Leitfaden der praktischen Physik

Kohlrausch, Friedrich

Leipzig [u.a.], 1896

Elasticität und Schall

urn:nbn:at:at-ubi:2-6036

Elasticität und Schall.

33. Bestimmung des Elasticitätsmoduls durch Ausdehnung.

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft P bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde. Dann ist

$$E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q}$$

der Elasticitäts-Modul oder Koefficient der Ausdehnung, auch wohl erster Elast.-Koefficient genannt. E, die elastische Stärke des Körpers definirend, ist also das Verhältnis der Spannung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch das Gewicht, welches man an einen Draht vom Querschnitt Eins anhängen müfste, um die Länge zu verdoppeln, wenn bis dahin die Verlängerung der Belastung proportional bliebe.

Die Gröfse der Zahl E hängt von den Einheiten ab, in welchen Querschnitt und Gewicht gemessen werden.

Gewöhnliche technische Definition. Man pflegt das Quadratmillimeter und das Kilogrammgewicht zu wählen, was man durch ein der Zahl beigesetztes kg-Gewicht/mm^2 bezeichnet (Tab. 17). Um die Veränderlichkeit der Schwere in Rechnung zu setzen, kann man die Beobachtung auf 45^0 Breite reduciren (**19b**). Doch sind meistens die Messungen nicht so genau, dafs diese Korrektion merklich wird.

Elasticitätsmodul im absoluten Mafssystem [E]. Betrachtet man das Gramm, Kilogramm etc. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheit, so ist das Gewicht eines Körpers P also $= g \cdot P$, wo g die Schwerbeschleunigung bedeutet. Die Krafteinheit, 1 „Dyne“ nach Clausius, d. h. das Gewicht, welches 1 gr an einem Orte haben würde, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sec^2 betrüge, würde $g$mal kleiner und der Elasticitätsmodul $g$mal gröfser werden, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird. Einen in kg-Gewicht/mm^2 ausgedrückten Elasticitätsmodul E hat man also, um denselben in das „absolute“ [C-G-S]-System $[E]$ umzurechnen, erstens mit kg/gr $= 1000$, ferner mit cm^2/mm$^2 = 100$ und endlich mit $g = 981$ cm/sec^2, also mit 98 100 000 zu multipliciren. $[E]$ geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in (cm/sec)^2. Vgl. Anh. 6 und 10a.

Wir nehmen die gebräuchliche technische Definition.

Bestimmung des Elasticitätsmoduls. Man befestigt das obere Ende des Drahtes oder Stabes an der Wand oder an einer soliden Stütze, belastet das untere Ende wenn nötig zuerst so weit, dafs der Draht ganz gestreckt ist, und mifst seine Länge. Man fügt eine Mehrbelastung P kg des unteren Endes hinzu und bestimmt die dadurch entstehende Verlängerung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. q ist der Querschnitt in mm^2 (vgl. unten). Dann hat man

$$E = \frac{l}{\lambda} \frac{P}{q} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Wenn das obere Ende eines dünnen Drahtes als vollkommen fest angenommen werden kann, so mag man die Verlängerung als die Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Ein Nachgeben der oberen Befestigung kann unter Umständen unschädlich gemacht werden dadurch, dafs man dieselbe mittels eines Fadens und einer Rolle durch eine der Belastung nahe gleiche Kraft auch nach oben beansprucht. Sicherer ist es, je eine Marke oben und unten am Drahte anzubringen und deren Verschiebungen durch die Belastung zu bestimmen.

Bei der Längenmessung mit einem auf einem Mafsstabe (Kathetometer **18a**) verschiebbaren Mikroskop oder besser mit zwei feststehenden Mikroskopen mit Okularmikrometern (**18**, 4) werden die Marken als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf angeklebtem Papier angebracht.

Die zur Messung angewandte Verlängerung mufs innerhalb der „Elasticitätsgrenze“ bleiben, das heifst, der Draht mufs nach Entlastung die frühere Länge haben, was zu kontroliren ist. Die Elasticitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, dafs man vor den Messungen stärker belastet. — Selbst bei harten Metallen wird man bei der Messung die Hälfte der Belastung, bei welcher das Zerreifsen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 17.

