universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus

Jaumann, Gustav

Leipzig, 1905

Dritter Teil. Bewegung der deformierbaren Medien

urn:nbn:at:at-ubi:2-6147

Dritter Teil.

Bewegung der deformierbaren Medien.

Die partiellen Derivationen eines Vektors nach einem Vektor.

347. Wir kennen bereits die totalen Derivationen einer Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ nach dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$. Es sind dies die Hamiltonsche skalare Dyade Φ^s und die in § 96 definierte rotorische Dyade Φ^r, sowie die beiden konjugierten Dyaden

$$\Phi^s \overset{9}{=} \nabla ; \mathfrak{v} \qquad \Phi^s_c \overset{9}{=} \mathfrak{v} ; \nabla \qquad \Phi^r \overset{9}{=} \nabla \times \mathfrak{v} \qquad \Phi^r_c \overset{9}{=} \mathfrak{v} \times \nabla .$$

Alle vier Dyaden können nach Belieben gebraucht werden, um die Änderung der allgemeinen Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ bei Änderung des unabhängig veränderlichen Ortsvektors $\mathfrak{r}$ anzugeben, doch eignen sich hierzu besonders die skalaren Dyaden, weil

(a) $$d\mathfrak{v} \overset{5}{=} d\mathfrak{r} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \qquad d\mathfrak{v} \overset{3}{=} \mathfrak{v} ; \nabla \cdot d\mathfrak{r} .$$

Hierzu kommen noch die symmetrischen derivierten Dyaden, welche eine weniger unmittelbare analytische, aber eine höhere physikalische Bedeutung haben.

Alle diese Dyaden sind zwar in symbolischer Form (unter Benutzung des Operators ∇) geschrieben, sind aber nicht etwa selbst symbolische Operatoren, sondern reelle, ihrer Größe, Form und Lage nach für jeden Punkt des Feldes angebbare Gebilde.

348. Das Produkt der skalaren derivierten Dyaden der Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ mit irgend einem Vektor $\mathfrak{a}$ stellt die partielle Änderung des Vektors $\mathfrak{v}$ auf der Strecke $\mathfrak{a}$ dar, d. h. die Differenz der Werte von $\mathfrak{v}$ an den Endpunkten dieser Strecke, vorausgesetzt, daß es sich um ein homogenes Vektorfeld, in welchem die Dyade konstant ist, handelt. In einem

ungleichförmigen Felde muß statt der Strecke $\mathfrak{a}$ die Strecke $\mathfrak{a}\, d\varepsilon$, worin $d\varepsilon$ eine unendlich kleine Zahl ist, und der Wert der variablen Dyade an dem Orte dieser Strecke betrachtet werden. Ist $d\mathfrak{v}$ die Differenz der Werte von $\mathfrak{v}$ in dem Pfeilpunkt und Anfangspunkt der Strecke $\mathfrak{a}\, d\varepsilon$, so ist $\frac{d\mathfrak{v}}{d\varepsilon}$ die partielle Änderung von $\mathfrak{v}$ auf der Strecke $\mathfrak{a}$, und zwar ist nach 347.(a)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\varepsilon} \overset{3}{=} \mathfrak{a} \cdot \nabla ; \mathfrak{v},$$

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\varepsilon} \overset{3}{=} \mathfrak{v} ; \nabla \cdot \mathfrak{a}.$$

349. Nicht weniger wichtig sind die aus den rotorischen Dyaden abgeleiteten partiellen Derivationen. Es ist nach § 53

$$\mathfrak{v} ; \nabla - \nabla ; \mathfrak{v} \overset{9}{=} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times I \overset{9}{=} \nabla \times \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \times \nabla,$$

$$\nabla ; \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \times \nabla \overset{9}{=} \operatorname{div} \mathfrak{v} \quad I \overset{9}{=} \mathfrak{v} ; \nabla - \nabla \times \mathfrak{v},$$

worin

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla \times \mathfrak{v} \overset{3}{=} - \mathfrak{v} \times \nabla \overset{3}{=} \Phi_r^s$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \overset{1}{=} \nabla \cdot \mathfrak{v} \overset{1}{=} \quad \mathfrak{v} \cdot \nabla \overset{1}{=} \Phi_s^s$$

der Rotor und Skalar der Hamiltonschen Dyade sind. Es gibt dies die Beziehungen zwischen den vier partiellen Derivationen

$$\mathfrak{v} ; \nabla \cdot \mathfrak{a} - \nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} \overset{3}{=} (\operatorname{rot} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{a} \overset{3}{=} \nabla \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} - \mathfrak{v} \times \nabla \cdot \mathfrak{a},$$

$$\nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} - \mathfrak{v} \times \nabla \cdot \mathfrak{a} \overset{3}{=} (\operatorname{div} \mathfrak{v}) \quad \mathfrak{a} \overset{3}{=} \mathfrak{v} ; \nabla \cdot \mathfrak{a} - \nabla \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}.$$

350. Es ist möglich und oft von Vorteil, die vier partiellen dyadischen Derivationen durch die Derivationen rot und div auszudrücken, wobei aber auch von den sehr anschaulichen Werten: dem Rotor eines rotorischen Produktes

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a}) \overset{3}{=} \nabla \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})$$

und dem Gradienten eines skalaren Produktes

$$\operatorname{grad} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} \overset{3}{=} \nabla \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a}$$

Gebrauch gemacht werden muß. Es ist

$$2\,\mathfrak{a} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \overset{3}{=} \mathfrak{a} \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{a} \quad \mathfrak{v} + \operatorname{grad} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} -$$
$$- \mathfrak{a} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} + (\operatorname{rot} \mathfrak{a}) \times \mathfrak{v} - \operatorname{rot} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}),$$

$$2\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} ; \nabla \overset{3}{=} \mathfrak{a} \quad \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{a} \quad \mathfrak{v} + \operatorname{grad} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} +$$
$$+ \mathfrak{a} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v} + (\operatorname{rot} \mathfrak{a}) \times \mathfrak{v} - \operatorname{rot} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}),$$

$$2\mathfrak{a}\cdot\nabla\times\mathfrak{v} \overset{3}{=} -\mathfrak{a}\ \operatorname{div}\mathfrak{v} - \operatorname{div}\mathfrak{a}\ \ \mathfrak{v} + \operatorname{grad}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{v} +$$
$$+\ \ \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v} + (\operatorname{rot}\mathfrak{a})\times\mathfrak{v} - \operatorname{rot}\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{v}),$$
$$2\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{v}\times\nabla \overset{3}{=} -\mathfrak{a}\ \operatorname{div}\mathfrak{v} - \operatorname{div}\mathfrak{a}\ \ \mathfrak{v} + \operatorname{grad}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{v} -$$
$$-\ \ \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v} + (\operatorname{rot}\mathfrak{a})\times\mathfrak{v} - \operatorname{rot}\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{v}).$$

351. Nun wollen wir die vier partiellen dyadischen Derivationen auch in analytischer Form darstellen. Die analytischen Werte der neun Koeffizienten der vier derivierten Dyaden sind schon in § 97 angegeben worden. Bei dieser Gelegenheit mögen auch die bisher üblichen Deutungen der ersten drei partiellen Derivationen mitgeteilt werden.

352. Die *skalare Derivation* $\mathfrak{a}\cdot\nabla;\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{a}$ hat die Komponenten

$$a_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + a_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + a_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \overset{1}{=} \mathfrak{a}\cdot\nabla v_x,$$
$$a_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + a_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + a_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \overset{1}{=} \mathfrak{a}\cdot\nabla v_y,$$
$$a_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + a_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \overset{1}{=} \mathfrak{a}\cdot\nabla v_z.$$

Es ist allgemein üblich, diese Derivation in der Form

$$(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}$$

darzustellen, worin

$$(\mathfrak{a}\cdot\nabla) \overset{1}{=} a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

ein neuer symbolischer skalarer Operator ist, der nicht mit der Divergenz von $\mathfrak{a}$ verwechselt werden dürfte. Diese Darstellung kann man aber nicht empfehlen. Die partielle Derivation $\mathfrak{a}\cdot\nabla;\mathfrak{v}$ ist selbst ein realer (nicht symbolischer) Vektor und kann dargestellt werden als das Produkt des realen Vektors $\mathfrak{a}$ und der realen Dyade $\nabla;\mathfrak{v}$, welche kein Symbol, sondern eine geometrische oder physikalische Größe ist. Es hat gar keinen Zweck, dieses reale Produkt in einen symbolischen Operator $(\mathfrak{a}\cdot\nabla)$ und den nicht derivierten Vektor $\mathfrak{v}$ zu zerlegen.

353. Die *konjugierte skalare Derivation* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{v};\nabla$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{a}$ hat die Komponenten

$$a_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial r_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = (\nabla_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})_x,$$
$$a_x \frac{\partial r_x}{\partial y} + a_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial v_z}{\partial y} = (\nabla_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})_y,$$
$$a_x \frac{\partial r_x}{\partial z} + a_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + a_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = (\nabla_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})_z.$$

Man pflegt nach Foeppl die Derivation

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} ; \nabla \overset{3}{=} \nabla_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}$$

als den partiellen Gradienten des Produktes $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{v}$ zu bezeichnen, was aber nicht das Wesen dieser Derivation, sondern nur eine spezielle Anwendungsweise derselben charakterisiert.

354. Die *rotorische Derivation* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} \times \nabla$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{a}$ hat die Komponenten

$$-a_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + a_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \left(\nabla_{\mathfrak{v}} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})\right)_x.$$
$$a_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - a_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + a_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \left(\nabla_{\mathfrak{v}} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})\right)_y,$$
$$a_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial v_z}{\partial y} - a_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \left(\nabla_{\mathfrak{v}} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})\right)_z.$$

Man pflegt nach Foeppl diese Derivation

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} \times \nabla \overset{3}{=} \nabla_{\mathfrak{v}} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})$$

als den partiellen Rotor des Produktes $(\mathfrak{v} \times \mathfrak{a})$ nach $\mathfrak{v}$ zu bezeichnen, was aber wieder nur eine Anwendung dieser Derivation, nicht aber diese selbst ausreichend charakterisiert.

355. Die *konjugierte rotorische Derivation* $\mathfrak{a} \cdot \nabla \times \mathfrak{v}$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{a}$ hat die Komponenten

$$-a_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + a_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial v_z}{\partial x},$$
$$a_x \frac{\partial v_x}{\partial y} - a_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + a_z \frac{\partial v_z}{\partial y},$$
$$a_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + a_y \frac{\partial v_y}{\partial z} - a_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right).$$

Man könnte diese Derivation in der Form

$$(\mathfrak{a} \times \nabla) \times \mathfrak{v}$$

darstellen, worin

$$(\mathfrak{a} \times \nabla) \overset{3}{=} \begin{cases} \left(a_z \dfrac{\partial}{\partial y} - a_y \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{k} \times \mathfrak{j} + \\ \left(a_x \dfrac{\partial}{\partial z} - a_z \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \mathfrak{i} \times \mathfrak{k} + \\ \left(a_y \dfrac{\partial}{\partial x} - a_x \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \mathfrak{j} \times \mathfrak{i} \end{cases}$$

ein neuer symbolischer vektorischer Operator ist, welcher nicht mit dem rot $\mathfrak{a}$ verwechselt werden dürfte. Es hätte aber wieder keinen Zweck, das Produkt der realen Faktoren $\mathfrak{a}$ und $(\nabla \times \mathfrak{v})$, von welchen letzterer eine Derivation von $\mathfrak{v}$ darstellt, in das Produkt eines symbolischen Operators $(\mathfrak{a} \times \nabla)$ und des nicht derivierten Vektors $\mathfrak{v}$ zu verwandeln.

356. Die *symmetrischen Derivationen.* Die bereits angeführten Derivationen sind von elementarer geometrischer Bedeutung. Von viel höherer physikalischer Wichtigkeit sind aber die hieraus abzuleitenden symmetrischen Derivationen. Es ist

$$2\,[\nabla\,;\mathfrak{v}] \overset{9}{=} \nabla\,;\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\,;\nabla$$

die skalare symmetrische Dyade und

$$2\,[\nabla \times \mathfrak{v}] \overset{9}{=} \nabla \times \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \times \nabla$$

die rotorische symmetrische Dyade der Vektorverteilung $\mathfrak{v}$.

Zwischen beiden bestehen die Beziehungen

$$[\nabla\,;\mathfrak{v}] - [\nabla \times \mathfrak{v}] \overset{3}{=} I \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

also zwischen den symmetrischen partiellen Derivationen

$$\mathfrak{a} \cdot [\nabla\,;\mathfrak{v}] - \mathfrak{a} \cdot [\nabla \times \mathfrak{v}] \overset{3}{=} \mathfrak{a} \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

357. *Der zweite Skalar der derivierten Dyade* $\nabla\,;\mathfrak{v}$, welcher der erste Skalar des Quadrates der symmetrischen Dyade $[\nabla\,;\mathfrak{v}]$ ist und eine große physikalische Bedeutung hat, läßt sich in folgender Weise entwickeln

(a) $$[\nabla\,;\mathfrak{v}]_s^2 \overset{1}{=} \operatorname{div} \mathfrak{v} \cdot \nabla\,;\mathfrak{v} - \mathfrak{v} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2.$$

358. Die *skalare symmetrische Derivation* $\mathfrak{a} \cdot [\nabla\,;\mathfrak{v}]$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{a}$ läßt sich durch die Derivationen div und rot wie folgt darstellen

$$2\,\mathfrak{a} \cdot [\nabla\,;\mathfrak{v}] \overset{3}{=} \mathfrak{a} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{a}\mathfrak{v} + \operatorname{grad} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} + (\operatorname{rot} \mathfrak{a}) \times \mathfrak{v} - \operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}).$$

Die rotorische symmetrische Derivation $\mathfrak{a} \cdot [\nabla \times \mathfrak{v}]$ läßt sich darstellen durch

$$2\,\mathfrak{a} \cdot [\nabla \times \mathfrak{v}] \overset{3}{=} -\mathfrak{a} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{a}\mathfrak{v} + \operatorname{grad} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} + (\operatorname{rot} \mathfrak{a}) \times \mathfrak{v} - \operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}).$$

Die analytischen Komponenten dieser symmetrischen Derivationen sind für die skalare Derivation

$$a_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tfrac{1}{2} a_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad + \tfrac{1}{2} a_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\tfrac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad + a_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad + \tfrac{1}{2} a_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right),$$

$$\tfrac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad + \tfrac{1}{2} a_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad + a_z \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

und für die rotorische Derivation

$$- a_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \tfrac{1}{2} a_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tfrac{1}{2} a_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\tfrac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - a_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \tfrac{1}{2} a_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right),$$

$$\tfrac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \tfrac{1}{2} a_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - a_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right).$$

Derivationen von Produkten und partielle Integrationen.

359. Erfahren zwei Werte (Skalare, Vektoren oder Dyaden usw.) unendlich kleine Änderungen, so kommen zu dem (algebraischen, skalaren, rotorischen, dyadischen usw.) Produkte derselben zwei additive Glieder, welche die entsprechenden Produkte je einer Änderung des einen Wertes mit dem anderen Werte sind, während das Produkt beider Änderungen als unendlich klein von höherer Ordnung vernachlässigt werden kann.

Ist t eine skalare Variable, so ist also

$$\frac{d}{dt}(a\,b) = a \left(\frac{d}{dt} b \right) + \left(\frac{d}{dt} a \right) b,$$

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \overset{5}{=} \mathfrak{a}, \left(\frac{d}{dt} \mathfrak{b} \right) + \left(\frac{d}{dt} \mathfrak{a} \right), \mathfrak{b} \text{ u. s. f.}$$

Man kann den Operator $\frac{d}{dt}$ als skalaren Faktor betrachten. Die Multiplikation mit demselben wird zunächst nach der Assoziationsregel ausgeführt, so daß nur ein Faktor mit dem Operator multipliziert erscheint, hierzu wird nach Kommutation des Produktes der symmetrische, ebenfalls nach der Assoziationsregel erhaltene Wert gebildet und addiert, in welchem der andere Faktor mit dem Operator multipliziert erscheint.

Diese Differentiationsregel von Produkten gilt auch für den vektorischen Differentialoperator ∇.

360. *Der Gradient des Produktes zweier Skalare* s_1 und s_2 läßt sich folgendermaßen entwickeln

$$\nabla (s_1 s_2) \overset{3}{=} s_1 (\nabla s_2) + (\nabla s_1) s_2$$

oder

(a) $$\operatorname{grad} (s_1 s_2) \overset{3}{=} s_1 \operatorname{grad} s_2 + s_2 \operatorname{grad} s_1 .$$

361. *Rotor und Divergenz eines Fluktors.* Wenn eine skalare Verteilung s und eine Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ im selben Felde gegeben ist, so bezeichnen wir den Vektor $(s\,\mathfrak{v})$ als einen Fluktor des Vektors $\mathfrak{v}$. Die Einführung dieses Namens (den man auf manche lineare Vektorfunktionen übertragen könnte) empfiehlt sich deshalb, weil neben allen physikalischen Vektorverteilungen in inhomogenen Medien auch die Verteilung eines Fluktors von gleicher Wichtigkeit ist, welcher in isotropen Medien dem Vektor überall gleichgerichtet, aber nicht gleich ist.

Die derivierte Dyade eines Fluktors wird in folgender Weise entwickelt

(a) $$\nabla ; s\,\mathfrak{v} \overset{9}{=} s \nabla ; \mathfrak{v} + \nabla s ; \mathfrak{v} .$$

Hieraus folgen entsprechende Sätze über den Skalar und Rotor dieser Dyade, und zwar gilt für dir Divergenz eines Fluktors die Regel

$$\nabla \cdot s\,\mathfrak{v} \overset{1}{=} s \nabla \cdot \mathfrak{v} + \nabla s \cdot \mathfrak{v}$$

oder

(b) $$\operatorname{div} s\,\mathfrak{v} \overset{1}{=} s \operatorname{div} \mathfrak{v} + \operatorname{grad} s \cdot \mathfrak{v} .$$

Der Rotor eines Fluktors entwickelt sich ebenso, doch muß man hier auf die Reihenfolge der Faktoren genau achten

$$\nabla \times s\,\mathfrak{v} \overset{3}{=} s \nabla \times \mathfrak{v} + \nabla s \times \mathfrak{v} .$$

Es ist also

(c) $$\operatorname{rot} s\,\mathfrak{v} \overset{3}{=} s \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \operatorname{grad} s \times \mathfrak{v} .$$

362. *Der Fluktor eines Gradienten.* Obgleich ein Fluktor überall dieselbe Richtung hat wie der Vektor, aus welchem er gebildet wurde, so ist er doch wesentlich anders als dieser verteilt, wenn der Skalar nicht überall im Felde denselben Wert hat.

Wenn der Vektor $\mathfrak{v}$ z. B. keinen Rotor hat, also der Gradient eines skalaren Potentials s_1 ist

$$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla s_1 , \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} 0 ,$$

so hat der Fluktor $s_2 \mathfrak{v}$ nach 361. (c) den Rotor

$$\operatorname{rot} s_2 \mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla s_2 \times \nabla s_1$$

also kein Potential, wenn nicht die beiden Gradienten ∇s_2 und ∇s_1 überall parallel sind.

Immerhin ist überall der Fluktor $(s_2 \nabla s_1)$ dem Vektor ∇s_1 parallel, und da dieser Niveauflächen hat, so hat der Fluktor eines Gradienten stets Orthogonalflächen.

Man kann eine ganz allgemeine Vektorverteilung, die also keine Orthogonalflächen hat, zerlegen in einen Gradienten ∇s_3 und in den Fluktor eines Gradienten $s_2 \nabla s_1$

(a) $$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla s_3 + s_2 \nabla s_1 .$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ Orthogonalflächen habe, ist, daß die Gradienten der drei Skalare $s_1 s_2 s_3$ koplanar sind

(b) $$\nabla s_3 \cdot \nabla s_2 \times \nabla s_1 \overset{0}{=} 0 .$$

Da

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla s_2 \times \nabla s_1 ,$$

so läßt sich die Bedingung (b) auch in die Form bringen

(c) $$\mathfrak{v} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{1}{=} 0 ,$$

in welcher wir sie schon kennen. Es muß der Rotor auf dem Vektor senkrecht stehen, damit dieser Orthogonalflächen habe.

Man kann den allgemeinen Vektor $\mathfrak{v}$ auch in folgender Form durch drei Skalarverteilungen $a_1 a_2 a_3$ darstellen

(d) $$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \nabla a_3 + \nabla a_2 \times \nabla a_1 .$$

Von diesen zwei Komponenten hat ∇a_3 keinen Rotor und das skalare Potential a_3, während die Komponente $\nabla a_2 \times \nabla a_1$ keine Divergenz und das vektorische Potential $a_2 \nabla a_1$ hat.

363. *Das Oberflächenintegral eines Skalars.* Es sei p eine gegebene Skalarverteilung, $\mathfrak{c}$ ein konstanter Vektor. Weil $\operatorname{div} \mathfrak{c} \overset{1}{=} 0$, so folgt aus 361. (b)

$$\operatorname{div} p \mathfrak{c} \overset{1}{=} \mathfrak{c} \cdot \operatorname{grad} p .$$

Multipliziert man mit dem Raumelement $d\varphi$ und integriert über den Raum φ, wobei der Gausssche Integralsatz angewendet werden kann, so ergibt sich, wenn $\mathfrak{o}$ die Oberfläche des Raumes φ ist

$$\int_{\mathfrak{o}} p\,\mathfrak{c}\cdot d\mathfrak{o} \doteq \int_{\varphi} \operatorname{div} p\,\mathfrak{c}\,d\varphi \doteq \int_{\varphi} \mathfrak{c}\cdot \operatorname{grad} p\,d\varphi .$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von $\mathfrak{c}$ gelten muß, und dieser konstante Vektor vor das Integralzeichen gehoben werden kann, so folgt

(a) $$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o}\,p \overset{s}{=} \int_{\varphi} d\varphi \operatorname{grad} p .$$

Das Raumintegral eines Gradienten ist gleich dem Oberflächenintegral seines Potentials p. Dieser Satz findet in der Hydrodynamik Anwendung.

364. *Das Linienintegral eines Skalars (nach Foeppl).* Andererseits ist nach 361.(c)

$$\operatorname{rot} p\,\mathfrak{c} = \operatorname{grad} p \times \mathfrak{c} .$$

Integrieren wir (unter Anwendung des Stokesschen Satzes) das skalare Produkt obiger Werte mit dem Flächenelement $d\mathfrak{f}$ über eine vom Umfange $\mathfrak{u}$ begrenzte Fläche $\mathfrak{f}$

$$\int_{\mathfrak{u}} p\,\mathfrak{c}\cdot d\mathfrak{u} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{rot} p\,\mathfrak{c}\cdot d\mathfrak{f} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{grad} p \times \mathfrak{c}\cdot d\mathfrak{f} .$$

Es ist also

$$\mathfrak{c}\cdot\int_{\mathfrak{u}} p\,d\mathfrak{u} \doteq \mathfrak{c}\cdot\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f}\times \operatorname{grad} p$$

oder weil dies für jeden Wert von $\mathfrak{c}$ gilt

(a) $$\int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u}\,p \overset{s}{=} \int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f}\times \operatorname{grad} p .$$

Das Linienintegral eines Skalars ist gleich dem vektorischen Flächenintegral des Gradienten dieses Skalars. Dieser Satz findet Anwendung bei der Bestimmung magnetischer Drehmomente usw.

365. *Der Greensche Integralsatz.* Wendet man den Gaussschen Integralsatz auf den Fluktor eines Gradienten $s_1 \nabla s_2$ an, so ergibt sich der Greensche Integralsatz

$$\text{(a)} \qquad \int_{\varphi} \operatorname{div} s_1 \nabla s_2 \overset{1}{=} \int_{\mathfrak{o}} s_1 \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{o}\,.$$

Es ist

$$\operatorname{div} s_1 \nabla s_2 - s_1 \nabla^2 s_2 \overset{1}{=} \nabla s_1 \cdot \nabla s_2\,,$$

aber auch

$$\operatorname{div} s_2 \nabla s_1 - s_2 \nabla^2 s_1 \overset{1}{=} \nabla s_2 \cdot \nabla s_1\,.$$

Also kann der Greensche Satz in folgenden zwei Formen dargestellt werden

$$\int_{\mathfrak{o}} s_1 \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{o} - \int_{\varphi} s_1 \nabla^2 s_2 \, d\varphi \overset{1}{=} \int_{\varphi} \nabla s_1 \cdot \nabla s_2 \, d\varphi$$

$$\overset{1}{=} \int_{\mathfrak{o}} s_2 \nabla s_1 \cdot d\mathfrak{o} - \int_{\varphi} s_2 \nabla^2 s_1 \, d\varphi\,.$$

Diese Form ist sehr verwendbar. Wir wollen noch einige Integralsätze für Vektorfelder mit Orthogonalflächen ableiten.

