0' 0'' - 73^\circ 32' 46''}{1806''} = 0.905, \qquad \nu = 1 - n = 0.095, \qquad \frac{\nu - 1}{2} = - 0.45$$

Unter Benutzung der in der Tabelle gegebenen Werte

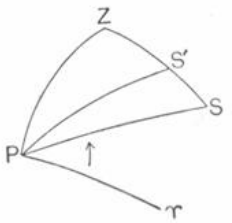
$$f(a + 1) = 1.690\,981, \qquad f'(a + \tfrac{1}{2}) = - 0.000\,474,$$
$$f''(a + 1) = - 0.000\,045$$

erhält man somit den der wahren Zenitdistanz $\zeta = 74^\circ 0'$ (für $t = + 30^\circ$ C und $\log \varrho = 9.920\,000$) entsprechenden Wert $\log \alpha' = 1.691\,028$.

In der eben erläuterten Weise kann man für jeden vollen Grad der wahren Zenitdistanz den zugehörigen $\log \alpha'$ berechnen. Führt man diese Rechnung für eine Reihe äquidistanter Werte von t und $\log \varrho$ aus, so lassen sich durch Interpolation die für beliebige Werte von ζ, t und $\log \varrho$ gültigen Werte von $\log \alpha'$ finden.

85. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszension und Deklination eines Sterns. In Fig. 3 sei P der Pol des Äquators, Z das Zenit eines Beobachtungsortes, γ das Frühlingsäquinox, S der wahre und S' der scheinbare Ort eines Sterns. Bezeichnet man mit A, D die wahre Rektaszension und Deklination, und mit A', D' die scheinbare Rektaszension und Deklination des Sterns, so ist $SPS' = A' - A$, $PS = 90^\circ - D$, $PS' = 90^\circ - D'$. Ferner hat man dem vorigen Paragraphen zufolge $SS' = \alpha' \tan\zeta$, wo ζ die wahre Zenitdistanz des Sterns bedeutet. Wird jetzt der parallaktische Winkel $ZSP = q$ gesetzt, so folgt aus dem Dreieck PSS'

Fig. 3.



$$(107)\qquad \begin{aligned}(A' - A)\cos D' &= \alpha' \tan\zeta \sin q\\ D' - D &= \alpha' \tan\zeta \cos q\end{aligned}$$

Zur Berechnung von ζ und q dienen die in § 17 abgeleiteten Formeln (7) und (9):

$$\tan N = \operatorname{cotg}\varphi \cos(\vartheta - A), \qquad \operatorname{cotg} n = \sin N \tan(\vartheta - A)$$

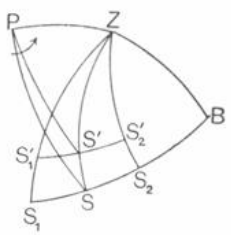
$$\tan\zeta \sin q = \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + D)}$$

$$\tan\zeta \cos q = \operatorname{cotg}(N + D)$$

Hier bedeutet ϑ die Sternzeit der Beobachtung und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes. Bei nördlichen Breiten liegt N entweder im ersten oder im vierten Quadranten; der erste Fall tritt ein, wenn $\vartheta - A$ zwischen 0^h und 6^h, bzw. zwischen 18^h und 24^h liegt. Bei südlichen Breiten liegt N entweder im zweiten oder im dritten Quadranten, und zwar im zweiten, wenn $\vartheta - A$ zwischen 0^h und 6^h, bzw. zwischen 18^h und 24^h fällt.

86. Einfluß der Refraktion auf den Positionswinkel und die Distanz. Man bezeichne mit Z (Fig. 4) das Zenit, mit S_1 und S_2 die wahren und mit S_1' und S_2' die scheinbaren Örter zweier Sterne. Mit Rücksicht auf die größten direkt meßbaren Distanzen soll der Abstand der beiden Sterne kleiner als 2° vorausgesetzt werden; ferner nehme man an, daß die Zenitdistanzen ZS_1' und ZS_2' höchstens gleich 75° sind. Letztere Einschränkung darf man machen, weil man, wenn es sich um genaue Messungen handelt, nie in größeren Zenitdistanzen beobachten wird. Setzt man die Azimutdifferenz von S_1 und S_2 oder den Winkel $S_1ZS_2 = A$, ferner $ZS_1 = \zeta_1$, $ZS_2 = \zeta_2$, $S_1S_2 = \Delta$, $ZS_1S_2 = \lambda_1$, $ZS_2S_1 = 180^\circ - \lambda_2$, so erhält man durch Anwendung der *Gauß*schen Gleichungen auf das Dreieck ZS_1S_2

Fig. 4.



$$(108)\qquad \begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\Delta \sin\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)\\ \sin\tfrac{1}{2}\Delta \cos\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) &= \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)\end{aligned}$$

In derselben Weise erhält man aus dem Dreieck $ZS_1'S_2'$, wenn $ZS_1' = z_1$, $ZS_2' = z_2$, $S_1'S_2' = \Delta'$, $ZS_1'S_2' = l_1$, $ZS_2'S_1' = 180^\circ - l_2$ gesetzt wird,

$$(109)\qquad \begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}\Delta' \sin\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) &= \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\\ \sin\tfrac{1}{2}\Delta' \cos\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) &= \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(z_1 - z_2)\end{aligned}$$

Es werde jetzt der Bogen S_1S_1' mit r_1 und der Bogen S_2S_2' mit r_2 bezeichnet, es ist dann $z_1 = \zeta_1 - r_1$, $z_2 = \zeta_2 - r_2$. Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (109), dividiert sodann die erste der Gleichungen (108) durch die erste der Gleichungen (109), ferner die zweite der Gleichungen (108) durch die zweite der Gleichungen (109) und setzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda, \qquad \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) = l,$$
$$\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) = \zeta, \qquad \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2) = r,$$

so ergibt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta \sin\lambda = \sin\tfrac{1}{2}\Delta' \sin l \frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta \cos\lambda = \sin\tfrac{1}{2}\Delta' \cos l \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)}{\sin\tfrac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}$$

Hieraus folgt

$$\tang\lambda = \tang l \frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)} \frac{\sin\tfrac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}{\sin\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)} \tag{110}$$

In Anbetracht dessen, daß r für $\zeta \leqq 75^0$ ein kleiner Winkel ist, kann man

$$\sin(\zeta - r) = \sin\zeta - r \sin 1'' \cos\zeta$$

setzen. Berücksichtigt man also noch, daß r sich nur äußerst wenig von der für die Zenitdistanz ζ gültigen Refraktion unterscheidet und demgemäß $r = \alpha' \tang\zeta$ angenommen werden kann, so wird

$$\frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta - r)} = \frac{1}{1 - \alpha' \sin 1''} \tag{111}$$

Ferner ist sehr nahe

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}[\zeta_1 - \zeta_2 - (r_1 - r_2)]}{\sin\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)} = 1 - \frac{r_1 - r_2}{\zeta_1 - \zeta_2} \tag{112}$$

Wenn nun $\frac{dr}{d\zeta}$ den für $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$ gültigen Differentialquotienten der Refraktion bedeutet, so hat man bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$r_1 - r_2 = \frac{dr}{d\zeta}(\zeta_1 - \zeta_2)$$

oder mit Rücksicht darauf, daß der im folgenden angegebene Wert von $\frac{dr}{d\zeta}$ in Bogensekunden ausgedrückt ist,

$$\frac{r_1 - r_2}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{dr}{d\zeta} \sin 1'' \tag{113}$$

Unter Benutzung von (111), (112) und (113) erhält man aus (110)

$$\tang l = \frac{1 - \alpha' \sin 1''}{1 - \frac{dr}{d\zeta} \sin 1''} \tang\lambda$$

Hieraus folgt nach einer bekannten Reihenentwicklung [§ 1, (17) und (18)]

$$l = \lambda + \frac{\frac{dr}{d\zeta} - \alpha'}{2 - \left(\alpha' + \frac{dr}{d\zeta}\right)\sin 1''} \sin 2\lambda + \cdots,$$

wo das zweite Glied auf der rechten Seite bereits durch $\sin 1''$ dividiert ist und demnach in Bogensekunden ausgedrückt erscheint. Nun erhält man durch Differentiation der Gleichung $r = \alpha' \operatorname{tang}\zeta$

$$\frac{dr}{d\zeta} = \alpha' \sec^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta = \alpha' + \alpha' \operatorname{tang}^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta$$

Unter Vernachlässigung sehr kleiner Glieder wird demnach

$$\frac{\frac{dr}{d\zeta} - \alpha'}{2 - \left(\alpha' + \frac{dr}{d\zeta}\right)\sin 1''} = \tfrac{1}{2}\left(\alpha' \operatorname{tang}^2\zeta + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{tang}\zeta\right)$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die für l erhaltene Reihe, so ergibt sich

$$\lambda - l = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin 2\lambda \tag{114}$$

In Fig. 4 seien nun S und S' die Mittelpunkte der Bögen S_1S_2, bzw. $S_1'S_2'$, P sei der Pol des Äquators, und der Pfeil gebe die Richtung an, in der die Rektaszensionen gezählt werden; es ist dann PSS_2 der wahre und $PS'S_2'$ der scheinbare Positionswinkel des Sterns S_2, bezogen auf den Mittelpunkt des die Sterne S_1 und S_2 verbindenden Bogens. Setzt man $PSS_2 = p$, $PS'S_2' = p'$, ferner $PSZ = q$, $PS'Z = q'$, so wird, da ZSS_2 sehr nahe gleich λ und $ZS'S_2'$ sehr nahe gleich l ist,

$$p = \lambda + q, \qquad p' = l + q', \tag{115}$$

also

$$p - p' = \lambda - l - (q' - q) \tag{116}$$

Aus dem Dreieck $PS'S$ folgt aber, wenn $PS = 90^\circ - \delta$, $PS' = 90^\circ - \delta'$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $SS' = r$ angenommen werden kann,

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = \frac{\sin\frac{1}{2}(q' + q)}{\sin\frac{1}{2}(q' - q)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r$$

oder hinreichend genau

$$q' - q = r \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Setzt man hier wieder $r = \alpha' \operatorname{tang}\zeta$, so erhält man

$$q' - q = \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta \tag{117}$$

Werden jetzt die in (114) und (117) gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (116) eingeführt, und wird dabei in (114) für $\sin 2\lambda$ der aus der ersten der Gleichungen (115) folgende Wert $\sin 2(p - q)$ substituiert, so ergibt sich

$$p - p' = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin 2(p - q) - \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta \tag{118}$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung läßt sich der wahre Positionswinkel berechnen, wenn p' durch Beobachtung bekannt ist. Vielfach ist aber der beobachtete Positionswinkel verschieden von dem hier mit p' bezeichneten Winkel. Um dies deutlich zu machen, soll kurz angegeben werden, in welcher Weise die Beobachtung eines Positionswinkels ausgeführt zu werden pflegt, wenn man ein sog. Positionsmikrometer benutzt. Die Einrichtung eines solchen Mikrometers ist die folgende. In der Brennebene des Fernrohrobjektivs sind zwei zueinander senkrechte Fäden ausgespannt, deren Kreuzungspunkt auf der optischen Achse des Fernrohrs liegt. Der Rahmen, an dem die Fäden befestigt sind, ist um die optische Achse des Fernrohrs drehbar. Zur Messung der Drehung dient ein zur Fadenebene paralleler, in Grade und Minuten eingeteilter Kreis, dessen Mittelpunkt ebenfalls auf der optischen Achse liegt; diesen Kreis bezeichnet man als Positionskreis. Um mit Hilfe eines solchen Mikrometers den Positionswinkel des in Fig. 4 mit S_2' bezeichneten scheinbaren Sternortes in bezug auf den Mittelpunkt S' des die scheinbaren Sternörter S_1' und S_2' verbindenden Bogens zu messen, stellt man den Kreuzungspunkt der Fäden auf S' ein und dreht dann den die Fäden enthaltenden Rahmen, bis daß einer der Fäden (der kurz der Faden F genannt werden möge) der Verbindungslinie $S_1'S_2'$ parallel ist; die dieser Lage entsprechende Ablesung des Positionskreises sei w'. Ist w' gefunden, so bringt man den Faden F in eine solche Lage, daß er der Richtung der täglichen Bewegung parallel ist. Falls die beiden Sterne dem Äquator benachbart sind, geschieht dies dadurch, daß man den Fädenrahmen so lange dreht, bis daß beispielsweise der Stern S_1, wenn man ihn bei seinem Eintritt in das Gesichtsfeld auf den Faden F eingestellt hat, mit diesem während des ganzen Durchgangs in Koinzidenz bleibt. Sind die Sterne weit vom Äquator entfernt und sind demnach die von ihnen beschriebenen Bahnen gekrümmt, so bestimmt man die Richtung der täglichen Bewegung in der Art, daß man den die Fäden enthaltenden Rahmen so lange dreht, bis daß z. B. der Stern S_1 in gleichen Abständen von dem der Voraussetzung nach durch die optische Achse des Fernrohrs gehenden zweiten Faden den Faden F passiert. Die Ablesung des Positionskreises, welche man erhält, wenn der Faden F der Richtung der täglichen Bewegung parallel ist, möge mit w_0' bezeichnet werden. Wäre nun keine Refraktion vorhanden, so würde die von einem Stern beschriebene Bahn parallel zum Himmelsäquator sein; in diesem Falle und unter der Voraussetzung, daß die Ablesung des Positionskreises in demselben Sinne wächst wie der Positionswinkel, wäre $w_0' - 90^\circ$ die Ablesung, welche man erhielte, wenn der Faden F zum Pol hin gerichtet ist. Somit würde dann $w' - (w_0' - 90^\circ)$ gleich dem oben mit p' bezeichneten Winkel $PS'S_2'$ in Fig. 4 sein. Infolge der Refraktion ist aber die Bahn, welche ein Stern bei seinem Durchgang durch das Gesichtsfeld beschreibt, gegen den wahren Parallelkreis geneigt; somit fällt auch der Faden F in seiner der Ablesung $w_0' - 90^\circ$ entsprechenden Lage nicht mit dem wahren Deklinationskreise PS' des Punktes S' (Fig. 4), sondern, wie man sich ausdrücken kann, mit dem scheinbaren Deklinationskreise von S' zusammen. Um nun mit Hilfe des von dem scheinbaren Deklinationskreise an gezählten Positionswinkels $w' - (w_0' - 90^\circ) = p_1'$ den wahren Positionswinkel ableiten zu können, berücksichtige man zunächst, daß, wenn w_0 die der Angabe w_0' des Positionskreises entsprechende, wegen Refraktion korrigierte Ablesung

bedeutet, der Wert von $w_0 - w'_0$ erhalten wird, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (118) den zu $p' = 90^\circ$ gehörigen Wert von p substituiert; statt dessen kann man aber auch einfach $p = 90^\circ$ setzen. Damit ergibt sich

$$(118^a) \quad w_0 - w'_0 = -\tfrac{1}{2}\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin 2q - \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Der Bedeutung von p' gemäß ist nun $p' = w' - (w_0 - 90^\circ)$; hieraus, in Verbindung mit der obigen Definitionsgleichung $p'_1 = w' - (w'_0 - 90^\circ)$, folgt $p'_1 = p' + (w_0 - w'_0)$ und demnach

$$p - p'_1 = p - p' - (w_0 - w'_0),$$

wo unter p wieder der wahre Positionswinkel verstanden werden soll. Substituiert man in die letzte Gleichung die in (118) und (118a) gefundenen Ausdrücke, so erhält man die gesuchte Beziehung

$$(119) \qquad p - p'_1 = -\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2\zeta \sin(p - 2q)\cos p$$

Wie man sieht, ist diese Gleichung einfacher als die Gleichung (118), welche sich auf den Fall bezieht, daß der vom wahren Deklinationskreise PS' (Fig. 4) aus gezählte Positionswinkel p' beobachtet ist.

Die Gleichungen (118) und (119) lassen sich noch etwas umformen. In (118) setze man

$$(120) \qquad \tfrac{1}{2}\sin 2(p - q) = \cos^2(p - q)\operatorname{tang}(p - q)$$

und führe einen Hilfswinkel (x) ein, der durch die Gleichung

$$(121) \qquad \operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\zeta \cos(p - q)$$

definiert werden soll; es wird dann

$$(121^a) \quad p - p' = -\left(\alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\right)\operatorname{tang}^2 x \operatorname{tang}(p - q) - \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta$$

Wenn nun M den Modul der *Briggs*schen Logarithmen bedeutet, so ist

$$(122) \qquad \frac{d\alpha'}{d\zeta} = \alpha' \frac{d\log\alpha'}{M d\zeta}$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichungen (121a) und (119), und setzt zur Abkürzung

$$(123) \qquad f = \alpha'\left(1 + \operatorname{cotg}\zeta \frac{d\log\alpha'}{M d\zeta}\right),$$

so erhält man

$$(124) \qquad p = p' - f \operatorname{tang}^2 x \operatorname{tang}(p - q) - \alpha' \operatorname{tang}\zeta \sin q \operatorname{tang}\delta,$$

beziehungsweise

$$(125) \qquad p = p'_1 - f \operatorname{tang}^2\zeta \sin(p - 2q)\cos p$$

Der durch die Gleichung (121) definierte Hilfswinkel x hat eine besondere Bedeutung; zieht man nämlich in Fig. 4 den Bogen ZB senkrecht zu S_1S_2, so findet man, daß x gleich dem Bogen BS ist.

Um einen Ausdruck für die Refraktion in Distanz zu erhalten, gehe man von dem Trapez $S_1 S_1' S_2' S_2$ in Fig. 4 aus, worin der Annahme nach $S_1 S_2$ kleiner als 2° ist. Da die Zenitdistanzen der beiden Sterne nicht größer als 75° sein sollen, so betragen die Bögen $S_1 S_1'$ und $S_2 S_2'$ höchstens einige wenige Minuten; unter diesen Umständen kann man die wahre Distanz $S_1 S_2$ gleich der Summe der Projektionen von $S_1 S_1' = r_1$, $S_1' S_2' = \Delta'$, $S_2' S_2 = r_2$ auf den durch S_1 und S_2 gehenden Bogen größten Kreises setzen und erhält also, wenn $S_1 S_2$ wieder mit Δ bezeichnet wird,

$$\Delta = \Delta' \cos(\lambda - l) + r_1 \cos\lambda_1 - r_2 \cos\lambda_2 \tag{126}$$

Nun ist bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\Delta' \cos(\lambda - l) = \Delta' - \tfrac{1}{2}\Delta' [(\lambda - l) \sin 1'']^2$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (114)

$$\Delta' \cos(\lambda - l) = \Delta' - \tfrac{1}{8}\Delta' \alpha'^2 \sin^2 1'' \tan^4\zeta \sin^2 2\lambda \tag{126a}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann für eine Distanz von 7000″ und $\zeta = 75^\circ$ den Werte 0″.01 erreichen. Da aber in Anbetracht der bei so großen Zenitdistanzen vorhandenen Unsicherheit der berechneten Refraktion ein Fehler von 0″.01 ohne Bedeutung ist, so darf man das genannte Glied vernachlässigen; damit geben die Gleichungen (126) und (126a)

$$\Delta = \Delta' + r_1 \cos\lambda_1 - r_2 \cos\lambda_2$$

oder, wenn $r_1 = \alpha_1' \tan\zeta_1$ und $r_2 = \alpha_2' \tan\zeta_2$ gesetzt wird,

$$\Delta = \Delta' + \alpha_1' \tan\zeta_1 \cos\lambda_1 - \alpha_2' \tan\zeta_2 \cos\lambda_2$$

Bezeichnet man den Bogen BS_1 (Fig. 4) mit x_1 und den Bogen BS_2 mit x_2, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\Delta = \Delta' + \alpha_1' \tan x_1 - \alpha_2' \tan x_2$$

Nun hat man aber dem *Taylor*schen Satze zufolge, sowie mit Rücksicht darauf, daß $\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) = \zeta$ gesetzt wurde, und demnach $\zeta_1 - \zeta = -\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ und $\zeta_2 - \zeta = \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ ist,

$$\alpha_1' = \alpha' - \frac{d\alpha'}{d\zeta}\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 - \cdots$$

$$\alpha_2' = \alpha' + \frac{d\alpha'}{d\zeta}\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 + \cdots$$

Somit wird

$$\Delta = \Delta' + \left[\alpha' + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2\right](\tan x_1 - \tan x_2) - \frac{d\alpha'}{d\zeta}\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}(\tan x_1 + \tan x_2)$$

oder, da $x_1 - x_2 = \Delta$ und $x_1 + x_2 = 2x$ ist,

$$\Delta = \Delta' + \left[\alpha' + \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2\right]\frac{\sin\Delta}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{d\alpha'}{d\zeta}\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} \tag{127}$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen. Man hat zunächst

$$\frac{1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{2}{\cos 2x + \cos \Delta} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 \frac{1}{2}\Delta} = \sec^2 x (1 + \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \sec^2 x + \cdots)$$

Nun folgt aus der Gleichung (121), daß x höchstens gleich ζ ist; werden also die Messungen nicht über die Zenitdistanz $\zeta = 75^\circ$ hinaus ausgedehnt, so wird auch x nicht größer als 75°. Mit Rücksicht hierauf und da $\Delta < 2^\circ$ angenommen wird, kann man anstatt des vorigen Ausdrucks den folgenden anwenden

$$\frac{1}{\cos x_1 \cos x_2} = \sec^2 x (1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \Delta \sec^2 x) \tag{128}$$

Ferner ergibt sich durch Anwendung einer der *Napier*schen Analogien auf das Dreieck ZS_1S_2 (Fig. 4)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \frac{\cos \lambda}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta$$

oder hinreichend genau

$$\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \tfrac{1}{2}\Delta \cos \lambda$$

Da aber die in der Gleichung (127) vorkommenden Differentialquotienten $\frac{d\alpha'}{d\zeta}$ und $\frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2}$ in Bogensekunden ausgedrückt zu werden pflegen, so muß man $\frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)$ in Teilen des Radius ausdrücken; demgemäß ist das in der letzten Gleichung enthaltene Δ durch $\Delta \sin 1'' = \sin \Delta$ zu ersetzen. Damit wird

$$\tfrac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1) = - \tfrac{1}{2} \sin \Delta \cos \lambda \tag{129}$$

Werden jetzt die in (127) angedeuteten Multiplikationen ausgeführt und dabei die Gleichungen (128) und (129) berücksichtigt, so erhält man zunächst für das von α' abhängige Glied

$$\frac{\alpha' \sin \Delta}{\cos x_1 \cos x_2} = \alpha' \sin \Delta \sec^2 x + \tfrac{1}{4} \alpha' \sin^3 \Delta \sec^4 x \tag{130}$$

Ferner wird mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\sin \Delta$ wie der dritten

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 \frac{\sin \Delta}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{1}{8} \frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2} \sin^3 \Delta \cos^2 \lambda \sec^2 x$$

Wie nun vorhin bemerkt wurde, kann x höchstens gleich ζ werden; in diesem Falle ist der Gleichung (121) zufolge $p - q = 0$, also, wie die erste der Gleichungen (115) zeigt, auch $\lambda = 0$. Für $\lambda = 0$, $x = \zeta = 75^\circ$ und $\Delta = 7000''$ ist aber das auf der rechten Seite der vorigen Gleichung stehende Glied kleiner als $0''.01$ und darf darum vernachlässigt werden; somit wird

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\alpha'}{d\zeta^2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2 \frac{\sin \Delta}{\cos x_1 \cos x_2} = 0 \tag{131}$$

Weiterhin ergibt sich

$$- \frac{d\alpha'}{d\zeta} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{d\alpha'}{d\zeta} \sin \Delta \cos \lambda \operatorname{tang} x + \frac{1}{4} \frac{d\alpha'}{d\zeta} \sin^3 \Delta \cos \lambda \operatorname{tang} x \sec^2 x$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite erreicht seinen Maximalwert, wenn $\lambda = 0$, also $x = \zeta$ ist; da dieser Maximalwert aber für $\Delta = 7000''$ und $x = \zeta = 75^0$ kleiner als $0''.01$ ist, so genügt es,

$$-\frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\,\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{d\alpha'}{d\zeta}\sin\Delta\cos\lambda\,\operatorname{tang} x$$

anzunehmen. Substituiert man hier für $\frac{d\alpha'}{d\zeta}$ seinen in (122) gegebenen Wert und für $\cos\lambda = \cos(p - q)$ den aus (121) folgenden Ausdruck

$$\cos\lambda = \operatorname{cotg}\zeta\,\operatorname{tang} x$$

so erhält man

$$(132)\qquad -\frac{d\alpha'}{d\zeta}\,\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\,\frac{\sin 2x}{\cos x_1 \cos x_2} = \alpha'\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta\operatorname{cotg}\zeta\operatorname{tang}^2 x$$
$$= \alpha'\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta\operatorname{cotg}\zeta(\sec^2 x - 1)$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (130), (131) und (132) ergibt sich aus (127

$$\Delta = \Delta' + \alpha'\left(1 + \operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\right)\sin\Delta\sec^2 x$$
$$- \alpha'\operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}\sin\Delta + \tfrac{1}{4}\alpha'\sin^3\Delta\sec^4 x$$

oder, wenn die durch die Gleichung (123) definierte Größe f eingeführt und außerdem

$$(133)\qquad g = -\alpha'\operatorname{cotg}\zeta\,\frac{d\log\alpha'}{Md\zeta}, \qquad h = \tfrac{1}{4}\alpha'$$

gesetzt wird,

$$(134)\qquad \Delta = \Delta' + f\sin\Delta\sec^2 x + g\sin\Delta + h\sin^3\Delta\sec^4 x$$

Der Wert von α' ändert sich mit der Zenitdistanz, mit der Dichtigkeit der Luft und mit der Temperatur; eben dasselbe findet also auch für die Koeffizienten f, g und h statt. Berechnet man nun für eine und dieselbe Zenitdistanz, aber für verschiedene Werte der Dichtigkeit und Temperatur der Luft die numerischen Werte von α', f, g und h, so ergibt sich folgendes: Es sei ϱ die durch die Gleichungen (73), (41^b) und (41^a) definierte Dichtigkeit und t die Temperatur der Luft, ferner seien α'_0, f_0, g_0 und h_0 die Werte von α', f, g und h für $\varrho = 1$ und $t = 0$; wenn dann $\varphi(\varrho, \zeta)$ einen von ϱ und ζ, und $\psi(t, \zeta)$ einen von t und ζ abhängigen Faktor bezeichnet, so hat man für beliebige Werte von ϱ und t

$$(134^a)\qquad f = \varrho\cdot\varphi(\varrho, \zeta)\cdot\psi(t, \zeta)\cdot f_0$$

oder

$$\log f = \log f_0 + \log\varrho + \log\varphi(\varrho, \zeta) + \log\psi(t, \zeta)$$

Ähnliche Gleichungen gelten für $\log\alpha'$, $\log g$ und $\log h$, nur mit dem Unterschiede, daß die Funktionen φ und ψ — strenge genommen — durch andere zu ersetzen sind; in Wirklichkeit aber begeht man nur einen verschwindend kleinen Fehler, wenn man in den Gleichungen für $\log\alpha'$, $\log g$ und $\log h$ dieselben Werte von φ und ψ anwendet wie in der Gleichung für $\log f$, selbst wenn $\Delta = 7000''$ und $\zeta = 75^0$ ist.

Was speziell noch das in (134) von $h = \frac{1}{4}\alpha'$ abhängige Glied betrifft, so ist dasselbe so klein, daß man auf die Veränderung von h mit der Zenitdistanz keine Rücksicht zu nehmen braucht und, mit Benutzung des für $\zeta = 75^0$, $\varrho = 1$, $t = 0$ gültigen Wertes $\log \frac{1}{4}\alpha'_0 = 1.17$,

$$\log h = 1.17 + \log \varrho + \log \varphi(\varrho, \zeta) + \log \psi(t, \zeta)$$

setzen kann. Die zur Berechnung des Einflusses der Refraktion auf den Positionswinkel und die Distanz dienenden Gleichungen (124), (125) und (134) werden somit

1. wenn der beobachtete Positionswinkel (p') von dem wahren Deklinationskreise aus gerechnet wird,

$$(135^a)\quad \begin{aligned} p &= p' - \varrho \cdot \varphi(\varrho, \zeta) \cdot \psi(t, \zeta) \{f_0 \operatorname{tang}^2 x \operatorname{tang}(p - q) + \alpha'_0 \operatorname{tang} \zeta \sin q \operatorname{tang} \delta\} \\ \Delta &= \Delta' + \varrho \cdot \varphi(\varrho, \zeta) \cdot \psi(t, \zeta) \{f_0 \sin \Delta \sec^2 x + g_0 \sin \Delta + [1.17] \sin^3 \Delta \sec^4 x\} \end{aligned}$$

2. wenn der beobachtete Positionswinkel (p'_1) von dem scheinbaren Deklinationskreise aus gerechnet wird,

$$(135^b)\quad \begin{aligned} p &= p'_1 - \varrho \cdot \varphi(\varrho, \zeta) \cdot \psi(t, \zeta) \cdot f_0 \operatorname{tang}^2 \zeta \sin(p - 2q) \cos p \\ \Delta &= \Delta' + \varrho \cdot \varphi(\varrho, \zeta) \cdot \psi(t, \zeta) \cdot \{f_0 \sin \Delta \sec^2 x + g_0 \sin \Delta + [1.17] \sin^3 \Delta \sec^4 x\} \end{aligned}$$

Die Werte von $\log \varrho$ ergeben sich mit Hilfe von Tabelle 1 und 2 meiner Refraktionstafeln, diejenigen von $\log f_0$, $\log g_0$ und $\log \alpha'_0$ folgen aus der Tabelle 7. Die Werte von $\log \varphi(\varrho, \zeta)$ und $\log \psi(t, \zeta)$ sind in den Tabellen 8 und 9 als »Dichtigkeits«-, bzw. »Temperaturkorrektion des log der mittleren Refraktion in Positionswinkel und Distanz« bezeichnet. — Es sei noch bemerkt, daß die beiden letzten von g_0 und $\sin^3 \Delta$ abhängigen Glieder in der Formel für Δ nur bei so großen Distanzen, wie sie bei Heliometermessungen vorkommen, merklich werden können.

Um die Werte von ζ und q zu berechnen, kann man sich nach § 17 der folgenden Formeln bedienen, in denen Θ den Stundenwinkel des Mittelpunktes (S) des Bogens $S_1 S_2$ in Fig. 4, und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet.

$$\operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \varphi \cos \Theta, \qquad \operatorname{cotg} n = \sin N \operatorname{tang} \Theta$$

$$(136)\quad \begin{aligned} \operatorname{tang} \zeta \sin q &= \frac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + \delta)} \\ \operatorname{tang} \zeta \cos q &= \operatorname{cotg}(N + \delta) \end{aligned}$$

Für nördliche Breiten ist N im ersten oder vierten Quadranten zu wählen, und zwar im ersten, wenn Θ im ersten oder vierten Quadranten liegt, im vierten, wenn Θ im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Für südliche Breiten ist N im zweiten oder dritten Quadranten zu wählen, und zwar im zweiten, wenn Θ im ersten oder vierten Quadranten liegt, im dritten, wenn Θ im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Zur Berechnung von x dient die Gleichung (121)

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \zeta \cos(p - q)$$

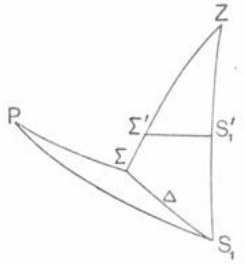
87. Einfluß der Refraktion auf die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz zweier Sterne. Von den beiden zueinander senkrechten Fäden eines Positionsmikrometers (§ 86) sei der eine fest, der andere durch eine Schraube beweglich. Stellt man den festen Faden so, daß seine Richtung mit derjenigen eines

Deklinationskreises zusammenfällt, und sind t_1 und t_2 die Sternzeiten, zu denen die Sterne S_1 und S_2 nacheinander den Faden passieren, so ist $t_2 - t_1$ die beobachtete oder scheinbare Rektaszensionsdifferenz von S_2 und S_1. Die scheinbare Deklinationsdifferenz der beiden Sterne erhält man, indem man den beweglichen Faden zur Zeit t_1 auf S_1 und zur Zeit t_2 auf S_2 einstellt und die sich hierbei ergebenden Schraubenablesungen voneinander subtrahiert. Es ist jetzt zu zeigen, in welcher Weise man aus der beobachteten die von der Refraktion befreite oder wahre Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz finden kann; dabei möge die wahre Rektaszension und Deklination von S_1, bzw. S_2 mit α_1, δ_1, bzw. α_2, δ_2 bezeichnet werden.

In Fig. 5 sei Z das Zenit des Beobachtungsortes, und $S_1'\Sigma'$ ein Bogen des Deklinationskreises, in dem die durch den festen Faden und den Mittelpunkt des Objektivs gelegte Ebene die Himmelskugel schneidet; S_1' sei der scheinbare Ort des Sterns S_1 zur Zeit t_1 und Σ' der scheinbare Ort des Sterns S_2 zur Zeit t_2. Man kann sich nun denken, daß zur Zeit t_1, wo der Stern S_1 durch S_1' geht, ein anderer Stern (Σ) mit Σ' zusammenfällt. Um die wahren Örter dieses gedachten Sterns und des Sterns S_1 zur Zeit t_1 zu erhalten, hat man auf $Z\Sigma'$ und ZS_1' die den scheinbaren Zenitdistanzen $Z\Sigma'$ und ZS_1' entsprechenden Refraktionen $\Sigma'\Sigma$ (Fig. 6), bzw. $S_1'S_1$ aufzutragen: Σ und S_1 sind dann die gesuchten Örter. Da der Stern Σ durch denselben Punkt (Σ') des Bogens $\Sigma' S_1'$ hindurchgehen soll, wie der Stern S_2, so muß die Deklination von Σ derjenigen des Sterns S_2 gleich sein. Da ferner die Zeit, zu der der Stern Σ den Punkt Σ' passiert, gleich t_1 sein soll, während der Stern S_2 erst zur Zeit t_2 durch Σ' hindurchgeht, so muß die Rektaszension des Sterns Σ gleich $\alpha_2 - (t_2 - t_1)$ sein. In dem Augenblicke nun, wo die Sterne Σ und S_1 durch die Punkte Σ', bzw. S_1' hindurchgehen, ist der beobachtete Positionswinkel des nördlicheren der beiden Sterne, bezogen auf den Mittelpunkt des die Sterne verbindenden Bogens gleich 0. Um den dem beobachteten entsprechenden wahren Positionswinkel zu finden, hat man zu unterscheiden, ob die Richtung des festen Fadens mit der Richtung des wahren oder mit der des scheinbaren Deklinationskreises zusammenfällt (§ 86). Im ersten Falle hat man die Gleichung (124) anzuwenden und darin δ als identisch mit $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ zu betrachten, ferner $p' = 0$ und auf der rechten Seite $p = 0$ zu setzen; demnach ist auch an Stelle von $\operatorname{tang} x$ sein aus (121) für $p = 0$ folgender Wert $\operatorname{tang}\zeta \cos q$ einzuführen. Im zweiten Fall muß die Gleichung (125) benutzt und darin $p_1' = 0$ sowie auf der rechten Seite $p = 0$ gesetzt werden. Falls also der feste Faden in die Richtung des wahren Deklinationskreises fällt, wird

Fig. 5.

Fig. 6.



$$p = [f \operatorname{tang}\zeta \cos q - \alpha' \operatorname{tang}\delta] \operatorname{tang}\zeta \sin q; \tag{137}$$

fällt dagegen der feste Faden in die Richtung des scheinbaren Deklinationskreises, so hat man

$$p = f \operatorname{tang}^2\zeta \sin 2q \tag{138}$$

Die wahre Distanz $\Sigma S_1 = \Delta$ findet man, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (134) Δ' gleich der gemessenen Deklinationsdifferenz $\delta_2' - \delta_1'$ setzt, ferner $\sin \Delta = (\delta_2' - \delta_1') \sin 1''$ annimmt und an Stelle von $\sec^2 x$ seinen aus der Gleichung (121) für $p = 0$ folgenden Wert $1 + \operatorname{tang}^2 \zeta \cos^2 q$ substituiert; vernachlässigt man dabei noch die kleinen von g und h abhängigen Glieder der Gleichung (134), so erhält man

$$\Delta = \delta_2' - \delta_1' + f(\delta_2' - \delta_1') \sin 1'' [1 + \operatorname{tang}^2 \zeta \cos^2 q] \tag{139}$$

Bedeutet jetzt P in Fig. 6 den Ort des Pols, so hat man $PS_1 = 90^\circ - \delta_1$, $P\Sigma = 90^\circ - \delta_2$ und, da die Rektaszension des fingierten Sterns Σ gleich $\alpha_2 - (t_2 - t_1)$ ist, $S_1 P \Sigma = \alpha_2 - \alpha_1 - (t_2 - t_1)$. Setzt man dann $PS_1\Sigma = p_1$, $P\Sigma S_1 = 180^\circ - p_2$, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) = p$, $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = \delta$, so folgt

$$[\alpha_2 - \alpha_1 - (t_2 - t_1)] \cos \delta = \Delta \sin p$$
$$\delta_2 - \delta_1 = \Delta \cos p$$

oder, wenn mit Rücksicht darauf, daß nach (137) und (138) p ein kleiner Winkel ist, $\sin p = p \sin 1''$ und $\cos p = 1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + p \, \Delta \sin 1'' \sec \delta \\ \delta_2 - \delta_1 &= \Delta \end{aligned} \tag{140}$$

Jenachdem nun der feste Faden in die Richtung des wahren oder des scheinbaren Deklinationskreises fällt, sind für p und Δ die in (137) und (139), oder die in (138) und (139) gegebenen Werte zu substituieren; in der Gleichung (137) darf dabei noch α' mit f vertauscht werden. Durch Substitution von (137) und (139) in die Gleichungen (140) erhält man

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + (\delta_2' - \delta_1') f \sin 1'' [\operatorname{tang} \zeta \cos q - \operatorname{tang} \delta] \operatorname{tang} \zeta \sin q \sec \delta \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + (\delta_2' - \delta_1') f \sin 1'' [1 + \operatorname{tang}^2 \zeta \cos^2 q], \end{aligned} \tag{140^1}$$

und durch Substitution von (138) und (139)

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + (\delta_2' - \delta_1') f \sin 1'' \operatorname{tang}^2 \zeta \sin 2q \sec \delta \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + (\delta_2' - \delta_1') f \sin 1'' [1 + \operatorname{tang}^2 \zeta \cos^2 q] \end{aligned} \tag{140^2}$$

Bei den in der Praxis vorkommenden Fällen ist $\alpha_2 - \alpha_1$ wenig von $t_2 - t_1$, und $\delta_2 - \delta_1$ wenig von $\delta_2' - \delta_1'$ verschieden. Mit Rücksicht hierauf kann man in den Gleichungen (140^1) und (140^2) anstatt f den aus (134^a) folgenden Näherungswert $f_0 \varrho$ setzen; bedient man sich dann noch der Abkürzung $f_0 \sin 1'' = \alpha''$ und führt die Werte (136) von $\operatorname{tang} \zeta \sin q$ und $\operatorname{tang} \zeta \cos q$ ein, so erhält man für die gesuchte wahre Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz der beiden Sterne: 1. wenn die Richtung des Stundenfadens mit derjenigen des wahren Deklinationskreises zusammenfällt,

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \alpha'' \varrho (\delta_2' - \delta_1') \frac{\operatorname{cotg} n \cos(N + 2\delta)}{\cos^2 \delta \sin^2 (N + \delta)} \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + \frac{\alpha'' \varrho (\delta_2' - \delta_1')}{\sin^2 (N + \delta)}, \end{aligned} \tag{141^1}$$

2. wenn die Richtung des Stundenfadens mit derjenigen des scheinbaren Deklinationskreises übereinstimmt,

$$(141^2)\qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \alpha''\varrho(\delta_2' - \delta_1')\frac{2\operatorname{cotg} n\cos(N+\delta)}{\cos\delta\sin^2(N+\delta)} \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + \frac{\alpha''\varrho(\delta_2' - \delta_1')}{\sin^2(N+\delta)} \end{aligned}$$

Um die vorigen Gleichungen in eine einfachere Form zu bringen, setze man

$$(142)\qquad \frac{\alpha''\varrho(\delta_2' - \delta_1')}{\sin^2(N+\delta)} = D$$

Es wird dann **1.** wenn der Stundenfaden nach dem wahren Deklinationskreise orientiert ist,

$$(143^1)\qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \frac{D\operatorname{cotg} n}{\cos^2\delta}\cos(N+2\delta) \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + D \end{aligned}$$

2. wenn der Stundenfaden nach dem scheinbaren Deklinationskreise orientiert ist,

$$(143^2)\qquad \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= t_2 - t_1 + \frac{2D\operatorname{cotg} n}{\cos\delta}\cos(N+\delta) \\ \delta_2 - \delta_1 &= \delta_2' - \delta_1' + D \end{aligned}$$

Die Werte von $\log\alpha''$ kann man der Tabelle 10 meiner Refraktionstafeln entnehmen; den Wert von ϱ erhält man mit Hilfe der Tabellen 1 und 2 der genannten Tafeln.

88. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten der trockenen Luft. Bezeichnet man mit Z_0 die im Meridian beobachtete Zenitdistanz eines Sterns, ist ferner $\mathfrak{R}$ die Refraktion und ΔZ_0 die Reduktion von Z_0 auf ein fest gewähltes Äquinox, so ergibt sich für die auf dieses Äquinox bezogene wahre Zenitdistanz

$$(144)\qquad \zeta = Z_0 + \mathfrak{R} + \Delta Z_0$$

Nun folgt aus der Gleichung (74), S. 221, wenn wieder $t = t_0$, und

$$(144^a)\qquad \log\mathfrak{R}_0 + t_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} + (\varrho - 1)\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}\log\frac{\mathfrak{R}}{\varrho}\right]_{\varrho=1,\,t=0} = \log\mathfrak{R}'$$

gesetzt wird,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'\varrho$$

Substituiert man hier für ϱ seinen aus (73) und (41^b) folgenden Wert, so erhält man

$$(144^b)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}'\frac{\beta}{760}\,\frac{1 - 0.000\,162\,t_0}{1 + 0.003\,663\,t_0},$$

wo β durch die Gleichung (41^a) bestimmt ist, und t_0 die Temperatur am Beobachtungsorte bedeutet. Der im Nenner stehende Koeffizient von t_0 ist der angenommene Wert des Ausdehnungskoeffizienten der Luft; wenn aber der wahre Wert dieses Koeffizienten gleich $0.003\,663\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ ist, so ergibt sich für den genauen Betrag der Refraktion, abgesehen von einigen zu vernachlässigenden Gliedern,

$$(145)\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}'\frac{\beta}{760}\,\frac{1 - 0.000\,162\,t_0}{1 + 0.003\,663\,t_0}\left(1 - 0.003\,663\,\frac{i}{100}\,t_0\right)$$

Der Faktor von $1 - 0.003\,663 \frac{i}{100} t_0$ gibt die dem Ausdehnungskoeffizienten 0.003 663 entsprechende Refraktion an; wird diese mit $R^{(0)}$ bezeichnet, so folgt

$$\mathfrak{R} = R^{(0)} \left(1 - 0.003\,663 \frac{i}{100} t_0\right)$$

Aus der letzten Gleichung in Verbindung mit (144) erhält man, wenn

$$Z_0 + R^{(0)} + \Delta Z_0 = \zeta_0 \tag{145a}$$

gesetzt wird,

$$\zeta = \zeta_0 - 0.003\,663 \frac{R^{(0)}}{100} i t_0$$

Ebenso ergibt sich für eine zweite Beobachtung des Sterns

$$\zeta = \zeta_1 - 0.003\,663 \frac{R^{(1)}}{100} i t_1,$$

wo t_1 die beobachtete Temperatur, $R^{(1)}$ die mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten 0.003 663 berechnete Refraktion, und ζ_1 die in derselben Weise wie ζ_0 abgeleitete, auf das feste Äquinox bezogene wahre Zenitdistanz bedeutet. Nun ist

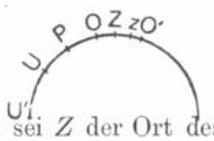
$$R^{(0)} = \tfrac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) + \tfrac{1}{2}(R^{(0)} - R^{(1)})$$
$$R^{(1)} = \tfrac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) - \tfrac{1}{2}(R^{(0)} - R^{(1)})$$

Setzt man jetzt $\frac{1}{2}(R^{(0)} + R^{(1)}) = R$ und subtrahiert die beiden Gleichungen für ζ, so erhält man mit Vernachlässigung der von $R^{(0)} - R^{(1)}$ abhängigen Glieder

$$\zeta_1 - \zeta_0 = 0.003\,663 \frac{R}{100} (t_1 - t_0) i \tag{146}$$

Hierbei ist nun noch auf die Veränderlichkeit der Polhöhe Rücksicht zu nehmen. Es sei P (Fig. 7) der Punkt, in dem die Drehungsachse der Erde die Sphäre trifft. Sieht man von der Präzession und Nutation ab, denkt man sich also die beobachteten Zenitdistanzen auf dasselbe Äquinox reduziert, so kann die Richtung der Drehungsachse im Raum als unveränderlich bezeichnet werden; somit ändert auch P seine Lage nicht. Aber der Erdkörper selbst vollführt kleine Schwankungen um eine mittlere Lage, und infolge dessen ändert der Punkt, in dem die Richtung der Vertikalen die Sphäre trifft, seinen Ort. Es sei Z der Ort des Zenits zur Zeit T, und z der Ort des Zenits zur Zeit t, ferner sei O der Ort eines nördlich vom Zenit kulminierenden Sterns an der Sphäre; die Meridianzenitdistanz des Sterns, bezogen auf die der Zeit T, bzw. der Zeit t entsprechende Lage des Zenits, ist dann $ZO = \mathfrak{Z}$, bzw. $zO = \mathfrak{z}$. Da nun, wenn φ und Φ die Werte der Polhöhe zu den Zeiten t und T bedeuten, $Zz = Pz - PZ = -(\varphi - \Phi)$ ist, so erhält man für die Reduktion der zur Zeit t beobachteten Zenitdistanz eines nördlich vom Zenit kulminierenden Sterns auf die Epoche T den Wert $+(\varphi - \Phi)$. Für einen südlich vom Zenit kulminierenden Stern O' ist diese Reduktion gleich $-(\varphi - \Phi)$; rechnet man aber südliche Zenitdistanzen negativ, so wird die Reduktion für nördliche und südliche Zenitdistanzen gleich $\varphi - \Phi$.

Fig. 7.



Die Werte von $\varphi - \Phi$ ergeben sich aus den Beobachtungen der internationalen Breitenstationen. Wie nämlich die Diskussion der an diesen Stationen ausgeführten Bestimmungen der geographischen Breite gezeigt hat, läßt sich

$$\varphi - \Phi = x \cos\lambda + y \sin\lambda + z$$

setzen, wo λ die auf einen fest gewählten Meridian der Erde bezogene Länge des Beobachtungsortes bedeutet, und x, y und z Funktionen der Zeit sind. Versteht man unter λ die auf den Meridian von Greenwich bezogene westliche Länge des Beobachtungsortes, so lassen sich die Werte von x, y und z unmittelbar den Publikationen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung entnehmen. Im folgenden wird angenommen, daß die beobachteten Zenitdistanzen bereits wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert seien.

Um nun den in (146) vorkommenden Koeffizienten i zu bestimmen, beobachte man eine größere Zahl von Sternen, welche in einem Zenitabstand von 0° bis höchstens 80° den Meridian passieren, bei möglichst hohen und tiefen Temperaturen. Wird dann aus den in den Temperaturextremen erhaltenen Meridianzenitdistanzen jedes Sterns je ein Mittelwert gebildet, und werden diese Mittelwerte sowie auch die entsprechenden Mittelwerte t_0, t_1 und R in (146) substituiert, so sind damit die Bedingungsgleichungen für i gefunden; selbstverständlich wird man bei Zirkumpolarsternen die in der oberen und unteren Kulmination angestellten Beobachtungen gesondert betrachten. Bezeichnet man mit m die Anzahl der bei hohen und mit n die Anzahl der bei tiefen Temperaturen beobachteten, in je einen Mittelwert zusammengefaßten Zenitdistanzen desselben Sterns, ist ferner ε der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung, so ist der mittlere Fehler einer Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ gleich $\varepsilon \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$. Dieser Fehler ist für jede Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ zu bestimmen; legt man dann einer Differenz mit dem willkürlich gewählten mittleren Fehler ε_0 das Gewicht 1 bei, so erhält man für die Gewichte p der Gleichungen (146) den Ausdruck $\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{mn}{m+n}\right)$.

Nachdem man das Gewicht jeder Bedingungsgleichung gefunden und die Gleichungen nach der Zenitdistanz geordnet hat, lassen sich die den Zenitdistanzen von 0° bis 10°, 10° bis 20°, usw. zugehörigen Bedingungsgleichungen in je ein Mittel zusammenfassen; diese Mittel kann man dann zur Bestimmung von i benutzen. Zur Erläuterung mögen die in der dritten, bzw. sechsten Kolumne der folgenden Tafel angeführten Werte von $\zeta_1 - \zeta_0$ dienen, welche sich aus den von Dr. *Großmann* an dem Meridiankreise der *von Kuffner*schen Sternwarte angestellten Beobachtungen ergeben haben; bei der für die Reduktion dieser Beobachtungen erforderlichen Refraktionsrechnung war für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft der Wert 0.003663 angenommen worden. Die zweite, bzw. fünfte Kolumne enthält die Mittelwerte $t_1 - t_0$; die vierte, bzw. siebente Kolumne gibt die Gewichte an, welche den $\zeta_1 - \zeta_0$ beizulegen sind, wenn man $\pm 0''.10$ als mittleren Fehler der Gewichtseinheit wählt. Die mit »Frühjahr« überschriebene Gruppe entspricht im wesentlichen denjenigen Beobachtungen, welche in die Zeit vom Februar bis Mai fallen; die Herbstgruppe bezieht sich vorwiegend auf die von August bis Dezember angestellten Beobachtungen. Die erste

Gruppe entspricht also der Periode, in der die Temperatur zunimmt, die zweite entspricht der Periode, in der die Temperatur abnimmt; mit t_1 ist stets die höhere Temperatur bezeichnet.

	Frühjahr			Herbst		
Zenitdistanz	$t_1 - t_0$	$\zeta_1 - \zeta_0$	Gewicht	$t_1 - t_0$	$\zeta_1 - \zeta_0$	Gewicht
10° bis 20°	10°.4	− 0″.22	1.3	11°.5	− 0″.01	2.8
20 » 30	11.3	− 0.09	4.0	10.1	− 0.01	1.0
30 » 40	10.8	− 0.17	2.8	. . .	. . .	. . .
40 » 50	10.6	− 0.17	2.0	11.1	− 0.09	0.8
50 » 60	11.0	− 0.26	0.7	11.5	+ 0.12	1.3
60 » 70	11.3	+ 0.05	0.7	11.9	+ 0.08	0.4
70 » 80	11.2	− 0.15	0.5	10.7	− 0.15	0.3

Wie man sieht, unterscheiden sich die Werte $t_1 - t_0$ jeder Gruppe nur wenig voneinander. Wenn also i einen von 0 merklich verschiedenen Wert hätte, so müßte, der Gleichung (146) zufolge, $\zeta_1 - \zeta_0$ mit der Zenitdistanz wachsen, weil ja R mit der Zenitdistanz wächst; dies ist aber nicht der Fall, vielmehr scheinen die Werte von $\zeta_1 - \zeta_0$ für die Frühjahrs- und Herbstgruppe konstant zu sein. Die *Großmann*schen Beobachtungen geben also keinen Anlaß, für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft einen von 0.003 663 verschiedenen Wert anzunehmen.

Der genannte Koeffizient ist von den hierunter erwähnten Physikern nach drei verschiedenen Methoden bestimmt worden, und zwar hat sich ergeben

Regnault 0.003 671 konstanter Druck
Magnus 0.003 668 } konstantes
Regnault 0.003 667 } Volumen
Recknagel 0.003 668 } konstantes
Jolly 0.003 669 } Volumen
Regnault 0.003 663 { Druck u. Vol. veränderlich

Für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft nimmt man hiernach an Stelle von 0.003 663 wohl besser den Wert 0.003 668 an und setzt demgemäß $0.003\,663\ \frac{i}{100} = +\,0.000005$; tut man dieses, so findet man aus (146), daß selbst für $t_1 - t_0 = +\,20°$ und die Zenitdistanz 80° die Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ nicht größer als 0″.03 wird. Eine Verbesserung des auf physikalischem Wege gewonnenen und jedenfalls nur um wenige Einheiten der 6ten Dezimale unsicheren Wertes des Ausdehnungskoeffizienten der Luft mit Hilfe von astronomischen Beobachtungen ist also nicht zu erwarten; dennoch wird man bei einer gegebenen Beobachtungsreihe stets untersuchen müssen, ob dieselbe einen von 0.003 668 wesentlich verschiedenen Wert des Ausdehnungskoeffizienten der Luft verlangt. Falls letzteres der Fall ist, so deutet dieses auf das Vorhandensein systematischer Fehler hin, sei es, daß diese in einer mangelhaften Aufstellung des Thermometers oder in einer ungenügenden Ventilation des Beobachtungsraumes oder in anderen Dingen ihren Grund haben.

89. Bestimmung der Refraktionskonstante, der mittleren Polhöhe und der Deklinationen. Zur Bestimmung der Refraktionskonstante und der mittleren Polhöhe beobachtet man eine Reihe von Sternen in oberer und unterer Kulmination.

In Fig. 7 (S. 247) seien O und U die wahren Örter eines Sterns zur Zeit seiner oberen, bzw. unteren Kulmination; es ist dann $ZO + ZU = 2ZP$ also, wenn $ZO = \zeta_o$, $ZU = \zeta_u$ gesetzt und für ZP sein Wert $90^\circ - \varphi$ substituiert wird (wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bedeutet), $\zeta_o + \zeta_u = 180^\circ - 2\varphi$. Bezeichnet man also die beobachteten Zenitdistanzen mit z_o, bzw. z_u und die berechneten zugehörigen Refraktionen mit r_o, bzw. r_u, ist ferner $\mathfrak{a}_0$ der angenommene und $\mathfrak{a}_0\left(1 + \frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}\right) = \mathfrak{a}_0(1+n)$ der wahre Wert der Refraktionskonstante, so wird mit Vernachlässigung sehr kleiner Glieder

$$180^\circ - 2\varphi = (z_u + r_u) + (z_o + r_o) + (r_u + r_o)n \tag{147}$$

Man betrachte jetzt einen Stern, dessen obere Kulmination südlich vom Zenit stattfindet, der also beispielsweise in den Punkten O' und U' den Meridian passiert. In diesem Falle ist $ZU' - ZO' = ZP + PU' - (PO' - ZP) = 2ZP$ oder, wenn die wahren Zenitdistanzen ZU' und ZO' mit ζ'_u, bzw. ζ'_o bezeichnet werden, $\zeta'_u - \zeta'_o = 180^\circ - 2\varphi$. Hieraus folgt, wenn z'_u und z'_o die beobachteten Zenitdistanzen, und r'_u und r'_o die berechneten Refraktionen bedeuten,

$$180^\circ - 2\varphi = (z'_u + r'_u) - (z'_o + r'_o) + (r'_u - r'_o)n$$

Aus der Vergleichung dieser Formel mit der für den ersten Stern erhaltenen Gleichung (147) ergibt sich, daß letztere allgemein gültig ist, wenn man südliche Zenitdistanzen und die ihnen entsprechenden Refraktionen negativ rechnet; das soll nun im folgenden geschehen. Dem vorigen Paragraphen zufolge ist dann für alle an einem Abende beobachteten Zenitdistanzen die von der Veränderlichkeit der Polhöhe abhängende Korrektion dieselbe und gleich der a. a. O. mit $\varphi - \Phi$ bezeichneten Größe. Ferner folgt noch aus der über das Vorzeichen südlicher Zenitdistanzen getroffenen Bestimmung, daß die Reduktion der in der oberen Kulmination beobachteten Zenitdistanzen auf ein festes Äquinox der Größe und dem Vorzeichen nach gleich der entsprechenden Reduktion der Deklinationen ist; für die in der unteren Kulmination erhaltenen Zenitdistanzen dagegen ist das Vorzeichen der Reduktion demjenigen der Reduktion der Deklinationen entgegengesetzt.

Es werde jetzt angenommen, daß man die aus den Beobachtungen abgeleiteten wahren Zenitdistanzen wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert und auf ein festes Äquinox bezogen habe; für jeden Stern bilde man dann das Mittel aus den der oberen und ebenfalls aus den der unteren Kulmination entsprechenden Zenitdistanzen und substituiere diese Mittelwerte an Stelle von $z_o + r_o$, bzw. $z_u + r_u$ in die Gleichung (147). Da vorausgesetzt wird, daß die Zenitdistanzen wegen der Veränderlichkeit der Polhöhe korrigiert sind, so bedeutet das in (147) enthaltene φ die mittlere Polhöhe; bezeichnet man nun mit φ_0 einen angenommenen und mit $\varphi_0 + \Delta\varphi$ den wahren Wert von φ, so folgt aus (147)

$$2\Delta\varphi + \frac{r_u + r_o}{100}\,100n = 180^\circ - 2\varphi_0 - [(z_u + r_u) + (z_o + r_o)] \tag{148}$$

Zu dieser Gleichung ist noch eine Bemerkung zu machen. Der Gleichung (144[b]) zufolge hat man, wenn die Temperatur am Beobachtungsort mit t bezeichnet wird, und $\Re$ die Refraktion bedeutet,

$$\Re = \Re' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} \tag{149}$$

Zur Bestimmung der Temperatur verwendet man nun gewöhnlich Quecksilberthermometer, die teils außerhalb des Beobachtungssaales in der Nähe des Spaltes, teils im Saale selbst angebracht sind. Im allgemeinen ist die im Saale beobachtete Temperatur höher wie die am äußeren Thermometer abgelesene. So z. B. fand *Nyrén*, daß für den Meridiansaal der Pulkowaer Sternwarte die Differenz: Saalthermometer — äußeres Thermometer den mittleren Wert $+ 0{}^{\circ}9$ habe; für München erhielt *Bauschinger* als mittleren Wert der Differenz: in der Nacht $+ 1{}^{\circ}3$, am Nachmittage $+ 1{}^{\circ}0$ (Winter), bzw. $+ 0{}^{\circ}4$ (Sommer) und am Vormittage $+ 1{}^{\circ}3$ (Winter), bzw. $- 0{}^{\circ}4$ (Sommer). Es tritt demnach die Frage auf, wie man die in dem Ausdruck (149) mit t bezeichnete Temperatur anzunehmen habe. Man wähle als Näherungswert von t die Angabe des äußeren Thermometers und bezeichne den wahren Wert von t mit $t + \Delta t$. Da Δt auf jeden Fall klein ist, und selbst eine Änderung von t um 1° einen nur unmerklichen Einfluß auf $\Re'$ hat, so ergibt sich für den wahren Wert der Refraktion

$$\Re = \Re' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,(t + \Delta t)}$$

oder hinreichend genau

$$\Re = \Re' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} (1 - 0.003\,663\,\Delta t)$$

Setzt man jetzt

$$\Re' \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000\,162\,t}{1 + 0.003\,663\,t} = \Re^{(o)}, \tag{150}$$

wo $\Re^{(o)}$ die unter Benutzung der Ablesung des äußeren Thermometers berechnete Refraktion bedeutet, so wird

$$\Re = \Re^{(o)} - 0.3663 \frac{\Re^{(o)}}{100} \Delta t \tag{151}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann als Saalrefraktion bezeichnet werden.

Die an eine Ablesung des äußeren Thermometers anzubringende Korrektion Δt hängt von dem Werte ab, den die Differenz: inneres — äußeres Thermometer zur Zeit der Beobachtung hat; bezeichnet man diese Differenz mit U, und bedeutet c eine positive Konstante, so wird man nach dem Vorgange *Nyréns* $\Delta t = cU$ annehmen können. Dies ist aber noch nicht der vollständige Ausdruck für Δt. Die Quecksilberthermometer werden nämlich durch die dunkle Wärmestrahlung ihrer Umgebung beeinflußt und geben somit im allgemeinen nicht die wahre Lufttemperatur an. Demnach erfordern die Ablesungen dieser Thermometer gewisse Korrektionen, und zwar werden letztere für die im Saale befindlichen Thermometer meistens andere Werte annehmen wie für die äußeren. Um diese Korrektionen zu bestimmen, kann man

die Angaben der Quecksilberthermometer mit denen eines Aspirationsthermometers vergleichen, welch letztere als unabhängig von dem Einfluß der Wärmestrahlung der Umgebung betrachtet werden dürfen. Ist aber eine derartige Vergleichung unterlassen worden, so müssen die an die Ablesungen der Quecksilberthermometer anzubringenden Korrektionen als Unbekannte eingeführt werden. Nimmt man diese Korrektionen als konstant an, und bezeichnet man die Korrektion des äußeren Thermometers mit k und die des inneren mit $\varkappa$, so ist für Δt der Ausdruck $k + e(U + \varkappa - k)$ anzuwenden; man erhält also, wenn $k + e(\varkappa - k) = C$ gesetzt wird,

$$\Delta t = C + eU, \tag{152}$$

wo nun C und e zwei Konstanten darstellen.

Werden jetzt die der Zeit der oberen, bzw. der unteren Kulmination entsprechenden Werte von U durch die Indizes o und u voneinander unterschieden, so hat man in der Gleichung (148) r_u durch $r_u - 0.3663 \frac{r_u}{100}(C + eU_u)$, und r_o durch $r_o - 0.3663 \frac{r_o}{100}(C + eU_o)$ zu ersetzen; mit Vernachlässigung der Produkte aus C, bzw. e und n ergibt sich demnach

$$2\Delta\varphi + \frac{r_u + r_o}{100}(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_u U_u + r_o U_o}{100}\,e = \\ = 180^0 - 2\varphi_0 - [(z_u + r_u) + (z_o + r_o)] \tag{153}$$

Jeder Zirkumpolarstern liefert eine solche Gleichung. Um die Gewichte der verschiedenen Gleichungen berechnen zu können, leitet man zunächst mit Hilfe der Abweichungen der für die Zenitdistanz jedes Sterns erhaltenen Einzelwerte von ihrem Mittel den mittleren Fehler einer Beobachtung ab. Ordnet man die für diesen Fehler sich ergebenden Werte nach der Zenitdistanz, so findet man stets, daß dieselben mit der Zenitdistanz zunehmen. Um das Gesetz der Zunahme durch eine Formel ausdrücken zu können, vereinigt man die den einzelnen Sternen entsprechenden Werte des mittleren Fehlers einer Beobachtung in eine Anzahl von Mittelwerten und berechnet auch die diesen Mittelwerten entsprechenden mittleren Zenitdistanzen. Bedeutet dann ε den der Zenitdistanz z entsprechenden mittleren Fehler einer Beobachtung, so lassen sich im allgemeinen zwei Konstanten a und b so bestimmen, daß

$$\varepsilon^2 = a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 z$$

ist. Der Wert von ε wird bedingt durch die Unsicherheit der Beobachtungen und durch die Unsicherheit der berechneten Refraktion. Um jetzt den mittleren Fehler einer Zenitdistanz zu erhalten, ist auch noch die Unsicherheit der von dem Beobachter angewandten Korrektionen der Teilstriche des Kreises in Rechnung zu ziehen; wird der mittlere Fehler einer Strichkorrektion mit ε' bezeichnet, so ergibt sich für den mittleren Fehler (e) einer Zenitdistanz

$$e = \pm\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 z + \varepsilon'^2}$$

Wenn nun die in die Gleichung (153) zu substituierenden Zenitdistanzen $z_u + r_u$, bzw. $z_o + r_o$ Mittelwerte aus p, bzw. q Einzelwerten darstellen, und wenn die mittleren

Fehler dieser Mittelwerte mit e_u, bzw. e_o bezeichnet werden, so ist $e_u = e : \sqrt{p}$, und $e_o = e : \sqrt{q}$; der mittlere Fehler der Gleichung (153) ist dann gleich $\pm\sqrt{e_u^2 + e_o^2}$. Legt man jetzt einer Gleichung, deren mittlerer Fehler gleich $\pm 1''$ ist, das Gewicht 1 bei, so wird das einer Gleichung mit dem mittleren Fehler $\pm\sqrt{e_u^2 + e_o^2}$ entsprechende Gewicht gleich $\frac{1}{e_u^2 + e_o^2}$. Jede Gleichung (153) ist also mit dem ihr zugehörigen Wert von $\frac{1}{\sqrt{e_u^2 + e_o^2}}$ zu multiplizieren; hierauf lassen sich die wahrscheinlichsten Werte von $\Delta\varphi$, $100n - 0.3663\,C$ und c bestimmen. Bezeichnet man den für $100n - 0.3663\,C$ gefundenen Wert mit γ, so wird $n = \frac{\gamma}{100} + 0.003\,663\,C$, und somit ergibt sich für den wahrscheinlichsten Wert der Refraktionskonstante $a_o\left(1 + \frac{\gamma}{100} + 0.003\,663\,C\right)$. Die Refraktionskonstante erscheint also als Funktion von C ausgedrückt; der Wert von C läßt sich aus den beobachteten Zenitdistanzen nicht ableiten.

Nachdem man die Werte von $\Delta\varphi$, $100n - 0.3663\,C$ und c gefunden hat, kann man die Deklinationen der Sterne ableiten, und zwar auch derjenigen, welche nur in einer Kulmination beobachtet wurden. Zu diesem Zwecke berechne man mit Hilfe der angenommenen Refraktionskonstante und unter Benutzung der durch das äußere Thermometer angegebenen Temperatur die Refraktionen r_o, bzw. r_u und bringe diese an die beobachteten Zenitdistanzen an, dabei sind aber südliche Zenitdistanzen und die entsprechenden Refraktionswerte negativ zu nehmen. Zu den so erhaltenen wahren Zenitdistanzen füge man die Reduktion $\varphi - \Phi$ auf die mittlere Polhöhe und die Reduktion auf ein fest gewähltes mittleres Äquinox hinzu. Werden die sich dann ergebenden Zenitdistanzen mit ζ_o, bzw. ζ_u bezeichnet, so hat man noch zu bilden

$$\begin{aligned} \zeta'_o &= \zeta_o + \frac{r_o}{100}(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_o}{100}\,cU_o \\ \zeta'_u &= \zeta_u + \frac{r_u}{100}(100n - 0.3663\,C) - 0.3663\,\frac{r_u}{100}\,cU_u \end{aligned} \tag{154}$$

Setzt man jetzt $\varphi_o + \Delta\varphi = \varphi$, so ist den Gleichungen § 16, (1) und (2) zufolge, wenn δ die Deklination bedeutet,

$$\delta = \varphi + \zeta'_o, \qquad \delta = 180^\circ - \varphi - \zeta'_u$$

Kapitel XIV.

Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne.

90. Näherungswerte. Die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne erfolgt in der Weise, daß man sich zunächst Näherungswerte der gesuchten Größen verschafft und diese sukzessive verbessert. Solche Näherungswerte kann man gegenwärtig den Jahrbüchern entnehmen, indessen soll vorläufig von den Jahrbüchern abgesehen und gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Beobachtungen zu Näherungswerten gelangen kann. Um das dabei zur Anwendung kommende Prinzip in möglichst einfacher Weise erläutern zu können, denke man sich, daß es gelungen sei, ein ganzes Jahr hindurch täglich die Sonne im Meridian zu beobachten und ihre Zenitdistanz zu messen; leitet man dann aus diesen Zenitdistanzen in Verbindung mit der Polhöhe die Deklination der Sonne von Tag zu Tag ab, so gibt das Mittel aus dem nördlichsten und südlichsten Wert der Deklination (letzteren absolut genommen) einen Näherungswert für die Schiefe der Ekliptik an.