Wegen der elastischen Nachwirkung (**36 a**) wachsen die Verlängerungen mehr oder weniger — bei Stahl am wenigsten — mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen thunlichst kurze Zeit wirken zu lassen: die kleine Temperaturänderung, welche die Ausdehnung begleitet, hat keinen merklichen Einflufs. Streng genommen hat man zwei Elasticitätsmoduln bei kurzer und bei andauernder Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere bis zu 2% kleiner sein kann.

Um die Genauigkeit des Resultates zu vergröfsern, beobachtet man bei mehreren Belastungen. Vgl. das Beispiel oder, für die Rechnung mit kleinsten Quadraten, **3**.

Abweichungen von der Proportionalität der Ausdehnung mit der Belastung. Die Ausdehnung λ wächst in Wirklichkeit ein wenig beschleunigt mit der Belastung. Man kann sie genähert darstellen durch

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}(P + A \cdot P^2),$$

wo E den Elast.-Modul für kleine Belastung darstellt.

Sehr kleine Ausdehnungen können um 10% gröfsere Elasticitätsmoduln ergeben, als sehr grofse, woraus also eine erhebliche Unsicherheit entspringt.

Vgl. J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891.

Querschnittsmessung. Der Querschnitt eines Drahtes kann durch Messung des Durchmessers bestimmt werden, wobei man sich für kleine Dicken des Fühlhebels oder des Mikroskopes (**18**) bedient. Zweitens aber läfst sich der Querschnitt durch Wägung finden. Ist s (**13** B 2 u. Tab. 1) die Dichtigkeit der Substanz, wiegen ferner h mm des Drahtes m mg, so ist der Querschnitt $q = m/hs$ mm².

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861$ mm².

Man beobachtete in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,91 mm	1,11 mm
3.	0,6 „	913,86 „	*4.*	2,6 „	914,95 „	1,09 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $P = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm.

Folglich ist der Elasticitätsmodul (S. 150)

$$E = \frac{l \cdot P}{\lambda \cdot q} = \frac{913{,}8 \cdot 2}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \, \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im absoluten cm-gr-System ist dieser Elasticitätsmodul (S. 149)

$$[E] = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \cdot 10^9 \left[\text{cm}^{-1} \, \text{gr} \, \text{sec}^{-2}\right].$$

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in der Mitte belastet, so dafs er gebogen wird. Es sei l die ganze Länge des Drahtes. Zwei Belastungen P_1 und P_2 mögen die Senkungen H_1 und H_2 des Drahtmittelpunktes gegen die Verbindungslinie der Klemmpunkte ergeben, dann ist der Elasticitätsmodul, wenn H_1 und H_2 klein gegen l sind,

$$E = \tfrac{1}{8} \frac{l^3}{q} \, \frac{P_2/H_2 - P_1/H_1}{H_2^2 - H_1^2}.$$

Für gröfsere Senkungen kommt der Korrektionsfaktor

$$1 + 3(H_1^2 + H_2^2)/l^2$$

hinzu. Die beiden Teile des Zählers sind wenig verschieden, so dafs H_1 und H_2 genau beobachtet werden müssen.

Beweis Die Verlängerung jeder Hälfte $\frac{1}{2}l$ ist offenbar

$$\lambda = \sqrt{(\tfrac{1}{2}l)^2 + H^2} - \tfrac{1}{2}l$$

oder genähert nach Formel 3 S. 9

$$\lambda = \tfrac{1}{2}l\left(\sqrt{1 + 4H^2/l^2} - 1\right) = \tfrac{1}{2}l\left(1 + 2H^2/l^2 - 1\right) = H^2/l.$$