366. Wenden wir den Stokesschen Integralsatz auf den Fluktor eines Gradienten an

$$\int_{\mathfrak{f}} \operatorname{rot} s_1 \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{f} \overset{1}{=} \int_{\mathfrak{u}} s_1 \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{u}\,.$$

Es ist

$$\operatorname{rot} s_1 \nabla s_2 \overset{3}{=} \nabla s_1 \times \nabla s_2 \overset{3}{=} -\operatorname{rot} s_2 \nabla s_1$$

und wir erhalten den Integralsatz

$$\text{(a)} \qquad \int_{\mathfrak{u}} s_1 \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{u} \overset{1}{=} \int_{\mathfrak{f}} \nabla s_1 \times \nabla s_2 \cdot d\mathfrak{f} \overset{1}{=} -\int_{\mathfrak{u}} s_2 \nabla s_1 \cdot d\mathfrak{u}\,.$$

367. *Kelvins Integralsatz.*[1]) Es ist

$$\operatorname{div} s_1 s_2 \nabla s_3 - s_1 \nabla \cdot s_2 \nabla s_3 \overset{1}{=} s_2 \nabla s_1 \cdot \nabla s_3$$

und

$$\operatorname{div} s_3 s_2 \nabla s_1 - s_3 \nabla \cdot s_2 \nabla s_1 \overset{1}{=} s_2 \nabla s_3 \cdot \nabla s_1,$$

also erhält man

[1]) Siehe Gibbs, Vektoranalysis. New York 1901, S. 251.

$$(a)\quad \begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{d}} s_1 s_2 \nabla s_3 \cdot d\mathfrak{v} - \int\limits_{\varphi} s_1 \nabla \cdot s_2 \nabla s_3 \overset{1}{=} \int\limits_{\varphi} s_2 \nabla s_1 \cdot \nabla s_3 \\ \qquad\qquad \overset{1}{=} \int\limits_{\mathfrak{d}} s_3 s_2 \nabla s_1 \cdot d\mathfrak{v} - \int\limits_{\varphi} s_3 \nabla \cdot s_2 \nabla s_1 . \end{cases}$$

368. Ein anderer generalisierter Integralsatz ergibt sich aus

$$\operatorname{rot} s_1 s_2 \nabla s_3 - s_1 \nabla s_2 \times \nabla s_3 \overset{3}{=} s_2 \nabla s_1 \times \nabla s_3 ,$$
$$\operatorname{rot} s_3 s_2 \nabla s_1 - s_3 \nabla s_2 \times \nabla s_1 \overset{3}{=} - s_2 \nabla s_1 \times \nabla s_3 ,$$

woraus man erhält

$$(a)\quad \begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{u}} s_1 s_2 \nabla s_3 \cdot d\mathfrak{u} - \int\limits_{\mathfrak{f}} s_1 \nabla s_2 \times \nabla s_3 \cdot d\mathfrak{f} \overset{1}{=} \int\limits_{\mathfrak{f}} s_2 \nabla s_1 \times \nabla s_3 \cdot d\mathfrak{f} \\ \qquad\qquad \overset{1}{=} - \int\limits_{\mathfrak{u}} s_3 s_2 \nabla s_1 \cdot d\mathfrak{u} + \int\limits_{\mathfrak{f}} s_3 \nabla s_2 \times \nabla s_1 \cdot d\mathfrak{f} . \end{cases}$$

369. *Divergenz eines rotorischen Produktes.* Es ist nach der eingangs angeführten Differentiationsregel für Produkte, bei zweimaliger Anwendung der Assoziationsregel für skalare Tripelprodukte

$$\nabla \cdot \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \overset{1}{=} \nabla \times \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_2 \times \nabla \cdot \mathfrak{v}_1 .$$

Nun ist

$$\mathfrak{v}_2 \times \nabla = - \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 ,$$

also

$$(a)\qquad \operatorname{div} \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \overset{1}{=} \mathfrak{v}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 .$$

Diese Regel ist sehr wichtig und wir wollen sofort einige Anwendungen derselben machen.

Die Divergenz des rotorischen Produktes zweier Gradienten ist Null

$$\operatorname{div} \nabla s_1 \times \nabla s_2 \overset{1}{=} 0 .$$

Es darf also dieses rotorische Produkt dem Rotor eines Vektors gleichgesetzt werden

$$\nabla s_1 \times \nabla s_2 \overset{3}{=} \operatorname{rot} s_1 \nabla s_2 \overset{3}{=} - \operatorname{rot} s_2 \nabla s_1 .$$

Dies geschieht z. B. in der Differentialgleichung der kontaktelektromotorischen Wirkung.

370. *Darstellung eines Rotors als Differentialquotienten.* Es sei $\mathfrak{c}$ ein konstanter Vektor, dann folgt aus der eben angeführten Regel

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} \times \mathfrak{v} \overset{1}{=} - \mathfrak{c} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} .$$

Multiplizieren wir mit dem Raumelement $d\varphi$ und integrieren unter Anwendung des Gaussschen Satzes über den Raum φ, dessen Oberfläche $\mathfrak{o}$ ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{c} \cdot \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \times \mathfrak{c} \cdot d\mathfrak{o} \stackrel{1}{=} \int_{\varphi} \operatorname{div}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{c}) \stackrel{1}{=} \mathfrak{c} \cdot \int_{\varphi} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\varphi ,$$

und da dies für jeden Wert von $\mathfrak{c}$ gelten muß, so erhält man

(a) $$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} \stackrel{3}{=} \int_{\varphi} d\varphi \operatorname{rot} \mathfrak{v} .$$

Das vektorische Oberflächenintegral eines Vektors ist gleich dem Raumintegrale seines Rotors.

Bezeichnen wir das Oberflächenintegral durch

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}} \stackrel{3}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} .$$

Beziehen wir dasselbe auf ein Raumelement φ, so folgt

$$d\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}} \stackrel{3}{=} \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\varphi$$

oder

(b) $$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{3}{=} \frac{d\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}}{d\varphi} .$$

Der Rotor ist der Grenzwert des Verhältnisses des vektorischen Oberflächenintegrals des Vektors zu dem von der Oberfläche eingeschlossenen Volumen. Diese Definition ist vollkommen analog zu der Definition der Divergenz als algebraischen Differentialquotienten (§ 199)

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} \frac{d A_{\mathfrak{v}}}{d\varphi} .$$

371. *Der Gradient eines skalaren Produktes* stellt ein dreifaches Produkt dar, welches man unter Anwendung der konjugierten partiellen Derivationen (353.) so assoziieren kann, daß nur je ein Vektor differenziert erscheint. Es ist also

(a) $$\nabla(\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2) \stackrel{3}{=} \nabla ; \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 + \nabla ; \mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 ,$$

oder auch

$$\nabla(\mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2) \stackrel{3}{=} \mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 ; \nabla + \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 ; \nabla .$$

Hier die direkte Derivation (§ 352) anzuwenden ist unnatürlich, weil sie sich bei Assoziationsänderung des gegebenen Tripelproduktes nicht unmittelbar einstellt. Doch ergibt sich aus

$$\mathfrak{v} ; \nabla - \nabla ; \mathfrak{v} \overset{3}{=} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times I ,$$

$$\operatorname{grad} \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 \overset{3}{=} \mathfrak{v}_2 \cdot \nabla ; \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_1 \cdot \nabla ; \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1 \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 .$$

372. Wir können nun das Raumintegral einer derivierten Dyade $\nabla ; \mathfrak{v}$ durch partielle Integration in ein Oberflächenintegral verwandeln. Sei $\mathfrak{c}$ ein konstanter Vektor, so ist

$$\nabla ; \mathfrak{c} \overset{9}{=} 0$$

$$\nabla \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{c} \overset{3}{=} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v} ; \nabla .$$

Es ist also nach 363. (a)

$$\mathfrak{c} \cdot \int_{\varphi} \mathfrak{v} ; \nabla \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\varphi} \nabla \, \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v} \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v} \, d\mathfrak{o} \overset{3}{=} \mathfrak{c} \cdot \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} ; d\mathfrak{o} .$$

Da dies für jeden konstanten Vektor $\mathfrak{c}$ gilt, so folgt

$$\int_{\varphi} \mathfrak{v} ; \nabla \, d\varphi \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} ; d\mathfrak{o}$$

(a)
$$\int_{\varphi} d\varphi \, \nabla ; \mathfrak{v} \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} ; \mathfrak{v} .$$

Das Raumintegral einer derivierten Dyade ist gleich dem Oberflächenintegrale der dyadischen Produkte der Oberflächenelemente und des Potentialvektors $\mathfrak{v}$ der Dyade oder: das dyadische Oberflächenintegral eines Vektors ist gleich dem Raumintegral seiner derivierten Dyade. Dieser Satz schließt den Gaussschen Integralsatz sowie den Integralsatz 370. (a) ein.

Ebenso verwandelt man dyadische Flächenintegrale in dyadische Umfangsintegrale. Es ist nach 364. (a)

$$\mathfrak{c} \cdot \int_{\mathfrak{f}} \mathfrak{v} ; \nabla \times d\mathfrak{f} \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{f}} \nabla \, \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v} \times d\mathfrak{f} \overset{3}{=} - \int_{\mathfrak{u}} \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v} \, d\mathfrak{u} \overset{3}{=} - \mathfrak{c} \cdot \int_{\mathfrak{u}} \mathfrak{v} ; d\mathfrak{u} .$$

Also ist

(b)
$$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \times \nabla ; \mathfrak{v} \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u} ; \mathfrak{v} .$$

373. Den *Rotor eines rotorischen Produktes* entwickelt man naturgemäß unter Zuhilfenahme der rotorischen Dyade

(a)
$$\nabla \times (\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) \overset{3}{=} \nabla \times \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 - \nabla \times \mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1$$

oder auch

$$\nabla \times (\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) \overset{3}{=} \mathfrak{v}_2 \cdot \mathfrak{v}_1 \times \nabla - \mathfrak{v}_1 \cdot \mathfrak{v}_2 \times \nabla .$$

Das negative Vorzeichen erklärt sich dadurch, daß, bevor $\mathfrak{v}_2$ differenziert werden kann, das Produkt $(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2)$ kommutiert werden muß. Will man aber die skalare Derivation anwenden, so ergibt sich, weil

$$\nabla ; \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \times \nabla \overset{9}{=} I \operatorname{div} \mathfrak{v} ,$$

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) \overset{3}{=} \mathfrak{v}_2 \cdot \nabla ; \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2 \operatorname{div} \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1 \cdot \nabla ; \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1 \operatorname{div} \mathfrak{v}_2 .$$

Wir können nun ebenso wie vorhin das Raumintegral einer rotorischen derivierten Dyade in das dyadische Oberflächenintegral des Potentialvektors verwandeln. Es ist nach 370. (a)

$$\mathfrak{c} \cdot \int_{\varphi} \mathfrak{v} \times \nabla \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\varphi} \nabla \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{c}) \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{o}} (\mathfrak{c} \times \mathfrak{v}) \times d\mathfrak{o} \overset{3}{=} \mathfrak{c} \cdot \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \times d\mathfrak{o} .$$

(a) $$\int_{\varphi} d\varphi \, \nabla \times \mathfrak{v} \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \mathfrak{v} .$$

Ebenso erhält man den für rotorische derivierte Dyaden charakteristischen und vielfach verwendbaren Satz

(b) $$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \cdot \nabla \times \mathfrak{v} \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u} \times \mathfrak{v} .$$

374. *Die derivierte Dyade eines rotorischen Produktes* kann in folgender Weise entwickelt werden

(a) $$\nabla ; (\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) \overset{9}{=} (\nabla ; \mathfrak{v}_1) \times \mathfrak{v}_2 - (\nabla ; \mathfrak{v}_2) \times \mathfrak{v}_1 .$$

Differentialgeometrie der Bewegung eines starren Mediums.

375. *Der Rotor der Geschwindheitsverteilung* $\mathfrak{v}$ *in einem starren Medium.* Es ist

$$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \mathfrak{w} \times \mathfrak{r} ,$$

worin $\mathfrak{w}$ die Rotationsgeschwindheit ist und $\mathfrak{r}$ von einem ruhenden Punkte des Mediums gezählt wird. Hieraus folgt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \operatorname{rot}(\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \overset{3}{=} \nabla \times \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r} - \nabla \times \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{w} .$$

Da $\nabla \times \mathfrak{w} \overset{9}{=} 0$, weil $\mathfrak{w}$ nicht vom Orte abhängt und

$$\nabla \times \mathfrak{r} = I^r = -2I ,$$

so ist

(a) $$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} 2\mathfrak{w} .$$

Der Rotor der Geschwindheitsverteilung eines starren Körpers ist gleich der doppelten Rotations-

geschwindheit. Ein Satz, den wir schon viel weiter oben kennen gelernt haben, den wir hier als Beispiel der Anwendung der vektorischen Differentiationsregeln abgeleitet haben.

376. *Die Divergenz der Geschwindheitsverteilung* eines starren Körpers ist Null. Dies ergibt sich nach den Differentiationsregeln aus

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} \overset{3}{=} 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{r} \overset{3}{=} 0 .$$

Es ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \overset{1}{=} \operatorname{div} \mathfrak{w} \times \mathfrak{r} \overset{1}{=} \mathfrak{r} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{w} - \mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{r} \overset{1}{=} 0 .$$

Die derivierte Dyade der Geschwindheitsverteilung ist für dieselbe charakteristisch und hat nach 374.(a) den Wert

$$\nabla ; \mathfrak{v} \overset{9}{=} \nabla ; (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \overset{9}{=} - I \times \mathfrak{w} .$$

377. *Die Divergenz der Beschleunungsverteilung.* Das erst erwähnte Verhalten starrer Medien charakterisiert aber ihre Bewegung nicht, da Flüssigkeiten bei ganz anderer Bewegungsform gleichfalls die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \overset{1}{=} 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \text{konst.}$$

einhalten können. Charakteristische Differentialgesetze der Bewegung starrer Medien lassen sich jedoch aus der Beschleunungsverteilung ableiten.

Die Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$ hat die in 257. angegebene Verteilung

$$\dot{\mathfrak{v}} \overset{3}{=} \dot{\mathfrak{v}}_0 + \mathfrak{w} \times (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) + \dot{\mathfrak{w}} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) .$$

Es ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{w} \times (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) \overset{1}{=} - \mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{1}{=} - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2 ,$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{w}} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \overset{1}{=} 0 , \quad \operatorname{div} \dot{\mathfrak{v}}_0 \overset{1}{=} 0 ,$$

also

(a) $$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{v}} \overset{1}{=} - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2 .$$

Die Divergenz der Beschleunungsverteilung ist gleich dem negativen doppelten Quadrat der Rotationsgeschwindheit.

378. Bilden wir ferner den *Rotor der Beschleunungsverteilung.* Es ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} \times (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0) \overset{3}{=} - \nabla \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} ,$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{w}} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \overset{3}{=} - \nabla \times \mathfrak{r} \cdot \dot{\mathfrak{w}} \overset{3}{=} 2 \dot{\mathfrak{w}} .$$

Nun ist zu beachten, daß die partielle Änderung von $\mathfrak{v}$ nach der Richtung $\mathfrak{w}$ gleich Null ist

$$\nabla \times \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w} \overset{3}{=} \mathfrak{v} ; \nabla \cdot \mathfrak{w} \overset{3}{=} 0 ,$$

denn die Endpunkte einer Strecke, welche der Rotationsgeschwindheit parallel ist, haben keine Relativgeschwindheit. Also erhält man

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \overset{3}{=} 2\,\mathfrak{w}$$

oder

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{rot} \frac{d}{dt} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \frac{d}{dt} \operatorname{rot} \mathfrak{v} .$$

Der Rotor der Beschleunungsverteilung ist gleich der totalen Fluxion des Rotors der Geschwindheitsverteilung, ein keineswegs selbstverständlicher ebenso wie der vorhergehende, für starre Medien charakteristischer Satz.

16. Die totalen Fluxionen.

379. Wir wollen nun die Bewegungserscheinungen beschreiben, welche in einem von deformierbaren Medien kontinuierlich erfüllten Raume, d. i. in einem Raume von allgemeinem Verhalten zu beobachten sind.

Zunächst ist dieses Feld charakterisiert durch die mannigfaltigste Verteilung eines Vektors, welchen man die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ der Teile des Mediums nennt.

Das Vorhandensein einer physikalisch wichtigen Vektorverteilung macht sich stets durch verschiedene gerichtete Eigenschaften des Feldes erkennbar. Welche davon zuerst und dann in den häufigsten Fällen zur Messung dieses Vektors verwendet wird, entscheidet nicht die Theorie, sondern der Zufall und die experimentelle Praxis. Die Geschwindheitsverteilung eines Mediums wird meist nur durch eine der zugehörigen Erscheinungen, nämlich durch die Bewegung der Teilchen desselben charakterisiert. Es ist hiermit folgende Tatsache gemeint. Außer der Geschwindheitsverteilung können noch verschiedene skalare oder vektorische Eigenschaftsverteilungen in demselben Felde zu beobachten sein. Dieselben sind aber dann fast mit Sicherheit zeitlich veränderlich, und

zwar trifft man nach der Zeit dt die meisten Eigenschaften des Feldes um die Strecken $\mathfrak{v}\,dt$ verschoben. Diese Konstanz vieler Eigenschaften bei Änderung des Ortes, ja auch der Geschwindheit selbst, der Temperatur, Beleuchtung usw. charakterisiert jedes kleine Volum einer Flüssigkeit als einen Körper, der sich mit der an seinem Orte jeweilig vorhandenen Geschwindheit $\mathfrak{v}$ bewegt.

Der an dem Verhalten diskreter starrer Körper, welche von Luft umgeben sind, gewonnene Begriff der Körperlichkeit erweist sich also, soweit man sehen kann, auch für das Verständnis der Erscheinungen in allgemeinen Medien als zutreffend.

Aber nicht nur die etwas unbestimmte Angabe, daß die meisten Eigenschaften des Feldes mit den Geschwindheiten verschoben werden, läßt sich aufrecht erhalten, sondern folgender allgemeine und sehr präzise Satz:

Die Fluxion der Eigenschaften an einem gegebenen Orte (lokale Fluxion) ist nur indirekt bestimmt, sämtliche direkten Naturgesetze bestimmen totale oder materielle Fluxionen, d. i. die Fluxionen der Eigenschaften eines Punktes des Feldes, welcher sich mit der dort vorhandenen Geschwindheit bewegt.

So hängt z. B. die Fluxion der Geschwindheit selbst an einem bestimmten Punkte des Raumes, d. i. die lokale Fluxion der Geschwindheit von dem Zusammentreffen verschiedener Umstände ab. Die Fluxion der Geschwindheit $\mathfrak{v}$ in den mit den Geschwindheiten $\mathfrak{v}$ bewegten Punkten des Feldes, welche man die totale Fluxion $\dot{\mathfrak{v}}$ der Geschwindheit nennt, ist aber auch in kontinuierlichen Medien durch direkte Naturgesetze bestimmt und kann als die Beschleunung der Flüssigkeitsteilchen bezeichnet werden. Es liegt kein Widerspruch darin, daß diese Beschleunungen selbst als Funktion des Ortes bestimmt sind. Es kommt z. B. sehr oft vor, daß für jeden Ort des Feldes eine Beschleunung (die Gravitationsbeschleunung) vorausbestimmt ist, und doch sämtliche lokale Beschleunungen Null sind, d. h. die Geschwindheitsverteilung des Feldes von der Zeit unabhängig ist.

Nicht weniger wichtig sind die totalen Fluxionen sämtlicher spezifischen skalaren Eigenschaften wie: Dichte, spezifische Wärme, elektrische und magnetische Konstante usw. Am leichtesten zu beobachten ist der ungeänderte Transport

(eventuell die totalen Fluxionen) der optischen Eigenschaften, wie Absorptions- und Refraktionsvermögen usw., weil sich diese unmittelbar dem Auge zu erkennen geben. Aber auch die totalen Fluxionen vektorischer Eigenschaften, z. B. der elektrischen und magnetischen Vektoren und höherer Eigenschaften, wie des kristallischen Zustandes, der elastischen Deformation usw. sind durch direkte Naturgesetze bestimmt.

380. *Die Eulersche Regel.* Alle Vorstellungs- und Rechnungsschwierigkeiten in dieser Frage werden beseitigt durch die Eulersche Regel, welche den Zusammenhang der lokalen und totalen Fluxionen angibt.

Betrachten wir zunächst die gleichförmige Verteilung eines Skalars s in einem allgemeinen Felde, welches nach 379. von einem Medium kontinuierlich erfüllt ist und die Geschwindheitsverteilung $\mathfrak{v}$ zeigt. Es ist

$$s \overset{1}{=} \mathfrak{r} \cdot \nabla s + s_0 ,$$

worin $\mathfrak{r}$ der von einem festen Nullpunkte aus gezählte Ortsvektor ist. Der Gradient ∇s sei seiner Größe und Richtung nach mit der Zeit veränderlich und ebenso der Wert s_0 des Skalars im Nullpunkte.

Bezeichnen wir die Fluxion einer Variablen für $\dot{\mathfrak{r}} \overset{3}{=} 0$, also an einem bestimmten Orte als die lokale oder partielle Fluxion durch das Zeichen $\frac{\partial}{\partial t}$, so ist

$$\frac{\partial}{\partial t} s \overset{1}{=} \mathfrak{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla s + \dot{s}_0 .$$

Bewegt sich hingegen der Punkt, dessen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ist, mit der Geschwindheit

$$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \dot{\mathfrak{r}}$$

in dem veränderlichen Felde, so erhalten wir die totale oder materielle Fluxion der Variablen s in dem bewegten Teilchen durch Differentiation der Gleichung des Feldes nach allen Variablen:

$$\frac{ds}{dt} \overset{1}{=} \dot{s} \overset{1}{=} \mathfrak{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla s + \mathfrak{v} \cdot \nabla s + \dot{s}_0 .$$

Es gilt also die Eulersche Regel

(a) $$\frac{ds}{dt} \overset{1}{=} \dot{s} \overset{1}{=} \frac{\partial s}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla s$$

Sind keine Umstände vorhanden, welche dieser totalen Fluxion einen von Null verschiedenen Wert geben, so ist

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \frac{\partial s}{\partial t} \overset{1}{=} - \mathfrak{v} \cdot \nabla s ,$$

wodurch die lokalen Fluxionen der Eigenschaft s in diesen inhomogenen aber in jedem Teilchen unveränderlichen Medium bestimmt sind.

Diese Gleichungen gelten auch für eine allgemeine Verteilung von s im Raume, weil man eine solche in einem kleinen Raumgebiete immer als gleichförmig ansehen kann.

Ist die räumliche Verteilung der skalaren Eigenschaft s von der Zeit unabhängig, obgleich der Raum von einer bewegten Flüssigkeit erfüllt ist, so nennt man diese Eigenschaftsverteilung eine stationäre. Für dieselbe ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad \frac{ds}{dt} \overset{1}{=} \mathfrak{v} \cdot \nabla s .$$

Den Differentialquotienten $\frac{ds}{dt}$ nennen wir in diesem Falle die stationäre Fluxion des Skalars s und können diesen Namen auf den Wert $\mathfrak{v} \cdot \nabla s$ auch im allgemeinen Falle übertragen.

Die Eulersche Regel besagt also: Die totale Fluxion einer Eigenschaft ist gleich der Summe der lokalen und stationären Fluxion derselben. Diese Eigenschaft kann ebensowohl eine vektorische oder dyadische Eigenschaft der Flüssigkeitsteile sein, wie wir sogleich zeigen wollen.

381. *Die totale Fluxion einer vektorischen Eigenschaft.* Betrachten wir zunächst eine homogene Vektorverteilung $\mathfrak{a}$ in einem von einem Medium kontinuierlich erfüllten Felde, dessen Geschwindheitsverteilung $\mathfrak{v}$ gegeben ist.

Die derivierte Dyade $\nabla ; \mathfrak{a}$ ist ihrer Größe, Form und Lage nach mit der Zeit veränderlich, hängt aber nicht vom Orte ab. Es ist

$$\mathfrak{a} \overset{3}{=} \mathfrak{r} \cdot \nabla ; \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_0 .$$

Hierin ist $\mathfrak{r}$ der von einem festen Nullpunkte aus gezählte Ortsvektor, $\mathfrak{a}_0$ der Wert des Vektors $\mathfrak{a}$ im Nullpunkte.