Die Schiefe der Ekliptik werde mit ε bezeichnet, ferner sei D die an irgend einem Tage beobachtete Deklination und A die zu bestimmende Rektaszension der Sonne. Vernachlässigt man nun die Sonnenbreite, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, welches von dem Frühlingspunkte, dem Orte der Sonne in der Ekliptik und dem Durchschnittspunkte des Deklinationskreises der Sonne mit dem Äquator gebildet wird,

$$\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{1}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich A berechnen. Um die Genauigkeit einer Bestimmung von A beurteilen zu können, differenziere man die vorige Gleichung. Wird die Differentiation logarithmisch ausgeführt, so erhält man

$$dA = \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2D}\, dD - \frac{2 \operatorname{tang} A}{\sin 2\varepsilon}\, d\varepsilon \tag{2}$$

Um die Zeit des Äquinoktiums herum ist nun D sehr klein, und A nahe gleich 0° oder 180°; $\operatorname{tang} A$ unterscheidet sich also nur wenig von 0, und ein Fehler in dem angenommenen Werte von ε hat somit einen äußerst geringen Einfluß auf A. Bei sehr kleinen Werten von $\operatorname{tang} A$ darf man ferner $\operatorname{tang} A = \sin A$ setzen; da aber $\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon$ ist, so folgt, daß der Koeffizient von dD, für $D = 0$, gleich $\operatorname{cotg} \varepsilon = 2.3$ wird. Dies ist der kleinste Wert, den der genannte Koeffizient annehmen kann. Aus dem Gesagten folgt, daß die Rektaszension der Sonne sich am genauesten aus den in der Nähe des Frühjahrs- oder Herbstäquinoktiums bestimmten Deklinationen ableiten läßt.

Man nehme jetzt an, daß man im Frühjahr oder im Herbst außer der Zenitdistanz der Sonne auch die Zeiten beobachtet habe, zu denen die Sonne und ein vom Äquator nicht weit entfernter heller Fixstern den Meridian passieren. Wenn

dann die Uhr so reguliert war, daß zwischen zwei oberen oder unteren Kulminationen eines Sterns 24 Stunden vergehen, so ist die Differenz der beobachteten Durchgangszeiten von Sonne und Stern gleich der Rektaszensionsdifferenz der Sonne und des Sterns; da nun die Rektaszension der Sonne bereits bekannt ist, so darf jetzt auch die Rektaszension des Sterns als bekannt betrachtet werden. Vorzuziehen ist es, gleich zwei um beiläufig 12^h voneinander entfernte Sterne, wie z. B. α Canis minoris ($\alpha = 7^h\,35^m$, $\delta = +\,5^\circ\,27'$) und α Aquilae ($\alpha = 19^h\,46^m$, $\delta = +\,8^\circ\,38'$) sowohl im Frühjahr als im Herbst an die Sonne anzuschließen; beobachtet man dann noch die Rektaszensionsdifferenzen zwischen diesen und einer Reihe eingeschalteter, dem Äquator naher Sterne, so werden auch deren Rektaszensionen bekannt. Nachdem man so die Rektaszensionen einer Anzahl von Sternen gefunden hat, kann man aus den Durchgangsbeobachtungen eines oder mehrerer von ihnen und der Sonne die Rektaszension dieser letzteren auch an den zwischen den Äquinoktialzeiten gelegenen Tagen finden. Die durch Beobachtung erhaltenen Rektaszensionen und Deklinationen der Sonne ermöglichen es aber, die Elemente der Erdbahn abzuleiten, und mit Hilfe dieser läßt sich eine Ephemeride berechnen, aus der man für jede Zeit den Ort der Sonne entnehmen kann.

91. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik. Mit Benutzung der jetzt als gegeben vorausgesetzten Sonnenephemeride soll zunächst die Schiefe der Ekliptik genauer bestimmt werden. Es sei*) γA der Äquator und γE die Ekliptik, P und Π seien die Pole des Äquators, bzw. der Ekliptik, ferner sei S' der Ort der Sonne und S der Punkt, in dem der Deklinationskreis der Sonne die Ekliptik schneidet. Legt man durch S' den Breitenkreis ΠM, wo M den Durchschnittspunkt des Breitenkreises mit der Ekliptik bedeutet, und bezeichnet man die Breite der Sonne mit β, ihre Deklination mit D' und die Deklination von S mit D, so gibt das rechtwinklige Dreieck $SS'M$, wenn der Winkel bei S gleich $90^\circ - \sigma$ gesetzt wird,

$$D' - D = \frac{\beta}{\cos\sigma}$$

Nun folgt aus dem Dreieck ΠSP, worin der Winkel bei S gleich σ, ferner $PS = 90^\circ - D$, $\Pi P = \varepsilon$ und $\Pi S = 90^\circ$ ist, $\cos\varepsilon = \cos D \cos\sigma$; substituiert man den hieraus sich ergebenden Wert von $\cos\sigma$ in die vorige Gleichung und vertauscht dabei $\cos D$ mit $\cos D'$, so erhält man

$$D = D' - \beta\,\frac{\cos D'}{\cos\varepsilon} \tag{3}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man aus der Deklination der Sonne diejenige des Punktes S berechnen. Die Rektaszension des Punktes S oder der Bogen γN, wo N den Durchschnittspunkt des Deklinationskreises der Sonne mit dem Äquator bedeutet, ist gleich der Rektaszension der Sonne; wird diese wieder mit A bezeichnet, so erhält man aus dem Dreieck γSN

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\operatorname{tang} D}{\sin A} \tag{4}$$

*) Die Zeichnung der Figur bleibe dem Leser überlassen.

Hat man also durch Beobachtung den Wert von D' gefunden und hieraus den Wert von D abgeleitet, so kann man mit Anwendung der aus der Ephemeride entnommenen Rektaszension der Sonne die Schiefe der Ekliptik bestimmen. Hierbei ist folgendes zu beachten. Da die Ephemeride die geozentrische Rektaszension der Sonne angibt, so ist auch für D sein geozentrischer Wert anzuwenden. Es möge nun die beobachtete Zenitdistanz der Sonne mit z, die zugehörige Refraktion mit R, die mittlere Polhöhe des Beobachtungsortes mit Φ und seine Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, ausgedrückt in Teilen des Äquatorealhalbmessers der Erde, mit $[\varrho]$ bezeichnet werden; ferner bedeute π die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe der Sonne, r den Radiusvektor der Sonne, ausgedrückt in Teilen der halben großen Achse der Erdbahn, und $\varphi - \Phi$ die Differenz zwischen der instantanen (φ) und der mittleren Polhöhe. Wenn dann z und R für südliche Zenitdistanzen negativ gerechnet werden, und man auf die erste der Gleichungen (12ª) des § 68 Rücksicht nimmt, so erhält man für die geozentrische Deklination der Sonne den Ausdruck

$$D' = z + R + \Phi + (\varphi - \Phi) - \frac{[\varrho]\pi}{r} \sin z \tag{5}$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung (3) ergibt sich die gesuchte geozentrische Deklination D des Punktes S. Nun bezieht sich z, also auch der aus (5), bzw. (3) folgende Wert von D', bzw. D, auf den durch die Aberration beeinflußten, oder scheinbaren Ort der Sonne; demnach hat man in der Gleichung (4) auch die scheinbare Rektaszension der Sonne anzuwenden. Der dann aus (4) sich ergebende Wert von ε stellt die wahre Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung dar*). Um die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit der Beobachtung, die mit $[\varepsilon]$ bezeichnet werden möge, zu erhalten, hat man an ε die in der Gleichung (93) des § 29 gegebenen Nutationsglieder, mit umgekehrtem Vorzeichen genommen, anzubringen; es wird also, wenn jetzt die seit 1850.0 bis zur Epoche der Beobachtung verflossene und in Jahrhunderten ausgedrückte Zeit mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird,

$$[\varepsilon] = \varepsilon - (9''.210 + 0''.001\,\mathfrak{T}) \cos \Omega - 0''.552 \cos 2L + \cdots \tag{A}$$

Ist ferner t die Epoche der Beobachtung, und bedeutet ε_0 die für eine fest gewählte Epoche t_0 gültige mittlere Schiefe der Ekliptik, so hat man nach den auf S. 100 gegebenen Formeln

$$\varepsilon_0 = [\varepsilon] + \left[46''.837 + 0''.018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - \cdots\right]\frac{t - t_0}{100} + \\ + \left[0''.009 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - \cdots \tag{B}$$

Es muß jetzt untersucht werden, welchen Einfluß etwaige Fehler der für die Gleichung (4) benutzten Werte von D und A auf ε haben. Aus der durch logarithmische Differentiation der mit (4) identischen Gleichung (1) gefundenen Beziehung (2) ergibt sich

$$d\varepsilon = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}\, dD - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\varepsilon}{\operatorname{tang} A}\, dA \tag{6}$$

*) Die wahre Schiefe der Ekliptik wird häufig als scheinbare bezeichnet.

Da man die aus der Ephemeride entnommene Breite der Sonne als hinlänglich sicher bestimmt ansehen darf, so folgt aus (3), daß man $dD = dD'$ setzen kann. Nun wurde D' mittels der Gleichung (5) erhalten. Die hierin vorkommende Differenz $\varphi - \Phi$ läßt sich mit großer Genauigkeit aus den Beobachtungen der internationalen Breitestationen ableiten und kann als fehlerfrei betrachtet werden; letzteres gilt auch von dem gegenwärtig für π angenommenen Werte. Da die kleine Unsicherheit in $[\varrho]$ und r ebenfalls ohne Einfluß ist, so kann ein Fehler in D nur von einem Fehler in der beobachteten Zenitdistanz, bzw. in den für die Refraktion oder die mittlere Polhöhe benutzten Werten herrühren. Man kann also $dD = dz + dR + d\Phi$ setzen und erhält dann an Stelle der Gleichung (6)

$$d\varepsilon = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2D}(dz + dR + d\Phi) - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varepsilon}{\operatorname{tang} A}\,dA \tag{7}$$

Der Koeffizient von $dz + dR + d\Phi$ ist seinem absoluten Betrage nach am kleinsten zur Zeit der Solstitien, und zwar ist er zur Zeit des Sommersolstitiums gleich $+1$ und zur Zeit des Wintersolstitiums gleich -1; das Mittel aus zwei einem Winter- und Sommersolstitium entsprechenden und auf dieselbe Epoche bezogenen Werten der mittleren Schiefe der Ekliptik ist demnach frei von einem konstanten Fehler der beobachteten Zenitdistanzen, sowie auch von einem Fehler der angenommenen mittleren Polhöhe. Etwas anders verhält es sich mit dem Einfluß eines Fehlers in der Refraktion. Ist nämlich der für die Refraktionskonstante oder der für den Ausdehnungskoeffizienten der Luft angenommene Wert fehlerhaft, so hat dR bei hohen Temperaturen einen anderen Wert als bei niederen; nimmt man also das Mittel aus zwei zu den Zeiten des Winter- und Sommersolstitiums erhaltenen Werten von ε_0, so wird der Fehler in der Refraktion nicht vollständig, sondern nur teilweise eliminiert.

Ein Fehler in der angenommenen Rektaszension der Sonne hat an und für sich schon wenig Einfluß auf die in der Nähe der Solstitien bestimmten Werte von ε; verbindet man speziell noch solche Beobachtungen, für welche $\operatorname{tang} A$ entgegengesetzt gleiche Werte hat, so ist das Mittel der aus ihnen abgeleiteten Werte der Schiefe der Ekliptik von einem konstanten Fehler in A ganz befreit.

92. Bestimmung der Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne. Hat man im Mittel aus einer großen Zahl von Einzelwerten einen genauen Wert der für eine fest gewählte Epoche gültigen mittleren Schiefe der Ekliptik gefunden, so lassen sich auch die Rektaszensionen der Sonne und der Fixsterne genauer bestimmen. Um die Rektaszension der Sonne zu erhalten, leite man aus der beobachteten Zenitdistanz der Sonne, mittels der Gleichungen (5) und (3), den Wert von D ab und wende dann die Gleichung an

$$\sin A = \operatorname{tang} D \operatorname{cotg} \varepsilon \tag{8}$$

Hierbei ist für ε sein aus den Gleichungen (A) und (B) des vorigen Paragraphen folgender Wert zu substituieren

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon_0 &- \left[46''.837 + 0''.018\,\frac{t_0 - 1850}{100} - \cdots\right]\frac{t - t_0}{100} - \\ &- \left[0''.009 - 0''.003\,\frac{t_0 - 1850}{100}\right]\left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 + \\ &+ (9''.210 + 0''.001\,\mathfrak{T})\cos\Omega + 0''.552\cos 2L - \cdots\end{aligned} \tag{9}$$

Es sei jetzt gleichzeitig mit der Zenitdistanz der Sonne ihre Durchgangszeit Θ durch den Meridian, und ferner vor- oder nachher die Durchgangszeit ϑ eines Sterns beobachtet worden; wenn dann α' die Rektaszension des Sterns bedeutet, so ergibt sich

$$\alpha' = A + (\vartheta - \Theta) \tag{10}$$

Nun enthält der in (8) benutzte Winkel D die Aberration der Sonne in Deklination, folglich gibt der mit Hilfe der Gleichung (8) berechnete Winkel A die scheinbare Rektaszension der Sonne an; da aber die beobachtete Durchgangszeit Θ ebenfalls die Aberration enthält, so ist $A - \Theta$ von der Aberration befreit. Berücksichtigt man jetzt noch, daß ϑ die scheinbare Durchgangszeit des Sterns angibt, so sieht man, daß der aus (10) folgende Wert von α' die scheinbare Rektaszension des Sterns darstellt. In welcher Weise man aus α' die auf das mittlere Äquinox und die Epoche des Jahresanfangs bezogene Rektaszension erhält, geht aus den in Kapitel XI gemachten Ausführungen hervor.

Bei der Anwendung der Gleichung (10) sind noch einige Punkte zu berücksichtigen. Zunächst ist es notwendig, die Differenz $\vartheta - \Theta$ wegen des Ganges der Uhr zu korrigieren. Zur Bestimmung des Ganges beobachtet man die Zeit, welche zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Kulminationen eines dem Äquator nahen Sterns vergeht. Bezeichnet man mit Δe die Änderung der scheinbaren Rektaszension des Sterns zwischen den beiden Kulminationen, und ist $24^h - \Delta u$ die beobachtete Differenz der Durchgangszeiten, so ist $\Delta u + \Delta e$ die an diese Differenz anzubringende Korrektion. Nun ist Δe eine kleine Größe, und dasselbe darf von Δu vorausgesetzt werden; demnach kann man $\Delta u + \Delta e$ auch als die Korrektion eines Intervalls auffassen, welches nach der Uhr gemessen 24 Stunden beträgt. Setzt man $\Delta u + \Delta e = G$, so wird G als der tägliche Gang der Uhr bezeichnet. Die an verschiedenen Tagen erhaltenen Werte von G weichen im allgemeinen voneinander ab; bei Anwendung einer guten und gut aufgestellten Uhr lassen sich aber die Uhrgänge durch die folgende Formel darstellen: Es sei T die mittlere Temperatur im Uhrkasten und β der mittlere Barometerstand für das 24stündige Intervall, dem eine beobachtete Korrektion G entspricht, ϑ_m sei die der Mitte dieses Intervalls entsprechende Epoche, ferner sei G_0 der den fest gewählten Werten T_0, β_0 und $\vartheta_m^{(0)}$ entsprechende tägliche Gang; bedeuten dann a, b und c Konstanten, so hat man

$$G = G_0 + a(T - T_0) + b(\beta - \beta_0) + c(\vartheta_m - \vartheta_m^{(0)}) \tag{11}$$

Um die Unbekannten G_0, a, b und c zu bestimmen, nehme man für G_0 einen Näherungswert $\mathfrak{G}_0$ an und bilde die Differenzen $G - \mathfrak{G}_0 = n$ zwischen den an den einzelnen Tagen erhaltenen Werten des täglichen Ganges und $\mathfrak{G}_0$; bedeutet dann $\Delta\mathfrak{G}_0$ die Korrektion von $\mathfrak{G}_0$, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$n = \Delta\mathfrak{G}_0 + a(T - T_0) + b(\beta - \beta_0) + c(\vartheta_m - \vartheta_m^{(0)}) \tag{12}$$

Nachdem man mit Hilfe dieser Gleichungen $\Delta\mathfrak{G}_0$, a, b und c gefunden hat, läßt sich jede beobachtete Durchgangsdifferenz wegen des Ganges der Uhr korrigieren. Ist nämlich $\vartheta' - \vartheta''$ die beobachtete Durchgangsdifferenz, so setze man in der Formel (11) $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')$ und wende für T und β die für das Intervall zwischen den beiden Durchgängen gültigen mittleren Werte der Temperatur im Uhrkasten

und des Barometerstandes an; wird dann die wegen des Ganges der Uhr korrigierte Differenz der Durchgangszeiten mit $\vartheta_1 - \vartheta_2$ bezeichnet, so erhält man

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \vartheta' - \vartheta'' + \frac{G}{24}(\vartheta' - \vartheta''), \tag{13}$$

wo in dem von G abhängigen Gliede die Differenz $\vartheta' - \vartheta''$ in Stunden und Bruchteilen einer Stunde auszudrücken ist.

Die an verschiedenen Tagen beobachteten Durchgangsdifferenzen zweier Sterne sollten, nachdem man sie wegen des Ganges der Uhr korrigiert und auf ein gemeinsames mittleres Äquinox reduziert hat, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler miteinander übereinstimmen; wie aber die Erfahrung lehrt, können die Differenzen auch noch eine Abhängigkeit von der Tageszeit der Beobachtung zeigen. Um eine gegebene Beobachtungsreihe auf diesen Punkt hin zu untersuchen, nehme man an, daß ein zu der Sternzeit ϑ beobachteter Durchgang die Korrektion $f \sin M + g \cos M$ erfordere, wo M die der Sternzeit ϑ entsprechende mittlere Zeit bedeutet, und f und g Konstanten bezeichnen. Ist dann $\vartheta_1 - \vartheta_2$ die beobachtete und wegen des Uhrganges verbesserte Durchgangsdifferenz zweier Sterne, sind ferner M_1 und M_2 die den Sternzeiten ϑ_1 und ϑ_2 entsprechenden mittleren Zeiten, so ist die Korrektion der Differenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$ gleich

$$f(\sin M_1 - \sin M_2) + g(\cos M_1 - \cos M_2) = 2f \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) \cos \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) - \\ - 2g \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) \sin \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Sterne in der oberen Kulmination beobachtet worden sind, ist für $\frac{1}{2}(M_1 + M_2)$ diejenige mittlere Zeit zu setzen, welche der der halben Summe der Rektaszensionen beider Sterne gleichen Sternzeit entspricht; der Wert von $\frac{1}{2}(M_1 - M_2)$ ergibt sich, indem man die halbe Differenz der Rektaszensionen der zwei Sterne in ein Intervall mittlerer Zeit verwandelt. Man denke sich nun, daß die an verschiedenen Tagen erhaltenen Werte von $\vartheta_1 - \vartheta_2$ bereits auf dasselbe Äquinox reduziert worden seien, und bezeichne den wahren Wert von $\vartheta_1 - \vartheta_2$ mit $[\vartheta_1 - \vartheta_2]$. Setzt man dann

$$-2f \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) = F, \qquad 2g \sin \tfrac{1}{2}(M_1 - M_2) = K, \qquad \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) = M_m, \tag{14}$$

so erhält man

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = [\vartheta_1 - \vartheta_2] + F \cos M_m + K \sin M_m \tag{15}$$

oder, wenn $[\vartheta_1 - \vartheta_2]_0$ einen Näherungswert von $[\vartheta_1 - \vartheta_2]$ und x die Korrektion desselben bedeutet, ferner noch $\vartheta_1 - \vartheta_2 - [\vartheta_1 - \vartheta_2]_0 = n$ gesetzt wird,

$$n = x + F \cos M_m + K \sin M_m \tag{15a}$$

Mit Hilfe derartiger Bedingungsgleichungen lassen sich die Unbekannten x, F und K bestimmen. Hierauf erhält man aus (14) die Koeffizienten f und g und kann dann für jeden beobachteten Durchgang die Korrektion $f \sin M + g \cos M$ berechnen. Zur Bestimmung von F und K wird man Sterne benutzen, welche nahe gleiche Deklination und Helligkeit haben, und die in Rektaszension etwa 3 bis 4 Stunden voneinander verschieden sind. Mit Rücksicht auf einen gleich zu erwähnenden systematischen Unterschied zwischen Tag- und Nachtbeobachtungen darf man übrigens

zur Bildung einer Differenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$ nur solche Beobachtungen verwenden, welche beide entweder bei Tage oder bei Nacht angestellt worden sind.

Es kommt vor, daß die für die Durchgangsdifferenz zweier Sterne erhaltenen Werte eine sprungweise Änderung zeigen, wenn man von der Zeit, wo beide Sterne am Tage oder in der Nacht kulminieren, zu derjenigen übergeht, wo die Kulmination des einen Sterns auf den Tag und die des anderen auf die Nacht fällt. Die genannte Erscheinung weist darauf hin, daß man den Durchgang eines Sterns durch die Fäden bei Tageslicht anders auffaßt, als bei künstlicher Beleuchtung; in einem solchen Falle wird man also entweder an die am Tage oder aber an die in der Nacht beobachteten Durchgänge eine gewisse Korrektion anbringen müssen, wenn die Beobachtungen homogen werden sollen. Um diese Korrektion zu bestimmen, füge man zunächst zu allen zwischen zwei Sternen erhaltenen und auf ein gemeinsames Äquinox reduzierten Differenzen $\vartheta_1 - \vartheta_2$ die aus (15) folgende Korrektion $-F\cos M_m - K\sin M_m$ hinzu. Hierauf vereinige man die Differenzen in drei Gruppen: die erste möge den Zeiten entsprechen, wo beide Sterne bei Tag oder bei Nacht beobachtet wurden, die zweite beziehe sich auf die Fälle, wo der voraufgehende Stern (ϑ_1) bei Tage und der folgende (ϑ_2) in der Nacht kulminierte, die dritte gelte für den umgekehrten Fall. Bezeichnet man mit $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}}$, $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{II}}$, $(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{III}}$ die Mittelwerte der den drei Gruppen entsprechenden Differenzen, und bedeutet $\varkappa$ die Reduktion eines bei Tageslicht beobachteten Durchganges auf den in der Dunkelheit erhaltenen, so gelten die Gleichungen

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{II}} + \varkappa$$
$$(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{I}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\mathrm{III}} - \varkappa$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ergibt sich der gesuchte Wert von $\varkappa$.

Man denke sich jetzt, daß man die beobachtete Differenz der Durchgangszeiten eines Sterns und der Sonne wegen des Uhrganges und der von der mittleren Zeit der Beobachtung abhängigen Glieder korrigiert habe. Was die Korrektion $\varkappa$ betrifft, so wird man die Hypothese machen müssen, daß sie für die Sonne dieselbe ist, wie für die Sterne; in der Differenz der Durchgangszeiten zwischen Sonne und Stern fällt also die Korrektion $\varkappa$ fort, wenn man nur solche Fälle berücksichtigt, in denen der Stern bei Tage beobachtet ist. Falls nun die für die Gleichung (8) benutzten Werte von D und ε richtig wären, so hätte man die korrigierte Durchgangsdifferenz zwischen Stern und Sonne nur zu A zu addieren, um der Gleichung (10) zufolge die scheinbare Rektaszension α' des Sterns zu erhalten; aus dieser ließe sich dann die mittlere Rektaszension α_0 für den Jahresanfang berechnen. Erfordern aber die für D und ε angenommenen Werte die Korrektionen dD und $d\varepsilon$, so ist zu α', bzw. zu α_0 die in (2) angegebene Korrektion dA hinzuzufügen; wenn also in der Gleichung (2) wieder wie in § 91 $dD = d\varkappa + dR + d\Phi$ gesetzt wird, und α den genauen Wert der mittleren Rektaszension für den Jahresanfang bedeutet, so folgt

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2\,\mathrm{tang}\,A}{\sin 2D}(d\varkappa + dR + d\Phi) - \frac{2\,\mathrm{tang}\,A}{\sin 2\varepsilon}\,d\varepsilon \tag{16}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich zeigen, daß man den Einfluß eines konstanten Fehlers in den beobachteten Zenitdistanzen der Sonne, sowie eines Fehlers

in Φ oder ε auf die Rektaszension des Sterns vollständig, und den Einfluß eines Fehlers in R nahezu vollständig eliminieren kann, wenn man nur die Beobachtungen in geeigneter Weise kombiniert. Um das Ganze an der Hand eines Beispiels leichter verständlich zu machen, nehme man an, daß man im Frühjahr und Herbst die in dem folgenden Schema angegebenen Sterne durch Durchgangsbeobachtungen an die Sonne (☉) angeschlossen, sowie auch die Deklination der Sonne bestimmt habe.

	Größe	α	δ		Größe	α	δ
α Ophiuchi	2.2	$17^h 31^m$	$+ 12°6$	γ Orionis	1.7	$5^h 20^m$	$+ 6°3$
ν »	3.6	17 54	— 9.8	ε »	1.8	5 32	— 1.3
☉ Febr. 28		22 43	— 8.2	☉ Sept. 2		10 43	+ 8.2
☉ April 11		1 17	+ 8.5	☉ Okt. 15		13 18	— 8.3
γ Orionis	1.7	5 20	+ 6.3	α Ophiuchi	2.2	17 31	+ 12.6
ε »	1.8	5 32	— 1.3	ν »	3.6	17 54	— 9.8

Wie schon früher erwähnt wurde, ist die aus der Deklination berechnete Rektaszension der Sonne um so genauer, je näher sich die Sonne einem der Äquinoktialpunkte befindet; indessen kann man auch noch Beobachtungen benutzen, welche etwa drei Wochen vor oder nach der Zeit des Äquinoktiums angestellt worden sind. Die für diese Endtermine und das Jahr 1910 gültigen Werte der Rektaszension und Deklination der Sonne, sowie auch die auf das Äquinoktium 1910 bezogenen Rektaszensionen und Deklinationen der Sterne findet man in den beiden letzten Kolumnen der vorigen Tabelle aufgeführt. Diese Tabelle zeigt, daß, wenn a und d die Werte von A und D am 28. Februar bedeuten, die für den 15. Oktober gültigen Werte von A und D sehr nahe gleich $180° - a$ und d sind. Wenn man also für jeden der vier Sterne aus den am 28. Februar und 15. Oktober erhaltenen Rektaszensionen das Mittel bildet, so sind diese der Gleichung (16) zufolge frei von einem konstanten Fehler in x, sowie auch frei von den Fehlern der für Φ und ε angenommenen Werte. Damit jedes Mittel auch frei von einem Fehler in der Refraktion sei, muß dR im Frühjahr und Herbst denselben Wert haben; letztere Bedingung ist nun wohl nicht in aller Strenge erfüllt, aber doch so nahe, daß ein merklicher Einfluß des Fehlers in der Refraktion nicht zu befürchten ist. In derselben Weise, wie es für die am 28. Februar und 15. Oktober erhaltenen Rektaszensionen geschehen ist, lassen sich auch die Beobachtungen an zwei anderen Tagen, denen die Werte a, d, bzw. $12^h - a$, d von A und D entsprechen, in Mittelwerte zusammenfassen.

Die hier für die beiden Wertepaare von A und D aufgestellte Bedingung braucht aber nur näherungsweise erfüllt zu sein. Nach dem Vorgange *Bessels* kann man z. B. aus allen für einen Stern erhaltenen Werten von α_0, welche zu Zeiten beobachtet wurden, wo die Deklination der Sonne zwischen 0° und + 2° lag, zwei Gruppen bilden, von denen die eine den Frühjahrs- und die andere den Herbstbeobachtungen entspricht; wird für jede dieser beiden Gruppen das Mittel aus den zugehörigen α_0 gebildet, so ist das aus diesen Mittelwerten sich ergebende Gesamtmittel $\mathfrak{A}$ als hinlänglich nahe von den oben genannten Fehlern befreit anzusehen. Ebenso wird man auch diejenigen Werte von α_0 zusammenfassen, welche erhalten wurden, als die Deklination der Sonne zwischen den Grenzen + 2° bis + 4°, + 4°

bis $+6^{\circ}$, ..., 0° bis -2°, -2° bis -4°, ..., lag; zum Schluß hat man nur noch das Mittel aus den verschiedenen Werten von $\mathfrak{A}$ zu nehmen, und erhält damit den Endwert der Rektaszension des Sterns. Aus den Rektaszensionen der angeführten vier Hauptsterne in Verbindung mit den beobachteten und unter Benutzung der Gleichungen (13), (14) und (15), sowie eventuell auch der Konstante z korrigierten Durchgangsdifferenzen zwischen den vier Hauptsternen und den zwischen ihnen eingeschalteten Sternen ergeben sich schließlich auch die Rektaszensionen dieser letzteren.

93. Verbesserung eines Kataloges der Rektaszensionen von Zeitsternen. Selbst wenn es mit Hilfe einer guten Beobachtungsreihe gelungen wäre, einen fehlerfreien Katalog von Rektaszensionen abzuleiten, so würde unsere mangelhafte Kenntnis der Präzessionskonstante und der Eigenbewegungen der Sterne doch bewirken, daß die auf eine spätere Epoche übertragenen Rektaszensionen des Kataloges mehr oder weniger von der Wahrheit abweichen; es müssen also von Zeit zu Zeit die Korrektionen der für die Sterne angenommenen Rektaszensionen ermittelt werden. Zu diesem Zwecke beobachtet man an jedem klaren Abende die Kulminationszeiten einer möglichst großen Zahl der zu untersuchenden Sterne. Um genaue Resultate zu erhalten ist es notwendig, daß die zu den Durchgangsbeobachtungen verwandte Uhr gegen die Schwankungen des Luftdruckes und der Temperatur geschützt ist; der für die Ableitung der Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen nötige Gang der Uhr ist dann nur eine Funktion der Zeit und läßt sich mit großer Sicherheit aus den an verschiedenen Tagen beobachteten Durchgängen eines und desselben Sterns ableiten. Man hat aber noch einen anderen Punkt zu berücksichtigen. Für die große Mehrzahl der Beobachter ist nämlich die Zeit, zu der ein Stern einen Faden zu passieren scheint, um ein Geringes von der wahren Durchgangszeit verschieden, und zwar wird diese Differenz um so größer, je schwächer der Stern ist; die beobachtete Durchgangszeit ist also dementsprechend zu korrigieren. Bedeutet nun t die beobachtete Durchgangszeit eines Sterns von der Größe m und ϑ die Zeit, welche man beobachtet haben würde, wenn der Stern eine fest gewählte Größe, etwa die Größe 4.0, gehabt hätte, so kann man auf Grund der bisher gemachten Erfahrungen

$$\vartheta = \mathrm{t} + a(m-4) + b(m-4)^2 \tag{17}$$

annehmen, wo a und b zwei Konstanten bedeuten. Zur Bestimmung von a und b beobachtet man die Zeiten, wann ein Stern bei unbedecktem Objektiv die eine Hälfte der Fäden passiert, bedeckt dann das Objektiv durch ein Gitter und beobachtet hierauf die Durchgangszeiten des abgeblendeten Sterns durch die zweite Hälfte der Fäden. Sind t und t' die aus den Beobachtungen bei vollem, bzw. abgeblendetem Objektiv abgeleiteten Durchgangszeiten durch den Mittelfaden, und ist m die natürliche und m' die abgeblendete Größe des Sterns, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (17)

$$0 = \mathrm{t}' - \mathrm{t} + a(m'-m) + b[(m'-4)^2 - (m-4)^2] \tag{17a}$$

Die durch das Gitter bewirkte Abblendung $m' - m$ läßt sich durch photometrische Messung bestimmen, dasselbe gilt von der Größe m des Sterns; die Koeffizienten von a und b in der letzten Gleichung sind also als bekannte Größen anzu-

sehen, und somit kann man diese Gleichung dazu benutzen, um a und b selbst zu finden. An Stelle eines Gitters wendet man besser zwei bis drei verschiedener Dichte an und beobachtet mit jedem eine Anzahl von Sternen verschiedener Helligkeit.

Es sei nun α die angenommene mittlere Rektaszension eines Sterns und α' die hieraus abgeleitete scheinbare Rektaszension, x_α sei die zu bestimmende Korrektion von α, und ϑ die mittels der Gleichung (17) wegen der Helligkeitsgleichung korrigierte Durchgangszeit eines Sterns. Setzt man voraus, daß an ϑ erforderlichenfalls auch schon die im vorigen Paragraphen besprochenen, von der mittleren Zeit der Beobachtung und von dem Unterschiede zwischen Tag- und Nachtbeobachtung abhängigen Korrektionen angebracht seien, so ist $\alpha' + x_\alpha - \vartheta$ die Uhrkorrektion zur Zeit ϑ. Mit Benutzung des oben mit G bezeichneten täglichen Ganges der Uhr wird also die Uhrkorrektion zur Zeit ϑ_0 gleich $\alpha' + x_\alpha - \vartheta + \frac{G}{24}(\vartheta_0 - \vartheta)$. Man bilde jetzt für alle an einem Abend beobachteten Sterne die Differenzen $\alpha' - \vartheta = \Delta\vartheta$ und reduziere diese durch Anbringung der Korrektion $\frac{G}{24}(\vartheta_0 - \vartheta)$ auf die Zeit ϑ_0. Die so erhaltenen genäherten Werte der Uhrkorrektion zur Zeit ϑ_0 benutzt man, um zunächst die relativen Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen zu bestimmen; das hierzu dienende Verfahren wird am besten durch ein Beispiel verständlich gemacht. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß nur vier um je sechs Stunden voneinander entfernte Sterne vorliegen; von diesen seien an einem Tage alle, an einem zweiten Tage drei und an einem dritten Tage nur zwei beobachtet worden. Die folgende kleine Tabelle gibt in der ersten Kolumne die auf eine Zehntelstunde abgerundeten Durchgangszeiten der Sterne, darauf folgen die am ersten Tage erhaltenen Werte von $\Delta\vartheta$ und zur Seite die mittels des täglichen Ganges ($+ 0^s.24$ für den ersten Tag) auf das Mittel der beobachteten Zeiten (9^h) reduzierten $\Delta\vartheta$. Für den zweiten und dritten Tag findet man ebenfalls zuerst die beobachteten, und sodann die unter Benutzung des täglichen Ganges ($+ 0^s.12$, bzw. $- 0^s.08$) auf das jeweilige Mittel aus den Beobachtungszeiten (12^h, bzw. 15^h) bezogenen genäherten Uhrkorrektionen.

	I		II		III	
	täglicher Gang $+ 0^s.24$		täglicher Gang $+ 0^s.12$		täglicher Gang $- 0^s.08$	
ϑ	$\Delta\vartheta$	9^h	$\Delta\vartheta$	12^h	$\Delta\vartheta$	15^h
$0^h.0$	$- 10^s.58$	$- 10^s.49$				
6.0	− 10.40	− 10.37	$- 5^s.04$	$- 5^s.01$		
12.0	− 10.42	− 10.45	− 5.17	− 5.17	$- 4^s.07$	$- 4^s.08$
18.0	− 10.28	− 10.37	− 5.08	− 5.11	− 4.02	− 4.01

Bezeichnet man die Korrektionen der angenommenen Rektaszensionen der vier Sterne mit x_0, x_6, x_{12}, x_{18}, und ist k die wahre Uhrkorrektion für 9^h Sternzeit des ersten Tages, so hat man

$$k = - 10^s.49 + x_0$$
$$k = - 10.37 + x_6$$
$$k = - 10.45 + x_{12}$$
$$k = - 10.37 + x_{18}$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung von den folgenden ergibt sich

$$x_6 - x_0 = -0^s.12$$
$$x_{12} - x_0 = -0.04$$
$$x_{18} - x_0 = -0.12$$

In derselben Weise erhält man aus den am zweiten und dritten Tage für 12^h, bzw. 15^h gefundenen Uhrkorrektionen, wenn $x_{12} - x_6 = x_{12} - x_0 - (x_6 - x_0)$, ... gesetzt wird,

$$x_{12} - x_0 - (x_6 - x_0) = +0^s.16$$
$$x_{18} - x_0 - (x_6 - x_0) = +0.10$$
$$x_{18} - x_0 - (x_{12} - x_0) = -0.07$$

Behandelt man die sechs letzten Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergeben sich zunächst die Normalgleichungen

$$3(x_6 - x_0) - (x_{12} - x_0) - (x_{18} - x_0) = -0^s.38$$
$$-(x_6 - x_0) + 3(x_{12} - x_0) - (x_{18} - x_0) = +0.19$$
$$-(x_6 - x_0) - (x_{12} - x_0) + 3(x_{18} - x_0) = -0.09$$

Hieraus folgen die relativen Korrektionen

$$x_6 - x_0 = -0^s.165, \qquad x_{12} - x_0 = -0^s.022, \qquad x_{18} - x_0 = -0^s.092$$

Man setze jetzt $x_0 = 0$, also $x_6 = -0^s.165$, $x_{12} = -0^s.022$, $x_{18} = -0.092$ und bringe diese Korrektionen an die angenommenen Werte der mittleren Rektaszensionen der Sterne an; ist dann der wahre Wert von x_0 gleich E, so erfordern alle in der eben angegebenen Weise korrigierten Rektaszensionen die Korrektion E. In welcher Weise man den Wert von E, welcher die Korrektion des Äquinoktiums genannt wird, bestimmen kann, soll gleich gezeigt werden; zuvor aber möge noch eine Bemerkung über das zur Ableitung der relativen Korrektionen der Rektaszensionen benutzte Verfahren Platz finden. Wie man ohne weiteres sieht, ist dieses auf eine beliebige Zahl von Sternen anwendbar. Sollen aber die gesuchten Korrektionen genau werden, so muß jede Differenz zweier Rektaszensionskorrektionen häufiger bestimmt worden sein; man bildet in diesem Falle die Mittel aus den für die verschiedenen Differenzen erhaltenen Einzelwerten und legt den Mitteln die ihnen zugehörigen Gewichte bei. Nachdem sodann jede einem Mittel entsprechende Bedingungsgleichung mit der Quadratwurzel des zugehörigen Gewichtes multipliziert worden ist, leitet man mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten relativen Rektaszensionskorrektionen ab.

Um die Korrektion des Äquinoktiums zu finden, beobachtet man außer den Durchgangszeiten der zu untersuchenden Sterne auch noch die Durchgangszeit der Sonne und ihre Zenitdistanz im Meridian. Die Durchgangsbeobachtungen in Verbindung mit den wegen der relativen Rektaszensionskorrektionen verbesserten scheinbaren Rektaszensionen der Sterne dienen dazu, die Rektaszension der Sonne abzuleiten. Beispielsweise hatte man in Pulkowa am 7. und 8. September 1881 die in der zweiten Kolumne der folgenden Tafel angeführten Kulminationszeiten beobachtet. Dieselben sind bereits wegen der Instrumentalfehler korrigiert; man nehme aber an,

daß auch die im vorigen Paragraphen erwähnte, von der mittleren Zeit der Beobachtung abhängende Korrektion berücksichtigt sei und ebenso die den einzelnen Sternen entsprechende Korrektion wegen Helligkeitsgleichung. Zur Seite der Kulminationszeiten der Sterne sind die scheinbaren Rektaszensionen angegeben; dabei denke man sich, daß die relativen Rektaszensionskorrektionen schon berücksichtigt seien. Subtrahiert man nun die in der zweiten und dritten Kolumne stehenden Angaben voneinander, so erhält man die mit $\Delta\vartheta$ bezeichneten Werte.

	Uhrzeit	α'	$\Delta\vartheta$
α Gemin. pr.	$7^h\,27^m\,41^s.36$	$7^h\,27^m\,2^s.99$	$-38^s.37$
» » sq.	7 27 41.72	7 27 3.38	.34
α Canis min.	7 33 45.03	7 33 6.80	.23
β Gemin.	7 38 43.15	7 38 4.83	.32
α Hydrae	9 22 24.62	9 21 46.27	.35
α Leonis	10 2 42.34	10 2 4.04	.30
Sonne	11 8 33.85		
β Leonis	11 43 39.54	11 43 1.20	.34
α Virginis	13 19 36.04	13 18 57.70	.34
α Bootis	14 10 54.34	14 10 15.93	.41
α Coronae	15 30 19.35	15 29 41.01	.34
α Serpentis	15 39 5.33	15 38 27.01	.32

Unter der Annahme, daß die in Pulkowa benutzte Uhr unter konstantem Druck und unter konstanter Temperatur gehalten worden sei, kann man ihren Gang als der Zeit proportional betrachten. Nimmt man also das Mittel aus den den 11 Sternen entsprechenden Werten von $\Delta\vartheta$, so würde dieses die für das Mittel aus den Durchgangszeiten der Sterne gültige Uhrkorrektion sein, wenn die angenommenen Rektaszensionen keine konstante Korrektion erforderten. Das Mittel aus den 11 Werten von $\Delta\vartheta$ ist gleich $-38^s.333$, und das Mittel aus den zugehörigen Uhrzeiten gleich $10^h.9$; da sich aus den Beobachtungen zweier aufeinander folgender Kulminationen eines und desselben Sterns für den stündlichen Gang der Uhr der Wert $-0^s.008$ ergeben hatte, so wird der auf die Durchgangszeit der Sonne reduzierte Wert von $\Delta\vartheta$ gleich $-38^s.335$. Die mit Vernachlässigung der Korrektion des Äquinoktiums sich ergebende scheinbare Rektaszension der Sonne ist demnach gleich $11^h\,7^m\,55^s.515$.

Man denke sich jetzt, daß man in der eben auseinandergesetzten Weise aus den im Laufe eines Jahres erhaltenen Durchgangsbeobachtungen der Sonne und der Zeitsterne die ohne Rücksicht auf eine etwaige Korrektion des Äquinoktiums resultierende scheinbare Rektaszension der Sonne abgeleitet habe, desgleichen sei mit Hilfe der Gleichung (5) aus den Zenitdistanzen der Sonne ihre scheinbare Deklination erhalten worden. Bildet man sodann die Differenzen zwischen diesen und den aus der Ephemeride entnommenen Werten der Rektaszension und Deklination der Sonne, so läßt sich die Korrektion des Äquinoktiums in der folgenden Weise bestimmen. Es seien $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ die in der Ephemeride gegebenen Werte der Rektaszension und Deklination der Sonne; diese sind, unter Benutzung der den Sonnentafeln entnommenen

Werte der Länge (λ) und Breite (β) der Sonne, mit Hilfe der aus den Gleichungen (15^a) des § 19 (für $\sin\beta = \beta \sin 1''$, $\cos\beta = 1$) folgenden Formeln berechnet worden

$$\begin{aligned} \sin\mathfrak{D}' &= \sin\lambda \sin\varepsilon + \beta \sin 1'' \cos\varepsilon \\ \cos\mathfrak{D}' \sin\mathfrak{A}' &= \sin\lambda \cos\varepsilon - \beta \sin 1'' \sin\varepsilon \\ \cos\mathfrak{D}' \cos\mathfrak{A}' &= \cos\lambda \end{aligned} \tag{18}$$

Die Sonnenbreite kann als richtig betrachtet werden. Um zu finden, welchen Einfluß eine Korrektion der aus den Tafeln folgenden Sonnenlänge, bzw. eine Korrektion des für die Schiefe der Ekliptik angenommenen Wertes auf die Werte von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ hat, wende man die Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie

$$\begin{aligned} da &= \cos C\, db + \cos B\, dc + \sin b \sin C\, dA \\ \sin a\, dB &= \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA \end{aligned}$$

auf das durch den Pol der Ekliptik, den Pol des Äquators und den Ort der Sonne (S') gebildete Dreieck an. Berücksichtigt man dabei, daß, wenn der Winkel bei S' mit S' bezeichnet wird,

$$\cos\varepsilon = \beta \sin 1'' \sin\mathfrak{D}' + \cos\mathfrak{D}' \cos S'$$

also

$$\cos S' = \cos\varepsilon \sec\mathfrak{D}' - \beta \sin 1'' \operatorname{tang}\mathfrak{D}'$$

ist, so ergibt sich mit Vernachlässigung des verschwindend kleinen Produkts $\beta \sin 1''\, d\lambda$

$$\begin{aligned} d\mathfrak{D}' &= \sin\varepsilon \cos\mathfrak{A}' d\lambda + \sin\mathfrak{A}' d\varepsilon \\ d\mathfrak{A}' &= \cos\varepsilon \sec^2\mathfrak{D}' d\lambda - \operatorname{tang}\mathfrak{D}' \cos\mathfrak{A}' d\varepsilon \end{aligned} \tag{19}$$

Bedeutet nun D' wieder die mit Hilfe der Gleichung (5) aus der beobachteten Zenitdistanz abgeleitete scheinbare Deklination der Sonne, und sind $d\Phi$ und dR die Korrektionen der für die Gleichung (5) benutzten Werte der mittleren Polhöhe, bzw. der Refraktion, bezeichnet man ferner mit dz eine an die beobachteten Zenitdistanzen der Sonne anzubringende konstante Korrektion, so folgt aus den in § 91 gemachten Bemerkungen, daß der wahre Wert der scheinbaren Deklination der Sonne gleich $D' + dz + d\Phi + dR$ ist. Nach dem vorhin Gesagten ist aber die scheinbare Deklination der Sonne auch gleich $\mathfrak{D}' + d\mathfrak{D}'$. Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich und substituiert für $d\mathfrak{D}'$ seinen in (19) gegebenen Wert, so folgt

$$D' - \mathfrak{D}' = \sin\varepsilon \cos\mathfrak{A}' d\lambda + \sin\mathfrak{A}' d\varepsilon - dR - (dz + d\Phi) \tag{20}$$

Bei der Genauigkeit, mit welcher die Bewegung der Erde gegenwärtig bekannt ist, darf man $d\lambda$ während eines ganzen Jahres und auch länger als konstant betrachten; dasselbe gilt von $d\varepsilon$. Die Korrektion dR dagegen ist im Laufe eines Jahres veränderlich. Da für die Berechnung der Refraktion gewisse theoretische Annahmen zu machen, beziehungsweise gewisse empirisch bestimmte Konstanten zu benutzen sind, so hängt der für dR zu substituierende Ausdruck davon ab, welche dieser Annahmen oder Konstanten als verbesserungsfähig betrachtet wird. Ist man beispielsweise der Ansicht, daß der zugrunde gelegte Wert der Refraktionskonstante nicht hinlänglich sicher bestimmt sei, so wird man, wenn $\varkappa_0$ den angenommenen und

$\varkappa_0(1+n)$ den wahren Wert der Refraktionskonstante bedeutet, $dR = Rn$ setzen, wo nun n eine zu ermittelnde Konstante bezeichnet. Damit ergibt sich

$$D' - \mathfrak{D}' = \sin\varepsilon\cos\mathfrak{A}'\,d\lambda + \sin\mathfrak{A}'\,d\varepsilon - Rn - (dx + d\Phi) \tag{21}$$

Aus einer genügend großen Anzahl solcher möglichst gleichmäßig über ein Jahr verteilter Gleichungen lassen sich die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $d\lambda$, $d\varepsilon$, n und $dx + d\Phi$ ableiten. Zur Vereinfachung der Rechnung werden aber die Gleichungen (21) zunächst in Monatsmittel zusammengefaßt. Bei der Gewichtsbestimmung dieser Mittel ist zu berücksichtigen, daß die Beobachtungen mit systematischen, von Monat zu Monat veränderlichen Fehlern behaftet sein können; für solche Monate, welche ausnahmsweise viele Beobachtungen geliefert haben, wird man demnach die Gewichte der Gleichungen etwas kleiner annehmen, als es mit Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungen geschehen müßte.

Hat man nun die wahrscheinlichsten Werte von $d\lambda$ und $d\varepsilon$ gefunden und substituiert dieselben in die zweite der Gleichungen (19), so läßt sich für jedes Wertepaar von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{D}'$ die Korrektion $d\mathfrak{A}'$ berechnen. Das Jahresmittel aus den zwölf, jedesmal für die Mitte eines Monats gültigen Werten von $d\mathfrak{A}'$ werde mit $d\mathfrak{A}'_\odot$ bezeichnet; $d\mathfrak{A}'_\odot$ stellt also die für das betreffende Jahr gültige mittlere Korrektion der mit Hilfe der Tafeln berechneten Rektaszension der Sonne dar. Da der mittlere Jahreswert von $\cos\varepsilon\sec^2\mathfrak{D}'$ nahe gleich 1 und derjenige von $\operatorname{tang}\mathfrak{D}'\cos\mathfrak{A}'$ nahe gleich 0 ist, so folgt aus der zweiten Gleichung (19), daß sich $d\mathfrak{A}'_\odot$ nur wenig von $d\lambda$ unterscheidet.

Es bedeute jetzt $\alpha_\odot$ die aus den Durchgangsbeobachtungen der Sonne und der Sterne abgeleitete scheinbare Rektaszension der Sonne; nimmt man dann das Mittel aus allen im Laufe eines Monats erhaltenen Differenzen $\alpha_\odot - \mathfrak{A}'$ und vereinigt diese Monatsmittel in ein Jahresmittel $(\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m$, so ist die Summe aus $(\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m$ und der oben mit E bezeichneten Korrektion des Äquinoktiums ebenfalls gleich $d\mathfrak{A}'_\odot$. Aus der Gleichung $d\mathfrak{A}'_\odot = (\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m + E$ folgt nun

$$E = d\mathfrak{A}'_\odot - (\alpha_\odot - \mathfrak{A}')_m \tag{22}$$

Kapitel XIVª.

Bildung eines Fundamentalkatalogs.

93ª. Vergleichung zweier Sternkataloge. Man denke sich zwei Sternkataloge gegeben, deren Epochen nur um wenige Jahre voneinander abweichen; die Positionen der diesen Katalogen gemeinsamen Sterne seien auf dasselbe Äquinox und auf dieselbe Epoche reduziert worden. Bildet man dann die Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ zwischen

den reduzierten Positionen und ordnet diese nach der Deklination der Sterne, so findet man fast ohne Ausnahme, daß die Differenzen eine Abhängigkeit von der Deklination zeigen. Um diese Abhängigkeit deutlicher hervortreten zu lassen, teilt man die Sterne in Zonen von etwa 5° oder 10° Breite ein und bildet für jede Zone die Mittel aus den $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sowie auch das genäherte Mittel aus den Deklinationen der verglichenen Sterne; die Mittelwerte der Differenzen mögen mit $\Delta\alpha_\delta$, bzw. $\Delta\delta_\delta$ bezeichnet werden. Trägt man dann auf Millimeterpapier die mittleren Deklinationen der Zonen als Abszissen und die Differenzenmittel als Ordinaten auf, so läßt sich für die $\Delta\alpha_\delta$ und $\Delta\delta_\delta$ je eine ausgleichende Kurve so zeichnen, daß die Abweichungen der aus den Kurven folgenden $\Delta\alpha_\delta$ und $\Delta\delta_\delta$ von den durch die Vergleichung der Kataloge erhaltenen auf Rechnung der zufälligen Beobachtungsfehler gesetzt werden können. Bei der Zeichnung der Kurven ist einige Willkür nicht zu vermeiden; im allgemeinen wählt man möglichst einfach verlaufende Kurven, d. h. Kurven mit möglichst wenig Wellen. Für die Sterne in hohen Deklinationen empfiehlt es sich, nicht die Differenzen $\Delta\alpha$, sondern die Werte von $\Delta\alpha \cos\delta$ durch eine Kurve auszugleichen.

Als Beispiel möge eine Vergleichung des Cap Katalogs 1860 mit dem Williamstown Kataloge (Melbourne, Observations, Astr. Res., Vol I) folgen*). Die den beiden Katalogen gemeinsamen Sterne liegen in Wirklichkeit zwischen den Grenzen $\delta = +40°$ und $\delta = -90°$; indessen sollen hier nur die Resultate mitgeteilt werden, welche die Vergleichung der Positionen der zwischen $\delta = -5°$ und $\delta = -80°$ gelegenen Sterne ergeben hat. Die erste Kolumne der nachstehenden Tabelle gibt die mittlere Deklination jeder Zone an, die zweite Kolumne enthält die Mittel der Differenzen Cap—Williamstown und die vierte die Anzahl der verglichenen Sterne.

δ	$\Delta\alpha_\delta$	Kurve	Sterne	δ	$\Delta\delta_\delta$	Kurve	Sterne
— 8°0	+ 0°028	+ 0°03	15	— 8°1	— 0″11	— 0″2	14
— 13.2	+ 0.024	+ 0.03	7	— 13.3	— 0.19	— 0.1	7
— 17.0	+ 0.018	+ 0.03	20	— 17.2	— 0.03	0.0	16
— 22.5	+ 0.025	+ 0.02	12	— 22.4	+ 0.08	+ 0.1	11
— 27.5	+ 0.010	0.00	20	— 27.8	— 0.07	+ 0.1	14
— 32.2	— 0.018	— 0.01	13	— 32.3	+ 0.06	+ 0.1	12
— 36.8	— 0.010	— 0.03	20	— 36.8	+ 0.25	+ 0.1	15
— 42.2	— 0.061	— 0.04	11	— 42.2	— 0.52	— 0.1	9
— 47.0	— 0.023	— 0.06	4	— 47.0	— 0.30	— 0.3	3
— 58.8	— 0.099	— 0.06	10	— 58.5	— 0.51	— 0.7	5
— 62.5	— 0.054	— 0.05	9	— 61.3	— 0.90	— 0.7	2
— 67.8	— 0.010	— 0.01	18	— 67.9	— 0.74	— 0.9	5
— 72.0	+ 0.108	+ 0.06	6	— 74.4	— 0.93	— 1.0	3
— 77.7	+ 0.058	+ 0.06	8	— 78.8	— 1.35	— 1.1	6

*) *L. de Ball*, Untersuchungen über die eigene Bewegung des Sonnensystems. Bonn 1877. Inauguraldissertation.

Mit Hilfe der unter δ, $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ gegebenen Werte wurden zwei Kurven konstruiert, welche die in der folgenden Tabelle mitgeteilten ausgeglichenen Differenzen: Cap—Williamstown lieferten.

δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$	δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$	δ	$\Delta\alpha_\delta$	$\Delta\delta_\delta$
-10°	$+0^s.03$	$-0''.1$	-34°	$-0^s.02$	$+0''.1$	-58°	$-0^s.06$	$-0''.7$
-14	$+0.03$	0.0	-38	-0.03	0.0	-62	-0.05	-0.8
-18	$+0.03$	0.0	-42	-0.04	-0.1	-66	-0.03	-0.9
-22	$+0.02$	$+0.1$	-46	-0.05	-0.3	-68	-0.01	-0.9
-26	$+0.01$	$+0.1$	-50	-0.06	-0.4	-70	$+0.03$	-1.0
-30	0.00	$+0.1$	-54	-0.06	-0.5	-72	$+0.06$	-1.0

Nachdem man für zwei miteinander zu vergleichende Sternkataloge eine Tabelle wie die vorstehende gewonnen hat, subtrahiere man von den oben mit $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ bezeichneten Einzeldifferenzen die ihnen entsprechenden, aus der Tabelle folgenden Differenzen $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\delta$ und ordne die verbleibenden Reste nach der Rektaszension der Sterne; es zeigt sich dann gewöhnlich, daß eine Beziehung zwischen den Resten und der Rektaszension besteht. Diese läßt sich entweder mit Hilfe von Kurven oder durch Gleichungen ausdrücken, und zwar haben die von *Boss* ausgeführten Katalogvergleichungen gelehrt, daß man im allgemeinen eine befriedigende Darstellung der Reste erhält, wenn man

(1) $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta = (a + b \tan\delta) \sin\alpha + (c + d \tan\delta) \cos\alpha + a_2 \sin 2\alpha + c_2 \cos 2\alpha$

(2) $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta = a' \sin\alpha + c' \cos\alpha + a'_2 \sin 2\alpha + c'_2 \cos 2\alpha$

setzt. In diesen Gleichungen bedeutet α die Rektaszension und δ die Deklination des Sterns, auf den sich die Differenzen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ beziehen; a, b, c, d, a_2, ... sind zu bestimmende Konstanten.

Es könnte auffallend erscheinen, daß in der Gleichung (1) noch die von der Deklination abhängigen Glieder $b \tan\delta \sin\alpha$ und $d \tan\delta \cos\alpha$ auftreten, nachdem doch die Abhängigkeit der Differenzen $\Delta\alpha$ von δ bereits untersucht und in Rechnung gezogen wurde. Die Erklärung liegt in folgendem. Um die $\Delta\alpha_\delta$ zu bestimmen, bildet man, wie schon bemerkt, für alle einer Zone angehörigen Sterne die Mittelwerte aus den durch die Vergleichung der Kataloge gefundenen $\Delta\alpha$; unter der Voraussetzung aber, daß die in einer Zone enthaltenen Sterne sich in Rektaszension gleichmäßig über den ganzen Kreis verteilen, wird $\Sigma \sin\alpha = \Sigma \cos\alpha = 0$, und somit verschwinden in den $\Delta\alpha_\delta$ die von b und d abhängigen Glieder.

Man greife nun aus den Resten $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ diejenigen heraus, welche sich auf die etwa zwischen $\delta = -15^\circ$ und $\delta = +15^\circ$ gelegenen Sterne beziehen, und vereinige alle derselben Rektaszensionsstunde angehörigen Reste in je einen Mittelwert; diese Mittelwerte mögen mit $\Delta\alpha_\alpha$ bezeichnet werden. Da b und d erfahrungsgemäß höchstens einige Hundertstel einer Zeitsekunde betragen, da ferner $\tan\delta$ innerhalb der angegebenen Grenzen von δ stets klein und bald positiv, bald negativ ist, so heben sich bei der Bildung der $\Delta\alpha_\alpha$ die von b und d abhängigen Glieder gegenseitig auf; es wird also, wenn α_m die einem $\Delta\alpha_\alpha$ zugehörige mittlere Rektaszension bedeutet,

$$\Delta\alpha_\alpha = a \sin\alpha_m + c \cos\alpha_m + a_2 \sin 2\alpha_m + c_2 \cos 2\alpha_m$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lassen sich aus den 24 Mittelwerten $\Delta\alpha_\alpha$ und den ihnen entsprechenden Werten von α_m die Konstanten a, c, a_2, c_2 bestimmen. Hierauf berechnet man eine Tafel, welche mit dem Argument α den Wert von

$$\Delta\alpha_\alpha = a \sin\alpha + c \cos\alpha + a_2 \sin 2\alpha + c_2 \cos 2\alpha \tag{3}$$

gibt.

Subtrahiert man den Ausdruck (3) von dem unter (1) für $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ gegebenen Ausdruck, so erhält man

$$\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha = (b \sin\alpha + d \cos\alpha) \operatorname{tang}\delta \tag{4}$$

Um b und d zu bestimmen, bilde man für alle Sterne, welche nicht zur Bestimmung von $\Delta\alpha_\alpha$ benutzt worden sind (also, unter der vorhin gemachten Annahme, für die außerhalb der Grenzen $\delta = -15^\circ$ und $\delta = +15^\circ$ gelegenen), die Differenzen $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha$ und vereinige diese nach der Rektaszension in Gruppen, so daß beispielsweise die erste Gruppe alle Differenzen enthält, welche sich auf die zwischen $\alpha = 0^h$ und $\alpha = 2^h$ liegenden Sterne beziehen; die zweite Gruppe enthalte alle Differenzen, welche sich auf die zwischen $\alpha = 2^h$ und $\alpha = 4^h$ liegenden Sterne beziehen, usw. Hierauf teile man die einer Gruppe angehörigen $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha$ in Zonen ein und bilde für jede Zone das Mittel aus den Differenzen $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha$, sowie auch die diesem Mittelwert entsprechende mittlere Deklination δ_m. Multipliziert man dann jeden Mittelwert mit dem zugehörigen $\cos\delta_m$ und setzt, indem die Anzahl der Mittelwerte einer Gruppe mit n bezeichnet wird,

$$\frac{1}{n} \Sigma (\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha) \cos\delta_m = M,$$

so hat man der Gleichung (4) zufolge, wenn α_m die mittlere Rektaszension der Gruppe bedeutet,

$$M = b \sin\alpha_m \frac{\Sigma \sin\delta_m}{n} + d \cos\alpha_m \frac{\Sigma \sin\delta_m}{n}$$

Jede Gruppe liefert eine solche Gleichung; aus der Gesamtheit derselben ergeben sich die gesuchten Werte von b und d. Nachdem man diese gefunden hat, konstruiert man noch eine Tafel, welche mit den Argumenten α und δ den Wert von

$$\Delta'\alpha = (b \sin\alpha + d \cos\alpha) \operatorname{tang}\delta \tag{5}$$

gibt.

Im vorhergehenden ist die Abhängigkeit der Differenzen $\Delta\alpha$ von der Rektaszension und Deklination untersucht worden; es bleibt jetzt noch übrig, auch die Abhängigkeit der $\Delta\alpha$ von der Größe der Sterne zu untersuchen. Zu diesem Zweck subtrahiere man zunächst von den den einzelnen Sternen entsprechenden Differenzen $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha$ die aus (5) folgenden $\Delta'\alpha$; die verbleibenden Reste $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta - \Delta\alpha_\alpha - \Delta'\alpha$ teile man dann in Zonen ein und bilde für jede Zone die den einzelnen Größenklassen entsprechenden Mittelwerte der Reste. Werden diese Mittelwerte mit $\Delta\alpha_m$ bezeichnet, und bedeutet m die einem $\Delta\alpha_m$ zugehörige mittlere Größe, so lassen sich, wie die Erfahrung gelehrt hat, für jede Zone zwei Konstanten i_1 und i_2 so bestimmen, daß die der Zone entsprechenden $\Delta\alpha_m$ der Gleichung genügen

$$\Delta\alpha_m = i_1 m + i_2 m^2 \tag{6}$$

Hat man die für die verschiedenen Zonen gültigen Werte von i_1 und i_2 gefunden, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung (6) für jede Zone der einem gegebenen m zugehörige Wert von $\Delta\alpha_m$ berechnen.

Wenn die zu vergleichenden Kataloge keine dem Äquator benachbarten Sterne gemeinsam haben, so läßt sich das oben erläuterte Verfahren, die Abhängigkeit der Reste $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ von der Rektaszension zu ermitteln, nicht anwenden. Man wird in einem solchen Falle die nach der Deklination geordneten Reste $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ in Zonen teilen und die einer Zone angehörigen $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ nach der Rektaszension ordnen. Bildet man dann für jede Zone die 24 Stundenmittel aus den $\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta$ und setzt, wenn $[\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta]_m$ das der Rektaszension α_m zugeordnete Stundenmittel bedeutet,

$$[\Delta\alpha - \Delta\alpha_\delta]_m = A \sin\alpha_m + B \cos\alpha_m + a_2 \sin 2\alpha_m + c_2 \cos 2\alpha_m ,$$

so lassen sich mit Hilfe dieser Gleichungen die Werte von A, B, a_2 und c_2 bestimmen. Wie man aus der Vergleichung der letzten Gleichung mit der Gleichung (1) sieht, ist, wenn δ_m die mittlere Deklination einer Zone bedeutet,

$$A = a + b \operatorname{tang}\delta_m , \qquad B = c + d \operatorname{tang}\delta_m$$

Hat man also für jede Zone die Werte von A und B bestimmt, und sind die für die einzelnen Zonen gültigen mittleren Deklinationen δ_m hinreichend voneinander verschieden, so kann man auch die Koeffizienten a, b, c und d bestimmen. Falls aber die für die einzelnen Zonen erhaltenen Werte von A und B innerhalb der Grenzen ihrer wahrscheinlichen Fehler miteinander übereinstimmen und demnach b und d verschwindend klein sind, wird man für alle Zonen die mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Mittelwerte von A und B benutzen; eine entsprechende Bemerkung gilt für die Koeffizienten a_2 und c_2.

Um die Abhängigkeit der Reste $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta$ von der Rektaszension zu untersuchen, bilde man für alle derselben Rektaszensionsstunde angehörigen Sterne das Mittel aus den $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta$; bezeichnet man diesen Mittelwert mit $\Delta\delta_\alpha$ und die einem $\Delta\delta_\alpha$ entsprechende mittlere Rektaszension mit α_m, so ist der Gleichung (2) zufolge

$$\Delta\delta_\alpha = a' \sin\alpha_m + c' \cos\alpha_m + a'_2 \sin 2\alpha_m + c'_2 \cos 2\alpha_m$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus den 24 Stundenmitteln $\Delta\delta_\alpha$ die Konstanten a', c', a'_2, c'_2 bestimmen. Sodann läßt sich eine Tafel berechnen, aus der man für jeden Wert von α das zugehörige

$$\Delta\delta_\alpha = a' \sin\alpha + c' \cos\alpha + a'_2 \sin 2\alpha + c'_2 \cos 2\alpha \tag{7}$$

entnehmen kann. Subtrahiert man hierauf von jeder Differenz $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta$ den ihr entsprechenden Wert von $\Delta\delta_\alpha$, ordnet dann die verbleibenden Reste nach der Größe der Sterne und bildet für jede Größenklasse das Mittel $(\Delta\delta_m)$ aus den $\Delta\delta - \Delta\delta_\delta - \Delta\delta_\alpha$, so kann man mit Hilfe dieser Mittelwerte die Abhängigkeit der Differenzen $\Delta\delta$ von der Größe der Sterne bestimmen.

93b. Reduktion mehrerer Sternkataloge auf ein mittleres System. Man denke sich einen durch Genauigkeit hervorragenden Sternkatalog S mit mehreren anderen Katalogen, die mit A, B, C, ... bezeichnet werden mögen, verglichen, und

es seien Δ_1, Δ_2, ... die einer beliebig gewählten Deklination entsprechenden Werte der in dem Sinne $S - A$, $S - B$, ... genommenen ausgeglichenen Differenzen $\Delta\alpha_\delta$; man hat dann die Gleichungen

$$\begin{array}{l} S - S = 0 \\ S - A = \Delta_1 \\ S - B = \Delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{8}$$

Die Differenzen Δ_1, Δ_2, ..., rühren von den systematischen Fehlern der Kataloge A, B, ... und des Katalogs S her. Wenngleich sich nun nicht angeben läßt, wie groß die systematischen Fehler eines bestimmten der verglichenen Kataloge sind, so wird man doch von vornherein — je nach der Qualität des Instruments, der Sorgfalt, welche der Beobachter darauf verwandt hat, den Einfluß der verschiedenen bekannten Fehlerquellen auf seine Beobachtungen zu eliminieren, usw. — sich ein gewisses Urteil über den Grad der Zuverlässigkeit der einzelnen Kataloge bilden und diesen Gewichte beilegen können. Es sei jetzt p_0 das für den Katalog S angenommene Gewicht, p_a, p_b, ... seien die Gewichte der Kataloge A, B, ...; multipliziert man dann die erste der Gleichungen (8) mit p_0, die zweite mit p_a, die dritte mit p_b, ..., und dividiert die Summe der Produkte durch $p_0 + p_a + p_b + \cdots$, so folgt

$$\frac{Sp_0 + Ap_a + Bp_b + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots} = S - \frac{p_a\Delta_1 + p_b\Delta_2 + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots} \tag{9}$$

Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Quotient stellt das mit Berücksichtigung der Gewichte gebildete Mittel aus den Katalogen S, A, B, ... dar; wenn also

$$\frac{p_a\Delta_1 + p_b\Delta_2 + \cdots}{p_0 + p_a + p_b + \cdots} = \Delta \tag{10}$$

gesetzt wird, so ist $-\Delta$ die von den Differenzen $\Delta\alpha_\delta$ abhängende Reduktion des Katalogs S auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... Nachdem die den verschiedenen Deklinationsgraden entsprechenden Werte von $-\Delta$ gefunden sind, lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (8) auch die zur Reduktion der Kataloge A, B, ... auf das Mittel von S, A, B, ... dienenden Korrektionen ableiten. Bezeichnet man diese nämlich mit $r(\alpha_\delta)$, so erhält man

Katalog	$r(\alpha_\delta)$
S	$-\Delta$
A	$\Delta_1 - \Delta$
B	$\Delta_2 - \Delta$

(11)

In derselben Weise, in der man die den Differenzen $\Delta\alpha_\delta$ entsprechenden Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ bestimmt, bestimmt man auch die den Differenzen $\Delta\alpha_\alpha$, $\Delta\delta_\delta$, $\Delta\delta_\alpha$, $\Delta\alpha_m$, $\Delta\delta_m$ entsprechenden Korrektionen; letztere mögen mit $r(\alpha_\alpha)$, $r(\delta_\delta)$, $r(\delta_\alpha)$, $r(\alpha_m)$, $r(\delta_m)$ bezeichnet werden. Was die Berücksichtigung der oben mit $\Delta'\alpha$ bezeichneten Differenzen betrifft, so gibt der nächste Paragraph die nötige Aufklärung.