Die Zerlegung des Gewichtes P in zwei nach den Drahtrichtungen wirkende Spannungen liefert für jede den Wert $\frac{1}{2}P\sqrt{(\frac{1}{2}l)^2 + H^2}/H$ oder, wenn H klein ist, $P \cdot l/(4H)$. Die ursprüngliche unbekannte Spannung des Drahtes sei P_0 gewesen. Dann hat man also

$$Eq \cdot 2\lambda_1/l \text{ oder } 2Eq \cdot H_1^2/l^2 = P_1 l/(4H_1) - P_0$$
$$Eq \cdot 2\lambda_2/l \text{ oder } 2Eq \cdot H_2^2/l^2 = P_2 l/(4H_2) - P_0.$$

Subtraktion eliminirt P_0 und liefert den obigen Ausdruck für E.

34. Elasticitätsmodul aus Längsschwingungen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer Welle ist gleich Wellenlänge $\times$ Schwingungszahl N.

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht werde zum Ansprechen seines longitudinalen Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. Die Wellenlänge ist dann gleich der doppelten Stab- oder Drahtlänge $2l$.

Also, wenn N die Tonhöhe d. h. Schwingungszahl/sec (Tab. 18), so ist die Schallgeschwindigkeit in dem Materiale

$$u = 2Nl.$$

l sei in cm gemessen, s die Dichtigkeit des Stoffes, dann wird der Elasticitätsmodul im abs. cm-g-sec-System ausgedrückt (S. 149 u. Anh. 10a)

$$[E] = u^2 s = 4N^2 l^2 s\,[\mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot sec^{-2}}].$$

$[E]$ geteilt durch 98100000 gibt den Modul E im gebräuchlichen technischen Mafse kg-Gew./mm² (S. 150). Dies kommt, wie man leicht sieht, auf dasselbe hinaus, wie wenn man l in m, also u in m/sec ausdrückt und dann direkt rechnet

$$E = \frac{u^2 s}{9810} = \frac{4N^2 l^2 \cdot s}{9810} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen werden durch Reiben mit einem wollenen Lappen erzeugt, welcher für Metall oder Holz mit Kolophonium eingerieben, für Glas angefeuchtet worden ist.

Die Tonhöhe wird durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel bestimmt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**37a**, 5).

Es ist oft schwierig, die Oktave zu bestimmen, in welcher die meistens sehr hohen Töne liegen. Ein derartiger Fehler wird leicht bemerkt, weil er das Resultat immer mindestens viermal zu klein oder zu grofs werden läfst.

Über die Bestimmung der Tonhöhe aus Staubfiguren vgl. **37**, über graphische Bestimmung **37a**.

Die aus der Tonhöhe bestimmten Elasticitätsmoduln können etwas anders ausfallen, als die durch Verlängerung bestimmten, erstens wegen der Erwärmung bez. Abkühlung bei der Zusammendrückung bez. Ausdehnung, und zweitens, weil zwischen der Belastung und der Längenbestimmung Zeit verstreicht, und weil während derselben eine kleine Ausdehnung vermöge der elastischen Nachwirkung hinzutritt (vgl. S. 151 und **36a**).

Beispiel. Der vorige Eisendraht gab bei der Länge $l = 1{,}361$ m den Longitudinalton ais_3. Zu diesem findet sich aus Tab. 18 die Schwingungszahl $N = 1843$. Das specifische Gewicht $s = 7{,}61$ gesetzt, wird

$$E = \frac{4 \cdot 1843^2 \cdot 1{,}361^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

35. Elasticitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maſsstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). P sei eine Belastung des freien Endes, H dessen Senkung hierdurch. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b. Die freie Länge des Stabes sei $=l$. Dann ist der Elasticitätsmodul

$$E = 4\frac{l^3}{a^3 b}\frac{P}{H}.$$

Für kreisförmigen Querschnitt ist statt $a^3 b$ zu setzen $3r^4\pi$.

Dünne Drähte. Die Methode ist sehr gut auf dünne Drähte anwendbar. Der Durchmesser wird aus Gewicht und specifischem Gewicht erhalten. Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden eliminirt durch eine zweite Bestimmung, bei welcher der horizontale und vertikale Durchmesser vertauscht sind.