Die lokale Fluxion des Vektors $\mathfrak{a}$ ist

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} \stackrel{s}{=} \mathfrak{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla ; \mathfrak{a} + \dot{\mathfrak{a}}_0 .$$

Die totale Fluxion desselben erhalten wir, wenn wir auch $\mathfrak{r}$ als veränderlich annehmen und

$$\dot{\mathfrak{r}} \stackrel{s}{=} \mathfrak{v}$$

setzen. Es ist

$$\frac{d \mathfrak{a}}{d t} \stackrel{s}{=} \dot{\mathfrak{a}} \stackrel{s}{=} \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{a} + \mathfrak{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla ; \mathfrak{a} + \dot{\mathfrak{a}}_0 .$$

Es ist also die totale Fluxion $\dot{\mathfrak{a}}$ gleich der Summe der lokalen Fluxion $\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}$ und der stationären Fluxion $(\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{a})$ des Vektors $\mathfrak{a}$. Es gilt dies auch für inhomogene Vektorverteilungen $\mathfrak{a}$, da diese doch in den kleinsten Raumteilen homogen sind

(a) $$\frac{d \mathfrak{a}}{d t} \stackrel{s}{=} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{a}.$$

Die analytische Form dieser wichtigen Regel erhält man, wenn man nach der Eulerschen Regel 380.(a) die totalen Fluxionen der skalaren Werte der Komponenten $a_x\ a_y\ a_z$ des Vektors $\mathfrak{a}$ bildet:

$$\frac{d a_x}{d t} = \frac{\partial a_x}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla a_x ,$$

$$\frac{d a_y}{d t} = \frac{\partial a_y}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla a_y ,$$

$$\frac{d a_z}{d t} = \frac{\partial a_z}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla a_z .$$

382. *Die Lambsche Formel.* Die Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$ eines Flüssigkeitsteilchens kann in folgender Weise in die lokale und stationäre Fluxion der Geschwindheit zerlegt werden: Es ist nach der Eulerschen Regel

$$\dot{\mathfrak{v}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{v}.$$

Nach 350. kann aber die stationäre Fluxion der Geschwindheit durch speziellere Derivationen dargestellt werden:

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \stackrel{s}{=} \tfrac{1}{2} \nabla \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

Wir erhalten also die für die Berechnung der Bewegung kontinuierlicher Medien sehr wichtige Spezialform der Eulerschen Regel:

(a) $$\dot{\mathfrak{v}} \doteq \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2} \nabla \mathfrak{v}^2 - \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v}\,.$$

383. *Totale Fluxion von Integralen mit materiellem Träger.* In dem von einer mit der Geschwindheitsverteilung $\mathfrak{v}$ bewegten Flüssigkeit eingenommenen Raume sei eine Vektorverteilung $\mathfrak{a}$ gegeben. Wir betrachten nun Integrale dieses Vektors $\mathfrak{a}$, welche sich auf materielle Linien, Flächen und Räume beziehen, deren Elemente sich mit den Geschwindheiten $\mathfrak{v}$ bewegen und bestimmen die totale Fluxion dieser Integrale.

Jedes Element eines materiellen Umfanges $\mathfrak{u}$ beschreibt in der Zeiteinheit die Fläche $(\mathfrak{v} \times d\mathfrak{u})$, welche wir als eine Fortsetzung einer von $\mathfrak{u}$ begrenzten Fläche $\mathfrak{f}$ betrachten und in gleichem Sinne zählen. Ist die Fläche $\mathfrak{f}$ materiell, so durchstreicht jedes Element $d\mathfrak{f}$ derselben pro Zeiteinheit den Raum $(\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f})$.

Der Durchfluß des Vektors $\mathfrak{a}$ für die von $\mathfrak{u}$ durchstrichene Ringfläche ist

$$\int_{\mathfrak{u}} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v} \times d\mathfrak{u} \doteq \int_{\mathfrak{u}} \mathfrak{a} \times \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{u} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{f}.$$

Wenden wir auf den von $\mathfrak{f}$ durchstrichenen Raum den Gaussschen Satz an, indem wir zunächst die Vektorverteilung $\mathfrak{a}$ als von der Zeit unabhängig ansehen, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{f}} \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{f} - \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{f} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{div} \mathfrak{a}\,(\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}).$$

Ist $\mathfrak{a}$ auch von der Zeit abhängig, so folgt, da

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathfrak{f}} \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{f} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} \cdot d\mathfrak{f}$$

ist, für die totale Fluxion des Durchflusses die Form

(a) $$\frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{f}} \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{f} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{a} + \operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{a} \right) \cdot d\mathfrak{f}.$$

Ist die Fläche eine geschlossene Oberfläche $\mathfrak{o}$, so fällt das auf die Ringfläche bezogene Glied fort und wir erhalten die totale Fluxion des Ausflusses des Vektors $\mathfrak{a}$ aus der materiellen Oberfläche $\mathfrak{o}$

$$\text{(b)} \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{o} \doteq \int_{\mathfrak{o}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{a} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a}\right) \cdot d\mathfrak{o}\,.$$

Setzen wir hingegen in (a) $\mathrm{div}\,\mathfrak{a} \doteq 0$ und

$$\mathfrak{a} \doteq \mathrm{rot}\,\mathfrak{b}\,,$$

so ergibt sich

$$\text{(c)} \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{f}} \mathrm{rot}\,\mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{f} \doteq \int_{\mathfrak{f}} \mathrm{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{b} + (\mathrm{rot}\,\mathfrak{b}) \times \mathfrak{v}\right) \cdot d\mathfrak{f}$$

und nach dem Stokesschen Satze die totale Fluxion des Umlaufes eines Vektors $\mathfrak{b}$ auf dem materiellen Umfange $\mathfrak{u}$

$$\text{(d)} \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathfrak{u}} \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{u} \doteq \int_{\mathfrak{u}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{b} + (\mathrm{rot}\,\mathfrak{b}) \times \mathfrak{v}\right) \cdot d\mathfrak{u}\,.$$

Endlich setzen wir in (b)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{a} \doteq s\,,$$

und erhalten unmittelbar unter Anwendung des Gausschen Satzes, wenn φ der von $\mathfrak{o}$ umschlossene Raum ist

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi} s\,d\varphi \doteq \int_{\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial t}s + \mathfrak{v} \cdot \nabla s + s\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\right) d\varphi\,,$$

oder

$$\text{(e)} \qquad \frac{d}{dt}\int_{\varphi} s\,d\varphi = \int_{\varphi} (\dot{s} + s\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v})\,d\varphi\,,$$

also den Wert der totalen Fluxion eines skalaren Raumintegrales.

384. Wir wollen hiervon sogleich eine Anwendung machen, um das die Wärmeproduktion bei der Bewegung zäher Flüssigkeiten mitbestimmende Integral

$$\int_{\varphi} \frac{d}{dt}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\varphi$$

auszuwerten. Es ist nach 383. (b), wenn wir

$$\mathfrak{a} \overset{3}{=} \mathfrak{v}$$

setzen

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi} \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\varphi = \int_{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\cdot\nabla\operatorname{div}\mathfrak{v} + (\operatorname{div}\mathfrak{v})^2\right) d\varphi$$

oder

$$\text{(a)}\qquad \frac{d}{dt}\int_{\varphi} \operatorname{div}\mathfrak{v}\, d\varphi = \int_{\varphi}\left(\frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{v} + (\operatorname{div}\mathfrak{v})^2\right) d\varphi .$$

Weitere Anwendungen dieser Sätze sind folgende.

385. *Materialität der Stromröhren in stationären Strömungen.* Die Vektorlinien der Geschwindheitsverteilung in einer bewegten Flüssigkeit sind im allgemeinen nicht die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen. Obwohl sich jedes Flüssigkeitsteilchen in jedem Augenblicke auf einer solchen Vektorlinie bewegt, so ist dies doch nicht dauernd dieselbe Vektorlinie. Diese Linien ändern ihre Form mit der Zeit, während die Bahnlinien der Teilchen von der Zeit unabhängig angebbare Linien sind. Längs einer Bahnlinie bewegt sich dasselbe Teilchen zu verschiedenen Zeiten, längs einer Vektorlinie bewegen sich verschiedene Teilchen zur selben Zeit.

Anders in einer stationären Strömung, in welcher die Geschwindheitsverteilung von der Zeit unabhängig ist, also die Vektorlinien ihre Form nicht ändern. Dann stellen sie auch die Bahnlinien der Teilchen dar. Hieraus folgt, daß die Vektorröhren oder Stromröhren materiellen Bestand haben, d. h. daß sie stets dieselben Teilchen enthalten, die auch ihre Anordnung und Folge, wenn auch keineswegs ihre Distanzen bewahren.

Eine materielle begrenzte Fläche in einer stationären Strömung muß dauernd den Querschnitt einer und derselben Stromröhre bilden. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist ihre Geschwindheitsverteilung divergenzfrei, die Stromröhren sind Stromfäden von konstantem Durchfluß. Es muß also für

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

die totale Fluxion des Durchflusses der Geschwindheit durch eine beliebige materielle Fläche Null sein, was nach Gleichung 383. (a) zutrifft.

386. *Materialität der Wirbelringe.* Die Flüssigkeiten sind aller denkbaren Geschwindheitsverteilungen fähig. Besonders charakteristisch sind die Wirbelringe der Geschwindheitsverteilung. Man kann solche Wirbelringe leicht erzeugen, indem man einen Tropfen (gefärbten) Wassers auf eine gleichtemperierte Wasseroberfläche legt. Derselbe fließt sogleich auseinander und verwandelt sich in einen Wirbelring, welcher untertaucht und sich senkrecht von der Wasseroberfläche entfernt, wobei er seinen Umfang vergrößert. Die bekannten Rauchringe, welche von Dampfschornsteinen und Wetterkanonen ausgesendet werden, sind Wirbelringe der Geschwindheitsverteilung der Luftströmung.

Wie ein Vektor in dem Felde eines seiner Wirbelringe verteilt ist, haben wir in 237. beschrieben. Wir wissen, daß die Flüssigkeit in der Umgebung eines auch langsam fortschreitenden Wirbelringes in lebhaftester Bewegung begriffen ist, und zwar strömt sie in ringförmigen, mit dem Wirbelring kettenringartig zusammenhängenden Vektorlinien. Am heftigsten ist die Bewegung an der Oberfläche des Wirbelringes. Trifft ein kleines Rauchringel auf eine Kerzenflamme, so kann diese ausgelöscht werden. Größere dünne Wirbelringe überraschen dadurch, daß sie langsam fortschreitend und dadurch harmlos aussehend, Streifen von nassem Seidenpapier, die sie treffen, plötzlich zerreißen.

In allen diesen Beschreibungen drückt sich aus, daß die Wirbelringe, obgleich in ihrer Nähe das Medium in lebhaftester Bewegung ist, materiellen Bestand haben, was sehr merkwürdig ist und dessen Grund wir nun aufsuchen wollen.

Die Wirbelringe einer Flüssigkeitsströmung sind uns zunächst nur bekannt als jene notwendig ringförmigen Raumgebiete, in welchen die Geschwindheitsverteilung kein Potential hat, oder der Rotor der Geschwindheit einen von Null verschiedenen Wert hat.

Bei den angeführten Experimenten behalten aber die Teile des Wirbelringes ebensowohl den Rotor der Geschwindheit

als etwa ihre Färbung oder ihren Rauchgehalt. Ebenso bewahren die übrigen Teile der Flüssigkeit ein Geschwindheitspotential. Diese scheinbar rein mathematischen Eigenschaften des Feldes verhalten sich also wie physikalische Eigenschaften der Materie. Es ist dies nicht unerklärlich und kein vereinzelter Fall. Der Rotor eines physikalischen Vektors, seine Potentiale und seine Divergenz, der Gradient eines physikalischen Skalars, kurz alle einfachen Derivationen physikalischer Eigenschaften sind selbst physikalische Eigenschaften, weil sie notwendig bei geeigneten Versuchsanordnungen deutlich und direkt erkennbar sein müssen. Aus der Gruppe der durch einfache Differential- und Integraloperationen auseinander ableitbaren physikalischen Größen kann eine odere mehrere als Eigenschaft oder Zustand der Materie, die anderen als bloße mathematische Merkmale betrachtet werden. Diese Auswahl ist aber eine willkürliche und wechselt nach untergeordneten experimentellen und theoretischen Erwägungen.

Die Materialität der Wirbelringe und also auch der Gebiete, in welchen ein Geschwindheitspotential vorhanden ist, führt auf ein besonderes Gesetz der Flüssigkeitsbewegungen zurück, welches sich am schärfsten fassen läßt, wenn man die Verteilung der Beschleunungen $\dot{\mathfrak{v}}$ der Flüssigkeitsteile betrachtet.

Wir bezeichnen mit

$$D \doteq \int_{\mathfrak{f}} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}$$

den Durchfluß des Rotors der Geschwindheitsverteilung durch eine materielle begrenzte Fläche $\mathfrak{f}$. Ist die totale Fluxion dieses Durchflusses stets Null, so müssen die Wirbelringe materiellen Bestand haben. Alle materiellen Flächenelemente, welche einmal die Oberfläche eines Wirbelfadens bilden, haben und behalten dann stets den Durchfluß $D = 0$ und bilden also stets die Oberfläche eines Wirbelfadens. Eine materielle Fläche, welche einmal einen vollen Querschnitt eines Wirbelfadens gebildet hat, bildet also stets den vollen Querschnitt desselben. Da sie ihren Durchfluß D bewahrt, welcher die Wirbelstärke des Wirbelfadens bildet, so folgt noch außerdem der von Helmholtz (1852) aufgestellte Satz: Die Wirbelringe

bewahren nicht nur ihren materiellen Bestand, sondern auch ihre Wirbelstärke. Die kinematische Bedingung hierfür ist, daß für jede materielle Fläche $\mathfrak{f}$

$$\frac{d}{dt} D \overset{1}{=} 0$$

ist. Nach Gleichung (c) in § 383 muß also, wenn wir $\mathfrak{b} \overset{2}{=} \mathfrak{v}$ setzen

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{v}\right) \overset{2}{=} 0 .$$

Da nun

$$\operatorname{rot}\left(\tfrac{1}{2} \bigtriangledown \mathfrak{v}^2\right) \overset{2}{=} 0$$

ist, so folgt aus der Eulerschen Formel 382. (a)

(a) $$\operatorname{rot}\dot{\mathfrak{v}} \overset{3}{=} 0 .$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Helmholtzsche Satz gilt, ist, daß die Beschleunungen der Flüssigkeitsteile aus irgend welchen Ursachen stets rotorfrei verteilt sein müssen.

387. Die Materialität der Wirbelfäden bringt es mit sich, daß sich dieselben mit der Geschwindheit ihrer Teile bewegen und deformieren.

Ein kreisrunder gerader Wirbelzylinder kann deshalb unverändert bestehen bleiben. Seine geraden Wirbelfäden werden mit desto größeren Geschwindheiten um die Achse des Zylinders gedreht, je weiter sie von derselben abstehen, was aber an der Geschwindheitsverteilung und also an dem Wirbelzylinder selbst nichts ändert.

Hat der gerade Wirbelzylinder elliptischen Querschnitt, so verlaufen die Vektorlinien der Geschwindheitsverteilung ebenfalls ringförmig um seine Achse, sind aber Ellipsen. Zufolgedessen dreht sich zunächst der Wirbelzylinder um seine Achse, wobei aber die Pole der großen Achsen seines elliptischen Querschnittes vorauseilen, so daß derselbe periodisch seine Exzentrizität ändert, während seine Achse sich dreht.

Ein Wirbelring wird zunächst fortwährend umgestülpt, wobei jeder ringförmige Wirbelfaden desselben periodisch seinen Durchmesser ändert und bald an der Innen- bald an der Außenseite des Wirbelringes liegt. Da aber die Geschwind-

heiten im Inneren desselben größer sind als außen, so ist damit eine Translation verbunden. Der Wirbelring schreitet senkrecht zu seiner Fläche in jener Richtung fort, in welcher die Vektorlinien der Geschwindheitsverteilung durch seine Fläche strömen. Da diese Translation durch die Differenz der Geschwindheiten der Wirbelfäden innen und außen bewirkt wird, ist sie desto langsamer, je größer der Umfang und je kleiner der Querschnitt des Wirbelringes ist, je mehr er sich also einem Wirbelzylinder nähert. Außerdem ist sie natürlich der Wirbelstärke proportional, weil diese die absolute Größe der Geschwindheiten bestimmt.

Nun verlaufen aber selbst bei einem kreisförmigen Wirbelring von kreisförmigem Querschnitt die Vektorlinien der Geschwindheit nicht sämtlich entweder innerhalb oder außerhalb des Wirbelraumes, sondern es gibt einige, welche an der Innenseite des Ringes im Wirbelraum, an der Außenseite desselben im Potentialraum verlaufen, wie man in Fig. 51 deutlich sieht. Diese transportieren also fortwährend Wirbelfäden aus dem Wirbelraum an der Innenseite fort, wo dadurch der Potentialraum vordringt, und an die Außenseite des Wirbelringes hin, wo derselbe sich also in den Potentialraum ausbreitet. Während ihres Fortschreitens erfahren also die Wirbelringe eine fortschreitende Vergrößerung ihres Durchmessers.

Sind zwei Wirbelringe vorhanden, so daß die Geschwindheitsverteilung die vektorische Summe der Geschwindheitsverteilungen ist, welche jeder Wirbelring allein bewirken würde, so kommt zu den beschriebenen Wirkungen der eigenen Geschwindheitsverteilungen noch der Transport durch die Geschwindheitsverteilung des anderen Wirbels hinzu. Zwei gleiche Wirbelringe von paralleler Fläche, welche hintereinander herschreiten und beide dabei ihren Durchmesser vergrößern würden, werden sich gegenseitig anziehen, so lange bis ihre Flächen zusammenfallen, wobei der voranschreitende Ring seinen Durchmesser stark vergrößert, der innere denselben verkleinert, so daß die Ringe durcheinander hindurchschlüpfen. Der vorangehende Ring liegt nämlich in einem Teile des Feldes des folgendes Ringes, in welchem die Vektorlinien der Geschwindheit divergieren und die Geschwindheiten in ihrer Richtung immer kleiner werden. Der folgende Ring liegt aber in einem

Teile des Feldes des vorangehenden Ringes, in welchem die Vektorröhren konvergieren und die Geschwindheit in ihrer Richtung immer größer wird. Sowie dies mit den einzelnen Wirbelfäden desselben Wirbelringes der Fall ist, schlüpfen die beiden Wirbelringe fortwährend gegenseitig durch ihre Öffnungen, werden also umeinander herumgestülpt.

Das Umgekehrte gilt, wenn die Richtung aller Geschwindheiten in dem Felde des einen Wirbelringes die umgekehrte ist und die Wirbelringe gegeneinander fortschreiten. Sie stoßen sich dann gegenseitig ab und vergrößern, wenn sie sich in die Nähe kommen, ihren Durchmesser bedeutend.

Man kann all dieses sehr leicht beobachten an dem Verhalten der halben Wirbelringe, welche entstehen, wenn man ein abgerundetes Blechstück oder einen Löffel in eine Wasseroberfläche taucht, ein kurzes Stück senkrecht zu seiner Fläche fortführt und dann rasch herauszieht (Helmholtz). Es tritt ein halber Wirbelring auf, der sich durch die paraboloidischen Pingen oder Einsenkungen verrät, welche die Wasseroberfläche dort zeigt, wo sie von den Querschnitten des Wirbelringes getroffen wird, und dessen Öffnung anfänglich denselben Kontur hat wie der Löffel. Dieser halbe Wirbelring kann meterweit während seines Fortschreitens beobachtet werden und es kann ihm leicht ein zweiter Ring nachgesendet werden, welchem man am besten durch eine etwas lebhaftere Löffelbewegung eine größere Wirbelstärke gibt, so daß er den ersten bald einholt und durch ihn hindurchschlüpft. Die Wirbelfäden dieser „halben" Wirbelringe sind natürlich wie immer geschlossene Ringe, die sich aber an der Wasseroberfläche sehr flach ausbreiten und nur unter Wasser zu dem Halbring zusammenschließen.

Das Fortschreiten der heftigen Wirbelwinde, welche durch Staubsäulen gekennzeichnet sind, welche in ihrer Achse aufsteigen, ist bekannt. Ein solcher verheerender Luftwirbel zeigt seine eigene Fortschreitung, kann aber auch durch einen gewöhnlichen Wind transportiert werden. Das Fortschreiten der großen Zyklonen, welche auf die Wetterlage von Einfluß sind, ist wohl die wichtigste der hierher gehörigen Erscheinungen.

388. *Die totale Fluxion des Volumens der Flüssigkeitsteilchen.* Setzen wir in 383.(e) den Skalar $s = 1$, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\varphi \doteq \int_{\varphi} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\varphi .$$

Vergl. § 201. Die einfachste materielle Eigenschaft, das Volumen der Teilchen eines bewegten Mediums bleibt erhalten, wenn die Divergenz der Geschwindheitsverteilung Null ist.

Inkompressible Medien zeigen also immer eine divergenzfreie Geschwindheitsverteilung

(a) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 .$$

389. *Die Deformation der Teilchen des bewegten Mediums.* Auch in den allerkleinsten Teilen ist die Bewegung eines deformierbaren viel allgemeiner als jene eines starren Mediums, so daß man sich die kleinsten Teile einer Flüssigkeit keineswegs wie nebeneinanderliegende kleine starre Körper vorstellen kann. Ein Haufen feinen Sandes kann im großen dieselbe Geschwindheitsverteilung wie eine Flüssigkeit haben, doch ist dieselbe in den kleinsten Teilen eine ganz andere.

Allerdings kann sich ausnahmsweise ein kleinerer oder größerer Teil der Flüssigkeit wie ein starrer Körper bewegen. Es ist dies z. B. bei Translationen der Flüssigkeit und in einem geraden gleichförmigen Wirbelzylinder mit Genauigkeit, im Innern jedes Wirbelringes mit einiger Annäherung der Fall.

Die Bedingung, daß dies eintritt, ist nach 248.(a) eine skalare. Daß sich ein Teilchen des Mediums ohne Formänderung bewegt, wird ebenfalls durch das Verschwinden einer Zahl angezeigt, welche eine skalare Derivation der Geschwindheitsverteilung ist, sich aber auch unter Berücksichtigung der Beschleunungsverteilung erkennen läßt. Die Differentialgesetze erster Ordnung der Geschwindheitsverteilung selbst reichen aber nicht aus, um zu erkennen, ob die Flüssigkeit sich in einem ihrer kleinsten Teile wie ein starrer Körper bewegt.

In einem starren Körper gelten die Verteilungsgesetze

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \doteq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} \doteq 2\mathfrak{w}.$$

Das erste wird von einer inkompressiblen Flüssigkeit bei jeder Bewegungsform erfüllt. Das zweite, nach welchem der Rotor der Geschwindheit konstant ist, ist in allen homogenen Strömungsfeldern erfüllt, d. i. in allen Feldern, in

welchen die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ eine lineare Funktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ ist. In den kleinsten Teilen einer Flüssigkeit ist dies immer der Fall.

Eine inkompressible Flüssigkeit erfüllt also stets in ihren kleinsten Teilen dieselben Differentialgesetze erster Ordnung der Geschwindheitsverteilung wie ein starrer Körper.

Die Bedingung, daß einer ihrer kleinsten Teile die Bewegungsform eines starren Körpers hat, ist, daß die Beschleunungsverteilung in diesem Punkte demselben Differentialgesetz 377.(a) folgt. Es muß also

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{div} \frac{d}{dt}\mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2 = 0$$

sein. Ist diese Gleichung in einem kleineren oder größeren Teile einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt, so ist die Geschwindheitsverteilung in diesem Gebiete durch

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{v} \stackrel{s}{=} \mathfrak{v}_0 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}$$

darstellbar, worin $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindheit irgend eines Teilchens der Flüssigkeit und $\mathfrak{r}$ der Abstand von diesem Teilchen ist.

Eine kompressible Flüssigkeit kann jedoch die Gleichung (a) erfüllen und sich dennoch nicht wie ein starrer Körper bewegen. Andererseits können unendlich kleine Abweichungen in der Geschwindheitsverteilung endliche Abweichungen in der Beschleunungsverteilung bestimmen, so daß Gleichung (b) nahezu erfüllt ist und doch Gleichung (a) gar nicht erfüllt ist.

Wenn z. B. die Geschwindheit überall die Richtung des Radius r und die Größe

$$v^2 = c_0 + c\,\frac{1}{r}$$

hat, so ist $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ und $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$, also die Gleichung (a) erfüllt, und doch ist dies eine Strömung, welche weder ein starrer Körper noch eine inkompressible Flüssigkeit auszuführen fähig ist. Andererseits führt uns die Frage, welche endliche Abweichungen der Beschleunungsverteilung bei nahezu gegebener Geschwindheitsverteilung noch möglich sind, auf die allgemeine Form der gesuchten Bedingung.