Die in den Katalogen mitgeteilten Sternpositionen beruhen gewöhnlich auf Beobachtungen in der oberen Kulmination; jedoch gibt es mehrere Kataloge, welche

für Zirkumpolarsterne die im Mittel aus den Beobachtungen in beiden Kulminationen folgenden Örter angeben. In einem solchen Falle sind die für die Zirkumpolarsterne anzuwendenden Reduktionswerte gesondert zu bestimmen; ausgenommen sind hierbei die vorhin mit $r(\alpha_m)$, bzw. $r(\delta_m)$ bezeichneten Größen. Ist die Anzahl der in beiden Kulminationen beobachteten Sterne eines Katalogs zu klein, um die direkte Ableitung einer für diese Sterne gültigen speziellen Reduktionstafel zu ermöglichen, so wird man aus der für die obere Kulmination gefundenen Tafel die für α und $\alpha + 12^h$ gültigen Reduktionswerte $r(\alpha_\alpha)$ und $r(\delta_\alpha)$ entnehmen, und die Mittel aus diesen Werten nebst den der oberen Kulmination entsprechenden $r(\alpha_\delta)$ und $r(\delta_\delta)$ als für die Zirkumpolarsterne gültig betrachten.

93c. Bildung eines Fundamentalkatalogs. Es seien α_s, δ_s, bzw. α_a, δ_a, bzw. α_b, δ_b, ... die Werte, welche man für die Rektaszension und Deklination eines Sterns erhält, wenn die in den Katalogen S, A, B, ... angegebenen Koordinaten auf dasselbe Äquinox und dieselbe Epoche reduziert werden; dabei werde vorausgesetzt, daß die Beobachtungsepochen der Kataloge sich nur um wenige Jahre voneinander unterscheiden, und somit der Einfluß der Eigenbewegung klein ist. Will man dann die wahrscheinlichsten Werte der auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... bezogenen Rektaszension und Deklination des Sterns ableiten, so sind zunächst zu den aus den Katalogen folgenden Positionen die Reduktionswerte $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$, $r(\alpha_m)$, bzw. $r(\delta_\delta)$, $r(\delta_\alpha)$, $r(\delta_m)$ zu addieren. Es ist aber auch noch auf das in § 93a mit $\Delta'\alpha$ bezeichnete Glied Rücksicht zu nehmen. Wie selten dasselbe auftritt, geht aus der von *L. Boss* ausgeführten Vergleichung seines Katalogs von 627 Sternen mit 62 anderen Katalogen hervor (The Astronomical Journal, Band 23, p. 191 ff.); es fanden sich nämlich nur vier an und für sich schon weniger genaue Kataloge, bei denen die Differenzen zwischen den in ihnen enthaltenen Rektaszensionen und denjenigen des *Boss*schen Katalogs in unzweifelhafter Weise auf die Existenz eines Gliedes von der für $\Delta'\alpha$ angenommenen Form hinweisen. In diesem speziellen Falle rührt die Differenz $\Delta'\alpha$ offenbar von den systematischen Fehlern der vier Kataloge her. Man darf aber auf Grund der *Boss*schen Untersuchungen auch allgemein annehmen, daß, wenn man für den oben mit S bezeichneten Vergleichskatalog einen erstklassigen Katalog wählt, dieser selbst keinen Anlaß zur Entstehung eines Gliedes $\Delta'\alpha$ geben kann; sollte also ein vereinzelter unter den mit S verglichenen Katalogen Differenzen ergeben, welche zu der Annahme eines derartigen Gliedes nötigen, so wird man den Grund hiervon in einem systematischen Fehler des betreffenden Katalogs zu suchen haben, und demnach zu den aus letzterem Katalog entnommenen Rektaszensionen außer $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$ und $r(\alpha_m)$ auch noch die Reduktion $\Delta'\alpha$ hinzufügen.

Die in der angegebenen Weise reduzierten Werte der Rektaszension und Deklination eines Sterns mögen mit α'_s, δ'_s, bzw. α'_a, δ'_a, ... bezeichnet werden; sind dann ω_o, ω_a, ... die Gewichte von α'_s, α'_a, ..., und u_o, u_a, ... die Gewichte von δ'_s, δ'_a, ..., so erhält man für die wahrscheinlichsten Werte der auf das Mittel der Kataloge S, A, B, ... bezogenen Koordinaten des Sterns

$$(12) \qquad \alpha = \frac{\omega_o\alpha'_s + \omega_a\alpha'_a + \omega_b\alpha'_b + \cdots}{\omega_o + \omega_a + \omega_b + \cdots}, \qquad \delta = \frac{u_o\delta'_s + u_a\delta'_a + u_b\delta'_b + \cdots}{u_o + u_a + u_b + \cdots}$$

Die zu Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe wäre also gelöst, wenn man imstande wäre, die Gewichte ω_o, ω_a, ω_b, ..., u_o, u_a, u_b, ... zu bestimmen. Um diese Bestimmung ausführen zu können, müßte man die mittleren Fehler (ε_1) der in den Sternkatalogen gegebenen Koordinaten, und die mittleren Fehler (ε_2) der Reduktionsgrößen $r(\alpha_\delta)$, $r(\delta_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$, $r(\delta_\alpha)$, ... kennen. Wenn nun e den für einen der Kataloge gültigen mittleren Fehler einer Beobachtung bedeutet, so würde, dem § 6 zufolge, der einer auf n Beobachtungen beruhenden Koordinate zugehörige mittlere Fehler ε_1 gleich $e:\sqrt{n}$ sein; bei einer genügend großen Zahl von Beobachtungen würde also ε_1 beliebig klein werden. Es leuchtet aber ohne weiteres ein, daß dies nicht der Fall sein kann; vielmehr muß es bei jeder Beobachtungsreihe eine von der Qualität des Instruments, der Art seiner Aufstellung, der Eignung des Beobachters usw. abhängige Grenze der Genauigkeit geben, welche bei einer auch noch so großen Zahl von Beobachtungen nicht überschritten werden kann. Um dies durch eine Gleichung auszudrücken, kann man $\varepsilon_1 = \eta + f(n)$ setzen, wo η eine Konstante und $f(n)$ eine Funktion von n bedeutet, deren Wert mit wachsendem n stetig abnimmt. Da die Werte, welche η und $f(n)$ für die einzelnen Kataloge annehmen, unbekannt sind, und da dasselbe von den mittleren Fehlern der Reduktionsgrößen $r(\alpha_\delta)$, $r(\delta_\delta)$, ... gilt, so lassen sich die Gewichte der Koordinaten α'_s, α'_a, ..., δ'_s, δ'_a, ... von vornherein nicht berechnen; man ist also genötigt, diese Gewichte mehr oder weniger willkürlich anzunehmen. Hat man aber einmal bestimmte Annahmen für die Gewichte gemacht, und bildet man dann, mit Hilfe der Gleichungen (12), für eine größere Zahl von Sternen die Werte von α und δ, so kann man diese dazu benutzen, um die Gewichte auf dem Wege der Rechnung genauer zu bestimmen.

Zur Erläuterung des Gesagten diene das folgende Beispiel. In Nr. XIV der Publikationen der Astronomischen Gesellschaft teilt *Auwers* die in den Katalogen Pulkowa 1845, Greenwich 1861, Pulkowa 1871, Cambridge 1872 und Greenwich 1872 enthaltenen Rektaszensionen von 539 Sternen, reduziert auf das mittlere Äquinox und die Epoche 1875.0 mit*). Außerdem gibt *Auwers* auch die zur Reduktion auf ein mittleres System dienenden systematischen Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ und $r(\alpha_\alpha)$ an, dagegen sind die in früheren Jahren wenig beachteten, von der Größe der Sterne abhängigen Korrektionen vernachlässigt worden. Den mit Berücksichtigung der Korrektionen $r(\alpha_\delta)$ und $r(\alpha_\alpha)$ gewonnenen Rektaszensionen wurden nun Gewichte beigelegt. Beispielsweise nahm *Auwers* für eine auf 1 oder 2 Beobachtungen beruhende Rektaszension des Katalogs Pulkowa 1845 das Gewicht 1 an, für eine auf 3 bis 7 Beobachtungen beruhende das Gewicht 2, für eine auf 8 bis 12 Beobachtungen beruhende Rektaszension das Gewicht 3 und für die auf mehr wie 12 Beobachtungen beruhenden Rektaszensionen das Gewicht 4; die für Greenwich 1861 angenommenen Gewichte sind 1, 2 und 3, jenachdem die Zahl der Beobachtungen 1 bis 4, bzw. 5

*) Die Epochen der diesen Katalogen zugrunde liegenden Beobachtungen sind z. T. schon weit voneinander entfernt; wenn *Auwers* trotzdem die in den Katalogen gegebenen Rektaszensionen zur Aufstellung eines Fundamentalkatalogs verwandt hat, so liegt der Grund hiervon in dem Umstande, daß zu hoffen war, daß die durch die kleinen Fehler der benutzten Eigenbewegungen hervorgerufene Unsicherheit reichlich durch den infolge der Benutzung einer größeren Zahl von Katalogen erzielten Gewinn an Genauigkeit kompensiert werde.

bis 15, bzw. größer als 15 ist, usw. Mit Hilfe dieser Gewichte ließen sich unter Anwendung der Gleichungen (12) bereits sehr nahe richtige Rektaszensionen der 539 Sterne ableiten; vergleicht man also den aus diesen Rektaszensionen gebildeten Katalog (F) mit den ihm zugrunde liegenden, auf ein mittleres System reduzierten Sternkatalogen, so werden die sich ergebenden Unterschiede hauptsächlich den Fehlern der mit F verglichenen Kataloge zuzuschreiben sein.

Um die aus irgend einem der angeführten Kataloge, z. B. aus dem Kataloge Greenwich 1872, folgenden Rektaszensionen mit denjenigen des Katalogs F zu vergleichen, teile man zunächst die Sterne in Zonen ein und bilde für jede Zone die Differenzen zwischen den Rektaszensionen des Katalogs F und den mit Hilfe der systematischen Korrektionen $r(\alpha_\delta)$, $r(\alpha_\alpha)$ verbesserten Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872; diese Differenzen vereinige man dann in Gruppen. Die erste Gruppe der Differenzen möge sich auf diejenigen Rektaszensionen beziehen, für welche die in dem Katalog Greenwich 1872 angegebene Zahl der Beobachtungen 1 bis 5 beträgt; die zweite beziehe sich auf die Rektaszensionen, welche auf 6 bis 10 Beobachtungen beruhen, usw. Bildet man jetzt für jede Gruppe das Mittel aus den absoluten Werten der Differenzen F—Greenwich 1872, so können die damit erhaltenen Mittelwerte, dem obigen zufolge, kurz als Durchschnittsfehler des Katalogs Greenwich 1872 bezeichnet werden. — Für die südlich von $\delta = +50^\circ$ gelegenen Sterne z. B. haben sich die in der dritten Kolumne der folgenden Tabelle angeführten Durchschnittsfehler der Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872 ergeben:

Zahl der Beob.	Mittlere Zahl der Beob.	Durchschnittsfehler	Sterne	Formel
1— 5	3.7	$0^s.026$	80	$0^s.027$
6—10	7.7	0.019	34	0.020
11—19	14.7	0.020	26	0.015
20—29	24.9	0.012	33	0.013
30—39	35.0	0.010	24	0.012
40—49	45.3	0.010	24	0.011
50—69	59.5	0.009	25	0.011
>70	102.6	0.011	30	0.010

Sucht man die gefundenen, für $\delta = +25^\circ$ gültigen Durchschnittsfehler durch eine Gleichung von der Form

$$\text{Durchschnittsfehler} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{n}} \tag{13}$$

darzustellen, wo n die jeweilige mittlere Zahl der Beobachtungen bedeutet, so findet man $a^2 = 0^s.000070$, $\log b^2 = 7.385$; hierbei ist die zu dem Logarithmus 7.385 gehörige Zahl in Teilen einer Zeitsekunde ausgedrückt zu verstehen. Die mit Hilfe der Formel (13) und der Werte von a^2 und $\log b^2$ sich ergebenden Durchschnittsfehler sind in der fünften Kolumne der vorstehenden Tafel enthalten; wie man sieht, stimmen dieselben mit den der Rechnung zugrunde gelegten Werten in befriedigender Weise überein.

Im allgemeinen wächst der einem gegebenen n entsprechende Durchschnittsfehler einer Rektaszension mit der Deklination der Sterne. Dabei zeigt sich jedoch bei den meisten Katalogen, daß, wenn D den einer Zone von der mittleren Deklination δ entsprechenden Durchschnittsfehler einer auf n Beobachtungen beruhenden Rektaszension bedeutet, das demselben Wert von n zugehörige Produkt $D \cos\delta$ für alle Zonen als konstant betrachtet werden darf; in solchen Fällen wird man die für nahe gleiche Werte von n gefundenen Produkte $D \cos\delta$ in Mittelwerte zusammenfassen und letztere durch eine Formel ausgleichen. Um die Durchschnittsfehler zu erhalten, sind dann die aus der Formel folgenden Werte von $D \cos\delta$ noch mit $\sec\delta$ zu multiplizieren. — Beruht ein Teil der in einem Sternkataloge enthaltenen Positionen auf Beobachtungen in der oberen Kulmination, und der andere Teil auf Beobachtungen in beiden Kulminationen, so müssen die Durchschnittsfehler für diese beiden Gruppen von Positionen gesondert bestimmt werden.

Der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge ist der mittlere Fehler einer Beobachtung gleich dem Produkt aus dem Durchschnittsfehler und der Quadratwurzel aus $\frac{\pi}{2}$. Da nun die Gewichte zweier Beobachtungen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der mittleren Fehler der Beobachtungen, so verhalten sie sich auch umgekehrt wie die Quadrate der Durchschnittsfehler. Nachdem also die für die verschiedenen Werte von n gültigen ausgeglichenen Durchschnittsfehler gefunden worden sind, hat man nur noch den der Gewichtseinheit entsprechenden Durchschnittsfehler zu wählen und erhält dann ohne weiteres die gesuchten, den Werten von n zugehörigen Gewichte. Für den Durchschnittsfehler einer Rektaszension vom Gewicht 1 nimmt man gewöhnlich einen Ausdruck von der Form $h \sec\delta$ an, wo h eine beliebig zu wählende Konstante bedeutet; da nämlich für die überwiegende Mehrzahl der Kataloge der Durchschnittsfehler der Rektaszension eines Sterns der Sekante der Deklination proportional ist, so hängt dann für alle diese Kataloge das Gewicht einer Rektaszension nur von der Zahl der Beobachtungen ab.

Im Anschluß an das vorhin Gesagte sollen jetzt die Gewichte der auf das von *Auwers* gewählte mittlere System reduzierten Rektaszensionen des Katalogs Greenwich 1872 mitgeteilt werden. Die zweite Kolumne der folgenden Tabelle enthält für die in der ersten Kolumne angeführten Werte von n die mittels der Formel (13) berechneten, also für $\delta = +25°$ gültigen Quadrate des Durchschnittsfehlers. Wählt man in Übereinstimmung mit *Auwers* (Gewichtstafeln für Sternkataloge, Astr. Nachr. Nr. 3615—16, Band 151) als mittleren Fehler einer Rektaszension vom Gewichte 1 den Wert $\pm 0^s.0356 \sec\delta$, so wird der der Gewichtseinheit entsprechende Durchschnittsfehler für $\delta = +25°$ gleich $0^s.0313$; mit Hilfe des Quadrates dieses Wertes und der in der zweiten Kolumne angegebenen Quadrate erhält man die in der dritten Kolumne stehenden Gewichte.

n		Gewicht	n		Gewicht
3	0.000879	1	25	0.000167	6
6	475	2	50	119	8
10	313	3	80	100	10
15	232	4	100	094	10

Nachdem man mittels des im vorhergehenden erläuterten Verfahrens die den oben mit A, B, C, ... bezeichneten Katalogen zukommenden Gewichte bestimmt hat, lassen sich durch die Gleichungen (12) genauere Werte von α und δ finden; bildet man hierauf die Differenzen $\alpha - \alpha'_s = v_s$, $\alpha - \alpha'_a = v_a$, ..., $\delta - \delta'_s = v'_s$, $\delta - \delta'_a = v'_a$, ... (wo α'_s, α'_a, ... die auf S. 273 angegebene Bedeutung haben), und bezeichnet man mit m die Anzahl der zur Ableitung der Koordinaten eines Sterns benutzten Kataloge, so ergibt sich, wenn ε, bzw. ε' den mittleren Fehler einer Rektaszension, bzw. Deklination vom Gewicht 1 bedeutet,

$$(14) \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\omega_o v_s^2 + \omega_a v_a^2 + \omega_b v_b^2 + \cdots}{m-1}}, \qquad \varepsilon' = \pm\sqrt{\frac{u_o v_s'^2 + u_a v_a'^2 + u_b v_b'^2 + \cdots}{m-1}}$$

Für den mittleren Fehler von α, bzw. δ erhält man demnach

$$(15) \qquad \varepsilon_\alpha = \pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega_o + \omega_a + \omega_b + \cdots}}, \qquad \varepsilon_\delta = \pm\frac{\varepsilon'}{\sqrt{u_o + u_a + u_b + \cdots}}$$

Ein in der vorhin für einen einzelnen Stern beschriebenen Weise mit Hilfe mehrerer Kataloge gebildetes Verzeichnis von Sternpositionen bezeichnet man als Fundamentalkatalog. Man denke sich jetzt, daß im Laufe eines Jahrhunderts alle Kataloge, deren mittlere Epochen beispielsweise demselben Jahrzehnt angehören, zur Aufstellung je eines Fundamentalkatalogs benutzt worden wären, und daß nun ein auf allen diesen Fundamentalkatalogen beruhender neuer Katalog gebildet werden solle. Um dieses Ziel zu erreichen, reduziere man die in den Fundamentalkatalogen enthaltenen Positionen zunächst auf das der Mitte des Jahrhunderts (t_o) entsprechende Äquinox und gleiche die damit erhaltenen Koordinaten α und δ durch die Formeln aus

$$(16) \qquad \alpha = \alpha_o + \Delta\alpha_o + \mu(t - t_o), \qquad \delta = \delta_o + \Delta\delta_o + \nu(t - t_o),$$

wo α_o und δ_o Näherungswerte der für die Epoche t_o gültigen Rektaszension, bzw. Deklination, $\Delta\alpha_o$ und $\Delta\delta_o$ die Korrektionen von α_o, bzw. δ_o, und μ und ν die jährliche Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination bedeuten.

Sind μ und ν groß, so setze man $\mu = \mu_o + \Delta\mu_o$, $\nu = \nu_o + \Delta\nu_o$, wo mit μ_o und ν_o Näherungswerte bezeichnet werden sollen; bildet man dann die Produkte

$$(17) \qquad \begin{aligned} -\mu_o\nu_o \sin 1'' \operatorname{tang}\delta_o(t - t_o)^2 &= \pi_1, \\ \tfrac{1}{2}(15\mu_o)^2 \sin 1'' \sin\delta_o \cos\delta_o (t - t_o)^2 &= \pi_2, \end{aligned}$$

so lauten die zur Bestimmung von $\Delta\alpha_o$, $\Delta\delta_o$, $\Delta\mu_o$ und $\Delta\nu_o$ dienenden Bedingungsgleichungen (S. 150)

$$(18) \qquad \begin{aligned} \Delta\alpha_o + \Delta\mu_o(t - t_o) &= \alpha - \alpha_o + \pi_1 - \mu_o(t - t_o) \\ \Delta\delta_o + \Delta\nu_o(t - t_o) &= \delta - \delta_o + \pi_2 - \nu_o(t - t_o) \end{aligned}$$

Die mit Hilfe der Gleichungen (16), bzw. (18) erhaltenen Werte $\alpha_o + \Delta\alpha_o$, $\delta_o + \Delta\delta_o$, μ, ν, bzw. $\mu_o + \Delta\mu_o$, $\nu_o + \Delta\nu_o$ stellen die wahrscheinlichsten Werte der Rektaszension und Deklination, bzw. der Eigenbewegung dar; nachdem man diese für alle in den neuen Fundamentalkatalog aufzunehmenden Sterne gefunden hat, ist die gestellte Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Die Reste, welche sich nach Substitution der für die Unbekannten gefundenen Werte in die Bedingungsgleichungen (16), bzw. (18) ergeben, stellen die Differenzen zwischen dem neuen Fundamentalkatalog und den zugrunde gelegten Fundamentalkatalogen dar; mit Hilfe dieser Differenzen lassen sich nach § 93[a] die zur Reduktion jedes einzelnen der ursprünglichen Fundamentalkataloge auf den neuen dienenden Tafeln bilden. Da die Differenzen zwischen den ursprünglichen Fundamentalkatalogen und den zu ihrer Bildung benutzten Katalogen bereits bekannt sind, so kann man jetzt auch für jeden dieser letzteren Kataloge eine Tafel aufstellen, mit der man alle in dem Kataloge enthaltenen Positionen (also auch die Positionen der nicht in die Fundamentalkataloge aufgenommenen Sterne) auf den neuen Fundamentalkatalog reduzieren kann.

Kapitel XV.

Bestimmung der Konstante der Lunisolarpräzession und der Eigenbewegung des Sonnensystems.

94. Bestimmung eines Näherungswertes der Konstante der Lunisolarpräzession. Aus den Gleichungen (106), (107) und (105) des § 31 folgt, wenn die von $l' \Delta\varepsilon$ und l'^3 abhängigen Glieder vernachlässigt werden, und der Buchstabe l' durch die nach S. 98 gleichbedeutende Bezeichnung $(-\psi)_t$ ersetzt wird,

$$\mathfrak{m} = (-\psi)_t \cos\varepsilon - (a)_t, \qquad \mathfrak{n} = (-\psi)_t \sin\varepsilon$$

Substituiert man hier für $(-\psi)_t$ und $(a)_t$ ihre auf S. 100, bzw. 101 gegebenen Ausdrücke, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \cos\varepsilon \left[5036''.84 + 0''.494 \frac{t_0 - 1850}{100} \right] \frac{t - t_0}{100} - \cdots \\ &\quad - \left[13''.417 - 1''.887 \frac{t_0 - 1850}{100} \right] \frac{t - t_0}{100} + \cdots \\ \mathfrak{n} &= \sin\varepsilon \left[5036''.84 + 0''.494 \frac{t_0 - 1850}{100} \right] \frac{t - t_0}{100} - \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Man bezeichne jetzt mit α_1, δ_1, bzw. α_2, δ_2, bzw. α_m, δ_m die auf das mittlere Äquinox zu den Zeiten t_1, bzw. t_2, bzw. $t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ bezogene Rektaszension und Deklination eines Sterns. Ferner verstehe man unter m_m und n_m die Werte, welche die in (1) enthaltenen Koeffizienten von $\frac{t - t_0}{100}$ für $t_0 = t_m$ annehmen, d. h. es sei, wenn ε_m den für die Zeit t_m gültigen Wert von ε bedeutet und zur Abkürzung

$$\begin{aligned} M_m &= 5036''.84 + 0''.494 \frac{t_m - 1850}{100} \\ A_m &= 13''.417 - 1''.887 \frac{t_m - 1850}{100} \end{aligned} \tag{2}$$

gesetzt wird,

$$
\begin{aligned}
m_m &= {}^1\Psi_m \cos\varepsilon_m - A_m \\
n_m &= {}^1\Psi_m \sin\varepsilon_m \\
\varepsilon_m &= 23^\circ 27' 31''.68 - 46''.837\,\frac{t_m - 1850}{100} - 0''.009\left(\frac{t_m - 1850}{100}\right)^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

Nach § 46 hat man dann bis auf inklusive Glieder zweiter Ordnung genau

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \alpha_1 + [m_m + n_m \sin\alpha_m \operatorname{tang}\delta_m]\,\frac{t_2 - t_1}{100} \\
\delta_2 &= \delta_1 + n_m \cos\alpha_m\,\frac{t_2 - t_1}{100}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Die in dem obigen Ausdruck für ${}^1\Psi_m$ enthaltene Konstante $5036''.84$, d. h. der für 1850.0 gültige und auf das tropische Jahrhundert als Zeiteinheit bezogene Wert der Konstante der Lunisolarpräzession ist unter Zuhilfenahme von Beobachtungen bestimmt worden. Wie nämlich im folgenden gezeigt werden wird, läßt sich aus den Beobachtungen direkt der einer Zeit t_m entsprechende Wert von ${}^1\Psi_m$ ableiten; bezeichnet man dann die gesuchte Konstante mit C, so folgt aus (2)

$$C = {}^1\Psi_m - 0''.494\,\frac{t_m - 1850}{100}$$

Zur genäherten Bestimmung von ${}^1\Psi_m$ berücksichtige man, daß durch Substitution des in (3) gegebenen Ausdrucks von n_m in die zweite Gleichung (4)

$$\delta_2 - \delta_1 = {}^1\Psi_m \sin\varepsilon_m \cos\alpha_m\,\frac{t_2 - t_1}{100}$$

erhalten wird. Sind nun die Werte, welche die Rektaszension und Deklination eines dem Äquator nahen Sterns, sowie die Schiefe der Ekliptik zu zwei weit voneinander entfernten Zeiten t_1 und t_2 haben, durch die Beobachtung bekannt, und setzt man $\alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\varepsilon_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, so läßt sich mit Hilfe der letzten Gleichung ${}^1\Psi_m$ berechnen.

Gegenwärtig ist der irgend einer Zeit t_m entsprechende Wert von ${}^1\Psi_m$ bereits ziemlich genau bekannt; man wendet daher die Beobachtungen nur mehr dazu an, eine Korrektion des für ${}^1\Psi_m$ angenommenen Wertes zu bestimmen. Das hierzu dienende Verfahren soll in den drei folgenden Paragraphen auseinandergesetzt und begründet werden. Da übrigens der in der obigen Gleichung für C enthaltene Koeffizient $0''.494$ als fehlerfrei betrachtet werden darf, so stellt die für ${}^1\Psi_m$ gefundene Korrektion gleichzeitig die an die Konstante der Lunisolarpräzession anzubringende Korrektion dar.

95. Einfluß einer Korrektion der Konstante der Lunisolarpräzession auf die Präzession in Rektaszension und Deklination. Um den für die Konstante der Lunisolarpräzession angenommenen Wert verbessern zu können, ist es erforderlich, daß für eine größere Zahl möglichst über den ganzen Himmel verteilter Sterne die auf das mittlere Äquinox zu den Zeiten t_1 und t_2 bezogenen Koordinaten α_1, δ_1, bzw. α_2, δ_2 gegeben seien. Mit Hilfe der Gleichungen (4) und der aus (2) und (3)

folgenden Konstanten m_m und n_m reduziere man zunächst α_1 und δ_1 auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_2; die so erhaltenen Werte der Rektaszension und Deklination mögen mit α'_0 und δ'_0 bezeichnet werden. Sind nun die für die Gleichungen (3) benutzten Werte von ${}^1\Psi_m$ und A_m fehlerhaft, so sind α'_0 und δ'_0 dementsprechend zu korrigieren. Es sei $d\,{}^1\Psi_m$ die Korrektion von ${}^1\Psi_m$. Was den Wert von A_m betrifft, so hängt derselbe von den planetarischen Störungen der Lage der Ekliptik ab und läßt sich auf theoretischem Wege weit genauer bestimmen, als dies mit Hilfe der Beobachtungen möglich wäre. Der durch die Theorie gegebene Wert von A_m setzt aber die Massen der Planeten als bekannt voraus. Diese sind gegenwärtig allerdings schon sehr genau bekannt; um jedoch einer späteren Verbesserung der heutzutage für die Planetenmassen gemachten Annahmen Rechnung tragen zu können, soll auch eine Korrektion dA_m eingeführt werden. Aus (3) erhält man dann zunächst als Korrektionen von m_m und n_m

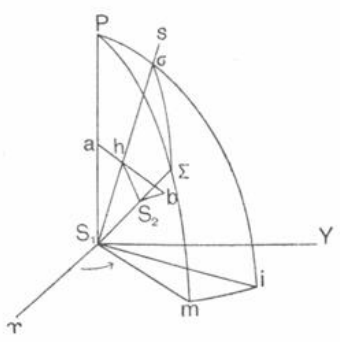
$$dm_m = d\,{}^1\Psi_m \cos\varepsilon_m - dA_m, \qquad dn_m = d\,{}^1\Psi_m \sin\varepsilon_m$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke ergibt sich aus (4), wenn die wegen der Fehler von ${}^1\Psi_m$ und A_m korrigierten Werte von α'_0 und δ'_0 mit α' und δ' bezeichnet werden,

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha'_0 + d\,{}^1\Psi_m\,(\cos\varepsilon_m + \sin\varepsilon_m \sin\alpha_m \operatorname{tang}\delta_m)\,\frac{t_2 - t_1}{100} - dA_m\,\frac{t_2 - t_1}{100} \\ \delta' &= \delta'_0 + d\,{}^1\Psi_m \sin\varepsilon_m \cos\alpha_m\,\frac{t_2 - t_1}{100} \end{aligned}$$

96. Berücksichtigung der Eigenbewegung des Sonnensystems. Wenn die Differenzen zwischen den heliozentrischen Koordinaten α_2 und α_1, bzw. δ_2 und δ_1 nur von der innerhalb des Zeitintervalls $t_2 - t_1$ stattfindenden Änderung der Lage des Äquators, bzw. des Äquinoktiums herrührten, so würden die durch die Gleichungen (5) bestimmten Koordinaten α' und δ' den beobachteten Werten α_2 und δ_2 gleich gesetzt werden können. Anders aber verhält sich die Sache, wenn sich das Sonnensystem im Raume fortbewegt. In Fig. 1 seien S_1 und S_2 die Örter der Sonne zu den Zeiten t_1 und t_2. Durch S_2 denke man sich drei zueinander senkrechte Gerade gezogen*), von denen die erste zu dem der Zeit t_2 entsprechenden mittleren Äquinox, die zweite zu einem dem mittleren Äquator zur Zeit t_2 angehörigen Punkte von der Rektaszension 90°, und die dritte zu dem der Zeit t_2 entsprechenden mittleren Ort des Pols gerichtet sein soll; parallel zu diesen drei Richtungen ziehe man $S_1\gamma$, $S_1 Y$ und $S_1 P$. Es sei jetzt s der Ort eines Sterns im Raume und σ sein Ort an der Sphäre, gesehen von S_1 aus; ist dann $S_1 i$ die Schnittlinie der Ebene $PS_1\sigma$ mit der Ebene des Äquators, so geben $\gamma S_1 i$ und $i S_1 \sigma$ die Werte der Rektaszension und Deklination des Sterns, gesehen von dem Orte der Sonne zur Zeit t_1, aber

Fig. 1.



*) In Fig. 1 nicht gezeichnet.

bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinox zur Zeit t_2 an. Da diese aber gleich den aus (5) folgenden Werten von α' und δ' sind, so hat man $\gamma S_1 i = \alpha'$ und $i S_1 \sigma = \delta'$. Die Richtung $S_1 S_2$ der Bewegung des Sonnensystems treffe die Sphäre im Punkte Σ, und es sei $S_1 m$ die Durchschnittslinie der Ebene $P S_1 \Sigma$ mit der Ebene $\gamma S_1 Y$ des Äquators; wenn dann $\gamma S_1 m = A$ und $m S_1 \Sigma = D$ gesetzt wird, so bedeutet A die Rektaszension und D die Deklination des Zielpunktes der Sonnenbewegung. Man ziehe jetzt $S_2 b$ senkrecht zu der Ebene $P S_1 i$, und ziehe in dieser Ebene die Gerade bha senkrecht zu $S_1 \sigma$; verbindet man dann den Durchschnittspunkt h der Geraden bha und des Radiusvektors $S_1 \sigma$ mit S_2, so steht $h S_2$ senkrecht zu $S_1 \sigma$.

Die in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ von der Sonne durchlaufene Strecke $S_1 S_2$ kann man nun als die Resultante der drei Komponenten $S_1 h$, hb und $b S_2$ betrachten. Wird $S_1 S_2 = Q$ und der Winkel $\sigma S_1 \Sigma = \Delta$ gesetzt, so ist $S_1 h = Q \cos \Delta$ und $S_2 h = Q \sin \Delta$. In Anbetracht der großen Entfernung der Fixsterne unterscheidet sich $S_1 h$ nur wenig von $s S_1 - s S_2$; wenn also $s S_1 = \varrho$ und $s S_2 = \varrho + d\varrho$ gesetzt wird, so hat man

$$d\varrho = - Q \cos \Delta \tag{6}$$

Ferner erhält man, wenn der Winkel $ah S_2 = x$, also $S_2 hb = 180^\circ - x$ gesetzt wird, $b S_2 = S_2 h \sin x = Q \sin \Delta \sin x$ und $hb = - S_2 h \cos x = - Q \sin \Delta \cos x$. Die Komponente $b S_2$ der Sonnenbewegung hat zur Folge, daß der Stern s um den in Teilen des Radius ausgedrückten Winkel $\frac{S_2 b}{s S_2}$ senkrecht zu der Ebene $P S_1 i$, und zwar in der zu $b S_2$ entgegengesetzten Richtung, also in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen hin verschoben erscheint. Setzt man $s S_2 = s S_1 = \varrho$ und substituiert für $S_2 b$ den vorhin gefundenen Wert, so ergibt sich für die Verschiebung der Ausdruck $Q \sin \Delta \sin x : \varrho$; dies ist auch die ganze senkrecht zur Ebene $P S_1 i$ stattfindende Verschiebung, welche der Stern infolge der Bewegung der Sonne von S_1 nach S_2 erleidet, denn die Komponenten $S_1 h$ und hb der Sonnenbewegung bewirken nur eine Verschiebung in der Ebene $P S_1 i$. Wenn aber die von S_2 aus gesehene Rektaszension von s mit $\alpha' + d\alpha'$ bezeichnet wird, so läßt sich die senkrecht zur Ebene $P S_1 i$ stattfindende Verschiebung des Sterns auch durch $\cos \delta' d\alpha'$ ausdrücken; man hat demnach

$$\cos \delta' d\alpha' = \frac{Q}{\varrho} \sin \Delta \sin x \tag{7}$$

Die in der Ebene $P S_1 i$ liegende und zu $S_1 \sigma$ senkrechte Komponente hb der Sonnenbewegung hat zur Folge, daß der Stern um den in Teilen des Radius ausgedrückten Winkel $\frac{hb}{sb}$ in der Ebene $P S_1 i$, und zwar in der zu hb entgegengesetzten Richtung, also im Sinne der wachsenden Deklinationen verschoben erscheint; setzt man hier $sb = s S_1 = \varrho$ und substituiert für hb seinen oben gefundenen Wert, so erhält man für die Verschiebung des Sterns den Ausdruck $- Q \sin \Delta \cos x : \varrho$. Wenn aber die von b aus oder — was gleichbedeutend ist — die von S_2 aus gesehene Dekli-

nation von s mit $\delta' + d\delta'$ bezeichnet wird, so läßt sich die zuletzt berechnete Verschiebung auch durch $d\delta'$ ausdrücken; somit folgt .

$$d\delta' = -\frac{Q}{\varrho} \sin \Delta \cos x \tag{8}$$

Mit Zuhilfenahme des sphärischen Dreiecks $P\Sigma\sigma$, worin $\Sigma\sigma = \Delta$, $P\sigma = 90^\circ - \delta'$, $P\Sigma = 90^\circ - D$, ferner der Winkel bei P gleich $\alpha' - A$ und der Winkel bei σ gleich x ist, lassen sich $\sin \Delta \sin x$, $\sin \Delta \cos x$ und $\cos \Delta$ berechnen; substituiert man die so gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (7), (8) und (6), so erhält man

$$\begin{aligned} d\alpha' &= \frac{Q}{\varrho} \cos D \sin(\alpha' - A) \sec \delta' \\ d\delta' &= -\frac{Q}{\varrho} [\cos \delta' \sin D - \sin \delta' \cos D \cos(\alpha' - A)] \\ d\varrho &= -Q [\sin \delta' \sin D + \cos \delta' \cos D \cos(\alpha' - A)] \end{aligned} \tag{8a}$$

Es werde jetzt die jährliche lineare Bewegung der Sonne mit q bezeichnet. Man hat dann

$$Q = q(t_2 - t_1),$$

und es stellt $\frac{q}{\varrho}$ die jährliche Winkelgeschwindigkeit der Sonne, gesehen von einem Stern in der Entfernung ϱ, dar. Substituiert man den für Q erhaltenen Ausdruck in die Gleichungen (8a) und setzt zur Abkürzung

$$X = q \cos D \cos A, \qquad Y = q \cos D \sin A, \qquad Z = q \sin D, \tag{9}$$

so folgt

$$\begin{aligned} d\alpha' &= \left[\frac{X}{\varrho} \sin \alpha' - \frac{Y}{\varrho} \cos \alpha'\right] \sec \delta' (t_2 - t_1) \\ d\delta' &= \left[\frac{X}{\varrho} \cos \alpha' \sin \delta' + \frac{Y}{\varrho} \sin \alpha' \sin \delta' - \frac{Z}{\varrho} \cos \delta'\right] (t_2 - t_1) \\ d\varrho &= -[X \cos \alpha' \cos \delta' + Y \sin \alpha' \cos \delta' + Z \sin \delta'] (t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{10}$$

97. Bestimmung der Korrektion eines Näherungswertes der Konstante der Lunisolarpräzession sowie der Größe und Richtung der Bewegung des Sonnensystems. Den beiden vorhergehenden Paragraphen zufolge wird die Rektaszension und Deklination eines zu der Zeit t_1 beobachteten Sterns, bezogen auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_2 und gesehen von dem Ort der Sonne zur Zeit t_2, gleich $\alpha' + d\alpha'$, bzw. $\delta' + d\delta'$, wo für α', δ', $d\alpha'$ und $d\delta'$ ihre in (5) und (10) gegebenen Ausdrücke zu substituieren sind. Dabei ist jedoch stillschweigend vorausgesetzt, daß der Stern in dem Zeitintervall $t_2 - t_1$ seinen Ort nicht ändert. Unter der Annahme nun, daß auch die Sterne sich im Raume bewegen, und daß infolgedessen die Rektaszension und Deklination eines Sterns sich jährlich um μ, bzw. ν ändert, hat man zu $\alpha' + d\alpha'$ und $\delta' + d\delta'$ noch $\mu(t_2 - t_1)$, bzw. $\nu(t_2 - t_1)$ zu addieren, um den Ort des Sterns zur Zeit t_2 zu erhalten. Bezeichnet man also wieder mit α_2 und δ_2 die zur Zeit t_2

beobachtete und auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_2 bezogene Rektaszension und Deklination, so müßte, wenn man von den zufälligen Beobachtungsfehlern absieht,

$$(11) \qquad \alpha_2 = \alpha' + d\alpha' + \mu(t_2 - t_1), \qquad \delta_2 = \delta' + d\delta' + \nu(t_2 - t_1)$$

sein. Wie aber im vorigen Kapitel auseinandergesetzt ist, sind die Beobachtungen auch mit systematischen Fehlern behaftet. Bedeuten nun c_α und c_δ die Korrektionen, welche an die zur Zeit t_1 beobachteten Koordinaten anzubringen sind, wenn letztere mit den zur Zeit t_2 erhaltenen Koordinaten homogen werden sollen, so hat man die Gleichungen (11) durch die folgenden zu ersetzen

$$(12) \qquad \begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha' + d\alpha' + \mu(t_2 - t_1) + c_\alpha \\ \delta_2 &= \delta' + d\delta' + \nu(t_2 - t_1) + c_\delta \end{aligned}$$

Substituiert man jetzt für α', δ', $d\alpha'$, $d\delta'$ ihre in (5) und (10) gegebenen Ausdrücke, wobei man aber in (10) α' und δ' mit α_m und δ_m vertauschen kann, so erhält man

$$(13) \qquad \begin{aligned} &(\cos\varepsilon_m \cos\delta_m + \sin\varepsilon_m \sin\delta_m \sin\alpha_m)\frac{d\Psi_m}{100} + \frac{X}{\varrho}\sin\alpha_m - \frac{Y}{\varrho}\cos\alpha_m = \\ &\qquad = \frac{\alpha_2 - \alpha'_0}{t_2 - t_1}\cos\delta_m - \left(\mu - \frac{dA_m}{100} + \frac{c_\alpha}{t_2 - t_1}\right)\cos\delta_m \\ &\sin\varepsilon_m \cos\alpha_m \frac{d\Psi_m}{100} + \frac{X}{\varrho}\cos\alpha_m \sin\delta_m + \frac{Y}{\varrho}\sin\alpha_m \sin\delta_m - \frac{Z}{\varrho}\cos\delta_m = \\ &\qquad = \frac{\delta_2 - \delta'_0}{t_2 - t_1} - \left(\nu + \frac{c_\delta}{t_2 - t_1}\right) \end{aligned}$$

Wären nun die Bewegungen gar keinem Gesetz unterworfen, so würden die auf der rechten Seite der letzten Gleichungen vorkommenden μ und ν bald positiv, bald negativ sein; falls also die Anzahl der benutzten Sterne groß ist, und Sterne mit ausnahmsweise großer Bewegung ausgeschlossen werden, könnte man annehmen, daß sowohl die Werte von μ als diejenigen von ν sich gegenseitig aufheben. Ist diese Annahme richtig, so kann man in den Gleichungen (13) auch einfach $\mu = \nu = 0$ setzen; führt man dann außerdem noch die Abkürzungen ein

$$\Delta\mathfrak{a} = \frac{\alpha_2 - \alpha'_0}{t_2 - t_1}, \qquad \Delta\mathfrak{d} = \frac{\delta_2 - \delta'_0}{t_2 - t_1},$$

so folgt

$$(14^a) \qquad \begin{aligned} &(\cos\varepsilon_m \cos\delta_m + \sin\varepsilon_m \sin\delta_m \sin\alpha_m)\frac{d\Psi_m}{100} + \frac{X}{\varrho}\sin\alpha_m - \frac{Y}{\varrho}\cos\alpha_m = \\ &\qquad = \Delta\mathfrak{a}\cos\delta_m + \left(\frac{dA_m}{100} - \frac{c_\alpha}{t_2 - t_1}\right)\cos\delta_m \end{aligned}$$

$$(14^b) \qquad \begin{aligned} &\sin\varepsilon_m \cos\alpha_m \frac{d\Psi_m}{100} + \frac{X}{\varrho}\cos\alpha_m \sin\delta_m + \frac{Y}{\varrho}\sin\alpha_m \sin\delta_m - \frac{Z}{\varrho}\cos\delta_m = \\ &\qquad = \Delta\mathfrak{d} - \frac{c_\delta}{t_2 - t_1} \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen auflösen zu können, muß man die Werte von ϱ, d. h. die Entfernungen der Sterne kennen; da diese aber unbekannt sind, so ist man gezwungen, eine Hypothese zu machen. Man kann nun beispielsweise annehmen, daß gleich helle Sterne im Durchschnitt auch gleich weit von uns entfernt sind. Ist letzteres wirklich der Fall, so würde man alle Gleichungen, welche sich auf die Sterne von den Größen m bis $m+1$, $m+1$ bis $m+2$, ... beziehen, in je eine Gruppe vereinigen und jeder Gruppe einen mittleren Wert von ϱ beilegen können; mit Rücksicht aber darauf, daß eine solche Annahme sich nur dann einigermaßen rechtfertigen läßt, wenn die Zahl der auf eine Größenklasse entfallenden Sterne groß ist, wird man die Gleichungen, welche sich auf die verhältnismäßig kleine Zahl der den 2 oder 3 ersten Größenklassen angehörigen Sterne beziehen, am besten überhaupt nicht benutzen. Man denke sich nun für sämtliche Sterne einer bestimmten Größenklasse die Gleichungen (14^a) und (14^b) gebildet und nach der Deklination der Sterne geordnet. Nimmt man dann an, daß c_α und c_δ für alle innerhalb einer Zone von beispielsweise 15° oder 30° Breite gelegenen Sterne konstant sind, und bildet zur Vereinfachung der Rechnung für alle Sterne einer Zone, deren Rektaszensionen z. B. zwischen 0^h und 2^h, 2^h und 4^h, usw. liegen, je ein Mittel aus den Gleichungen (14^a), bzw. (14^b), so kann man aus diesen 24 Mitteln die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $\frac{d\Psi_m}{100}$, $\frac{X}{\varrho}$, $\frac{Y}{\varrho}$ und $\frac{Z}{\varrho}$, als Funktionen von dA_m, c_α und c_δ ausgedrückt, ableiten. So z. B. erhält man aus (14^a), wenn a und b Konstanten bedeuten,

$$\frac{d\Psi_m}{100} = a + b\left(\frac{dA_m}{100} - \frac{c_\alpha}{t_2 - t_1}\right) \tag{15^a}$$

und aus (14^b), wenn mit a' und b' ebenfalls Konstanten bezeichnet werden,

$$\frac{d\Psi_m}{100} = a' + b'\,\frac{c_\delta}{t_2 - t_1} \tag{15^b}$$

Ähnliche Gleichungen folgen für $\frac{X}{\varrho}$, $\frac{Y}{\varrho}$ und $\frac{Z}{\varrho}$. Die in dieser Weise aus den einzelnen Zonen sich ergebenden Werte der Unbekannten $\frac{d\Psi_m}{100}$, $\frac{X}{\varrho}$, ... sind sodann noch in Mittelwerte zu vereinigen. Setzt man endlich in den für $\frac{X}{\varrho}$, $\frac{Y}{\varrho}$ und $\frac{Z}{\varrho}$ gefundenen Ausdrücken $dA_m = c_\alpha = c_\delta = 0$, und substituiert die damit erhaltenen Werte in die durch ϱ dividierten Gleichungen (9), so erhält man A, D und $\frac{q}{\varrho}$.

Um den Nutzen zu erläutern, den man aus der Darstellung der Unbekannten $\frac{d\Psi_m}{100}$, $\frac{X}{\varrho}$, ... als Funktionen von $\frac{dA_m}{100}$, c_α, ... ziehen kann, nehme man an, daß man mit Benutzung der in zwei Sternkatalogen gegebenen Rektaszensionen die Gleichung

$$\frac{d\Psi_m}{100} = -\,0''.015 + 0.8\left(\frac{dA_m}{100} - \frac{c_\alpha}{t_2 - t_1}\right)$$

gefunden habe, und daß nun spätere Untersuchungen zu dem Resultat führen, daß alle Rektaszensionen des der Epoche t_1 entsprechenden Katalogs die konstante Korrektion $c_\alpha = +0^s.05 = +0''.75$ erfordern. Ist die Epochendifferenz $t_2 - t_1$ beispielsweise gleich 50 Jahre, so wird jetzt $\frac{c_\alpha}{t_2 - t_1} = +0''.015$; durch Substitution dieses Wertes in die obige Gleichung ergibt sich sofort der korrigierte Wert

$$\frac{d^2\Psi_m}{100} = -0''.027 + 0.8\,\frac{dA_m}{100}$$

Im vorigen ist angenommen worden, daß man für jeden Stern zwei den Epochen t_1 und t_2 zugehörige mittlere Positionen kenne. Sind aber die Sterne häufiger beobachtet worden, so reduziere man alle Positionen auf dasselbe Äquinox und leite nun für jeden Stern die jährliche Eigenbewegung in Rektaszension und Deklination ab. In den Gleichungen (14^a) und (14^b) lassen sich dann an Stelle von $\Delta\mathfrak{a}$ und $\Delta\mathfrak{d}$ die erhaltenen Eigenbewegungen anwenden, gleichzeitig sind für α_m und δ_m die auf ein der mittleren Epoche der Eigenbewegungen nahe gelegenes Äquinox bezogenen Koordinaten zu substituieren. Setzt man ferner

$$\frac{dA_m}{100} - \frac{c_\alpha}{t_2 - t_1} = k, \qquad \frac{c_\delta}{t_2 - t_1} = l,$$

so hat man unter k und l systematische Korrektionen der angewandten Eigenbewegungen zu verstehen. Die Gleichungen wird man wieder in Gruppen vereinigen; dabei kann man entweder wie vorhin annehmen, daß im Durchschnitt gleich helle Sterne gleichweit von uns entfernt sind, oder aber man kann die Annahme machen, daß nicht die Helligkeit der Sterne, sondern die Größe ihrer Eigenbewegung das Maß für die Entfernung bildet. Im letzten Falle leitet man mit Hilfe der Komponenten $\Delta\mathfrak{a}$, $\Delta\mathfrak{d}$ der Eigenbewegung und unter Benutzung der Gleichungen

$$\Delta s \sin p = \Delta\mathfrak{a} \cos\delta_m, \qquad \Delta s \cos p = \Delta\mathfrak{d}$$

den jedem Stern zugehörigen Wert (Δs) der Eigenbewegung im größten Kreise ab, und legt nun allen Sternen, für welche Δs innerhalb passend gewählter Grenzen liegt, eine und dieselbe mittlere Entfernung bei; die diesen Sternen entsprechenden Bedingungsgleichungen lassen sich dann zur Bestimmung von $d^2\Psi_m$, $\frac{X}{\varrho}$, $\frac{Y}{\varrho}$ und $\frac{Z}{\varrho}$ benutzen. Was die Sicherheit dieser Werte betrifft, so ist im Auge zu behalten, daß bei der Aufstellung der Gleichungen (14^a) und (14^b) die den Sternen eigentümlichen Bewegungen (deren Komponenten mit μ und ν bezeichnet wurden) als regellos angenommen worden sind. Diese Annahme entspricht gewiß nicht der Wirklichkeit; da uns aber die in den Bewegungen vorhandenen Gesetze ganz unbekannt sind, so ist man vorläufig noch genötigt, die Bewegungen der Sterne so zu behandeln, als wären sie regellos.

98. Bestimmung der Größe und Richtung der Bewegung des Sonnensystems mit Hilfe spektroskopischer Beobachtungen. Mittels eines Spektroskops läßt sich die Geschwindigkeit bestimmen, mit der sich ein Stern auf einen Beobachter zu- oder von ihm fortbewegt. Befreit man diese Geschwindigkeit von dem Einfluß der Drehung der Erde um ihre Achse, sowie von dem der jährlichen Bewegung der Erde, so erhält man die Komponente der Geschwindigkeit, mit der sich der Stern relativ zur Sonne bewegt, bezogen auf die Verbindungslinie des Sterns mit der Sonne. Die hier angegebene Reduktion wird bereits vom Beobachter ausgeführt. Bezeichnet man nun eine solche Geschwindigkeitskomponente oder die sogenannte radiale Geschwindigkeit mit G, so ist G die Resultante aus der durch die dritte der Gleichungen (10) bestimmten Komponente $d\varrho : (t_2 - t_1)$ und der in die Verbindungslinie des Sterns mit der Sonne fallenden Komponente g der Geschwindigkeit des Sterns im Raum; man hat also

$$G = -\left[X \cos \alpha_m \cos \delta_m + Y \sin \alpha_m \cos \delta_m + Z \sin \delta_m\right] + g$$

Macht man jetzt wieder die Annahme, daß in den Bewegungen der Sterne keine Gesetzmäßigkeit herrscht, und daß demnach die Werte von g bald positiv, bald negativ sind, so kann man g ganz vernachlässigen und somit aus einer großen Zahl von Sternen X, Y und Z bestimmen; mit Hilfe der Gleichungen (9) erhält man dann weiterhin A, D und q. Da die von den Beobachtern angegebenen Geschwindigkeiten in Kilometern ausgedrückt sind und sich auf die mittlere Zeitsekunde als Einheit der Zeit beziehen, so bezieht sich auch der für q erhaltene Wert auf diese Einheiten.

Kapitel XVI.

Bestimmung der Nutationskonstante, der Aberrationskonstante und der Parallaxe eines Sterns.

99. Aus der zur Zeit t beobachteten Rektaszension und Deklination eines Sterns habe man durch Rechnung die auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_1 bezogene, und auch auf die Epoche t_1 reduzierte Rektaszension (α_1), bzw. Deklination (δ_1) abgeleitet; $\Delta\nu$ sei die Korrektion der angenommenen Nutationskonstante, Δk die Korrektion der Aberrationskonstante, π die Parallaxe des Sterns, Δe die Korrektion der Eigenbewegung in Rektaszension und $\Delta e'$ die Korrektion der Eigenbewegung in Deklination. Wenn man jetzt die mittlere Länge des Mondknotens, bzw. der Sonne zur Zeit der Beobachtung mit Ω, bzw. L, den Radiusvektor der Sonne mit R und die Schiefe der Ekliptik mit ε bezeichnet, wenn ferner

$$(1)\qquad \begin{aligned} u\sin U &= -1.000\cos\alpha_1 & v\sin V &= +0.129\cos\alpha_1\\ u\cos U &= -0.744\sin\alpha_1 & v\cos V &= +0.119\sin\alpha_1 \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} u'\sin U' &= +1.000\sin\alpha_1 & v'\sin V' &= -0.129\sin\alpha_1\\ u'\cos U' &= -0.744\cos\alpha_1 & v'\cos V' &= +0.119\cos\alpha_1 \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \eta &= -1.72\sin\Omega + 0.28\sin 2L + [u\sin(\Omega+U) + v\sin(2L+V)]\tang\delta_1\\ \zeta &= u'\sin(\Omega+U') + v'\sin(2L+V') \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{m}\sin\mathfrak{M} &= \sin\alpha_1 & \mathfrak{n}\sin\mathfrak{N} &= \cos\alpha_1\sin\delta_1\\ \mathfrak{m}\cos\mathfrak{M} &= \cos\varepsilon\cos\alpha_1 & \mathfrak{n}\cos\mathfrak{N} &= \sin\varepsilon\cos\delta_1 - \cos\varepsilon\sin\alpha_1\sin\delta_1 \end{aligned}$$

gesetzt wird, und $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{d}_1$ die strengen Werte der mittleren Rektaszension und Deklination des Sterns zur Zeit t_1 bedeuten, so hat man zufolge der Gleichungen § 51, (41) und (41ª), § 60, (11) und § 52 (5)

$$(5)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \mathfrak{a}_1 + \eta\Delta\nu - [\mathfrak{m}\cos(\odot-\mathfrak{M})\sec\delta_1]\Delta k + [R\mathfrak{m}\sin(\odot-\mathfrak{M})\sec\delta_1]\pi + (t-t_1)\Delta e\\ \delta_1 &= \mathfrak{d}_1 + \zeta\Delta\nu - [\mathfrak{n}\cos(\odot-\mathfrak{N})]\Delta k + [R\mathfrak{n}\sin(\odot-\mathfrak{N})]\pi + (t-t_1)\Delta e' \end{aligned}$$

Man setze nun $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^{(0)} + \Delta\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_1^{(0)} + \Delta\mathfrak{d}$, wo $\mathfrak{a}_1^{(0)}$ und $\mathfrak{d}_1^{(0)}$ Näherungswerte bedeuten sollen; ferner setze man

$$(6)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 - \mathfrak{a}_1^{(0)} &= n_\alpha, & \delta_1 - \mathfrak{d}_1^{(0)} &= n_\delta\\ -\mathfrak{m}\cos(\odot-\mathfrak{M})\sec\delta_1 &= u, & -\mathfrak{n}\cos(\odot-\mathfrak{N}) &= u'\\ R\mathfrak{m}\sin(\odot-\mathfrak{M})\sec\delta_1 &= v, & R\mathfrak{n}\sin(\odot-\mathfrak{N}) &= v' \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) nehmen dann die Form an

$$(7)\qquad \begin{aligned} n_\alpha &= \Delta\mathfrak{a} + \eta\Delta\nu + u\Delta k + v\pi + (t-t_1\Delta)e\\ n_\delta &= \Delta\mathfrak{d} + \zeta\Delta\nu + u'\Delta k + v'\pi + (t-t_1)\Delta e' \end{aligned}$$

Wie die zur Berechnung von η und ζ dienenden Ausdrücke (1), (2) und (3) lehren, sind für die Werte der Koeffizienten von $\Delta\nu$ hauptsächlich die von Ω abhängigen Glieder maßgebend; da nun der Mondknoten nahezu 19 Jahre gebraucht, um einmal die Ekliptik zu durchlaufen, so ist eine ebensolange Beobachtungsreihe notwendig, um die Korrektion der Nutationskonstante mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmen zu können. Mit Hilfe einer solchen Beobachtungsreihe kann man dann gleichzeitig auch Δk und π finden. Im allgemeinen sind die Eigenbewegungen der Sterne, deren man sich zur Bestimmung der Nutationskonstante bedient, bereits ziemlich genau bekannt; indem man aber die aus (7) folgenden Normalgleichungen dazu benutzt, $\Delta\mathfrak{a}$, $\Delta\mathfrak{d}$, $\Delta\nu$, Δk und π als Funktionen von Δe und $\Delta e'$ darzustellen, kann man den Einfluß einer späterhin sich etwa als notwendig erweisenden Verbesserung der angenommenen Eigenbewegung leicht berücksichtigen.

Will man nur die Korrektion der Aberrationskonstante und die Parallaxe bestimmen, so genügt bereits eine einjährige Beobachtungsreihe. Innerhalb eines Jahres, und selbst für zwei oder drei Jahre kann man die von $\Delta\nu$ abhängigen Glieder als konstant betrachten; setzt man demgemäß

$$\Delta\mathfrak{a} + \eta\Delta\nu = C_\alpha, \qquad \Delta\mathfrak{d} + \zeta\Delta\nu = C_\delta, \tag{8}$$

wo nun C_α und C_δ neue Konstanten bedeuten, so werden die Gleichungen (7)

$$\begin{aligned} n_\alpha &= C_\alpha + u\Delta k + v\pi + (t - t_1)\Delta e \\ n_\delta &= C_\delta + u'\Delta k + v'\pi + (t - t_1)\Delta e' \end{aligned} \tag{9}$$

Die Koeffizienten von Δk erreichen ihre Maximalwerte für $\odot = \mathfrak{M}$ oder $\odot = 180^\circ + \mathfrak{M}$, bzw. $\odot = \mathfrak{N}$ oder $\odot = 180^\circ + \mathfrak{N}$; zur selben Zeit verschwinden aber die Koeffizienten von π. Um also Δk möglichst genau zu erhalten, wird man die Sterne in der Nähe der Zeiten beobachten, zu denen die Sonnenlänge die angegebenen Werte hat. Die für die Bestimmung der Parallaxe dienenden Beobachtungen werden am besten um die Zeiten herum angestellt, wo $\odot = 90^\circ + \mathfrak{M}$ oder $\odot = 270^\circ + \mathfrak{M}$, bzw. $\odot = 90^\circ + \mathfrak{N}$ oder $\odot = 270^\circ + \mathfrak{N}$ ist.

[Über die Bestimmung der Parallaxen der Komponenten eines Sternstroms siehe § 57[a].]

Kapitel XVII.

Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns.

100. Einleitung. Die durch die Bewegung der Erde um die Sonne hervorgerufenen parallaktischen Verschiebungen der Fixsterne sind, wenn man von vereinzelten Fällen absieht, so außerordentlich klein, daß sie bei der Bestimmung absoluter Sternpositionen ganz oder fast ganz durch die zufälligen, bzw. systematischen Beobachtungsfehler verdeckt werden. Dagegen kann man durch mikrometrische Messungen die Unterschiede der parallaktischen Verschiebungen einander benachbarter Sterne mit verhältnismäßig großer Sicherheit bestimmen und hieraus die relative Parallaxe eines der Sterne, d. h. die Differenz zwischen seiner Parallaxe und dem Mittel der Parallaxen der übrigen Sterne berechnen. Die relative Parallaxe eines Sterns wird aber im allgemeinen nur wenig von der absoluten verschieden sein, wenn man als Vergleichsterne schwache Sterne mit geringer Eigenbewegung wählt; denn die bisher gemachten Erfahrungen zeigen übereinstimmend, daß die parallaktischen Verschiebungen solcher Sterne äußerst klein sind.

Zur Bestimmung der relativen Parallaxe eines Fixsterns bedient man sich am besten eines Heliometers, und zwar mißt man entweder die Distanz des Sterns von einigen in seiner Nähe befindlichen schwachen Sternen mit kleiner Eigenbewegung, oder auch die Positionswinkel der durch diese Sterne und den zu untersuchenden Stern gehenden Bögen größten Kreises; außerdem eignen sich zu dem genannten Zweck noch die mit Hilfe eines Meridiankreises beobachteten Rektaszensionsdifferenzen*). Die nähere Erläuterung dieser Methoden ist in den drei folgenden Paragraphen enthalten, zuvor sollen aber noch die Formeln zusammengestellt werden, mit Hilfe deren man den Winkel zwischen dem Deklinations- und Breitenkreise eines Sterns finden kann. Man beginnt damit, die Länge und Breite des Sterns abzuleiten. Hierzu dienen die folgenden aus § 18 entnommenen Gleichungen, in denen α und δ die Rektaszension und Deklination des Sterns, ε die Schiefe der Ekliptik, λ und β die gesuchte Länge und Breite bedeuten.

$$(1)\qquad \begin{aligned} f\sin F &= \sin\delta & \sin\beta &= f\sin(F-\varepsilon)\\ f\cos F &= \cos\delta\sin\alpha & \cos\beta\sin\lambda &= f\cos(F-\varepsilon)\\ & & \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned}$$

Wird nun der Winkel zwischen dem Deklinations- und Breitenkreise des Sterns mit z bezeichnet, so hat man nach § 18

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sin h\sin y &= \sin\lambda & \sin h\sin(y+z) &= \sin\alpha\\ \sin h\cos y &= -\cos\lambda\sin\beta & \sin h\cos(y+z) &= -\cos\alpha\sin\delta \end{aligned}$$

*) Bezüglich der Anwendung der Sternphotographie muß auf die hierüber handelnden Spezialarbeiten verwiesen werden.

101. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Distanzbeobachtungen. In § 53 wurde gezeigt, daß eine gegebene Parallaxendifferenz den größten Einfluß auf die Distanz zweier Sterne hat, wenn der die Sterne verbindende Bogen senkrecht zu dem Breitenkreise des Mittelpunktes dieses Bogens steht. Nimmt man also an, daß die in der Umgebung eines Sterns S gelegenen schwachen und schwach bewegten Sterne gleiche Parallaxe haben, so wird sich aus Distanzbeobachtungen die relative Parallaxe von S am genauesten bestimmen lassen, wenn man die Vergleichsterne möglichst nahe dem Kreise wählt, welcher den Deklinationskreis des Sterns S in dem Positionswinkel $90^\circ - \varkappa$, bzw. $270^\circ - \varkappa$ schneidet. Nur wenn S dem Pol der Ekliptik nahe liegt, und demnach der aus § 53, (14) folgende Wert des Koeffizienten n wenig von 1 verschieden ist, welches auch der Wert von p sei, kann man die Vergleichsterne auf einem beliebigen durch S gehenden größten Kreise wählen. Gewöhnlich begnügt man sich mit zwei zu beiden Seiten des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns gelegenen und möglichst gleichweit von ihm entfernten Vergleichsternen, und mißt im Laufe eines Jahres wiederholt deren Abstände von dem Hauptstern. Um die Beobachtungen reduzieren zu können, hat man zunächst für jeden durch den Hauptstern und einen Vergleichstern begrenzten Bogen größten Kreises die Rektaszension und Deklination seines Mittelpunktes, sowie den auf diesen Mittelpunkt bezogenen Positionswinkel des Vergleichsterns zu berechnen; diese Größen mögen mit α_m, δ_m und p_m bezeichnet werden. Es sei nun α die Rektaszension und δ die Deklination des auf Parallaxe zu untersuchenden Sterns S, die entsprechenden für einen Vergleichstern S_i gültigen Werte seien α_i und δ_i; bedeutet dann Δ_i den Abstand der Sterne S und S_i voneinander, und versteht man unter p_i den Positionswinkel von S_i in bezug auf S, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \Delta_i \sin p_i &= 2 \cos\delta_i \sin \tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha) \\ \sin \Delta_i \cos p_i &= \sin(\delta_i - \delta) + 2 \cos\delta_i \sin\delta \sin^2 \tfrac{1}{2}(\alpha_i - \alpha) \end{aligned} \tag{3}$$

Nachdem man hieraus Δ_i und p_i gefunden hat, setze man $90^\circ - \delta = D$, $90^\circ - \delta_m = D_m$, und wende die aus § 20, (22) durch die Substitution $p_1 = p_i$, $D_1 = D$, $\Delta = \Delta_i$ folgenden Gleichungen an

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2}D_m \sin \tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \sin \tfrac{1}{2}p_i \sin \tfrac{1}{2}(D + \tfrac{1}{2}\Delta_i) \\ \sin \tfrac{1}{2}D_m \cos \tfrac{1}{2}(p_m + d\alpha) &= \cos \tfrac{1}{2}p_i \sin \tfrac{1}{2}(D - \tfrac{1}{2}\Delta_i) \\ \cos \tfrac{1}{2}D_m \sin \tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \sin \tfrac{1}{2}p_i \cos \tfrac{1}{2}(D + \tfrac{1}{2}\Delta_i) \\ \cos \tfrac{1}{2}D_m \cos \tfrac{1}{2}(p_m - d\alpha) &= \cos \tfrac{1}{2}p_i \cos \tfrac{1}{2}(D - \tfrac{1}{2}\Delta_i) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man p_m, $d\alpha$ und D_m; sodann ergibt sich $\alpha_m = \alpha + d\alpha$, $\delta_m = 90^\circ - D_m$. Dehnen sich die Beobachtungen nur auf 1 bis 2 Jahre aus, so genügt es im allgemeinen, für α und δ, sowie für α_i und δ_i ihre auf ein der mittleren Epoche der Beobachtungen nahe liegendes mittleres Äquinox bezogenen Werte anzuwenden.

Aus der Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes jedes Bogens leite man ferner die Länge und Breite des Mittelpunktes ab; diese mögen mit λ_m und β_m bezeichnet werden. Substituiert man dann die Werte von α_m, δ_m, λ_m und β_m in die Gleichungen (2), so erhält man die für die Mittelpunkte der Bögen gültigen, im folgenden mit $\varkappa_m$ bezeichneten Werte von $\varkappa$.

Die beobachteten und nach § 86 von der Refraktion befreiten Distanzen sind nun zunächst wegen Aberration zu korrigieren. Wenn k die Aberrationskonstante, $\odot$ die Länge der Sonne zur Zeit der Beobachtung, Δ die wahre, und Δ' die beobachtete (aber von der Refraktion befreite) Distanz bedeutet, so hat man nach § 64, (23)

$$\Delta = \Delta' + 2k \sin \tfrac{1}{2}\Delta \cos \beta_m \sin(\odot - \lambda_m), \tag{5}$$

wo auf der rechten Seite statt Δ der aus (3) folgende Wert Δ_i benutzt werden darf.

Um die mittels der Gleichung (5) erhaltenen Werte von Δ auf eine und dieselbe Epoche reduzieren zu können, muß man für den Hauptstern und für die Vergleichsterne die jährliche Eigenbewegung nach Größe und Richtung bestimmen. Sind $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ die Komponenten der Eigenbewegung des Hauptsterns in Rektaszension und Deklination, und werden die entsprechenden für einen Vergleichstern gültigen Komponenten mit $\frac{d\alpha_i}{dt}$ und $\frac{d\delta_i}{dt}$ bezeichnet, so folgt, wenn ϱ und ϱ_i die für den Haupt-, bzw. Vergleichstern gültigen Werte der Eigenbewegung im größten Kreise bedeuten, und γ, bzw. γ_i die Positionswinkel dieser Bewegungen angeben

$$\begin{aligned} \varrho \sin\gamma &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\delta & \varrho_i \sin\gamma_i &= \frac{d\alpha_i}{dt}\cos\delta_i \\ \varrho \cos\gamma &= \frac{d\delta}{dt} & \varrho_i \cos\gamma_i &= \frac{d\delta_i}{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

Da die Eigenbewegung der Vergleichsterne als sehr klein vorausgesetzt wird, so kann man das Quadrat von ϱ_i vernachlässigen; aus der in § 57 gegebenen Formel (22^a) folgt dann*), wenn Δ für die Epoche t der Beobachtung und Δ_0 für eine fest gewählte Epoche t_0 gilt,

$$\Delta_0 = \Delta + [\varrho\cos(\gamma - p_m) - \varrho_i \cos(\gamma_i - p_m)](t - t_0) - \frac{\varrho^2 \sin^2(\gamma - p_m)}{2\Delta_i}(t - t_0)^2 \tag{7}$$

Um aus diesen Δ_0 die relative Parallaxe des Hauptsterns zu finden, benutzt man die Formeln (11) und (12) des § 53; man berechnet also zunächst mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} n \sin N &= -\sin(z_m + p_m) \\ n \cos N &= \cos(z_m + p_m)\sin\beta_m \end{aligned} \tag{8}$$

für jeden der den Hauptstern mit den beiden Vergleichsternen verbindenden Bögen die Werte von n und N. Sind dann π_1 und π_2 die Parallaxen der Vergleichsterne, und werden die den Abständen des Hauptsterns von den beiden Vergleichsternen entsprechenden Werte von n, N, Δ_0 und λ_m ebenfalls durch die Indizes 1 und 2 voneinander unterschieden, so erhält man, wenn $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ die heliozentrischen Distanzen bedeuten, und wenn π die Parallaxe des Hauptsterns, und R den Radiusvektor der Sonne zur Zeit der Beobachtung angibt,

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= D^{(1)} + Rn_1(\pi - \pi_1)\cos[\odot - (\lambda_m^{(1)} + N_1)] \\ \Delta_0^{(2)} &= D^{(2)} + Rn_2(\pi - \pi_2)\cos[\odot - (\lambda_m^{(2)} + N_2)] \end{aligned} \tag{9}$$

*) Die in § 57 gewählten Bezeichnungen n, N, n_i, N_i, Δ'', t', t sind gleichbedeutend mit den hier benutzten ϱ, γ, ϱ_i, γ_i, Δ, t, t_0.