II. Aufgelegter Stab. Die Schwierigkeit der festen Einklemmung wird vermieden, indem man den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auflegt. Deren Abstand von einander sei gleich l. Bringt eine Belastung P der Stabmitte daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaſsstab; Kathetometer), so ist

$$E = \frac{1}{4}\frac{l^3}{a^3 b}\frac{P}{h}.$$ $3r^4\pi$

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung P der Mitte bewirke den Neigungswinkel φ eines Endquerschnittes, so ist

$$E = \frac{3}{4}\frac{l^2}{a^3 b}\frac{P}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Zur Messung von φ verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (**48. 49**). Besser ist die Beobachtung beider Enden und die Mittelnahme. Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, aber etwas schief stellen, so daſs das Licht der Skale von dem einen zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird (A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886). Fernrohr und Skale stehen jetzt natürlich einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg}\varphi = n/(4A+2d)$.

P ist in kg-Gewichten, alle Längen sind in mm auszudrücken (S. 149).

Die Formeln setzen relativ zur Länge kleine Senkungen voraus. — Man hat sich auch hier zu überzeugen, daſs nach Entfernung des Gewichtes die frühere Gestalt sich herstellt. — Kleine Querschnitte werden durch Wägung bestimmt (S. 151).

Wenn die Höhe a des Stabes nicht gegen die Länge l zu vernachlässigen ist, so ist das nach den obigen Formeln berechnete E noch zu multipliciren mit $1+3a^2/l^2$.

Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878.

Beweise für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien, vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen" Schicht, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun s der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht, nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $s\cdot d^2y/dx^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke ds sucht sich also mit der Kraft $Esb\cdot ds\cdot d^2y/dx^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+s$ und $-s$ zusammen ein Drehungsmoment $2Ebs^2\cdot ds\cdot d^2y/dx^2$. Das von einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehungsmoment ist also

$$2Eb\frac{d^2y}{dx^2}\int_0^{a/2} s^2 ds = Eb\frac{a^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dieses elastische Drehungsmoment muſs dem von dem angehängten Gewicht an der Stelle ausgeübten Moment $P(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}(l-x), \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right) \text{ und}$$

$$y = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3b}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Hieraus ergibt sich die Neigung $\operatorname{tg}\Phi$ und die Senkung H am Ende $(x=l)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \operatorname{tg} \Phi = \frac{6}{E} \frac{Pl^2}{a^3 b}, \quad y_l = H = \frac{4}{E} \frac{Pl^3}{a^3 b},$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da nun ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}P$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\operatorname{tg} \varphi$ 8 mal, die Senkung h 16 mal kleiner als $\operatorname{tg} \Phi$ und H.

Andere Querschnitte. Faſst man den Querschnitt als eine Platte auf, welche in der Flächeneinheit die Masseneinheit besäſse, so ist $\frac{1}{12}a^3 b$ das „Trägheitsmoment des Querschnittes" von reckteckiger Form bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale (**54**). Bezeichnen wir dieses mit K, so kann man also schreiben

$$E = \tfrac{1}{3} \frac{1}{H} \frac{Pl^3}{K} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{48} \frac{1}{h} \frac{Pl^3}{K}.$$

In dieser Form gelten die Gleichungen für Stäbe von beliebigem Querschnitt, wenn die Horizontale eine Hauptaxe ist. Z. B. ist das „Trägheitsmoment des Kreises" gleich $\frac{1}{4}r^4\pi$, woraus die obigen Formeln für den Kreisquerschnitt folgen.

Über den Einfluſs der Struktur auf Elasticitäts-Bestimmungen und über Elasticitätsmoduln krystallinischer Körper vgl. die Arbeiten von W. Voigt in Wied. Ann. und Gött. Nachr.