Die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ erfülle in endlichem Raume bis auf die unendlich kleinen Abweichungen $\mathfrak{u}$ die Gleichung (b)

$$\mathfrak{v} - \mathfrak{u} \overset{3}{=} \mathfrak{v}_0 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r},$$

worin $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ konstant ist. Es folgt zunächst

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \operatorname{div}\mathfrak{u}.$$

Bilden wir die Divergenz der totalen Fluxion und zwar auf der rechten Seite der Gleichung nach § 377

$$\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \operatorname{div}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} \overset{1}{=} -\tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2.$$

Berücksichtigen wir die für jede beliebige Vektorverteilung gültige Rechenregel

(c) $$\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} - \frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{u} \overset{1}{=} \operatorname{div}\mathfrak{u} \cdot \nabla ; \mathfrak{u} - \mathfrak{u} \cdot \nabla \operatorname{div}\mathfrak{u}.$$

Falls $\mathfrak{u}$ unendlich klein ist, so verschwinden beide Glieder der rechten Seite und wir erhalten

$$\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{u} = \frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{v}.$$

Die notwendige Bedingung, daß sich eine Flüssigkeit in einem ihrer kleinsten Teile wie ein starrer Körper bewegt, lautet also:

(d) $$\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \frac{d}{dt}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2 \overset{1}{=} 0$$

oder

(e) $$\operatorname{div}\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \cdot \nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2 \overset{1}{=} 0.$$

Nach 357. ist dieser Wert, ohne dessen Verschwinden die Bewegungsform des betrachteten Teilchens nicht deformationsfrei sein kann, der erste Skalar zweiter Ordnung der Dyade $\nabla ; \mathfrak{v}$, d. h. der erste Skalar des Quadrates der symmetrischen Dyade $[\nabla ; \mathfrak{v}]$. Die obigen Gleichungen lassen sich also auch in der Form

(f) $$[\nabla ; \mathfrak{v}]_s^2 \overset{1}{=} 0$$

schreiben. Wenn aber der Skalar des Quadrates einer symmetrischen Dyade Null ist, muß diese selbst Null sein. Die Dyade $\nabla ; \mathfrak{v}$ ist also antisymmetrisch

$$\nabla ; \mathfrak{v} \overset{6}{=} -\mathfrak{v} ; \nabla \overset{6}{=} -\tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathfrak{v}) \times I.$$

Die Bedingung (d), (e) oder (f) ist also auch hinreichend, um die Bewegungsform als die eines starren Körpers (vergl. 376.) zu charakterisieren. Diese Ableitung läßt sich auch umkehren.

Der zweite Skalar der derivierten Dyade ist, wenn von Null verschieden, ein wichtiges Maß der Abweichung der Bewegungsform von der eines starren Körpers, und soll die Deformationsgeschwindheit des betrachteten Teilchens des Mediums genannt werden. Insbesondere bestimmt derselbe die Wärmeproduktion bei der Bewegung zäher Flüssigkeiten.

390. *Die longitudinalen und transversalen Wellen.* Betrachten wir die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{s}{=} \mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v},$$

worin $\mathfrak{v}$ eine variable Vektorverteilung, $\mathfrak{c}$ aber ein konstanter, von Ort und Zeit unabhängiger Vektor ist. Die totale Fluxion des Vektors $\mathfrak{v}$ in einem Punkte, welcher sich mit der Geschwindheit $-\mathfrak{c}$ in dem Felde bewegt, ist

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{s}{=} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - \mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v}.$$

Gleichung (a) stellt also die lokale Fluxion einer Vektorverteilung dar, deren totale Fluxion Null ist, welche sonach unveränderlich ist, sich aber mit der Geschwindheit $-\mathfrak{c}$ fortpflanzt. Dieser Typus der Fortpflanzungsgleichung reicht nicht aus zur Darstellung jener Fortpflanzungen unveränderlicher Vektorfelder, welche in jeder Richtung mit gleicher Größe c der Fortpflanzungsgeschwindigkeit stattfinden können. Wir müssen trachten, daß das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ in der Fortpflanzungsgleichung erscheint. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Fortpflanzung der Fluxion $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$. Dieselbe wird durch die allgemeine Fortpflanzungsgleichung

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{s}{=} \mathfrak{c} \cdot \nabla ; \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{s}{=} \mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v})$$

dargestellt, welche wir nur für zwei wichtige Spezialfälle auflösen wollen.

391. Es sei der Vektor $\mathfrak{v}$ rotorfrei verteilt und überall parallel zur Fortpflanzungsrichtung. Dann nennt man die Fortpflanzung eine longitudinale

$$\operatorname{rot}\mathfrak{v} \overset{2}{=} 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} \times \mathfrak{c} \overset{2}{=} 0 .$$

Dann folgt aus den Rechenregeln 350. und 371.

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \overset{3}{=} \mathfrak{c} \operatorname{div} \mathfrak{v} \overset{3}{=} \operatorname{grad}(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{v}),$$

und es ist deshalb $\mathfrak{c}$ parallel zu $(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v})$

$$\mathfrak{c} \times \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} \overset{3}{=} -\operatorname{rot}(\mathfrak{c}\operatorname{div}\mathfrak{v}) \overset{3}{=} 0 ,$$

und endlich ist

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v}) \overset{3}{=} \mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c}\operatorname{div}\mathfrak{v}) \overset{3}{=} \mathfrak{c}\operatorname{div}(\mathfrak{c}\operatorname{div}\mathfrak{v}) \overset{3}{=} \mathfrak{c}(\mathfrak{c}\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v})$$

oder

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c} \cdot \nabla \cdot \mathfrak{v}) \overset{3}{=} c^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} .$$

Wir erhalten also für eine longitudinale nach beliebiger Richtung mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von gegebener Größe c fortschreitende Vektorverteilung die Differentialgleichung

(a) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \overset{3}{=} c^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} .$$

392. Es sei der Vektor $\mathfrak{v}$ divergenzfrei verteilt, er und sein Rotor senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Dann nennt man die Fortpflanzung eine transversale

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} \overset{1}{=} 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{c} \overset{1}{=} 0 .$$

Dann folgt aus den Rechenregeln 350. und 373.

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \overset{3}{=} -\mathfrak{c} \times \operatorname{rot}\mathfrak{v} \overset{2}{=} -\operatorname{rot}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{v}),$$

und es ist deshalb $\mathfrak{c}$ senkrecht auf $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{c}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v} \overset{1}{=} \operatorname{div}(\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}) \overset{1}{=} 0 ,$$

und endlich ist, da auch $\mathfrak{c}\cdot\operatorname{rot}\mathfrak{v} \overset{1}{=} 0$ sein soll

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v}) \overset{2}{=} -\mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v}) \overset{3}{=} +\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}(\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}\mathfrak{v})$$
$$\overset{3}{=} \mathfrak{c}\times(\mathfrak{c}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v})$$

oder

$$\mathfrak{c} \cdot \nabla ; (\mathfrak{c} \cdot \nabla ; \mathfrak{v}) \overset{3}{=} -c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v} .$$

Wir erhalten also für eine transversale nach beliebiger Richtung mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von ge-

gebener Größe c fortschreitende Vektorverteilung die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \stackrel{s}{=} -c^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v},$$

in welcher das negative Vorzeichen wesentlich ist und nicht von der Definition der rotorischen Produkte abhängt.

IV. Die idealen Flüssigkeiten.

17. Die inneren Beschleunungen idealer Flüssigkeiten.

393. Die Teile eines kontinuierlichen Mediums können partielle Beschleunungen verschiedener Herkunft haben: elektrische, magnetische, meist wohl nur Gravitationsbeschleunungen. Wir nennen dieselben äußere Beschleunungen $\mathfrak{g}$. Selten sind dies die wahren Beschleunungen $\dot{\mathfrak{v}}$, mit welchen sich die Teile des Mediums bewegen, sondern es kommen noch die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ des Mediums hinzu. Man bezeichnet diese Beschleunungsverteilungen als die Elastizität oder Zähigkeit des Mediums

$$\dot{\mathfrak{v}} \stackrel{s}{=} \mathfrak{g} + \mathfrak{g}'.$$

Ferner ist für die Bewegung kontinuierlicher Medien die Verteilung einer spezifischen skalaren Eigenschaft desselben, welche man die Dichte μ nennt, von Wichtigkeit. Nicht die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$, sondern ein Fluktor $\mu\mathfrak{g}'$ derselben ist durch einfache Gesetze bestimmt.

Es gibt Medien, in welchen dieser Fluktor immer rotorfrei verteilt ist. Diese nennt man ideale Flüssigkeiten.

Ehe wir das Verhalten einer idealen Flüssigkeit aus dieser Definition ableiten und jene Medien aufweisen, welche dieses Verhalten mit hinreichender Annäherung beobachten lassen, wollen wir zeigen, daß ein solches Vorkommen weder vom Standpunkt unserer mechanischen Kenntnisse noch unserer sonstigen physikalischen Erfahrungen etwas Ungewöhnliches ist.

394. Betrachten wir ein Teilchen vom Volum $d\varphi$ und der Masse $\mu\, d\varphi$ im Innern der Flüssigkeit, welches die innere

Beschleunung $\mathfrak{g}'$ zeigt. Das außerhalb der Oberfläche des Volums $d\varphi$ liegende Medium zeigt entsprechende Gegenbeschleunungen.

Die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ der Flüssigkeiten haben den Typus der irdischen Beschleunungen, d. h. sie hängen von den Eigenschaften der gegenbeschleunten Körper nicht ab (s. § 212).

Weil die Massen aller außerhalb der Oberfläche des Volums $d\varphi$ liegenden Stoffe keinen Einfluß auf die Beschleunung $\mathfrak{g}'$ hat, so muß nach 213. die Beschleunungsgröße $\mu\, d\varphi\, \mathfrak{g}'$ durch ein von allen Massen unabhängiges Gesetz bestimmt sein. Da das Volum $d\varphi$ beliebig in der kontinuierlichen Flüssigkeit abgegrenzt werden kann, so muß man also erwarten, daß der Fluktor $\mu\mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen durch ein einfacheres Gesetz bestimmt wird als diese selbst, indem derselbe nicht von der Dichte μ in dem betrachteten Punkte abhängt, während $\mathfrak{g}'$ derselben cet. par. verkehrt proportional ist.

Die Bewegungsgleichungen kontinuierlicher Medien stellen den Fluktor $m\mathfrak{g}'$ derart als Funktion des Ortes dar, daß das Gegenbeschleunungsgesetz erfüllt ist.

395. Alle fundamentalen Gesetze, welche physikalische Vektorverteilungen bestimmen, werden am besten in die Form von lokalen Differentialgleichungen gebracht. Sie geben dann Beziehungen der Werte skalarer oder vektorischer Eigenschaften eines kleinen Teilchens des Mediums, während die Zustände und Eigenschaften der ferneren Umgebung ganz gleichgültig sind.

Ferner ist gewöhnlich nicht der Wert des Vektors selbst, sondern meist der seiner Derivationen, im einfachsten Falle seiner Divergenz oder seines Rotors direkt bestimmt. So gibt z. B. das lokale Differentialgesetz der Verteilung der Gravitationsbeschleunung 193. (a) die Divergenz derselben an, welche überall der Dichte proportional ist. Das Gesetz der Verteilung des magnetischen Vektors im Felde galvanischer Ströme gibt den Rotor derselben direkt an, welcher gleich dem Produkt des elektrischen Vektors und der Leitfähigkeit des Mediums ist.

Es gibt also weite Gebiete, in welchen die Divergenz der Gravitationsbeschleunung Null ist, nämlich jene, in welchen

die Dichte Null ist. Es gibt weite Gebiete in magnetischen Feldern, in welchen der magnetische Rotor Null ist. Es findet dies in jenen häufig vorkommenden Medien statt, welche man Nichtleiter nennt, und zwar findet es nur dann statt, wenn die zeitlichen Veränderungen des Feldes nicht allzu rasche sind.

Ganz denselben Charakter haben die Gesetze der Verteilung des Fluktors $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen kontinuierlicher Medien. Auch hier ist der Rotor dieses Fluktors durch ein direktes Gesetz bestimmt und proportional einer spezifischen Konstanten des Mediums, welche man in Flüssigkeiten den Zähigkeitsmodul, in elastischen Stoffen den Torsionsmodul nennt. Auch hier gibt es Stoffe, in welchen diese spezifischen Konstanten sehr klein sind, und diese nennt man ideale Flüssigkeiten.

Die Analogie geht noch viel weiter. Der Rotor des Fluktors $\mu \mathfrak{g}'$ ist ebenfalls nur bei langsamen Veränderungen des Feldes in idealen Flüssigkeiten Null. Sowohl in zähen Flüssigkeiten als in leitungsfähigen Stoffen ist das Vorhandensein des Rotors (dort des Rotors der inneren Beschleunungen, hier des Rotors des magnetischen Vektors) mit einer Wärmeproduktion verknüpft.

396. *Ideale Flüssigkeiten nennt man Medien, in welchen der Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen stets ein skalares Potential hat.* Diesen einfachsten Fall der Verteilung der inneren Beschleunungen zeigen, wie wir leicht erkennen werden, die meisten Flüssigkeiten bei nicht allzu raschen Deformationen mit hinreichender Annäherung. Auch Dämpfe und Gase sind nahezu ideale Flüssigkeiten im Sinne dieser Definition. Nicht so die zähen Flüssigkeiten und alle festen Körper, in welchen der Fluktor der inneren Beschleunungen nur ausnahmsweise rotorfrei verteilt ist.

Wir bezeichnen den negativen Wert des skalaren Potentials des Fluktors in idealen Flüssigkeiten mit dem Namen der Spannung p. Der Fluktor ist dann der negative Gradient der Zahl p

$$\mu \mathfrak{g}' \stackrel{s}{=} - \nabla p .$$

Streng genommen ist diese Gleichung die Definitionsgleichung der beiden skalaren Werte μ und p, da es nicht

ganz zulässig ist, den Begriff der Flüssigkeitsdichte μ aus der Theorie der Bewegung diskreter starrer Körper herzunehmen. Immerhin gibt diese dreifache Gleichung noch ein Bestimmungsstück der Beschleunungsverteilung.

Die Bewegungsgleichung idealer Flüssigkeiten hat die Form

(a) $$\mu \dot{\mathfrak{v}} \stackrel{s}{=} - \nabla p + \mu \mathfrak{g},$$

worin $\mathfrak{g}$ die äußeren Beschleunungen sind.

397. *Erste Methode der Dichtebestimmung.* Um die Dichte einer Flüssigkeit zu messen, kann man dieselbe in ein Fläschchen (Pyknometer) von bekanntem Fassungsraum füllen, und durch zwei Wägungen dessen Masse, wenn es mit der Flüssigkeit, und wenn es mit Luft gefüllt ist, bestimmen. Man erhält so streng genommen nicht die Dichte der Flüssigkeit, sondern die Differenz dieser und der Dichte der Luft. Diese letztere können wir erst in Kap. 21 genau auswerten. Sie ist nur ein kleiner Bruchteil der Flüssigkeitsdichten, den wir zunächst vernachlässigen wollen.

Die Untersuchung der Flüssigkeitsbewegungen wird also ebenso wie jene der Bewegung diskreter starrer Körper durch den günstigen Umstand sehr erleichtert, daß die Luft nur geringen Einfluß auf diese Bewegungen, also nur geringe Masse hat.

Es ist leicht, durch Wägungen einer mit Luft und mit anderen Gasen gefüllten Flasche zu zeigen, daß die Differenzen der Dichten aller Gase nur einen kleinen Bruchteil der Differenz der Dichten von Wasser und Luft ausmachen.

Alle Gase haben sonach Dichten, welche nur kleine Bruchteile der Flüssigkeitsdichten sind.

398. *Die Gebiete konstanten Potentials.* Da die Dichte der Gase verschwindend klein ist, so ist der Fluktor der Beschleunung viel kleiner als diese selbst, d. h. das Potential p hat ein sehr kleines Gefälle. Ein nicht allzu großer, mit einem nicht allzu stark beschleunten Gase erfüllter Raum kann demnach als ein Raum konstanter Spannung p angesehen werden.

Zufolgedessen gehören alle Oberflächen miteinander zu-

sammenhängender Flüssigkeiten, welche an denselben Gasraum grenzen, derselben Niveaufläche der Spannung an.

Dieses Verhalten der Gase vereinfacht die Analyse der Flüssigkeitsbewegungen in demselben Maße, in welchem das Verhalten der Leiter das Verständnis der elektrostatischen Erscheinungen erleichtert. Die Verteilung der Beschleunungen in einer Flüssigkeit, welche Gasblasen verschiedener Spannung enthält, ist dieselbe wie die Verteilung des elektrischen Vektors in einem Isolator, welcher gleichgeformte Konduktoren von entsprechenden Potentialen enthält. Ist dieses ganze Feld eingehüllt von einer leitenden Schale, oder erstreckt es sich ins unendliche, so ist in demselben das Raumintegral des elektrischen Vektors Null. Ebenso ist das Gesetz der Erhaltung der Bewegungsgrößen in einem von Flüssigkeiten erfüllten Raume φ gültig, wenn dieser von einem Gasraume eingehüllt wird. Ist p_0 das konstante Potential an der Oberfläche $\mathfrak{o}$ dieser Flüssigkeit, so ist

$$\int_{\varphi} \mu \mathfrak{g}' d\varphi \stackrel{s}{=} -\int_{\varphi} \nabla p \, d\varphi \stackrel{s}{=} -p_0 \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \stackrel{s}{=} 0,$$

d. h. es ist die Summe der inneren Beschleunungsgrößen aller Flüssigkeitsteile Null.

Jede Bewegungsgleichung eines kontinuierlichen Mediums muß, damit das Gegenbeschleunungsprinzip erfüllt ist, den Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ als Funktion des Ortes angeben. Verwandeln wir das Raumintegral desselben in ein Oberflächenintegral, was immer möglich ist, so muß dieses für die Grenzfläche jenes Raumes, in welchem die Bewegungsgröße erhalten bleiben soll, gleich Null sein.

Dasselbe gilt für die Erhaltung der Bewegungsmomente (Flächensatz). Sei $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor der Flüssigkeitsteile, so ist

$$\operatorname{rot} p \mathfrak{r} \stackrel{s}{=} \nabla p \times \mathfrak{r}$$

und

$$\int_{\varphi} \mathfrak{r} \times \mu \mathfrak{g}' d\varphi \stackrel{s}{=} \int_{\varphi} \nabla p \times \mathfrak{r} \, d\varphi \stackrel{s}{=} \int_{\varphi} \operatorname{rot} p \mathfrak{r} \, d\varphi \stackrel{s}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times p \mathfrak{r}.$$

Für jede geschlossene Oberfläche ist

$$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \mathfrak{r} \stackrel{s}{=} \int_{\varphi} \operatorname{rot} \mathfrak{r} \, d\varphi \stackrel{s}{=} 0.$$

Ist p_0 das konstante Potential an der Oberfläche der Flüssigkeit, so ist

$$\int_{\varphi} \mathfrak{r} \times \mu \mathfrak{g}' \, d\varphi \stackrel{3}{=} \int_{0} d\mathfrak{v} \times p_0 \mathfrak{r} \stackrel{3}{=} 0,$$

also der Flächensatz erfüllt.

Flüssigkeitsbewegungen mit Beschleunungspotential.

399. Ehe wir die allgemeine Form der Bewegung idealer Flüssigkeiten betrachten, müssen wir einen noch spezielleren Fall der Flüssigkeitsbewegung beschreiben, welcher so wichtig ist und so häufig vorkommt, daß die Eigenschaften, welche eine Flüssigkeit in diesem Falle zeigt, oft irrtümlich für Eigenschaften gehalten werden, welche den idealen Flüssigkeiten bei allen Bewegungsformen zukommen.

Wir betrachten in den zunächst folgenden Abschnitten die Bewegungen von Flüssigkeiten, deren Geschwindheitsverteilung die kinematische Bedingung

(a) $$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{3}{=} \operatorname{rot} (\mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mathfrak{v})$$

erfüllt. Es sind dies zunächst alle ruhenden Flüssigkeiten ($\mathfrak{v} \stackrel{3}{=} 0$) und alle Flüssigkeiten, die sich ohne Wirbelringe (mit Geschwindheitspotential) bewegen ($\operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{3}{=} 0$), aber auch weit allgemeinere Strömungsformen.

Nach der Euler-Lambschen Formel 382.(a) ist diese kinematische Bedingung identisch mit

$$\operatorname{rot} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \stackrel{3}{=} 0 .$$

Die wahren Beschleunungen $\dot{\mathfrak{v}}$ der von uns betrachteten Strömungsformen sind also immer rotorfrei verteilt. Es gehört sonach z. B. zu denselben auch die konstante Rotation einer Flüssigkeit, wobei sich dieselbe wie ein starrer Körper bewegt. Ist nämlich die Rotationsbeschleunung $\dot{\mathfrak{w}}$ eines starren Körpers Null, so ist nach 378.(a) auch der Rotor der wahren Beschleunungen Null.

Alles dieses gilt auch für nicht ideale Flüssigkeiten, besonders oft zeigen aber ideale Flüssigkeiten Bewegungs-

formen, welche diese kinematische Bedingung erfüllen. Diese wichtige Tatsache wollen wir erst in Kap. 18 in ihren Konsequenzen verfolgen.

Sehr oft sind die äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}$ rotorfrei verteilt. Erfüllt nun eine ideale Flüssigkeit die kinematische Bedingung 399.(a), ist also ihre wahre Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$ ebenfalls rotorfrei verteilt, so gilt das gleiche auch für ihre inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0 .$$

Der Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen ist aber in idealen Flüssigkeiten der Definition nach rotorfrei verteilt. Es ist

$$\operatorname{rot} \mu \mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0 \quad \text{oder} \quad \mu \operatorname{rot} \mathfrak{g}' + \nabla \mu \times \mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0 .$$

Es folgt also

$$\nabla \mu \times \mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0 .$$

In solchen Strömungen stehen die inneren Beschleunungen auf den Niveauflächen der Dichte immer senkrecht. Die Niveauflächen der Dichte und der Spannung fallen also bei dieser Bewegungsform zusammen.

Da die Grenzflächen homogener, verschieden dichter, nicht mischbarer Flüssigkeiten notwendig Niveauflächen der Dichte sind, so sind sie bei dieser Bewegungsform auch Niveauflächen der Spannung und stehen auf den inneren Beschleunungen senkrecht.

400. Das häufige Vorkommen der Flüssigkeitsbewegungen mit Beschleunungspotential bringt aber auch eine Schwierigkeit mit sich, die wir erst viel weiter unten beseitigen können. Da die Bewegungsgleichung 396.(a) den absoluten Wert der Dichte enthält, kann man im allgemeinen aus gemeinsamen Bewegungen zweier Flüssigkeiten (oder, wie wir sehen werden, einer Flüssigkeit und eines starren Körpers) das Verhältnis ihrer absoluten Dichten bestimmen.

Nicht so, wenn die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ selbst ein Potential haben. Dann sind ausnahmsweise dieselben Flüssigkeitsbewegungen möglich, wenn die Dichte μ sämtlicher beteiligter Flüssigkeitsteile um die additive Konstante $\varkappa$ vergrößert wäre, denn da $\varkappa \mathfrak{g}'$ ein Potential hat, hat der Fluktor

$(\mu + \varkappa)\mathfrak{g}'$ ebensogut wie der Fluktor $\mu\mathfrak{g}'$ ein Potential und erfüllt also die Bewegungsgleichung 396. (a). Man kann sonach aus der Beobachtung von Flüssigkeitsbewegungen mit Beschleunungspotential die Dichten nur bis auf eine unbekannte additive Konstante, d. h. nur das Verhältnis der Dichtendifferenzen dreier Flüssigkeiten, nicht das Verhältnis der absoluten Dichten zweier Flüssigkeiten bestimmen.

Nur deshalb, weil man zufällig meist Flüssigkeitsbewegungen mit Beschleunungspotential beobachtet, entsteht die irrige Vorstellung, daß die Dichtendifferenzen und nicht, wie es richtig ist, die Dichtenverhältnisse von physikalischer Bedeutung sind.

401. *Erstes Beispiel: Strömungen mit Geschwindheitspotential.* Diese haben nach 399. (a) auch immer ein Beschleunungspotential. Hat das Geschwindheitspotential aus irgend einem Grunde Bestand, d. h. bilden sich keine Wirbelringe, so ist die Spannung nur von der Dichte abhängig, auch wenn die Flüssigkeit inhomogen und ungleichmäßig temperiert ist.