Wenn man nun die Vergleichsterne in der zu Beginn dieses Paragraphen angegebenen Weise gewählt hat, so sind die Werte der Koeffizienten von $\pi - \pi_1$ und $\pi - \pi_2$ für jeden Beobachtungsabend dem absoluten Werte nach nahe einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Falls also die aus den Beobachtungen abgeleiteten und der Voraussetzung nach wenig voneinander verschiedenen Werte $\Delta_0^{(1)}$ und $\Delta_0^{(2)}$ mit Fehlern behaftet sind, welche der Distanz proportional sind (wie es beispielsweise bei einer unrichtigen Annahme des Skalenwertes der Fall sein würde), so beeinflussen diese Fehler den aus $\Delta_0^{(1)}$ folgenden Wert von $\pi - \pi_1$ in entgegengesetzter Weise wie den aus $\Delta_0^{(2)}$ abgeleiteten Wert von $\pi - \pi_2$; das Mittel aus diesen Werten, d. h. die relative Parallaxe $\pi - \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ des Hauptsterns in bezug auf die beiden Vergleichsterne ist also frei von den erwähnten Fehlern.

An Stelle der Gleichungen (9) wendet man gewöhnlich ihre Differenz an. Schreibt man die Gleichungen in der abgekürzten Form

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= D^{(1)} + a_1(\pi - \pi_1) \\ \Delta_0^{(2)} &= D^{(2)} + a_2(\pi - \pi_2) \end{aligned} \tag{10}$$

und setzt

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) + \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2) \\ \pi_2 &= \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2) - \tfrac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2), \end{aligned} \tag{11}$$

so folgt zunächst

$$\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)} = D^{(1)} - D^{(2)} + (a_1 - a_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (a_1 + a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

Liegen nun die Vergleichsterne auf einem durch den Hauptstern gehenden größten Kreise, so unterscheidet sich $a_1 + a_2$ stets wenig von o. Man ist aber mitunter genötigt, Sterne zu wählen, für welche die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist. Damit auch in einem solchen Falle $a_1 + a_2$ nahe gleich o wird, muß man die Beobachtungen auf die Zeiten beschränken, zu denen $a_1 - a_2$ am größten ist. Nimmt man an, daß dies geschehen sei, und setzt

$$\begin{aligned} h \sin H &= n_1 \sin(\lambda_m^{(1)} + N_1) - n_2 \sin(\lambda_m^{(2)} + N_2) \\ h \cos H &= n_1 \cos(\lambda_m^{(1)} + N_1) - n_2 \cos(\lambda_m^{(2)} + N_2), \end{aligned} \tag{12}$$

so wird mit Vernachlässigung des von $\frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2)$ abhängigen Gliedes

$$\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)} = D^{(1)} - D^{(2)} + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\, Rh \cos(\odot - H) \tag{13}$$

Es sei jetzt d_0 ein Näherungswert von $D^{(1)} - D^{(2)}$ und x die Korrektion von d_0; ferner werde angenommen, daß die für die Vergleichsterne und den Hauptstern benutzten Werte der Eigenbewegung eine kleine Korrektion erfordern, und daß demgemäß auf der rechten Seite der vorigen Gleichung noch ein Glied $y(t - t_0)$ hinzugefügt werden müsse, wo y eine unbekannte Konstante bedeutet. Setzt man dann noch $\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)} - d_0 = n$, so folgt

$$x + (t - t_0)y + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\, Rh \cos(\odot - H) = n \tag{14}$$

Auch aus diesen Gleichungen erhält man die relative Parallaxe unabhängig von den der Distanz proportionalen Fehlern, vorausgesetzt, daß $\Delta_0^{(1)}$ nahe gleich $\Delta_0^{(2)}$ ist; ist aber letztere Bedingung nicht erfüllt, so sind zuvor die gemessenen Distanzen,

bzw. ihre Differenzen zu korrigieren. Um die Korrektionen abzuleiten, berücksichtige man die aus (10) und (11) folgende Gleichung

$$(15) \quad \Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)} = D^{(1)} + D^{(2)} + (a_1 + a_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

und nehme an, daß $\Delta_0^{(1)}$ und $\Delta_0^{(2)}$ die Korrektionen $\bar{\omega}\Delta_0^{(1)}$, bzw. $\bar{\omega}\Delta_0^{(2)}$ erfordern, wo $\bar{\omega}$ eine von Abend zu Abend wechselnde Konstante bedeutet; ferner nehme man an, daß infolge der Ungenauigkeit der für die Eigenbewegungen der Sterne benutzten Werte an $\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}$ die Korrektion $E(t - t_0)$ angebracht werden müsse, wo E eine Konstante, t die Epoche der Beobachtung und t_0 die mittlere Epoche der Beobachtungen bedeutet. Vernachlässigt man dann das von $a_1 + a_2$ abhängige Glied und setzt $\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)} = s$, so ergibt sich aus (15)

$$(15^a) \qquad D^{(1)} + D^{(2)} = s + \bar{\omega}s + (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} + E(t - t_0)$$

Denkt man sich jetzt für jeden Beobachtungsabend eine solche Gleichung aufgestellt und aus allen diesen das Mittel gebildet, so verschwindet infolge der über t_0 getroffenen Bestimmung das von E abhängige Glied; ferner kann auch das Produkt aus $\frac{1}{2}(\pi_1 - \pi_2)$ und dem Mittel der teils positiven, teils negativen Koeffizienten $a_1 - a_2$ als verschwindend klein betrachtet werden. Wenn man also noch die Annahme macht, daß die Koeffizienten $\bar{\omega}$ bald positiv, bald negativ sind und sich gegenseitig nahezu aufheben, so wird $D^{(1)} + D^{(2)}$ gleich dem Mittel aus den s. Dieses Mittel möge mit s_0 bezeichnet werden; man hat dann $D^{(1)} + D^{(2)} = s_0$, und somit folgt aus (15^a)

$$\bar{\omega} = \frac{s_0 - s}{s} - (a_1 - a_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2s} - \frac{E}{s}(t - t_0)$$

Nun ist $\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)}$ stets sehr klein gegenüber s. Bei der Berechnung der an diese Differenz anzubringenden Korrektion $\bar{\omega}(\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)})$ kann man demnach die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der vorigen Gleichung vernachlässigen und erhält damit als Wert der Korrektion $(\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)})(s_0 - s) : s$ oder hinreichend genau, wenn mit d_0 der mittlere Wert von $\Delta_0^{(1)} - \Delta_0^{(2)}$ bezeichnet wird, $d_0(s_0 - s) : s_0$.

102. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Positionswinkelmessungen. Falls man die relative Parallaxe eines Fixsterns mit Hilfe von Positionswinkelmessungen bestimmen will, so sind die beiden Vergleichsterne in der Nähe des Kreises zu wählen, welcher den Deklinationskreis des zu untersuchenden Sterns im Positionswinkel $180^\circ - z$, bzw. $360^\circ - z$ schneidet. Zur Reduktion der Beobachtungen ist es erforderlich, daß man für jeden der durch den Hauptstern und einen Vergleichstern begrenzten Bögen nach den in den zwei vorigen Paragraphen gegebenen Gleichungen die Werte von Δ_i, p_i, α_m, δ_m, p_m, λ_m, β_m und z_m berechnet; dabei kann man für α, δ, α_i und δ_i die Werte annehmen, welche diese Koordinaten in bezug auf ein dem Mittel der Beobachtungszeiten nahes mittleres Äquinox haben.

Die beobachteten und mit Hilfe der in § 86 mitgeteilten Formeln von der Refraktion befreiten Positionswinkel sollen zuerst wegen der Aberration korrigiert

werden. Zu diesem Zwecke berechnet man für jeden Bogen mittels der Gleichungen [§ 64, (21)]

$$(16)\qquad \begin{aligned} u \sin U &= k \tang \delta_m \sin \alpha_m \\ u \cos U &= k \tang \delta_m \cos \alpha_m \cos \varepsilon \end{aligned}$$

die Werte von u und U, und erhält dann nach § 64, (22), wenn p den wahren, p' den beobachteten (aber von der Refraktion befreiten) Positionswinkel, und $\odot$ die Länge der Sonne zur Zeit der Beobachtung bedeutet,

$$(17)\qquad p = p' + u \cos(\odot - U)$$

Die Werte von p sind jetzt auf dasselbe mittlere Äquinox zu reduzieren. Zu diesem Zwecke berechnet man zunächst nach den in § 50 gegebenen Formeln (34) und (35)

$$\begin{aligned} \Psi = &\left[5036''.8 + 0''.5 \frac{t_0 - 1850}{100}\right] \frac{t - t_0}{100} - 1''.1 \left(\frac{t - t_0}{100}\right)^2 - \\ &- 17''.2 \sin \Omega + 0''.2 \sin 2\Omega - 1''.3 \sin 2L \\ \Delta\varepsilon = &\ 9''.2 \cos \Omega - 0''.1 \cos 2\Omega + 0''.6 \cos 2L, \end{aligned}$$

wo Ω die mittlere Länge des Mondknotens, L die mittlere Länge der Sonne zur Zeit t der Beobachtung angibt, und wo t_0 die Epoche des mittleren Äquinox bedeuten soll, auf welches sich α_m und δ_m beziehen; bezeichnet man die auf dieses mittlere Äquinox reduzierten Positionswinkel mit $\mathfrak{p}_0$, so folgt aus § 50, (36)

$$(18)\qquad \mathfrak{p}_0 = p + [\Delta\varepsilon \cos \alpha_m - \Psi \sin \varepsilon \sin \alpha_m] \sec \delta_m$$

Um die für die Epoche t_0 gültigen Werte p_0 der Positionswinkel zu finden, hat man die in § 57 abgeleitete Gleichung (23^a) anzuwenden*), und zwar erhält man

$$(19)\quad p_0 = \mathfrak{p}_0 + \frac{1}{\Delta_i \sin 1''} [\varrho \sin(\gamma - p_m) - \varrho_i \sin(\gamma_i - p_m)](t - t_0) + \frac{\varrho^2 \sin 2(\gamma - p_m)}{2 \Delta_i^2 \sin 1''} (t - t_0)^2$$

Die Werte von p_0 dienen zur Ableitung der Parallaxe. Man wendet zunächst die Formeln an [§ 53, (11)]

$$(20)\qquad \begin{aligned} m \sin M &= -\cos(\varkappa_m + p_m) \\ m \cos M &= -\sin(\varkappa_m + p_m) \sin \beta_m \end{aligned}$$

und berechnet für die durch den Hauptstern und die beiden Vergleichsterne gelegten Bögen die zugehörigen Werte von m und M; werden diese sowie auch die bezüglichen Werte von p_0, Δ_i und λ_m durch die Indizes 1 und 2 voneinander unterschieden, so hat man nach § 53, (12), wenn π_1 und π_2 die Parallaxen der Vergleichsterne, ferner $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die heliozentrischen, auf das mittlere Äquinox zur Zeit t_0 bezogenen Positionswinkel der Vergleichsterne, gültig für die Epoche t_0, bezeichnen,

$$(21)\qquad \begin{aligned} p_0^{(1)} &= P^{(1)} + \frac{R m_1}{\Delta_1 \sin 1''} (\pi - \pi_1) \cos[\odot - (\lambda_m^{(1)} + M_1)] \\ p_0^{(2)} &= P^{(2)} + \frac{R m_2}{\Delta_2 \sin 1''} (\pi - \pi_2) \cos[\odot - (\lambda_m^{(2)} + M_2)] \end{aligned}$$

*) Die in § 57 gewählten Bezeichnungen n, N, ni, Ni, p'', t', t haben dieselbe Bedeutung wie die in (19) angewandten ϱ, γ, ϱ_i, γ_i, $\mathfrak{p}_0$, t, t_0.

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$(p_o^{(1)} - P^{(1)})\,\Delta_1 \sin 1'' = b_1(\pi - \pi_1)$$
$$(p_o^{(2)} - P^{(2)})\,\Delta_2 \sin 1'' = b_2(\pi - \pi_2)$$

und subtrahiert dieselben, nachdem man zuvor noch π_1 und π_2 durch ihre in (11) gegebenen Ausdrücke ersetzt hat, so folgt

$$[p_o^{(1)} - P^{(1)}]\Delta_1 \sin 1'' - [p_o^{(2)} - P^{(2)}]\Delta_2 \sin 1'' = (b_1 - b_2)[\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)] - (b_1 + b_2)\frac{\pi_1 - \pi_2}{2}$$

Nun pflegen die Beobachtungen zu Zeiten angestellt zu werden, wo der Koeffizient $b_1 - b_2$, absolut genommen, möglichst groß ist; gleichzeitig ist dann aber $b_1 + b_2$ nahe gleich 0, und somit kann das letzte Glied auf der rechten Seite der vorigen Gleichung vernachlässigt werden. Führt man also wieder an Stelle von b_1 und b_2 ihre Werte ein und setzt

$$\begin{aligned} h' \sin H' &= m_1 \sin(\lambda_m^{(1)} + M_1) - m_2 \sin(\lambda_m^{(2)} + M_2) \\ h' \cos H' &= m_1 \cos(\lambda_m^{(1)} + M_1) - m_2 \cos(\lambda_m^{(2)} + M_2), \end{aligned} \tag{22}$$

so erhält man

$$[p_o^{(1)} - P^{(1)}]\Delta_1 \sin 1'' - [p_o^{(2)} - P^{(2)}]\Delta_2 \sin 1'' = [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\,Rh' \cos(\odot - H')$$

Man wähle jetzt für $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die Näherungswerte $P_o^{(1)}$ und $P_o^{(2)}$, und bezeichne die Differenz $(P^{(1)} - P_o^{(1)})\,\Delta_1 \sin 1'' - (P^{(2)} - P_o^{(2)})\,\Delta_2 \sin 1''$ mit x; ferner nehme man an, daß die benutzten Werte der Eigenbewegungen der Sterne kleiner Korrektionen bedürfen, und daß demgemäß auf der rechten Seite der vorigen Gleichungen das Glied $e'(t - t_o)$ hinzugefügt werden müsse, wo e' eine Konstante bedeutet. Wenn dann noch

$$[p_o^{(1)} - P_o^{(1)}]\Delta_1 \sin 1'' - [p_o^{(2)} - P_o^{(2)}]\Delta_2 \sin 1'' = \nu$$

gesetzt wird, so lauten die zur Bestimmung von x, e' und $\pi - \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$ dienenden Bedingungsgleichungen

$$x + e'(t - t_o) + [\pi - \tfrac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)]\,Rh' \cos(\odot - H') = \nu \tag{23}$$

103. Bestimmung der relativen Parallaxe durch Rektaszensionsdifferenzen. Man wähle für den Stern, dessen Parallaxe bestimmt werden soll, zwei möglichst symmetrisch zu ihm gelegene und seinem Parallel nahe Vergleichsterne oder auch Paare derselben, und beobachte nun mit Hilfe eines Meridiankreises ein oder zwei Jahre hindurch die Rektaszensionsdifferenzen zwischen diesen Sternen und dem Hauptstern. Die in den verschiedenen Jahren erhaltenen und von der Helligkeitsgleichung (§ 93) befreiten Differenzen sind zuerst auf den jedesmaligen Jahresanfang (t_o), und sodann auf ein gemeinsames mittleres Äquinox, bzw. auf eine gemeinsame Epoche zu reduzieren. Zu diesem Zwecke berechne man zunächst

$$n = \left[133^s075 - 0^s057\,\frac{t_o - 1850}{100}\right]\frac{1}{100}, \tag{24}$$

ferner, wenn unter α_o, δ_o, bzw. $\alpha_i^{(o)}$, $\delta_i^{(o)}$ die auf das mittlere Äquinox und die Epoche des Jahresanfangs bezogene Rektaszension und Deklination des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns verstanden wird,

$$
\begin{aligned}
a - a_i &= n(\sin\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 - \sin\alpha_i^{(0)} \operatorname{tang}\delta_i^{(0)}) \\
b - b_i &= \cos\alpha_0 \operatorname{tang}\delta_0 - \cos\alpha_i^{(0)} \operatorname{tang}\delta_i^{(0)} \\
c - c_i &= \cos\alpha_0 \sec\delta_0 - \cos\alpha_i^{(0)} \sec\delta_i^{(0)} \\
d - d_i &= \sin\alpha_0 \sec\delta_0 - \sin\alpha_i^{(0)} \sec\delta_i^{(0)}
\end{aligned} \tag{25}
$$

Es seien nun μ und μ_i die Werte der jährlichen Eigenbewegung des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns in Rektaszension, t sei die Epoche einer Beobachtung und T ein der mittleren Epoche der Beobachtungen nahe liegender Jahresanfang; ferner seien p und p_i die dem Intervall $t_0 - T$ entsprechenden Werte der Präzession in Rektaszension, gültig für den Haupt-, bzw. Vergleichstern. Sind dann α' und α_i' die beobachteten, und α und α_i die auf das mittlere Äquinox zur Zeit T bezogenen und auch für die Epoche T gültigen Rektaszensionen des Haupt-, bzw. eines Vergleichsterns, so hat man, wenn A, B, C, D die in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilten, zur Reduktion auf den mittleren oder scheinbaren Ort dienenden Größen bezeichnen,

$$
\begin{aligned}
\alpha - \alpha_i = \alpha' - \alpha_i' - [(p - p_i) + (a - a_i)A + (b - b_i)B + (c - c_i)C \\
+ (d - d_i)D + (\mu - \mu_i)(t - T)]
\end{aligned} \tag{26}
$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ die für die Epoche T gültige und auf das mittlere Äquinox dieser Epoche bezogene heliozentrische Rektaszension des Hauptsterns und π die Parallaxe desselben, ferner sollen $\mathfrak{a}_i$ und π_i die entsprechende Bedeutung für einen Vergleichstern haben; wenn dann

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}\sin\mathfrak{M} &= \sin\alpha & \mathfrak{m}_i\sin\mathfrak{M}_i &= \sin\alpha_i \\
\mathfrak{m}\cos\mathfrak{M} &= \cos\alpha\cos\varepsilon & \mathfrak{m}_i\cos\mathfrak{M}_i &= \cos\alpha_i\cos\varepsilon
\end{aligned} \tag{27}
$$

gesetzt wird, so hat man nach § 52, (5)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathfrak{a} + R\pi\,\mathfrak{m}\,\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta \\
\alpha_i &= \mathfrak{a}_i + R\pi_i\mathfrak{m}_i\sin(\odot - \mathfrak{M}_i)\sec\delta_i
\end{aligned} \tag{28}
$$

Unter der Voraussetzung, daß π_i sehr klein ist, kann man in der letzten Gleichung $\mathfrak{m}_i\sec\delta_i = \mathfrak{m}\sec\delta$ und $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ annehmen; durch Subtraktion der Gleichungen (28) erhält man dann

$$
\alpha - \alpha_i = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i + (\pi - \pi_i)R\,\mathfrak{m}\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta
$$

Wenn nun $(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i)_0$ einen Näherungswert von $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i$, und x die Korrektion dieses Näherungswertes bedeutet, wenn ferner die Korrektion des für die Differenz der Eigenbewegungen angenommenen Wertes $\mu - \mu_i$ mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet, und $\alpha - \alpha_i - (\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_i)_0 = v$ gesetzt wird, so ergeben sich die zur Bestimmung von x, $\mathfrak{e}$ und $\pi - \pi_i$ dienenden Gleichungen

$$
x + \mathfrak{e}(t - T) + (\pi - \pi_i)R\,\mathfrak{m}\sin(\odot - \mathfrak{M})\sec\delta = v \tag{29}
$$

Das Mittel der aus den Rektaszensionsdifferenzen zwischen dem Hauptsterne und jedem der Vergleichsterne erhaltenen Werten von $\pi - \pi_i$ gibt die relative Parallaxe des Hauptsterns an.

Die Beobachtungen stellt man am besten zu solchen Zeiten an, wo der absolute Wert des Koeffizienten von $\pi - \pi_i$ gleich oder größer als etwa 0.5 ist. Um ferner die Werte von $\pi - \pi_i$ möglichst unabhängig von einem Fehler in den Eigenbewegungen zu machen, wird man die Beobachtungen so einrichten, daß sie wenigstens drei aufeinanderfolgende Epochen des Maximums der parallaktischen Verschiebung umfassen.

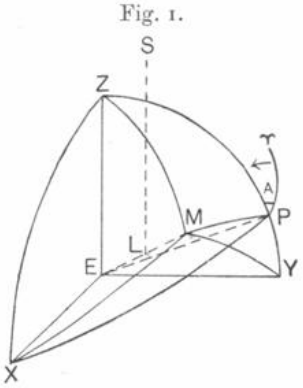
Kapitel XVIII.

Sternbedeckungen.

104. Fundamentalgleichungen. Die von einem Fixstern ausgehenden und den Mond einhüllenden Strahlen können stets als zueinander parallel betrachtet werden; wenn also der Mond als kugelförmig angesehen wird, so liegen die Strahlen auf der Oberfläche eines Kreiszylinders, dessen Achse die Verbindungslinie des Mondmittelpunktes mit dem Stern, und dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser des Mondes ist. Der betreffende Zylinder wird im folgenden kurzweg als Schattenzylinder bezeichnet werden. Der Augenblick, wo die Oberfläche dieses Zylinders durch den Ort eines Beobachters hindurchgeht, bedeutet für letzteren den Anfang oder das Ende der Bedeckung des Sterns durch den Mond; zur Zeit des Ein- und Austrittes des Sterns ist also der Abstand des Beobachtungsortes von der Achse des Schattenzylinders gleich dem Durchmesser des Mondes. Dieser Satz soll nun analytisch ausgedrückt werden.

In Fig. 1 sei E der Mittelpunkt der Erde, L der Mittelpunkt des Mondes und LS die Richtung zum Stern. Durch E lege man drei zueinander senkrechte Achsen, und zwar soll die Z-Achse (EZ) parallel zu LS sein. Ist P der Ort des Pols, so werde die der Richtung EP zunächst gelegene Hälfte EY der Durchschnittslinie der Ebene ZEP mit der XY-Ebene als Y-Achse, und die zur YZ-Ebene senkrechte Linie EX als X-Achse gewählt. Um die X-Achse genauer zu definieren, setze man fest, daß, wenn $P\gamma$ den durch das Frühlingsäquinox gehenden Deklinationskreis bedeutet und γPZ die Rektaszension von Z angibt, die Rektaszension von X gleich $90^\circ + \gamma PZ$ sein soll. Da die X-Achse senkrecht zu EP ist, so fällt sie in die Durchschnittslinie des Äquators mit der XY-Ebene. Es sei jetzt M der geozentrische Ort des Mondes oder der Punkt, worin die Richtung EL verlängert die Sphäre trifft, ferner sei α die geozentrische Rektaszension, und δ die geozentrische Deklination des Mondes; es ist

Fig. 1.



dann $\gamma PM = \alpha$ und $PM = 90^\circ - \delta$. Da EL verschwindend klein im Verhältnis zur Entfernung des Sterns ist, so ist auch die zu LS parallele Gerade EZ zum Stern gerichtet; wenn man also mit A und D die Rektaszension und Deklination des Sterns bezeichnet, so ist $\gamma PZ = A$ und $PZ = 90^\circ - D$.

Man setze nun $EL = r$; bedeuten dann x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes, so hat man

$$x = r\cos MEX, \qquad y = r\cos MEY, \qquad z = r\cos MEZ$$

Die hier vorkommenden Richtungscosinus von EM lassen sich aus den sphärischen Dreiecken MPX, MPY, MPZ bestimmen. Da nämlich X der Pol des größten Kreises ZP ist, so ist PX und auch der Winkel ZPX gleich 90°, also $MPX = 90^\circ - (\alpha - A)$; ferner ist $MPY = 180^\circ - (\alpha - A)$ und $PY = D$, endlich ist $ZPM = \alpha - A$; man erhält somit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\delta\,\sin(\alpha - A) \\ y &= r[\sin\delta\,\cos D - \cos\delta\,\sin D\,\cos(\alpha - A)] \\ z &= r[\sin\delta\,\sin D + \cos\delta\,\cos D\,\cos(\alpha - A)] \end{aligned} \tag{1}$$

Um x, y und z in Einheiten des Radius des Erdäquators auszudrücken, setzt man, wenn π die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes bedeutet,

$$r = \frac{1}{\sin\pi}; \tag{2}$$

wendet man dann noch die Substitutionen an

$$\begin{aligned} \nu\sin(D - i) &= \sin D\,\cos(\alpha - A) \\ \nu\cos(D - i) &= \cos D, \end{aligned} \tag{3}$$

so wird

$$x = \frac{\cos\delta\,\sin(\alpha - A)}{\sin\pi}, \qquad y = \frac{\nu\sin(\delta - D + i)}{\sin\pi} \tag{4}$$

Zur Zeit einer Sternbedeckung ist $\alpha - A$ ein kleiner Winkel; somit folgt aus (3), daß dann ν sich nicht viel von 1 unterscheidet, und i klein ist.

Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der kleinen Größen $\log\nu$ und i ist von *Küstner* angegeben worden. Aus den Gleichungen (3) folgt nämlich

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tang} D &= \log\operatorname{tang}(D - i) + \log\sec(\alpha - A) \\ \log\nu &= \log\cos D - \log\cos(D - i) \end{aligned}$$

Also wird für $D \equiv D + i$

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tang}(D + i) &= \log\operatorname{tang} D + \log\sec(\alpha - A) \\ \log\nu &= \log\cos(D + i) - \log\cos D \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt, daß i die Änderung bezeichnet, welche D erfährt, wenn sich $\log\operatorname{tang} D$ um $\log\sec(\alpha - A)$ ändert; ferner ergibt sich aus der zweiten Gleichung, daß $\log\nu$ den Betrag darstellt, um den sich $\log\cos D$ ändert, wenn D durch $D + i$ ersetzt wird. Man hat also zunächst den $\log\sec(\alpha - A)$ zu berechnen; mit Hilfe dieses Wertes und der Differenz zwischen zwei in der Logarithmentafel aufeinander folgenden, dem jeweiligen Werte von $\log\operatorname{tang} D$ benachbarten $\log\operatorname{tang}$ erhält man i; der $\log\nu$ ergibt sich aus i und der Differenz zwischen

zwei aufeinander folgenden, dem jeweiligen Werte von $\log\cos D$ benachbarten Tafelwerten von log cos. Das Vorzeichen von i stimmt mit demjenigen von D überein, $\log\nu$ ist stets negativ.

Es werde jetzt in Fig. 1 unter L ein Ort auf der Erdoberfläche, also unter M das geozentrische Zenit des Beobachters verstanden; wird dann der in Teilen des Radius des Erdäquators ausgedrückte Radiusvektor des Beobachtungsortes mit ϱ, seine geozentrische Breite mit φ' und seine Sternzeit mit μ bezeichnet, so ist $\gamma PM = \mu$ und $PM = 90^\circ - \varphi'$. Man erhält also die für die Koordinaten ξ, η, ζ des Beobachtungsortes gültigen Gleichungen, indem man in (1) r, α, δ durch ϱ, μ, φ' ersetzt. Die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\xi &= \varrho\cos\varphi'\sin(\mu - A)\\ \eta &= \varrho\sin\varphi'\cos D - \varrho\cos\varphi'\sin D\cos(\mu - A)\\ \zeta &= \varrho\sin\varphi'\sin D + \varrho\cos\varphi'\cos D\cos(\mu - A)\end{aligned} \tag{5}$$

Da die Z-Achse parallel zu der Achse des Schattenzylinders ist, so ergibt sich der Abstand Δ des Beobachtungsortes von dieser Zylinderachse aus der Gleichung

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

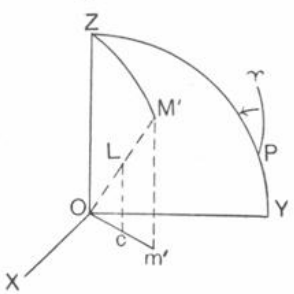
Wie schon oben bemerkt wurde, muß Δ zur Zeit des Ein- oder Austrittes eines Sterns gleich dem Mondradius sein; wird der in derselben Einheit wie x, ξ, y und η, also in Teilen des Radius des Erdäquators ausgedrückte Halbmesser des Mondes mit k bezeichnet, so erhält man als Bedingungsgleichung einer Sternbedeckung

$$k^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \tag{6}$$

Diese Gleichung läßt sich auch zur Bestimmung von k benutzen. Wenn nämlich eine Sternbedeckung an einem Orte beobachtet worden ist, dessen geographische Breite und Länge, letztere bezogen auf den Meridian der Mondephemeride, bekannt ist, wenn ferner der Ort des Sterns gegeben ist, und die Korrektionen der Mondephemeride bereits anderweitig, etwa durch Meridianbeobachtungen, gefunden sind, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (2) bis (5) die Werte von x, y, ξ und η berechnen (vergleiche § 106); substituiert man diese in die Gleichung (6), so ergibt sich der gesuchte Wert von k. Der Wert von k ist gegenwärtig bereits recht genau bekannt, und zwar kann man nach *Lagrula* $\log k = 9.43544$ annehmen.

Die Gleichung (6) kann ebenfalls zur Vorausberechnung einer Sternbedeckung benutzt werden, indessen wendet man zu diesem Zwecke besser die hierunter abgeleiteten Gleichungen an. Man lege durch den Beobachtungsort O drei zu den in Fig. 1 benutzten Achsen EX, EY, EZ parallele Achsen OX, OY, OZ (Fig. 2); OZ bezeichnet demnach die Richtung zum Stern, und OP die Richtung zum Pol. Ist nun L das Mondzentrum und M' der Punkt, in dem die Gerade OL verlängert die Sphäre trifft, ist ferner Ocm' die Durchschnittslinie einer durch OZ und OM' gelegten Ebene mit der XY-Ebene, und cL parallel zu OZ, so sind die Projektionen von Oc auf die X- und Y-Achse den früher mit $x - \xi$,

Fig. 2.



bzw. $y - \eta$ bezeichneten Koordinatendifferenzen gleich. Setzt man also den Winkel YOm' gleich Q und berücksichtigt, daß Oc den vorhin mit Δ bezeichneten Abstand des Beobachtungsortes von der Achse des Schattenzylinders darstellt, so hat man

$$x - \xi = \Delta \sin Q, \qquad y - \eta = \Delta \cos Q$$

Beim Ein- und Austritte ist aber $\Delta = k$ und demnach

$$k \sin Q = x - \xi, \qquad k \cos Q = y - \eta \tag{7}$$

Wie man sieht, folgt hieraus wieder die Gleichung (6).

Mit Hilfe von Q läßt sich der Punkt des Mondrandes bestimmen, an dem der Stern ein-, bzw. austritt. Zunächst ist Q gleich dem sphärischen Winkel PZM', und dieser stellt den Positionswinkel des Mondmittelpunktes, bezogen auf den Stern dar. Der Positionswinkel Π des Berührungspunktes, bezogen auf den Mittelpunkt des Mondes, ist aber gleich dem Winkel, um den man $M'P$ um den Punkt M' nach der Seite der wachsenden Rektaszensionen hin drehen muß, damit $M'P$ in die Richtung von $M'Z$ fällt; somit ist $\Pi = 360^\circ - PM'Z$. Im Augenblicke des Ein- oder Austrittes des Sterns berührt die Richtung OZ den Mondrand; der Winkel $PM'Z$ ist dann also nur wenig von $180^\circ - Q$ verschieden. Da nun der Punkt des Mondrandes, an dem der Stern ein-, bzw. austritt, nur näherungsweise bekannt zu sein braucht, so kann man $PM'Z = 180^\circ - Q$ setzen, und erhält dann $\Pi = 180^\circ + Q$.

105. Vorausberechnung einer Sternbedeckung für einen gegebenen Ort. Die Vorausberechnung einer Sternbedeckung pflegt man auf dem Wege der sukzessiven Näherungen auszuführen; zum leichteren Verständnis sollen zuerst die zur Berechnung nötigen Gleichungen abgeleitet, und dann die für die praktische Anwendung derselben erforderlichen Erläuterungen hinzugefügt werden. Es sei T die mittlere Zeit, welche man auf dem ersten Meridian, d. h. dem Meridian der Mondephemeride zählt, wenn, von einem gegebenen Beobachtungsort aus gesehen, der Mittelpunkt des Mondes und der Stern dieselbe Rektaszension haben; ferner sei $T + t$ die mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der an dem betreffenden Ort der Ein- oder Austritt stattfindet. Bezeichnet man nun die für die Zeit T gültigen Werte von x, y, ξ, η mit p, q, u, v und ihre Differentialquotienten mit p', q', u', v', so kann man für die der Zeit $T + t$ entsprechenden Werte von x, y, ξ und η in erster Näherung annehmen

$$\begin{aligned} x &= p + p't, & y &= q + q't \\ \xi &= u + u't, & \eta &= v + v't \end{aligned} \tag{8}$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (7) und setzt dann

$$\begin{aligned} m \sin M &= p - u, & n \sin N &= p' - u' \\ m \cos M &= q - v, & n \cos N &= q' - v' \end{aligned} \tag{9}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} k \sin Q &= m \sin M + tn \sin N \\ k \cos Q &= m \cos M + tn \cos N \end{aligned} \tag{10}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} k \sin (Q - N) &= m \sin (M - N) \\ k \cos (Q - N) &= m \cos (M - N) + tn \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn jetzt ein Winkel ψ so bestimmt wird, daß

$$\cos\psi = \frac{m}{k}\sin(M-N) \qquad [\log k = 9.43544] \tag{12}$$

ist, so lehrt die erste der Gleichungen (11), daß $Q-N$ entweder gleich $90^\circ+\psi$ oder gleich $90^\circ-\psi$ sein muß; dementsprechend erhält man aus der zweiten der Gleichungen (11) zwei Werte für t, nämlich

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M-N) \mp \frac{k}{n}\sin\psi \tag{13}$$

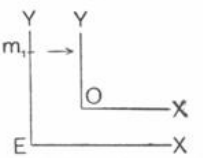
Wählt man nun für ψ denjenigen der beiden aus der Gleichung (12) folgenden Werte, welcher kleiner als 180° ist, so gilt das obere Vorzeichen in der Gleichung (13) für den Eintritt, und das untere für den Austritt des Sterns.

Dem vorigen Paragraphen zufolge ist der Positionswinkel des Sterns beim Ein- und Austritt, bezogen auf den Mittelpunkt des Mondes, gleich $180^\circ+Q$; durch Substitution der Werte $Q = 90^\circ+N\pm\psi$ erhält man demnach für den Positionswinkel beim Eintritt (Π_e), bzw. Austritt (Π_a)

$$\Pi_e = 270^\circ+N+\psi, \qquad \Pi_a = 270^\circ+N-\psi \tag{14}$$

Um die oben mit T bezeichnete Zeit zu bestimmen, entnehme man zunächst aus dem Jahrbuche die mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der die geozentrische Rektaszension des Mondes der Rektaszension des Sterns gleich ist; diese Zeit, die mit T_0 bezeichnet werden möge, nennt man die Zeit der geozentrischen Konjunktion von Mond und Stern in Rektaszension, während T als die Zeit der scheinbaren Konjunktion bezeichnet zu werden pflegt. Der Mittelpunkt des Mondes liegt also zur Zeit T_0 in der Ebene PEZ (Fig. 1), und zur Zeit T in der Ebene POZ (Fig. 2). In Fig. 3 sei nun wieder E der Mittelpunkt der Erde und O der Beobachtungsort, EX, EY, OX und OY seien die in Fig. 1 und 2 benutzten Koordinatenachsen; projiziert man dann das Mondzentrum in seiner Lage zur Zeit T_0 auf die Ebene EXY, so fällt diese Projektion in die Y-Achse, beispielsweise in den Punkt m_1. Ist jetzt ξ_0 die ebenfalls für die Zeit T_0 gültige, auf die Achse EX bezogene Koordinate von O, so erhält man die Zeit T, indem man ξ_0 durch die auf die X-Achse bezogene Komponente der relativen Geschwindigkeit des Mondes gegen den Beobachtungsort dividiert und den Quotienten zu T_0 hinzufügt. Wenn also p'_0 und u'_0 die für die Zeit T_0 gültigen Werte von p' und u' bedeuten, so ist annähernd

Fig. 3.



$$T = T_0 + \frac{\xi_0}{p'_0 - u'_0} \tag{15}$$

Zur Berechnung von ξ_0 verwandle man zuerst T_0 in Sternzeit und addiere zu letzterer die Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian (westlich vom ersten Meridian positiv gerechnet); man erhält so die der mittleren Zeit T_0 des ersten Meridians entsprechende Sternzeit des Beobachtungsortes. Wird diese mit μ_0 bezeichnet, so folgt aus der ersten der Gleichungen (5)

$$\xi_0 = \varrho\cos\varphi'\sin(\mu_0 - A) \tag{16}$$

Den Wert von p'_0 erhält man, indem man die erste Gleichung (4) differenziert und dann die für die Zeit T_0 gültige Bedingung $\alpha = A$ einführt; dabei können aber δ und π als konstant betrachtet werden. Es ergibt sich so

$$p'_0 = \frac{\cos\delta \, d\alpha}{\sin\pi}$$

Wenn nun $[\Delta\alpha]$ die in Zeitsekunden ausgedrückte Änderung der geozentrischen Rektaszension des Mondes in einer Stunde mittlerer Zeit bedeutet, so ist der auf diese Zeiteinheit bezogene und in Teilen des Radius ausgedrückte Wert von $d\alpha = [\Delta\alpha]\,15\sin 1''$; damit wird

$$p'_0 = \frac{[\Delta\alpha]\,15\,\sin 1''\cos\delta}{\sin\pi} \tag{17}$$

Um u'_0 abzuleiten, hat man die erste der Gleichungen (5) zu differenzieren und dabei zu berücksichtigen, daß sich die Sternzeit in einer Stunde mittlerer Zeit um $3609^s.86$ ändert; wenn also

$$3609.86 \times 15\,\sin 1'' = \lambda \qquad (\log\lambda = 9.41915) \tag{18}$$

gesetzt wird, so erhält man den auf die mittlere Stunde als Zeiteinheit bezogenen und in Teilen des Radius ausgedrückten Wert

$$u'_0 = \lambda\varrho\,\cos\varphi'\cos(\mu_0 - A) \tag{19}$$

Substituiert man die in (16) und (19) gegebenen Werte von ξ_0 und u'_0 in die Gleichung (15), so ergibt sich

$$T = T_0 + \frac{\varrho\,\cos\varphi'\sin(\mu_0 - A)}{p'_0 - \lambda\varrho\,\cos\varphi'\cos(\mu_0 - A)} \tag{20}$$

Der Wert von p'_0 schwankt zwischen 0.50 und 0.62; hat man nun für denselben Ort viele Sternbedeckungen vorauszuberechnen, so empfiehlt es sich, eine Tafel anzulegen, welche mit dem Argument $\mu_0 - A$ für $p'_0 = 0.50$ und $p'_0 = 0.60$ die Werte des Quotienten

$$\tau = \frac{\varrho\,\cos\varphi'\sin(\mu_0 - A)}{p'_0 - \lambda\varrho\,\cos\varphi'\cos(\mu_0 - A)} \tag{21}$$

gibt; eine einfache Interpolation liefert dann den einem beliebigen Werte von p'_0 zugehörigen Wert von τ. Da bei der Berechnung von p'_0 und u'_0 eine mittlere Stunde als Zeiteinheit gewählt wurde, so erscheint auch τ in dieser Einheit ausgedrückt. Der Nenner des Ausdrucks für τ ist stets positiv; τ ist also positiv für $0^h < \mu_0 - A < 12^h$, und negativ für $12^h < \mu_0 - A < 24^h$.

Hat man die Zeit $T = T_0 + \tau$ gefunden, so lassen sich auch die ihr entsprechenden, oben mit p und q bezeichneten Werte von x und y berechnen. Zunächst folgt aus den Gleichungen (1) und (2), wenn p_0, q_0 und q'_0 die für die Zeit T_0, also für $\alpha = A$ gültigen Werte von p, q und q' bedeuten, und $\Delta\delta$ die Änderung der geozentrischen Deklination des Mondes in einer Stunde mittlerer Zeit angibt,

$$p_0 = 0, \qquad q_0 = \frac{\sin(\delta - D)}{\sin\pi}, \qquad q'_0 = \frac{\cos(\delta - D)}{\sin\pi}\,\Delta\delta\,\sin 1'' \tag{22}$$

Die Werte von q_0 und q'_0 sowie auch den aus (17) folgenden Wert von p'_0 findet man in den Jahrbüchern unter den »Elementen der Sternbedeckungen« angegeben; mit ihrer Hilfe erhält man dann

$$p = p'_0 \tau, \qquad q = q_0 + q'_0 \tau \tag{23}$$

Diese Werte hat man in die Gleichungen (9) zu substituieren, während für die nur wenig veränderlichen Differentialquotienten p' und q' ihre der Zeit T_0 entsprechenden Werte beibehalten werden können.

Um u, v, u' und v' zu berechnen, ist in den Gleichungen (5) die der mittleren Zeit des ersten Meridians $T_0 + \tau$ zugehörige Ortssternzeit μ zu benutzen; da der mittleren Zeit T_0 die bereits vorhin gefundene Ortssternzeit μ_0 entspricht, so wird, wenn ε die Reduktion des Zeitintervalls τ auf Sternzeit bedeutet,

$$\mu = \mu_0 + \tau + \varepsilon \tag{24}$$

oder mit einer für den vorliegenden Zweck vollkommen ausreichenden Genauigkeit

$$\mu = \mu_0 + \tau \tag{24a}$$

Aus (5), bzw. aus den durch Differentiation von (5) gewonnenen Gleichungen erhält man dann

$$\begin{aligned} u &= \varrho \cos\varphi' \sin(\mu - A) \\ v &= \varrho \sin\varphi' \cos D - \varrho \cos\varphi' \sin D \cos(\mu - A) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda\varrho \cos\varphi' \cos(\mu - A) \\ v' &= \lambda\varrho \cos\varphi' \sin D \sin(\mu - A) \end{aligned} \tag{25a}$$

Damit sind nun alle für die Auflösung der Gleichungen (9) bis (14) notwendigen Größen bekannt.

Bezeichnet man die aus (13) für den Ein- und Austritt erhaltenen Werte von t mit t_e und t_a, so geben $T + t_e$ und $T + t_a$ die mittleren Zeiten des ersten Meridians an, zu denen der Stern am Beobachtungsort verschwindet, bzw. wiedererscheint. Bedeutet jetzt l die auf den ersten Meridian bezogene, westlich von diesem positiv gerechnete Länge des Beobachtungsortes, so erhält man als mittlere Ortszeiten des Ein-, bzw. Austrittes $T + t_e + l$, bzw. $T + t_a + l$.

Will man die in der oben erläuterten Weise abgeleitete Zeit des Ein- und Austrittes noch schärfer bestimmen, so berechne man zunächst für den genähert bekannten Moment $\mathfrak{E}$ des Eintrittes die Werte von p, q, u, v, ..., und wende dann wiederum die Gleichungen (9) bis (13) an. Es ergeben sich damit zwei Werte von t, von denen der der Zeit $\mathfrak{E}$ zunächst gelegene ($\mathfrak{t}_e$) eine genauere Zeit $\mathfrak{E} + \mathfrak{t}_e$ des Eintrittes liefert, während der andere ($\mathfrak{t}_a$) zu einer rohen Zeitangabe $\mathfrak{E} + \mathfrak{t}_a$ für den Austritt führt und zu verwerfen ist. Desgleichen sind auch für die in erster Näherung erhaltene Zeit $\mathfrak{A}$ des Austrittes p, q, u, v, ... von neuem zu berechnen und dann die Gleichungen (9) bis (13) nochmals aufzulösen. Bezeichnet man den kleineren der beiden so für t erhaltenen Werte mit $\mathfrak{t}'_a$, so ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{t}'_a$ die genauere Zeit des Austrittes; der andere Wert von t ist wieder zu vernachlässigen.

Wenn die vorauszuberechnenden Sternbedeckungen zahlreich sind und sich auf ein relativ kurzes Zeitintervall verteilen, wenn also beispielsweise für eine totale

Mondfinsternis auch die Ein- und Austritte der schwachen Sterne vorausbestimmt werden sollen, so empfiehlt sich die Anwendung eines graphischen Verfahrens. Man bedient sich zu diesem Zwecke einer in größerem Maßstabe gezeichneten oder photographisch hergestellten Sternkarte. Für das Zeitintervall, welches für die Beobachtungen in Frage kommt, nimmt man etwa für jede halbe Stunde den geozentrischen Ort des Mondes aus der Ephemeride, bringt an diesen die Parallaxe an und trägt die so erhaltenen scheinbaren Örter des Mondzentrums in die Karte ein; gleichzeitig vermerkt man bei jedem Ort die ihm entsprechende Zeit. Verbindet man die das Mondzentrum darstellenden Punkte durch eine Kurve, so gibt diese den scheinbaren Lauf des Mondes an; mit Hilfe der beigeschriebenen Zeiten läßt sich ferner für jeden Punkt der Kurve bestimmen, wann er mit dem Zentrum des Mondes zusammenfallen wird. Bedeutet nun d den vom Mittelpunkte der Erde und d' den vom Beobachtungsort aus gesehenen Radius des Mondes, so ist annähernd, wenn unter π die Horizontal-Äquatorealparallaxe des Mondes, und unter ζ seine geozentrische Zenitdistanz verstanden wird,

$$d' = d(1 + \sin\pi \cos\zeta)$$

Offenbar muß ein Stern, dessen Abstand von der oben erwähnten Kurve kleiner als d' ist, vom Monde bedeckt werden. Beschreibt man um einen solchen Stern einen Kreis mit dem Radius d', so schneidet dieser die Kurve im allgemeinen in zwei Punkten, welche die Lage des Mondzentrums zu den Zeiten des Ein- und Austrittes angeben; diese Zeiten selbst erhält man unmittelbar mittels der vorhin erwähnten, in der Kurve gemachten Zeitangaben. Der Winkel, den die Richtung von einem Durchschnittspunkte der Kurve zum Stern hin mit der Richtung von dem Durchschnittspunkte zum Pol hin bildet, von letzterer aus in der Richtung der wachsenden Rektaszensionen hin gezählt, gibt den Positionswinkel des Ein-, bzw. Austrittspunktes an.

106. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen. **Erste Methode.** Die Beobachtungen der Sternbedeckungen bieten ein vorzügliches Mittel, sowohl die Länge des Beobachtungsortes als auch die Parallaxe, den Halbmesser und den Ort des Mondes zu bestimmen. Die Bestimmung der Länge des Beobachtungsortes ist aber nur dann möglich, wenn man den Ort des Mondes, bzw. die Fehler der Mondephemeride kennt, und umgekehrt muß die Länge des Beobachtungsortes bekannt sein, wenn man die Fehler der Mondephemeride finden will. Was die in den Gleichungen auftretenden Koordinaten der bedeckten Sterne betrifft, so lassen sich diese durch Meridianbeobachtungen mit so großer Genauigkeit bestimmen, daß sie hier als fehlerfrei betrachtet werden können.

Es werde jetzt angenommen, daß man die Korrektionen der Mondephemeride in irgend einer Weise — sei es durch Meridianbeobachtungen, sei es durch das im folgenden Paragraphen angegebene Verfahren — bestimmt habe und nun eine beobachtete Sternbedeckung zur Ableitung der Länge des Beobachtungsortes benutzen wolle. Zu diesem Zwecke kann man von den Gleichungen (7) Gebrauch machen. Mit Hilfe der Gleichungen (5), in denen μ als beobachtete Größe bekannt ist, lassen sich zunächst die in (7) vorkommenden Koordinaten ξ und η berechnen; dabei ist

aber noch etwas zu berücksichtigen, was bisher vernachlässigt wurde. Die Gleichungen (6) und (7) setzen voraus, daß der durch die Koordinaten ξ und η definierte Punkt auf der Oberfläche des Schattenzylinders liege. Es möge jetzt die in § 77, Fig. 2 mit Sa bezeichnete Gerade einen der genannten Zylinderfläche angehörigen Strahl bedeuten; infolge der Refraktion wird dieser nach b, c, E abgelenkt, und somit nimmt ein in E befindlicher Beobachter eine Bedeckung des Sterns durch den Mond wahr. Die früher gemachte Annahme, daß der Beobachtungsort zurzeit des Ein- und Austrittes auf der Oberfläche des Schattenzylinders liege, ist also nicht richtig; wohl aber liegt der Punkt s, in dem der Strahl Sa verlängert die Richtung CZ trifft, auf jener Oberfläche. In den Gleichungen (6) und (7) darf man darum unter ξ und η nicht die Koordinaten des Beobachtungsortes verstehen, dagegen ist es erlaubt, für ξ und η ihre dem Punkte s entsprechenden Werte zu substituieren. Da die Zeit, in der das Licht die Strecke as zurücklegt, nur unmerklich von derjenigen verschieden ist, welche das Licht gebraucht, um den Bogen $abcE$ zu durchlaufen, so erhält man die Koordinaten von s, wenn man in den Gleichungen (5) μ gleich der beobachteten Zeit des Ein-, bzw. Austrittes annimmt und für ϱ die Entfernung des Punktes s vom Mittelpunkte der Erde substituiert. Wird letztere mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet, und setzt man CE oder die Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde gleich r_0, und $Es = \mathfrak{x}$, so ist $\bar{\varrho} = r_0 + \mathfrak{x}$. Bedeutet aber $\mathfrak{m}_0$ den Brechungsexponenten der Luft am Beobachtungsort, z die scheinbare, und z_0 die wahre Zenitdistanz des Ein-, bzw. Austrittspunktes, so hat man nach § 77, Gleichung (37a), wenn die dort angewandten Bezeichnungen x, μ_0 und ζ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{m}_0$ und z_0 ersetzt werden,

$$\mathfrak{x} = r_0 \left(\frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0} - 1 \right)$$

Somit wird

$$\bar{\varrho} = r_0 \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$$

Ist nun h die Seehöhe des Beobachtungsortes, und bezeichnet man mit ϱ die Entfernung eines im Meeresniveau und unter derselben Breite wie der Beobachtungsort gelegenen Punktes vom Zentrum der Erde, so ergibt sich $r_0 = \varrho + h$ und demnach

$$\bar{\varrho} = \varrho \left(1 + \frac{h}{\varrho} \right) \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$$

Bei der Berechnung von $h : \varrho$ kann man für ϱ seinen mittleren Wert $6\,366\,000^{\mathrm{m}}$ annehmen; drückt man auch h in Metern aus, so folgt dann

$$\bar{\varrho} = \varrho (1 + 0.000\,000\,157\, h) \frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0} \tag{26}$$

Um $\bar{\varrho}$ in Teilen des Äquatorealradius der Erde ausgedrückt zu erhalten, hat man in der letzten Gleichung an Stelle von ϱ den in § 67, (2a) mit $[\varrho]$ bezeichneten Wert anzuwenden, also

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos(\varphi - \varphi')} \qquad [e = 0.081\,826] \tag{26a}$$

zu setzen, wobei φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet.

Der Wert von $\mathfrak{m}_0$ hängt von dem Luftdruck und der Temperatur ab. Legt man aber auch hier einen mittleren Wert zugrunde, so kann der Faktor $\mathfrak{m}_0 \sin z : \sin z_0$ in eine Tafel mit dem Argument z_0 gebracht werden; besser ist es noch, den aus (5) für $\varrho = 1$ folgenden Wert von $\log \zeta$, welcher nahe gleich $\log \cos z_0$ ist, als Argument zu wählen. Man erhält so:

$\log \zeta$	$\frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$	$\log \zeta$	$\frac{\mathfrak{m}_0 \sin z}{\sin z_0}$
9.6	0.000001	9.2	0.000005
9.5	0.000001	9.1	0.000008
9.4	0.000002	9.0	0.000012
9.3	0.000003	8.9	0.000017

Mit Benutzung dieser Tafel läßt sich aus (26) und (26a) der zur Berechnung der Koordinaten ξ und η des Punktes s nötige Wert von $\bar{\varrho}$ ableiten.

Um die für die Gleichungen (7) zu benutzenden Werte von x und y zu erhalten, schlägt man den folgenden Weg ein. Es ist immer möglich, einen genäherten Wert für die Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian, zu finden — so z. B. mit Hilfe einer Karte, oder, wenn die Beobachtung zur See angestellt worden ist, mit Hilfe einer Zeitbestimmung und der Vergleichung der Ortszeit mit der durch die an Bord befindliche Uhr genähert bekannten Zeit eines Hauptmeridians der Erde —; sollte übrigens auch die angenommene Länge ziemlich fehlerhaft sein, so wird man durch die wiederholte Anwendung des hierunter erläuterten Verfahrens doch zu einem genauen Wert der Länge gelangen. Wird die angenommene Länge mit l_0 bezeichnet, und rechnet man l_0 westlich von dem ersten Meridian positiv, so entspricht der Ortssternzeit μ die genäherte Sternzeit $\mu + l_0$ des ersten Meridians; die dieser entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians sei T'. Man entnehme nun aus der Mondephemeride für die der Zeit T' zunächst gelegene volle Stunde T_m sowie auch für je eine oder zwei dieser Stunde unmittelbar vorausgehende, bzw. folgende Stunden die Werte von α und δ, bringe an α und δ ihre als bekannt vorausgesetzten Korrektionen an und leite außerdem mit Hilfe der Mondtafeln die Werte von π ab; indem man sodann von den Gleichungen (3) bis (4) Gebrauch macht, kann man die für die betreffenden Stunden gültigen Werte von x und y berechnen. Bildet man hierauf die Differenzen zwischen den x, bzw. y, so lassen sich mittels der Formel § 4, (24) die für den Beginn der einzelnen Stunden gültigen Werte der ersten Differentialquotienten von x und y (x', bzw. y') bestimmen; diese können auch als die mittleren Änderungen von x und y in einer Stunde mittlerer Zeit bezeichnet werden. Nachdem man so die Werte gefunden hat, welche x, y, x' und y' für die Zeit T_m und für die dieser vorausgehenden und folgenden Stunden haben, kann man durch Interpolation ihre der Zeit T' entsprechenden Werte finden.

Es sei nun $l = l_0 + \Delta l$ die wahre Länge des Beobachtungsortes, und $T' + \tau'$ die der Sternzeit $\mu + l$ entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians; ferner seien x_0, y_0, x_0', y_0' die Werte von x, y, x', y' zur Zeit T'. Wenn dann τ' hinreichend klein ist, so erhält man für die Koordinaten des Mondes zur Zeit $T' + \tau'$

$$x = x_0 + x_0' \tau', \qquad y = y_0 + y_0' \tau'$$

Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichungen (7) und setzt

$$\begin{aligned} m' \sin M' &= x_0 - \xi & n' \sin N' &= x_0' \\ m' \cos M' &= y_0 - \eta & n' \cos N' &= y_0', \end{aligned} \tag{27}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} k \sin Q &= m' \sin M' + \tau' n' \sin N' \\ k \cos Q &= m' \cos M' + \tau' n' \cos N' \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} k \sin (Q - N') &= m' \sin (M' - N') \\ k \cos (Q - N') &= m' \cos (M' - N') + \tau' n' \end{aligned} \tag{28}$$

Der ersten dieser Gleichungen genügen zwei Werte von $Q - N'$; wird der eine mit ψ' bezeichnet, so ist der andere gleich $180 - \psi'$. Demnach erhält man aus der zweiten der Gleichungen (28)

$$\tau' = - \frac{m'}{n'} \cos (M' - N') \mp \frac{k}{n'} \cos \psi' \tag{29}$$

Versteht man unter ψ' den positiven oder negativen spitzen Winkel, welcher der Gleichung

$$\sin \psi' = \frac{m'}{k} \sin (M' - N') \tag{29a}$$

genügt, so entspricht das obere Vorzeichen in (29) dem Ein-, und das untere dem Austritt des Sterns.

Da x_0' und y_0' die Änderungen von x_0 und y_0 in einer Stunde mittlerer Zeit bedeuten, so bezieht sich auch n' auf diese Zeiteinheit, und demnach ist der aus (29) folgende Wert von τ' in Teilen einer mittleren Stunde ausgedrückt. Die der beobachteten Ortssternzeit μ des Ein- oder Austrittes zugehörige mittlere Zeit des ersten Meridians, nämlich $T' + \tau'$, ist also jetzt bekannt; verwandelt man diese in Sternzeit (Θ), so wird die gesuchte Länge des Beobachtungsortes, bezogen auf den ersten Meridian, gleich $\Theta - \mu$. Um $T' + \tau'$ in Sternzeit zu verwandeln, berücksichtige man, daß T' die der Sternzeit $\mu + l_0$ des ersten Meridians entsprechende mittlere Zeit bedeutet; man hat also nur noch τ' in Sternzeit zu verwandeln, und dies geschieht dadurch, daß man τ' mit der in einer Stunde mittlerer Zeit enthaltenen Zahl von Sternzeitsekunden, also mit $3609^s.86$ multipliziert. Es wird somit $\Theta = \mu + l_0 + 3609^s.86\, \tau'$. Substituiert man für τ' seinen in (29) gegebenen Wert, so folgt für die Länge des Beobachtungsortes

$$l = l_0 - \frac{3609^s.86\, m'}{n'} \cos (M' - N') \mp \frac{3609^s.86\, k}{n'} \cos \psi', \tag{30}$$

wo das obere Vorzeichen für den Ein-, und das untere für den Austritt anzuwenden ist.

Ist l stark von l_0 verschieden, so kann man die vorige Rechnung wiederholen, indem man dabei $\mu + l$ als die der Ortssternzeit μ entsprechende Sternzeit des ersten Meridians annimmt, diese in mittlere Zeit verwandelt und die für letztere gültigen Werte x_0, y_0, x_0', y_0' ableitet. Die Anwendung der Gleichungen (27) bis (29a) führt dann zu einem neuen Wert von τ'; wird dieser mit τ_1' bezeichnet, so erhält man als genaueren Wert der Länge des Beobachtungsortes

$$l_1 = l + 3609^s.86\, \tau_1'$$

107. Bestimmung des Ortes, des Halbmessers und der Parallaxe des Mondes aus Beobachtungen von Sternbedeckungen. Diese Bestimmung ist, wie schon bemerkt, nur dann möglich, wenn die auf den ersten Meridian bezogene Länge des Beobachtungsortes bekannt ist. Es sei wieder μ die beobachtete Ortssternzeit der Bedeckung, $\mu + l$ die dieser entsprechende Sternzeit des ersten Meridians, und T' die zugehörige mittlere Zeit des ersten Meridians. Man entnehme zunächst aus der Mondephemeride für die der Zeit T' benachbarte volle Stunde sowie für je eine oder zwei dieser Stunde vorausgehende und folgende Stunden die Werte von α und δ, und berechne mittels der Mondtafeln die zugehörigen Werte von π. Wendet man alsdann die Gleichungen (3) und (4) an, so erhält man für x und y je drei oder fünf Werte und kann mit deren Hilfe die der Zeit T' entsprechenden Werte von x und y finden; letztere mögen mit x_0 und y_0 bezeichnet werden.

Es seien jetzt $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\pi$ die Korrektionen der angenommenen Werte von α, δ und π. Um die diesen Korrektionen entsprechenden Änderungen von x und y zu erhalten, differenziere man die Gleichungen (1); setzt man dabei $r = 1 : \sin\pi$, so folgt

$$dx = \frac{\cos\delta\,\cos(\alpha - A)}{\sin\pi}\,\Delta\alpha - \frac{\sin\delta\,\sin(\alpha - A)}{\sin\pi}\,\Delta\delta - x\,\operatorname{cotg}\pi\cdot\Delta\pi$$

$$dy = \frac{\cos\delta\,\sin(\alpha - A)}{\sin\pi}\,\sin D\,\Delta\alpha + [\cos\delta\,\cos D + \sin\delta\,\sin D\,\cos(\alpha - A)]\,\frac{\Delta\delta}{\sin\pi} - y\,\operatorname{cotg}\pi\cdot\Delta\pi$$

Hier läßt sich $\Delta\pi$ durch die Korrektion des für die Konstante der Äquatorealparallaxe des Mondes angenommenen Wertes π_0 ersetzen. Bezeichnet man nämlich die Entfernung des Mondes von der Erde zur Zeit der Beobachtung mit r, und die mittlere Entfernung des Mondes mit r_0, so ist

$$r\,\sin\pi = r_0\,\sin\pi_0$$

Die Differentiation dieser Gleichung gibt, wenn $\cos\pi = \cos\pi_0$ und $\sin\pi\,dr = \sin\pi_0 dr_0$ gesetzt wird,

$$\Delta\pi = \frac{r_0}{r}\,\Delta\pi_0 = \frac{\sin\pi}{\sin\pi_0}\,\Delta\pi_0$$

Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichungen für dx und dy, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (4)

$$dx = x\,\operatorname{cotg}(\alpha - A)\,\Delta\alpha - x\,\operatorname{tang}\delta\,\Delta\delta - x\,\cos\pi\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}$$

$$dy = x\,\sin D\,\Delta\alpha + \frac{\nu\,\cos(\delta - D + i)}{\sin\pi}\,\Delta\delta - y\,\cos\pi\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0}$$

oder, wenn

$$(31)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} &= -x\,\operatorname{cotg}(\alpha - A), & \mathfrak{b} &= x\,\operatorname{tang}\delta, & \mathfrak{p} &= x\,\cos\pi \\ \mathfrak{a}' &= -x\,\sin D, & \mathfrak{b}' &= -\frac{\nu\,\cos(\delta - D + i)}{\sin\pi}, & \mathfrak{p}' &= y\,\cos\pi \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(32)\qquad \begin{aligned} -dx &= \mathfrak{a}\Delta\alpha + \mathfrak{b}\Delta\delta + \mathfrak{p}\,\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} \\ -dy &= \mathfrak{a}'\Delta\alpha + \mathfrak{b}'\Delta\delta + \mathfrak{p}'\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\pi_0 : \sin\pi_0$ kann man gleichzeitig mit x und y von Stunde zu Stunde berechnen; es ergeben sich dann durch Interpolation ihre für die Zeit T' gültigen Werte.

Die wahren Koordinaten des Mondes zur Zeit T' sind nun $x_0 + dx$, $y_0 + dy$; substituiert man diese in die Gleichung (6), so erhält man, wenn mit Δk die Korrektion des für k angenommenen Wertes k_0 bezeichnet wird,

$$(k_0 + \Delta k)^2 = (x_0 + dx - \xi)^2 + (y_0 + dy - \eta)^2$$

oder, mit Vernachlässigung der Quadrate von Δk, dx und dy,

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - k_0^2 + 2(x_0 - \xi)dx + 2(y_0 - \eta)dy - 2k_0\Delta k = 0$$

In diese Gleichung hat man die in (32) gegebenen Ausdrücke einzuführen. Setzt man dann

$$(33)\qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - k^2] \\ M &= \mathfrak{a}(x_0 - \xi) + \mathfrak{a}'(y_0 - \eta) \\ N &= \mathfrak{b}(x_0 - \xi) + \mathfrak{b}'(y_0 - \eta) \\ P &= \mathfrak{p}(x_0 - \xi) + \mathfrak{p}'(y_0 - \eta) \end{aligned}$$

wo nun ξ und η die Werte bedeuten, welche man aus (5) erhält, wenn für ϱ der aus (26) und (26a) folgende Wert von $\bar{\varrho}$ substituiert wird, so ergibt sich

$$(34)\qquad k_0\Delta k + M\Delta\alpha + N\Delta\delta + P\frac{\Delta\pi_0}{\sin\pi_0} = L$$

Jeder beobachtete Ein- oder Austritt liefert eine solche Bedingungsgleichung. Um aus einer Reihe derartiger Gleichungen die Parallaxe des Mondes bestimmen zu können, müssen die Sternbedeckungen an weit voneinander entfernten Orten beobachtet werden. Verfügt man aber nur über Beobachtungen, welche an einer einzigen Sternwarte angestellt worden sind, so begnügt man sich damit, — vorausgesetzt, daß die Zahl der Beobachtungen hinreichend groß ist —, Δk, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ als Funktionen von $\Delta\pi_0$ zu bestimmen. Für eine gute gleichzeitige Bestimmung von Δk und $\Delta\alpha$ ist es notwendig, außer den Eintritten auch eine Anzahl von Austritten zu beobachten. Wie sehr durch die Beobachtung beider Phänomene die Genauigkeit der Resultate gesteigert wird, geht aus einer Untersuchung *Lagrulas* hervor, der unter der Bedingung, daß die Durchschnittspunkte eines Monddurchmessers mit den relativen Bahnen der Sterne gleichmäßig über den Durchmesser verteilt sind, die Gewichte von $\sin\pi_0\Delta k$ und $\Delta\alpha$ für die Fälle berechnete, 1. daß entweder 20 Eintritte oder ebensoviele Austritte beobachtet sind, 2. daß 10 Beobachtungen von Eintritten und 10 von Austritten vorliegen; es ergab sich

	I	II
Gewicht von $\sin\pi_0\Delta k$	4.58	20.00
» » $\Delta\alpha$	2.74	11.98

Die Beobachtungen am hellen Rande des Mondes sind, namentlich bei schwächeren Sternen, erheblich unsicherer als die am dunklen Rand erhaltenen; die auf ersteren beruhenden Bedingungsgleichungen haben demnach ein geringeres Gewicht. Nach *Lagrula* kann man einer Bedingungsgleichung in erster Näherung das Gewicht 1 oder $\frac{1}{2}$ geben, jenachdem der Ein-, bzw. Austritt am dunklen oder am hellen Rand beobachtet wurde. Bildet man unter dieser Annahme die Normalgleichungen und substituiert deren Lösungen in die Bedingungsgleichungen, so läßt sich mit Hilfe der übrig bleibenden Fehler feststellen, ob die zu Anfang über die Gewichte gemachte Annahme einer Verbesserung bedarf.

Ist die Zahl der an einem Abend erhaltenen Beobachtungen klein, so lassen sich die Gleichungen (34) nur dazu benutzen, die bei den gegenwärtig zu Gebote stehenden Mondtafeln immer noch beträchtlichen Korrektionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ als Funktionen von Δk und $\Delta\pi_0$ darzustellen. Wenn es dann späterhin gelingt, die gegenwärtig für π_0 und k gemachten, bereits sehr nahe richtigen Annahmen noch weiter zu verbessern, so erhält man sofort die den neuen Werten von π_0 und k entsprechenden $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$.

Hat man die Werte von k und π_0 gefunden, so läßt sich auch der Winkel w bestimmen, unter dem der Mondradius, in der mittleren Entfernung r_0 des Mondes von der Erde, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird. Man hat nämlich der Definition von k gemäß, wenn s und a die linearen Halbmesser des Mondes, bzw. des Erdäquators bedeuten,

$$k = \frac{s}{a} = \frac{s}{r_0 \sin \pi_0} \tag{35}$$

also, da $\sin w = s : r_0$ ist,

$$\sin w = k \sin \pi_0 \tag{36}$$

Bisher ist der Rand der Mondscheibe als kreisförmig betrachtet worden; diese Annahme ist indessen nicht streng erfüllt, vielmehr sind am Mondrand Erhebungen und Vertiefungen deutlich wahrnehmbar. Mit Hilfe einer photographischen Aufnahme lassen sich die Erhöhungen und Vertiefungen in bezug auf einen idealen kreisförmigen Rand des Mondes ermitteln; es hat sich dabei gezeigt, daß der wahre Rand nicht nur an einzelnen Punkten, sondern wiederholt in einer Ausdehnung von mehreren Graden über das mittlere Niveau hinausragt, bzw. unter dasselbe herabsinkt. Wenn es nun auch mit großen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, auf die isolierten Unebenheiten des Mondrandes Rücksicht zu nehmen, so läßt sich doch die Erhebung oder Vertiefung größerer Strecken des Randes ohne Mühe in Rechnung ziehen. Ist nämlich r die Entfernung des Mondes von der Erde zur Zeit der Beobachtung, und w' der Winkel, unter dem dann der Radius des idealen kreisförmigen Mondrandes vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird, ist ferner $\Delta w'$ die aus den Mondphotographien abgeleitete, in Winkelmaß ausgedrückte Erhöhung des wirklichen Mondrandes über den idealen Rand, so ergibt sich die Erhöhung in linearem Maß gleich $r\Delta w'$. In der Gleichung (35) ist also s durch $s_0 + r\Delta w'$ zu ersetzen, wo unter s_0 der lineare Radius des idealen Mondrandes zu verstehen ist; der für die Gleichung (6) zu verwendende Wert von k wird demnach

$$k = \frac{s_0 + r\Delta w'}{a} = \frac{s_0}{a} + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$$

Bedeutet nun k_0 einen angenommenen Wert von $s_0 : a$, und Δk_0 die Korrektion desselben, so folgt

$$k = k_0 + \Delta k_0 + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$$

Man hat also in der Gleichung (34) Δk durch $\Delta k_0 + \frac{\Delta w'}{\sin \pi}$ zu ersetzen und erhält dann als Bedingungsgleichung

$$k_0 \Delta k_0 + M \Delta \alpha + N \Delta \delta + P \frac{\Delta \pi_0}{\sin \pi_0} = L - k_0 \frac{\Delta w'}{\sin \pi} \tag{37}$$

Die Summe $k_0 + \Delta k_0$ stellt den Radius des idealen Mondrandes, gemessen in Teilen des Radius des Erdäquators, dar, und der Sinus des Winkels, unter dem dieser Radius in der mittleren Entfernung des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde aus gesehen wird, ist nach (36) gleich $(k_0 + \Delta k_0) \sin \pi_0$.