36. Torsionsmodul aus Schwingungen.

Die elastische Direktionskraft (Anh. 9) der Torsion auf einen am Drahte von der Länge l und dem Halbmesser r cm aufgehangenen Körper, wenn $[F]$ den Torsionsmodul im [C-G-S]-System bedeutet, beträgt $\frac{1}{2}\pi[F]r^4/l \cdot [\mathrm{cm^2\,g\,sec^{-2}}]$.

Der Körper habe das Trägheitsmoment $K[\mathrm{cm^2 \cdot g}]$ **54**, bezogen auf den Draht als Drehungsaxe (**54**). Die Dauer der Torsionsschwingungen betrage t sec (**52**). Dann ist (Anh. 10)

$$[F] = 2\pi \frac{Kl}{t^2 r^4} [\mathrm{g \cdot cm^{-1} \cdot sec^{-2}}].$$

Die gebräuchliche technische Zahl erhält man mit r und l in mm und K in kg·mm², indem man auſserdem noch den Faktor 1/g = 1/9810 hinzufügt,

$$F = \frac{2\pi}{9810} \frac{Kl}{t^2 r^4} = 0{,}0006405 \frac{Kl}{t^2 r^4} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Für einen Cylinder vom Radius R und der Masse M mit vertikaler Axe als Schwingungskörper ist $K = \frac{1}{2}MR^2$.

Es ist ungefähr $F = 2/5\,E$; ferner, wie S. 150,

$$[F] = 98100000 \cdot F.$$

Erläuterung. Torsions- oder zweiter Elasticitätsmodul F. Man denke sich eine Platte von der Flächeneinheit mit einer zur Grundfläche senkrechten Geraden. Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Fläche wirke in ihrer eigenen Richtung eine Kraft k, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilt. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen einen kleinen Winkel δ bilden. Dann ist F das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = F\delta$.

Verhältnis von F zu E. Bei der elastischen Ausdehnung eines Stabes verkürzt sich der Durchmesser. Ist l die Länge, d der Durchmesser, δ dessen Verkürzung, welche die Verlängerung λ begleitet, setzen wir ferner das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$, so ist nach der Theorie $F = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}$. Erfahrungsgemäfs ist $0 < \mu < \frac{1}{2}$, also jedenfalls $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$. Für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ würde $F = \frac{2}{5}E$ sein. (Poisson. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elasticität §§ 3 und 92.)

Torsions-Drehungsmoment. Man denkt sich den Draht in dünne koncentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äufseren Durchmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Querschnitt um den Winkel φ, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\varphi\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Verschiebungswinkel δ der Schichten gegeneinander. Somit wird die Torsionselasticität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $F \cdot 2\pi\varrho d\varrho \cdot \varphi\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi F\varrho^3 d\varrho \cdot \varphi/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so dafs das ganze Drehmoment eines Drahtes von der Länge l und dem Halbmesser r bei einem Torsionswinkel φ beträgt:

$$2\pi F \frac{\varphi}{l}\int_0^r \varrho^3 d\varrho = F\frac{\pi r^4}{2l} \cdot \varphi.$$

Mit Hilfe von Anh. 9 und 10 ergibt sich hieraus die Schwingungsdauer t, wobei aber zu beachten ist, dafs zu dem Drehmoment der Faktor g hinzutritt, wenn man, wie bei der Elasticität, die Kräfte in Gewichten ausdrückt.

36a. Elastische Nachwirkung.

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung", folgt langsamer. Derselbe ist nach der Substanz sehr verschieden grofs. Bei Metallen und Glas kann er auf etwa 5%, bei organischen Körpern, wie Cocon oder Kautschuk, auf 30%, ja in niederer Temperatur bis zur gröfseren Hälfte der Deformation steigen.

Nachwirkung nach Deformationen. Diese sind am leichtesten zu beobachten. Die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, tordirt gewesen war, stellt sich erst mit der Zeit wieder her.