Beschränken wir uns auf die Betrachtung stationärer wirbelfreier Strömungen. In diesen hat die Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$ nach der Eulerschen Formel den Wert

$$\dot{\mathfrak{v}} \overset{3}{=} \tfrac{1}{2} \bigtriangledown \mathfrak{v}^2.$$

Die Spannung p bestimmt sich nach 396. (a) durch

$$\tfrac{1}{2}\mu \bigtriangledown \mathfrak{v}^2 \overset{3}{=} - \bigtriangledown p + \mu \mathfrak{g}_0 .$$

Soweit die Flüssigkeit konstante Dichte hat, gilt also

(a) $$p + \tfrac{1}{2}\mu \mathfrak{v}^2 = - \mu g_0 (h + \text{konst.}),$$

worin h die Höhe ist. Betrachten wir in einer solchen Flüssigkeit Orte, welche notwendig gleiches Potential p haben (z. B. zwei an denselben Luftraum grenzende Oberflächenstücke) und ruht die Flüssigkeit an einem derselben, der die Höhe h_0 hat, so hat sie an den anderen Orten gleichen Potentials p die Geschwindheit

$$\tfrac{1}{2} v^2 = g_0 (h_0 - h).$$

Dies ist Torricellis Gesetz der Ausflußgeschwindheiten.

In einer beliebig gekrümmten dünnen Röhre von konstantem Querschnitt strömt eine inkompressible Flüssigkeit

mit überall gleicher Geschwindheit und herrscht also die von der Geschwindheit unabhängige Spannungsverteilung

$$\nabla p \overset{3}{=} \mu \mathfrak{g}_0 .$$

Hat die Rohrleitung variablen Querschnitt, so ist die Geschwindheit der Flüssigkeitsströmung dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ des Rohres verkehrt proportional

$$\mathfrak{v} \overset{3}{=} \text{konst.} \frac{1}{\mathfrak{q}} .$$

Ist die Rohrleitung horizontal ($h = \text{konst.}$), so ist

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2} \mu v_0^2 \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right) .$$

Die Spannung ist hiernach in kleinen Querschnitten der Rohrleitung klein. Dort, wo sich der Querschnitt verjüngt, sinkt das Potential p und hat also sein Gefälle die Richtung der Strömung. Tatsächlich muß an einer solchen Stelle die Geschwindheit zunehmen, also die Beschleunung die Richtung der Strömung haben. Ist an weiten Stellen der Rohrleitung die Spannung größer als jene der Außenluft, so wird das Wasser durch Löcher oder seitliche Ansatzröhen ausfließen. An engen Stellen derselben Rohrleitung kann die Spannung aber kleiner sein als jene der umgebenden Luft und diese wird dann durch seitliche Ansatzröhren einströmen, worauf die Wasserstrahlsaugwerke und Gebläse beruhen.

402. *Strahlbildung.* Sind zwei verschiedene Flüssigkeiten durch eine ruhende Wand getrennt, welche von einer Ausflußöffnung durchbrochen ist, so kann die Flüssigkeit, deren Spannungen höher sind, in stationärer Form in den anderen Raum übertreten, so daß sich eine Trennungsfläche von konstanter Form, die Oberfläche des Strahles bildet. Es ist möglich, daß die den Strahl bildende Flüssigkeit sowohl, als auch die den Strahl unmittelbar umgebende Flüssigkeit eine Potentialströmung ausführen, wenn auch in letzterer Flüssigkeit stets ein Wirbelring vorhanden sein muß, der den Strahl umschließt, so daß dieser durch seine Öffnung fließt. Die Oberfläche des Strahles muß nun nach 399., weil sie eine Niveaufläche der Dichte ist, und die Strömung ein Beschleunungspotential hat, auch eine Niveaufläche der Spannung sein.

Sehen wir von der Schwerebeschleunung ab, so haben also die Flüssigkeitsteile keine Beschleunung in der Oberfläche des Strahles, sondern nur eine Zentralbeschleunung senkrecht zu derselben gegen den Krümmungsmittelpunkt ihrer Bahn. Die Größe der Geschwindheit mit der sie sich in der Oberfläche bewegen, bleibt konstant, und da im Gebiete jeder der beiden homogenen Flüssigkeiten nach 401. (a)

$$p + \tfrac{1}{2}\mu\,\mathfrak{v}^2 = \text{konst.},$$

so muß auf der ganzen Oberfläche des Strahles dieselbe Größe der Geschwindheit vorhanden sein. Tatsächlich würde es der als rotorfrei vorausgesetzten Verteilung der Geschwindheit widersprechen, wenn in benachbarten Stromlinien der Oberfläche verschiedene Geschwindheit vorhanden wäre.

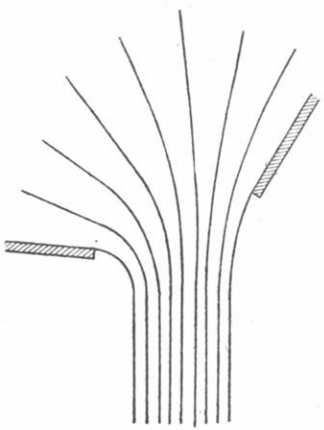

Fig. 85.

Die Oberfläche des Strahles muß an der Ausflußöffnung so in die Oberfläche der Gefäßwand übergehen, daß beide am Rande der Öffnung gemeinsame Tangentialebenen haben (Fig. 85). Denn hätten die Stromlinien eine scharfe Knickung, so müßte dort die Zentralbeschleunung der Flüssigkeitsteilchen der unendlich starken Krümmung der Bahnlinie wegen unendlich sein, was nicht möglich ist. Je nachdem die Gefäßwand an der Ausflußöffnung trichterartig konvergiert, zylindrisch ist oder divergiert, muß sich der Strahl kontrahieren, zylindrisch bleiben oder erweitern. Kirchhoff hat für ebene Strömungen mit Hilfe konformer Abbildungen die Strahlformen berechnet.[1])

403. *Zweites Beispiel: Konstante Rotation.* Wenn heterogene nicht mischbare Flüssigkeiten gemeinsam um eine vertikale Achse rotieren, so sind ihre wahren Beschleunungen die Zentralbeschleunungen

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik. 1. Bd. 22. Vorlesung (S. 290).

$$\dot{\mathfrak{v}} \doteq -\frac{4\pi^2}{\tau^2}\mathfrak{a},$$

worin $\mathfrak{a}$ der senkrechte Abstand von der Achse und τ die Umlaufszeit ist. Diese haben ein Potential

$$P = -\frac{2\pi^2}{\tau^2}a^2.$$

Die Schwerebeschleunung hat das Potential $-g_0 h$, worin h die Höhe ist. Die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ haben also das Potential

$$P' = -\frac{2\pi^2}{\tau^2}a^2 + g_0 h.$$

Da nach der Bewegungsgleichung

$$\mu \bigtriangledown P' = -\bigtriangledown p$$

ist, so haben die Flüssigkeiten, soweit ihre Dichte konstant ist, die Spannungsverteilung

$$p = \mu\frac{2\pi^2}{\tau^2}a^2 - \mu g_0 h + \text{konst}.$$

Die Niveauflächen der Spannung haben die Gleichung

$$\frac{2\pi^2}{\tau^2}a^2 - g_0 h = \text{konst}.$$

Solche Rotationsparaboloide müssen also auch die Grenzflächen homogener verschieden dichter, gemeinsam rotierender Flüssigkeiten sein. Auch die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit hat diese Form, gleichgültig ob das daran grenzenze Gas mit rotiert oder nicht, da diese Oberfläche der geringen Dichte des Gases wegen jedenfalls eine Niveaufläche der Spannung ist. Fig. 86 stellt die Form dieser Grenzflächen für die Umlaufszeit

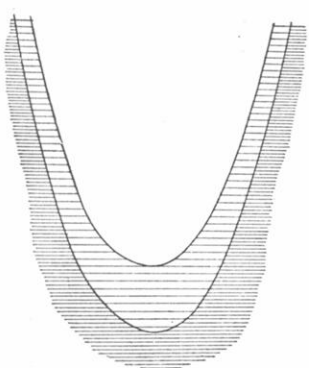

Fig. 86.

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{c}{g_0}} = 0{,}2\,\text{sec}.$$

dar, für welche der Parameter c derselben den Wert 1 hat.

404. *Konstante Beschleunung.* Wenn noch spezieller diese Flüssigkeiten sich mit der konstanten Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$ in

gerader Richtung verschieben, so sind auch die inneren Beschleunungen

$$\mathfrak{g}' \stackrel{s}{=} \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{g}_0$$

konstant, die Niveauflächen der Spannung und die Grenzflächen der Flüssigkeiten sind Ebenen, welche auf $\mathfrak{g}'$ senkrecht stehen (Fig. 87). Die schiefe Einstellung der Oberflächen von Flüssigkeiten in fahrbaren Reservoirs während des Anfahrens und Anhaltens ist bekannt, und oft z. B. bei dem Transport glühend flüssigen Eisens vom Hochofen zum Bessemerwerk oder bei Schiffshebewerken von technischer Wichtigkeit.

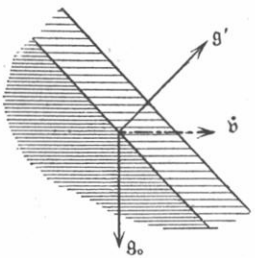

Fig. 87.

405. *Drittes Beispiel.* In *ruhenden inhomogenen Flüssigkeiten* sind die inneren Beschleunungen überall der Schwerebeschleunung gleich und entgegengesetzt, und die Niveauflächen der Spannung fallen sonach mit den Orthogonalflächen der Schwerebeschleunung zusammen, sind also mit Annäherung horizontale Ebenen, so daß die Spannung p nur von der Höhe h abhängt. Die Bewegungsgleichung 396. (a) nimmt die Form an

$$\mu\,\mathfrak{g}_0 \stackrel{s}{=} +\nabla p \quad \text{oder} \quad dp = -\mu g_0\, dh,$$

woraus folgt

$$p_1 - p_2 = g_0 \int_{h_1}^{h_2} \mu\, dh = \mu_0\, g_0\, (h_2 - h_1).$$

Das Integral stellt die Masse einer der ruhenden Flüssigkeit entnommenen vertikalen Säule von 1 cm² Querschnitt dar, μ_0 ist das nach der Höhe genommene arithmetische Mittel der Dichte. Diese hängt ebenfalls nur von der Höhe ab.

Da die wahren Beschleunungen Null sind, ist die Dichte nach 399. auch in ganz ungleichartigen ruhenden Flüssigkeiten bei beliebiger Verteilung der äußeren Beschleunungen eine Funktion der Spannung allein, und die Grenzflächen verschiedener Flüssigkeiten sind Niveauflächen der Spannung, in unserem Falle also Orthogonalflächen der Schwerebeschleunung. Deshalb ist die Oberfläche des ruhenden Meeres annähernd

kugelförmig. Die Oberfläche ruhender Gebirgsseen stellt die genaue Form der zufolge der Gravitation der Gebirgsmassen etwas unregelmäßigen Niveaufläche der Schwerebeschleunung dar, freilich nur dann, wenn die darüber stehende Luft sich nur mit geringen Beschleunungen bewegt.

406. *Zweite Methode der Dichtebestimmung.* Jede spezielle, vollständig berechenbare Flüssigkeitsbewegung kann, wenn ein Anhaltspunkt für die Spannungsverteilung p gegeben ist, zu Dichtemessungen verwendet werden, und umgekehrt. In der Praxis beschränkt man sich meist auf ruhende Flüssigkeiten. Nach 400. können wir dann nichts anderes hoffen, als das Verhältnis der Dichtendifferenzen dreier Flüssigkeiten bestimmen zu können.

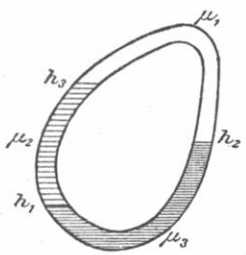

Fig. 88.

Drei nicht mischbare Flüssigkeiten von den Dichten μ_1 μ_2 μ_3 mögen einen zweifach zusammenhängenden, starr begrenzten Raum, z. B. eine ringförmig geschlossene Röhre, erfüllen, und in nur drei Trennungsebenen zusammenstoßen, welche horizontal sein müssen und die Höhen h_1 h_2 h_3 haben (Fig. 88).

Der Umlauf des Fluktors $\mu \mathfrak{g}_0$ in diesem Ring ist Null, weil derselbe ein Potential p hat, wobei wir (wie der Erfolg zeigt mit Recht) voraussetzen, daß dieses Potential nicht periodisch verteilt ist, wenn die Röhre nicht zu kleinen Querschnitt hat. Es ist also

$$\mu_1 (h_2 - h_3) + \mu_2 (h_3 - h_1) + \mu_3 (h_1 - h_2) = 0 ,$$

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} .$$

Das Verhältnis der Niveaudifferenzen gibt also das gesuchte Dichteverhältnis. Ist die eine Flüssigkeit ein Gas, so ist eine der drei Dichten zu vernachlässigen, und man erhält mit Annäherung das Verhältnis der absoluten Dichten der anderen zwei Flüssigkeiten.

Mischen sich die Flüssigkeiten 2 und 3 untereinander, aber nicht mit 1, was meist der Fall ist, wenn 1 ein Gas ist, so muß man sie beiderseits durch zwei Säulen des Mediums 1

trennen (Fig. 89), erhält also vier Trennungsebenen von den Höhen h_3 h_3' und h_2 h_2'. Nun ergibt sich ebenso wie vorhin

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1} = \frac{h_2 - h_2'}{h_3 - h_3'}.$$

Ist μ_1 zu vernachlässigen, so haben die beiden von dem Gase dieser Dichte eingenommenen Räume die konstanten Potentiale p und p' und es ist

$$\mu_2 g_0(h_3 - h_3') = p' - p = \mu_3 g_0(h_2 - h_2'),$$

woraus wieder das Verhältnis der absoluten Dichten folgt.

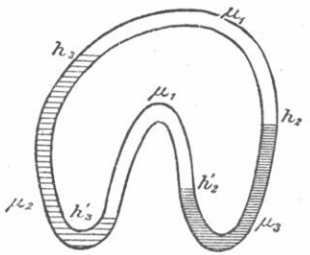

Fig. 89.

Die Höhendifferenzen mißt man mittels des Kathetometers (Fig. 90). Dieses ist ein genau horizontales Fern-

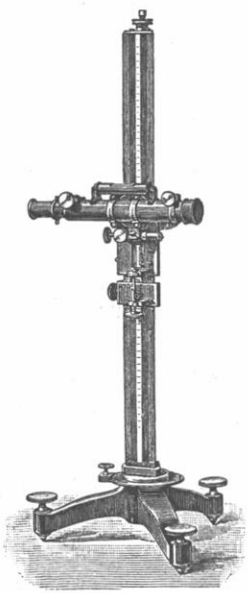

Fig. 90.

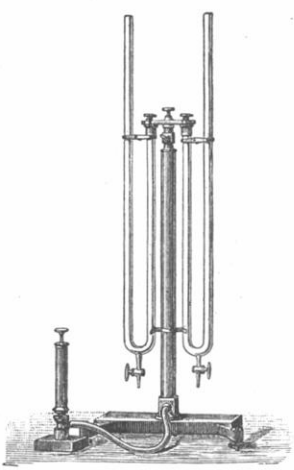

Fig. 91.

rohr mit Fadenkreuz, welches an einer genau vertikalen, mit einer Höhenteilung versehenen Achse verschiebbar und um dieselbe drehbar ist. Man visiert auf die Trennungsflächen und liest ihre Höhen an der Kathetometerteilung ab.

407. *Erste Methode zur Messung von Spannungsdifferenzen.* Kennt man die absolute Dichte einer Flüssigkeit und deren Bewegungsform, so kann man aus der Bewegungsgleichung 396. (a) die absoluten Werte der Spannungsdifferenzen, oder der Differenzen des skalaren Potentials $-p$ des Fluktors der inneren Beschleunungen angeben.

Wir setzen wieder voraus, daß die Gase verschwindende Dichte haben und sind damit über die absoluten Dichten aller Flüssigkeiten orientiert. Als Einheit derselben wählen wir die Dichte des Wassers von 4° C.

Da die Spannungsdifferenz zweier Punkte in einer ruhenden Flüssigkeit sich durch

$$p_1 - p_2 = g_0 \mu (h_2 - h_1) (\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-2}})$$

bestimmt, so findet sich die Einheit der Spannungsdifferenzen in ruhendem Wasser in zwei Punkten, welche $^1/_{981}$ cm Höhen-

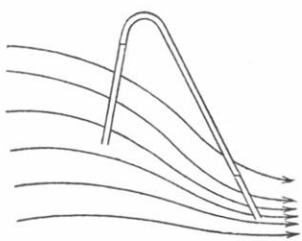

Fig. 92.

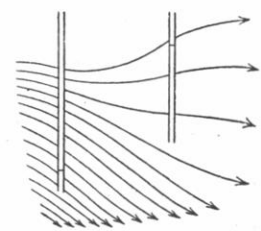

Fig. 93.

differenz haben. Die praktische Einheit der Spannungsdifferenzen findet sich in ruhendem Wasser in einer Höhendifferenz von 1000 cm. Da eine vertikale Wassersäule von 1 cm² Querschnitt und 1000 cm Höhe 1 kg Masse hat, bezeichnet man diese Potentialdifferenz auch mit 1 kg/cm², und da man Ursache hat anzunehmen, daß die Luft am Boden und in sehr großer Höhe dieselbe Spannungsdifferenz hat, bezeichnet man diese auch als eine „Atmosphäre". Es ist also

$$1 \text{ Atmosphäre} = 1\,\mathrm{kg/cm^2} = 981 \cdot 1000\,(\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-2}}).$$

Um die Spannungsdifferenz zweier Punkte einer bewegten Flüssigkeit zu messen, muß man dieselben durch eine dünne, beiderseits offene Röhre verbinden, welche mit ruhenden

Flüssigkeiten gefüllt ist. Damit dieselben ruhen, muß das nach der Höhe genommene arithmetische Mittel der Dichten in dieser Manometerröhre entsprechenden positiven oder negativen Wert haben, was immer dadurch erreicht werden kann, daß die Röhre erst aufwärts, dann abwärts verläuft (Fig. 92) und in der Biegung einen Luftraum enthält. Am einfachsten verwendet man zwei Manometer, welche die Spannungsdifferenz der beiden Punkte der bewegten Flüssigkeit gegen die als konstant vorausgesetzte Spannung des äußeren Luftraumes messen (Fig. 93).

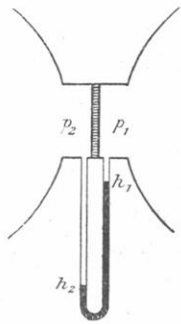

Fig. 94.

Sehr einfach ist es, mit einem Manometer die Potentialdifferenz zweier Gas- oder Dampfräume zu messen.

Verwenden wir ein Quecksilbermanometer (Fig. 94) und haben die Quecksilberkuppen die Höhendifferenz $(h_2 - h_1)$, so haben die beiden durch das Manometer verbundenen Gas- oder Dampfräume die Spannungsdifferenz

$$p_2 - p_1 = 13 \cdot 6 \frac{h_1 - h_2}{1000} \text{ Atmosphären.}$$

Starre Körper in idealen Flüssigkeiten.

408. Wir können die Bewegung starrer Körper in idealen Flüssigkeiten von allgemeiner Strömungsform berechnen, obgleich uns die durch die unbekannten kleinen Deformationen dieser Körper bestimmten partiellen inneren Beschleunungen unbekannt sind und wir nichts von denselben wissen, als daß sie zusammen (nach 274.) keine Beschleunungsgröße und kein Drehmoment bestimmen, wenn der starre Körper von Luft umgeben ist, was hier nicht der Fall ist. Auf diesen Fall können wir aber die Bewegung des eingetauchten starren Körpers zurückführen.

409. In der den starren Körper umgebenden Flüssigkeit ist eine Verteilung der Zahl p, des skalaren Potentials des Fluktors $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen der Flüssigkeit gegeben. Denken wir uns diese Verteilung in einer völlig

willkürlichen aber kontinuierlichen Weise in das Innere des starren Körpers fortgesetzt.

Es sei μ die ungleichförmige Dichte der Flüssigkeit, μ_1 die ungleichförmige Dichte des starren Körpers.

Es mögen die Teile des starren Körpers außer ihren sonstigen äußeren Beschleunungen die Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$, welche die Gleichung

$$\mu_1 \mathfrak{g}_1 = - \nabla p$$

erfüllen, haben, welche wir fingierte Beschleunungen nennen, da sie keineswegs zu den wirklichen inneren Beschleunungen der Teile des starren Körpers in Beziehung stehen, sondern ganz von der willkürlichen Potentialverteilung p im Innern des starren Körpers abhängen. Diese fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ erfüllen aber jedenfalls das Gegenbeschleunungsprinzip. Denn eine Flüssigkeit an Stelle des starren Körpers, welche im gegebenen Augenblicke dieselbe Dichteverteilung μ_1 hätte, könnte tatsächlich die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ haben, und also sieht man nach 398. ein, daß die Verteilung dieser Beschleunungen nicht dem Gegenbeschleunungs- und Momentensatz widersprechen kann.

Die wirklichen inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ des starren Körpers sind ganz anders verteilt. Ihre gesamte Beschleunungsgröße und ihr Drehmoment muß aber vektorisch gleich sein der Beschleunungsgröße und dem Drehmoment der fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$, denn sonst würden erstere Beschleunungen zusammen mit den inneren Beschleunungen der umgebenden Flüssigkeit das Gegenbeschleunungsgesetz und den Flächensatz nicht erfüllen.

Der starre Körper bewegt sich also ebenso, als wäre er nicht von der Flüssigkeit, sondern von Luft umgeben, als hätten seine Teile aber außer der Schwerebeschleunung und anderen wirklich gegebenen äußeren Beschleunungen noch die fingierten äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$.

410. *Beispiel: Starre Körper in nahezu ruhenden Flüssigkeiten.* In einer nahezu ruhenden Flüssigkeit ist die Potentialverteilung bestimmt durch

$$\nabla p \doteq \mu \mathfrak{g}_0 .$$

Ein starrer Körper in derselben bewegt sich so, als wäre die Flüssigkeit nicht vorhanden und als hätten seine Teile die äußeren Beschleunungen

$$\mathfrak{g} \overset{3}{=} \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{q}_0 \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1},$$

worin $\mathfrak{g}_1$ definiert wird durch

$$-\mu_1 \mathfrak{g}_1 \overset{3}{=} \nabla p \overset{3}{=} \mu \mathfrak{g}_0 \quad \text{also} \quad \mathfrak{g}_1 = -\frac{\mu}{\mu_1} \mathfrak{g}_0,$$

worin μ_1 die Dichte des starren Körpers in dem betrachteten Punkte, μ die Dichte der inhomogenen ruhenden Flüssigkeit in gleicher Höhe ist.

Die Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}_0$ des Schwerpunktes des starren Körpers bestimmt sich also nach 280.(a) durch

$$m_1 \dot{\mathfrak{v}}_0 \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu_1 \mathfrak{g} \, d\varphi \overset{3}{=} \mathfrak{g}_0 (m_1 - m),$$

worin m_1 seine Masse, m die Masse der verdrängten Flüssigkeit ist. Die Flüssigkeit muß eine entgegengesetzt gerichtete gleiche innere Beschleunungsgröße haben. Der starre Körper kann gegen die Schwerebeschleunung in Ruhe erhalten werden durch eine um $m \mathfrak{g}_0$ kleinere, die Flüssigkeit durch eine um $m \mathfrak{g}_0$ größere äußere Beschleunungsgröße so, als hätte der Körper eine um m kleinere, die Flüssigkeit eine um m größere Masse und als hätten sie keine inneren Beschleunungen.

Ist $\mathfrak{r}$ der Abstand vom Schwerpunkte des Körpers, in bezug auf welchen seine Schwere kein Drehmoment hat, so ist

$$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu_1 \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}_1 \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{r} \, d\varphi \overset{3}{=} m \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{r}_0$$

das Drehmoment der äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}$, worin $\mathfrak{r}_0$ den Abstand des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit (Metazentrum) vom Schwerpunkte des starren Körpers bedeutet.

411. *Das Schwimmen. Dritte Methode der Dichtebestimmung.* Der Schwerpunkt eines in zwei übereinander geschichtete ruhende Flüssigkeiten von den Dichten μ und μ_0 eingetauchten starren Körpers von der Dichte μ_1 verharrt in Ruhe, wenn dessen ganze Masse gleich der Masse der verdrängten Flüssig-

keiten ist. Sind φ und φ_0 die verdrängten Volume der beiden Flüssigkeiten, so muß also

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu - \mu_1} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

sein. μ_1 muß also zwischen μ und μ_0 liegen. Ist die Dichte μ_0 sehr klein, die übergeschichtete Flüssigkeit also ein Gas, so ergibt sich

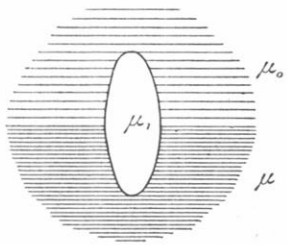

Fig. 95.