Zu dem Vorstehenden ist noch eine Bemerkung zu machen. Da die sogenannte Libration des Mondes zur Folge hat, daß die Grenze des Mondrandes nicht immer durch dieselben Gebilde der Mondoberfläche hindurchgeht, sondern in bezug auf letztere periodischen Schwankungen unterworfen ist, so muß man, um auf die Abweichungen des Mondes von der Kugelgestalt Rücksicht nehmen zu können, die auf ein fest mit dem Mondkörper verbundenes Achsensystem bezogenen Koordinaten des Ein-, bzw. Austrittspunktes kennen. In welcher Weise man diese Koordinaten bestimmt, wird im 21. Kapitel gezeigt werden.

108. Bestimmung der Länge eines Ortes durch Beobachtungen von Sternbedeckungen. Zweite Methode. Für die Ermittlung der Länge eines Beobachtungsortes kann man auch die Gleichung (34), bzw. (37) benutzen. Wenn μ wieder die Ortssternzeit eines beobachteten Ein- oder Austrittes, l_0 die auf den ersten Meridian bezogene genäherte Länge des Beobachtungsortes, Δl die in Zeitsekunden ausgedrückte Korrektion von l_0, α und δ die für die der Sternzeit $\mu + l_0$ entsprechende mittlere Zeit des ersten Meridians aus der Ephemeride entnommene Rektaszension und Deklination des Mondes bedeuten und die an α und δ anzubringenden, als bekannt vorausgesetzten Korrektionen mit $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ bezeichnet werden, wenn ferner m und n die Änderungen von α und δ in einer Sternzeitsekunde angeben, so stellen $\alpha + \Delta \alpha + m \Delta l$ und $\delta + \Delta \delta + n \Delta l$ die wahre Rektaszension und Deklination des Mondes zur Zeit der Beobachtung dar. Um m und n zu erhalten, sind die aus der Ephemeride folgenden, für eine Stunde mittlerer Zeit gültigen Änderungen von α und δ durch 3609.86 zu dividieren. In der Gleichung (34) muß nun $\Delta \alpha$ durch $\Delta \alpha + m \Delta l$, und $\Delta \delta$ durch $\Delta \delta + n \Delta l$ ersetzt werden; man erhält dann

$$k_0 \Delta k + (Mm + Nn) \Delta l + P \frac{\Delta \pi_0}{\sin \pi_0} = L - M \Delta \alpha - N \Delta \delta \tag{38}$$

Will man auf die Unebenheiten des Mondrandes Rücksicht nehmen, so ist auf der rechten Seite dieser Gleichung das in (37) vorkommende Glied $- k_0 \Delta w' : \sin \pi$ hinzuzufügen.

Jeder beobachtete Ein- oder Austritt liefert eine Bedingungsgleichung von der Form (38). Diese Gleichungen können aber nicht etwa zu einer zuverlässigen Bestimmung von Δk und $\Delta \pi_0$ verwandt werden, sondern sollen nur die Möglichkeit gewähren, die Längenkorrektion in der Form

$$\Delta l = c + \beta \Delta k + \gamma \Delta \pi_0$$

darzustellen. Abgesehen davon, daß man so beurteilen kann, inwieweit die Annahme $\Delta l = c$ durch die Unsicherheit der für k und π_0 zugrunde gelegten Werte beeinflußt ist, hat man noch den Vorteil, etwaige in der Zukunft gefundene kleine Verbesserungen der beiden zuletzt genannten Größen leicht berücksichtigen zu können.

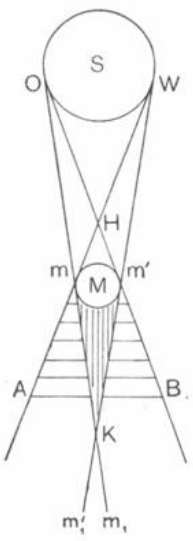
Kapitel XIX.

Sonnenfinsternisse.

I. Fundamentalgleichungen und Vorausberechnung einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort.

109. Einleitung. Unter der Voraussetzung, daß die Sonne und der Mond als vollkommen kugelförmig betrachtet werden können, sei S (Fig. 1) der Mittelpunkt der Sonne und M der Mittelpunkt des Mondes; H und K seien die auf der Verbindungslinie SM, bzw. deren Verlängerung gelegenen Scheitel der beiden, die Sonne und den Mond einhüllenden Kegel HAB, bzw. mKm'. Alle Punkte, welche sich innerhalb des Kegels mKm' befinden, empfangen kein Licht von der Sonne; für sie findet also eine totale Sonnenfinsternis statt. Jene Punkte aber, die innerhalb des zum Kegel HAB gehörigen Kegelstumpfes $mABm'$, jedoch außerhalb des Kegels mKm' liegen, werden zwar von der Sonne beleuchtet, aber nur von einem Teile derselben; die Sonnenfinsternis ist also für sie eine partielle. Man nennt nun den Kegel HAB den Halbschatten- und den Kegel Kmm' den Kernschattenkegel; die gemeinsame Achse beider Kegel wird die Schattenachse genannt. Von einem innerhalb der Verlängerung $m_1' K m_1$ des Kernschattenkegels befindlichen Punkte aus gesehen, erscheint der Mond ganz auf die Sonne projiziert, aber so, daß rings um ihn herum der Sonnenrand sichtbar bleibt; die Finsternis wird in diesem Falle als ringförmig bezeichnet.

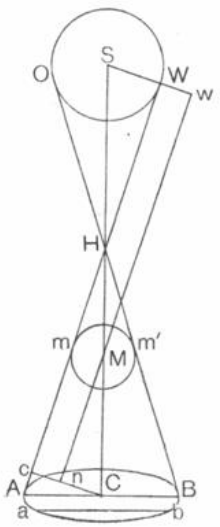
Fig. 1.



Eine durch den Halbschattenkegel senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene schneidet den Halbschattenkegel in einem Kreise; von allen Punkten eines solchen

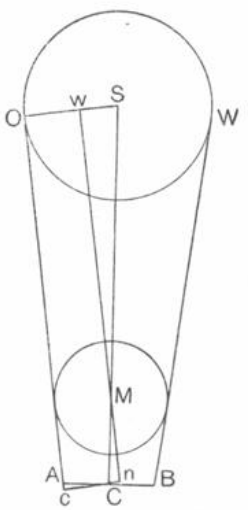
Kreises (z. B. des Kreises AbB in Fig. 2) aus gesehen, scheinen die Ränder des Mondes und der Sonne sich von außen zu berühren. Es möge nun BA die Richtung der Bewegung der Schattenachse angeben, wobei also A östlich von B liegt; ein in A befindlicher Beobachter sieht dann in dem auf die Berührung folgenden Moment einen Teil der Sonne verdeckt, für einen in B aufgestellten Beobachter dagegen hat sich der Mond von der Sonne entfernt. Die in Fig. 2 gezeichnete Lage entspricht also für den Beobachter A dem Beginn, und für den Beobachter B dem Ende der Finsternis.

Fig. 2.



Man stelle sich nun vor, daß, während sich die Schattenachse von B nach A bewegt, ein in a aufgestellter Beobachter seine Lage unverändert beibehalte; es ist dann ohne weiteres einleuchtend, daß dieser die Sonne am stärksten verfinstert sehen wird, wenn der Mittelpunkt der zu BA parallelen Sehne ba über ihn hinweggeht. Legt man also durch einen Beobachtungsort eine Ebene senkrecht zur Schattenachse, und ist C der Mittelpunkt des Kreises, den der Halbschattenkegel auf der Ebene ausschneidet, so findet das Maximum der Verfinsterung für den Beobachtungsort statt, wenn die Verbindungslinie des Ortes mit C senkrecht zu der Richtung steht, in der sich C bewegt. Infolge der bei der Ableitung dieses Resultates begangenen Vernachlässigungen stellt dasselbe nur eine rohe, wenn auch für eine späterhin zu behandelnde Aufgabe genügende Näherung dar; der Winkel, den die durch C und den Beobachtungsort bestimmte Gerade zur Zeit des Maximums der Verfinsterung mit der Bewegungsrichtung von C bildet, kann nämlich bis zu 20° von 90°, bzw. von 270° verschieden sein.

Fig. 3.



Denkt man sich die zur Schattenachse senkrechte Ebene durch den Kernschattenkegel hindurchgelegt (AB in Fig. 3), so findet für einen in A befindlichen Beobachter eine innere Ränderberührung des Mondes und der Sonne, und zwar auf der Ostseite der beiden Gestirne statt; die Sonne ist dann ganz verdeckt und bleibt es bis zu dem Augenblicke, wo der durch A als Scheitel gelegte und den Mond einhüllende Kegel den Westrand der Sonne berührt. Für den Beobachter in A beginnt demnach die totale Sonnenfinsternis. Auch für einen Beobachter in B findet eine innere Ränderberührung statt, jedoch bei dem Fortschreiten des Mondes nach Osten wird der Westrand der Sonne wieder frei. Für den Beobachter in B endigt also die totale Finsternis.

Geht die zur Schattenachse senkrechte Ebene durch die Verlängerung des Kernschattenkegels (AB in Fig. 4), so sieht ein in A aufgestellter Beobachter die Westränder der Sonne und des Mondes in Berührung, dagegen ist der Ostrand der Sonne

frei; bei dem Fortschreiten des Mondes nach Osten wird auch der Westrand der Sonne für A sichtbar, und die Finsternis zu einer ringförmigen. Die von dem Beobachter A wahrgenommene innere Berührung des Sonnen- und Mondrandes bedeutet also für ihn den Beginn der ringförmigen Finsternis. Ein in B befindlicher Beobachter sieht ebenfalls den Sonnen- und Mondrand in innerer Berührung, aber auf der Ostseite der beiden Gestirne; in dem folgenden Zeitmoment beginnt jedoch der Mond aus der Sonnenscheibe auszutreten. Für B endet also die ringförmige Sonnenfinsternis.

Fig. 4.

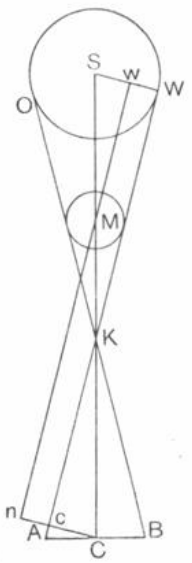
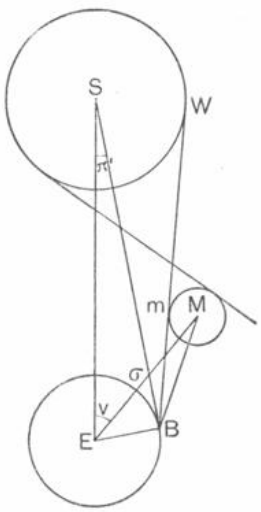


Fig. 5.



110. Bedingung für das Eintreten einer Sonnenfinsternis. In Fig. 5 seien S, M und E die Mittelpunkte der Sonne, des Mondes und der Erde; ferner werde angenommen, daß die erzeugende Gerade Wm des Halbschattenkegels die Erde schneide, und somit ein in dem Durchschnittspunkte B befindlicher Beobachter eine äußere Ränderberührung von Sonne und Mond wahrnehme. Verbindet man E mit B, und jeden dieser Punkte mit M und S, setzt man ferner $SEM = v$, $SBM = a$, $ESB = \pi_1'$, $EMB = \pi_1$, so erhält man für den Winkel $S\sigma M = x$ die beiden Ausdrücke

$$x = v + \pi_1', \qquad x = a + \pi_1$$

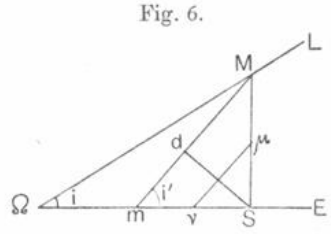
Hieraus folgt

$$a = v - (\pi_1 - \pi_1')$$

Bezeichnet man die Winkel MBm und SBW, d. h. die vom Beobachtungsort aus gesehenen Halbmesser des Mondes und der Sonne mit $\bar{r}$, bzw. $\bar{r}'$, so ist für die äußere Ränderberührung $a = \bar{r} + \bar{r}'$; wenn aber der Beobachtungsort in den Halbschattenkegel eingetreten ist, so hat man $a < \bar{r} + \bar{r}'$. Mit Rücksicht auf den vorhin gegebenen Ausdruck für a ergibt sich also als Bedingung für das Eintreten einer Sonnenfinsternis

$$v \leqq \bar{r} + \bar{r}' + \pi_1 - \pi_1'$$

Fig. 6.



Nun ist eine Sonnenfinsternis nur dann möglich, wenn sich der Mond in der Nähe seiner Konjunktion mit der Sonne befindet und gleichzeitig der Ekliptik, also auch einem seiner Knoten nahe ist. Um entscheiden zu können, ob in einem Falle, wo diese beiden Bedingungen erfüllt sind, eine Finsternis wirklich stattfinden wird, muß zunächst der jedesmalige kleinste geozentrische Abstand zwischen den Mittelpunkten der Sonne und des Mondes berechnet werden. Es sei (Fig. 6) ΩE die Ekliptik, ΩL die Mondbahn und i die

Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik, M und S seien die der Voraussetzung nach in der Nähe des Knotens der Mondbahn gelegenen, geozentrischen Örter des Mondes und der Sonne zur Zeit der Konjunktion in Länge; der Bogen MS ist also senkrecht zu ΩE. Bezeichnet man jetzt mit Δl und $\Delta l'$ die stündliche Bewegung des Mondes, bzw. der Sonne in Länge und mit Δb die stündliche Bewegung des Mondes in Breite, so geben $\Delta l - \Delta l'$ und Δb die relative stündliche Bewegung des Mondes in bezug auf die Sonne an; trägt man demnach auf $S\Omega$ und SM die Bögen $S\nu = \Delta l - \Delta l'$, bzw. $S\mu = \Delta b$ auf, so ist $\nu\mu$ parallel der relativen Bahn des Mondes in bezug auf die Sonne. Die Neigung dieser Bahn gegen die Ekliptik werde mit i' bezeichnet; wenn dann das Dreieck $S\mu\nu$ als eben betrachtet wird, so ergibt sich

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\Delta b}{\Delta l - \Delta l'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'} \frac{\Delta b}{\Delta l}$$

Innerhalb der Zeit, in welcher der Mond den der Annahme gemäß kleinen Bogen ΩM beschreibt, kann aber die Bewegung des Mondes als gleichförmig betrachtet werden; wird dieses Zeitintervall mit τ bezeichnet, so hat man also, wenn τ in Teilen einer Stunde ausgedrückt ist,

$$\Omega S = \Delta l \cdot \tau, \qquad MS = \Delta b \cdot \tau$$

Für die hier in Betracht kommende Genauigkeit läßt sich nun auch das Dreieck ΩMS als ein ebenes auffassen; mit Benutzung der beiden letzten Gleichungen folgt dann

$$\frac{\Delta b}{\Delta l} = \frac{MS}{\Omega S} = \operatorname{tang} i$$

Somit erhält man, wenn noch zur Abkürzung $\frac{\Delta l}{\Delta l'} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{tang} i$$

Die relative Bahn des Mondes in bezug auf die Sonne wird durch den zu $\mu\nu$ parallelen Bogen Mm dargestellt; der gesuchte kürzeste geozentrische Abstand der Mittelpunkte von Sonne und Mond ist demnach gleich dem durch S senkrecht zu Mm gelegte Bogen Sd. Setzt man nun $MS = \beta$, so daß β die Breite des Mondes zur Zeit des Neumondes bedeutet, so wird Sd gleich $\beta \cos i'$; dies ist also der kleinste Wert, den der im vorigen mit v bezeichnete Winkel annehmen kann. Die oben für das Eintreten einer Finsternis abgeleitete Bedingung lautet jetzt

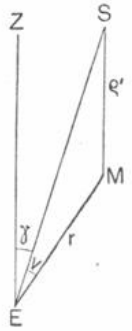
$$\beta \leqq (\bar{r} + \bar{r}' + \pi_1 - \pi_1') \sec i'$$

Nun folgt aus dem Verhältnis der Umlaufszeit der Erde um die Sonne zu derjenigen des Mondes um die Erde, daß der mittlere Wert von λ gleich 13.4 ist; ferner hat man $i = 5^\circ 9'$. Aus der für $\operatorname{tang} i'$ aufgestellten Gleichung ergibt sich somit $i' = 5^\circ 34'$. Die kleinsten Werte, welche $\bar{r}$, $\bar{r}'$ und $\pi_1 - \pi_1'$ annehmen können, sind $\bar{r} = 14.'4$, $\bar{r}' = 15.'7$, $\pi_1 - \pi_1' = 52.'7$, und die größten $\bar{r} = 16.'8$, $\bar{r}' = 16.'3$, $\pi_1 - \pi_1' = 61.'4$. Ist also zur Zeit des Neumondes $\beta < 82.'8 \sec 5^\circ 34' = 1^\circ 23'$, so ist eine Finsternis mit Sicherheit zu erwarten; hat man aber $\beta > 94.'5 \sec 5^\circ 34' = 1^\circ 35'$,

so ist eine Finsternis unmöglich. Liegt β innerhalb der beiden angegebenen Grenzen, so hängt es von den Werten, welche $\bar{r}$, $\bar{r}'$ und $\pi_1 - \pi_1'$ haben, ab, ob eine Finsternis stattfinden wird.

Aus dem vorhin Gesagten folgt noch, daß die größte geozentrische Winkeldistanz der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes zur Zeit einer Finsternis gleich $1^\circ 34.'5$ ist. In Fig. 7 seien nun E, M und S die Mittelpunkte der Erde, des Mondes und der Sonne; zieht man EZ parallel zu MS und setzt $EM = r$, $MS = \varrho'$, $SEM = v$, $ZES = ESM = \gamma$, so ergibt sich

Fig. 7.



$$\sin\gamma = \frac{r}{\varrho'} \sin v$$

Es ist aber näherungsweise

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{1}{400},$$

demnach wird der dem Maximalwerte $v = 1^\circ 34.'5$ entsprechende Wert von γ gleich $14.''2$. Der größte geozentrische Abstand zwischen der Sonne und dem Punkte Z ist also bei einer Finsternis kleiner als $15''$.

111. Radius eines Kreisschnittes der Schattenkegel. Wie aus § 109 hervorgeht, kann eine Berührung der Ränder von Sonne und Mond nur dann stattfinden, wenn die Oberfläche eines der Schattenkegel durch den Ort des Beobachters hindurchgeht. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Abstand des Beobachters von der Schattenachse gleich dem Radius des Kreises ist, den die Mantelfläche des Schattenkegels auf einer durch den Beobachtungsort senkrecht zur Schattenachse gelegten Ebene AB ausschneidet. Um diese Bedingung durch eine Gleichung ausdrücken zu können, ist es notwendig, den Radius des erwähnten Kreises zu bestimmen. Zunächst soll der Fall betrachtet werden, wo die Ebene AB den Halbschattenkegel schneidet (Fig. 2). Es sei s der lineare Halbmesser des Mondes, s' der lineare Halbmesser der Sonne, ϱ' die Entfernung der Mittelpunkte beider Gestirne voneinander, Z' der Abstand des Mondmittelpunktes von der Ebene AB. Wird nun die Gerade Cc senkrecht zu AW gezogen, und bezeichnet man den halben Öffnungswinkel $AHC = cCA$ des Halbschattenkegels mit f_a und den gesuchten Radius AC mit u, so folgt

$$Cc = u \cos f_a$$

Wenn aber die Gerade nMw parallel zu AW gezogen wird, so ergibt sich

$$Cc = Cn + nc = Z' \sin f_a + s$$

Aus den zwei letzten Gleichungen erhält man

$$u = (Z' \sin f_a + s) \sec f_a \tag{1}$$

Aus dem Dreieck SMw folgt aber

$$\sin f_a = \frac{s + s'}{\varrho'} \tag{2}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der weiterhin mitgeteilten Werte von s und s', sowie des Minimalbetrages von ϱ' ergibt sich, daß f_a höchstens gleich $16.'4$ werden kann.

Schneidet die durch den Beobachtungsort senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene AB den Kernschattenkegel (Fig. 3), so ziehe man Ccn senkrecht, und nMw parallel zu der Tangente AO. Wird jetzt der halbe Öffnungswinkel $wMS = ACc$ des Kernschattenkegels mit φ, und der gesuchte Radius AC mit u bezeichnet, so erhält man für Cc die beiden Gleichungen

$$Cc = u\cos\varphi, \qquad Cc = s - Z'\sin\varphi$$

Hieraus ergibt sich

$$u = (-Z'\sin\varphi + s)\sec\varphi$$

Zur Bestimmung von φ hat man dem Dreiecke SMw zufolge

$$\sin\varphi = \frac{s' - s}{\varrho'}$$

Setzt man $\varphi = -f_i$, so werden die beiden letzten Gleichungen

$$u = (Z'\sin f_i + s)\sec f_i \tag{3}$$

$$\sin f_i = \frac{s - s'}{\varrho'} \tag{4}$$

Wenn die Ebene AB den verlängerten Kernschattenkegel schneidet (Fig. 4), und demnach für die zwischen A und B gelegenen Punkte eine ringförmige Sonnenfinsternis stattfindet, so ziehe man Cn senkrecht, und nMw parallel zu AW; bezeichnet man dann den Radius AC mit $-u$, und bedeutet φ wieder den Öffnungswinkel des Kernschattenkegels, so ergibt sich

$$Cc = -u\cos\varphi, \qquad Cc = Z'\sin\varphi - s$$

Hieraus folgt, wenn wie vorhin $\varphi = -f_i$ gesetzt, und die Gleichung (4) berücksichtigt wird,

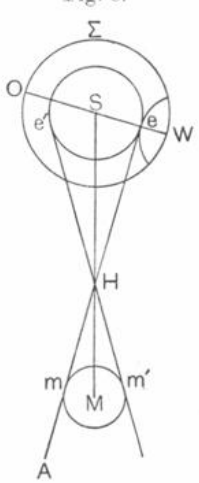
$$u = (Z'\sin f_i + s)\sec f_i \tag{5}$$

$$\sin f_i = \frac{s - s'}{\varrho'} \tag{6}$$

Da jetzt $Z'\sin f_i$ seinem absoluten Werte nach größer wie s, und f_i negativ ist, so gibt die Gleichung (5) einen negativen Wert für u; mit Rücksicht hierauf ist der Radius AC gleich $-u$ gesetzt worden.

Die Gleichungen (1) und (2) gestatten eine für die Berechnung der Finsternisse wichtige Anwendung. Wenn die in einem Punkte m (Fig. 8) an den Mondrand gelegte Tangente Ae die durch den Kreis $O\Sigma W$ bezeichnete Sonne im Punkte e trifft, so sieht ein in A befindlicher Beobachter die Sonne partiell verfinstert. Um die Größe der Verfinsterung anzugeben, denke man sich den durch e gehenden Sonnendurchmesser $OW = 2s'$ in zwölf gleiche Teile geteilt; ist dann eW gleich i solcher Teile, so sagt man, daß die Phase der Verfinsterung i Zoll betrage. Beschreibt man nun um S eine Kugel mit dem Radius $Se = \left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$,

Fig. 8.



so findet für den Beobachter in A eine äußere Berührung des Randes dieser Kugel mit dem Mondrande statt; gleichzeitig läßt sich Ame als die erzeugende Gerade eines die genannte Kugel und den Mond einhüllenden Halbschattenkegels betrachten. Den Gleichungen (1) und (2) zufolge hat man also, wenn f den halben Öffnungswinkel des Kegels mHm', und u den Radius des Kreises bedeutet, welchen dieser Kegel auf der durch A senkrecht zur Schattenachse SM gelegten Ebene ausschneidet,

$$u = (Z' \sin f + s) \sec f \tag{7}$$

$$\sin f = \frac{s + \left(1 - \frac{i}{6}\right) s'}{\varrho'} \tag{8}$$

Betrachtet man eine äußere Berührung von Sonne und Mond als eine Verfinsterung von 0 Zoll, und eine innere Berührung, d. h. den Anfang oder das Ende einer totalen oder ringförmigen Finsternis als eine Verfinsterung von 12 Zoll, so schließen die Gleichungen (7) und (8) die oben für äußere und innere Ränderberührungen gesondert abgeleiteten Gleichungen (1) bis (6) bereits in sich. Mit Berücksichtigung des zu Beginn dieses Paragraphen Gesagten hat man jetzt den Satz: In dem Augenblick, wo für einen Beobachtungsort die Phase der Verfinsterung i Zoll beträgt und gleichzeitig $i < 12$ ist, ist der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse gleich dem durch die Gleichungen (7) und (8) bestimmten Werte von u. Für $i = 12$ ist der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse gleich u, wenn es sich um eine totale Finsternis handelt, dagegen gleich $-u$, wenn die Finsternis ringförmig ist.

Für das Folgende ist es noch nötig, den Radius des Kreises zu bestimmen, den ein einem Werte $i \leqq 12$ entsprechender Schattenkegel auf einer durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zu der Schattenachse gelegten Ebene ausschneidet. Ist Z der Abstand des Mondes von dieser Ebene, und bezeichnet man den gesuchten Radius mit u', bzw. (wenn $i = 12$ ist, und unter dem Schattenkegel der verlängerte Kernschattenkegel zu verstehen ist) mit $-u'$, so ergibt sich aus (7)

$$u' = (Z \sin f + s) \sec f \tag{9}$$

Der unter einer bestimmten Annahme für i gültige Wert von f läßt sich durch die Gleichung (8) finden, jedoch pflegt letztere in einer anderen Form angewandt zu werden. Setzt man nämlich wie oben

$$\frac{s + s'}{\varrho'} = \sin f_a, \qquad \frac{s - s'}{\varrho'} = \sin f_i,$$

wo also f_a und f_i die der äußeren, bzw. inneren Berührung entsprechenden Werte von f bedeuten, so wird die Gleichung (8)

$$\sin f = \sin f_a - \frac{\sin f_a - \sin f_i}{12}\, i \tag{10}$$

Auch die Gleichung (9) läßt sich noch umformen. Aus (9) und (10) ergibt sich zunächst

$$u' \cos f = Z \sin f_a + s - \frac{Z \sin f_a - Z \sin f_i}{12}\, i$$

Wenn aber u'_a und u'_i die der äußeren, bzw. inneren Berührung entsprechenden Werte von u' bedeuten, so ist der Gleichung (9) zufolge

$$\begin{aligned} u'_a \cos f_a &= Z \sin f_a + s \\ u'_i \cos f_i &= Z \sin f_i + s \end{aligned} \tag{11}$$

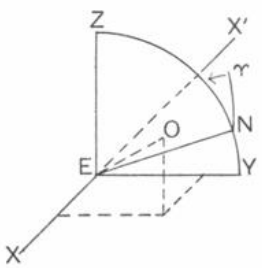
Da nun $\cos f_a = \cos f_i = \cos f$ angenommen werden kann, so erhält man aus den drei letzten Gleichungen

$$u' = u'_a - \frac{u'_a - u'_i}{12}\, i \tag{12}$$

Das bei der praktischen Anwendung der Gleichungen (7) bis (12) einzuschlagende Verfahren findet man in § 114 angegeben.

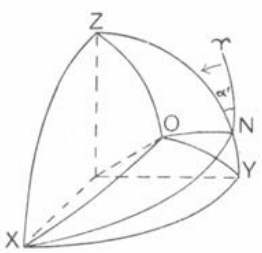
112. Koordinaten des Beobachtungsortes. Um für den Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse einen zweiten Ausdruck zu erhalten, bezieht man den Ort auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist, und dessen eine Achse, die als Z-Achse gewählt werden möge, parallel zur Schattenachse läuft; kennt man dann auch noch die Koordinaten des Punktes, in dem die Schattenachse die XY-Ebene schneidet (§ 113), so ergibt sich ohne weiteres der gesuchte Abstand. In Fig. 9 sei E der Mittelpunkt der Erde, EZ die Z-Achse und EN die Richtung zum Pol. Die Ebene ZEN schneidet die XY-Ebene in einer Geraden, deren auf der Seite des Nordpols gelegene Hälfte EY als positive Y-Achse gewählt werden soll. Da die Richtung zum Pole in der ZY-Ebene liegt, so fällt die X-Achse in die Durchschnittslinie XX' der XY-Ebene mit der Ebene des Äquators. Als positive X-Achse soll jetzt diejenige der beiden Richtungen EX und EX' betrachtet werden, deren Zielpunkt eine um 90° größere Rektaszension hat als Z. Nimmt man also an, daß der Bogen $N\Upsilon$ zum Frühlingsäquinox hin gerichtet ist, und daß die Rektaszensionen, von N aus gesehen, von rechts nach links gezählt werden, so ist EX die Richtung der positiven X-Achse. Ist nun O der Beobachtungsort, und ϱ sein Abstand vom Mittelpunkte der Erde, sind ferner x, y, z die auf die Achsen EX, EY, EZ bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes, so hat man, wenn die Winkel OEX, OEY, OEZ mit OX, OY, OZ bezeichnet werden,

Fig. 9.



$$x = \varrho \cos OX \qquad y = \varrho \cos OY \qquad z = \varrho \cos OZ$$

Fig. 10.



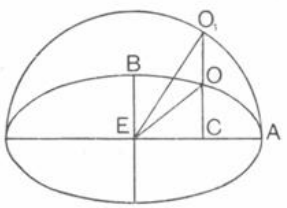
Zur Bestimmung der hier auftretenden Richtungscosinus von EO verlängere man die Koordinatenachsen und die Richtungen EN, $E\Upsilon$, EO bis zu ihren Durchschnittspunkten X, Y, Z, N, Υ und O mit der um E beschriebenen Sphäre (Fig. 10). Bedeutet μ' die Sternzeit und φ' die geozentrische Breite des Beobachtungsortes, so ist der Winkel ΥNO gleich μ', und ON gleich $90° - \varphi'$. Man setze jetzt

$\gamma NZ = \alpha'$ und $NZ = 90^\circ - \delta'$, so daß also α' die geozentrische Rektaszension, und δ' die geozentrische Deklination von Z bedeutet; es ergibt sich dann $ZNO = \mu' - \alpha'$, $ONX = 90^\circ - (\mu' - \alpha')$, $ONY = 180^\circ - (\mu' - \alpha')$, $NY = \delta'$, $XN = 90^\circ$. Berechnet man nun mit Hilfe der Dreiecke XON, YON, ZON die Werte von $\cos OX$, $\cos OY$, $\cos OZ$ und substituiert diese in die obigen Gleichungen für x, y und z, so wird

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - \alpha') \\ y &= \varrho [\sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \\ z &= \varrho [\sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \end{aligned} \tag{13}$$

Die Produkte $\varrho \cos\varphi'$ und $\varrho \sin\varphi'$ lassen sich durch andere Ausdrücke ersetzen. In Fig. 11 sei $EA = a$ der Radius des Erdäquators, $EB = b$ die halbe kleine Achse der Erde und O der Beobachtungsort; es ist dann $OEA = \varphi'$ und $EO = \varrho$. Beschreibt man nun mit dem Radius a einen Kreis um E und zieht durch O eine Parallele zu EB, welche den Kreis im Punkte O_1 schneidet, so ergibt sich, wenn $O_1EC = \varphi_1$ gesetzt wird,

Fig. 11.



$$\begin{aligned} \varrho \cos\varphi' &= a \cos\varphi_1 \\ \varrho \sin\varphi' &= a \sin\varphi_1 - OO_1 \end{aligned} \tag{14}$$

Bekanntlich findet aber die Proportion statt

$$O_1C : OC = a : b$$

Hieraus folgt, wenn

$$\frac{a-b}{a} = e$$

gesetzt wird,

$$OO_1 = \frac{a-b}{b} OC = \frac{e}{1-e} \varrho \sin\varphi'$$

Substituiert man diesen Wert von OO_1 in die Gleichungen (14) und wählt als Einheit von ϱ den Radius des Erdäquators, so erhält man

$$\begin{aligned} \varrho \cos\varphi' &= \cos\varphi_1 \\ \varrho \sin\varphi' &= (1-e) \sin\varphi_1 \end{aligned} \tag{14a}$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke werden die Gleichungen (13)

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi_1 \sin(\mu' - \alpha') \\ y &= (1-e) \sin\varphi_1 \cos\delta' - \cos\varphi_1 \sin\delta' \cos(\mu' - \alpha') \\ z &= (1-e) \sin\varphi_1 \sin\delta' + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha') \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichungen sind an Stelle von (13) anzuwenden, wenn der Verlauf einer Finsternis für die ganze Erde vorauszuberechnen ist, und somit die Breiten der Orte, an denen die Finsternis sichtbar sein wird, erst bestimmt werden müssen.

Aus § 67, (1) und der Bedeutung von c folgt, wenn φ die geographische Breite bezeichnet,

$$\operatorname{tang}\varphi' = (1-e)^2 \operatorname{tang}\varphi$$

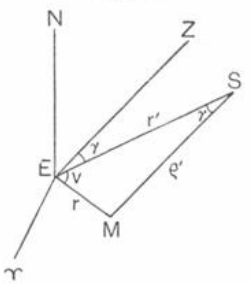
Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ergibt sich aus (14a)

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1}{1-e} \tag{15a}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich für jeden Wert von φ_1 das zugehörige φ berechnen.

Die Gleichungen (13) und (15) enthalten noch die Unbekannten α' und δ'. Um diese zu bestimmen, nehme man die Fig. 12 zu Hilfe, worin wieder E den Mittelpunkt der Erde, EN die Richtung zum Pol des Äquators, $E\Upsilon$ die Richtung zum Frühlingsäquinox bedeutet, und wo mit M und S die Mittelpunkte des Mondes, bzw. der Sonne bezeichnet sind; die Gerade EZ ist die vorhin als Z-Achse gewählte Parallele zur Schattenachse MS. Setzt man $EM = r$, $ES = r'$, $MES = v$, so erhält man für die früher mit ϱ' bezeichnete Entfernung MS

Fig. 12.



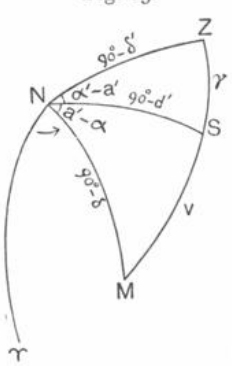
$$\varrho' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos v} \tag{16}$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck ESM, wenn $ESM = ZES = \gamma$ gesetzt wird,

$$\sin\gamma : \sin v = r : \varrho' \tag{17}$$

Man verlängere jetzt die Richtungen EN, EZ, ES, EM und $E\Upsilon$ bis zu ihren Durchschnittspunkten N, Z, S, M und Υ mit der Sphäre (Fig. 13). Da die Richtungen EZ, ES und EM in einer Ebene liegen, so liegen die Punkte Z, S und M auf einem größten Kreise. Wenn man nun die geozentrische Rektaszension und Deklination des Mondes und der Sonne mit α, δ, bzw. a', d' bezeichnet, so ist $SNZ = \alpha' - a'$, $MNS = a' - \alpha$, $NZ = 90^\circ - \delta'$, $NS = 90^\circ - d'$, $NM = 90^\circ - \delta$; ferner ist $MS = v$, $ZS = \gamma$. Aus den Dreiecken MNS und SNZ folgt also, wenn noch der Winkel NSM gleich S gesetzt wird,

Fig. 13.



$$\begin{aligned} \sin\gamma \sin S &= \cos\delta' \sin(\alpha' - a') \\ \sin v \sin S &= \cos\delta \sin(a' - \alpha) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \sin\gamma \cos S &= -\sin\delta' \cos d' + \cos\delta' \sin d' \cos(\alpha' - a') \\ \sin v \cos S &= \sin\delta \cos d' - \cos\delta \sin d' \cos(a' - \alpha) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\cos v = \sin d' \sin\delta + \cos d' \cos\delta \cos(a' - \alpha) \tag{20}$$

Sowohl aus (18) als aus (19) erhält man einen Ausdruck für $\sin\gamma : \sin v$; werden diese Ausdrücke in die Gleichung (17) substituiert, so folgt

$$\sin(\alpha' - a') = \frac{r\cos\delta}{\varrho'\cos\delta'}\sin(a' - \alpha)$$

(21)
$$\sin\delta'\cos d' - \cos\delta'\sin d'\cos(\alpha' - a') =$$
$$= \frac{r}{\varrho'}[\cos\delta\sin d'\cos(a' - \alpha) - \sin\delta\cos d']$$

Die Gleichungen (16) und (21) lassen sich noch vereinfachen. Da $r : r'$ nahe gleich $1 : 400$, und v zur Zeit einer Finsternis kleiner als $1^\circ 35'$ ist (§ 110), so kann man in der Gleichung (16) $\cos v = 1$ setzen; damit wird

$$\varrho' = r' - r$$

Wenn jetzt π und π' die Äquatoreal-Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne bedeuten, und der Radius des Erdäquators als Längeneinheit gewählt wird, so hat man

(22)
$$\frac{1}{r} = \sin\pi, \qquad \frac{1}{r'} = \sin\pi',$$

also

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\frac{1}{rr'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} = \frac{\sin\pi\sin\pi'}{\sin\pi - \sin\pi'}$$

oder, wie man setzen darf,

(23)
$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin\pi\sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')}$$

Der Wert von π läßt sich mit Hilfe der Mondtafeln berechnen. Um π' zu erhalten, benutzt man die Gleichung

(24)
$$\pi' = \frac{\pi'_\circ}{R'},$$

wo $\pi'_\circ$ die mittlere Äquatoreal-Horizontalparallaxe und R' den Radiusvektor der Sonne, ausgedrückt in Einheiten der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne, bedeutet; den $\log R'$ kann man den astronomischen Jahrbüchern entnehmen.

Zur Zeit einer Finsternis ist ferner $\dot{\gamma} < 15''$ (§ 110), es müssen also auch $\delta' - d'$ und $(\alpha' - a')\cos d'$, absolut genommen, kleiner als $15''$ sein; folglich ist $|\alpha' - a'| < 15''\sec 23^\circ 30' < 17''$. Demnach darf in der zweiten Gleichung (21) $\cos(\alpha' - a') = 1$ gesetzt werden, und man erhält

$$\sin(\alpha' - a') = \frac{\dot{r}\cos\delta}{\varrho'\cos\delta'}\sin(a' - \alpha)$$

$$\sin(\delta' - d') = \frac{r}{\varrho'}[\cos\delta\sin d'\cos(a' - \alpha) - \sin\delta\cos d']$$

Nun ist auch $r : \varrho'$ nahe gleich $1 : 400$, ferner folgt aus der Ungleichheit $v < 1^\circ 35'$, daß zur Zeit einer Finsternis $|d' - \delta| < 1^\circ 35'$ und $|a' - \alpha| < 1^\circ 35'\sec 23^\circ 30' < 1^\circ 44'$ ist. Mit Rücksicht hierauf und auf die vorhin gefundene Ungleichheit $|\delta' - d'| < 15''$ kann man in der ersten der vorigen Gleichungen $\cos\delta' = \cos d'$, und in der letzten

$$\cos(a' - \alpha) = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2(a' - \alpha),$$
$$\tfrac{1}{2}\cos\delta\sin d'\sin^2(a' - \alpha) = \tfrac{1}{4}\sin(\delta + d')\sin^2(a' - \alpha)$$

setzen. Wird dann noch die Abkürzung $D_0 = \frac{1}{2}(\delta + d')$ angewandt, und für $r : \varrho'$ sein aus (22) und (23) folgender Wert

$$\frac{r}{\varrho'} = \frac{\sin \pi'}{\sin(\pi - \pi')},$$

eingeführt, so ergibt sich

$$\sin(\alpha' - a') = \sin \pi' \frac{\cos \delta \sin(a' - \alpha)}{\cos d' \sin(\pi - \pi')}$$

$$\sin(\delta' - d') = \sin \pi' \frac{\sin(d' - \delta)}{\sin(\pi - \pi')} - \frac{1}{4} \frac{\sin \pi' \sin 2D_0}{\sin(\pi - \pi')} \sin^2(a' - \alpha)$$

In dem zweiten Gliede auf der rechten Seite der letzten Gleichung kann man für π und π' ihre mittleren Werte π_0 und π'_0 annehmen; setzt man dann noch

$$\frac{\pi'_0 \sin 2D_0}{4 \sin(\pi_0 - \pi'_0)} \sin^2(a' - \alpha) = \omega', \tag{25}$$

so hat man mit einer für alle Fälle ausreichenden Genauigkeit

$$\begin{aligned} \alpha' - a' &= \pi' \frac{(a' - \alpha) \cos \delta}{(\pi - \pi') \cos d'} \\ \delta' - d' &= \pi' \frac{d' - \delta}{\pi - \pi'} - \omega' \end{aligned} \tag{26}$$

In der nachstehenden Tafel sind die Werte von ω', insoweit sie 0.″005 erreichen, auf 3 Dezimalstellen gegeben; dabei ist $\pi'_0 = 8.''80$ und $\pi_0 = 57'\,2.''68$ angenommen. Das Vorzeichen von ω' stimmt mit dem von D_0 überein. Für den praktischen Gebrauch leitet man aus dieser Tafel besser eine andere ab, welche in etwas kleineren Intervallen die auf 0.″01 abgerundeten Werte von ω' enthält.

D \ ϱ'	1°44′	1°36′	1°28′	1°20′	1°12′	1°4′	0°56′	0°48′	0°40′	0°32′
24°	0.″090	0.″077	0.″065	0.″053	0.″043	0.″034	0.″026	0.″019	0.″013	0.″009
22	0.084	0.072	0.060	0.050	0.041	0.032	0.024	0.018	0.013	0.008
20	0.078	0.067	0.056	0.046	0.037	0.030	0.023	0.017	0.012	0.007
18	0.071	0.061	0.051	0.042	0.034	0.027	0.021	0.015	0.011	0.007
16	0.064	0.055	0.046	0.038	0.031	0.024	0.019	0.014	0.010	0.006
14	0.057	0.049	0.041	0.034	0.027	0.022	0.016	0.012	0.008	0.005
12	0.049	0.042	0.035	0.029	0.024	0.019	0.014	0.011	0.007	
10	0.042	0.035	0.030	0.025	0.020	0.016	0.012	0.009	0.006	
8	0.034	0.029	0.024	0.020	0.016	0.013	0.010	0.007		
6	0.025	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.007	0.005		
4	0.017	0.014	0.012	0.010	0.008	0.006				
2	0.008	0.007	0.006	0.005						

113. Koordinaten der XY-Spur der Schattenachse. In Fig. 14 mögen S und M die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes bedeuten, EN sei die vom Mittelpunkte der Erde zum Nordpol des Äquators gehende Richtung, EX, EY und EZ seien die in § 112 definierten Koordinatenachsen; die Z-Achse ist also parallel zu MS, und die Y-Achse liegt in der Ebene ZEN. Bezeichnet man mit X und Y die Koordinaten des Punktes e, in dem die Schattenachse die XY-Ebene schneidet, so ist, wenn die Winkel MEX und MEY mit MX, bzw. MY bezeichnet werden, und EM wieder gleich r gesetzt wird,

$$X = r \cos MX, \qquad Y = r \cos MY$$

Fig. 14.

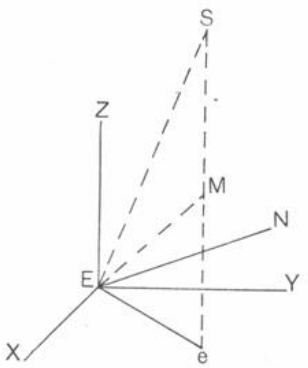
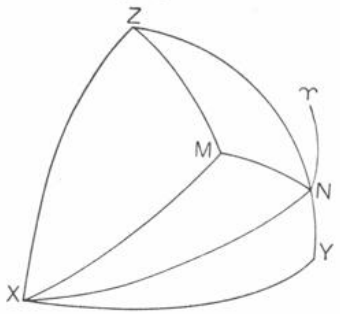


Fig. 15.



Man verlängere nun die Geraden EX, EY, EZ, EM und EN bis zu ihren Durchschnittspunkten X, Y, Z, M, N mit der Sphäre (Fig. 15), und es sei $N\Upsilon$ die Richtung vom Pol zum Frühlingsäquinox. Mit Anwendung der früheren Bezeichnungen hat man dann $ZNM = \alpha - \alpha'$, also $MNX = 90^\circ - (\alpha - \alpha')$ und $MNY = 180^\circ - (\alpha - \alpha')$; ferner ist $MN = 90^\circ - \delta$, $NY = \delta'$, $XN = 90^\circ$. Berechnet man jetzt aus den Dreiecken MNX und MNY die Werte von $\cos MX$ und $\cos MY$, und substituiert dieselben in die vorigen Gleichungen, so ergibt sich

$$X = r \cos\delta \sin(\alpha - \alpha')$$
$$Y = r\,[\cos\delta' \sin\delta - \sin\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha')]$$

oder, wenn an Stelle von r die Parallaxe des Mondes eingeführt und berücksichtigt wird, daß zur Zeit einer Finsternis auch $\alpha - \alpha' < 1^\circ 44'$ ist,

$$X = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - \alpha')}{\sin\pi}$$
$$Y = \frac{1}{\sin\pi}\,[\sin(\delta - \delta') + \tfrac{1}{2}\sin\delta' \cos\delta \sin^2(\alpha - \alpha')] \tag{27}$$

Aus Fig. (14), worin Me mit dem in § 111 eingeführten Z identisch ist, folgt noch $Z = r \cos ZEM$. Da aber der Winkel ZEM gleich dem Bogen ZM in Fig. 15 ist, so erhält man mit Hilfe des sphärischen Dreiecks ZNM

$$Z = r\,[\sin\delta' \sin\delta + \cos\delta' \cos\delta \cos(\alpha - \alpha')]$$

oder

$$Z = \frac{1}{\sin\pi}\,[\cos(\delta - \delta') - \tfrac{1}{2}\cos\delta' \cos\delta \sin^2(\alpha - \alpha')] \tag{28}$$

114. Berechnung von u. Subtrahiert man die Gleichungen (9) und (7) voneinander, so erhält man

$$u = u' - (Z - Z') \tang f$$

Es ist aber $Z - Z' = z$. Jenachdem hier für z sein in (13) oder (15) gegebener Wert angewandt wird, ergibt sich

$$u = u' - [\varrho \sin\varphi' \sin\delta' + \varrho \cos\varphi' \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \tang f \tag{29}$$

oder

$$u = u' - [(1 - e) \sin\varphi_1 \sin\delta' + \cos\varphi_1 \cos\delta' \cos(\mu' - \alpha')] \tang f \tag{29a}$$

Um mit Hilfe einer dieser Gleichungen u berechnen zu können, müssen f und u' bekannt sein; doch sind zuvor s' und s zu bestimmen. Bezeichnet man mit Δ' den Winkelhalbmesser der Sonne in ihrer mittleren Entfernung $\mathfrak{R}'$ von der Erde, so ist, wenn s' und $\mathfrak{R}'$ in einer beliebigen Längeneinheit ausgedrückt werden, $s' = \mathfrak{R}' \sin\Delta'$. Wenn aber, der früheren Festsetzung gemäß, der Radius des Erdäquators als Längeneinheit gewählt wird, so hat man $\mathfrak{R}' = 1 : \sin\pi'_0$ und demnach $s' = \sin\Delta' : \sin\pi'_0$. Unter der Annahme $\Delta' = 15'\,59''.63$, $\pi'_0 = 8''.80$ wird $s' = 109.048$. Für s hat sich aus den Sternbedeckungen der Wert 0.2725 ergeben. Substituiert man die Werte von s und s' sowie den Ausdruck (23) für $1 : \varrho'$ in die Gleichungen (2) und (4), so folgt

$$\begin{aligned} \sin f_a &= 109.3205 \frac{\sin\pi \sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')} \\ \sin f_i &= -108.7755 \frac{\sin\pi \sin\pi'}{\sin(\pi - \pi')} \end{aligned} \tag{30}$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (11)

$$\begin{aligned} u'_a &= (Z \sin f_a + 0.2725) \sec f_a \\ u'_i &= (Z \sin f_i + 0.2725) \sec f_i \end{aligned} \tag{31}$$

Hat man aus (30), (31) und (28) f_a, f_i, u'_a und u'_i gefunden, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (10) und (12) die für $i \leqq 12$ gültigen Werte von f und u' berechnen; letztere sind dann in (29), bzw. (29a) zu substituieren. Für die äußere Berührung ist $f = f_a$, $u' = u'_a$; für innere Berührungen hat man $f = f_i$, $u' = u'_i$.

Im vorigen sind alle Gleichungen mitgeteilt worden, welche zur Berechnung von u erforderlich sind; es muß aber noch eine Änderung erwähnt werden, die man mit dem in (29), bzw. (29a) auftretenden Argument $\mu' - \alpha'$ vornehmen kann. Schreibt man nämlich die erste der Gleichungen (26) in der Form $\alpha' - a' = \Delta\alpha'$, so wird $\mu' - \alpha' = \mu' - a' + \Delta\alpha'$. Nun ist $\mu' - a'$ die wahre Zeit des Beobachtungsortes; bezeichnet man diese mit t, so folgt $\mu' - \alpha' = t + \Delta\alpha'$.

115. Darstellung der Koordinaten X und Y als Funktionen der Zeit. Es seien T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2 fünf gleichweit voneinander entfernte wahre Zeiten des Meridians, für welchen die Sonnen- und Mondephemeride gelten, oder, kurz ausgedrückt, des ersten Meridians, X_{-2}, X_{-1}, ..., X_2 seien die diesen Zeiten entsprechenden Werte von X; dabei möge für T_0 ein der Zeit der geozentrischen Konjunktion von Sonne und Mond naher Moment, etwa die der Konjunktion in

Rektaszension zunächst liegende volle Stunde gewählt werden. Die zu lösende Aufgabe besteht dann darin, für jede zwischen T_{-2} und T_2 gelegene Zeit T einen Koeffizienten $\mathfrak{x}$ so zu bestimmen, daß der zu T gehörige Wert von X mit Hilfe der Gleichung

(A) $$X = X_0 + \mathfrak{x}(T - T_0)$$

gefunden werden kann. Zu diesem Zwecke bilde man zunächst die ersten, zweiten und dritten Differenzen zwischen den Werten X_{-2}, X_{-1}, ..., wie dies in den mit $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ und $\Delta^{(3)}$ bezeichneten Kolumnen der folgenden Tabelle geschehen ist.

		$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
T_{-2}	X_{-2}			
		$X_{-1} - X_{-2}$		
T_{-1}	X_{-1}		$X_0 - 2X_{-1} + X_{-2}$	
		$X_0 - X_{-1}$		$X_1 - 3X_0 + 3X_{-1} - X_{-2}$
T_0	X_0		$X_1 - 2X_0 + X_{-1}$	
		$X_1 - X_0$		$X_2 - 3X_1 + 3X_0 - X_{-1}$
T_1	X_1		$X_2 - 2X_1 + X_0$	
		$X_2 - X_1$		
T_2	X_2			

Sind nun $\mathfrak{x}_{-2}$, $\mathfrak{x}_{-1}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ die Werte von $\mathfrak{x}$, welche den Werten T_{-2}, T_{-1}, T_1, T_2 von T entsprechen, und bedeutet w das Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Zeiten T_{-2}, T_{-1}, ..., so ergibt sich aus der Gleichung (A)

$$\mathfrak{x}_{-2} = \frac{X_{-2} - X_0}{-2w}, \qquad \mathfrak{x}_1 = \frac{X_1 - X_0}{w}$$

$$\mathfrak{x}_{-1} = \frac{X_{-1} - X_0}{-w}, \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{X_2 - X_0}{2w}$$

Der zu $T = T_0$ gehörige Wert von $\mathfrak{x}$, der mit $\mathfrak{x}_0$ bezeichnet werden möge, ist, der Gleichung (A) zufolge, gleich dem ersten Differentialquotienten von X nach T, gültig für $T = T_0$. Wenn aber die Werte einer Funktion $f(t)$ für die Werte $-2w$, $-w$, 0, w, $2w$ des Arguments t gegeben sind, und die Funktionswerte sowie ihre ersten, zweiten und dritten Differenzen in der Weise bezeichnet werden, wie es in den vier letzten Kolumnen der folgenden Tabelle geschehen ist,

		$\Delta^{(1)}$	$\Delta^{(2)}$	$\Delta^{(3)}$
$-2w$	$f(-2)$			
		$f'(-\frac{3}{2})$		
$-w$	$f(-1)$		$f''(-1)$	
		$f'(-\frac{1}{2})$		$f'''(-\frac{1}{2})$
0	$f(0)$		$f''(0)$	
		$f'(\frac{1}{2})$		$f'''(\frac{1}{2})$
w	$f(1)$		$f''(1)$	
		$f'(\frac{3}{2})$		
$2w$	$f(2)$			

so erhält man nach § 4, wenn noch

$$\tfrac{1}{2}[f'(-\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})] = f'(0), \qquad \tfrac{1}{2}[f'''(-\tfrac{1}{2}) + f'''(\tfrac{1}{2})] = f'''(0)$$

gesetzt wird,

$$\left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0} = \frac{1}{w}\,[f'(0) - \tfrac{1}{6}f'''(0)]$$

Diese Formel ist nun auf die oben für X_{-2}, X_{-1}, ..., X_2 und ihre Differenzen gegebene Tabelle anzuwenden; es folgt dann

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{X_1 - X_{-1}}{2w} + \frac{2(X_1 - X_{-1}) - (X_2 - X_{-2})}{12w}$$

Nachdem man so die für T_{-2}, T_{-1}, T_0, ... gültigen Werte von $\mathfrak{x}$ gefunden hat, erhält man aus diesen durch Interpolation den einer beliebigen Zeit T entsprechenden Wert von $\mathfrak{x}$.

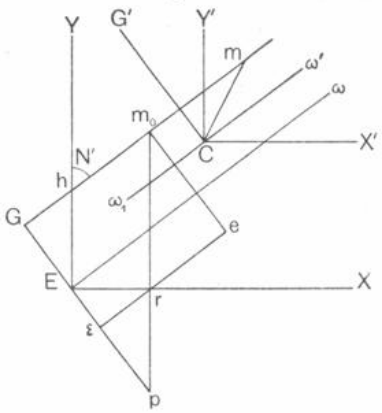
Eine ganz ähnliche Gleichung wie die für X aufgestellte gilt auch für Y; wird der zugehörige, dem $\mathfrak{x}$ analoge Koeffizient mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet, so hat man also

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \mathfrak{x}(T - T_0) \\ Y &= Y_0 + \mathfrak{y}(T - T_0) \end{aligned} \tag{32}$$

Im folgenden wird angenommen, daß das vorhin mit w bezeichnete Zeitintervall in Einheiten einer wahren Stunde ausgedrückt ist; es ist dann auch $T - T_0$ in dieser Einheit auszudrücken.

116. Fundamentalgleichungen. Mit Hilfe der Gleichungen (32) kann man für jede der Konjunktion benachbarte Zeit T den Ort der XY-Spur der Schattenachse finden; dieser Ort läßt sich aber auch noch auf andere Weise bestimmen. Zunächst folgt aus (32), daß, wenn $T - T_0$ in Einheiten einer wahren Stunde ausgedrückt wird, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als die Komponenten der mittleren stündlichen Geschwindigkeit der Spur der Schattenachse betrachtet werden können. Ist demnach in Fig. 16 m_0 der Ort der Spur zur Zeit T_0, und m der Ort zur Zeit T, so hat man, wenn die mittlere stündliche Geschwindigkeit der Spur mit n, und der Winkel zwischen der Y-Achse und der Richtung $m_0 m$ mit N' bezeichnet wird,

Fig. 16.



$$\mathfrak{x} = n \sin N', \qquad \mathfrak{y} = n \cos N' \tag{33}$$

Da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bekannt sind, so kann man mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen n und N' berechnen.

Man ziehe jetzt EG und $m_0 e$ senkrecht zu Gm, ferner $m_0 p$ parallel zur Y-Achse, und re, sowie $E\omega$ parallel zu Gm. Da $Er = X_0$, $rm_0 = Y_0$ und der Winkel $Gpm_0 = XE\omega = 90^\circ - N'$ ist, so folgt, wenn $EG = \gamma$ und $\varepsilon e = Gm_0 = \varkappa_0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \gamma &= Y_0 \sin N' - X_0 \cos N' \\ \varkappa_0 &= X_0 \sin N' + Y_0 \cos N' \end{aligned} \tag{34}$$

Es ist aber $Gm = m_0 m + Gm_0$ und $m_0 m = n(T - T_0)$; setzt man also $Gm = \omega$ und substituiert für $Gm_0 = \varkappa_0$ seinen vorigen Wert, so erhält man

$$\omega = n\left[T - T_0 + \frac{1}{n}\left(X_0 \sin N' + Y_0 \cos N'\right)\right]$$

oder, wenn von der Abkürzung

$$\mu = T_0 - \frac{1}{n}\left(X_0 \sin N' + Y_0 \cos N'\right) \tag{35}$$

Gebrauch gemacht wird,

$$\omega = (T - \mu)n \tag{35a}$$

Mit Rücksicht darauf, daß n sich im Laufe einiger Stunden nur wenig ändert, und daß $\varkappa_0$, der über T_0 gemachten Annahme zufolge, verhältnismäßig klein ist, kann man $\varkappa_0 : n$ als das Zeitintervall betrachten, innerhalb dessen die Spur die Strecke Gm_0 durchläuft; μ gibt dann die wahre Zeit des ersten Meridians an, zu der die Spur ihren kleinsten Abstand vom Erdmittelpunkte erreicht. Es bedeute nun λ die vom ersten Meridian aus nach Osten hin positiv gezählte Länge eines Beobachtungsortes; der wahren Zeit T des ersten Meridians entspricht dann die wahre Zeit $T + \lambda$ des Beobachtungsortes. Wird letztere wie früher mit t bezeichnet, so folgt $T = t - \lambda$; substituiert man diesen Wert in die Gleichung (35a), so wird

$$\omega = (t - \lambda - \mu)n \tag{36}$$

Die Größen ω und γ stellen die Koordinaten des Punktes m, also des Ortes der XY-Spur der Schattenachse zur Zeit T dar, und zwar bezogen auf zwei zueinander senkrechte Achsen, von denen die eine die zu Gm parallele Gerade $E\omega$ ist, während die andere in die Richtung EG fällt. Um die auf dieselben Achsen bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes zu erhalten, denke man sich letzteren auf die Ebene EXY projiziert; diese Projektion möge in den Punkt C fallen. Bezeichnet man die Koordinaten von C, bezogen auf EG und $E\omega$ mit Γ, bzw. Ω, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma &= y \sin N' - x \cos N' \\ \Omega &= x \sin N' + y \cos N' \end{aligned} \tag{37}$$

Die Koordinaten von m bezogen auf die beiden zu EG und $E\omega$ parallelen Achsen CG' und $C\omega'$ sind gleich $\gamma - \Gamma$, bzw. $\omega - \Omega$. Zieht man jetzt CX' und CY' parallel zu EX, bzw. EY und setzt $Cm = \bar{\varrho}$, so daß $\bar{\varrho}$ den Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse angibt, bezeichnet man ferner mit Θ den von CY' in der Richtung nach CX' gezählten Winkel $Y'Cm$, so lassen sich die auf CG' und $C\omega'$ bezogenen Koordinaten von m auch durch $\bar{\varrho}\sin(N' - \Theta)$, bzw. $\bar{\varrho}\cos(N' - \Theta)$ ausdrücken. Demnach gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}\sin(N' - \Theta) &= \gamma - \Gamma \\ \bar{\varrho}\cos(N' - \Theta) &= \omega - \Omega \end{aligned} \tag{38}$$

oder, wie man auch schreiben kann,

$$\begin{aligned} -\bar{\varrho}\sin[N' - (\Theta + 180^0)] &= \gamma - \Gamma \\ -\bar{\varrho}\cos[N' - (\Theta + 180^0)] &= \omega - \Omega \end{aligned} \tag{38a}$$

Damit nun eine Finsternis zustande kommt, muß, wie früher gezeigt wurde, $\bar{\varrho} = \pm u$ sein; dabei hat man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, je

nachdem u positiv oder negativ ist. Geht man, falls u positiv ist, von der Gleichung (38) aus, so erhält man als Bedingungsgleichungen für das Eintreten einer Finsternis

$$(39)\qquad \begin{aligned} u\sin(N'-\Theta) &= \gamma - \Gamma = \gamma - y\sin N' + x\cos N' \\ u\cos(N'-\Theta) &= \omega - \Omega = \omega - x\sin N' - y\cos N'; \end{aligned}$$

ist aber u negativ, so folgt durch Anwendung der mit (38) identischen Gleichungen (38a)

$$\begin{aligned} u\sin[N'-(\Theta+180^\circ)] &= \gamma - \Gamma \\ u\cos[N'-(\Theta+180^\circ)] &= \omega - \Omega \end{aligned}$$

Ersetzt man in den zwei letzten Gleichungen $180^\circ + \Theta$ durch Θ', so nehmen sie dieselbe Form an wie die beiden vorhergehenden; es genügt also, sich auf die Gleichungen (39) zu beschränken. Falls dann u negativ und demnach die Finsternis ringförmig ist, hat man nur zu berücksichtigen, daß der bei der Auflösung der Gleichungen (39) sich ergebende Wert von Θ nicht gleich dem Winkel $Y'Cm$ (Fig. 16), sondern gleich $Y'Cm + 180^\circ$ ist; auf diesen Punkt wird unten zurückgekommen werden.

In (39) führe man jetzt an Stelle von x und y ihre in (15) gegebenen Ausdrücke ein und vertausche in letzteren sowie auch in der Gleichung (29a) das Argument $\mu' - \alpha'$ mit dem ihm gleichen $t + \Delta\alpha'$ (S. 325); substituiert man dann noch für ω seinen Wert (36) und setzt

$$(40)\qquad \Theta - N' = \psi$$

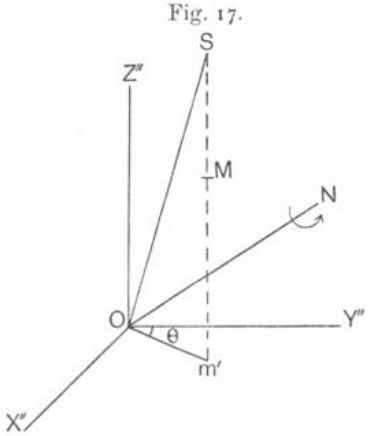
so erhält man die Fundamentalgleichungen

$$(41^1)\qquad u = u' - [(1-c)\sin\varphi_1\sin\delta' + \cos\varphi_1\cos\delta'\cos(t+\Delta\alpha')]\tan g f$$

$$(41^2)\qquad \begin{aligned} u\sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1\cos\delta'\sin N' - \cos\varphi_1[\sin\delta'\sin N'\cos(t+\Delta\alpha') + \\ &\qquad + \cos N'\sin(t+\Delta\alpha')] \\ u\cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos\delta'\cos N' + \\ &\qquad + \cos\varphi_1[\sin\delta'\cos N'\cos(t+\Delta\alpha') - \sin N'\sin(t+\Delta\alpha')] \end{aligned}$$

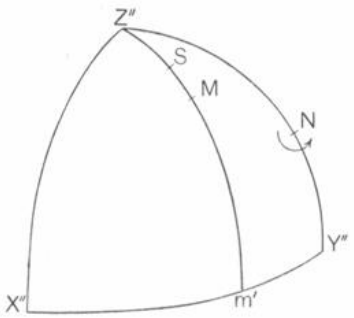
Der vorhin mit Θ bezeichnete Winkel hat eine besondere Bedeutung, welche jetzt erläutert werden soll. Man ziehe vom Beobachtungsorte O (Fig. 17) aus OX'', OY'', OZ'' parallel zu den früher benutzten Achsen X, Y, Z; ON bezeichne die in der $Y''Z''$-Ebene gelegene Richtung zum Nordpol des Äquators, und m' die Projektion der Schattenachse auf die Ebene $X''Y''$. Es ist dann der Winkel $Y''Om'$ gleich Θ. Da OZ'' parallel zur Schattenachse ist, so liegen die Punkte, in denen OZ'' und die von O nach den Mittelpunkten S und M der Sonne und des Mondes gehenden Richtungen die Sphäre treffen, auf einem größten Kreise. Dieser ist in Fig. 18 mit $Z''m'$ bezeichnet; X'', Y'' und m' bedeuten die Durchschnittspunkte der Richtungen OX'', OY'' und Om' mit der Sphäre, N gibt den Ort des Pols, S den Ort der Sonne und M den Ort des Mondes an. Infolge der über die Lage der X- und Y-Achse getroffenen Bestimmung wachsen die Rektaszensionen in der Rich-

Fig. 17.



tung des Pfeils, und somit bedeutet $Y''Z''m' = \Theta$ den Positionswinkel von Sonne und Mond, bezogen auf Z''. Wenn sich nun die als kreisförmig angenommenen Ränder von Sonne und Mond berühren, so geht der durch die Mittelpunkte beider Gestirne gelegte größte Kreis Zm' auch durch den Berührungspunkt. Falls also der Berührungspunkt auf derselben Seite von Z'' liegt, wie die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, so ist sein Positionswinkel, bezogen auf Z'', ebenfalls gleich Θ; liegt der Berührungspunkt dagegen auf der entgegengesetzten Seite, so ist der Positionswinkel desselben gleich $180^\circ + \Theta$. Der erste Fall tritt ein, wenn Sonne und Mond sich von außen berühren (Fig. 2), der zweite, wenn bei einer totalen Finsternis eine innere Berührung stattfindet (Fig. 3).

Fig. 18.



Berücksichtigt man nun noch, daß die Richtung OZ'' zur Zeit einer Sonnenfinsternis sehr nahe mit der Verbindungslinie von O mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt, so kann man sich auch folgendermaßen ausdrücken: »Bei einer äußeren Berührung bezeichnet Θ den Positionswinkel des Ein- oder Austrittspunktes, gemessen am Mittelpunkte der Sonne; für die einer totalen Finsternis entsprechende innere Berührung gibt $180^\circ + \Theta$ den Positionswinkel des Berührungspunktes an.« Bezieht sich die innere Berührung auf eine ringförmige Finsternis, so liegt der Berührungspunkt wieder auf derselben Seite von Z'' wie die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes (Fig. 4), sein Positionswinkel in bezug auf Z'', bzw. auf den Mittelpunkt der Sonne ist also gleich $NZ''M$ (Fig. 18); aber bei einer ringförmigen Finsternis ist der aus den Gleichungen (39), bzw. (41) folgende Wert von Θ gleich $NZ''M + 180^\circ$, und somit ist der Positionswinkel des Berührungspunktes gleich $180^\circ + \Theta$.

117. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Hansen*. Bei der Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort handelt es sich zunächst darum, die Zeiten der ersten und letzten äußeren Berührung sowie die Positionswinkel der Berührungspunkte, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, zu bestimmen. Ist die Finsternis total oder ringförmig, so müssen auch die Zeiten der inneren Berührung ermittelt werden; wenn aber die Finsternis nur partiell ist, so hat man außer den Zeiten der äußeren Berührung noch die Zeit und Größe des Maximums der Verfinsterung zu bestimmen. Bei der Lösung dieser Aufgaben begnügt man sich mit Näherungswerten der gesuchten Größen und setzt demgemäß in den Gleichungen (41) $\Delta\alpha' = 0$ und $\delta' = d'$; die Gleichungen werden damit

$$u = u' - [(1 - c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t]\tan g f \tag{42^1}$$

$$\begin{aligned} u\sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1[\sin d' \sin N' \cos t + \\ &\qquad + \cos N' \sin t] \\ u\cos\psi &= (t - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \\ &\qquad + \cos\varphi_1[\sin d' \cos N' \cos t - \sin N' \sin t] \end{aligned} \tag{42^2}$$

Je nachdem die Zeiten der äußeren oder der inneren Berührung gefunden werden sollen, hat man in (42¹) für u' und f die aus den Gleichungen (31), (30) und (28) folgenden Werte von u'_a und f_a, bzw. von u'_i und f_i anzuwenden. Es sei nun t_0 ein für die wahre Ortszeit t einer Berührung angenommener Wert; beispielsweise kann man $t_0 = \mu + \lambda$ setzen, wo μ durch die Gleichung (35) bestimmt ist, und λ die vom ersten Meridian aus nach Osten hin positiv gerechnete Länge des Beobachtungsortes bezeichnet. Wenn dann auf der rechten Seite von (42¹) und (42²) alle Größen mit Ausnahme von t als konstant betrachtet werden, so erhält man

$$(43^1)\qquad u = u' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0]\tan g f + \\ + (t - t_0)\cos\varphi_1 \cos d' \sin t_0 \tan g f$$

$$(43^2)\qquad \begin{aligned} u\sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 [\sin d' \sin N' \cos t_0 + \cos N' \sin t_0] + \\ &\quad + (t - t_0)\cos\varphi_1 [\sin d' \sin N' \sin t_0 - \cos N' \cos t_0] \\ u\cos\psi &= (t_0 - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \\ &\quad + \cos\varphi_1 [\sin d' \cos N' \cos t_0 - \sin N' \sin t_0] \\ &\quad + (t - t_0)[n - \cos\varphi_1 (\sin d' \cos N' \sin t_0 + \sin N' \cos t_0)] \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich, wie gleich gezeigt werden soll, der Wert von $t - t_0$ bestimmen. Um aber $t - t_0$ in Einheiten einer Stunde ausgedrückt zu erhalten, hat man noch $t - t_0$ durch $(t - t_0)\,15$ arc 1° zu ersetzen; nur in dem in (43²) enthaltenen Produkt $n(t - t_0)$ ist $t - t_0$ beizubehalten. Werden jetzt die Bezeichnungen eingeführt

$$\varkappa = 15 \text{ arc } 1^\circ \qquad (\log \varkappa = 9.41797)$$

und

$$(44)\qquad u_1 = u' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0]\tan g f,$$

so nimmt die Gleichung (43¹) die Form an

$$u = u_1 + \varkappa (t - t_0)\cos\varphi_1 \cos d' \sin t_0 \tan g f$$

Diesen Ausdruck substituiere man in die Gleichungen (43²) und setze dann

$$(45^1)\qquad \begin{aligned} \cos g &= \cos d' \sin N' & \cos k &= \cos d' \cos N' \\ \sin g \sin G &= \sin d' \sin N' & \sin k \sin K &= \sin N' \\ \sin g \cos G &= \cos N' & \sin k \cos K &= \sin d' \cos N' \end{aligned}$$

$$(45^2)\qquad \begin{aligned} \sin g' \sin G' &= \sin d' \sin N' \cos f - \cos d' \sin f \sin\psi \\ \sin g' \cos G' &= \cos N' \cos f \end{aligned}$$

$$(45^3)\qquad \begin{aligned} \sin k' \sin K' &= \sin N' \\ \sin k' \cos K' &= \sin d' \cos N' + \cos d' \tan g f \cos\psi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$(46)\qquad \begin{aligned} u_1 \sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1 \cos g - \cos\varphi_1 \sin g \sin(G + t_0) - \\ &\quad - \varkappa (t - t_0)\cos\varphi_1 \sin g' \cos(G' + t_0)\sec f \\ u_1 \cos\psi &= (t_0 - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1 \cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0) + \\ &\quad + (t - t_0)[n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin k' \sin(K' + t_0)] \end{aligned}$$

oder, wenn

$$(47^1)\quad \begin{aligned} m\sin M &= \gamma - (1-c)\sin\varphi_1\cos g + \cos\varphi_1\sin g\sin(G+t_0)\\ m\cos M &= (t_0-\lambda-\mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos k + \cos\varphi_1\sin k\cos(K+t_0)\end{aligned}$$

$$(47^2)\quad \begin{aligned} m'\sin M' &= -\varkappa\cos\varphi_1\sin g'\cos(G'+t_0)\sec f\\ m'\cos M' &= n - \varkappa\cos\varphi_1\sin k'\sin(K'+t_0)\end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(48)\quad \begin{aligned} u_1\sin\psi &= -m\sin M + (t-t_0)\,m'\sin M'\\ u_1\cos\psi &= \quad m\cos M + (t-t_0)\,m'\cos M'\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(49)\quad \begin{aligned} u_1\sin(M'-\psi) &= m\sin(M+M')\\ u_1\cos(M'-\psi) &= m\cos(M+M') + m'(t-t_0)\end{aligned}$$

Wenn nun χ einen Wert von $M'-\psi$ bedeutet, welcher der Gleichung

$$(49^1)\qquad \sin(M'-\psi) = \frac{m}{u_1}\sin(M+M')$$

genügt, so genügt dieser Gleichung auch der Wert $M'-\psi = 180^\circ - \chi$. Aus der zweiten der Gleichungen (49) folgt aber

$$(49^2)\qquad t = t_0 - \frac{m}{m'}\cos(M+M') + \frac{u_1}{m'}\cos(M'-\psi)$$

Substituiert man hierin die beiden Werte von $M'-\psi$, so erhält man zwei Werte von t. Ist X derjenige Wert von $M'-\psi$, für welchen $u_1\cos(M'-\psi):m'$ negativ wird, so gibt der durch die Substitution $M'-\psi = X$ erhaltene Wert von t die wahre Ortszeit des Beginns der Finsternis an, dagegen bezieht sich der der Substitution $M'-\psi = 180^\circ - X$ entsprechende Wert von t auf das Ende der Finsternis. Den beiden Werten von $M'-\psi$ entsprechen, der Gleichung (40) zufolge, die Werte $\Theta = M'+N'-X$, bzw. $\Theta = M'+N'-(180^\circ - X)$. Wenn nun p den Positionswinkel des Berührungspunktes von Sonne und Mond, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, bedeutet, so hat man bei einer äußeren Berührung $p = \Theta$ (S. 330); für den Eintritt ist somit $p = M'+N'-X$, und für den Austritt $p = M'+N'-(180^\circ - X)$. Bei einer inneren Berührung sind die Positionswinkel der Berührungspunkte gleich den um 180° vermehrten Werten von Θ.

Die Gleichung (49^2) wird gewöhnlich in der Form

$$(49^3)\qquad t = t_0 - \frac{m}{m'}\cos(M+M') \mp \frac{u_1}{m'}\cos\chi$$

angegeben; unter χ ist dann derjenige der beiden aus (49^1) folgenden Werte von $M'-\psi$ zu verstehen, für welchen $u_1\cos(M'-\psi):m$ positiv wird. In diesem Falle erhält man durch Anwendung des oberen Vorzeichens die Zeit des Anfangs, und durch Anwendung des unteren Vorzeichens die Zeit des Endes der Finsternis. Da ferner $\chi = 180^\circ - X$ ist, so wird bei einer äußeren Berührung, wenn p_1 den Positionswinkel des Eintritts-, und p_2 den Positionswinkel des Austrittspunktes bedeutet, $p_1 = M'+N'-(180^\circ-\chi)$, $p_2 = M'+N'-\chi$. Bei einer inneren Berührung ist zu diesen Werten 180° zu addieren.

Was die Anwendung der im vorigen abgeleiteten Formeln betrifft, so kann man zunächst in (45^2) und (45^3) die den kleinen Faktor $\sin f$, bzw. $\operatorname{tang} f$ enthaltenden Glieder vernachlässigen und $\cos f = 1$ setzen; damit wird $g' = g$, $G' = G$, $k' = k$ und $K' = K$. Die Werte von g, G, k und K sowie auch von u', f, d', γ, μ, N' und n findet man im Berliner astronomischen Jahrbuch für fünf der Konjunktion benachbarte wahre Berliner Zeiten vorausberechnet; mit Hilfe dieser Werte kann man für jeden Ort, dessen Länge gegen Berlin bekannt ist, die der wahren Ortszeit t_0 entsprechenden Werte der angeführten Größen ableiten. Durch Anwendung der Gleichungen (44), (47^1), (47^2), (49^1) und (49^2), bzw. (49^3) erhält man sodann die genäherten wahren Ortszeiten t_1 und t_2 der ersten und letzten Berührung. Solche Näherungswerte lassen sich übrigens ohne Rechnung finden, wenn man sich der in einigen Jahrbüchern gegebenen Karten bedient*). Auf letzteren sind nämlich alle Punkte der Erde, für welche der Anfang oder das Ende einer Finsternis auf den Beginn einer und derselben Stunde des ersten Meridians fällt, durch Kurven verbunden. Mit Hilfe dieser Kurven kann man durch Schätzung die Zeiten des ersten Meridians bestimmen, zu denen die Finsternis an einem seiner geographischen Lage nach bekannten Orte beginnt oder endigt; hieraus in Verbindung mit der Länge des Ortes ergeben sich die entsprechenden Ortszeiten.

Um die Berührungszeiten genauer zu bestimmen, denke man sich in den Gleichungen (44) bis (49^2) t_0 zunächst durch t_1 ersetzt, und lege demgemäß den Größen u', f, d', γ, μ, N' und n ihre für die wahre Ortszeit t_1 gültigen Werte bei. Man kann auch wieder g', G', k', K' den Größen g, G, k, K beziehungsweise gleich annehmen und hat dann für letztere ihre der Zeit t_1 entsprechenden Werte zu substituieren; hierauf sind m, M, m' und M' neu zu rechnen. Die Gleichungen (49^1) und (49^2), bzw. (49^3) liefern jetzt wieder zwei Werte von t, von denen der dem t_1 zunächst gelegene einen genaueren Wert für die Zeit der ersten Berührung darstellt, während der zweite eine rohe Zeitangabe für die zweite Berührung bedeutet und zu vernachlässigen ist. In ganz analoger Weise gelangt man zu einer genaueren Bestimmung der Zeit der zweiten Berührung.

Es muß jetzt noch gezeigt werden, in welcher Weise die Zeit des Maximums der Verfinsterung und die Größe dieses Maximums gefunden werden kann. Man nehme zunächst an, daß man in den Gleichungen (10) bis (12) $i = i_1$ gesetzt habe, wo i_1 eine zwischen 0 und 12 gelegene Zahl bedeuten soll; die damit erhaltenen Werte von f und u' denke man sich in die Gleichung (44) substituiert. Macht man dann über t_0 wieder dieselbe oder eine ähnliche Annahme wie oben, und wendet die Gleichungen (45) bis (49^3) an, so erhält man im allgemeinen ebenfalls zwei Werte von t; diese geben die Zeiten an, zu denen die Phase der Verfinsterung i_1 Zoll beträgt. In dem Falle aber, wo i_1 das Maximum der Verfinsterung für den Beobachtungsort darstellt, fallen die beiden Werte von t in einen zusammen. Da u, bzw. u_1 im allgemeinen von 0 verschieden, und m' endlich ist, so ergibt sich als Bedingung dafür, daß die Gleichung (49^3) nur einen Wert von t liefert, $\cos \chi =$

*) Siehe die den Verlauf der Sonnenfinsternisse 1904 März 16, bzw. 1902 Oktober 30, darstellenden Karten am Schlusse dieses Buches.

$= \cos(M' - \psi) = 0$. Die Zeit t_m der größten Phase ist also durch die Gleichung bestimmt

$$t_m = t_0 - \frac{m}{m'} \cos(M + M') \tag{50}$$

Um diese Gleichung aufzulösen, nehme man für t_0 etwa das Mittel aus den Zeiten der ersten und letzten Berührung an und berechne die zugehörigen Werte von m, M, m', M'; mit Hilfe von (50) erhält man dann einen Näherungswert $t_m^{(0)}$ von t_m. Indem man hierauf in (50) t_0 gleich $t_m^{(0)}$ annimmt und m, M, m' und M' für die Zeit $t_m^{(0)}$ berechnet, ergibt sich ein genauerer Wert für die wahre Ortszeit der größten Phase. Wäre aber $t_m^{(0)}$ bereits der genaue Wert, so müßte das Glied $m \cos(M + M') : m'$ verschwinden; da m im allgemeinen von 0 verschieden, und m' endlich ist, so müßte also $\cos(M + M') = 0$ sein. Zur Zeit der größten Phase ist demnach $\sin(M + M') = \pm 1$. Gleichzeitig ist dann aber, wie vorhin gefunden wurde, $\cos\chi = \cos(M - \psi) = 0$, also $\sin\chi = \sin(M' - \psi) = \pm 1$. Berücksichtigt man nun noch, daß bei einer partiellen Sonnenfinsternis u positiv ist, und daß m stets als positiv betrachtet wird, so ergibt sich aus der ersten der Gleichungen (49), daß der der größten Phase entsprechende Wert von u gleich m ist; hierbei hat man für m seinen in letzter Näherung gefundenen Wert anzuwenden.

Nun ist nach Gleichung (12)

$$i = 12 \frac{u'_a - u'}{u'_a - u'_i}$$

Legt man hierin u' seinen aus der Gleichung (42[1]) für $u = m$ und $t = t_m$ folgenden Wert bei, so erhält man das Maximum der Verfinsterung, ausgedrückt in Zollen. Gewöhnlich setzt man aber in diesem Falle $u' = u$, also $u' = m$ und somit

$$i = 12 \frac{u'_a - m}{u'_a - u'_i} \text{ *)}$$

118. Vorausberechnung einer Finsternis für einen gegebenen Ort nach *Bessel*. In Fig. 19[a], 19[b] und 19[c] sei HH die durch den Mittelpunkt der Erde

Fig. 19[a].

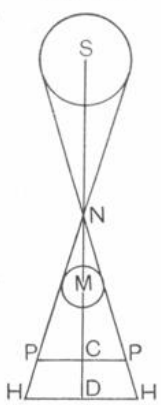


Fig. 19[b].

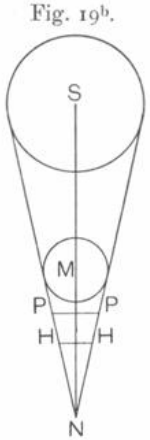
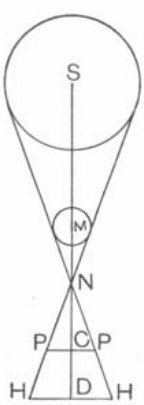


Fig. 19[c].



*) An den Inhalt dieses Paragraphen schließt sich unmittelbar die in den §§ 119 ff. gegebene Ableitung der zur Vorausberechnung des Verlaufs einer Finsternis auf der Erde nötigen Formeln an; der § 118 kann also übergangen werden.

senkrecht zur Schattenachse gelegte Ebene, und PP eine zu HH parallele, durch den Beobachtungsort gehende Ebene; erstere möge die H-, letztere die P-Ebene genannt werden. Es sei ferner Z der Abstand des Mondmittelpunktes von der H-Ebene, s der lineare Halbmesser des Mondes, s' der lineare Halbmesser der Sonne, ϱ' die Entfernung der Mittelpunkte dieser beiden Gestirne voneinander, F_a der Öffnungswinkel des Halbschattenkegels, c_a der Abstand der Spitze dieses Kegels von der H-Ebene, F_i der Öffnungswinkel des Kernschattenkegels, und c_i der Abstand der Spitze des Kernschattenkegels von der H-Ebene; dabei soll c_i positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Spitze des Kernschattenkegels auf derselben (Fig. 19[c]) oder auf der entgegengesetzten Seite von der H-Ebene liegt wie der Mittelpunkt des Mondes (Fig. 19[b]). Man hat dann die Gleichungen

$$\sin F_a = \frac{s' + s}{\varrho'}, \qquad c_a = Z + \frac{s}{\sin F_a} \tag{51}$$

$$\sin F_i = \frac{s' - s}{\varrho'}, \qquad c_i = Z - \frac{s}{\sin F_i} \tag{52}$$

Die in Einheiten des Radius des Erdäquators ausgedrückten Werte von Z und $1 : \varrho'$ sind durch die Gleichungen (28) und (23) bestimmt; für s und s' hat man ihre in § 114 gegebenen Werte zu substituieren. Es werde nun der Abstand des Beobachtungsortes von der H-Ebene (also auch der P- von der H-Ebene) mit x bezeichnet, und zwar soll x positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die P-Ebene auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der H-Ebene liegt wie der Mittelpunkt des Mondes; ferner setze man den Radius des von dem Halbschattenkegel auf der H-Ebene ausgeschnittenen Kreises (DH in Fig. 19[a]) gleich U_a', und den Radius des von dem Kernschatten, bzw. dem verlängerten Kernschattenkegel ausgeschnittenen Kreises (DH in Fig. 19[b] und 19[c]) gleich U_i'; dabei soll U_i' als eine negative Größe aufgefaßt werden, wenn die H-Ebene durch den Kernschattenkegel hindurchgeht (Fig. 19[b]). Wenn dann noch U_a den Radius des von dem Halbschatten-, und U_i den Radius des von dem Kernschatten- oder von dem verlängerten Kernschattenkegel auf der P-Ebene ausgeschnittenen Kreises bedeutet, und U_i negativ gerechnet wird, falls die P-Ebene den Kernschattenkegel schneidet (Fig. 19[b]), so ist

$$U_a' = c_a \operatorname{tang} F_a, \qquad U_a = (c_a - x) \operatorname{tang} F_a \tag{53}$$

$$U_i' = c_i \operatorname{tang} F_i, \qquad U_i = (c_i - x) \operatorname{tang} F_i \tag{54}$$

Hieraus ergibt sich

$$U_a = U_a' - x \operatorname{tang} F_a \tag{55}$$

$$U_i = U_i' - x \operatorname{tang} F_i \tag{56}$$

Nun kann man eine i-zöllige Finsternis — wenn $i < 6$ ist — als eine äußere Berührung des Mondes mit einer Kugel auffassen, welche mit dem Radius $\left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$ um den Mittelpunkt der Sonne beschrieben ist (S. 317). Der Öffnungswinkel F des diese Kugel und den Mond einhüllenden Halbschattenkegels mHm' (Fig. 8) und die

Entfernung c der Spitze dieses Kegels von der H-Ebene sind dann nach (51) durch die Gleichungen bestimmt

$$\sin F = \frac{\left(1 - \frac{i}{6}\right)s' + s}{\varrho'}, \qquad c = Z + \frac{s}{\sin F} \tag{57}$$

Ferner erhält man aus (53) für die Radien U' und U der durch den Kegel mHm' auf der H- und P-Ebene ausgeschnittenen Kreise

$$U' = c \operatorname{tang} F, \qquad U = (c - z) \operatorname{tang} F \tag{58}$$

und demnach

$$U = U' - z \operatorname{tang} F \tag{59}$$

Verbindet man die erste der Gleichungen (57) mit den Gleichungen (51) und (52), so ergibt sich

$$\sin F = \sin F_a - \frac{i}{12}(\sin F_a + \sin F_i) \tag{60}$$

Ferner folgt aus (58) und der zweiten Gleichung (57)

$$U' \cos F = c \sin F = Z \sin F + s\,, \tag{61}$$

und aus den Gleichungen (53) und (51), bzw. (54) und (52), wenn $\cos F_a = \cos F_i = \cos F$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} U'_a \cos F &= Z \sin F_a + s \\ U'_i \cos F &= Z \sin F_i - s \end{aligned} \tag{62}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$Z(\sin F_a + \sin F_i) = (U'_a + U'_i) \cos F \tag{63}$$

Substituiert man nun den für $\sin F$ gefundenen Ausdruck (60) in die Gleichung (61), so erhält man mit Berücksichtigung von (63) und der ersten der Gleichungen (62)

$$U' = U'_a - \frac{i}{12}(U'_a + U'_i) \tag{64}$$

oder, wenn $i : 12 = \mathfrak{G}$ gesetzt wird, so daß $\mathfrak{G}$ den Bruchteil des durch die Mondscheibe bedeckten Sonnendurchmessers oder die Größe der Verfinsterung bedeutet,

$$\mathfrak{G} = \frac{U'_a - U'}{U'_a + U'_i} \tag{65}$$

Eine i-zöllige Finsternis, für die $i > 6$ ist, läßt sich als eine innere Berührung des Mondes mit einer Kugel betrachten, deren Radius gleich $\left(\frac{i}{6} - 1\right)s'$ ist, und deren Mittelpunkt mit demjenigen der Sonne zusammenfällt. Bedeutet F_1 den Öffnungswinkel des diese Kugel und den Mond einhüllenden Kernschattenkegels, und bezeichnet man mit U'_1 und U_1 die Radien der von diesem Kegel auf der H- und P-Ebene ausgeschnittenen Kreise, so erhält man $F_1 = -F$, $U'_1 = -U'$, $U_1 = -U$ und

$$\mathfrak{G} = \frac{U'_a + U'_1}{U'_a + U'_i} = \frac{U'_a - U'}{U'_a + U'_i}$$

Die Gleichung (65) ist also auch für $i > 6$ gültig.

Aus Fig. 16 (S. 327) folgt jetzt, wenn die auf die Achsen EX und EY bezogenen Koordinaten des Beobachtungsortes, statt wie bisher mit x und y, mit ξ und η bezeichnet werden,

$$(66^a) \qquad X - \xi = \bar{\varrho} \sin\Theta, \qquad Y - \eta = \bar{\varrho} \cos\Theta$$

oder auch

$$(66^b) \qquad X - \xi = -\bar{\varrho} \sin(180^\circ + \Theta), \qquad Y - \eta = -\bar{\varrho} \cos(180^\circ + \Theta)$$

In diese Gleichungen ist die Bedingung einzuführen, daß $\bar{\varrho}$ zur Zeit einer äußeren oder inneren Berührung der Sonne (bzw. der um den Mittelpunkt der Sonne mit dem Radius $\pm\left(1 - \frac{i}{6}\right)s'$ beschriebenen Kugel) und des Mondes gleich dem Radius des Kreises sein muß, welcher von dem Halbschatten-, bzw. von dem Kernschatten- oder von dem verlängerten Kernschattenkegel auf der P-Ebene ausgeschnitten wird. Die für diesen Radius gefundenen Ausdrücke (55), (56) und (59) haben die gemeinsame Form

$$(67) \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' - z \operatorname{tang} \mathfrak{F}$$

Dabei ist $\mathfrak{U}$ negativ, wenn die P-Ebene den Kernschattenkegel schneidet, und somit die Finsternis für den Beobachtungsort total ist; betrachtet man also $\bar{\varrho}$ als wesentlich positiv, so hat man, falls $\mathfrak{U} < 0$ ist, $\bar{\varrho} = -\mathfrak{U}$ zu setzen. Wendet man nun bei einem positiven Wert von $\mathfrak{U}$ die Gleichung (66^a), und bei einem negativen Wert von $\mathfrak{U}$ die Gleichung (66^b) an, so erhält man als Bedingungsgleichung für das Eintreten einer äußeren oder inneren Berührung, bzw. einer i-zölligen Verfinsterung (vgl. S. 328 f.)

$$(68) \qquad X - \xi = \mathfrak{U} \sin\Theta, \qquad Y - \eta = \mathfrak{U} \cos\Theta$$

Ist $\mathfrak{U}$ positiv, so ist der aus der Auflösung dieser Gleichungen folgende Wert von Θ gleich dem Winkel $Y''Z''m'$ in Fig. 18; ist dagegen $\mathfrak{U}$ negativ, so ist Θ gleich $180^\circ + Y''Z''m'$. Durch Betrachtungen, welche den auf S. 329 f. angestellten ganz analog sind, ergibt sich dann weiterhin, daß sowohl bei einer äußeren Berührung, als auch bei der einer totalen oder ringförmigen Finsternis entsprechenden inneren Berührung die aus den Gleichungen (68) folgenden Werte von Θ die Positionswinkel der Berührungspunkte, bezogen auf den Mittelpunkt der Sonne, angeben.

Zur Berechnung von $\mathfrak{U}$ substituiere man in (67) den durch die letzte der Gleichungen (13) bestimmten Wert von z. Da das in den Gleichungen (13) vorkommende Argument $\mu' - \alpha'$ den Stundenwinkel des Poles der Schattenachse am Beobachtungsorte bedeutet, so kann man, wenn der für den ersten Meridian gültige Wert dieses Stundenwinkels mit H bezeichnet wird, $\mu' - \alpha' = H + \lambda$ setzen, wo λ wieder die vom ersten Meridian nach Osten hin gezählte Länge des Beobachtungsortes angibt. Somit wird der für die Gleichungen (68) zu verwendende Wert von $\mathfrak{U}$

$$(69) \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}' - [\varrho \sin\varphi' \sin\delta' + \varrho \cos\varphi' \cos\delta' \cos(H + \lambda)] \operatorname{tang} \mathfrak{F}$$

Je nachdem die Zeiten der äußeren oder der inneren Berührung oder einer i-zölligen Verfinsterung berechnet werden sollen, hat man für $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{F}$ die Werte von U'_a, F_a, bzw. U'_i, F_i, bzw. U', F anzuwenden.

Um die Auflösung der Gleichungen (68) und (69) zu erleichtern, geben einige astronomische Jahrbücher von 10 zu 10 Minuten mittlerer Zeit des ersten Meridians die mit Hilfe der Gleichungen (27) berechneten Werte von X und Y, sowie die Änderungen X' und Y', welche X und Y in einer Minute mittlerer Zeit erfahren; ferner geben die betreffenden Jahrbücher noch die Werte von U_a, F_a und H, sowie, bei totalen und ringförmigen Finsternissen, auch die von U_i und F_i. Der irgendeiner mittleren Zeit des ersten Meridians entsprechende Wert von H ist in der Weise erhalten worden, daß man die mittlere Zeit in Sternzeit verwandelt, und von dieser die oben mit α' bezeichnete Rektaszension des Pols der Schattenachse subtrahiert hat. Kennt man H, so lassen sich auch die Koordinaten ξ und η berechnen; denn es folgt aus den Gleichungen (13), wenn $\mu' - \alpha' = H + \lambda$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi' \sin(H+\lambda) \\ \eta &= \varrho \sin\varphi' \cos\delta' - \varrho \cos\varphi' \sin\delta' \cos(H+\lambda) \end{aligned} \tag{70}$$

Für die Vorausberechnung einer Finsternis ist es nun noch notwendig, die in einer Minute mittlerer Zeit stattfindenden Änderungen von ξ und η zu berechnen. Bezeichnet man diese Änderungen, ausgedrückt in Teilen des Radius, mit ξ', bzw. η', und nimmt für die einer Minute mittlerer Zeit entsprechende Änderung von H den mittleren Wert $60^s.014$ an, so wird ξ' gleich dem nach H genommenen Differentialquotienten von ξ, multipliziert mit dem Produkt $60^s.014 \times 15 \times \sin 1'' = 0.0043644$; in derselben Weise läßt sich auch η' finden, wobei dann die verhältnismäßig geringe Änderung von δ' vernachlässigt wird. Man erhält also

$$\begin{aligned} \xi' &= 0.0043644\, \varrho \cos\varphi' \cos(H+\lambda) \\ \eta' &= 0.0043644\, \xi \sin\delta' \end{aligned} \tag{71}$$

Es sei jetzt $\mathfrak{T}$ eine willkürlich angenommene, der Zeit der Konjunktion von Sonne und Mond in Rektaszension benachbarte mittlere Zeit des ersten Meridians, und $\mathfrak{T} + \tau$ die unbekannte mittlere Zeit des ersten Meridians, zu der an einem Orte, dessen Länge vorhin mit λ bezeichnet wurde, eine Berührung stattfindet; wenn dann X, Y, ξ und η für die Zeit $\mathfrak{T}$ des ersten Meridians gelten, so müssen die Gleichungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin\Theta &= X - \xi + (X' - \xi')\tau \\ \mathfrak{U} \cos\Theta &= Y - \eta + (Y' - \eta')\tau \end{aligned} \tag{72}$$

Hier kann man für das nur wenig veränderliche $\mathfrak{U}$ den Wert annehmen, den es zur Zeit $\mathfrak{T}$ hat; diesen erhält man, indem man in (69) für $\mathfrak{U}'$, H und $\mathfrak{F}$ ihre der Zeit $\mathfrak{T}$ entsprechenden Werte substituiert. Setzt man nun

$$\begin{aligned} X - \xi &= m \sin M, & X' - \xi' &= n \sin N \\ Y - \eta &= m \cos M, & Y' - \eta' &= n \cos N \end{aligned} \tag{73}$$

so werden die Gleichungen (72)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin\Theta &= m \sin M + \tau n \sin N \\ \mathfrak{U} \cos\Theta &= m \cos M + \tau n \cos N \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} \sin(\Theta - N) &= m \sin(M - N) \\ \mathfrak{U} \cos(\Theta - N) &= m \cos(M - N) + \tau n \end{aligned} \tag{74}$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\sin(\Theta - N) = \frac{m}{\mathfrak{U}} \sin(M - N) \tag{74a}$$

Bezeichnet man die dieser Gleichung genügenden Werte von $\Theta - N$ mit Ψ und $180^\circ - \Psi$, und substituiert dieselben in die zweite der Gleichungen (74), so erhält man

$$\tau = -\frac{m}{n} \cos(M - N) \mp \frac{\mathfrak{U}}{n} \cos\Psi \tag{75}$$

Infolge der oben getroffenen Bestimmung, daß X', Y', ξ' und η' die Änderungen der Koordinaten X, Y, ξ, η in einer Minute mittlerer Zeit bezeichnen sollen, sind die aus der letzten Gleichung folgenden Werte von τ in mittleren Zeitminuten ausgedrückt. Es möge nun Ψ denjenigen der beiden Werte von $\Theta - N$ bedeuten, für welchen $\mathfrak{U}\cos(\Theta - N) : n$ positiv wird; wenn dann der dem oberen Vorzeichen in der vorigen Gleichung entsprechende Wert von τ mit τ_1, und der dem unteren Vorzeichen entsprechende Wert von τ mit τ_2 bezeichnet wird, so sind $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ die genäherten mittleren Zeiten des ersten Meridians, zu denen die Finsternis an dem Beobachtungsorte beginnt, bzw. endigt. Um diese Zeiten genauer zu bestimmen, hat man die vorige Rechnung zu wiederholen, indem man dabei für die oben mit $\mathfrak{T}$ bezeichnete Zeit einmal $\mathfrak{T} + \tau_1$ und dann $\mathfrak{T} + \tau_2$ annimmt. Sowohl unter der Annahme $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T} + \tau_1$ als unter der Annahme $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{T} + \tau_2$ erhält man aus (75) zwei Werte von τ, von denen wie auf S. 333 nur je einer beizubehalten ist. Addiert man dann noch zu den für den ersten Meridian gültigen Zeiten die Länge λ, so erhält man die mittlere Ortszeit des Beginns und Endes der Finsternis.

Die aus (74a) erhaltenen Werte von Θ geben die Positionswinkel der Berührungspunkte an (S. 337). Da nun $\mathfrak{U}\cos(\Theta - N) : n$ für $\Theta - N = \Psi$ positiv, also für $\Theta - N = 180^\circ - \Psi$ negativ sein soll, so folgt aus der zweiten Gleichung (74), daß τ für $\Theta = N + \Psi$ größer ist als für $\Theta = N + 180^\circ - \Psi$. Somit ist $N + 180^\circ - \Psi$ der Positionswinkel für die erste äußere oder innere Berührung, und $N + \Psi$ der Positionswinkel für die zweite Berührung.

Denkt man sich in den vorigen Gleichungen $\mathfrak{U}$ durch U ersetzt, so bedeuten $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ die Zeiten, zu denen die Phase der Verfinsterung i Zoll beträgt. Wenn aber i seinen Maximalwert erreicht, so fallen $\mathfrak{T} + \tau_1$ und $\mathfrak{T} + \tau_2$ zusammen; die Bedingung für den Eintritt des Maximums der Verfinsterung ist demnach $U\cos\Psi : n = 0$ oder, da $U : n$ im allgemeinen von 0 verschieden ist, $\cos\Psi = \cos(\Theta - N) = 0$. Damit ergibt sich aus (75), wenn jetzt an Stelle von τ die Bezeichnung τ_m angewandt wird,

$$\tau_m = -\frac{m}{n} \cos(M - N) \tag{76}$$

Substituiert man in diese Gleichung die für die mittlere Zeit $\mathfrak{T}$ des ersten Meridians berechneten Werte von m, M, n und N, und bezeichnet man den damit erhaltenen Wert von τ_m mit $\tau_m^{(0)}$, so bedeutet $\mathfrak{T} + \tau_m^{(0)} = \mathfrak{T}_1$ die genäherte Zeit des Maximums der Verfinsterung. Um diese Zeit schärfer zu bestimmen, berechne man die für $\mathfrak{T}_1$ gültigen Werte von m, M, n und N, und substituiere dieselben in die

Gleichung (76). Wird der sich so ergebende neue Wert von τ_m mit $\tau_m^{(1)}$ bezeichnet und die Summe $\mathfrak{T}_1 + \tau_m^{(1)} = \mathfrak{T}_2$ gebildet, so gibt $\mathfrak{T}_2$ einen genaueren Wert für die Zeit des Maximums der Finsternis an. Die entsprechende mittlere Ortszeit ist $\mathfrak{T}_2 + \lambda$.

Für den Fall, daß $\mathfrak{T}_2$ bereits die genaue Zeit des Maximums darstellt, erhält man durch die Substitution der für $\mathfrak{T}_2$ gültigen Werte von m, M, n und N in (76) $\tau_m = 0$; da nun $m : n$ im allgemeinen von 0 verschieden ist, so muß zur Zeit der größten Verfinsterung $\cos(M - N) = 0$, also $\sin(M - N) = \pm 1$ sein. Aus der vorhin für diese Zeit gefundenen Bedingung $\cos(\Theta - N) = 0$ folgt aber, daß dann auch $\sin(\Theta - N) = \pm 1$ sein muß. Berücksichtigt man jetzt, daß m als wesentlich positive Größe aufgefaßt wird, und daß auch U positiv ist, so erhält man aus der ersten der Gleichungen (74), worin dem oben Gesagten zufolge $\mathfrak{U} = U$ zu setzen ist, $U = m$. Nun unterscheidet sich U' nur wenig von U, und somit ist U' zur Zeit der größten Phase einer Finsternis nahe gleich m. Macht man also von der Gleichung (65) Gebrauch, so findet man für die Maximalgröße der Verfinsterung

$$\mathfrak{G} = \frac{U_a' - m}{U_a' + U_i'} \tag{77}$$

II. Vorausberechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsternis auf der Erde.

119. Nördliche und südliche Grenzkurve. Wählt man den Durchmesser des Erdäquators als Längeneinheit, so ist $2u_a'$ oder der Durchmesser des Kreises, welchen der Halbschattenkegel auf der durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zur Schattenachse gelegten Ebene ausschneidet, höchstens gleich 0.583. Die Erde kann demnach nie ganz in den Halbschattenkegel eintauchen, vielmehr wird bei jeder Finsternis entweder zu beiden Seiten des Halbschattenkegels oder auf einer Seite desselben ein Teil der Erde über ihn hinausragen. In dem ersten Falle schneidet der Halbschattenkegel bei seinem Fortschreiten über die Erdoberfläche aus dieser eine Zone aus, welche nach Norden und Süden hin durch je eine Kurve — die sogenannte nördliche, bzw. südliche Grenzkurve — begrenzt ist; in dem zweiten Falle existiert nur eine dieser Kurven. Es kommt auch vor, daß im Verlauf einer Finsternis der am nördlichsten oder südlichsten gelegene Teil der Mantelfläche des Schattenkegels die Erdoberfläche zwar niemals schneidet, aber sie in einem gewissen Moment berührt. Ist diese Berührung eine innere, so reduziert sich eine der Grenzkurven auf einen Punkt; ist die Berührung eine äußere, so entfällt eine der Grenzkurven, und die andere reduziert sich wieder auf einen Punkt.

Für alle Punkte, welche auf der nördlichen oder südlichen Grenzkurve gelegen sind, findet nur eine äußere Berührung der Ränder von Sonne und Mond statt. Da also für diese Orte die äußere Berührung das Maximum der Finsternis darstellt, so muß für jeden derselben die auf S. 334 angegebene Bedingungsgleichung $\cos(M' - \psi) = 0$ erfüllt sein; somit ist M' entweder gleich $90^\circ + \psi$ oder gleich $270^\circ + \psi$, und demnach

$$\operatorname{tang} \psi = - \operatorname{cotg} M'$$

Der Ausdruck für $\operatorname{cotg} M'$ ergibt sich aus den Gleichungen (47^2) in Verbindung mit den Gleichungen (45^2) und (45^3). In letzteren kommt zwar ebenfalls die Unbekannte ψ vor, da aber die betreffenden Glieder den kleinen Faktor $\sin f$, bzw. $\operatorname{tang} f$ enthalten, so kann man für sie einen Näherungswert von ψ benutzen. Der Gleichung (40) zufolge ist nun $\psi = -(N' - \Theta)$, und aus Fig. 16 (S. 327) folgt, daß $N' - \Theta$ gleich dem Winkel ist, den der Radiusvektor Cm mit der Bahn Gm der Schattenachsenspur bildet; wie aber schon auf S. 313 erwähnt wurde, ist dieser Winkel zur Zeit des Maximums der Verfinsterung um höchstens 20° von 90°, bzw. 270° verschieden. Nimmt man jetzt die Näherungswerte $\psi = 90°$ und $\psi = 270°$ an, und bezeichnet die diesen entsprechenden Werte von g' und G' mit g_1, bzw. G_1, so geben die Gleichungen (45^2)

$$(78)\qquad \begin{aligned} \sin g_1 \sin G_1 &= \sin d' \sin N' \cos f \mp \cos d' \sin f \\ \sin g_1 \cos G_1 &= \cos N' \cos f \end{aligned} \qquad \left(\psi = \begin{matrix} 90° \\ 270° \end{matrix}\right)$$

Gleichzeitig werden die rechten Seiten der Gleichungen (45^3) identisch mit denen der zur Berechnung von k und K dienenden Gleichungen (45^1), so daß also $k' = k$ und $K' = K$ zu setzen ist. Wenn jetzt noch in (47^2) statt des Näherungswertes t_0 der unbekannte wahre Wert t eingeführt wird, so nimmt die oben für das Maximum der Finsternis gefundene Bedingungsgleichung die Form an

$$(79)\qquad \operatorname{tang} \psi = \frac{\dfrac{n}{z} - \cos \varphi_1 \sin k \sin(K + t)}{\cos \varphi_1 \sin g_1 \cos(G_1 + t)} \cos f$$

Mit dieser Gleichung sind nun die für jede Ränderberührung gültigen Gleichungen (42^1) und (42^2) zu verbinden; letztere sollen aber hier in einer etwas anderen Form angewandt werden. Man substituiere nämlich den in (42^1) gegebenen Ausdruck von u in die erste der Gleichungen (42^2), und nehme in den mit dem kleinen Faktor $\operatorname{tang} f$ behafteten Gliedern die Näherungswerte $\psi = 90°$ und $\psi = 270°$ an; führt man dann die durch die Gleichungen (78) und (45^1) definierten Hilfsgrößen g_1, G_1, k und K ein, und setzt

$$(80)\qquad \cos g_1 = \cos d' \sin N' \cos f \pm \sin d' \sin f \qquad \left(\psi = \begin{matrix} 90° \\ 270° \end{matrix}\right)$$

so erhält man

$$(81)\qquad \begin{aligned} u' \sin \psi &= -\gamma + (1 - c) \sin \varphi_1 \cos g_1 \sec f - \cos \varphi_1 \sin g_1 \sin(G_1 + t) \sec f \\ u \cos \psi &= (t - \lambda - \mu) n - (1 - c) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos(K + t) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (79) und (81), und eines für t angenommenen Wertes lassen sich die Koordinaten φ_1 und λ eines Ortes auf der Erde bestimmen, welcher zu der wahren Ortszeit t eine äußere Ränderberührung wahrnimmt, und für den diese Ränderberührung das Maximum der Finsternis bedeutet; dieser Ort stellt also einen Punkt der nördlichen oder südlichen Grenzkurve dar. Die unter verschiedenen Annahmen für t erhaltenen Punkte zusammengenommen legen dann die Grenzkurven selbst fest. Die Rechnung kann man in folgender Weise ausführen. Setzt man

$$(82)\qquad \begin{aligned} a \sin A &= \sin g_1 \sin(G_1 + t) \\ a \cos A &= (1 - c) \cos g_1 \end{aligned}$$

und $\sec f = 1$, so folgt aus der ersten Gleichung (81)

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{a} \tag{83}$$

Man nehme zunächst $\psi = 90^\circ$ an, setze also

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u'}{a} \tag{83a}$$

und berechne mit Hilfe von (78), (80) und (82) für eine Reihe von Werten von t die Werte von a und A. Substituiert man dann in (83a) für u' den der äußeren Berührung entsprechenden Wert u'_a, so gibt jedes Wertepaar A, a (wenn $a > |\gamma + u'|$ ist) einen Näherungswert φ_1. Für jeden dieser Näherungswerte und das zugehörige t erhält man aus (79), unter Benutzung der für die Zeit t gültigen Werte von n, k, K, g_1 und G_1, einen Wert von ψ; wird dieser in (83) substituiert, so ergibt sich ein genauerer Wert von φ_1. Hierauf leitet man aus (42[1]), wo $f = f_a$ anzunehmen ist, den Wert von u ab und erhält dann aus der zweiten Gleichung (81)

$$\lambda = t - \mu - \frac{1-c}{n} \sin\varphi_1 \cos k + \frac{1}{n} \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t) - \frac{u}{n} \cos\psi \tag{84}$$

Endlich läßt sich noch mit Hilfe der Gleichung (15a) der zu φ_1 gehörige Wert von φ berechnen.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Annahme $\psi = 270^\circ$ zugrunde legt. Aus (83) folgt dann

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma - u'}{a}$$

Substituiert man den hieraus sich ergebenden Wert von φ_1 und die für die angenommene Zeit t gültigen Werte von n, k, K, g_1 und G_1 in die Gleichung (79), so ergibt sich ein genauerer Wert von ψ. Mit Hilfe dieses Wertes läßt sich aus (83) wiederum φ_1 bestimmen; sodann berechne man, wie vorhin, u, λ und φ.

Jedes reelle Wertepaar φ, λ liefert einen Grenzkurvenpunkt. Da nun u' bei einer äußeren Ränderberührung positiv ist, so ist der aus der Gleichung (83) folgende Wert von φ_1 für positive Werte von $\sin\psi$ größer als für negative. Einem zwischen 0° und 180° gelegenen Werte von ψ entspricht also ein Punkt der nördlichen Grenzkurve, während der zu $180^\circ < \psi < 360^\circ$ gehörige Punkt auf der südlichen Grenzkurve liegt.

Wenn der aus (83) folgende Wert von $\sin(\varphi_1 - A)$ nahe gleich ± 1 ist, so ist das vorhin zur Bestimmung der nördlichen und südlichen Grenzkurve angegebene Verfahren nicht anwendbar. Man geht in diesem Falle von der aus der ersten Gleichung (81) für $\sec f = 1$ folgenden Beziehung

$$\sin(G_1 + t) = (1 - c) \operatorname{cotg} g_1 \operatorname{tang}\varphi_1 - (\gamma + u' \sin\psi) \sec\varphi_1 \operatorname{cosec} g_1 \tag{85}$$

aus und wählt φ_1 als unabhängige Variable. Setzt man dann ψ entweder gleich 90° oder gleich 270° und nimmt für φ_1 einen Wert an, für den das auf der rechten Seite der Gleichung (85) stehende Aggregat die Einheit nicht übertrifft, so gibt diese Gleichung einen Näherungswert von t. Wird dieser und der angenommene Wert von

φ_1 in die Gleichung (79) substituiert, so erhält man einen genaueren Wert von ψ; mit Hilfe dessen kann dann aus (85) ein genauerer Wert von t abgeleitet werden. Nachdem t gefunden ist, ergibt sich aus (84) die Länge λ, welche in Verbindung mit dem zu φ_1 gehörigen φ einen Punkt der nördlichen, bzw. südlichen Grenzkurve bestimmt.

Im vorigen wurden für u' und f ihre der äußeren Ränderberührung entsprechenden Werte angewandt; wählt man an deren Stelle die einer inneren Berührung entsprechenden Werte u_i' und f_i, so erhält man die nördliche und südliche Grenze der Zone, innerhalb deren die Finsternis total oder ringförmig ist. Will man ferner die Kurven bestimmen, auf denen das Maximum einer Finsternis i Zoll beträgt, so hat man die aus (12) und (10) folgenden Werte von u' und f zu benutzen.

120. Kurve der zentralen Finsternis, und Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit auf dieser Kurve. Wenn von einem Orte der Erde aus gesehen die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes sich decken, so bezeichnet man die Finsternis für diesen Ort als zentral; die Verbindungslinie aller Orte, an denen eine zentrale Bedeckung wahrzunehmen ist, nennt man die Kurve der zentralen Finsternis. Zur Berechnung dieser Kurve hat man nur zu berücksichtigen, daß die für jede Ränderberührung gültigen Gleichungen (42^1) und (81) auch dann noch gelten, wenn die Radien der Gestirne gleich o sind, d. h., wenn man sich Sonne und Mond auf ihre Mittelpunkte reduziert denkt; die Ränderberührung bedeutet in diesem Falle das Zusammenfallen der Mittelpunkte. Für $s = s' = 0$ wird aber $f = 0$, und somit auch $u' = 0$ und $u = 0$; aus (81) und (83) ergeben sich also die folgenden Gleichungen für die Kurve der zentralen Finsternis

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma}{a} \tag{86^1}$$

$$\lambda = t - \mu - \frac{1 - c}{n} \sin\varphi_1 \cos k + \frac{1}{n} \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t) \tag{86^2}$$

Um die Kurvenpunkte zu erhalten, berechne man zunächst aus (82) für verschiedene Werte von t die Hilfsgrößen a und A; die Gleichung (86^1) gibt sodann die zugehörigen Werte von φ_1. Mit Hilfe von φ_1 läßt sich, wie oben, φ berechnen.

Ist der absolute Wert von γ nahe gleich a, so wird die Formel (86^1) unbrauchbar. Man benutzt dann die aus (81) durch die Substitution $u' = f = 0$ folgende Gleichung

$$\sin(G_1 + t) = (1 - c) \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{cotg} g_1 - \gamma \sec\varphi_1 \operatorname{cosec} g_1 \tag{87}$$

und berechnet mit ihrer Hilfe die einer Reihe von angenommenen Werten von φ_1 entsprechenden Werte von t; hierauf lassen sich mittels der Gleichung (86^2) die zugehörigen Werte von λ finden. Die Bestimmung des Anfangs- und Endpunktes der Kurve der zentralen Finsternis wird in § 122 erläutert werden.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit an einem auf der Kurve der zentralen Finsternis gelegenen Orte zu kennen; hierzu gelangt man in folgender Weise. Zur Zeit einer zentralen Bedeckung geht

die Schattenachse durch den Beobachtungsort hindurch; die Projektionen des Beobachtungsortes und der Schattenachse auf eine zu letzterer senkrechte Ebene fallen also in einen Punkt zusammen, es sei das der Punkt C in Fig. 16 (S. 327). Ferner sei $\omega_1\omega'$ die während der stets nur kurzen Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit von der Spur der Schattenachse in der XY-Ebene beschriebene, als geradlinig zu betrachtende Bahn. Ist t_0 die wahre Ortszeit der zentralen Finsternis und $2\Delta t$ die Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit, ist ferner ω_1 die Projektion der Schattenachse zur Zeit $t_0 - \Delta t$ und ω' die Projektion der Schattenachse zur Zeit $t_0 + \Delta t$, so folgt aus der auf S. 341 erläuterten Bedeutung des Winkels ψ, daß derselbe zur Zeit $t_0 - \Delta t$ gleich 180°, und zur Zeit $t_0 + \Delta t$ gleich 0° ist. Die zweite der Gleichungen (81) wird also, wenn u_{-1} und u_{+1} die den Zeiten $t_0 - \Delta t$ und $t_0 + \Delta t$ entsprechenden Werte von u bedeuten,

$$-u_{-1} = (t_0 - \Delta t - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0 - \Delta t)$$
$$u_{+1} = (t_0 + \Delta t - \lambda - \mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos k + \cos\varphi_1 \sin k \cos(K + t_0 + \Delta t)$$

Wird nun der zur Zeit t_0 gehörige Wert von u mit u_0 bezeichnet, so kann man, in Anbetracht der geringen Veränderlichkeit von u, unbedenklich $u_{-1} = u_{+1} = u_0$ annehmen; ferner hat man, wenn Δt in Teilen einer Stunde ausgedrückt und, wie früher, $15 \operatorname{arc} 1^\circ = \varkappa$ gesetzt wird,

$$\cos(K + t_0 \mp \Delta t) = \cos(K + t_0) \pm \varkappa \Delta t \sin(K + t_0)$$

Demnach ergibt sich durch Subtraktion der Gleichungen für $-u_{-1}$ und u_{+1}

$$2u_0 = 2\Delta t[n - \varkappa \cos\varphi_1 \sin k \sin(K + t_0)]$$

Multipliziert man den hieraus sich ergebenden Wert von $2\Delta t$ mit 60, so erhält man die in Zeitminuten ausgedrückte Dauer der Totalität, bzw. Ringförmigkeit; wird diese mit τ' bezeichnet und $120 : \varkappa = \varkappa'$ gesetzt ($\log \varkappa' = 2 \cdot 6612$), so folgt

$$\tau' = \frac{\varkappa' u_0}{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin k \sin(K + t_0)} \tag{88}$$

Zur Berechnung von u_0 hat man die Gleichung (42[1]) anzuwenden und dabei für u' und f ihre für die Zeit t_0 gültigen, der inneren Berührung entsprechenden Werte u_i' und f_i zu substituieren; es wird also

$$u_0 = u_i' - [(1-c)\sin\varphi_1 \sin d' + \cos\varphi_1 \cos d' \cos t_0] \operatorname{tang} f_i \tag{88[1]}$$

Ist die Finsternis ringförmig und demnach u_0 negativ, so ist in (88) u_0 durch $-u_0$ zu ersetzen.

121. Östliche und westliche Grenzkurve. Mit dem Namen der östlichen und westlichen Grenzkurve bezeichnet *Hansen* die Verbindungslinien aller Punkte der Erdoberfläche, für welche die Finsternis bei Sonnenauf- oder -untergang beginnt, bzw. endet; auf diesen Kurven liegen auch die Punkte, in denen der Halbschattenkegel zum ersten, bzw. letzten Male die Erde berührt. Um die östliche und westliche Grenzkurve zu finden, hat man den für die Ränderberührung gültigen Gleichungen noch die Bedingung hinzuzufügen, daß der Abstand des Berührungspunktes

vom Zenit gleich 90° sein muß; in der Praxis ersetzt man diese durch eine andere, nämlich die, daß die Zenitdistanz des Mittelpunktes der Sonne gleich 90° sein soll. Hierbei ist noch folgendes zu berücksichtigen. Infolge der Refraktion erscheint der Mittelpunkt der Sonne schon im Horizont, wenn er in Wirklichkeit sich um rund einen halben Grad unter dem Horizont befindet; bezeichnet man die Horizontalrefraktion mit (r), so wäre also die Bedingung für die östliche und westliche Grenzkurve die, daß die wahre Zenitdistanz der Sonne gleich $90° + (r)$ sei. Hierbei ist (r) noch von der Dichtigkeit und der Temperatur der Luft abhängig. Man könnte für (r) einen mittleren Wert annehmen, aber in Anbetracht dessen, daß die Beobachtungen einer Finsternis an solchen Orten, welche auch nur in der Nähe der östlichen oder westlichen Grenzkurve liegen, gar keine praktische Bedeutung haben, und daß demnach die genaue Bestimmung dieser Kurven ohne Interesse ist, soll weiterhin von (r) ganz abgesehen werden. Wenn nun ζ die Zenitdistanz der Sonne bezeichnet, so ist

$$\cos\zeta = \sin\varphi \sin d' + \cos\varphi \cos d' \cos t$$

Da der Voraussetzung nach $\cos\zeta = 0$ ist, so kann der Faktor von $\operatorname{tang} f$ in der Gleichung (42^1) nur sehr klein sein, denn $1 - e$ ist wenig von 1, und φ_1 wenig von φ verschieden; berücksichtigt man also noch, daß auch $\operatorname{tang} f$ klein ist, so sieht man, daß für die östliche und westliche Grenzkurve $u = u'$ angenommen werden darf. Damit ergibt sich aus (42^2)

$$(89)\quad \begin{aligned} u' \sin\psi &= -\gamma + (1-e)\sin\varphi_1 \cos d' \sin N' - \cos\varphi_1 \sin d' \sin N' \cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1 \cos N' \sin t \\ u' \cos\psi &= (t - \lambda - \mu)n - (1-e)\sin\varphi_1 \cos d' \cos N' + \cos\varphi_1 \sin d' \cos N' \cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1 \sin N' \sin t \end{aligned}$$

Nun folgt aus dem von dem Zenit des Beobachtungsortes, dem Pol des Äquators und dem Mittelpunkte der Sonne gebildeten sphärischen Dreieck, wenn der Winkel an dem Mittelpunkte der Sonne mit ϑ bezeichnet, und die Zenitdistanz der Sonne gleich 90° angenommen wird,

$$(90)\quad \begin{aligned} \cos\varphi \sin t &= \sin\vartheta \\ \cos\varphi \cos t &= -\sin d' \cos\vartheta \\ \sin\varphi &= \cos d' \cos\vartheta \end{aligned}$$

Vertauscht man also in den Gleichungen (89) φ_1 mit dem nur um höchstens 6′ von ihm verschiedenen φ, so erhält man

$$\begin{aligned} u' \sin\psi &= -\gamma + (1 - e\cos^2 d')\sin N' \cos\vartheta - \cos N' \sin\vartheta \\ u' \cos\psi &= (t - \lambda - \mu)n - (1 - e\cos^2 d')\cos N' \cos\vartheta - \sin N' \sin\vartheta \end{aligned}$$

Mit Rücksicht darauf, daß $e = 1 : 298$ und $d' < 24°$ ist, kann man $1 - e\cos^2 d' = 1 - e$ annehmen; setzt man dann noch

$$(91)\quad \begin{aligned} e\sin(N' + \nu) &= (1-e)\sin N', & e'\sin(N' + \nu') &= \sin N' \\ e\cos(N' + \nu) &= \cos N', & e'\cos(N' + \nu') &= (1-e)\cos N' \end{aligned}$$

und

$$(92)\quad N' - \vartheta = W$$

so wird

$$(93) \qquad \begin{aligned} u' \sin\psi &= -\gamma + e \sin(W+\nu) \\ u' \cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - e' \cos(W+\nu'), \end{aligned}$$

wo e, ν, e' und ν' als bekannte Größen zu betrachten sind.

Um diese Gleichungen aufzulösen, gibt man entweder ψ eine Reihe von willkürlich gewählten Werten und berechnet den aus der ersten der Gleichungen (93) für $\sin(W+\nu)$ folgenden Ausdruck

$$(93^1) \qquad \sin(W+\nu) = \frac{\gamma + u' \sin\psi}{e},$$

oder man nimmt für W beliebige Werte an und berechnet hiermit

$$(93^2) \qquad \sin\psi = \frac{e \sin(W+\nu) - \gamma}{u'}$$

In dem ersten Falle erhält man für jeden Wert von ψ, für den $|\gamma + u' \sin\psi| < e$ ist, zwei Werte von $W+\nu$ also auch von W; im zweiten Falle entsprechen jedem Wert von W, für den $|e \sin(W+\nu) - \gamma| < u'$ ist, zwei Werte von ψ. Mit Hilfe der Gleichung (92) lassen sich die den Werten W zugehörigen Werte von ϑ finden, hierauf ergeben sich aus (90) φ und t. Bequemer ist es, an Stelle der Gleichungen (90) die aus ihnen folgenden anzuwenden

$$(94) \qquad \operatorname{tang} t = -\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\sin d'}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{cotg} d' \cos t$$

Der Quadrant, in dem t zu nehmen ist, bestimmt sich mit Hilfe der Bemerkung, daß der ersten Gleichung (90) zufolge $\sin t$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin\vartheta$. Nachdem φ und t gefunden sind, erhält man aus der zweiten der Gleichungen (93)

$$(95) \qquad \lambda = t - \mu - \frac{u' \cos\psi + e' \cos(W+\nu')}{n}$$

Mit Rücksicht auf die für die Geschwindigkeit n der Bewegung der Schattenachse gewählte Zeiteinheit wird der Wert des auf der rechten Seite der Gleichung (95) stehenden Quotienten in Einheiten einer Stunde wahrer Sonnenzeit ausgedrückt erhalten.

Trägt man die auf dem eben angegebenen Wege berechneten Werte von φ und λ auf einer Karte auf, so erhält man zwei Kurven, die entweder ganz voneinander getrennt sind, oder aber in einem Punkte zusammenstoßen*). Für die Punkte der westlichen Grenzkurve liegt die wahre Ortszeit t zwischen 180° und 360°, diese Punkte sehen demnach entweder den Anfang oder das Ende der Sonnenfinsternis bei Sonnenaufgang; für die Punkte der östlichen Grenzkurve liegt t zwischen 0° und 180°, und es findet somit der Anfang oder das Ende der Finsternis bei Sonnenuntergang statt. Es bleibt nun noch übrig zu entscheiden, auf welchem Teile der östlichen, bzw. westlichen Grenzkurve der Anfang, und auf welchem Teile das Ende der Finsternis wahrgenommen wird.

*) Siehe die am Schlusse des Buches mitgeteilten Karten des Verlaufs der Sonnenfinsternisse 1904 März 16 und 1902 Oktober 30.

Wenn eine an einem gegebenen Beobachtungsorte wahrgenommene äußere Ränderberührung den Beginn der Finsternis bedeutet, so tritt der Ort in dem auf die Berührung folgenden Moment in das Innere des Halbschattenkegels ein; der Abstand des Ortes von der Schattenachse wird also kleiner. Entspricht aber die Ränderberührung dem Ende der Finsternis, so ist der Beobachtungsort in dem folgenden Augenblick weiter von der Schattenachse entfernt wie zuvor; der Abstand beider nimmt also zu. Wird demnach der Abstand des Beobachtungsortes von der Schattenachse wieder, wie oben, mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet, so bedeutet eine an dem Orte wahrgenommene äußere Ränderberührung den Anfang oder das Ende der Finsternis, jenachdem $\frac{d\bar{\varrho}}{dt}$ negativ oder positiv ist. Nun ist zur Zeit der Ränderberührung $\bar{\varrho} = u$, und es gelten in diesem Falle die Gleichungen (42²); außerhalb dieser Zeit aber hat $\bar{\varrho}$ einen von u verschiedenen Wert, und es ist dann

$$\begin{aligned}\bar{\varrho}\sin\psi &= -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1\cos d'\sin N' - \cos\varphi_1\sin d'\sin N'\cos t - \\ &\quad - \cos\varphi_1\cos N'\sin t\\ \bar{\varrho}\cos\psi &= (t-\lambda-\mu)n - (1-c)\sin\varphi_1\cos d'\cos N' + \\ &\quad + \cos\varphi_1\sin d'\cos N'\cos t - \cos\varphi_1\sin N'\sin t\end{aligned}$$

Bei der Differentiation dieser Gleichungen ist zu beachten, daß der Beobachtungsort als gegeben betrachtet wird, und daß demnach φ_1 und λ als Konstante zu behandeln sind. Die Größen γ, d', N', μ und n ändern sich freilich mit der Zeit, jedoch im Verhältnis zu $\bar{\varrho}$ und ψ nur so wenig, daß man diese Änderungen vernachlässigen kann. Berücksichtigt man ferner, daß als Zeiteinheit eine Stunde gewählt wurde, und drückt demnach auch das Differential dt in Teilen einer Stunde aus, so folgt, wenn $15\,\mathrm{arc}\,1^\circ = \varkappa$ gesetzt wird, $d\cos t = -\varkappa\sin t\,dt$ und $d\sin t = \varkappa\cos t\,dt$. Die Differentiation der obigen Gleichungen gibt also

$$\sin\psi\,\frac{d\bar{\varrho}}{dt} + \bar{\varrho}\cos\psi\,\frac{d\psi}{dt} = \varkappa\cos\varphi_1\sin d'\sin N'\sin t - \varkappa\cos\varphi_1\cos N'\cos t$$

$$\cos\psi\,\frac{d\bar{\varrho}}{dt} - \bar{\varrho}\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} = n - \varkappa\cos\varphi_1\sin d'\cos N'\sin t - \varkappa\cos\varphi_1\sin N'\cos t$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = n\cos\psi - \varkappa\sin d'\cos\varphi_1\sin t\cos(N'+\psi) - \varkappa\cos\varphi_1\cos t\sin(N'+\psi)$$

Vertauscht man jetzt wieder φ_1 mit φ und wendet die Gleichungen (90) und (92) an, so erhält man

$$\frac{d\bar{\varrho}}{dt} = n\cos\psi + \varkappa\sin d'\sin(W+\psi) \tag{96}$$

Das Vorzeichen des auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdrucks entscheidet also darüber, auf welchem Zweige der östlichen, bzw. westlichen Grenzkurve der Beginn, und auf welchem Zweige das Ende der Finsternis wahrgenommen wird.

122. Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche, sowie des Anfangs- und Endpunktes der Kurve der zentralen Finsternis. Ist t_1 die wahre Ortszeit an dem Punkte, in dem die Erde zuerst vom Halbschattenkegel berührt wird, und bedeutet λ_1 die östliche Länge dieses Punktes in bezug auf den Hauptmeridian, ist ferner t_2 die wahre Ortszeit und λ_2 die östliche Länge desjenigen Punktes der Erdoberfläche, in dem diese zuletzt von dem Halbschattenkegel berührt wird, so sind $t_1 - \lambda_1$ und $t_2 - \lambda_2$ die auf dem Hauptmeridian gezählten Zeiten der ersten, bzw. letzten Berührung des Halbschattenkegels mit der Erde. Sollen aber $t_1 - \lambda_1$ und $t_2 - \lambda_2$ die Zeiten der ersten, bzw. letzten Berührung sein, also dem Anfang, bzw. dem Ende der Finsternis überhaupt entsprechen, so muß $t_1 - \lambda_1$ das Minimum, und $t_2 - \lambda_2$ das Maximum von $t - \lambda$ sein; es gilt demnach die Bedingungsgleichung $d(t - \lambda) = 0$. Da nun die Punkte, in denen die Erde zuerst, bzw. zuletzt vom Halbschattenkegel berührt wird, der westlichen, bzw. östlichen Grenzkurve angehören, so kann man die Gleichungen (93) anwenden; differenziert man dieselben, indem man dabei nur ψ, W und $t - \lambda$ als veränderlich betrachtet und $dW = -d\vartheta$ setzt, so folgt

$$u' \cos\psi \, d\psi = -e \cos(W + \nu) d\vartheta$$
$$-u' \sin\psi \, d\psi = n d(t - \lambda) - e' \sin(W + \nu') d\vartheta$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von $d\psi$

$$n d(t - \lambda) = [e \cos(W + \nu) \operatorname{tang}\psi + e' \sin(W + \nu')] d\vartheta$$

Soll nun $d(t - \lambda) = 0$ werden, so muß der Faktor von $d\vartheta$ gleich 0 sein; man hat demnach als Bedingungsgleichung für die Punkte, in denen die Erde zuerst und zuletzt vom Halbschattenkegel berührt wird,

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{e' \sin(W + \nu')}{e \cos(W + \nu)} \tag{97}$$

Mit dieser Gleichung sind die für die östliche und westliche Grenzkurve gültigen Gleichungen (93^1) bis (95) zu verbinden. Nun sind e und e' nahe gleich 1, und ν und ν' sind klein; somit folgt aus (97), daß $\operatorname{tang}\psi$ nahe gleich $-\operatorname{tang} W$, und demnach ψ nahe gleich $-W$ oder gleich $180^\circ - W$ ist. Substituiert man diese Werte in die Gleichung (93^1) und setzt außerdem $e = 1$, $\nu = 0$, so erhält man für $\sin W$ den Näherungsausdruck

$$\sin W = \frac{\gamma}{1 \pm u'}$$

Hieraus ergeben sich vier Werte für W. Mit Hilfe dieser und der bekannten Werte von e, e', ν, ν' berechnet man nach (97) ψ, und erhält dann aus (93^1) genauere Werte von W; die den letzteren zugehörigen Werte von ϑ folgen aus der Gleichung (92). Zum Schluß hat man noch die Gleichungen (94) und (95) anzuwenden und findet damit t, φ und λ. Von den vier Wertepaaren von φ und λ gelten zwei für die äußere und zwei für die innere Berührung des Halbschattenkegels mit der Erde. Dasjenige Wertepaar, für welches $t - \lambda$ zu einem Minimum wird, bestimmt den Ort auf der Erde, an dem die Finsternis überhaupt beginnt; dagegen entspricht das dem Maximal-

werte von $t - \lambda$ zugehörige Wertepaar dem Ort, an dem die Finsternis endigt. Die Differenz des Maximal- und Minimalwertes von $t - \lambda$ gibt die Dauer der Finsternis an.

Die Betrachtungen, welche zur Bestimmung des ersten und letzten Berührungspunktes des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche geführt haben, lassen sich auch dazu verwenden, den Anfangs- und Endpunkt der Kurve der zentralen Finsternis zu bestimmen. In diesem Falle reduziert sich der Schattenkegel auf die die Mittelpunkte von Sonne und Mond verbindende Gerade, und man hat dann nach § 120 $u' = 0$ anzunehmen. Damit wird die Gleichung (93[1])

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e} \tag{98}$$

Hieraus erhält man zwei Werte von W, denen nach (92) zwei Werte von ϑ entsprechen; die diesen zugehörigen Werte von t und φ ergeben sich aus (94). Endlich folgt aus (95) für $u' = 0$

$$\lambda = t - \mu - \frac{e' \cos(W + \nu')}{n} \tag{99}$$

Das dem Minimalwerte von $t - \lambda$ entsprechende Wertepaar φ, λ gibt den Anfangspunkt, das andere den Endpunkt der Kurve der zentralen Finsternis.

123. Berührungspunkte der nördlichen und südlichen mit der östlichen und westlichen Grenzkurve. Um diese Punkte zu erhalten, hat man die für die östliche und westliche Grenzkurve geltenden Gleichungen (89) und (90), bzw. die aus diesen abgeleiteten Gleichungen (93[1]) bis (95) mit der für die nördliche und südliche Grenzkurve gefundenen Bedingungsgleichung (79) zu verbinden. Setzt man in letzterer $\varphi_1 = \varphi$, $g_1 = g$, $G_1 = G$ und $\cos f = 1$, so erhält man mit Berücksichtigung von (45[1])

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi \cos t \sin N' - \cos\varphi \sin t \sin d' \cos N'}{\cos\varphi \cos t \cos N' - \cos\varphi \sin t \sin d' \sin N'}$$

oder, indem man die Gleichungen (90) benutzt und, wie früher, $N' - \vartheta = W$ setzt,

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\frac{n}{\varkappa} + \sin d' \sin W}{\sin d' \cos W} \tag{100}$$

Dem § 119 zufolge kann man nun für die nördliche Grenzkurve den Näherungswert $\psi = 90^\circ$ annehmen; damit erhält man aus (93[1])

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma + u'}{e}$$

Die beiden dieser Gleichung genügenden Werte von W sind in die Gleichung (100) zu substituieren; mit Rücksicht auf die für die nördliche Grenzkurve gültige Bedingung $\sin\psi > 0$ ergeben sich dann höchstens zwei Werte von ψ, welche in Verbindung mit der Gleichung (93[1]) eine genauere Bestimmung der Werte von W ermöglichen. Nachdem dann noch die diesen entsprechenden Werte von $\vartheta = N' - W$ gebildet sind, erhält man aus (94) und (95) die Koordinaten φ und λ der beiden Berührungspunkte der nördlichen mit der östlichen und westlichen Grenzkurve.

Um die Punkte zu finden, in denen die südliche Grenzkurve von der östlichen und westlichen berührt wird, hat man von dem Näherungswerte $\psi = 270^\circ$ auszugehen, und demnach W zunächst mit Hilfe der Gleichung

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma - u'}{e}$$

zu bestimmen. Die Substitution der in ähnlicher Weise wie vorhin sich ergebenden genaueren Werte von ψ, W und ϑ in die Gleichungen (94) und (95) führt dann zur Kenntnis der Koordinaten der gesuchten Punkte.