Es sei s die zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch bestehende Deformation. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-ds/dt$, welche dem Gesetz folgt

$$-\frac{ds}{dt}=a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also } s=C\cdot e^{-p.t^{1-n}}, \qquad \text{I.}$$

wenn $p=a/(1-n)$ ist. n wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderungen; nach kurzer Dauer allgemein, für Ausdehnungen auch nach längerer Dauer, ist $n=$ nahe 1. In diesem Falle also ist

$$-\frac{ds}{dt}=a\frac{s}{t}, \quad \text{also } s=\frac{c}{t^a}. \qquad \text{II.}$$

Für die ersten Augenblicke gilt die Formel nicht mehr. a, welches die Geschwindigkeit des Verschwindens der Nachwirkung bedingt, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant. c, d. h. die zur Zeit 1 noch vorhandene Nachwirkung, ist der Gröfse der vorangegangenen Deformation bei gleicher Dauer derselben nahe proportional, wächst aber mit der Dauer.

Um die Gröfse und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bezeichnen, lasse man eine Deformation S 1 min lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1\, s_1$ und $t_2\, s_2$ kommt $a=\frac{\log s_1-\log s_2}{\log t_2-\log t_1}$ und $c=t_1^a\cdot s_1$ oder $=t_2^a\cdot s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich; vgl. auch **3.** c/S gibt die relative Gröfse der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung mufs die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Gröfse zu geben. Dann gilt aber für Torsion der Wert $n = 1$ nicht mehr, sodafs man die umständlichere Formel I nehmen mufs.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einflufs. Bei harten Körpern wächst die Nachwirkung c mit der Temperatur. a aber wird wenig beeinflufst. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur gröfser.

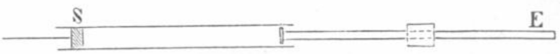
Die Beobachtung ist für Torsion unter Anwendung der Spiegelablesung (**48**; **49**) einfach. Man dämpft den an den Draht gehängten Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (**7**, 29) und erteilt die Drehungen oben oder unten. Für genaue Längsnachwirkungen an Metallen werden sehr lange Drähte, empfindliche Ablesungsvorrichtungen und endlich, um die Wärmeausdehnung in Rechnung zu setzen, genaue Temperaturbeobachtungen gefordert.

Die Schwierigkeit, dafs dauernde Gestaltsänderungen vermieden werden, wird verringert, indem man vor der Beobachtung eine gröfsere Deformation gibt, dann natürlich hinreichend lange wartet.

37. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch Staubfiguren (Kundt).

Die Schallgeschwindigkeit in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}00367\,t}$ m/sec. Auf mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur näherungsweise Rücksicht genommen, indem man 0,004 statt 0,00367 setzt (**15**).

Schallgeschwindigkeit in festen Körpern. Dieselbe läfst sich für Stäbe oder Röhren, die man longitudinal anreibt, auf die obige Zahl zurückführen. Der Stab wird horizontal gelegt und mit seiner Mitte fest eingeklemmt. Das



eine Ende E wird longitudinal gerieben (S. 153), das andere ragt in eine, mindestens 25 mm weite, am hinteren Ende durch einen dicht schliefsenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen oder Korkstaub oder Kieselsäure enthält. Beim Anreiben des Stabes erzeugen die Stöfse des freien Endes in der Glasröhre stehende Luft-Schwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet sich leicht die richtige Stellung, bei welcher das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschliefsen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöfse an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Staubwelle, L die Länge des geriebenen Stabes, so ist die Schallgeschwindigkeit im Stabe

$$u = 331 \cdot \sqrt{1 + 0{,}004\, t} \cdot \frac{L}{l} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}},$$

der gewöhnliche Elasticitätsmodul also (S. 153)

$$E = \frac{u^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\mathrm{mm}^2},$$

wo s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Um eine genaue Länge der Staubwelle zu erhalten, mifst man den Abstand zweier um mehrere (n) Wellenlängen auseinander liegender Schwingungsknoten und dividirt den Abstand durch n. Über die Rechnung bei einer gröfseren Anzahl von gemessenen Knotenpunkten vgl. **3** II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staubwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase war also $331 \sqrt{1 + 0{,}004 \cdot 17} \cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sec; und der Elasticitätsmodul des Glases $E = 4890^2 \cdot 2{,}7/9810 = 6580$ kg-Gewicht/mm².