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\varphi}{\varphi + \varphi_0}.$$

Damit z. B. ein Panzerschiff nicht sinkt, muß seine Wasserverdrängung φ hinreichend groß sein. Damit es nicht kentert, muß der Kielraum hinreichenden Ballast erhalten. Der Schwerpunkt eines stabil schwimmenden Körpers muß nämlich unter dem Metazentrum liegen.

Die Aräometer (von Archimedes erfunden) sind zur Dichtemessung geeignete Schwimmkörper. Sie haben ihren Schwerpunkt möglichst tief und verlängern sich nach oben in einen Stab, der eine Teilung trägt, an welcher man die Dichte direkt ablesen kann (Fig. 96). Sie sinken desto tiefer in eine Flüssigkeit ein, je geringere Dichte diese hat.

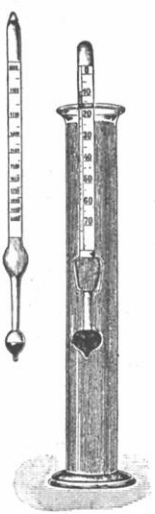
Fig. 96.

412. *Vierte Methode der Dichtebestimmung.* Viel feiner ist die ebenfalls von Archimedes herrührende Wägung des scheinbaren Massenverlustes eingetauchter Körper.

Ein an einem sehr dünnen Platindraht an einer Wage hängender Glaskörper mit tiefliegendem Schwerpunkt (Fig. 97) wird, in drei verschiedenen Flüssigkeiten von den Dichten μ_1 μ_2 μ_3 eingetaucht, gewogen. Die zu diesen Wägungen verwendeten Gewichtsstücke mögen die Massen m_1 m_2 m_3 haben und müssen sämtlich aus dem gleichen Stoffe bestehen, da sie selbst in Luft eingetaucht sind und einen Auftrieb erfahren. Dann ist

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_3 - \mu_1} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}.$$

Gewöhnlich ist das Medium 1 Luft, das Medium 3 Wasser und man setzt die Kenntnis der Dichten μ_1 und μ_3 voraus. Dann ergeben die drei Wägungen die absolute Dichte der dritten Flüssigkeit, die Masse des Tauchkörpers und das Volumen desselben.

Auf diese Weise kann man z. B. die zur Graduierung eines Aräometers nötigen Volumsbestimmungen ausführen, indem man das Aräometer selbst als Tauchkörper an eine Wage hängt und bis zu einem seiner Teilstriche in Wasser tauchen läßt. Seine Masse sei m_1, es erfahre den scheinbaren

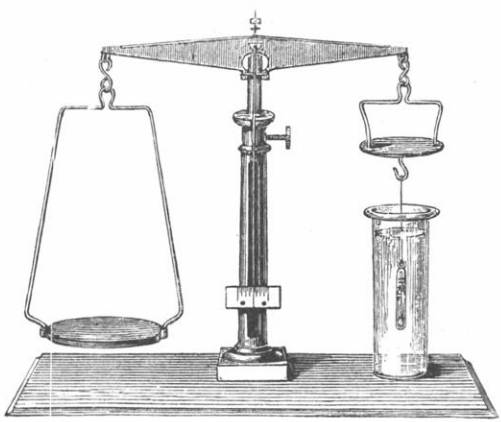

Fig. 97.

Massenverlust m. Eine Flüssigkeit, in welcher das Aräometer bis zu diesem Teilstrich eintauchend schwimmt, hat also die Dichte

$$\mu' = \frac{m_1}{m}\mu ,$$

worin μ die Dichte des Wassers ist.

413. Taucht man einen starren Körper in eine Flüssigkeit, welche samt dem sie einschließenden Gefäße auf einer Wage äquilibriert ist, so zeigt dieselbe einen scheinbaren Massengewinn, welcher ebenso groß ist, als die Masse der verdrängten Flüssigkeit, und zwar ist es im Ruhefalle gleichgültig, ob der starre Körper schwimmt, oder durch einen Faden

nach oben gezogen, oder mittels einer Stange nach unten gedrückt wird. Diese scheinbaren Massenänderungen beziehen sich nur auf Massenbestimmungen nach der vierten und fünften Methode (219. und 299.) durch Ruhebeobachtungen. Bei beschleunten Bewegungen eines Körpers in einer Flüssigkeit scheint derselbe im Gegenteile eine größere Masse zu haben, d. h. dieselbe äußere Beschleunungsgröße bewirkt eine kleinere Beschleunung des Körpers, weil sie sich zum Teil auf die umgebende Flüssigkeit überträgt, wie wir dies sogleich ausführen wollen.

414. *Zweites Beispiel. Bewegung einer starren Kugel in einer idealen Flüssigkeit.* Die Kugel ruhe anfänglich und die

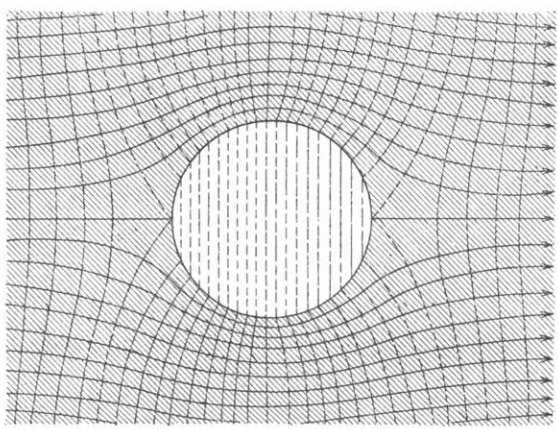

Fig. 98.

Flüssigkeit habe überall in größerer Entfernung dieselbe Geschwindheit $-\mathfrak{v}_0$. Ist die Strömung wirbelfrei und divergenzfrei, so ist sie durch diese Bedingungen vollständig beschrieben und leicht berechenbar. Fig. 98 stellt dieselbe dar. Die Spannung p ist nach 396. (a) und 382. (a) bestimmt durch

$$\text{(a)} \qquad \mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\mu \nabla \mathfrak{v}^2 \overset{s}{=} -\nabla p .$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Geschwindheit $\mathfrak{v}_0$ von der Zeit unabhängig ist und also die ganze Strömung stationär ist. Ferner sei die Dichte konstant, wie dies in einer inkom-

pressiblen Flüssigkeit immer zutrifft. Dann hängt die Spannung p nur von der Größe, nicht von der Richtung der Geschwindheit $\mathfrak{v}$ ab. Die Spannung ist also auf der Kugeloberfläche symmetrisch verteilt, so daß sie in dem auf $\mathfrak{v}_0$ senkrechten Äquator der Kugel, wo $\mathfrak{v}^2$ am größten ist, am kleinsten ist und nach beiden Polen symmetrisch zunimmt. Dann sind auch die fingierten Beschleunungsgrößen $\mu_1 \mathfrak{g}_1$ symmetrisch zu verteilen und heben sich auf, wenn auch die Dichte der Kugel ungleichförmig ist. Diese verharrt also in Ruhe, ohne daß eine äußere Beschleunung nötig ist, um sie ruhend zu

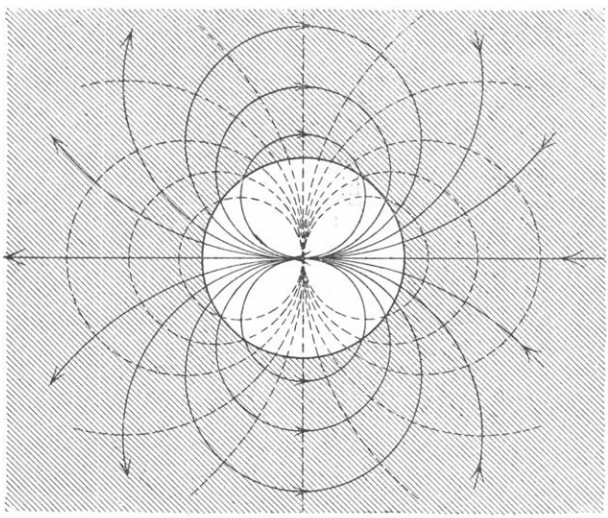

Fig. 99.

erhalten, obgleich die Flüssigkeit sie umströmt. Es scheint dies nur deshalb paradox, weil bei diesem Nullexperiment die Zähigkeit der Flüssigkeit allein zur Geltung kommt und wir also nie Gelegenheit haben, diesen Ruhefall wirklich zu beobachten, auch wenn die Kugel gleiche Dichte wie die Flüssigkeit hat und wir von der Schwerebeschleunung absehen können.

Zu dieser Geschwindheitsverteilung können wir jede für den starren Körper mögliche Geschwindheitsverteilung hinzufügen. Addieren wir die Geschwindheit $+ \mathfrak{v}_0$ zu allen Geschwindheiten des Feldes. Nun bewegt sich die Kugel

mit dieser Geschwindheit durch die in weiterer Entfernung ruhende und nur in der Umgebung der Kugel ausweichende Flüssigkeit. Die Vektorlinien (Fig. 99) dieses Geschwindheitsfeldes sind nicht die absoluten Bahnen der Flüssigkeitsteilchen, sondern die relativen Bahnen in bezug auf die Kugel. Diese Strömungsform hat eine stationäre Verteilung der Relativgeschwindheiten gegen die Kugel, während die absoluten Geschwindheiten sich gleichmäßig fortpflanzen (390.). Das ganze Feld (Fig. 99) ist gleich dem magnetischen Felde einer gleichmäßig magnetisierten Stahlkugel oder eines kleinen in ihrem Mittelpunkt befindlichen Magneten. Das Geschwindheitspotential P hat den Wert

(b) $$P \stackrel{1}{=} -\tfrac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}\,\mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{r}\,.$$

Hierin ist $\mathfrak{r}$ die Entfernung vom Kugelmittelpunkt, r_0 der Radius der Kugel. Die Verteilung der Beschleunungen ist nun keine andere als vorhin und ebenso die Verteilung der Spannungen, nur bewegen sich diese Verteilungen mit der Kugel. Diese bewahrt also Richtung und Größe ihrer Geschwindheit bei Abwesenheit äußerer Beschleunungen.

Wenn aber ihre Geschwindheit nicht konstant sein, sondern wenn sie sich mit der Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}_0$ bewegen soll, so gilt nach (a)

$$\nabla p + \mu \nabla \frac{\partial P}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\mu \nabla \mathfrak{v}^2 \stackrel{3}{=} 0\,.$$

In der Kugeloberfläche hat das Geschwindheitspotential nach (b) den Wert

$$P \stackrel{1}{=} -\tfrac{1}{2}\mathfrak{v}_0 \cdot \mathfrak{r}$$

und es ist

$$\frac{dP}{dt} \stackrel{1}{=} -\tfrac{1}{2}\dot{\mathfrak{v}}_0 \cdot \mathfrak{r} \stackrel{1}{=} \frac{\partial P}{\partial t} + \mathfrak{v}_0 \cdot \nabla P.$$

Hierin bedeutet $\frac{dP}{dt}$ die Fluxion von P in einem Punkte, der sich mit der Kugel bewegt, so daß sein Abstand $\mathfrak{r}$ vom Kugelmittelpunkte unveränderlich ist. Der Wert $\frac{dP}{dt}$ ist also gleichförmig verteilt und hat den Gradienten $-\frac{1}{2}\dot{\mathfrak{v}}_0$. Sehen wir von den zum Äquator symmetrischen, durch $\nabla \mathfrak{v}^2$ und $\mathfrak{v}_0 \cdot \nabla P$ bestimmten Teilen der Spannungsverteilung ab, welche nichts zur Beschleunung der Kugel beitragen, so kann die

Spannungsverteilung in der Kugeloberfläche als identisch mit der Verteilung des Wertes $-\mu \frac{dP}{dt}$ und also als einem fingierten gleichförmigen Felde mit dem konstanten Gradienten

$$\nabla p \stackrel{s}{=} +\tfrac{1}{2}\mu \dot{\mathfrak{v}}_0$$

angehörig angesehen werden. Durch dieses Feld bestimmen sich die fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ im Innern der Kugel

$$\mu_1 \mathfrak{g}_1 = -\tfrac{1}{2}\mu \dot{\mathfrak{v}}_0 .$$

Damit sich die Kugel also so bewegt, muß sie außer der Beschleunungsgröße $m_1 \dot{\mathfrak{v}}_0$, welche in Luft hinreichen würde, um ihr die Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}_0$ zu erteilen, noch die Beschleunungsgröße $\frac{1}{2} m \dot{\mathfrak{v}}_0$ erhalten, worin m_1 die Masse der Kugel, m die Masse der verdrängten Flüssigkeit ist. Die Kugel bewegt sich also in einer schwerlosen Flüssigkeit so als wie in Luft, aber als wenn ihre Masse um die halbe Masse der verdrängten Flüssigkeit größer wäre. Eine äußere Beschleunungsgröße $\mathfrak{b}$ bestimmt die Beschleunung

$$\dot{\mathfrak{v}}_0 \stackrel{s}{=} \frac{\mathfrak{b}}{m_1 + \frac{1}{2} m} .$$

Die Schwerebeschleunung $\mathfrak{g}_0$ bestimmt aber nach 410. eine Beschleunungsgröße $\mathfrak{b}$, welche der Differenz der beiden Massen proportional ist. Daher fällt eine starre Kugel in einer Flüssigkeit mit der Beschleunung

$$\dot{\mathfrak{v}}_0 \stackrel{s}{=} \frac{m_1 - m}{m_1 + \frac{1}{2} m} \mathfrak{g}_0 \stackrel{s}{=} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 + \frac{1}{2}\mu} \mathfrak{g}_0 .$$

415. *Das Oberflächenintegral der Spannung.* Um die fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ des starren Körpers zu berechnen, muß man die Verteilung des Potentials p in der Flüssigkeit willkürlich, aber so in den Raum des starren Körpers fortsetzen, daß sie in der Oberfläche desselben kontinuierlich ist. Es kommt sonach nur auf die Verteilung der Spannung p in der Oberfläche an. Man wird also direkt die Beschleunungsgröße und das Drehmoment der fingierten Beschleunungen aus der Spannungsverteilung in der Oberfläche berechnen können. Dieselben bestimmen sich durch

$$\mu_1 \mathfrak{g}_1 \stackrel{s}{=} -\nabla p .$$

Es ist also ihre Beschleunungsgröße $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu_1 \mathfrak{g}_1 \, d\varphi \overset{3}{=} -\int_{\varphi} \nabla p \, d\varphi \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} p \, d\mathfrak{o},$$

worin φ den Raum, $\mathfrak{o}$ die Oberfläche des starren Körpers darstellt. Das Drehmoment $\mathfrak{D}$ der fingierten Beschleunungen ist

$$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu_1 \mathfrak{r} \times \mathfrak{g}_1 \, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\varphi} \nabla p \times \mathfrak{r} \, d\varphi,$$

worin $\mathfrak{r}$ der Abstand von einem beliebig bewegten Punkte ist. Nun ist $\operatorname{rot} \mathfrak{r} \overset{3}{=} 0$ und nach 361. (c).

$$\operatorname{rot} p \mathfrak{r} \overset{3}{=} \nabla p \times \mathfrak{r},$$

also

$$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \operatorname{rot} p \mathfrak{r} \, d\varphi \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} p \mathfrak{r} \times d\mathfrak{o} \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{r} \times p \, d\mathfrak{o}.$$

Der starre Körper bewegt sich also so, als wäre er von Luft umgeben und als würde jeder unter dem Oberflächenelement $d\mathfrak{o}$ liegende Teil desselben die äußere Beschleunungsgröße

(a) $$d\mathfrak{b} \overset{3}{=} -(p - p_0) d\mathfrak{o}$$

erfahren, welche also in die Richtung des Flächenvektors des Oberflächenelementes $d\mathfrak{o}$ fällt. Hierin ist p_0 eine beliebige vom Ort unabhängige Zahl.

Diese Darstellung der Beschleunungsgröße $\mathfrak{B}$ und des Drehmomentes $\mathfrak{D}$ durch die Oberflächenintegrale

(b) $$\mathfrak{B} \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} p \, d\mathfrak{o} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{r} \times p \, d\mathfrak{o}$$

ist die vom mathematischen Standpunkte aus geeignetste. Wir brauchen nun die fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ der Massenteile des starren Körpers nicht weiter, sondern nehmen dafür die fingierten Beschleunungsgrößen $d\mathfrak{b}$ der oberflächlichen Teile des Körpers. Es ist auch nichts dagegen einzuwenden, daß man diese Beschleunungsgrößen $d\mathfrak{b}$ als partielle Beschleunungsgrößen, welche durch das direkte Gesetz (a) bestimmt sind, ansieht, denn alle partiellen Beschleunungen sind fingiert, und nur ihre Summe, die wahre Beschleunung, hat reale Bedeutung.

Hingegen ist es, wenn auch vom historischen Standpunkte aus begreiflich, so doch rein sachlich genommen ein theoretischer Fehler, die Gleichung 415. (a) zu einem fundamentalen Naturgesetz zu erheben, daraus die Definition der Spannung zu entnehmen und die Bewegungsgleichung 396. (a) der Flüssigkeiten abzuleiten. Die Gleichung 415. (a) ist weiter nichts als ein Hilfssatz zur Berechnung der Bewegung starrer Körper, sie ist ganz entbehrlich, wenn man die starren Körper als elastische Körper auffaßt und die Bewegungsgleichung der elastischen Medien verwendet. Die Gleichung 415. (a) hat für das Innere bewegter Flüssigkeiten nicht den geringsten Sinn und das gleiche gilt von der Definition des Potentials p als eines „Druckes, der im Inneren der Flüssigkeit auf jedes Flächenelement von beiden Seiten wirken" soll.

416. *Erstes Beispiel: Antrieb eines Kolbens.* Eine Flüssigkeit, in welcher die Potentialverteilung p vorhanden ist, sei durch ein starres Gefäß gegen die Außenluft, in welcher das Potential p_0 vorhanden ist, abgesperrt und kommuniziere mit demselben durch ein Quecksilbermanometer, welches die Spannungsdifferenz $(p - p_0)$ anzeigt. Ferner mögen noch in der Gefäßwand zylindrische, durch Kolben abgeschlossene Öffnungen oder andere Stöpsel- oder Klappenventile vorhanden sein. Die Beschleunungsgröße eines solchen Kolbens wird durch die bespülten Kolbenflächen, deren Flächenvektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_0$ sein mögen (Fig. 100), allein bestimmt, denn die Gleitfläche erfährt nur Beschleunungsgrößen, welche auf der Richtung der Zwangsbewegung senkrecht stehen, und zwar von Seite der Schmierflüssigkeit nach Gleichung 415. (a), abgesehen von der Reibung. Die Beschleunungsgröße des Kolbens ist also

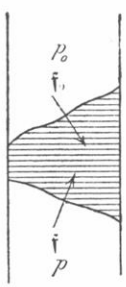

Fig. 100.

$$\mathfrak{B} \stackrel{3}{=} p\,\mathfrak{f} + p_0\,\mathfrak{f}_0 .$$

Es kommt aber die zur Zwangsbewegung senkrechte Komponente der Flächen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_0$ nicht in Betracht, sondern nur die gleichgerichtete Komponente $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_0 = -\mathfrak{q}$, worin $\mathfrak{q}$ der senkrechte Querschnitt des Zylinders ist. Es ist also

(a) $$\mathfrak{B} \stackrel{3}{=} (p - p_0)\,\mathfrak{q} .$$

Sind die Potentiale an den Kolbenflächen nicht hinreichend konstant, so bedeuten p und p_0 Mittelwerte.

417. *Zweite Methode der Spannungsmessung.* Man bestimmt diese Beschleunungsgröße des Kolbens, indem man denselben durch Belastung oder gespannte Federn im Gleichgewichte hält. Steht z. B. der Zylinder vertikal und hält eine Belastung, welche samt der Kolbenmasse m gr beträgt, den Kolben in Ruhe, so ist die Spannungsdifferenz der beiden Kolbenflächen

$$p - p_0 = m g_0 \frac{1}{q} (\text{gr sec}^{-2} \text{cm}^{-1}).$$

Drückt man m in Kilogramm aus und läßt die Schwerebeschleunung weg, so erhält man dieselbe in praktischem Maß

$$p - p_0 = \frac{m}{q} (\text{kg pro qcm}).$$

418. *Der Pascalsche Schulversuch. Die hydraulischen Maschinen.* Sieht man von Höhendifferenzen ab, so ist das Potential p im Innern einer ruhenden Flüssigkeit konstant und jeder Kolben in der Gefäßwand zeigt eine seinem Querschnitt proportionale Beschleunungsgröße. Hierauf beruhen die in der Technik vielfach verwendeten hydraulischen Maschinen, welche entweder bedeutende Beschleunungsgrößen mittels großer Kolbenflächen herzustellen oder eine gleichmäßige Verteilung derselben auf weit voneinander entfernte Kolben gestatten.

Die Arbeit der inneren Beschleunungen.

419. Die innere Beschleunung $\mathfrak{g}'$ eines Flüssigkeitsteilchens bestimmt sich durch die Bewegungsgleichung

$$\mu \mathfrak{g}' \stackrel{\cdot}{=} - \nabla p.$$

Ist $d\varphi$ das Volum und $\mathfrak{v}$ die Geschwindheit des Teilchens, so ist die Arbeit desselben zufolge der inneren Beschleunung, d. i. sein Zuwachs an Bewegungsenergie pro Sekunde

$$\mu \, d\varphi \, \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} - \mathfrak{v} \cdot \nabla p \, d\varphi.$$

Nun ist

$$- \mathfrak{v} \cdot \nabla p \stackrel{1}{=} p \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} p \mathfrak{v}.$$

Zufolge dieser Zerlegung erscheint zum ersten Male statt der Spannungsgefälle oder Spannungsdifferenzen der absolute

Wert p der Spannung selbst in unseren Rechnungen. Es hat dies hier aber nur formale Bedeutung.

Es ist also die Fluxion der Bewegungsenergie E eines Raumes φ der Flüssigkeit

$$\text{(a)} \qquad \dot{E} \doteq \int_{\varphi} p \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\varphi - \int_{\varphi} \operatorname{div} p\mathfrak{v}\, d\varphi + \dot{A},$$

worin A die Arbeit der äußeren Beschleunungen pro Sekunde ist. Das zweite Raumintegral kann in ein Oberflächenintegral verwandelt werden. Das erste kann mittels der Beziehnung

$$\frac{d}{dt}\delta\varphi = \operatorname{div} \mathfrak{v}\, \delta\varphi$$

umgestaltet werden. Es ist

$$\text{(b)} \qquad \dot{E} = \sum_{\varphi} p \frac{d}{dt}\delta\varphi - \int_{\mathfrak{o}} p\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} + A.$$

Die Fluxion der Bewegungsenergie der von der Oberfläche $\mathfrak{o}$ ausgeschlossenen Flüssigkeit läßt sich ebenso darstellen, jedoch hat dann der auf diese Oberfläche bezogene Wert das umgekehrte Vorzeichen, weil die Oberflächenelemente umgekehrt gezählt werden müssen. Dieses Oberflächenintegral stellt also einen Betrag an Bewegungsenergie dar, welchen die eingeschlossene Flüssigkeit pro Sekunde verliert und die ausgeschlossene Flüssigkeit gewinnt: die übertragene Bewegungsenergie.

Das Raumintegral stellt die Summe der Produkte der Spannung p in den Flüssigkeitsteilchen und der Fluxionen ihrer Volume $\delta\varphi$ dar. Dieses Raumintegral stellt einen von der eingeschlossenen Flüssigkeit pro Sekunde gewonnenen Betrag an Bewegungsenergie dar.

Man darf in beiden Integralen p um eine willkürliche additive Konstante vermehren, wodurch sich ihre Differenz nicht ändert.