124. Instantane Durchschnittskurve des Halbschattenkegels mit der Erdoberfläche. Um die Kurve zu finden, längs deren der Halbschattenkegel zu der wahren Zeit τ des ersten Meridians die Erdoberfläche schneidet, hat man zu berücksichtigen, daß für alle Punkte dieser Kurve die Gleichungen (42^1) und (42^2) erfüllt sein müssen. Führt man zunächst in (42^2) an Stelle von ψ seinen in (40) gegebenen Wert $\Theta - N'$ ein und setzt

$$\begin{aligned} d \sin D &= \sin d' \\ d \cos D &= (1 - e) \cos d', \end{aligned} \tag{101}$$

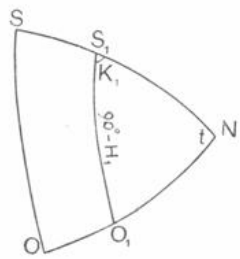
so erhält man durch eine leichte Transformation

$$\begin{aligned} u \sin \Theta &= -\gamma \cos N' + (t - \lambda - \mu)\, n \sin N' - \cos\varphi_1 \sin t \\ u \cos \Theta &= \gamma \sin N' + (t - \lambda - \mu)\, n \cos N' - d(\sin\varphi_1 \cos D - \cos\varphi_1 \sin D \cos t) \end{aligned} \tag{102}$$

Ferner wird die Gleichung (42^1), wenn in dem den kleinen Faktor $\operatorname{tang} f$ enthaltenden Gliede $e = 0$, also zufolge (101) $d' = D$, und $d = 1$ gesetzt wird,

$$u = u' - (\sin\varphi_1 \sin D + \cos\varphi_1 \cos D \cos t) \operatorname{tang} f \tag{102a}$$

Fig. 20.



In Fig. 20 sei nun N der Nordpol des Äquators, S der Ort des Mittelpunktes der Sonne, und O das Zenit eines auf der Durchschnittskurve des Halbschattenkegels mit der Erde gelegenen Ortes; es ist dann der von NO aus nach Westen gezählte Winkel SNO gleich der wahren Zeit t dieses Ortes, und zwar ist $t = \tau + \lambda$. Trägt man jetzt auf NS und NO die Bögen $NS_1 = 90^\circ - D$ und $NO_1 = 90^\circ - \varphi_1$ ab, so ergibt sich, wenn $S_1 O_1 = 90^\circ - H_1$, und $NS_1 O_1 = K_1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \cos H_1 \sin K_1 &= \cos\varphi_1 \sin t \\ \cos H_1 \cos K_1 &= \sin\varphi_1 \cos D - \cos\varphi_1 \sin D \cos t \\ \sin H_1 &= \sin\varphi_1 \sin D + \cos\varphi_1 \cos D \cos t \end{aligned} \tag{103}$$

Demnach werden die Gleichungen (102^a) und (102)

$$u = u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f \tag{104^1}$$

$$\begin{aligned} u \sin \Theta &= -\gamma \cos N' + (\tau - \mu)\, n \sin N' - \cos H_1 \sin K_1 \\ u \cos \Theta &= \gamma \sin N' + (\tau - \mu)\, n \cos N' - d \cos H_1 \cos K_1 \end{aligned} \tag{104^2}$$

Man substituiere jetzt den in (104^1) gegebenen Wert von u in die Gleichungen (104^2) und setze

$$(105^1)\qquad \begin{aligned} S\sin\Sigma &= \gamma & \Sigma' &= N' - \Sigma \\ S\cos\Sigma &= (\tau - \mu)n \end{aligned}$$

$$(105^2)\qquad \begin{aligned} l\sin L &= \sin K_1 \\ l\cos L &= d\cos K_1; \end{aligned}$$

es wird dann

$$\begin{aligned} (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)\sin\Theta &= S\sin\Sigma' - l\sin L\cos H_1 \\ (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)\cos\Theta &= S\cos\Sigma' - l\cos L\cos H_1 \end{aligned}$$

Bildet man die Summe der Quadrate dieser Gleichungen, so ergibt sich

$$\cos(L - \Sigma') = \frac{S^2 + l^2\cos^2 H_1 - (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2}{2Sl\cos H_1}$$

oder mit Rücksicht darauf, daß

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \frac{1 - \cos(L - \Sigma')}{1 + \cos(L - \Sigma')}$$

ist,

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \frac{(u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2 - (S - l\cos H_1)^2}{(S + l\cos H_1)^2 - (u' - \sin H_1 \operatorname{tang} f)^2}$$

Da l nahe gleich 1, und $f < 17'$ ist, so kann man

$$\begin{aligned} \sin H_1 \operatorname{tang} f &= l\sin H_1 \sin f \\ l\cos H_1 &= l\cos H_1 \cos f \end{aligned}$$

setzen; damit wird

$$(106)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L - \Sigma') = \pm\sqrt{\frac{[u' + S - l\cos(H_1 - f)]\,[u' - S + l\cos(H_1 + f)]}{[S + u' + l\cos(H_1 + f)]\,[S - u' + l\cos(H_1 - f)]}}$$

In dieser Gleichung sind alle Größen bis auf L, l und H_1 bekannt. Setzt man in erster Näherung $l = 1$, so bleiben die Unbekannten L und H_1 übrig, von denen eine als unabhängige Variabele zu wählen ist. Man nehme nun für H_1 einen beliebigen aber, mit Rücksicht auf die Bedeutung von H_1, zwischen 0° und 90° gelegenen Wert an, und berechne nach (106) die beiden zugehörigen Werte von L; diesen entsprechen zwei Werte von K_1, welche sich mit Hilfe der aus (105^2) folgenden Gleichung

$$(107)\qquad \operatorname{tang} K_1 = d\operatorname{tang} L$$

berechnen lassen. Wendet man darauf eine der Gleichungen

$$l = \frac{\sin K_1}{\sin L} = \frac{d\cos K_1}{\cos L}$$

an, so erhält man einen genaueren Wert von l und kann nun die Rechnung, angefangen von (106), wiederholen.

Nachdem die dem zugrunde gelegten Werte von H_1 entsprechenden Werte von K_1 gefunden sind, lassen sich mit Hilfe von (103) φ_1 und t berechnen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} h' \sin H' &= \sin H_1 \\ h' \cos H' &= \cos H_1 \cos K_1 \end{aligned} \tag{108}$$

also

$$\cos H_1 \sin K_1 = h' \cos H' \operatorname{tang} K_1,$$

so folgt aus (103)

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 \sin t &= h' \cos H' \operatorname{tang} K_1 \\ \cos\varphi_1 \cos t &= h' \sin(H' - D) \\ \sin\varphi_1 &= h' \cos(H' - D) \end{aligned} \tag{109}$$

Anstatt die Gleichungen (108) und (109) zur Berechnung von φ_1 und t zu benutzen, kann man auch folgende Formeln anwenden. Aus (108) ergibt sich zunächst

$$\operatorname{tang} H' = \operatorname{tang} H_1 \sec K_1 \tag{110}$$

Der Quadrant, in dem H' zu wählen ist, entscheidet sich durch die Bemerkung, daß $\sin H'$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin H_1$. Ferner erhält man aus den zwei ersten der Gleichungen (109)

$$\operatorname{tang} t = \frac{\cos H' \operatorname{tang} K_1}{\sin(H' - D)}, \tag{111}$$

wobei zu beachten ist, daß $\cos t$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\sin(H' - D)$. Endlich ergibt sich aus den beiden letzten Gleichungen (109)

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \operatorname{cotg}(H' - D)\cos t \tag{112}$$

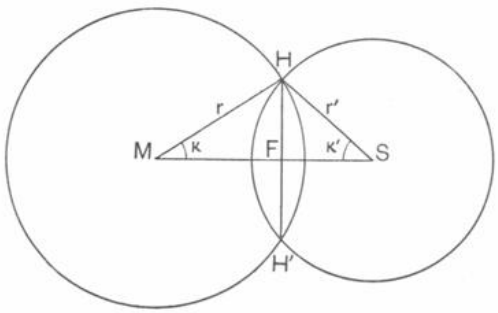
Damit sind φ_1 und t gefunden. Mit Hilfe von φ_1 läßt sich nun φ berechnen; aus t und der gegebenen Zeit τ des ersten Meridians folgt schließlich $\lambda = t - \tau$.

III. Verwendung der zur Zeit einer Sonnenfinsternis angestellten Hörnerbeobachtungen.

125. Bestimmung der Korrektion der Mondephemeride mit Hilfe der Beobachtung der relativen Lage der Hörnerspitzen. Hat man gelegentlich einer Sonnenfinsternis den Abstand der Hörnerspitzen oder den Positionswinkel der diese Spitzen verbindenden Sehne beobachtet, so kann man die erhaltenen Messungen dazu benutzen, die Differenz der Korrektionen der Mond- und Sonnenephemeride zu berechnen. Nun ist aber die Theorie der Sonnenbewegung gegenwärtig so genau bekannt, daß, wenn man nur die Korrektionen der Sonnenephemeride an einigen die Finsternis einschließenden Tagen bestimmt und in einen Mittelwert vereinigt hat, dieser als für die Zeit der Finsternis gültig betrachtet werden darf. Verbindet man demnach den erhaltenen Mittelwert mit der Differenz der Ephemeridenkorrektionen von Sonne und Mond, so ergibt sich ohne weiteres die Korrektion der Mondephemeride. Mit Rücksicht darauf, daß die Hörnerbeobachtungen das einzige Mittel bilden, den Ort des Mondes zur Zeit seiner Konjunktion mit der Sonne zu bestimmen, sind dieselben für die Theorie der Mondbewegung von großer Wichtigkeit.

Ehe gezeigt wird, wie man mit Hilfe der Messungen des Abstandes der Hörnerspitzen die Differenz der Korrektionen der Sonnen- und Mondephemeride bestimmen kann, muß erläutert werden, in welcher Weise man unter Benutzung der in den astronomischen Jahrbüchern gegebenen Örter und Durchmesser des Mondes und der Sonne den Abstand der Hörnerspitzen berechnet. In Fig. 21 seien M und S die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne zur Zeit einer partiellen Sonnenfinsternis, HH' sei die der Sonne und dem Mond gemeinsame Sehne, F sei der Schnittpunkt von MS und HH'. Bezeichnet man mit α und δ die Rektaszension und Deklination des Mondes, mit α' und δ' die Rektaszension und Deklination der Sonne, mit p den Positionswinkel der Richtung MS in bezug auf den Mond, mit p' den Positionswinkel der Richtung MS in bezug auf die Sonne und mit σ den vom Beobachtungsort aus gesehenen Winkelabstand der Mittelpunkte M und S, so folgt aus dem sphärischen Dreieck zwischen M, S und dem Pol

Fig. 21.



$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \sin\tfrac{1}{2}(p+p') = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\sigma \cos\tfrac{1}{2}(p+p') = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der für den Beobachtungsort gültigen scheinbaren Werte von α, δ, α', δ' lassen sich σ und $\frac{1}{2}(p+p')$ berechnen; doch kann man hierzu auch die folgenden Näherungsformeln benutzen, in denen ω die halbe Summe $\frac{1}{2}(p+p')$ bedeutet,

$$\begin{aligned} \sigma \sin\omega &= (\alpha'-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) \\ \sigma\cos\omega &= \delta'-\delta \end{aligned} \tag{113}$$

Die Seiten $MH = \bar{r}$ und $SH = \bar{r}'$ in Fig. 21 bezeichnen die vom Beobachtungsort aus gesehenen Halbmesser des Mondes und der Sonne; diese ergeben sich aus den in den Ephemeriden mitgeteilten, vom Mittelpunkte der Erde aus gesehenen Halbmessern durch Anwendung der in § 70 abgeleiteten Formel (26) in Verbindung mit den Formeln (14), (15) und (12) des § 68. Wird jetzt das Dreieck MHS als ein ebenes betrachtet, und bezeichnet man den Winkel bei M mit $\varkappa$, und den Winkel bei S mit $\varkappa'$, so ergibt sich zunächst

$$\sigma = \bar{r}'\cos\varkappa' + \bar{r}\cos\varkappa \tag{114}$$

Wenn sodann $HF = \frac{1}{2}s'$ gesetzt wird, so hat man

$$\bar{r}'^2 = \left(\frac{s'}{2}\right)^2 + (\bar{r}'\cos\varkappa')^2, \qquad \bar{r}^2 = \left(\frac{s'}{2}\right)^2 + (\bar{r}\cos\varkappa)^2$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man

$$\bar{r}'^2 - \bar{r}^2 = (\bar{r}'\cos\varkappa' + \bar{r}\cos\varkappa)(\bar{r}'\cos\varkappa' - \bar{r}\cos\varkappa)$$

oder mit Rücksicht auf (114)

$$\frac{(\bar{r}' + \bar{r})(\bar{r}' - \bar{r})}{\sigma} = \bar{r}' \cos\varkappa' - \bar{r} \cos\varkappa \tag{115}$$

Nachdem man mit Hilfe der Gleichungen (114) und (115) $\cos\varkappa$ und $\cos\varkappa'$ gefunden hat, ergibt sich s' aus einer der Gleichungen

$$s' = 2\bar{r} \sin\varkappa, \qquad s' = 2\bar{r}' \sin\varkappa' \tag{116}$$

Infolge der Fehler der Sonnen- und Mondephemeride ist der berechnete Wert von s' fehlerhaft. Um die Korrektion von s' zu erhalten, differenziere man zunächst die erste der Gleichungen (116); es ergibt sich dann

$$\tfrac{1}{2} ds' = \bar{r} \cos\varkappa \, d\varkappa + \sin\varkappa \, d\bar{r} \tag{117}$$

Projiziert man nun die Seiten SM und HM auf SH, und berücksichtigt, daß der Winkel $SHM = 180^\circ - (\varkappa + \varkappa')$ ist, so folgt

$$\bar{r}' = \sigma \cos\varkappa' - \bar{r} \cos(\varkappa + \varkappa')$$

Durch Differentiation dieser Gleichung findet man

$$d\bar{r}' = -\sigma \sin\varkappa' \, d\varkappa' + \cos\varkappa' \, d\sigma + \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \, d(\varkappa + \varkappa') - \cos(\varkappa + \varkappa') \, d\bar{r}$$

Da aber

$$\sigma \sin\varkappa' = \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \tag{118}$$

ist, so wird die vorige Gleichung

$$\cos\varkappa' \, d\sigma = d\bar{r}' - \bar{r} \sin(\varkappa + \varkappa') \, d\varkappa + \cos(\varkappa + \varkappa') \, d\bar{r} \tag{119}$$

Man multipliziere jetzt die Gleichung (117) mit $\sin(\varkappa + \varkappa')$ und die Gleichung (119) mit $\cos\varkappa$; addiert man dann die Produkte, so erhält man

$$ds' = \frac{2\cos\varkappa}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r}' + \frac{2\cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r} - \frac{2\cos\varkappa\cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\sigma \tag{120}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (113) ergibt sich aber bis auf Glieder erster Ordnung genau

$$\begin{aligned} \sin\omega \, d\sigma + \sigma\cos\omega \, d\omega &= \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) \\ \cos\omega \, d\sigma - \sigma\sin\omega \, d\omega &= d(\delta' - \delta) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sin\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) + \cos\omega \, d(\delta' - \delta) \\ \sigma d\omega &= \cos\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) - \sin\omega \, d(\delta' - \delta) \end{aligned} \tag{121}$$

Substituiert man den hier für $d\sigma$ erhaltenen Ausdruck in die Gleichung (120) und setzt den wahren Wert der Sehne HH' oder $s' + ds' = s$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s - s' = \frac{2\cos\varkappa}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r}' + \frac{2\cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} d\bar{r} - \frac{2\cos\varkappa\cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} \sin\omega \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \, d(\alpha' - \alpha) \\ - \frac{2\cos\varkappa\cos\varkappa'}{\sin(\varkappa + \varkappa')} \cos\omega \, d(\delta' - \delta) \end{aligned} \tag{122}$$

Jedem beobachteten Hörnerabstand s entspricht eine solche Gleichung; aus allen Gleichungen zusammengenommen lassen sich die Korrektionen von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$, als Funktionen von $d\bar{r}'$ und $d\bar{r}$ ausgedrückt, bestimmen.

Der aus den Gleichungen (113) folgende Wert von ω gibt die halbe Summe der auf die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes bezogenen Positionswinkel der Richtung MS an. Nach § 20 ist aber, wenn p_m den Positionswinkel von MS, bezogen auf den Mittelpunkt von MS bedeutet,

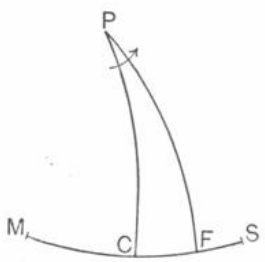
$$\omega - p_m = \tfrac{1}{16}\sigma^2 \sin 1'' \sin 2p_m[1 + 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)]$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist selbst für $\sigma = 32'$ und $\frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 24^\circ$ kleiner als $1''.6$; die Differenz $\omega - p_m$ kann also vernachlässigt werden, und somit wird $p_m = \omega$. Addiert man jetzt zu dem mit Hilfe der Gleichungen (113) berechneten Wert von ω die aus der zweiten Gleichung (121) folgende Korrektion $d\omega$, so erhält man für den wahren Wert von p_m

$$p_m = \omega + \frac{\cos\omega}{\sigma} \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\, d(\alpha' - \alpha) - \frac{\sin\omega}{\sigma}\, d(\delta' - \delta) \tag{123}$$

Der Wert von p_m läßt sich aber auch aus den Beobachtungen ableiten. Die Beobachtung liefert zwar direkt nur den Positionswinkel der Sehne $H'H$ (Fig. 21), bezogen auf den Mittelpunkt F; bezeichnet man diesen Positionswinkel mit p_1, so ist der auf F bezogene Positionswinkel der Richtung MS gleich $90^\circ + p_1$. Man betrachte nun die Fig. 22, worin M, S und F dieselbe Bedeutung wie in Fig. 21 haben, und wo C den Mittelpunkt von MS, und P den Nordpol des Äquators bezeichnet. Wie mit Hilfe von Fig. 21 ersichtlich ist, ist die Seite CF gleich $\bar{r}\cos\varkappa - \frac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa + \bar{r}'\cos\varkappa') = = \frac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')$; der Winkel PFC ist gleich $180^\circ - (90^\circ + p_1)$, und der Winkel PCF gleich p_m. Nimmt man noch $\frac{1}{2}(PC + PF) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$ an, so erhält man durch Anwendung einer der *Napier*schen Analogien auf das Dreieck PCF

Fig. 22.



$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \frac{\sin\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) + p_m]}{\sin\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) - p_m]} \operatorname{tang}[\tfrac{1}{4}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')]$$

Berücksichtigt man, daß $\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) - p_m]$ und $\frac{1}{4}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')$ kleine Winkel sind, und setzt $\frac{1}{2}[(90^\circ + p_1) + p_m] = p_m = \omega$, so gibt die vorige Gleichung

$$90^\circ + p_1 - p_m = \tfrac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')\sin\omega \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \tag{124}$$

Der Wert des auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdrucks ist stets klein und wird durch die Fehler der Sonnen- und Mondephemeride nicht beeinflußt. Substituiert man nun in (124) für p_m seinen in (123) gegebenen Wert und setzt dann

$$\omega + \tfrac{1}{2}(\bar{r}\cos\varkappa - \bar{r}'\cos\varkappa')\sin\omega \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) = \Pi, \tag{125}$$

so erhält man die zur Bestimmung der Korrektionen von $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ dienende Gleichung

$$90^\circ + p_1 - \Pi = \frac{\cos\omega}{\sigma} \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\, d(\alpha' - \alpha) - \frac{\sin\omega}{\sigma}\, d(\delta' - \delta) \tag{126}$$

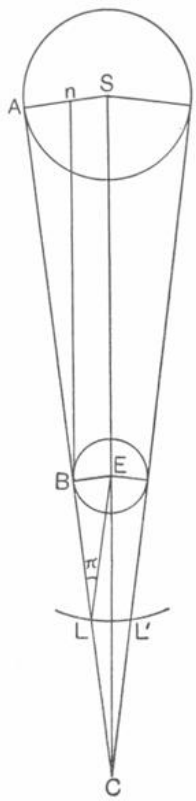
Hierbei ist σ in Teilen des Radius auszudrücken.

Kapitel XX.

Mondfinsternisse.

126. Bedingung für das Eintreten einer Mondfinsternis. In Fig. 1 seien S und E die Mittelpunkte der Sonne, bzw. der Erde, C sei die Spitze des von der Erde geworfenen Schattenkegels; die Entfernung EC werde mit g, und der Abstand SE mit r' bezeichnet. Sieht man von der Abplattung der Erde ab, und bezeichnet man die linear gemessenen Radien der Sonne und der Erde mit s', bzw. e, so hat man die Proportion

Fig. 1.



$$g : e = r' : (s' - e)$$

Wenn aber der geozentrische Winkelhalbmesser der Sonne mit Δ', und die Parallaxe der Sonne mit π' bezeichnet wird, so ist

$$\sin \Delta' = \frac{s'}{r'}, \qquad \sin \pi' = \frac{e}{r'}$$

Demnach gibt die vorige Proportion

$$g = \frac{e}{\sin \Delta' - \sin \pi'}$$

Für die mittleren Werte $\Delta' = 960''$, $\pi' = 9''$ folgt hieraus $g = 217\,e$. Da aber die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde nur gleich $60\,e$ ist, so ist der Mond stets der Erde bedeutend näher als wie die Spitze C des von der Erde geworfenen Schattenkegels; der Mond kann also in den Schattenkegel eintreten und demnach verfinstert werden.

Die Bedingung, welche erfüllt sein muß, damit eine Mondfinsternis eintritt, läßt sich in folgender Weise ableiten. Ist r die Entfernung des Mondes von der Erde, so beschreibe man mit dem Radius r eine Kugel um E, und lege durch die Durchschnittslinie LL' dieser Kugel mit dem von der Erde geworfenen Schattenkegel eine Kegelfläche, deren Spitze der Punkt E bildet. Diese Kegelfläche schneidet eine senkrecht zu EC stehende Ebene in einem Kreise, dessen geozentrischer Winkelhalbmesser gleich LEC ist und mit k bezeichnet werden möge; der Mittelpunkt dieses Kreises ist in Fig. 2 mit K bezeichnet. Denkt man sich ferner senkrecht zu der Verbindungslinie von E mit dem Mittelpunkte des Mondes eine Ebene gelegt, so wird diese von dem durch E als Scheitel gelegten und den Mond einhüllenden Kegel in einem Kreise geschnitten, dessen geozentrischer Winkelhalbmesser gleich dem geozentrischen Winkelhalbmesser (Δ) des Mondes ist; der Mittelpunkt dieses Kreises ist der in Fig. 2 mit M bezeichnete Punkt. Bedeutet nun σ den vom Mittelpunkte der Erde aus gesehenen Abstand KM, so lehrt die Figur, daß im Moment,

wo der Mond den Kernschattenkegel von außen berührt, $\sigma = \Delta + k$ sein muß; für eine partielle Finsternis dagegen ist, wie Fig. 2ª zeigt, $\sigma < \Delta + k$. Eine Finsternis findet also nur statt, wenn $\sigma \leqq \Delta + k$ ist. Um k zu bestimmen, berücksichtige man,

Fig. 2.

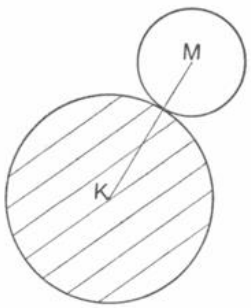


Fig. 2ª.

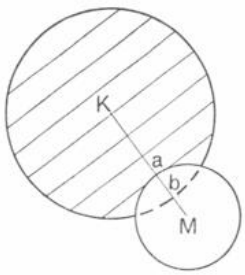
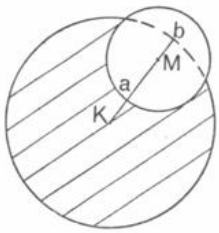


Fig. 2ᵇ.



daß, wenn der Winkel BLE (Fig. 1) oder die Horizontalparallaxe des Mondes mit π, und der Winkel BCE oder der halbe Öffnungswinkel des Schattenkegels mit f bezeichnet wird,

$$\pi = f + k$$

ist. Es ist aber, wenn Bn parallel zu SE gezogen wird,

$$\sin f = \frac{s' - e}{r'} = \sin \Delta' - \sin \pi'$$

oder, mit einer für den gegenwärtigen Zweck hinreichenden Genauigkeit,

$$f = \Delta' - \pi'$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhin für π erhaltenen, so ergibt sich $k = \pi + \pi' - \Delta'$. Dieser theoretisch gefundene Wert von k ist aber den Beobachtungen zufolge zu klein, und zwar muß derselbe, um mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu kommen, mit $\frac{51}{50}$ multipliziert werden. Man hat also zu setzen

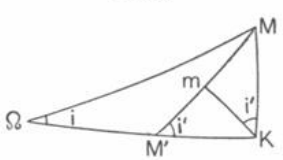
(1) $$k = \tfrac{51}{50}(\pi + \pi' - \Delta')$$

Somit wird die Bedingung für das Eintreten einer Mondfinsternis

(2) $$\sigma \leqq \Delta + \tfrac{51}{50}(\pi + \pi' - \Delta')$$

Nun ist eine Mondfinsternis nur dann möglich, wenn sich der Mond in der Nähe eines der Durchschnittspunkte seiner Bahn mit der Ekliptik und gleichzeitig in der Nähe seiner Opposition mit der Sonne, somit in der Nähe seiner Konjunktion mit dem oben mit K bezeichneten Punkte befindet. Es sei jetzt ΩK (Fig. 3) die Ekliptik, ΩM die Mondbahn, und i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik. Ferner seien M und K die geozentrischen Örter des Mondes und des Punktes K zur Zeit ihrer Konjunktion in Länge; MK ist somit senkrecht zu ΩK. Da M in der Nähe des Knotenpunktes Ω liegen soll, so kann man die Bewegung

Fig. 3.



des Mondes innerhalb der Zeit τ, während deren er den Bogen ΩM beschreibt, als gleichförmig, und das Dreieck ΩMK als eben betrachten. Bezeichnet man also mit Δl und Δb die stündliche Bewegung des Mondes in Länge, bzw. Breite, so hat man $\Omega K = \Delta l \cdot \tau$, $MK = \Delta b \cdot \tau$, folglich, weil MK senkrecht zu ΩK steht,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\Delta b}{\Delta l} \tag{3}$$

Es möge jetzt $\Delta l'$ die stündliche Bewegung der Sonne also auch des Punktes K in Länge bezeichnen; die stündliche Bewegung des Mondes in Länge und Breite, relativ zur Sonne, ist dann gleich $\Delta l - \Delta l'$, bzw. Δb. Trägt man also auf der Ekliptik den Bogen $M'K = (\Delta l - \Delta l')\tau$ ab, so stellt $M'M$ die Mondbahn relativ zum Punkte K dar; demnach gibt die von K aus auf $M'M$ gefällte Senkrechte Km den kleinsten geozentrischen Abstand zwischen dem Monde und dem Punkte K an. Wird nun der Winkel $MM'K$ mit i', und KM oder die Breite des Mondes zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne, d. h. zur Zeit des Vollmondes mit b bezeichnet, so ergibt sich $Km = b \cos i'$; dies ist also der kleinste Wert, den der oben mit σ bezeichnete Winkel annehmen kann. Somit wird die für das Eintreten einer Mondfinsternis gefundene Bedingungsgleichung (2)

$$b \leqq [\Delta + \tfrac{51}{50}(\pi + \pi' - \Delta')] \sec i' \tag{4}$$

Zur Bestimmung von i' hat man

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\Delta b}{\Delta l - \Delta l'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'} \frac{\Delta b}{\Delta l}$$

oder, wenn

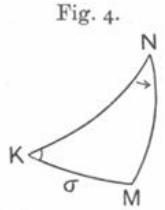
$$\frac{\Delta l}{\Delta l'} = \lambda \tag{5}$$

gesetzt, und die Gleichung (3) berücksichtigt wird,

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{tang} i \tag{6}$$

127. Vorausberechnung einer Mondfinsternis. In Fig. 4 seien M, K, N die geozentrischen Örter des Mondes, der Spitze des Schattenkegels und des Nordpols des Äquators. Die Rektaszension und Deklination des Mondes möge mit α, bzw. δ bezeichnet werden; α', bzw. δ' bedeute die Rektaszension und Deklination der Sonne, also $180^\circ + \alpha'$, bzw. $-\delta'$ die Rektaszension und Deklination des Punktes K. Setzt man jetzt den Winkel NKM gleich Q, und den Bogen KM, wie früher, gleich σ, so ergibt sich

Fig. 4.



$$\begin{aligned} \sin\sigma \sin Q &= \cos\delta \sin[\alpha - (180^\circ + \alpha')] \\ \sin\sigma \cos Q &= \sin\delta \cos\delta' + \cos\delta \sin\delta' \cos[\alpha - (180^\circ + \alpha')] \end{aligned} \tag{7}$$

Oben wurde gefunden, daß zur Zeit der äußeren Berührung des Mondrandes mit dem Kernschattenkegel $\sigma = k + \Delta$ sein muß; zur Zeit der inneren Berührung dagegen, d. h. zu Anfang oder zu Ende einer totalen Mondfinsternis gilt die Gleichung

$\sigma = k - \Delta$. Wird also für k sein durch die Gleichung (1) gegebener Wert substituiert, so hat man für den Anfang und das Ende der Finsternis überhaupt

$$\sigma = \tfrac{51}{50}(\pi + \pi' - \Delta') + \Delta, \tag{8}$$

und für den Anfang und das Ende der totalen Finsternis

$$\sigma = \tfrac{51}{50}(\pi + \pi' - \Delta') - \Delta \tag{9}$$

In der Nähe der Finsternis sind σ, $\alpha - (180^\circ + \alpha')$ und $\delta + \delta'$ verhältnismäßig kleine Winkel; setzt man also zur Abkürzung

$$x = \sigma \sin Q, \qquad y = \sigma \cos Q, \tag{10}$$

so kann man an Stelle der Gleichungen (7) die folgenden anwenden:

$$x = [\alpha - (180^\circ + \alpha')] \cos\delta, \qquad y = \delta + \delta' \tag{11}$$

Es sei nun T_0 eine der Konjunktionszeit der Punkte K und M in Länge zunächst liegende volle Stunde; man berechne dann für die Zeiten $T_0 - 3^h$, T_0, $T_0 + 3^h$ die zugehörigen Werte von x und y, und bestimme mit ihrer Hilfe auch genäherte Werte der stündlichen Änderungen von x und y für die Zeit T_0. Werden letztere mit x', bzw. y', und die der Zeit T_0 entsprechenden Werte von x und y mit x_0 und y_0 bezeichnet, so sind die Werte, welche x und y zur Zeit $T = T_0 + \tau$ haben,

$$x = x_0 + x'\tau, \qquad y = y_0 + y'\tau \tag{12}$$

Man setze jetzt

$$\begin{aligned} x_0 &= m \sin M, & x' &= n \sin N \\ y_0 &= m \cos M, & y' &= n \cos N \end{aligned} \tag{13}$$

und substituiere für x und y die Ausdrücke (10); es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sigma \sin Q &= m \sin M + \tau n \sin N \\ \sigma \cos Q &= m \cos M + \tau n \cos N \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma \sin(Q - N) &= m \sin(M - N) \\ \sigma \cos(Q - N) &= m \cos(M - N) + \tau n \end{aligned} \tag{14}$$

Bedeutet also ψ einen Winkel, welcher der Gleichung

$$\sin\psi = \frac{m \sin(M - N)}{\sigma} \tag{15}$$

genügt, so genügen der ersten der Gleichungen (14) die Werte

$$Q - N = \psi, \qquad Q - N = 180^\circ - \psi$$

und die zweite Gleichung (14) gibt demnach

$$\tau = -\frac{m \cos(M - N)}{n} \mp \frac{\sigma}{n} \cos\psi$$

Somit wird

$$T = T_0 - \frac{m \cos(M - N)}{n} \mp \frac{\sigma}{n} \cos\psi \tag{16}$$

Für ψ soll nun derjenige der zwei der Gleichung (15) genügenden Werte gewählt werden, für welchen $\cos\psi$ positiv ist. Falls dann für σ sein durch die Gleichung (8) gegebener Wert angewandt wird, so gibt der dem oberen Vorzeichen in (16) entsprechende Wert von T die Zeit des Anfangs, und der dem unteren Vorzeichen entsprechende die Zeit des Endes der Mondfinsternis überhaupt an; substituiert man dagegen für σ den Wert (9), so gilt das obere Vorzeichen für den Anfang, und das untere für das Ende der totalen Mondfinsternis.

Ist das Produkt $b\cos i'$, d. h. der kleinste Wert, den σ um die Zeit des Vollmondes herum annehmen kann, zwar kleiner als $k+\Delta$, aber größer als $k-\Delta$, so ist nur eine partielle Finsternis möglich; die erstere Bedingung wurde schon in § 126 angegeben, die Bedingung $\sigma > k-\Delta$ entspricht dem Falle, wo der Mittelpunkt des Mondes innerhalb des um K beschriebenen Schattenkreises liegt (Fig. 2[b]). Wenn aber die Finsternis nur partiell ist, so ist es wünschenswert, die Zeit des Maximums der Verfinsterung zu kennen. Um diese Zeit zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß das Maximum nur einmal stattfindet, daß also dann die Gleichung (16) nicht mehr wie einen Wert von T geben kann; es muß demnach das Glied $\frac{\sigma}{n}\cos\psi$ verschwinden, und somit ergibt sich, wenn T_m die Zeit des Maximums der Verfinsterung bedeutet,

$$T_m = T_0 - \frac{m\cos(M-N)}{n} \tag{17}$$

Da σ bei einer partiellen Finsternis nicht gleich o werden kann, und da n endlich ist, so verschwindet das Glied $\frac{\sigma}{n}\cos\psi$ nur, wenn $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 270^\circ$ ist. Der Gleichung (15) zufolge hat man aber für $\psi = 90^\circ$, bzw. $\psi = 270^\circ$

$$\sigma = \pm m\sin(M-N); \tag{18}$$

dies ist also der Wert von σ zur Zeit des Maximums einer partiellen Finsternis.

Das Verhältnis der Strecke ab (Fig. 2[a], bzw. 2[b]) zu dem Durchmesser des Mondes nennt man die Größe der Finsternis; wird diese mit G bezeichnet, so ergibt sich, wenn die mit σ bezeichnete Distanz als positive Größe betrachtet wird,

$$G = \frac{k+\Delta-\sigma}{2\Delta} \tag{19}$$

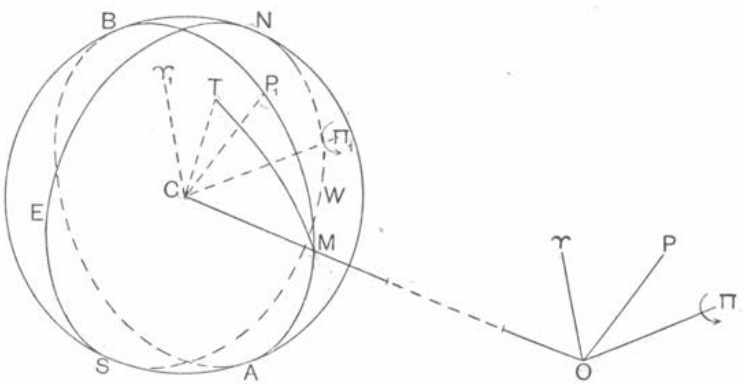
Um mit Hilfe dieser Gleichung die Größe des Maximums der Verfinsterung zu erhalten, hat man für σ den absoluten Wert von $m\sin(M-N)$ zu substituieren.

Kapitel XXI.

Astrographische Ortsbestimmung.

128. Bestimmung der Lage der Rotationsachse und der Drehungsgeschwindigkeit eines kugelförmigen Himmelskörpers. Astrozentrische und astrographische Länge und Breite eines Fleckes. Es sei M (Fig. 1) der Punkt, in dem die Verbindungslinie des Beobachtungsortes O mit dem Zentrum C des als kugelförmig gedachten Himmelskörpers die Oberfläche des letzteren schneidet; ferner sei $ENWS$ der Kreis, in dem der Himmelskörper von einer durch C senkrecht zu

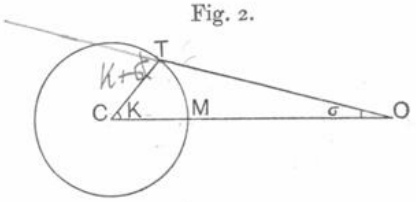
Fig. 1.



CO gelegten Ebene geschnitten wird. Mit Rücksicht darauf, daß die Dimensionen eines Körpers des Sonnensystems klein sind im Verhältnis zu seiner Entfernung von der Erde, kann man annehmen, daß der Kreis $ENWS$ mit der Linie zusammenfällt, längs deren ein durch O als Scheitel gelegter und den Himmelskörper einhüllender Kegel den Körper berührt; von O aus gesehen, wird sich demnach der Himmelskörper als eine durch den Kreis $ENWS$ begrenzte Scheibe mit dem Mittelpunkte M auf den Himmelsgrund projizieren.

Es sei nun OP die Richtung vom Beobachter zum Nordpol des Erdäquators und BMA der größte Kreis, in dem die Ebene POC verlängert den Himmelskörper schneidet. Bedeutet jetzt T einen auf der Oberfläche des Himmelskörpers sichtbaren Fleck, so läßt sich durch die Beobachtung sein Positionswinkel, bezogen auf M, d. h. — unter der Annahme, daß die von O aus gesehene Rektaszension von T größer ist als die von M — der sphärische Winkel $BMT = \pi$ bestimmen. Ferner gibt die Beobachtung die Distanz des Fleckes von der Mitte der Scheibe oder den Winkel COT; hiermit aber kann der Winkel berechnet werden, unter dem der Bogen TM von C aus gesehen erscheint. Wenn nämlich in dem ebenen Dreiecke TOC (Fig. 2) der

Fig. 2.



Winkel bei O mit σ, und der gesuchte Winkel bei C mit K bezeichnet wird, so ist der Winkel bei T gleich $180^\circ - (K + \sigma)$, und man erhält, wenn $CT = r$ und $CO = \varrho$ gesetzt wird,

$$\sin\sigma : \sin(K + \sigma) = r : \varrho$$

Mit Einführung eines durch die Gleichung

$$\sin h' = \frac{r}{\varrho}$$

definierten Hilfswinkels h' gibt die vorige Proportion

$$\sin\sigma = \sin h' \sin(K + \sigma) \tag{1}$$

Da der Himmelskörper als kugelförmig vorausgesetzt wird, so ist h' gleich dem in der Entfernung ϱ von O aus gesehenen Winkelhalbmesser des Himmelskörpers.

Berücksichtigt man, daß $K + \sigma$ gleich dem Winkel ist, den die über T hinaus verlängerte Richtung OT mit der Richtung TC bildet, so sieht man ohne weiteres, daß für alle von O aus sichtbaren Flecke $K + \sigma \leqq 90^\circ$ sein muß; somit ist durch die Gleichung (1) der Winkel K eindeutig bestimmt. Setzt man

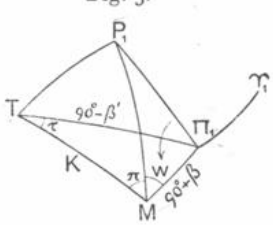
$$\frac{\sin\sigma}{\sin h'} = \sin S \tag{1a}$$

und wählt $S \leqq 90^\circ$, so wird

$$K = S - \sigma \tag{1b}$$

In Fig. 1 mögen $O\Pi$ und $O\gamma$ die Richtungen vom Beobachter zum Nordpol der Ekliptik, bzw. zum Frühlingsäquinox angeben; parallel zu diesen beiden Richtungen ziehe man die Geraden $C\Pi_1$ und $C\gamma_1$. Wird die von O aus gesehene Breite von C mit β bezeichnet, so ist der Winkel $\Pi_1 CM = \Pi_1 CO = 180^\circ - \Pi OC = 90^\circ + \beta$. Die von C aus gesehene und auf eine durch C parallel zur Ekliptik gelegte Ebene bezogene Breite des Beobachtungsortes O (oder auch des Mittelpunktes M der Himmelskörperscheibe) ist demnach gleich $-\beta$; diese Breite soll die astrozentrische Breite von O, bzw. von M genannt werden. Unter der astrozentrischen Länge von O, bzw. von M wird im folgenden der Winkel verstanden, um den die Ebene $\Pi_1 C\gamma_1$ um $C\Pi_1$ in der durch den Pfeil dargestellten Richtung der wachsenden Längen gedreht werden muß, damit sie mit der Ebene $\Pi_1 CM$ zusammenfalle; man hat also, wenn L die astrozentrische Länge von M, und λ die von O aus gesehene Länge von C bedeutet, $L = 180^\circ + \lambda$. Die von C aus gesehene Rektaszension und Deklination von O oder M soll die astrozentrische Rektaszension, bzw. Deklination von O oder M genannt werden; bezeichnet man mit α und δ die vom Beobachtungsort aus gesehene Rektaszension und Deklination des Himmelskörpers, so ist die astrozentrische Rektaszension, bzw. Deklination von O oder M gleich $180^\circ + \alpha$, bzw. $-\delta$. Zieht man CP_1 parallel zu OP, wo nun CP_1 in der Ebene des Kreises BMA liegt, so ist $P_1 CM = 90^\circ + \delta$. Man verlängere jetzt die Richtungen CM, CT, ..., $C\gamma_1$ bis zu ihren Durchschnitten M, T, ..., γ_1 (Fig. 3) mit der um C beschriebenen Sphäre; in dem Dreieck $P_1 \Pi_1 M$ hat man dann, wenn ε

Fig. 3.



die Schiefe der Ekliptik bedeutet, $P_1\Pi_1 = \varepsilon$, $P_1M = 90^\circ + \delta$, $\Pi_1M = 90^\circ + \beta$, $P_1\Pi_1M = L - 90^\circ = 90^\circ + \lambda$. Wird also der Winkel $P_1M\Pi_1$ mit w bezeichnet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos\delta \sin w &= \sin\varepsilon \cos\lambda \\ \cos\delta \cos w &= \cos\varepsilon \cos\beta - \sin\varepsilon \sin\beta \sin\lambda \end{aligned} \tag{2}$$

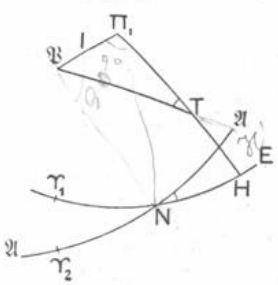
Hier können β, λ und ε als gegeben angenommen werden, und somit läßt sich aus (2) der Winkel w berechnen. Da aber der Winkel P_1MT gleich dem beobachteten Positionswinkel π des Fleckes ist, so ist nun auch der Winkel $TM\Pi_1 = w + \pi$ bekannt.

Es werde jetzt $\Pi_1T = 90^\circ - \beta'$ gesetzt, so daß β' die astrozentrische Breite des Fleckes darstellt; ferner bezeichne man die astrozentrische Länge des Fleckes oder den von $\Pi_1\Upsilon_1$ aus in der Richtung des Pfeiles gerechneten Winkel $\Upsilon_1\Pi_1T$ mit λ'. Die Werte von λ' und β' lassen sich mit Hilfe des Dreieckes $T\Pi_1M$ bestimmen. Da nämlich der Winkel $T\Pi_1M = L - \lambda' = 180^\circ - (\lambda' - \lambda)$ und die Seite $TM = K$ ist, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda) &= \sin K \sin(\pi + w) \\ \cos\beta' \cos(\lambda' - \lambda) &= -\cos K \cos\beta - \sin K \sin\beta \cos(\pi + w) \\ \sin\beta' &= -\cos K \sin\beta + \sin K \cos\beta \cos(\pi + w) \end{aligned} \tag{3}$$

Hat man nun einen Fleck zu drei verschiedenen Zeiten beobachtet und die zugehörigen Werte von β' und λ' berechnet, so läßt sich die Lage der Rotationsachse und die Drehungsgeschwindigkeit des Himmelskörpers bestimmen. Um dies zu zeigen, denke man sich durch das Zentrum C des Himmelskörpers eine Ebene senkrecht zur Rotationsachse, und eine zweite Ebene parallel zur Ekliptik gelegt; diese beiden Ebenen mögen die um C beschriebene Sphäre in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ (Fig. 4), bzw. Υ_1E schneiden, wobei Υ_1 dieselbe Bedeutung wie in Fig. 3 haben soll; $\mathfrak{P}$ und Π_1 seien die Pole von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, bzw. von Υ_1E; T sei der astrozentrische Ort des Fleckes. Wird der Bogen Υ_1N oder die Länge des aufsteigenden Knotens von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf Υ_1E gleich $\mathfrak{V}$ gesetzt, so ist der Bogen $NH = \lambda' - \mathfrak{V}$, also der Winkel $\mathfrak{P}\Pi_1T = 90^\circ + \lambda' - \mathfrak{V}$. Wenn ferner auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ die Strecke $\Upsilon_2N = \Upsilon_1N = \mathfrak{V}$ abgetragen wird, und l' den von $\mathfrak{P}\Upsilon_2$ aus in der Richtung der wachsenden Längen gerechneten Winkel $\Upsilon_2\mathfrak{P}T$ bedeutet, so ist der Winkel $T\mathfrak{P}\Pi_1 = 90^\circ - (l' - \mathfrak{V})$. Man setze jetzt noch $\mathfrak{P}T = 90^\circ - b'$ und $\mathfrak{P}\Pi_1 = J$, wo also J die Neigung des Äquators des Himmelskörpers gegen die Ekliptik bezeichnet; aus dem Dreieck $\mathfrak{P}\Pi_1T$, dessen Seite $\Pi_1T = 90^\circ - \beta'$ ist, folgt dann

Fig. 4.



$$\begin{aligned} \cos b' \sin(l' - \mathfrak{V}) &= \sin\beta' \sin J + \cos\beta' \cos J \sin(\lambda' - \mathfrak{V}) \\ \cos b' \cos(l' - \mathfrak{V}) &= \cos\beta' \cos(\lambda' - \mathfrak{V}) \\ \sin b' &= \sin\beta' \cos J - \cos\beta' \sin J \sin(\lambda' - \mathfrak{V}) \end{aligned} \tag{4}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\frac{\sin b'}{\cos J} = x, \qquad \operatorname{tang} J \cos \mathfrak{V} = y, \qquad \operatorname{tang} J \sin \mathfrak{V} = z, \tag{5}$$

so wird die letzte Gleichung

$$x + y \sin \lambda' \cos \beta' - z \cos \lambda' \cos \beta' = \sin \beta' \tag{6}$$

Jedes Wertepaar von β' und λ' liefert eine solche Gleichung, man kann also mit Hilfe von drei Wertepaaren die Unbekannten x, y und z berechnen; sodann erhält man aus (5) die Werte von J, $\mathfrak{V}$ und $\sin b'$. Die beiden ersten der Gleichungen (4) dienen zur Berechnung von $\cos b'$ und $l' - \mathfrak{V}$; da $\sin b'$ und $\mathfrak{V}$ bereits bekannt sind, so sind nun auch b' und l' als bekannte Größen anzusehen. Durch J und $\mathfrak{V}$ ist die Lage der Rotationsachse bestimmt; um auch die Rotationsgeschwindigkeit zu erhalten, hat man die Differenz zwischen zwei zu verschiedenen Beobachtungszeiten gehörigen Werten von l' durch die Epochendifferenz zu dividieren. Wird die Drehungsgeschwindigkeit mit n bezeichnet und n in Graden ausgedrückt, so gibt $360^\circ : n$ die Dauer einer Umdrehung an.

Es sei nun $\mathit{\Lambda}$ der in derselben Weise wie l' gerechnete Winkel zwischen $\mathfrak{P}\Upsilon_2$ und einem fest gewählten oder Hauptmeridian des Himmelskörpers zur Zeit t_0; zur Zeit t bildet dann dieser Meridian mit $\mathfrak{P}\Upsilon_2$ den Winkel $\mathit{\Lambda} + n(t - t_0)$. Wird zur Abkürzung $\mathit{\Lambda} + n(t - t_0) = l'_0$ gesetzt, und bezieht sich der für einen Fleck aus (4) gefundene Wert von l' auf die Zeit t, so gibt $l' - l'_0$ die astrographische Länge des Fleckes, bezogen auf den Hauptmeridian, an; den oben eingeführten Winkel b' bezeichnet man als die astrographische Breite des Fleckes. In der Folge wird zur Abkürzung $l' - l'_0 = l_1$ gesetzt werden.

Die Wahl des Hauptmeridians ist an und für sich beliebig. Bei der Sonne wird von manchen derjenige Meridian als Hauptmeridian betrachtet, welcher am 1. Januar 1854 um 0^h m. Zt. Greenwich durch den aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Ekliptik ging. In diesem Falle hat man also $t_0 =$ 1854 Januar 1.0 m. Zt. Gr., und $\mathit{\Lambda}$ ist gleich dem Bogen $\Upsilon_2 N$ in Fig. 4, d. h. es ist $\mathit{\Lambda} = \mathfrak{V}$. Die von $\mathfrak{P}\Upsilon_2$ aus gezählte Länge des Hauptmeridians zur mittleren Greenwicher Zeit t wird somit gleich $\mathfrak{V} + n(t -$ 1854 Januar 1.0), und die heliographische Länge eines Fleckes, für den zur Zeit t der Winkel $\Upsilon_2 \mathfrak{P} T = l'$ ist, ergibt sich zu $l' - \mathfrak{V} - n(t -$ 1854 Januar 1.0). Zur bequemen Berechnung des letzten Ausdruckes schlägt man den folgenden Weg ein. Bezeichnet T_0 eine zunächst beliebige Greenwicher Zeit, so ist der vorhin gegebene Ausdruck für die heliographische Länge des Fleckes identisch mit $l' - \mathfrak{V} - n(t - T_0) - n(T_0 -$ 1854 Januar 1.0). Man wähle nun T_0 so, daß die Differenz $T_0 -$ 1854 Januar 1.0 gleich der Dauer von m ganzen Umdrehungen der Sonne, also gleich $m \frac{360^\circ}{n}$ ist; die heliographische Länge des Sonnenfleckes wird dann gleich $l' - \mathfrak{V} - n(t - T_0)$. Unter der Annahme, daß für einen mittleren Tag als Zeiteinheit $n = 14^\circ.1844$ ist, erhält man $\frac{360^\circ}{n} = 25.38$ mittlere Tage, und demnach bestimmt sich T_0 aus der Gleichung $T_0 -$ 1854 Januar 1.0 $= m \times 25.38$ mittlere Tage. Setzt man hierin für m alle negativen und positiven

ganzen Zahlen, so geben die entsprechenden Werte von T_0 die mittleren Greenwicher Zeiten an, zu denen der angenommene Hauptmeridian der Sonne durch den aufsteigenden Knoten des Sonnenäquators auf der Ekliptik hindurchgegangen ist, bzw. gehen wird; z. B. ergeben sich für $m = 0, 1, 2, 3$ die folgenden Werte von T_0: 1854 Januar 1.00, Januar 26.38, Februar 20.76, März 18.14. Hat man jetzt beispielsweise für einen im Jahre 1854, Februar 25.14 m. Zt. Gr. beobachteten Sonnenfleck mit Hilfe der Gleichungen (4) den Wert von $l' - \odot$ abgeleitet, so wird die heliographische Länge des Fleckes gleich $l' - \odot - 14^\circ1844$ (Februar 25.14 — Februar 20.76) $= l' - \odot - 14^\circ1844 \times 4.38 = l' - \odot - 62^\circ13$.

129. Bestimmung der Lage eines Fleckes gegen den Mittelpunkt der Himmelskörperscheibe. Die vorhin benutzten Größen π und σ lassen sich nicht unmittelbar durch die Beobachtung finden, sondern müssen durch Rechnung aus den Beobachtungsdaten abgeleitet werden. Zu diesem Zwecke kann man sich einer der folgenden Methoden bedienen.

Handelt es sich um einen Sonnenfleck, so beobachte man die Rektaszensionsdifferenz des Fleckes gegen den vorausgehenden und folgenden Sonnenrand, sowie die Deklinationsdifferenz gegen den nördlichen und südlichen Sonnenrand; aus diesen Messungen ergibt sich zunächst die Rektaszensions- und Deklinationsdifferenz des Fleckes gegen die Mitte der Sonnenscheibe. Bezeichnet man jetzt die Rektaszension und Deklination der Sonne mit α und δ, und sind α_ι und δ_ι die entsprechenden Koordinaten des Fleckes, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke zwischen dem Mittelpunkte der Sonnenscheibe, dem Orte des Fleckes und dem Nordpol des Erdäquators

$$\begin{aligned} \sin\sigma \sin\pi &= \cos\delta_\iota \sin(\alpha_\iota - \alpha) \\ \sin\sigma \cos\pi &= \sin\delta_\iota \cos\delta - \cos\delta_\iota \sin\delta \cos(\alpha_\iota - \alpha) \end{aligned}$$

Da σ, $\alpha_\iota - \alpha$ und $\delta_\iota - \delta$ verhältnismäßig kleine Winkel sind, und die bei den Sonnenflecken zu erreichende Genauigkeit nicht sehr groß ist, so kann man die beiden letzten Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$\begin{aligned} \sigma \sin\pi &= (\alpha_\iota - \alpha)\cos\delta \\ \sigma \cos\pi &= \delta_\iota - \delta \end{aligned} \tag{7}$$

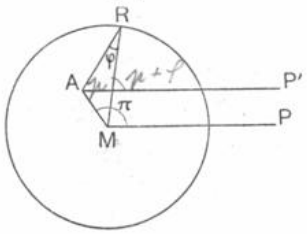
Das hier für einen Sonnenfleck angegebene Verfahren läßt sich auch auf einen auf der Oberfläche eines Planeten sichtbaren Fleck anwenden.

Bei dem Monde soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo die Lage eines nicht weit von dem Mittelpunkte der Mondscheibe befindlichen Kraters gegen diesen Mittelpunkt gesucht wird; dabei werde angenommen, daß man nach *Bessels* Vorschlag die Abstände des Kraters von sieben Punkten des voll erleuchteten Mondrandes sowie auch die auf den Krater bezogenen Positionswinkel der sieben Randpunkte gemessen habe*). Im allgemeinen ist nur die Hälfte des Mondrandes erleuchtet; wählt man also die Randpunkte in der Weise, daß je einer in der Nähe der beiden

*) Die Gründe, welche *Bessel* bewogen haben, gerade sieben Punkte zu wählen, findet man in seiner Abhandlung »Über die Bestimmung der Libration des Mondes« (Astronomische Nachrichten, Bd. 16, Nr. 376) angegeben.

Hörner liegt, und daß die Differenz der auf den Krater bezogenen Positionswinkel je zweier einander benachbarter Randpunkte nahe dieselbe bleibt, so wird diese Differenz verhältnismäßig wenig von 30° verschieden sein; man wird demnach auch zu jeder gemessenen Distanz eine zweite finden, welche im Positionswinkel um nahe 90° von der ersteren abweicht. In Fig. 5 seien nun M, A und R die Durchschnittspunkte der vom Beobachtungsorte zum Mittelpunkte des Mondes, dem Orte des Kraters und einem Randpunkte gehenden Richtungen mit der Sphäre, ferner seien PM und $P'A$ die Deklinationskreise von M und A. Nimmt man an, daß R in bezug auf AP' auf der Seite der wachsenden Rektaszensionen liegt, und setzt man $P'AR = p$, $RA = s$, so ist p der beobachtete Positionswinkel des Randpunktes, bezogen auf den Krater, und s die beobachtete Distanz; die gesuchten Größen sind $PMA = \pi$ und $AM = \sigma$. Wird jetzt $ARM = \varphi$ und $MR = h'$ gesetzt, und berücksichtigt man, daß, da AP' nur einen verschwindend kleinen Winkel mit MP bildet, $RAM = 180° - (\pi - p)$ ist, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck RAM, wenn noch der Sinus von h', s und σ mit dem Bogen vertauscht, und $\cos h' = \cos s = \cos\sigma = 1$ angenommen wird,

Fig. 5.



$$(8)\qquad \begin{aligned} h' \sin\varphi &= \sigma \sin(\pi - p) \\ h' \cos\varphi &= s + \sigma \cos(\pi - p) \end{aligned}$$

Ganz entsprechend ergibt sich für einen zweiten Randpunkt, wenn p', s', φ' die zugehörigen Werte von p, s, φ bedeuten,

$$(8^1)\qquad \begin{aligned} h' \sin\varphi' &= \sigma \sin(\pi - p') \\ h' \cos\varphi' &= s' + \sigma \cos(\pi - p') \end{aligned}$$

Wenn aber $p' = 90° + p$ ist, so werden die beiden letzten Gleichungen

$$(8^2)\qquad \begin{aligned} h' \sin\varphi' &= -\sigma \cos(\pi - p) \\ h' \cos\varphi' &= s' + \sigma \sin(\pi - p) \end{aligned}$$

Der Voraussetzung nach ist σ nur ein kleiner Bruchteil von h', und demnach sind φ und φ' verhältnismäßig kleine Winkel; setzt man also in erster Näherung $\cos\varphi = \cos\varphi' = 1$, so folgt aus den Gleichungen (8) und (8²)

$$(8^3)\qquad \sin\varphi = \frac{h' - s'}{h'}, \qquad \sin\varphi' = -\frac{h' - s}{h'}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit dem nach der Mondephemeride angenommenen Werte von h' ermöglichen eine genäherte Bestimmung von φ und φ'. Wird nun zur Abkürzung

$$(9)\qquad \begin{aligned} h' \cos\varphi - s &= v \\ h' \cos\varphi' - s' &= v' \end{aligned}$$

gesetzt, so nimmt die zweite der Gleichungen (8), bzw. (8¹) die Form an

$$\begin{aligned} \sigma \cos(\pi - p) &= v \\ \sigma \cos(\pi - p') &= v' \end{aligned}$$

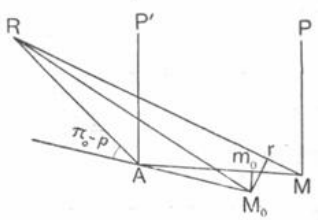
Durch Subtraktion und Addition dieser Gleichungen erhält man

$$(10)\qquad \begin{aligned} 2\sigma \sin(\pi - \tfrac{1}{2}[p+p']) &= \frac{v'-v}{\sin\frac{1}{2}(p'-p)} \\ 2\sigma \cos(\pi - \tfrac{1}{2}[p+p']) &= \frac{v'+v}{\cos\frac{1}{2}(p'-p)} \end{aligned}$$

Substituiert man die hieraus sich ergebenden Werte von σ und π in die erste der Gleichungen (8), bzw. (8¹), so lassen sich $\sin\varphi$ und $\sin\varphi'$ genauer bestimmen. Hierauf berechne man von neuem v und v', und schließlich mit Hilfe von (10) nochmals σ und π; die so gewonnenen Werte mögen mit σ_0 und π_0 bezeichnet werden.

Um nun aus den sieben beobachteten Distanzen und Positionswinkeln die wahrscheinlichsten Werte von $\sigma = \sigma_0 + d\sigma$ und $\pi = \pi_0 + d\pi$ zu finden, berechne man zunächst mittels der Gleichungen (8) und unter Anwendung der Näherungswerte σ_0 und π_0 die den sieben Randpunkten entsprechenden Werte von h' und φ; dieselben sollen mit h'_0 und φ_0 bezeichnet werden. Wenn dann in Fig. 6 M, A, R, MP und AP' dieselbe Bedeutung haben wie in Fig. 5, und $P'AM_0 = 180^0 - \pi_0$, $AM_0 = \sigma_0$ gemacht wird, so ist M_0 der genäherte Ort der Mondmitte, und man hat $M_0R = h'_0$, und $M_0RA = \varphi_0$; ferner ist $P'AM = 180^0 - (\pi_0 + d\pi)$, $AM = \sigma_0 + d\sigma$. Beschreibt man jetzt mit dem Radius AM_0 den Kreisbogen M_0m_0, so ist $Mm_0 = d\sigma$ und $M_0m_0 = \sigma_0 d\pi$; ferner hat man, wenn M_0r einen mit dem Radius RM_0 beschriebenen Kreisbogen bedeutet, und $MR = h'_0 + dh'$ gesetzt wird, $Mr = dh'$. Nun können die kleinen Bögen M_0m_0 und M_0r als geradlinig und senkrecht zu AM, bzw. RM betrachtet werden; wenn also der Winkel $AMR = \chi$ gesetzt wird, so ergibt sich $dh' = Mr = Mm_0\cos\chi - M_0m_0\sin\chi = d\sigma\cos\chi - \sigma_0 d\pi\sin\chi$. Der Winkel χ ist aber nur wenig von AM_0R verschieden, und letzterer Winkel ist gleich $\pi_0 - p - \varphi_0$; demnach wird die letzte Gleichung

Fig. 6.



$$dh' = d\sigma\cos(\pi_0 - p - \varphi_0) - \sigma_0 d\pi\sin(\pi_0 - p - \varphi_0)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Mondrand genau kreisförmig ist, ist $h'_0 + dh'$ gleich dem Halbmesser des Mondes; nimmt man für diesen Halbmesser einen Näherungswert H_0 an (beispielsweise das Mittel aus den sieben für h'_0 erhaltenen Werten), und bedeutet dH die Korrektion von H_0, so wird $H_0 + dH = h'_0 + dh'$ oder nach Substitution des für dh' gefundenen Ausdruckes

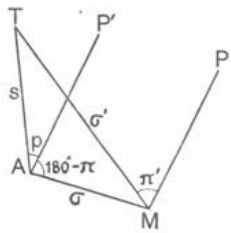
$$(11)\qquad dH - d\sigma\cos(\pi_0 - p - \varphi_0) + \sigma_0 d\pi\sin(\pi_0 - p - \varphi_0) = h'_0 - H_0$$

Den sieben Randpunkten entsprechen ebenso viele Bedingungsgleichungen von der Form (11). Nachdem man mit ihrer Hilfe die wahrscheinlichsten Werte von dH, $d\sigma$ und $\sigma_0 d\pi$ gefunden hat, hat man nur noch die Summen $H_0 + dH$, $\sigma_0 + d\sigma$ und $\pi_0 + d\pi$ zu bilden, und erhält damit die wahrscheinlichsten Werte des Mondhalbmessers sowie von σ und π. Die Differenzen $h'_0 + d\sigma\cos(\pi_0 - p - \varphi_0) - \sigma_0 d\pi\sin(\pi_0 - p - \varphi_0) - (H_0 + dH) = h'_0 - H_0 - [dH - d\sigma\cos(\pi_0 - p - \varphi_0) + \sigma_0 d\pi\sin(\pi_0 - p - \varphi_0)]$, wo für dH, $d\sigma$ und $\sigma_0 d\pi$ ihre aus den Bedingungs-

gleichungen (11) folgenden Werte zu substituieren sind, rühren zum Teil von den Beobachtungsfehlern, zum Teil von den Unebenheiten des Mondrandes her.

Es werde jetzt angenommen, daß man für einen dem Mittelpunkte der Mondscheibe nahe gelegenen Krater — z. B. für Mösting A — die Werte von σ und π bestimmt habe; um dann die Lage eines beliebig weit vom Mittelpunkte der Mondscheibe entfernten Kraters in bezug auf diesen Mittelpunkt zu finden, hat man nur nötig, den Positionswinkel des betreffenden Kraters, bezogen auf Mösting A, und die Distanz der beiden Krater zu messen. Sind nämlich in Fig. 7 M, A und T die von dem Beobachtungsort aus gesehenen Örter des Mittelpunktes der Mondscheibe, des Kraters Mösting A und des zu bestimmenden Kraters, und sind MP und AP' die Deklinationskreise von M und A, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck MAT, wenn $PMT = \pi'$, $MT = \sigma'$, $P'AT = p$, $AT = s$, $PMA = \pi$ (also $P'AM = 180^\circ - \pi$), $MA = \sigma$ und $\sin s = s$, $\sin\sigma' = \sigma'$, $\cos s = \cos\sigma = 1$ gesetzt wird,

Fig. 7.

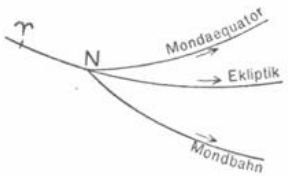


$$\begin{aligned} \sigma' \sin(\pi' - \pi) &= s \sin(p - \pi) \\ \sigma' \cos(\pi' - \pi) &= \sigma + s \cos(p - \pi) \end{aligned} \tag{12}$$

Alle auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Größen sind bekannt, man kann also mit Hilfe von (12) die gesuchten Werte von π' und σ' berechnen.

130. Die *Cassini*schen Gesetze. Die Oberfläche des Mondes zeigt eine große Zahl von Gebilden, welche sich scharf beobachten lassen, und die man unter Anwendung der im vorigen abgeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der Lage der Rotationsachse des Mondes gegen die Ekliptik, sowie auch zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung benutzen kann. Aus derartigen Untersuchungen hat nun *D. Cassini* die folgenden nach ihm benannten Gesetze abgeleitet:

Fig. 8.



1. Die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondäquators auf der Ekliptik ist gleich der um 180° vermehrten Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, oder, mit anderen Worten: Der aufsteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik fällt mit dem absteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ekliptik zusammen (Fig. 8).

2. Die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik ist konstant.

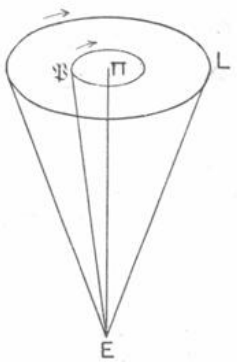
3. Der Mond dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seine Achse, und zwar in demselben Sinne, in dem sich der Mond um die Erde bewegt. Die Umdrehungszeit des Mondes um seine Achse ist gleich seiner Umlaufszeit um die Erde; die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist also gleich der mittleren siderischen Bewegung des Mondes in seiner Bahn.

Fände die durch das dritte *Cassini*sche Gesetz behauptete Gleichheit von Umlaufszeit und Umdrehungszeit des Mondes nur näherungsweise statt, bestünde also

eine wenn auch nur kleine Differenz zwischen den beiden genannten Zeiten, so würden im Laufe der Jahrhunderte an dem einen Rande des Mondes neue Gebilde auftauchen, und an dem entgegengesetzten früher sichtbare verschwinden; soweit man aber nach der Vergleichung der ältesten Beschreibungen des Mondes mit dem Bilde, welches er gegenwärtig bietet, urteilen kann, sieht man den Mond noch heute so, wie ihn die früheren Beobachter sahen.

Bekanntlich ändert die Schnittlinie der Mondbahn mit der Ekliptik fortwährend ihre Lage, und zwar so, daß der Punkt N in Fig. 8 sich mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit rückläufig auf der Ekliptik bewegt; die Zeit, innerhalb deren der Punkt N einmal die Ekliptik durchläuft, beträgt $18\frac{2}{3}$ Jahre. Dem ersten *Cassini*schen Gesetze zufolge muß also auch die Durchschnittslinie des Mondäquators und der Ekliptik letztere in $18\frac{2}{3}$ Jahren rückläufig und mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen. Ferner haben die Untersuchungen über die Bewegung des Mondes ergeben, daß die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik konstant ist, wenigstens wenn man von kleinen periodischen Störungen absieht; die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik zeigt demnach dasselbe Verhalten wie die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik. Zieht man also (Fig. 9) vom Mittelpunkt E der Erde aus drei Gerade, von denen eine ($E\Pi$) senkrecht zur Ebene der Ekliptik, die zweite (EL) senkrecht zur Ebene der Mondbahn und die dritte ($E\mathfrak{P}$) parallel zur Rotationsachse des Mondes ist, so beschreiben EL und $E\mathfrak{P}$ in $18\frac{2}{3}$ Jahren und mit nahezu gleichförmiger Geschwindigkeit rückläufig je einen Kreiskegel um die Achse $E\Pi$; dabei liegen $E\mathfrak{P}$, $E\Pi$ und EL stets in einer Ebene, und zwar befinden sich $E\mathfrak{P}$ und EL auf entgegengesetzten Seiten von $E\Pi$. Die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik oder der Winkel ΠEL beträgt $5^\circ 9'$; da der Winkel $\Pi E\mathfrak{P}$ nach der Bestimmung von *Hayn* gleich $1^\circ 32'$ ist, so ist der Winkel $\mathfrak{P}EL$ oder die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die Mondbahn gleich $6^\circ 41'$.