Schallgeschwindigkeit in Gasen. Den Wellenlängen, welche ein und derselbe geriebene Stab in verschiedenen Gasen gibt, sind selbstverständlich die Schallgeschwindigkeiten proportional.

Allgemein hat man folgende Beziehungen. Bedeutet

h den in Quecksilber von 0° gemessenen Gasdruck,

σ das specifische Gewicht des Gases,

σ_0 dasselbe bei 0° und 0,76 m Druck,

t die Temperatur,

c' und c die specifische Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen (Tab. 36),

$g = 9{,}810\ \mathrm{m/sec^2}$ die Fallbeschleunigung,

so wird die Schallgeschwindigkeit U gegeben durch die Formel

$$U^2 = \frac{gh \cdot 13{,}596}{\sigma} \cdot \frac{c'}{c} = 9{,}810 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}596 \, \frac{1+0{,}00367t}{\sigma_0} \cdot \frac{c'}{c}$$

$$= 101{,}37 \cdot \frac{1+0{,}00367t}{\sigma_0} \cdot \frac{c'}{c}.$$

Diese Beziehungen können dazu dienen, entweder die Schallgeschwindigkeit in einem Gase von bekanntem σ_0 und c'/c zu berechnen, oder umgekehrt aus der beobachteten Schallgeschwindigkeit auf die Dichtigkeit oder das Verhältnis der specifischen Wärmen zu schliefsen.

37a. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

1. Graphisch. Um die Schwingungszahl zu bestimmen, kann man den tönenden Körper mittels einer angeklebten leichten biegsamen Spitze auf eine fortbewegte berufste Fläche (z. B. Walze mit einer Spindel-Axe) eine Sinuskurve schreiben lassen. Während dessen zeichnet eine Vorrichtung neben diese Kurve Marken in bekanntem Takte. Die Anzahl der Wellen, welche zwischen zwei oder mehreren Zeitmarken liegen, wird dann abgezählt. Über die Berechnung vgl. auch **3** II.

Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschlufs (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschlufs geht durch die innere Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der äufseren Rolle mit der berufsten Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind. Die Induktionsfunken durch die Schreibspitze geben dann die Marken ab.

Auch kann man eine Stimmgabel von schon bekannter Schwingungszahl neben die zu bestimmende schreiben lassen und die Wellen abzählen.[1])

1) Normal-Stimmgabeln werden von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geaicht.

Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Rufs eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze.

S. Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

2. Stroboskopisch. Man regulirt die Umdrehungsgeschwindigkeit einer stroboskopischen Scheibe so, dafs die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder etc., mit blofsem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Scheibe betrachtet, scheinbar still steht. Erblickt man mehrere ruhende Bilder des schwingenden Körpers, so mäfsigt man die Geschwindigkeit weiter, bis ein einfaches Bild erscheint, oder man dividirt das Resultat noch durch die Anzahl der Bilder. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sec, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = m \cdot k$. Die Umdrehungszahl erhält man entweder mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läfst, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades im Uhrwerke.

Bequemer und auch genauer ist es, die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit zu reguliren, dafs noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sec. s stroboskopische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS \pm s)/t$, und zwar $+$, wenn bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

3. Mit der Sirene. Man erhält eine Sirene mit Zählerwerk auf der Höhe des Tones und zählt die Umdrehungen während einer Anzahl von Sekunden. Durch häufige Wiederholung kann eine brauchbare Zahl entstehen.

4. Schwebungen. Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich aus der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie mit einander geben. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weifs man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig

vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton der höhere und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden.

5. Monochord. Eine gespannte weiche Saite von der Länge l m, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das Gewicht p hat, gibt die Schwingungszahl ihres Grundtons

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Die eigene Elasticität der Saite macht die Schwingungszahl etwas gröfser. Dünner Messingdraht ist am geeignetsten.