420. Da die Dichte der Gase sehr gering ist, so ist bei nicht zu großen Beschleunungen die Fluxion der Bewegungsenergie eines Gasteilchens (d. i. seine Arbeit oder die Arbeit seiner Beschleunung) immer sehr klein. Es gilt dies sowohl

für die Arbeit der inneren als der äußeren Beschleunungen der Gasteilchen

$$\dot{E} \doteq 0, \quad A \doteq 0.$$

Die gewonnene Energie und die übertragene Energie enthalten aber zufolge der im obigen durchgeführten Zerlegung nicht die Dichte der Flüssigkeit und sind deshalb bei Gasen nicht klein, müssen also nahezu gleich sein. Hierzu kommt, daß die Spannung eines Gases nahezu konstant ist, wodurch die gewonnene Energie einfach gleich dem Produkte der Spannung und der Fluxion des ganzen Volums φ wird. Also ist die auf das äußere Medium übertragene Energie

(a) $$p \frac{d\varphi}{dt} \doteq \int_0 p \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}.$$

421. In *inkompressiblen* Medien ist die Divergenz der Geschwindheit oder die Fluxion der Volume immer Null, es ist also die gewonnene Energie immer Null und die Fluxion $\dot{E}$ der Bewegungsenergie, soweit sie von den inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ der Flüssigkeitsteile herrührt, immer durch das Oberflächenintegral dargestellt

$$\dot{E} \doteq -\int_0 p \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} + A.$$

Sie ist also der negativen übertragenen Energie gleich.

Ist außerhalb der Oberfläche $\mathfrak{o}$ der inkompressiblen Flüssigkeiten ein Gasraum von konstanter Spannung p_0, so ist

$$\int_0 p_0 \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} \doteq p_0 \int_\varphi \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\varphi = 0.$$

Dann bestimmen die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ keine Arbeit. Das gleiche gilt, wenn starre Körper in der Flüssigkeit oder an ihrer Oberfläche (starre Gefäße) sich befinden, und der ganze Komplex inkompressibler Medien von dem Raume konstanter Spannung p_0 umhüllt wird. Denn die Arbeit der starren Körper ist gleich der Arbeit ihrer fingierten Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$, und diese sind so verteilt, wie sie auch in einer Flüssigkeit verteilt sein könnten, so daß bei der Bildung aller Beschleunungsintegrale zwischen starren Körpern und Flüssigkeiten nicht besonders unterschieden zu werden braucht.

Grenzt ferner die inkompressible Flüssigkeit an ein ruhendes Medium, so verschwindet der auf diesen Teil der Oberfläche sich beziehende Anteil des Oberflächenintegrals, da die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ der Flüssigkeit hier notwendig senkrecht zu dem Flächenvektor $d\mathfrak{o}$ ist.

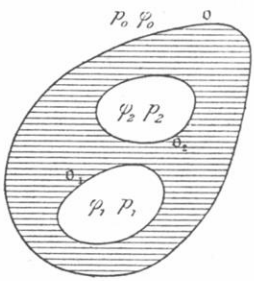

Fig. 101.

422. Wird eine inkompressible Flüssigkeit, die mehrere Gasräume φ_1 φ_2 von den Spannungen p_1 p_2 einschließt, außen von einem Gasraum konstanter Spannung p_0 umschlossen (Fig. 101), so bestimmen die inneren Beschleunungen der Flüssigkeit $\mathfrak{g}'$ die Arbeit oder die Fluxion der Bewegungsenergie der Flüssigkeit

$$\dot{E} \doteq -p_0 \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - p_1 \int_{\mathfrak{o}_1} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}_1 - p_2 \int_{\mathfrak{o}_2} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}_2$$

oder

$$\dot{E} = p_0 \frac{d\varphi_0}{dt} + p_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + p_2 \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Da die Fluxion des ausgeschlossenen Gasvolums φ_0 notwendig gleich und entgegengesetzt ist der Summe der Fluxionen der eingeschlossenen Gasvolume

$$-\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt},$$

so ist endlich

(a) $$\dot{E} = (p_1 - p_0)\frac{d\varphi_1}{dt} + (p_2 - p_0)\frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Ist hingegen die Flüssigkeit nach außen von einem starren Gefäß umschlossen, so ist

$$\dot{E} = p_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + p_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$$

und

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} = 0,$$

also

(b) $$\dot{E} = (p_1 - p_2)\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

423. Auf Grund der Arbeitsgleichung kann man die Bewegung einer Flüssigkeit vollständig berechnen, wenn diese

nur eine einzige Bewegungsfreiheit hat, und nur von einem und demselben Luftraum oder starren Körpern, welche ruhen oder deren Bewegung mitbestimmt ist, begrenzt wird. Auch die Gleichgewichtsbedingung läßt sich in solchen Fällen aus der Arbeitsgleichung gewinnen. So kann man z. B. die archimedischen und Pascalschen Gleichgewichtsfälle, das Torricellische Ausflußgesetz, die Wirkung des Stoßhebers usw. darstellen. Wir betrachten als Beispiel die einfachen Flüssigkeitsschwingungen.

In den Schenkeln eines **U**-Rohres vom Querschnitt q habe die Flüssigkeit die Höhe $l + h$ beziehungsweise $l - h$ (von der unteren Biegung gerechnet, Fig. 102), und die Geschwindheiten v bzw. $-v$. Ihre ganze Masse ist $m = 2\mu q l$, ihre Bewegungsenergie also

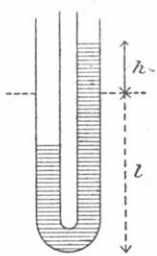

Fig. 102.

$$E = \mu q l v^2.$$

In der Sekunde nimmt der Inhalt des ersten Schenkels um $v q$ cm^3 zu, in dem anderen Schenkel ab, es wird also die Masse $\mu v q$ um $2h$ gehoben und die Schwerebeschleunung bestimmt die Arbeit

$$A = -2\mu v q h g_0.$$

Die inneren Beschleunungen tragen nichts zur Arbeit der Flüssigkeit bei. Es ist also $A = \dot{E}$ oder

$$-g_0 h = l\frac{dv}{dt} = l\frac{d^2h}{dt^2}.$$

Es ist dies eine Schwingungsgleichung. Die Schwingungsdauer bestimmt sich durch

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}.$$

Ein Pendel, dessen Länge gleich der größten Tiefe l der Flüssigkeit ist, schwingt also ebenso rasch wie diese Flüssigkeit. Besitzt das **U**-Rohr unten eine Erweiterung, so sind in dieser zwar die bewegten Flüssigkeitsmassen bedeutender, ihre Geschwindheiten aber kleiner, und da diese im Quadrat erscheinen, ist bei gleicher Bewegung der Oberflächen die Bewegungsenergie kleiner, die Schwingungsdauer also kürzer.

424. *Die Kirchhoffsche Schwingung.* Besonders einfach und interessant ist die Schwingung des Wassers in einem Graben mit symmetrischen Böschungen, welche aufeinander senkrecht stehen (Fig. 103). Die Stromlinien sind gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten die Böschungslinien sind. Diese stellen selbst eine Stromlinie dar, welche im tiefsten Punkte des Feldes unendlich stark gekrümmt ist. Dort muß deshalb die Geschwindheit Null sein.

Die Geschwindheitsverteilung ist divergenz- und rotorfrei. Die Niveauflächen des Geschwindheitspotentials bilden die orthogonale Schar von hyperbolischen Zylindern. Ihre Schnitte mit der Zeichnungsebene sind in Fig. 103 gestrichelt

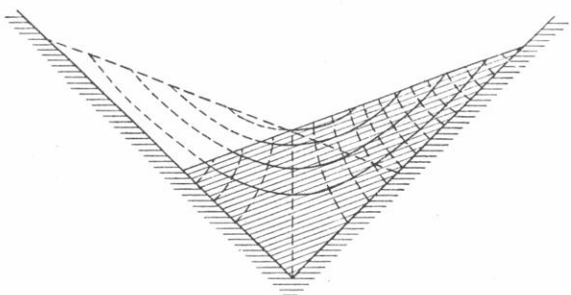

Fig. 103.

dargestellt und bilden die mit den Stromlinien kongruente, aber gegen dieselbe um einen rechten Winkel gedrehte Hyperbelschar.

Die Geschwindheit ist ferner homogen verteilt, d. h. eine lineare Funktion des Ortsvektors oder der Koordinaten. Deshalb bleibt jede Ebene in der Flüssigkeit, also auch die Oberfläche derselben, während der Schwingung eben. Die Bewegung läßt sich darstellen als die Summe zweier rectangulären konjugierten Schiebungen, als ein Schiebungspaar. Legen wir die Koordinatenachsen $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}$ horizontal und vertikal durch den tiefsten Punkt des Profils, so ist die Geschwindheitsverteilung

$$\mathfrak{v} \stackrel{3}{=} \varkappa\,\mathfrak{r}\cdot[\mathfrak{i};\mathfrak{j}] \quad \text{also} \quad \mathfrak{v}^2 \stackrel{1}{=} \varkappa^2\,\mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{i};\mathfrak{i}+\mathfrak{j};\mathfrak{j})\cdot\mathfrak{r} \stackrel{1}{=} \varkappa^2 r^2,$$

worin $\varkappa$ eine Funktion der Zeit und r der senkrechte Abstand von der Grundkante ist.

Sei v_0 die variable Geschwindheit am Ufer und a die halbe Breite der Wasserfläche oder die größte Tiefe des Wassers, so ist

$$v_0^2 = 2\varkappa^2 a^2$$

und

$$2a^2 v^2 = v_0^2 r^2 .$$

Die Bewegungsenergie E der Flüssigkeit bestimmt sich durch

$$4a^2 E = \Phi_z^r v_0^2 ,$$

worin Φ_z^r ihr Trägheitsmoment in bezug auf die Grundkante ist. Beschränken wir uns auf sehr kleine Schwingungen, so kann dieses als konstant angesehen werden und es ist pro Längeneinheit des Grabens

$$\Phi_z^r = \tfrac{2}{3} a^4 \quad \text{also} \quad E = \tfrac{1}{6} a^2 v_0^2 .$$

Sei ferner s die zu v_0 parallele Strecke, auf welcher das Wasser das Ufer beleckt, so ist der Schwerpunkt des schmalen Wasserkeiles von der Masse $\frac{1}{\sqrt{2}} a s$ um $\frac{\sqrt{2}}{3} s$ gehoben, also beträgt die Arbeit der Schwerebeschleunung pro Sekunde $-\tfrac{1}{3} g_0 a s v_0$. Es folgt

$$\dot{E} = \tfrac{1}{3} a^2 v_0 \frac{d v_0}{d t} = -\tfrac{1}{3} g_0 a v_0 s$$

oder

$$\frac{d v_0}{d t} = -\frac{g_0}{a} s ,$$

aus welcher Schwingungsgleichung die Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g_0}}$$

folgt. Das Wasser in einem solchen Graben schwingt also ebenso rasch als ein Pendel, dessen Länge gleich der größten Tiefe des Wassers ist.

425. *Die Oberflächenwellen.* Eine der bekanntesten Flüssigkeitsbewegungen sind die Wasserwellen. Die trochoidische Form der Wasseroberfläche, die Fortschreitung dieser Form mit konstanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit senkrecht zu den Wellenzügen, die kreisförmigen Bahnen der Wasserteile und die mit der Tiefe rasch abnehmende Intensität des Wellen-

schlages wurden zuerst von E. und W. Weber (1825) genauer beschrieben.

Die einfachste ebene Wellenbewegung wird beschrieben durch

(a) $v_y = 0\,, \quad v_x = b\, e^{\alpha z} \sin \alpha (c\, t - x)\,, \quad v_z = b\, e^{\alpha z} \cos \alpha (c\, t - x)\,.$

Hierin ist z die vertikale Richtung, x die Fortschreitungsrichtung, y die Richtung des Wellenkammes. α, c und b sind Konstante, von welchen b sehr klein sei.

Diese Gleichungen sind zunächst Fortpflanzungsgleichungen, da sie das Argument $(c\, t - x)$ enthalten. Da man zu denselben Werten der Geschwindheitskomponenten $v_x v_y v_z$ gelangt, wenn man die Zeit t um irgend einen Betrag und den Ort x um einen $c$fach größeren Betrag vergrößert, so verschiebt sich das ganze Bewegungsbild, ohne sich sonst zu verändern, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in der x-Richtung.

Die Verteilung ist in der x-Richtung periodisch und hat die Periode oder Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$. Die totale Geschwindheit $v = b\, e^{\alpha z}$ hat an jedem Punkte des Feldes konstante Größe und schließt den veränderlichen Winkel $\alpha (c\, t - x)$ mit der z-Richtung ein. An jedem Punkte des Feldes dreht sich also die Richtung der Geschwindheit gleichförmig in der $x\,z$-Ebene mit der Umlaufszeit

$$\tau = \frac{\lambda}{c}\,.$$

Man nennt ein solches Vektorfeld ein Drehfeld. Jedes Teilchen der Flüssigkeit beschreibt mit dieser Umlaufszeit einen (sehr kleinen) Kreis vom Radius

$$r = \frac{v\,\tau}{2\pi} = \frac{\tau}{2\pi}\, b\, e^{\alpha z}\,.$$

Diese Geschwindheiten v und Kreise sind in derselben Horizontalebene $x\,y$ überall gleich groß, wachsen aber in der z-Richtung, so daß die Flüssigkeitsteilchen in der Oberfläche die größten Kreise beschreiben.

Wir bezeichnen zunächst den Mittelpunkt des Bahnkreises jedes Teilchens als seine Ruhelage. Eine jede Gerade von der x-Richtung in der ruhenden Flüssigkeit hat in der bewegten

Flüssigkeit die Gestalt einer Trochoide (verkürzten Zykloide). An der Oberfläche, wo der Radius der Kreisbahnen am größten ist, tritt oft die einfache Zykloide als Schnitt der Wasseroberfläche mit der xz-Ebene auf. Dann haben die Wellenberge scharfe Kanten, während die Wellentäler immer flach sind. Das Umgekehrte kann nicht eintreten, weil des gleichen Vorzeichens von v_x und v_z wegen der Umlauf der Wasserteilchen in den Wellentälern in einer zur Fortpflanzung der Welle entgegengesetzten Richtung erfolgt. Eine verlängerte Trochoide kann als Leitkurve der Wasseroberfläche nicht auftreten, sondern die Kämme der Wellen schäumen, wenn die Wellenbewegung zu heftig wird.

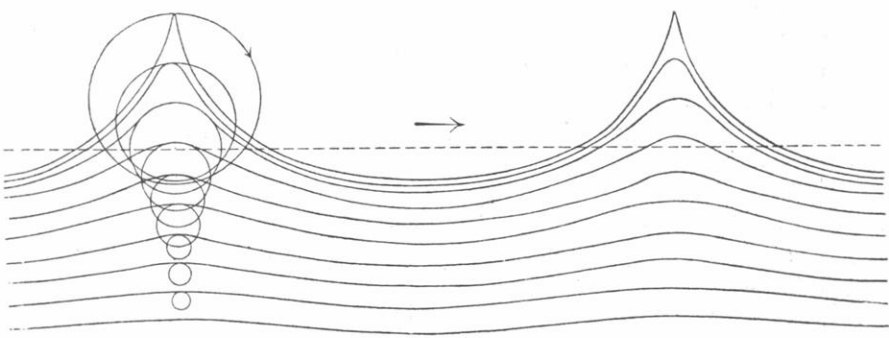

Fig. 104.

Es ist sonach zweifellos, daß diese Bewegungsform mit den bekannten Wasserwellen wohl übereinstimmt und wir wollen zeigen, daß sie mit den Bewegungsgleichungen im Einklange steht. Daß sie keine besonders fernliegende Lösung derselben darstellt, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden. Exponentialfunktionen und im speziellen Falle trigonometrische Funktionen stellen die einfachsten Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen dar und solche sind alle die Bewegung bestimmenden Gleichungen wenigstens mit Annäherung.

Diese Wellenbewegung stellt aber sogar die einfachste denkbare wellenartige Verteilung eines Vektors dar, denn sie ist die einzige, in welcher (bei gleichem Vorzeichen von v_x und v_z) der Vektor divergenzfrei und rotorfrei verteilt ist.

Eine ideale Flüssigkeit kann diese Bewegungsform unter folgenden Bedingungen annehmen. Weil die Divergenz der Geschwindheit präzis Null ist, ändert kein Flüssigkeitsteil bei der Bewegung auch nur im geringsten sein Volumen. Auch inkompressible Flüssigkeiten sind sonach dieser Bewegung fähig. Es bewahrt also jeder Flüssigkeitsteil bei seiner Bewegung auch seine Dichte.

In der ruhenden Flüssigkeit ist die Dichte nur von der Höhe abhängig, die horizontalen Ebenen sind also Niveauflächen der Dichte. Diese deformieren sich bei (sehr langsam) anwachsender Amplitude b der Wellen zu immer höheren Wellenzügen oder trochoidischen Zylindern, bewahren aber auch in dem ausgebildeten Wellenzug ihren Charakter als Niveauflächen der Dichte.

Nun ist die Geschwindheitsverteilung ferner auch rotorfrei und das gleiche gilt sonach von der Verteilung der wahren Beschleunungen. Damit also eine ideale Flüssigkeit dieser Wellenbewegung fähig sei, muß nach 399. die Spannung p eine Funktion der Dichte sein. Die trochoidischen Zylinder, zu welchen die horizontalen Schichten der ruhenden Flüssigkeit sich deformieren, sind und bleiben also auch Niveauflächen der Spannung. Jedes Flüssigkeitsteilchen bewahrt sein Volum, seine Dichte und seine Spannung. Den gleichen Schluß können wir für alle bisher beschriebenen divergenz- und rotorfreien Flüssigkeitsbewegungen ziehen. Die Spannung ist in denselben eine unveränderliche Eigenschaft der Teilchen.

Es ist hervorzuheben, daß wohl die Dichte, aber nicht die Spannung in der ganzen Flüssigkeitsmasse konstant sein darf. Denn die Teilchen bewegen sich in kreisförmigen Bahnen, ihre Zentralbeschleunungen müssen durch innere Beschleunungen bestimmt sein, und diese sind von dem Spannungsgefälle abhängig. Ohne die Schwerebeschleunung wäre also eine solche Wellenbewegung nicht denkbar. Ohne diese wäre in der ruhenden Flüssigkeit die Spannung konstant und müßte es also in der bewegten Flüssigkeit bleiben, was unmöglich ist. In der ruhenden Flüssigkeit ist die Spannungsverteilung

$$p - p_0 = -\mu g_0 z_0$$

vorhanden. Da jedes Teilchen sich gleichförmig im Kreise dreht, so ist die Erhebung $(z - z_0)$ des Teilchens über die Höhe z_0 seiner Ruhelage seiner horizontalen Geschwindheit v_x proportional

$$z - z_0 = \frac{\tau}{2\pi} v_x .$$

In der bewegten Flüssigkeit ist also die Spannungsverteilung

(b) $$p - p_0 = \mu g_0 \left(\frac{\tau}{2\pi} v_x - z \right)$$

vorhanden. Die Bewegungsgleichung 396. (a) hat für langsame Bewegungen (kleine Amplituden), für welche die totalen und lokalen Beschleunungen identisch sind, die analytische Form

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \mu \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \mu g_0 .$$

Setzen wir die Werte der Variablen aus (a) und (b) ein, so sehen wir, daß diese Wellenbewegung die Bewegungsgleichungen erfüllt, wenn

(c) $$c = \sqrt{\frac{g_0}{\alpha}} .$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Wellen ist also der Wurzel aus der Schwerebeschleunung und aus der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ proportional. Von der Dichte der Flüssigkeit ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig. Für Wasserwellen von der Länge

$$\lambda = 100 \quad 1000 \quad 10000 \text{ cm}$$

ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = 125 \quad 390 \quad 1250 \text{ cm/sec.}$$

426. Die Gleichungen (a) und (b) stellen auch die Flüssigkeitsbewegung in Wasserwellen größerer Amplitude richtig dar. Es erscheint dann in den Bewegungsgleichungen noch der Gradient des Wertes

$$\tfrac{1}{2} \mu \mathfrak{v}^2 = \mu \frac{2\pi^2 r^2}{\tau^2} = \mu g_0 \frac{\pi r^2}{\lambda},$$

um welchen sich der Fluktor der wahren von jenem der lokalen Beschleunung unterscheidet. Deshalb muß auch die

Spannung um den gleichen Wert niedriger sein, oder es muß in Gleichung (b) z um den Betrag

(d) $$h = \frac{\pi r^2}{\lambda}$$

größer gezählt werden. Die Erhebung $(z - z_0)$ der Teilchen ist also ebenfalls um den Betrag h größer, d. h. der Mittelpunkt ihrer Kreisbahnen liegt um diese kleine Höhe h über ihrer Ruhelage. Daher kommt es, daß sich die Kämme der Wellen höher über das Wasserniveau erheben, als die Wellentäler unter dasselbe herabsinken.

In Gewässern von geringer Tiefe kann sich diese Wellenform nach 425. (a) nicht ausbilden, da das Grundwasser jedenfalls ruht. Dann bewegen sich die Wasserteilchen in elliptischen Bahnen und haben die Wellen eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

---

18. Die Zustandsgleichung und die Kontinuitätsgleichung.

427. Im vorigen Abschnitte haben wir an zahlreichen leicht beobachtbaren Bewegungsformen der Flüssigkeiten nachgewiesen, daß der Fluktor $\mu\,\mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen immer ein skalares Potential hat

$$\mu\,\mathfrak{g}' \stackrel{s}{=} -\nabla p,$$

dessen negativen Wert wir die Spannung p genannt haben. Es ist so die Form der Bewegungsgleichung bestimmt und wir haben die Vektorverteilung $\mathfrak{g}'$ damit auf die Verteilung zweier Skalare μ und p zurückgeführt, also ein Bestimmungsstück der Beschleunungsverteilung gewonnen. Nun sind noch zwei skalare Gleichungen notwendig, um die Fluxion der Variablen p und μ zu berechnen.

428. Die Änderungen dieser Variablen werden durch ein Gesetz verbunden, welches man die Zustandsgleichung nennt.

Bei der Ableitung dieses Gesetzes wollen wir, wie überall in vorliegender Darstellung, nicht von einem speziellen oder gar statischen Experimente ausgehen. Wir gründen viel-

mehr unsere Schlüsse auf den Typus der allgemeinen Bewegungen idealer Flüssigkeiten.

Es ist unverkennbar, daß (in sonst homogenen Flüssigkeiten) bei beliebiger Dichteverteilung nicht nur der Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen, sondern die wahren Beschleunungen $\dot{\mathfrak{v}}$ selbst immer ein Potential haben

$$\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{v}} \stackrel{s}{=} 0 .$$

Zunächst ergibt sich dies unmittelbar aus der charakteristischen Tatsache, daß eine ideale Flüssigkeit immer, außer in den sogleich zu berücksichtigenden Ausnahmefällen, eine Strömung mit Geschwindheitspotential, also keine allgemeine Strömungsform annimmt. Fast alle weiter oben beschriebenen, oft vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen sind in ihrem ganzen Felde wirbelfrei. Eine Strömung mit Geschwindheitspotential hat aber auch ein Beschleunungspotential (nach 399).

Ferner ergibt sich dies unmittelbar aus der charakteristischen Tatsache, daß die Wirbelringe einer Flüssigkeit materiellen Bestand haben. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, wie in 386. nachgewiesen wurde, daß die wahren Beschleunungen $\dot{\mathfrak{v}}$ der Flüssigkeit immer rotorfrei verteilt sind.

429. Nun ist es aber leicht zu beobachten, daß die Wirbelringe sowie die Potentialringe der Flüssigkeit nur dann materiellen Bestand haben, wenn die äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}$ rotorfrei verteilt sind, wie dies meist der Fall ist.

Setzt man aber eine zylindrische Schale, in welcher sich eine radial von einem galvanischen Strom durchflossene Flüssigkeit befindet, auf den Pol eines großen Magneten, so daß der magnetische Vektor parallel zur Achse des Zylinders verläuft, so haben die magnetischen Beschleunungen der Flüssigkeitsteile kein Potential und es bildet sich sofort ein Wirbel aus, indem die Flüssigkeit zu rotieren beginnt. Man kann auch auf diese Weise geschlossene Wirbelringe in einer ausgedehnten Flüssigkeitsmasse erzeugen.

Es ist also nicht eine der Flüssigkeit notwendig zukommende Eigenschaft, daß ihre wahre Beschleunung $\dot{\mathfrak{v}}$,

sondern daß ihre inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ rotorfrei verteilt sind

(a) $$\text{rot}\,\mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0\,.$$

Sind die äußeren Beschleunungen nicht rotorfrei, so sind es auch die wahren Beschleunungen nicht.

430. Nun haben aber die Wirbelringe und die ringförmigen Räume des Geschwindheitspotentials nur in chemisch homogenen, gleichmäßig temperierten Flüssigkeiten materiellen Bestand.

Die rasche Auflösung von Wirbelringen, welche in Wasser von ungleichmäßiger Temperatur oder von ungleichmäßigem Salzgehalt fortschreiten, ist leicht zu beobachten. Ebenso die spontane Bildung von Wirbeln beim Zusammenmischen von Wassermassen verschiedener Temperatur oder verschiedenen Salzgehaltes.

In chemisch inhomogenen oder ungleichmäßig temperierten idealen Flüssigkeiten haben also die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ nicht notwendig ein Potential.