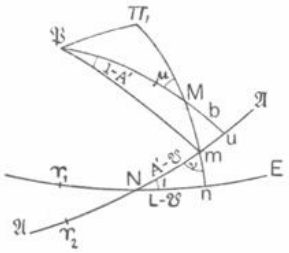
Fig. 9.



131. Die optische Libration des Mondes. Selenographische Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe. Die Exzentrizität der Erdbahn und die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik bewirken, daß der Mittelpunkt der Mondscheibe nicht stets mit demselben Punkte der Mondoberfläche zusammenfällt; aber wegen der Gleichheit von Umlaufszeit und Umdrehungszeit des Mondes kann er ein gewisses engbegrenztes Gebiet der Mondoberfläche nicht überschreiten. Mit Rücksicht darauf, daß es sich hier nicht um eine Schwankung des Mondkörpers handelt, bezeichnet man die erwähnte Erscheinung als optische Libration des Mondes. Um die Ausdehnung des Gebietes berechnen zu können, innerhalb dessen der Mittelpunkt der Mondscheibe eingeschlossen bleibt, sollen im folgenden die Koordinaten dieses Mittelpunktes in bezug auf den Äquator und einen fest gewählten Meridan des Mondes bestimmt werden. In Fig. 10 mögen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $\gamma_1 E$ Bögen der größten Kreise bedeuten, in denen der Mondäquator, bzw. eine durch das Mond-

zentrum parallel zur Ekliptik gelegte Ebene die Sphäre schneidet, $\mathfrak{P}$ und Π_1 seien die Pole von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, bzw. $\gamma_1 E$, N sei der aufsteigende Knoten von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf $\gamma_1 E$, und M der selenozentrische Ort des Beobachtungsortes, also auch des Mittelpunktes der vom Beobachtungsort aus gesehenen Mondscheibe. Durch M lege man den Bogen $\Pi_1 n$ senkrecht zu $\gamma_1 E$, und $\mathfrak{P}u$ senkrecht zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, ferner ziehe man noch den Bogen größten Kreises $\mathfrak{P}m$. Bezeichnet γ_1 den Punkt, in dem eine durch das Mondzentrum parallel zu der Richtung Erde—Frühlingsäquinox gezogene Gerade den größten Kreis $\gamma_1 E$ schneidet, so ist $\gamma_1 N$ die Länge des aufsteigenden Knotens von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ auf $\gamma_1 E$; diese Länge werde mit $\mathfrak{O}$, und die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik mit J bezeichnet. Man trage nun auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ den Bogen $N\gamma_2 = N\gamma_1 = \mathfrak{O}$ ab und setze $\gamma_2\mathfrak{P}M = l$, $\gamma_2\mathfrak{P}m = A'$; dann ist der Winkel $m\mathfrak{P}u = l - A'$ und $Nm = A' - \mathfrak{O}$. Ferner werde $Mu = b$, $mn = B'$, $\gamma_1\Pi_1 n = L$, $Mn = B$ gesetzt, wo demnach L und B die selenozentrische Länge und Breite des Beobachtungsortes, bzw. des Mittelpunktes der Mondscheibe bedeuten. Wird jetzt noch der Winkel $Nmn = Mmu$ mit ν bezeichnet, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke Nmn

Fig. 10.



$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang}(A' - \mathfrak{O}) &= \operatorname{tang}(L - \mathfrak{O}) \sec J \\
\operatorname{tang} B' &= \sin(L - \mathfrak{O}) \operatorname{tang} J \\
\sin \nu &= \cos J \sec B' \\
\cos \nu &= \cos(L - \mathfrak{O}) \sin J
\end{aligned} \tag{13}
$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke Mum, wenn der Winkel bei M gleich μ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $Mm = B - B'$ und $mu = l - A'$ ist,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang}(l - A') &= \operatorname{tang}(B - B') \cos \nu \\
\cos \mu &= \cos(l - A') \sin \nu \\
\operatorname{tang} b &= \operatorname{tang}(B - B') \cos \mu
\end{aligned} \tag{14}
$$

Wenn λ und β die Länge und Breite des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus, bedeuten, so ist $L = 180^\circ + \lambda$ und $B = -\beta$; ferner hat man dem ersten *Cassini*schen Gesetze zufolge $\mathfrak{O} = 180^\circ + \Omega$, wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik bezeichnet. Die Werte von λ, β und Ω sind als bekannt zu betrachten; nimmt man also noch nach *Hayn* $J = 1^\circ 32'$ an, so kann man mit Hilfe der Gleichungen (13) und (14) B', l und b berechnen.

Man wähle jetzt einen bestimmten Meridian des Mondes als Hauptmeridian, und es sei A der Winkel zwischen der Ebene dieses Meridians und der durch den größten Kreis $\mathfrak{P}\gamma_2$ gelegten Ebene zur Zeit t_0; zur Zeit t bilden dann die beiden Ebenen den Winkel $A + n(t - t_0)$ miteinander, wo n die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Mondes bedeutet. Setzt man zur Abkürzung $A + n(t - t_0) = l_0$ und versteht unter t die Zeit, für welche der aus (14) folgende Wert von l gilt, so wird $l - l_0$ die selenographische Länge des Mittelpunktes der Mondscheibe oder auch die Libration in Länge genannt. Den Winkel b nennt man die selenographische Breite

des Mittelpunktes der Mondscheibe oder auch die Libration in Breite. Die Wahl des Hauptmeridians ist ganz frei, man kann also für A jeden Wert annehmen. Setzt man nun A gleich der mittleren selenozentrischen Länge der Erde zur Zeit t_0 und berücksichtigt, daß nach dem dritten *Cassini*schen Gesetz die Drehungsgeschwindigkeit des Mondes gleich der mittleren siderischen Bewegung des Mondes in seiner Bahn ist, so folgt, daß l_0 gleich der mittleren selenozentrischen Länge der Erde zur Zeit t ist. Unter der vorhin für A gemachten Annahme läßt sich also die Lage des Haupt- oder ersten Mondmeridians jederzeit leicht angeben.

Den Gleichungen (13) und (14) kann man durch Reihenentwicklung eine andere, für die Rechnung bequemere Form geben. Zunächst folgt aus der dritten der Gleichungen (14), nach § 1, (18[a]),

$$b = B - B' - \tan^2 \tfrac{1}{2}\mu \sin 2(B - B') + \cdots, \tag{15}$$

und außerdem $|b| \leqq |B - B'|$. Nun kann B' höchstens gleich J, und B höchstens gleich der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik (gleich $5^\circ 9'$) werden; somit ist $|B - B'| \leqq 6^\circ 41'$. Ferner ergibt sich aus dem Dreieck $\mathfrak{P} \Pi_1 M$ (Fig. 10), worin der Winkel bei Π_1 gleich $90^\circ + L - \mathcal{O}$, $\mathfrak{P}M = 90^\circ - b$ und $\mathfrak{P}\Pi_1 = J$ ist,

$$\cos b \sin \mu = \sin J \cos(L - \mathcal{O})$$

Da $\cos b$ nahe gleich 1 ist, so folgt aus der letzten Gleichung, daß μ nahe innerhalb der Grenzen $\pm J$ liegt. Das Glied $\tan^2 \frac{1}{2}\mu \sin 2(B - B')$ ist also sehr klein; vernachlässigt man dasselbe, so wird

$$b = B - B' \tag{15[a]}$$

Ferner geht aus der vierten der Gleichungen (13) hervor, daß $\cos \nu$ nicht größer als $\sin J$ werden kann; da nun $|B - B'| \leqq 6^\circ 41'$ ist, so folgt aus der ersten der Gleichungen (14), daß $|l - A'| < 11'$ ist und darum

$$l = A' + (B - B') \cos \nu$$

gesetzt werden darf. Die Anwendung der aus § 1, (18) unter der Annahme $n = \sec J$ folgenden Reihenentwicklung auf die erste der Gleichungen (13) gibt aber

$$A' = L + \tan^2 \tfrac{1}{2} J \sin 2(L - \mathcal{O}) + \cdots$$

Substituiert man diesen Wert von A' in die vorige Gleichung, so erhält man

$$l = L + \tan^2 \tfrac{1}{2} J \sin 2(L - \mathcal{O}) + (B - B') \cos \nu$$

Soll das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung in Bogenminuten ausgedrückt erhalten werden, so ist dasselbe noch durch $\operatorname{arc} 1'$ zu dividieren oder mit 3437·75 zu multiplizieren.

Die Differenz $l - l_0$ gibt dem oben Gesagten zufolge die selenographische Länge des Mittelpunktes der Mondscheibe an; wird diese Länge mit $l_1^{(m)}$ bezeichnet, so ist

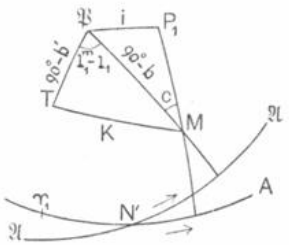
$$l_1^{(m)} = L - l_0 + \tan^2 \tfrac{1}{2} J \sin 2(L - \mathcal{O}) \frac{1}{\operatorname{arc} 1'} + (B - B') \cos \nu \tag{16}$$

L unterscheidet sich von l_0 nur durch periodische Glieder, und $B - B'$ ist periodisch veränderlich; aus (15) und (16) folgt demnach, daß $l_1^{(m)}$ und b nur periodischen Ver-

änderungen unterworfen sein können. Die Extremwerte von $l_1^{(m)}$ unterscheiden sich um rund 16°, diejenigen von b um rund 14° voneinander; der Ort des Mittelpunktes der Mondscheibe auf der Mondoberfläche kann sich also von seiner mittleren Lage nie um mehr wie 11° entfernen.

132. Anwendungen der selenographischen Koordinaten des Mittelpunktes der Mondscheibe. Mit Hilfe der selenographischen Länge (l_1^m) und Breite (b) des Mittelpunktes der Mondscheibe lassen sich die selenographischen Koordinaten eines Punktes der Mondoberfläche finden, dessen Lage gegen den Mittelpunkt der Mondscheibe bekannt ist. Es sei T in Fig. 11 der Punkt, dessen selenographische Länge (l_1) und Breite (b') gesucht wird, $\Upsilon_1 A$ sei ein Bogen des größten Kreises, in dem die durch das Mondzentrum parallel zum Erdäquator gelegte Ebene die Sphäre schneidet, P_1 bedeute den Pol von $\Upsilon_1 A$, und $\mathfrak{P}$ den Nordpol des Mondes; die als gegeben betrachtete Lage von T gegen den Mittelpunkt M der Mondscheibe möge durch den Positionswinkel $P_1 MT = \pi$ und durch die von der Erde aus gesehene Distanz σ des Punktes T von M bestimmt sein. Mit Hilfe von σ und des vom Beobachtungsort aus gesehenen Mondhalbmessers h' erhält man zunächst aus (1^a) und (1^b) den Bogen $TM = K$. Man setze jetzt $P_1 M\mathfrak{P} = c$; es ist dann $\mathfrak{P}MT = \pi - c$. Der Wert von c läßt sich in folgender Weise bestimmen. Wenn Υ_1 wieder den Punkt bezeichnet, in dem die vom Mondzentrum aus parallel zu der Richtung Erde—Frühlingsäquinox gezogene Gerade die Sphäre trifft, so ist der Winkel $\Upsilon_1 P_1 M$ die selenozentrische Rektaszension von M, und der Bogen $\Upsilon_1 N'$ die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondäquators $\mathfrak{N}\mathfrak{N}$ auf dem Erdäquator. Es sei nun α die Rektaszension des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus; man hat dann $\Upsilon_1 P_1 M = 180° + \alpha$, also, wenn $\Upsilon_1 N' = \Omega'$ gesetzt wird, $\mathfrak{P}P_1 M = 270° + \alpha - \Omega'$. Die zur Berechnung der Knotenlänge Ω' und der Neigung i des Mondäquators gegen den Erdäquator dienenden Formeln ergeben sich aus dem von den Durchschnittspunkten der Ekliptik, des Erd- und Mondäquators gebildeten Dreieck; übrigens findet man die Werte von Ω' und i bereits in den astronomischen Jahrbüchern mitgeteilt. Setzt man demnach Ω' und i als bekannt voraus und berücksichtigt, daß der Bogen $\mathfrak{P}M = 90° - b$ der Annahme nach gegeben ist, so sieht man, daß der Winkel c mittels der aus dem Dreieck $\mathfrak{P}MP_1$ folgenden Formel berechnet werden kann

Fig. 11.



$$\cos b \sin c = -\sin i \cos(\alpha - \Omega') \tag{17}$$

Da $\cos b$ stets nahe gleich 1 ist, so überschreitet c nur wenig die Grenzen $\pm i$. Um jetzt die gesuchten, für T gültigen Werte von l_1 und b' zu erhalten, hat man nur noch die aus dem Dreieck $\mathfrak{P}MT$ sich ergebenden Gleichungen anzuwenden

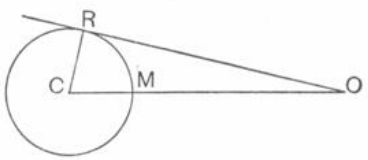
$$\begin{aligned} \cos b' \sin(l_1^{(m)} - l_1) &= \sin K \sin(\pi - c) \\ \cos b' \cos(l_1^{(m)} - l_1) &= \cos b \cos K - \sin b \sin K \cos(\pi - c) \\ \sin b' &= \sin b \cos K + \cos b \sin K \cos(\pi - c) \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Formeln kann man auch benutzen, um für eine beobachtete Sternbedeckung die selenographischen Koordinaten des Ein- oder Austrittspunktes zu berechnen; die Kenntnis dieser Koordinaten ist für die Bestimmung der Unebenheiten des Mondrandes von Wichtigkeit (S. 310f.). In dem angegebenen Falle ist $K = 90^\circ - h'$, wo h' wieder den Winkelhalbmesser des Mondes, gesehen vom Beobachtungsort aus, bedeutet. Der Positionswinkel π des Ein- oder Austrittspunktes läßt sich mit Hilfe des sphärischen Dreieckes bestimmen, welches von dem Pol des Erdäquators, dem Stern und dem Orte des Mondes zur Zeit der Bedeckung gebildet wird; dabei ist der den Stern und den Mond verbindende Bogen gleich h' zu setzen. Der Winkel c ergibt sich aus der Gleichung (17). Werden die dem Ein- oder Austrittspunkt entsprechenden Werte von l_1 und b' mit $l_1^{(r)}$ und b_r' bezeichnet, so folgt aus (18), wenn $\sin K = \cos h' = 1$ gesetzt wird,

$$
\begin{aligned}
\cos b_r' \sin (l_1^{(m)} - l_1^{(r)}) &= \sin(\pi - c) \\
\cos b_r' \cos (l_1^{(m)} - l_1^{(r)}) &= \cos b \sin h' - \sin b \cos(\pi - c) \\
\sin b_r' &= \sin b \sin h' + \cos b \cos(\pi - c)
\end{aligned} \tag{19}
$$

Die Kenntnis der selenographischen Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe ist noch für einen anderen Zweck notwendig. Die Libration des Mondes bewirkt nämlich, daß einige Teile der Mondoberfläche zu gewissen Zeiten sichtbar, und zu anderen unsichtbar sind. Um nun zu bestimmen, wann ein bestimmtes Objekt der Mondoberfläche der Beobachtung zugänglich ist, betrachte man das ebene Dreieck COR (Fig. 12), worin C das Mondzentrum, O den Ort des Beobachters und OR eine Tangente an den Mondrand bedeutet. Es ist dann einleuchtend, daß man von O aus nur diejenigen Teile des Mondes wahrnehmen kann, welche von C aus betrachtet, um den Winkel $RCO = 90^\circ - h'$ oder weniger von der Richtung CO entfernt sind. Nun folgt aus dem sphärischen Dreieck $T\mathfrak{P}M$ (Fig. 11)

Fig. 12.



$$\cos K = \sin b' \sin b + \cos b' \cos b \cos(l_1^{(m)} - l_1),$$

wo K den selenozentrischen Winkel zwischen dem Mittelpunkt der Mondscheibe und dem Objekt T bedeutet; nach dem vorhin Gesagten ist also das Objekt sichtbar oder nicht, je nachdem der aus dieser Gleichung folgende Wert von K innerhalb oder außerhalb der Grenzen $\pm (90^\circ - h')$ liegt*).

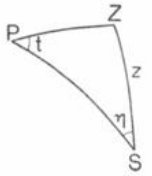
*) Weitere Belehrung über den in diesem Kapitel behandelten Gegenstand findet man in meiner Schrift: Theorie der astrographischen Ortsbestimmung (Sitzungsberichte der kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien, Band 118, Abt. IIa).

Kapitel XXII.

Bestimmung der Zeit und der Polhöhe durch Beobachtungen außerhalb des Meridians.

133. Bestimmung der Zeit mittels der Zenitdistanz eines Sterns. Aus dem Dreieck (Fig. 1) zwischen dem Pol (P), dem Zenit (Z) und dem Orte eines Sterns (S) folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination, z die Zenitdistanz und t den Stundenwinkel des Sterns bedeutet,

Fig. 1.



$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

oder

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \tag{1}$$

Wie diese Gleichung zeigt, kann man durch Beobachtung der Zenitdistanz eines Sterns den zugehörigen Stundenwinkel finden, vorausgesetzt, daß die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Deklination des Sterns bekannt sind. Ist dann α die Rektaszension des Sterns und Θ die gesuchte Sternzeit der Beobachtung, so folgt

$$\Theta = t + \alpha \tag{2}$$

Zur Berechnung von t wird an Stelle von (1) gewöhnlich eine andere Gleichung angewandt. Nach § 11, (10[a]) hat man, wenn a, b, c die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks bedeuten, und A den der Seite a gegenüberliegenden Winkel bezeichnet,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}}$$

Wendet man diese Formel auf das Dreieck PZS (Fig. 1) an und setzt zur Abkürzung

$$s' = \tfrac{1}{2}(z+\varphi+\delta), \tag{3}$$

so erhält man die für die Berechnung von t dienende Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{\sin(s'-\varphi)\,\sin(s'-\delta)}{\cos s'\,\cos(s'-z)}}, \tag{4}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, jenachdem der Stern westlich oder östlich vom Meridian beobachtet wurde.

Um die Zeit zu bestimmen, bedient man sich heller Sterne. Die Örter dieser Sterne finden sich in den astronomischen Jahrbüchern angegeben und können als fehlerfrei betrachtet werden; es genügt also zu untersuchen, welchen Einfluß ein Fehler in der angenommenen Polhöhe oder in der gemessenen Zenitdistanz auf den Wert von t hat. Wendet man nun die Differentialformel der sphärischen Trigonometrie (§ 13, (17[1])

$$da = \cos B\,dc + \sin B \sin c\,dA + \cos C\,db \tag{I}$$

auf das Dreieck PZS (Fig. 1) an, indem man dabei die in (I) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten z, $90^\circ - \delta$, $90^\circ - \varphi$ des Dreieckes PZS identifiziert, ferner den Winkel $PZS = 180^\circ - \mathfrak{a}$ und $d\delta = 0$ setzt, so folgt

$$dt = \frac{dz}{\sin\mathfrak{a}\cos\varphi} - \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\mathfrak{a}\cos\varphi} \tag{5}$$

Für eine gegebene Polhöhe wird demnach der Einfluß eines Fehlers in z und φ auf den Stundenwinkel um so kleiner, je näher der Winkel $\mathfrak{a}$, d. h. das Azimut des Sterns bei 90° oder 270° liegt. Um also mit Hilfe der Messungen von Zenitdistanzen die Zeit möglichst genau zu bestimmen, wird man die Beobachtungen in der Nähe des ersten Vertikals anstellen.

Falls eine größere Zahl von Zenitdistanzen in der Nähe des ersten Vertikals gemessen worden ist, so kann man das folgende Reduktionsverfahren anwenden. Bezeichnet man mit t_0 und z_0 den Stundenwinkel und die Zenitdistanz eines Sterns zur Zeit seines Durchgangs durch den ersten Vertikal, und sind $\left(\frac{dt}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0$, ... die für diese Zeit gültigen Werte der Differentialquotienten von t nach z, so hat man

$$t = t_0 + \left(\frac{dt}{dz}\right)_0 (z - z_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0 (z - z_0)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3t}{dz^3}\right)_0 (z - z_0)^3 + \cdots$$

Nun folgt aus (5)

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\sin\mathfrak{a}\cos\varphi}, \tag{5a}$$

und hieraus

$$\frac{d^2t}{dz^2} = -\frac{\cos\mathfrak{a}}{\sin^2\mathfrak{a}\cos\varphi}\frac{d\mathfrak{a}}{dz}, \tag{5b}$$

$$\frac{d^3t}{dz^3} = -\frac{\cos\mathfrak{a}}{\sin^2\mathfrak{a}\cos\varphi}\frac{d^2\mathfrak{a}}{dz^2} + \frac{1}{\sin\mathfrak{a}\cos\varphi}\left[1 + \frac{2\cos^2\mathfrak{a}}{\sin^2\mathfrak{a}}\right]\left(\frac{d\mathfrak{a}}{dz}\right)^2 \tag{5c}$$

Durch Anwendung der obigen Differentialformel (I) auf das Dreieck PZS (Fig. 1) ergibt sich aber, wenn jetzt die in (I) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten $90^\circ - \delta$, z, $90^\circ - \varphi$ des Dreiecks PSZ identifiziert werden, ferner der Winkel bei S mit η bezeichnet, und $d\delta = d\varphi = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dz} = \frac{\cos\eta}{\sin t\cos\varphi} = \frac{\sin\mathfrak{a}\sin t\sin\varphi + \cos\mathfrak{a}\cos t}{\sin t\cos\varphi}$$

Da im ersten Vertikal $\cos\mathfrak{a} = 0$ und $\sin\mathfrak{a} = \pm 1$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (5a) bis (5c)

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_0 = \pm\sec\varphi, \qquad \left(\frac{d^2t}{dz^2}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^3t}{dz^3}\right)_0 = \pm\operatorname{tang}^2\varphi\sec\varphi$$

Folglich wird

$$t = t_0 \pm (z - z_0)\sec\varphi \pm \tfrac{1}{6}(z - z_0)^3\operatorname{tang}^2\varphi\sec\varphi, \tag{6}$$

wo man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden hat, je nachdem die Zenitdistanzen in der Nähe der West- oder der Osthälfte des ersten Vertikals gemessen worden sind.

Für den ersten Vertikal selbst gelten die Gleichungen

$$\cos t_0 = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\varphi}, \qquad \cos z_0 = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$$

Hieraus erhält man, wenn die Formel

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}x$$

benutzt, und t_0 zwischen den Grenzen 0° bis $\pm 180^\circ$ angenommen wird,

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t_0 = \pm\sqrt{\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\sin(\varphi+\delta)}}, \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}z_0 = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich t_0 und z_0 berechnen. Bezeichnet man jetzt den absoluten Wert von t_0 mit τ_0, so wird die Gleichung (6)

$$(8) \qquad t = \pm[\tau_0 + (z - z_0)\sec\varphi + \tfrac{1}{6}(z-z_0)^3\operatorname{tang}^2\varphi\sec\varphi],$$

wo wieder das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden ist, je nachdem die Zenitdistanzen im Westen oder im Osten gemessen sind. Für eine gegebene Polhöhe läßt sich nun leicht eine Tafel konstruieren, aus der man mit dem Argument $z - z_0$ die Summe der zu τ_0 hinzuzufügenden Glieder entnehmen kann; mit Hilfe einer solchen Tafel und der aus (7) erhaltenen Werte von τ_0 und z_0 findet man dann nach (8) den jeder gemessenen Zenitdistanz zugehörigen Wert von t, also mit Benutzung der Gleichung (2) auch die Sternzeit der Beobachtung.

In den Formeln (6) und (8) sind die von der vierten und den höheren Potenzen von $z - z_0$ abhängigen Glieder vernachlässigt worden; der daraus entstehende Fehler beträgt in mittleren Breiten und für $[z - z_0] \leqq 2^\circ$ höchstens $0^s.01$.

134. Zeitbestimmung aus gleichen Höhen zweier Sterne. Man denke sich zwei in Deklination um höchstens zwei bis drei Grade, aber in Rektaszension um mehrere Stunden voneinander verschiedene Sterne, von denen der eine östlich, der andere westlich vom Meridian sich befindet. Die Rektaszension und Deklination des im Osten gelegenen Sterns möge mit α_o, bzw. δ_o bezeichnet werden, die entsprechenden für den im Westen gelegenen Stern gültigen Bezeichnungen seien α_w und δ_w. Hat man nun durch die Beobachtung gefunden, daß die Zenitdistanz des östlichen Sterns zu der Uhrzeit U_o dieselbe ist wie diejenige des westlichen Sterns zu der Uhrzeit U_w, und kennt man außerdem die Polhöhe des Beobachtungsortes, so läßt sich die Korrektion der Uhr in folgender Weise bestimmen.

Aus den durch den Pol, das Zenit und die beiden Sternörter gebildeten sphärischen Dreiecken erhält man, wenn t_o und t_w die Stundenwinkel zur Zeit der Beobachtung bedeuten, und z die für beide Sterne gleiche Zenitdistanz bezeichnet,

$$\cos z = \sin\varphi\,\sin\delta_o + \cos\varphi\,\cos\delta_o\,\cos t_o$$
$$\cos z = \sin\varphi\,\sin\delta_w + \cos\varphi\,\cos\delta_w\,\cos t_w$$

Man setze jetzt

$$(9) \qquad -\tfrac{1}{2}(t_o + t_w) = s, \qquad -\tfrac{1}{2}(t_o - t_w) = d;$$

also

$$t_o = -s - d, \qquad t_w = -s + d$$

Substituiert man diese Werte in die vorhin für $\cos z$ aufgestellten Gleichungen und subtrahiert dann die Gleichungen voneinander, so folgt

$$\operatorname{tang}\varphi\,(\sin\delta_o - \sin\delta_w) = \cos d\,\cos s\,(\cos\delta_w - \cos\delta_o) + \sin d\,\sin s\,(\cos\delta_w + \cos\delta_o)$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}(\delta_o + \delta_w) = \sigma, \qquad \tfrac{1}{2}(\delta_o - \delta_w) = \Delta$$

gesetzt wird,

$$(11) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \cos d\,\operatorname{tang}\sigma\,\cos s + \sin d\,\operatorname{cotg}\Delta\,\sin s$$

Diese Gleichung läßt sich in eine andere Form bringen. Führt man nämlich zwei Hilfsgrößen n und m ein, welche den Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} n\sin m &= \cos d\,\operatorname{tang}\sigma \\ n\cos m &= \sin d\,\operatorname{cotg}\Delta \end{aligned}$$

genügen, so ergibt sich an Stelle von (11)

$$(13) \qquad \sin(m + s) = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{n}$$

Man wähle nun die Sterne so aus, daß sie kurz nacheinander die gleiche Höhe erreichen, und daß demgemäß $U_o - U_w$ klein ist; die Uhr läßt sich dann leicht so regulieren, daß ihr Gang während der Zeitdifferenz $U_o - U_w$ vernachlässigt werden darf. Da unter diesen Umständen, wenn u die Uhrkorrektion bedeutet,

$$(14) \qquad t_o = U_o + u - \alpha_o, \qquad t_w = U_w + u - \alpha_w$$

ist, so wird die zweite der Gleichungen (9)

$$(15) \qquad d = \tfrac{1}{2}(\alpha_o - \alpha_w) - \tfrac{1}{2}(U_o - U_w)$$

Der Wert von d ist also bekannt. Da dasselbe auch von σ und Δ gilt, so kann man mit Hilfe der Gleichungen (12) n und m berechnen; aus der Gleichung (13) ergibt sich sodann der Winkel s. Rechnet man östliche Stundenwinkel negativ, so ist in dem gegenwärtigen Falle $t_o + t_w$ verhältnismäßig klein; dasselbe gilt also auch von $s = -\tfrac{1}{2}(t_o + t_w)$. Substituiert man in diesen Ausdruck die in (14) gegebenen Werte von t_o und t_w, und dividiert dann noch s durch 15, um alles in Zeit ausgedrückt zu bekommen, so erhält man für die Uhrkorrektion

$$(16) \qquad u = \tfrac{1}{2}(\alpha_o + \alpha_w) - \tfrac{1}{2}(U_o + U_w) - \frac{s}{15}$$

Die Rechnung wird einfacher, wenn die Deklinationsdifferenz der beiden Sterne einen halben Grad nicht wesentlich übersteigt. In diesem Falle wird nämlich s so klein, daß man $\cos s = 1$ und $\sin s = s \sin 1''$ setzen kann; da man dann auch $\operatorname{tang} \Delta$ mit $\Delta \sin 1''$ vertauschen darf, so folgt aus (11)

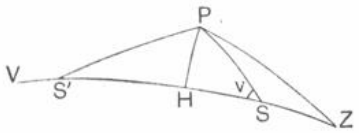
$$s = \Delta \left(\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sin d} - \frac{\operatorname{tang} \sigma}{\operatorname{tang} d} \right) \tag{17}$$

Unter der angegebenen Voraussetzung genügen also die Gleichungen (10), (15), (17) und (16), um die Uhrkorrektion zu finden.

Anstatt die Zeiten zu beobachten, wann zwei Sterne zu verschiedenen Seiten des Meridians kurz nacheinander dieselbe Zenitdistanz, bzw. Höhe haben, kann man auch die Zeiten ermitteln, zu denen ein und derselbe Stern vor und nach seinem Meridiandurchgang dieselbe Höhe erreicht; diese Methode, die Zeit durch korrespondierende Höhen zu bestimmen, ist aber umständlicher und auch weniger genau wie die vorige.

135. Zeitbestimmung mittels Durchgangsbeobachtungen im Vertikal des Polarsterns. In Fig. 2 sei P der Pol, Z das Zenit und ZV der Bogen eines Vertikalkreises. Dieser Kreis werde von dem Polarstern im Punkte S und von einem zweiten Stern im Punkte S' passiert; der Durchgang des Polarsterns durch den Punkt S finde zur Uhrzeit U, der Durchgang des zweiten Sterns durch den Punkt S' finde zur Uhrzeit U' statt. Die Uhr wird als so genau reguliert vorausgesetzt, daß ihr Gang innerhalb der Zeit $U' - U$ vernachlässigt werden darf. Setzt man $ZPS = t$ und $ZPS' = t'$, so ist t der Stundenwinkel des Polarsterns zur Uhrzeit U, und t' der Stundenwinkel des zweiten Sterns zur Uhrzeit U'; man hat also, wenn α die Rektaszension des Polarsterns, α' die Rektaszension des zweiten Sterns und u die für die Zeiten U und U' gültige Uhrkorrektion bedeutet,

Fig. 2.



$$t = U + u - \alpha, \qquad t' = U' + u - \alpha'$$

Somit wird

$$t' - t = U' - U - (\alpha' - \alpha) \tag{18}$$

Bezeichnet man nun die Deklination des Polarsterns mit δ, und die Deklination des zweiten Sterns mit δ', so folgt aus dem Dreieck $PS'S$, wenn der Winkel bei S gleich v und $SS' = \Delta$ gesetzt wird,

$$\sin \Delta \sin v = \cos \delta' \sin (t' - t)$$
$$\sin \Delta \cos v = \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos (t' - t)$$

Man ziehe jetzt den Bogen PH senkrecht zu $S'Z$; wenn dann in dem Dreieck HSP der Winkel bei P mit $90^\circ - x$ bezeichnet wird, so ergibt sich

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} v \sin \delta$$

oder mit Berücksichtigung der zwei vorhergehenden Gleichungen

$$\tan x = \frac{\tan\delta \cot\delta' \sin(t'-t)}{1 - \tan\delta \cot\delta' \cos(t'-t)} \tag{19}$$

Die Werte von α, δ, α', δ' können als bekannt angenommen werden; der Gleichung (18) zufolge ist somit auch $t'-t$ bekannt, und es läßt sich also mit Hilfe von (19) x berechnen.

Aus dem Dreieck HSP folgt noch

$$\sin x = \tan\delta \tan HP$$

Das Dreieck HPZ gibt aber, wenn der Winkel bei P mit $90^\circ - m$ bezeichnet, und $PZ = 90^\circ - \varphi$ gesetzt wird, wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes bedeutet,

$$\sin m = \tan\varphi \tan HP$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\sin m = \tan\varphi \cot\delta \sin x \tag{20}$$

Da φ und δ als bekannt betrachtet werden, und x bereits gefunden wurde, so läßt sich aus (20) der Wert von m ableiten. Nun ist der Stundenwinkel t des Polarsterns zur Uhrzeit U gleich $ZPS = HPZ - HPS = x - m$ oder, in Zeit ausgedrückt, gleich $(x-m):15$; da aber, nach obigem, t auch gleich $U + u - \alpha$ ist, so wird die Uhrkorrektion

$$u = \alpha - U + \frac{x-m}{15} \tag{21}$$

136. Bestimmung der Polhöhe durch Messung der Zenitdistanz eines Sterns. Aus dem Dreieck zwischen dem Pol, dem Zenit und dem Ort eines Sterns folgt, wenn die Polhöhe mit φ, die Deklination des Sterns mit δ und sein Stundenwinkel mit t bezeichnet wird,

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{22}$$

Setzt man hierin

$$\begin{aligned} \sin\delta &= m \sin M \\ \cos\delta \cos t &= m \cos M, \end{aligned} \tag{23}$$

so erhält man

$$\cos z = m \cos(M - \varphi)$$

oder, wenn für m sein aus der ersten der Gleichungen (23) folgender Wert substituiert wird,

$$\cos(M-\varphi) = \frac{\cos z \sin M}{\sin\delta} \tag{24}$$

Hat man nun die Zenitdistanz eines bekannten Sterns beobachtet, und kennt man auch die Sternzeit Θ der Beobachtung, so sind z, δ und (wenn α die Rektaszension des Sterns bedeutet) $t = \Theta - \alpha$ gegebene Größen; man kann also aus (23) den Wert von M, und dann mit Hilfe von (24) die Polhöhe finden.

Der Gleichung (5) zufolge hat man

$$d\varphi = \sec \mathfrak{a}\, dz - \operatorname{tang} \mathfrak{a} \cos\varphi\, dt,$$

wo $\mathfrak{a}$ das Azimut des Sterns angibt. Ein Fehler in der beobachteten Zenitdistanz und in dem Wert von t hat also einen um so geringeren Einfluß auf φ, je näher der Stern dem Meridian ist. Wenn aber der Stern in der Nähe des Meridians beobachtet worden ist, und man einen approximativen Wert von φ kennt, so lassen sich die Formeln (23) und (24) durch andere, für die Rechnung bequemere ersetzen. Zunächst werde der Fall betrachtet, wo die Beobachtungen in der Nähe der oberen Kulmination stattgefunden haben. Man bringe dann die Gleichung (22) in die Form

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t$$

Je nachdem der Stern nördlich oder südlich vom Zenit kulminiert, ist seine Zenitdistanz zur Zeit der oberen Kulmination, absolut genommen, gleich $\pm(\delta - \varphi)$; bezeichnet man diese Zenitdistanz mit z_o, so wird

$$\cos z = \cos z_o - 2 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t \tag{25}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\sin \tfrac{1}{2}(z - z_o) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t}{\sin \tfrac{1}{2}(z_o + z)} \tag{26}$$

oder, wenn $z - z_o = x_o$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß $\tfrac{1}{2}(z_o + z) = \tfrac{1}{2}[\pm(\delta - \varphi) + z]$ ist,

$$\sin \tfrac{1}{2} x_o = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t}{\sin \tfrac{1}{2}[\pm(\delta - \varphi) + z]}, \tag{27}$$

wo man das obere oder untere Vorzeichen zu wählen hat, je nachdem die obere Kulmination nördlich oder südlich vom Zenit stattfindet. Hat man x_o gefunden und durch die Verbindung von x_o mit dem beobachteten z den Wert von $z_o = z - x_o$ abgeleitet, so erhält man die Polhöhe aus der Gleichung

$$\varphi = \delta \mp z_o, \tag{28}$$

wobei die Vorzeichenregel dieselbe ist wie für (27).

Ist der Stern in der Nähe der unteren Kulmination beobachtet worden, so setze man $t = 180^\circ + \tau$; der Gleichung (22) läßt sich dann die Form geben

$$\cos z = \cos[180^\circ - (\varphi + \delta)] + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau$$

Da aber, wenn z_u die Zenitdistanz des Sterns in der unteren Kulmination bedeutet, $z_u = 180^\circ - (\varphi + \delta)$ ist, so kann man die letzte Gleichung ersetzen durch

$$\cos z = \cos z_u + 2 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau \tag{29}$$

Hieraus folgt

$$\sin \tfrac{1}{2}(z_u - z) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} \tau}{\sin \tfrac{1}{2}(z_u + z)} \tag{30}$$

oder, wenn $z_u - z = x_u$ gesetzt und berücksichtigt wird, daß

$$\tfrac{1}{2}(z_u + z) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta - z)$$

ist,

$$\sin\tfrac{1}{2}x_u = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}\tau}{\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta-z)} \tag{31}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich x_u bestimmen. Aus x_u und dem beobachteten z erhält man sodann $z_u = x_u + z$, endlich wird

$$\varphi = 180^\circ - (z_u + \delta) \tag{32}$$

Bei nicht zu großen Werten von t, bzw. τ*), also auch von $z - z_0$, bzw. $z_u - z$ wendet man mit Vorteil eine Reihenentwicklung an. Setzt man nämlich $\sin\frac{1}{2}(z_0+z) = \sin[z_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)]$, so gibt der *Taylor*sche Satz

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(z_0+z)} = \frac{1}{\sin z_0} - \tfrac{1}{2}(z - z_0)\sin 1''\frac{\operatorname{cotg} z_0}{\sin z_0} + \cdots$$

Somit wird die Gleichung (26)

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_0) = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}\sin^2\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}(z - z_0)\sin 1''\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}\operatorname{cotg} z_0\sin^2\tfrac{1}{2}t + \cdots$$

oder, wenn $\sin\frac{1}{2}(z - z_0) = \frac{1}{2}(z - z_0)\sin 1''$ gesetzt wird,

$$z - z_0 = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''} - \left(\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}\right)^2\operatorname{cotg} z_0\frac{2\sin^4\frac{1}{2}t}{\sin 1''} + \cdots$$

Setzt man hierin z_0 gleich $\delta - \varphi$ oder gleich $\varphi - \delta$, je nachdem die obere Kulmination nördlich oder südlich vom Zenit stattfindet, und führt die Abkürzungen ein

$$\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta-\varphi)} = A_0, \qquad \frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''} = m_0, \qquad \frac{2\sin^4\frac{1}{2}t}{\sin 1''} = n_0, \tag{33}$$

so erhält man

$$\varphi = \delta \mp z + A_0 m_0 - A_0^2 n_0 \operatorname{cotg}(\delta - \varphi) \tag{34}$$

OK nördlich
» *südlich*

In derselben Weise ergibt sich aus (30), wenn

$$\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\delta+\varphi)} = A_u, \qquad \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} = m_u, \qquad \frac{2\sin^4\frac{1}{2}\tau}{\sin 1''} = n_u \tag{35}$$

gesetzt wird,

$$\varphi = 180^\circ - \delta - z - A_u m_u + A_u^2 n_u \operatorname{cotg}(\delta + \varphi) \tag{36}$$

UK

Die Werte von m_0, n_0, m_u, n_u kann man den *Albrecht*schen Tafeln entnehmen.

137. Bestimmung der Polhöhe aus zwei gleichen Höhen verschiedener Sterne. Es seien Θ_n und Θ_s die Sternzeiten, zu denen zwei Sterne, von denen der eine nördlich, der andere südlich vom Zenit sich befindet, dieselbe Zenitdistanz z erreichen. Sind α_n und δ_n, bzw. α_s und δ_s die Rektaszension und Deklination des

*) Die folgenden Formeln geben in mittleren geographischen Breiten den Wert von φ bis auf $0''.01$ genau, wenn bei der Anwendung auf den Polarstern t, bzw. τ die Grenzen $\pm 2^h$ nicht wesentlich überschreitet; für Sterne von der Deklination $2\varphi - 90^\circ$ sind die Grenzen beiläufig $\pm 20^m$.

nördlich, bzw. südlich vom Zenit gelegenen Sterns, so sind $t_n = \Theta_n - \alpha_n$ und $t_s = \Theta_s - \alpha_s$ die Stundenwinkel der Sterne zur Zeit der Beobachtung. Man hat nun die Gleichungen

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_n + \cos\varphi \cos\delta_n \cos t_n$$
$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_s + \cos\varphi \cos\delta_s \cos t_s$$

In § 134 ist bereits gezeigt worden, wie man mit Hilfe solcher Gleichungen bei bekannter Polhöhe die Zeit ableitet; die dort gegebenen Gleichungen (9) bis (13), in denen nur die Indizes o und w mit n und s zu vertauschen sind, ermöglichen es aber auch, die Polhöhe zu bestimmen, wenn die Zeit bekannt ist.

138. Die *Horrebow-Talcott*sche Methode. Ist z_n die Meridianzenitdistanz eines nördlich, und z_s die Meridianzenitdistanz eines südlich vom Zenit kulminierenden Sterns, so hat man

$$z_n = \delta_n - \varphi, \qquad z_s = \varphi - \delta_s$$

Hieraus folgt

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(z_s - z_n) + \tfrac{1}{2}(\delta_n + \delta_s)$$

Wenn nun die Meridianzenitdistanzen der beiden Sterne nahe gleich sind, so läßt sich die Differenz $z_s - z_n$ mikrometrisch sehr genau bestimmen; sind außerdem die Deklinationen der beiden Sterne gegeben, so ist jetzt auch φ bekannt. Auf diesem Prinzip beruht die nach *Horrebow* und *Talcott* benannte Methode der Polhöhenbestimmung.

139. Bestimmung der Polhöhe aus Durchgangsbeobachtungen im ersten Vertikal. Aus dem rechtwinkligen Dreieck zwischen dem Pol (P), dem Zenit (Z) und einem im ersten Vertikal befindlichen Stern (S) folgt, wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Deklination und t den Stundenwinkel des Sterns bedeutet,

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\delta}{\cos t} \tag{37}$$

Sind nun U_o und U_w die beobachteten Durchgangszeiten des Sterns durch die Ost- und Westhälfte des ersten Vertikals, so hat man $t = \pm\frac{1}{2}(U_w - U_o)$, wo $U_w - U_o$ eventuell wegen des Ganges der Uhr zu verbessern ist. Da somit t bekannt ist, so kann man aus (37) die Polhöhe bestimmen, wenn man die Deklination des Sterns kennt.

Durch Anwendung der Differentialformel der sphärischen Trigonometrie (§ 13, (20))

$$\sin a\, dB = \sin C\, db - \cos a \sin B\, dc - \sin b \cos C\, dA \tag{II}$$

auf das Dreieck PZS erhält man, wenn die in (II) mit a, b, c bezeichneten Seiten mit den Seiten z, $90^\circ - \delta$, $90^\circ - \varphi$ des Dreieckes PZS identifiziert werden, und der Winkel bei S mit η bezeichnet wird,

$$d\varphi = \frac{\cos\delta \cos\eta}{\cos z}\, dt + \frac{\sin\eta\, d\delta}{\cos z}$$

oder, da

$$\cos\delta \cos\eta = \sin\varphi \sin z$$

ist,

$$d\varphi = \sin\varphi\, \text{tang}\, z\, dt + \sin\eta\, \sec z\, d\delta$$

Ein Fehler in der beobachteten Durchgangszeit übt also einen um so geringeren Einfluß auf φ aus, je kleiner z ist, d. h. je näher die Deklination des Sterns gleich der Polhöhe des Beobachtungsortes ist. Für $z = 0$ wird $\eta = 90^\circ$ und somit $d\varphi = d\delta$; ein Fehler der Deklination des Sterns geht also ganz in die Polhöhe über.

Gibt man der Gleichung (37) die Form

$$\cos t = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \varphi}$$

und bildet den Ausdruck für $1 - \cos t$, so folgt

$$\sin(\varphi - \delta) = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} t \sin \varphi \cos \delta \tag{38}$$

Diese Gleichung wendet man an Stelle von (37) an, wenn φ näherungsweise bekannt ist.

REGISTER.

Abkürzungen: α = Rektaszension
δ = Deklination
λ = Länge
β = Breite
Pos. W. = Positionswinkel
Dist. = Distanz

Abendweite 125.
Aberration 164.
  jährliche 165.
  Einfluß der jährl. A. auf α und δ 167.
  » » » » » λ » β 166.
  » » » » » Pos.W. und Dist. 173.
  Planeten-A. 171.
  säkulare 170.
  tägliche 169.
Aberrationskonstante 167.
  Bestimmung der 287.
  Beziehung zwischen der A. und der Sonnenparallaxe 198.
Abplattung der Erde 183.
Allgemeine Präzession 93, 100.
Anomalie, wahre und mittlere 50.
  wahre A. der Sonne 52.
Aphel 50.
Apogäum des Mondes 51.
Äquator 39.
  instantaner (= wahrer) 64.
  mittlerer 87, 127.
  Änderung des mittl. Ä. in bezug auf den einer fixen Epoche entsprechenden mittl. Ä. 98, 101.
Äquinoktialpunkte 43.
Äquinox, mittleres 87, 127.
  wahres 127.
  Änderung des mittl. Ä. in bezug auf die für eine fixe Epoche gültige Lage des mittl. Ä. 98, 101.
  Bestimmung der Korrektion 264.
Arago-Biotsches Gesetz 209.
Astrographische Länge und Breite 364.
Astrographische Ortsbestimmung 361.
Astrozentrische Länge und Breite 362.
Atmosphäre, Druck einer 199.
Aufgangszeit eines Sterns 121.
  der Sonne 123.
  des Mondes 124.

Bedingungsgleichungen 18.
  homogene 19.
Bewegung, tägliche 40.
  mittlere 50.
Biot-Aragosches Gesetz 209.
Brechende Kraft der Luft, Einfluß des Wasserdampfes auf die 208.
Breite 45.
  berechnet aus α und δ 47.
  astrographische 364.
  astrozentrische 362.
  geographische 183.
  s. auch Polhöhe.
  geozentrische 183.
Breitenkreis 46.
  Winkel zwischen Deklinationskreis und 47.

Cassinis Gesetze 368.

Daltonsches Gesetz 201.
Datum, siderisches 178.
Deklination 42.
  astrozentrische 362.
  berechnet aus λ und β 48.
  bezogen auf das mittlere, bzw. wahre Äquinox 127.
  Bestimmung 249.
  scheinbare und wahre 164.
  s. auch Sonne.
Deklinationskreis 43.
  Winkel zwischen Breitenkreis und 47.
Dichtigkeit der Luft, Einheit 200.
  Änderung der D. einer Luftschicht mit der Höhe 202.
  Bestimmung 204.
  optische 210.
Differentiation, numerische 9.
Drehung s. Rotation.

Eigenbewegung der Fixsterne 146.
  Einfluß der E. auf α und δ 148.
  » » » » Pos. W. und Dist. 155.
  Bestimmung 148.
  Reduktion der E. von einem Äquinox auf ein anderes 151, 153.
  Reduktion der E. von einer Epoche auf eine andere 151, 153.
  Konvergenzpunkt 157.
Eigenbewegung des Sonnensystems 280, 282, 286.
Ekliptik, Definition 43, 53.
  Änderung der Lage der 69, 93, 101.

Ekliptik, mittlere Schiefe 93, 100, 127.
wahre scheinbare Schiefe 100, 127.
Bestimmung der Schiefe 254.
Elemente, oskulierende 52.
Erde, Abplattung 183.
Achsen 182.
Differentialgleichungen der Bewegung der Rotationsachse 63.
Integration dieser Gleichungen 83.
Differentialgleichungen der Bewegung der kleinen Achse 58.
Integration dieser Gleichungen 101.
Theorie der Drehung 54.

Fabritius, Formeln von 181.
Fehler, mittlerer 12.
wahrscheinlicher 12.
Beziehung zwischen m. und w. F. 13.
Beziehung zwischen m., bzw. w. F. und Gewicht 14.
m., bzw. w. F. einer linearen Funktion 13.
» » » » des Mittels 13, 14, 15, 16*).
» » » » einer Beobachtung 15.
» » » » derGewichtseinheit 16, 21, 26, 28.
» » » » einer Unbekannten 21, 26, 28.
Finsternisse, s. Sonnenf., Mondf.
Fundamentalkatalog, Bildung 267, 273.

Gang der Uhr, täglicher 258.
Gaußsche Gleichungen 33.
Gay-Lussac-Mariotte, Gesetz 201.
Geschwindigkeit, radiale 147, 159, 286.
Gewicht einer Beobachtung 10.
einer Unbekannten 21.
Beziehung zwischen m. F., bzw. w. F. und 14.
eines Sternkatalogs 274.
Gewichtseinheit, m. F., bzw. w. F. der 16, 21, 26, 28.
Grenzkurven, s. Sonnenfinsternisse.

Helligkeitsgleichung 263.
Horizont 39.
Kardinalpunkte des 40.
Hörnerbeobachtungen 352.
Horrebow-Talcottsche Methode 382.

Integrale:

$$\beta_n^{(h)} = \frac{1}{(n-h)!}\int_0^\infty x^{n-h}(1-e^{-x})^h e^{-x}dx \qquad 215.$$

$$U_n = \frac{a_0^n}{n!}\int_0^\infty [x + k_0(1-e^{-x})]^n e^{-x}dx \qquad 214.$$

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^2} e^{-\quad} v \qquad 227.$$

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-x^2}dx \qquad 223, 228.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^m e^{-nx}}{\sqrt{Z^2+x}}dx \qquad 228.$$

Interpolationsformeln 4.

Jahr, anomalistisches 118.
siderisches 117.
tropisches 116.
Beginn eines tropischen 116, 117.
Jährliche Parallaxe 142.
Einfluß der j. P. auf α und δ 142.
» » » » » Pos. W. und Dist. 144.
s. auch Parallaxe.
Julianisches Jahrhundert 69.

Kardinalpunkte des Horizonts 40.
Knoten 51.
Länge des 51.
Knotenlinie 50.
Kolur 46.
Kulmination, obere und untere 42.
Kulminationszeit, berechnet 118.

Lagrange, Satz von 231.
Länge 45.
berechnet aus α und δ 47.
bezogen auf das mittlere, bzw. wahre Äquinox 127.
scheinbare und wahre 164.
in der Bahn 51.
mittlere L. eines Planeten 51.
des Perihels 51.
s. auch Sonne, bzw. Mond.
des aufsteigenden Knotens 51.
geographische, Bestimmung 304, 311.
astrographische 364.
astrozentrische 362.
Libration, optische L. des Mondes 369.
in Länge und Breite 370, 371.
Luftdruck, Abnahme des L. bei zunehmender Entfernung von der Erde 199.
Bestimmung 204.
Lunisolarpräzession, in Länge 93, 100.
in Schiefe 93, 100.
Konstante der 88.
Bestimmung der Konstante der 278, 282.
Einfluß einer Korrektion der Konstante der L. auf die Präzession in α und δ 279.
Einfluß einer Korrektion der Konstante der L. auf die Nutation 139.

Meridian 39.
Meridianpunkt eines Kreises 41.
Methode der kleinsten Quadrate 10.
Mittag s. Mittlerer Mittag.

*) S. 16, Gleichungen (11a): Statt $m(m-1)$ lies $[p](m-1)$.

Mittelpunktsgleichung 50.
Mittlere Zeit 108.
  Verwandlung in Sternzeit 112.
Mittlerer Fehler s. Fehler.
Mittlerer Mittag 112.
  Sternzeit im 112.
Mittlerer Tag 112.
Mond, Länge in der Bahn 75.
  Radiusvektor 74.
  Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn 79.
  Neigung der Bahn gegen die Ekliptik 79.
  Länge des Perigäums 51.
  Halbmesser, Bestimmung aus Sternbedeckungen 308.
  Mondvermessungen 367.
  Parallaxe, Äquatoreal-Horizontal 187.
    Konstante der Äq.-Hor.-Par. 187.
    Bestimmung der Konstante
      aus Zenitdistanzen 191.
      » Sternbedeckungen 308.
  Masse, Bestimmung der 107.
  Cassinische Gesetze 368.
  Erster Meridian (Hauptmeridian) 370.
  Optische Libration 369.
  Bestimmung der Lage eines Kraters gegen den Mittelpunkt der Mondscheibe 365.
  Selenographische Länge und Breite des Mittelpunktes der Mondscheibe 369.
    eines Mondkraters 372.
    des Ein- und Austrittspunktes bei Sternbedeckungen 373.
  Unebenheiten des Randes 310, 311, 368.

Nadir 39.
Nadirpunkt eines Kreises 41.
Napiersche Analogien 34.
Neigung einer Bahnebene 51.
Nordpunkt des Horizonts 40.
Normalgleichungen 18.
  Auflösung 21, 25, 27.
Normalmeridian 117.
Numerische Differentiation 9.
Nutation in Länge und Schiefe 135.
  in α und δ 135.
  im Pos. W. 138.
Nutationsglieder 93.
Nutationskonstante 86.
  Bestimmung 287.
  Einfluß einer Korrektion der N. auf die Nutation 139.

Ort eines Sterns, wahrer und scheinbarer 164.
Oskulierende Elemente 52.
Ostpunkt des Horizonts 40.

Parallaktischer Winkel 46.
Parallaxe 182.
  in α und δ 184.
  in Azimut und Zenitdistanz 188.
  Einfluß auf den Halbmesser 190.
  Horizontalparallaxe 208.
  s. auch Sonne, bzw. Mond.
Parallaxe eines Sterns 142.
  Bestimmung 159, 287.
  relative P. eines Sterns 289.
    Bestimmung aus Distanzen 290.
      » Pos. W. 293.
      » α Differ. 295.
  s. auch Jährliche Parallaxe.
Polhöhe 39.
  mittlere 250.
  Veränderlichkeit 106, 247.
  Bestimmung
    Fundamentale 249.
    Zenitdistanzen eines Sterns 379.
    Gleiche Höhen zweier Sterne 381.
    Horrebow-Talcotts Meth. 382.
    Erster Vertikal 382.
Positionswinkel 49.
  Beobachtung 238.
Präzession in λ und β 128.
  in α und δ 129, 133, 153.
  im Pos. W. 138.
  jährliche 132, 133.
  Variatio saecularis 132, 133.
  drittes Glied 132, 133.
  allgemeine 93, 100.
  durch die Planeten 93, 101.
  s. auch Lunisolarpräzession.

Quadrate, Methode der kleinsten 10.

Radiale Geschwindigkeit 147, 159, 286.
Rechtwinklige Dreiecke, Formeln 36.
Reduktion vom mittleren Äquinox auf das wahre 136.
  auf den scheinbaren Ort 175.
Refraktion, Abhängigkeit von der Parallaxe 208.
  Berücksichtigung des Dunstdruckes 208, 220.
  Abhängigkeit von der Dichtigkeit und Temperatur der Luft 220.
  Saalrefraktion 251.
  Differentialausdruck der R. 205.
  Integralausdruck 213.
  Entwicklung für $z \leqq 80^\circ$ 213.
    für $z > 80^\circ$ 229.
  Funktion der wahren Zenitdistanz 233.
  Einfluß auf α und δ 235.
    auf Pos. W. und Dist. 235.
      » α- und δ-Differenz 243.
      » Finsternisse und Bedeckungen 305.
Refraktionskonstante 216.
  Bestimmung 249.
Rektaszension 43.
  berechnet aus λ und β 48.
  bezogen auf das mittlere und wahre Äquinox 127.
  wahre und scheinbare 164.
  Bestimmung 257.
  Abhängigkeit von der mittleren Zeit der Beobachtung 259.
  Unterschied zwischen Tag- und Nachtbeobachtungen 260.
  Einfluß der Helligkeitsgleichung 263.
  relative Korrektionen 263.

Rektaszension, Korrektion des Äquinoktiums 264.
s. auch Sonne.
astrozentrische 362.
Rotation der Erde s. Erde.
Rotationsachse eines kugelförmigen Himmelskörpers 361.

Saalrefraktion 251.
Scheinbarer Ort 164.
Reduktion auf den 175.
Schiefe der Ekliptik 44.
mittlere 93, 100, 127.
wahre oder scheinbare 100, 127.
Bestimmung 254.
Siderisches Datum 178.
Solstitialpunkte 43.
Sonne, wahre Anomalie 52.
mittlere und wahre Länge 52.
mittlere scheinbare Länge 112.
Perigäum 52.
Länge des Perigäums 52.
Rektaszension, durch Beob. 257.
berechnet aus λ und β 265, 266.
Deklination, durch Beob. 256.
berechnet aus λ und β 265, 266.
Parallaxe 186.
Bestimmung 196.
Beziehung zwischen Aberrationskonstante und 198.
Heliographische Länge und Breite eines Sonnenfleckes 364.
s. auch Sonnenfinsternisse, Sonnensystem.
Sonnenfinsternisse 312.
Bedingung für das Eintreten 314.
Vorausberechnung für einen Ort
nach Hansen 330.
» Bessel 334.
Nördliche und südliche Grenzkurve 340.
Kurve der zentralen Finsternis 343.
Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit 343.
Anfangs- und Endpunkt der zentr. F. 348.
Östliche und westliche Grenzkurve 344.
Erste und letzte Berührung 348.
Berührungspunkte der nördl. und südl. mit der östl. und westl. Grenzkurve 349.
Instantane Durchschnittskurve 350.
Hörnerbeobachtungen 352.
Sonnensystem, Eigenbewegung 280, 282, 286.
Sphärische Trigonometrie s. Trigonometrie.
Sternbedeckungen 297.
Vorausberechnung für einen Ort 300.
Einfluß der Refraktion 305.
Längenbestimmung 304, 311.
Bestimmung des Ortes, des Halbmessers und der Parallaxe des Mondes 308.
Selenographische Länge und Breite des Ein- und Austrittspunktes 373.
Sternkataloge, Vergleichung zweier 267.
Reduktion auf ein mittleres System 271.
Gewichtsbestimmung 274.
Sternströme 157.
Sterntag 113.
Sternzeit 43.
Verwandlung in mittlere Zeit 112.
Störungen, säkulare, periodische 52.
Stundenkreis 43.
Stundenwinkel 43, 44.
Südpunkt des Horizonts 40.

Tägliche Bewegung 40.
Talcott-Horrebowsche Methode 382.
Trigonometrie, sphärische 29.
Fundamentalformeln 32.
Gaußsche Gleichungen 36.
Napiersche Analogien 36.
Rechtwinklige Dreiecke 36.
Differentialformeln 37.

Untergangszeit eines Sterns 121.
der Sonne 123.
des Mondes 124.

Variatio saecularis 132, 133.
Vertikal, erster 40.
Verwandlung, α und δ in λ und β 47.
α und δ in Azimut und Zenitdist. 46.
λ und β in α und δ 48.

Wahre Zeit 112.
Verwandlung in mittlere Zeit 114.
Wahrer Ort eines Sterns 164.
Wahrscheinlicher Fehler s. Fehler.
Westpunkt des Horizonts 40.
Wilkens, Rekursionsformel 227.

Zeit, mittlere 108, 112.
wahre 108, 114.
Sternzeit 43, 112.
Auf- und Untergangsz. 121, 123, 124.
Kulminationszeit 118.
Bestimmung
Zenitdistanz eines Sterns 374.
gleiche Höhen zweier Sterne 376.
im Vertikal des Polarsterns 378.
Zeitgleichung 114.
Zenit 39, 183.
geozentrisches 183.
Zenitdistanz eines Sterns 40.
berechnet aus α und δ 46.
scheinbare 206.
wahre 208.
Einfluß der Veränderlichkeit der Polhöhe 247.
mittlerer Fehler einer 252.
Zenitpunkt eines Kreises 41.
Zirkumpolarstern 42.

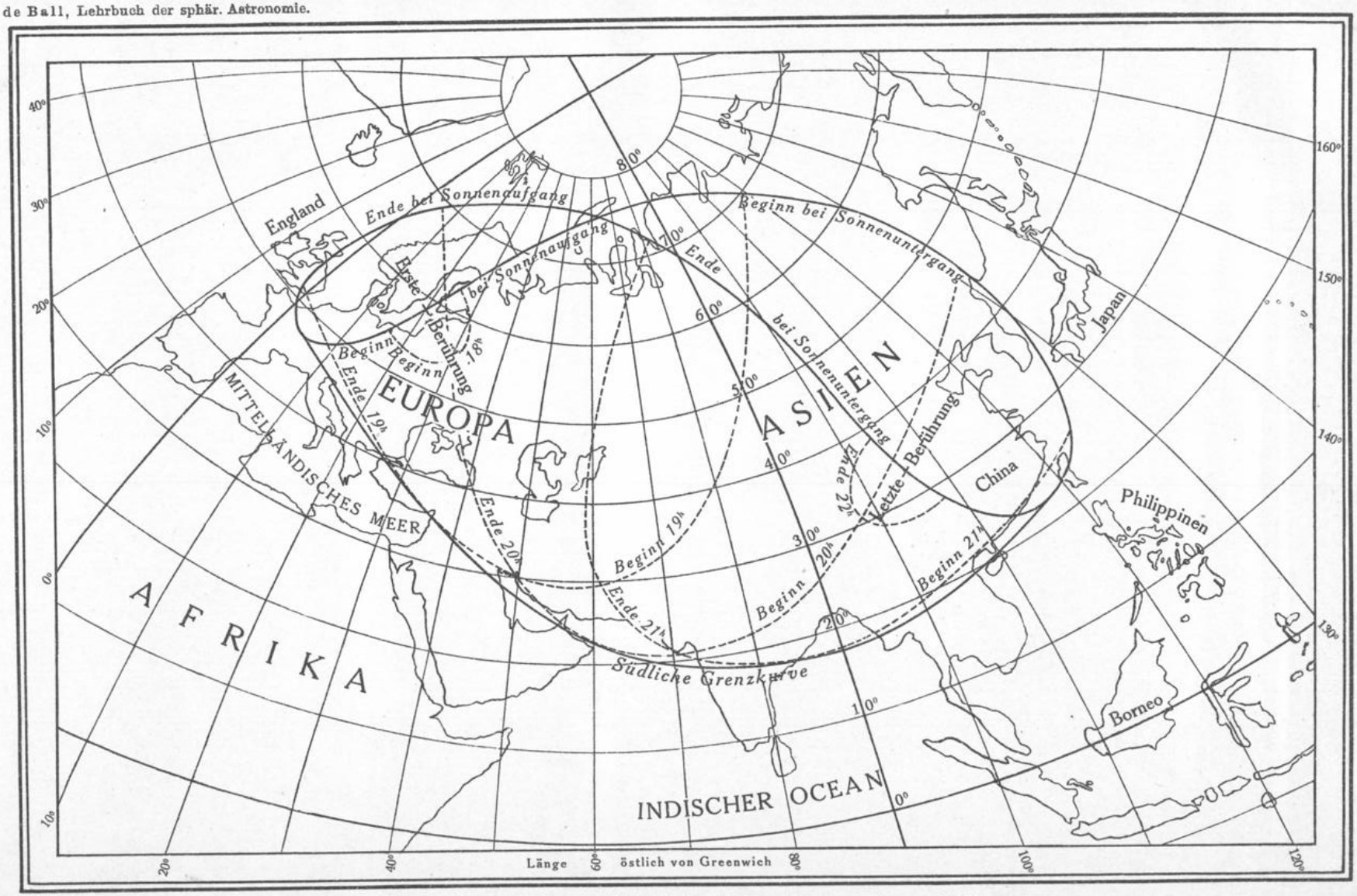
Berichtigungen.

S. 16, Z. 4 statt $m(m-1)$ lies $[p](m-1)$
S. 63, Z. 13 und 14 v. u. Den Gleichungen ist die Nummer (25^a) hinzuzufügen
S. 73, Z. 1 statt $\cos^2 b$ lies $\cos^2 b_c$
S. 195, Z. 5 v. u. statt $\sin p$ lies $\sin p_1$
S. 223, Z. 9 statt e^{Z^2} lies $e^{\overline{Z}^2}$
S. 287 und 288, Gleichungen (6), (7) und (9) statt u, v, u', v' lies u_1, v_1, u_1', v_1'.

Druck von Breitkopf & Härtel, Leipzig.

PARTIELLE SONNENFINSTERNIS VOM 30. OKTOBER 1902

de Ball, Lehrbuch der sphär. Astronomie.

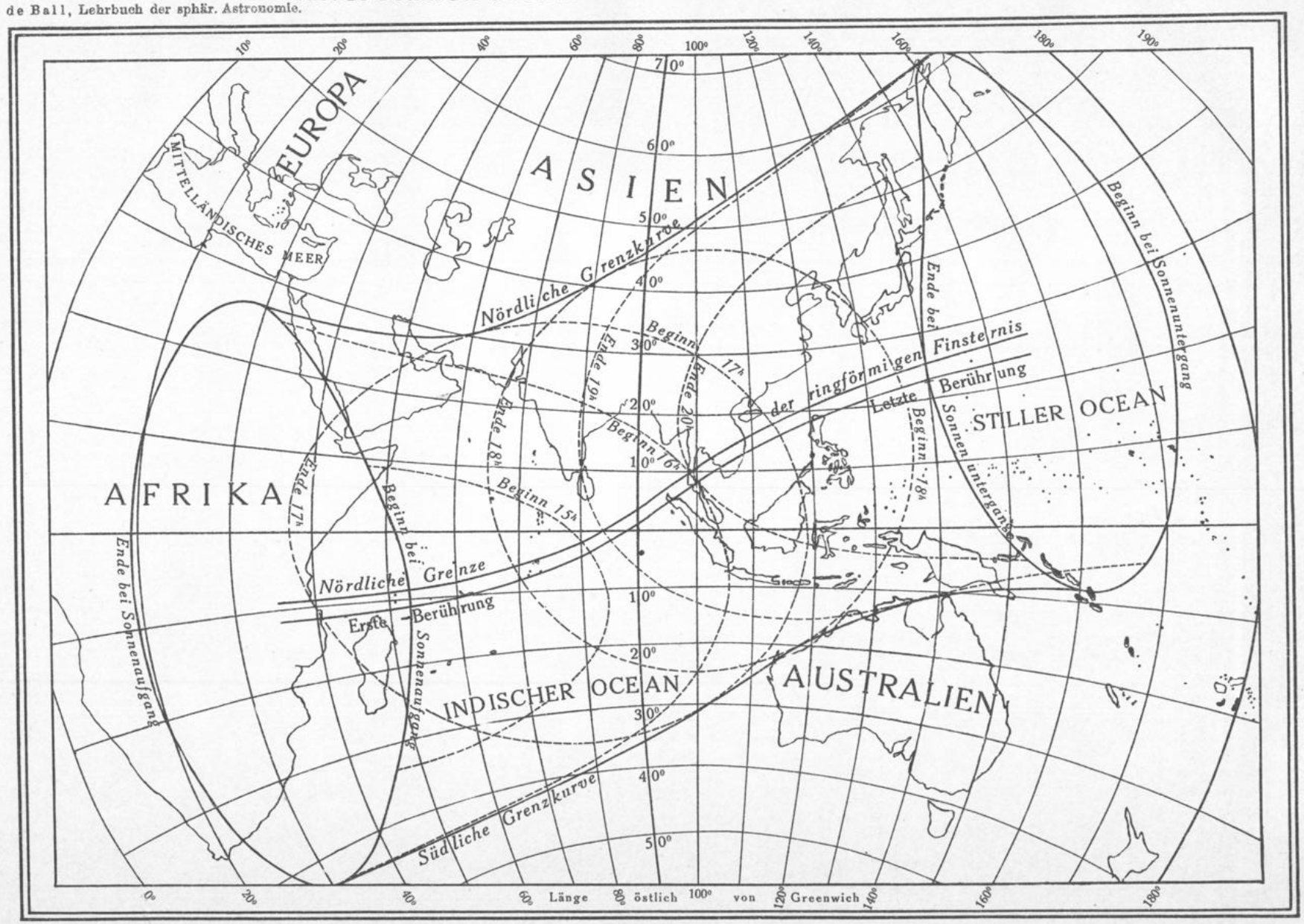


Die Stunden des Beginnes und Endes sind in mittlerer Zeit Greenwich ausgedrückt

Verlag von Wilhelm Engelmann in Leipzig.

RINGFÖRMIGE SONNENFINSTERNIS VOM 16. MÄRZ 1904

de Ball, Lehrbuch der sphär. Astronomie.



Die Stunden des Beginnes und Endes sind in mittlerer Zeit Greenwich ausgedrückt

Verlag von Wilhelm Engelmann in Leipzig.