431. Erwägen wir, daß der Fluktor $\mu\,\mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen in allen idealen Flüssigkeiten ein Potential hat

$$0 \overset{3}{=} \text{rot}\,\mu\,\mathfrak{g}' \overset{3}{=} \mu\,\text{rot}\,\mathfrak{g}' + \nabla\mu \times \mathfrak{g}'\,,$$

so erkennen wir, daß in chemisch homogenen und gleichmäßig temperierten Flüssigkeiten auch bei ungleichförmiger Verteilung der Dichte mit Notwendigkeit

$$\nabla\mu \times \mathfrak{g}' \overset{3}{=} 0$$

ist, d. h. die inneren Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ stehen notwendig auf den Niveauflächen der Dichte senkrecht.

Da der Fluktor

$$\mu\,\mathfrak{g}' = -\nabla p$$

dieselbe Richtung hat wie die innere Beschleunung $\mathfrak{g}'$, so ist

(a) $$\nabla\mu \times \nabla p \overset{3}{=} 0\,,$$

d. h. die Niveauflächen der Dichte und Spannung fallen immer zusammen. In chemisch homogenen und gleichförmig temperierten idealen Flüssigkeiten ist die Spannung p eine Funktion der Dichte.

Da man die Dichte als einen Zustand der Flüssigkeitsteilchen bezeichnet, so kann man die Spannung p ebenfalls als einen Zustand desselben ansehen. Beide Zustände ändern sich nur, wenn das Volum des Flüssigkeitsteilchens sich ändert.

Man bezeichnet die gesetzmäßige Beziehung zwischen Spannung und Dichte als die Zustandsgleichung

$$p = f(\mu).$$

Eine besonders einfache Funktion der Dichte scheint die Spannung keineswegs zu sein. Für kleine Spannungsänderungen kann man setzen

(a) $$dp = \varkappa_1 \, d\mu,$$

worin der Wert des Koeffizienten $\varkappa_1$ durch den chemischen Zustand des Mediums und durch die als konstant angenommene Temperatur des Mediums bestimmt wird.

Daß das Potential p eines physikalischen Vektors nicht nur analytische Bedeutung hat, sondern sich wie ein physikalischer Zustand verhält, ist nichts Ungewöhnliches und trifft auch für andere analytische Ableitungen physikalischer Vektorverteilungen zu. So ist z. B. die Divergenz der Gravitationsbeschleunung ebenfalls durch die Dichte des Mediums direkt bestimmt (vgl. § 386 S. 265).

432. *Die isentropische Zustandsänderung.* Wir haben durch die Bedingung, daß die Temperatur des Mediums konstant sein soll, die stets mitspielenden thermischen Vorgänge insofern ausgeschaltet, als in diesem Falle der Wärmevektor, dessen Potential die Temperatur ist, überall und dauernd Null ist. Es tritt dies ein, wenn die Zustandsänderungen langsam erfolgen und die Wärmeleitungsfähigkeit des Mediums eine große ist.

Es ist aber auch auf dem gerade entgegengesetzten Wege eine Abstraktion von den thermischen Vorgängen möglich. Die Gase haben eine so geringe Wärmeleitungsfähigkeit, daß bei raschen Zustandsänderungen derselben die Wärmeleitung keine Rolle spielt. Da auch in Gasen die Wirbelringe materiellen Bestand haben, muß auch in diesem Falle die Spannung eine Funktion der Dichte sein

(b) $$dp = \varkappa_2 \, d\mu.$$

Der Koeffizient $\varkappa_2$ dieser isentropischen Zustandsgleichung hat aber einen anderen Wert als der Koeffizient $\varkappa_1$ der isothermischen Zustandsgleichung 431. (a).

433. *Erhaltung der Masse bei kleinen Volumsänderungen.* Die Änderung der Dichte eines Flüssigkeitsteilchens wird ausschließlich durch dessen Volumsänderung bestimmt. Das Gesetz der Erhaltung der Masse bei Volumsänderungen darf nicht mit dem viel allgemeineren Gesetz der Erhaltung der Summe der Massen aller an einem Vorgang beteiligten Körper verwechselt werden. Komprimiert man eine in einem Zylinder durch einen Kolben abgeschlossene Flüssigkeit, so wird nicht nur behauptet, daß die Summe der Massen der Flüssigkeit und des Kolbens konstant bleibt, sondern daß die Masse der Flüssigkeit, also das Produkt aus Dichte μ und Volum φ mindestens bei kleinen Änderungen konstant bleibt

$$\text{(a)} \qquad \mu\, d\varphi + \varphi\, d\mu = 0\,.$$

Dieser Satz folgt im wesentlichen aus den Versuchen Guerickes über die Dichte dilatierter Gase (siehe Kap. 21). Er stammt aber aus vorwissenschaftlicher Zeit, in welcher man die Volumsänderungen von Flüssigkeiten überhaupt noch nicht nachgewiesen hatte und die Kompression der Gase noch wenig studiert hatte. Die Gleichung (a) wird noch heute ohne Beweis als (im Gegensatze zu allen übrigen Zustandsgleichungen) mit absoluter Genauigkeit geltend angesehen, was nur in folgender Weise begründet werden kann: Man hat bei so verschiedenen Vorgängen nachgewiesen, daß die Masse einzelner fester und flüssiger Körper bei Eigenschaftsänderungen derselben konstant bleibt, besonders auch bei Formänderungen, z. B. beim Pulverisieren eines festen Körpers, daß es eines besonderen Beweises bedürfte, um anzunehmen, daß bei der Dichteänderung einer Flüssigkeit oder eines Gases nur die Summe der Massen der beteiligten Körper (Flüssigkeit und Gefäß) konstant bleibt, nicht aber die Masse jedes einzelnen dieser Körper.

Nicht nur die Masse, sondern auch die Wärmekapazität einer Gasmenge scheint bei Volumsänderungen mit großer Annäherung konstant zu bleiben.

434. *Die Kontinuitätsgleichung.* Bezeichne φ das Volumen eines bewegten Flüssigkeitsteilchens, so folgt

$$\frac{d}{dt}\mu\varphi = 0$$

oder

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{div}\mathfrak{v}.$$

Hieraus folgt die Kontinuitätsgleichung, welche die Fluxion der Dichte bestimmt

(a) $$-\frac{d\mu}{dt} = \mu \operatorname{div}\mathfrak{v}.$$

Diese kann, da

$$\frac{d\mu}{dt} \overset{1}{=} \frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\nabla\mu$$

ist, auch in die Form

(b) $$-\frac{\partial\mu}{\partial t} = \operatorname{div}\mu\mathfrak{v}$$

gebracht werden (vergl. 383. (e).

435. *Die longitudinalen Wellen.* Zur Bestimmung des Koeffizienten $\varkappa_2$ der isentropischen Zustandsgleichung bietet sich vor allem eine charakteristische Bewegungsform dar, die longitudinalen Wellen. Daß alle Flüssigkeiten und Gase dieser Bewegungsform fähig sind, wurde auf Grund der Theorie des Schalles erkannt und die akustischen Beobachtungsmethoden haben das Studium dieser Wellen sehr erleichtert, ja erst ermöglicht. Nun wollen wir zeigen, daß die Möglichkeit dieser Bewegungsform aus den Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten folgt und daß der Koeffizient $\varkappa_2$ der Zustandsgleichung in einfacher Beziehung zu der Schallgeschwindigkeit steht.

Aus der Bewegungsgleichung und Zustandsgleichung läßt sich die Spannung eliminieren. Dies ergibt

$$\mu\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} \overset{2}{=} -\varkappa_2\nabla\mu.$$

Wir haben hier die partielle Fluxion der Geschwindheit an die Stelle der totalen gesetzt, was nur zu einer befriedigenden Annäherung führt, wenn sämtliche Geschwindheiten sehr klein sind. Nur dann sind die Bewegungsgleichungen linear und homogen und haben einfache Integrale. Tatsächlich zeigen

nur sehr schwache Schallwellen einfache Fortpflanzung und Superposition. Daß sich zwei schwache Schallwellen überdecken ohne sich zu stören, entspricht der Eigenschaft der Integrale homogener linearer Differentialgleichungen, daß die Summe zweier Integrale wieder ein Integral derselben ist.

Differenzieren wir nach der Zeit unter Zuziehung der Kontinuitätsgleichung

$$\mu \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \overset{3}{=} - \varkappa_2 \nabla \frac{\partial \mu}{\partial t} \overset{3}{=} \varkappa_2 \nabla \operatorname{div} \mu \mathfrak{v}.$$

Wir haben hierbei das Produkt der als sehr klein vorausgesetzten Fluxionen $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ vernachlässigt. Vernachlässigen wir auch das skalare Produkt der kleinen Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\nabla \mu$, so fällt die Dichte ganz aus der Gleichung heraus und es ergibt sich

(a) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \overset{3}{=} \varkappa_2 \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Dies ist nach 391.(a) die Differentialgleichung einer allgemeinen longitudinalen Fortschreitung des Vektors $\mathfrak{v}$, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit c sich durch

(b) $$c^2 = \varkappa_2$$

bestimmt. Das Quadrat der Schallgeschwindigkeit c einer Flüssigkeit oder eines Gases ist dem Koeffizienten $\varkappa_2$ der Zustandsgleichung derselben gleich.

Da in allen Medien Schallwellen möglich sind, ist der Koeffizient $\varkappa_2$ der isentropischen Zustandsgleichung eine wesentlich positive Zahl, d. h. mit steigender Dichte steigt die Spannung jeder Flüssigkeit und jedes Gases.

436. Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit ist für die meisten Gase und Dämpfe das einzige Mittel, welches uns zu Gebote steht, um den Wert des Koeffizienten $\varkappa_2$ zu bestimmen.

Zu dieser Messung bedient man sich einer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Resonatorröhre $a\,b$ (Fig. 105), welche man durch Änderung ihrer Länge abstimmt auf den Ton einer Pfeife oder eines longitudinal schwingenden Stabes, der in seiner Mitte festgestellt ist und mit einer Endplatte a die Resonatorröhre begrenzt (Kundt). Das Auf-

treten der stehenden Wellen in der Resonatorröhre und ihre Länge erkennt man am besten mittels der Kundtschen Staubfiguren § 346.

Das Verhältnis dieser Wellenlängen in verschiedenen die Röhre erfüllenden Flüssigkeiten und Gasen gibt das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten. Da die Schallgeschwindig-

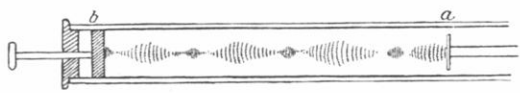

Fig. 105.

keit in Luft bekannt ist, ergeben sich so die absoluten Werte aller anderen Schallgeschwindigkeiten. Man erhält für:

	Schallgeschwindigkeit c (cm pro sec)	Koeffizient $\varkappa_2$ $cm^2\ sec^{-2}$
Quecksilber	200000	$40{,}0 \times 10^9$
Sodalösung	159000	25,3
Wasser	145000	21,0
Äthyläther	115000	13,2
Wasserstoff	127000	16,2
Leuchtgas	49000	2,4
Wasserdampf bei 100° C.	42000	1,77
Luft	33100	1,10
Kohlendioxyd	25000	0,63
Ätherdampf bei 40° C.	19500	0,38

437. Da die Spannung nach der Zustandsgleichung mit der Dichte zunimmt, und diese bei Volumsverkleinerung zunimmt, so folgt, daß die Spannung eines Flüssigkeitsteilchens steigen muß, wenn sein Volum abnimmt. Es ist nach der Zustandsgleichung

$$dp = \varkappa\, d\mu$$

und nach dem Gesetz der Erhaltung der Masse

$$d\mu = -\mu \frac{d\varphi}{\varphi},$$

woraus folgt

(a) $$dp = -\varkappa\mu \frac{d\varphi}{\varphi}.$$

Den Koeffizienten $\varkappa\mu$ nennt man den Kompressionsmodul. Wir prüfen diese Folgerung an einem statischen Experimente.

438. *Statische Kompression.* Eine Flüssigkeit (oder ein Gas) von der Spannung p sei in einem starrwandigen Gefäße durch einen Kolben abgeschlossen, die Spannung des äußeren Raumes sei p_0. Bei vermehrter bzw. verminderter Belastung des Kolbens (Fig. 106) senkt bzw. hebt sich derselbe, so daß das Volum der eingeschlossenen Flüssigkeit kleiner bzw. größer wird. Man bezeichnet diese Erscheinung als die Elastizität der Flüssigkeit.

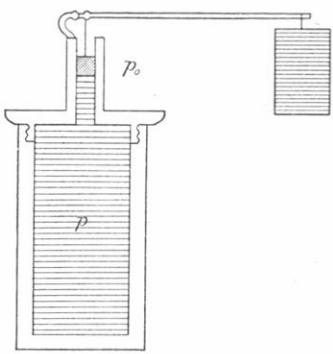

Fig. 106.

Da nun nach der zweiten Methode der Spannungsmessung (417.) diese Belastung der Potentialdifferenz $(p - p_0)$ der eingeschlossenen Flüssigkeit gegen die Außenluft proportional ist, so erkennt man, daß diese tatsächlich desto größer wird, je mehr das Volum der eingeschlossenen Flüssigkeit sich verkleinert.

Das Gefäß, in welchem die Kompression vorgenommen wird, erfährt eine elastische Ausweitung, wenn die Spannung im Innern derselben größer ist als außen. Man kann dies an Kautschukballons oder Aneroidbarometern leicht beobachten und es kann also darauf sogar eine Methode der Messung von Spannungsdifferenzen gegründet werden (vergl. Kap. 23).

Handelt es sich um die Bestimmung der Kompressibilität von Flüssigkeiten, wobei sehr bedeutende Spannungserhöhungen, aber kleine Volumsänderungen zu beobachten sind, so muß das Gefäß dadurch vor Ausweitung geschützt werden, daß es ganz in die Flüssigkeit eintaucht, so daß keine Spannungsdifferenz seines Innenraumes gegen den Außenraum vorhanden ist. Dann verkleinert sich der Fassungsraum des Gefäßes bei Spannungserhöhung ebenso wie ein solider Körper aus dem Material der Gefäßwand. Man kann also nur den Überschuß

der Kompressibilität der eingeschlossenen Flüssigkeit gegen die Kompressibilität des Materials der Gefäßwand erkennen. Letztere kann jedoch auf Grund des bekannten elastischen Verhaltens dieses Materials berechnet werden. Man verwendet eine dünnwandige Glasbirne, welche mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt ist und mit der äußeren Flüssigkeit durch ein Kapillarrohr kommuniziert, welches eventuell durch einen Quecksilberfaden abgeschlossen ist (Fig. 107). Komprimiert man die äußere Flüssigkeit mittels einer Kompressionspumpe, so steigt ihre Spannung, und diese kann mittels eines Manometers gemessen werden. Die Spannung der Flüssigkeit innerhalb der Birne steigt in gleichem Maße und die Verschiebung des Quecksilberfadens zeigt den Überschuß der Volumsverkleinerung an (Piëzometer von Oerstedt).

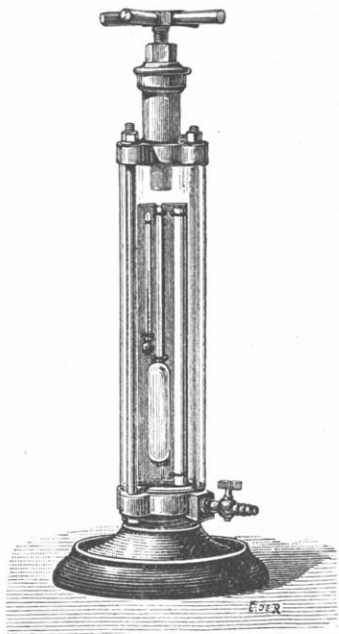

Fig. 107.

Man erhält so den Kompressionsmodul für

	$\mu \varkappa_1$ (gr cm^{-1}sec^{-2})	μ	$\varkappa_1$
Quecksilber	50×10^{10}	13,6	37×10^9
Wasser	2	1,0	20
Äthyläther 0° C.	0,9	0,72	12,5

Die aus der bekannten Dichte dieser Flüssigkeiten berechneten Werte des isothermischen Koeffizienten $\varkappa_1$ stimmen recht wohl mit den aus der Schallgeschwindigkeit berechneten Werten des isentropischen Koeffizienten $\varkappa_2$.

439. *Erste Methode zur Messung der absoluten Dichten der Gase.* Diese sind uns noch unbekannt, jedenfalls aber sehr klein.

Da nun die Schallgeschwindigkeit c in Gasen von derselben Größenordnung ist wie in Flüssigkeiten, so folgt, daß der Kompressionsmodul μc^2 der Gase sehr klein sein muß, d. h. daß die Gase bei großen Volumsänderungen nur kleine Spannungsänderungen zeigen.

Es ist deshalb leicht, den ungefähren Wert $\mu \varkappa_1$ des Kompressionsmoduls der Gase durch ein statisches Experiment zu bestimmen, und so das Kompressionsgesetz zu bestätigen. Man sperrt eine Gasmenge in dem oben geschlossenen Schenkel eines Quecksilbermanometers (Fig. 108) ab und mißt den Zusammenhang zwischen den Niveaudifferenzen der Quecksilberkuppen und den Volumsänderungen des Gases.

Die folgende Tabelle gibt die so beobachteten Kompressionsmoduln der Gase an, welche bei konstanter Temperatur und normaler Spannung für alle Gase nahezu gleich sind. Dieses einfache Gesetz der Gasausdehnung bei konstanter Temperatur kann erst in Kap. 20 in umfassender Form ausgesprochen werden.

Da der Koeffizient $\varkappa_2 \doteq \varkappa_1$ durch die Schallgeschwindigkeit bestimmt ist, so können wir vorläufige Werte der absoluten Dichten der Gase von normaler Spannung und Temperatur berechnen.

	$\varkappa_1 \mu$ (gr cm^{-1} sec^{-2})	$\varkappa_2$ (cm^{+2} sec^{-2})	μ (gr cm^{-3})
Wasserstoff	$1{,}02 \times 10^6$	$16{,}2 \times 10^9$	0,000063
Luft		1,1	0,00093
Kohlendioxyd		0,63	0,0016

Fig. 108.

Stünden uns nicht zufälligerweise hochsiedende Flüssigkeiten wie Wasser, Quecksilber, Öl zur Verfügung, so wären die Entdeckungen von Torricelli und Guericke, welche wir im nächsten Abschnitte besprechen wollen, noch heute nicht gemacht. In diesem Falle könnten wir mit obiger Methode, die ungemein kleinen Gasdichten zu bestimmen, sehr zufrieden sein.

440. Diese teilweise statische Methode ist jedoch noch durch die notwendig eintretende Wärmeleitung kompliziert und

gibt deshalb nicht ganz richtige Werte des isentropischen Kompressionsmoduls und der Gasdichten. Man kann diesen Fehler hier noch vermeiden, indem man die Kompressionsbeobachtungen in so kurzer Zeit vornimmt, daß die Wärmeleitung geringfügig ist.

Hierzu ist eine im wesentlichen von Clement und Desormes herrührende Versuchsanordnung geeignet. Man öffnet einen Rezipienten, in welchem ein Gas von gemessener Spannung sich befindet, kurze Zeit, so daß sich notwendig die gleichfalls bekannte Spannung der Außenluft in den Rezipienten eingestellt haben muß. Hiermit ist die Spannungsänderung bekannt. Die zugehörige Dichteänderung läßt sich durch Wägung des Rezipienten vor und nach dem Versuch feststellen. Man erhält hierdurch Werte der Koeffizienten $\varkappa_2$ der Zustandsgleichung, welche mit den aus der Schallgeschwindigkeit bestimmten sehr wohl übereinstimmen. Würde man diesen Versuch so einrichten, daß die zugehörigen Volumsänderungen des Gases direkt gemessen werden können, so würde man den isentropischen Kompressionsmodul, und damit genaue Werte der Gasdichten nach 439. erhalten.

441. Nicht die bei gewöhnlicher Temperatur keiner Verflüssigung fähigen Gase, sondern die im übrigen gasartigen, aber kondensierbaren Dämpfe zeigen vor dem Übergange in den flüssigen Zustand die kleinsten, ja vielleicht sogar negative Werte des isothermischen Kompressionsmoduls. Letzterer Fall, daß nämlich die Spannung bei Volumsverkleinerung nicht steigt, sondern sinkt, würde allerdings nur beobachtbar sein, wenn der Übergang des Dampfes in die Flüssigkeit kontinuierlich erfolgen würde. Derselbe spaltet aber nach Erreichung einer maximalen Spannung, ohne weiter seine Eigenschaften zu ändern (gesättigter Dampf), bei weiterer Kompression immer größere Mengen der Flüssigkeit ab. In diesem Fall ist also der isothermische Kompressionsmodul Null. Wir kommen hierauf sogleich zurück.

Bei dem Clement und Desormesschen Versuche erhält man aber auch für Dämpfe positive Werte des isentropischen Koeffizienten $\varkappa_2$. Die gesättigten Dämpfe verschiedener Flüssigkeiten verhalten sich hierbei verschieden, indem einige bei

rascher Ausdehnung, andere bei rascher Kompression Nebel bilden, also teilweise kondensieren.

Bei der Fortleitung schwacher Schallwellen verhält sich ein gesättigter Dampf wie ein Gas. Starke Schallwellen können aber die Nebelbildung einleiten. Bei sehr feuchter klarer Luft (im Hochgebirge während einer Regenpause) kann man z. B. beobachten, daß bei dem scharfen Knall einer Peitsche eine Nebelfahne von der Peitschenschnur ausgeht.

19. Die gesättigten Dämpfe.

442. Zu Galileis Zeit beobachtete man in einem florentinischen Garten, daß sich auch bei bester Konstruktion einer Brunnenpumpe das Grundwasser nicht höher als 1015 cm heben läßt. Es ist dann die Spannung an dem oberen Niveau der Wassersäule gering (um 1015 gr pro cm^2 kleiner als die Spannung der äußeren Luft an dem Grundwasserniveau), und es tritt rasches Verdampfen schon bei gewöhnlicher Temperatur ein. Unter dem noch höher gehobenen Pumpenkolben füllt sich das Steigrohr mit Wasserdampf.

Fig. 109.

443. Sehr folgenreich wurde folgende Modifikation dieses Experimentes durch Guericke (1645). Dieser sog das Wasser mittels einer Pumpe aus einem geschlossenen Kupfergefäß, welches sich hierbei mit kaltem Wasserdampf füllte. Man kann dieses Experiment mittels einer gläsernen Wasserspritze wiederholen, die durch einen Hahn verschließbar ist (Fig. 109). Dieselbe läßt sich leicht bei geöffnetem Hahn mit etwas luftfreiem Wasser füllen. Schließt man dann den Hahn und zieht nun den Kolben heraus, so sinkt die Spannung des Wassers sofort und ungemein rasch, der geringen Kompressibilität des Wassers wegen. Aber sie sinkt um nicht mehr als 1015 gr pro cm^2 (wie man sich z. B. durch eine an den Kolben angeschlossene Federwage überzeugen kann), bei weiterer Volumvergrößerung ändern die Flüssigkeit und der Dampf ihre Eigenschaften und ihre Spannung nicht mehr,

es entsteht aber eine immer größere Menge Dampf von gleicher, also ganz bestimmter Spannung.

444. Guericke füllte ferner eine mehr als 10 m lange, an einem Ende geschlossene Röhre völlig mit Wasser, tauchte ihr offenes Ende so in einen Wasserkübel, daß keine Luft eindrang, und richtete nun die Röhre auf (Wasserbarometer). Ob nun die Röhre schief oder senkrecht steht, die Höhendifferenz des unteren und oberen Wasserniveaus beträgt stets 1015 cm, der darüberstehende Wasserdampf hat stets die entsprechende konstante Spannung und kondensiert oder bildet sich in größerer Menge, je nachdem durch das Neigen der Barometerröhre der Dampfraum des Barometers verkleinert oder vergrößert wird (Fig. 110).

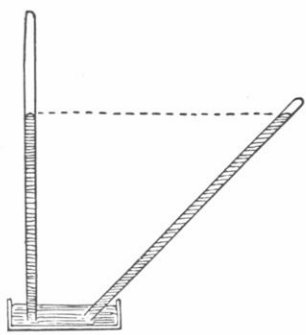

Fig. 110.

445. Man kann ferner einen Rezipienten unter Zuhilfenahme von Temperaturänderungen mit kaltem Dampf füllen. Leitet man die Dämpfe von bei 101° siedendem Wasser, welche eine etwas höhere Spannung als die Außenluft haben, längere Zeit durch den Rezipienten, so verdrängen sie die in demselben enthaltene Luft und erwärmen den Rezipienten auf 100°. Schließt man denselben nun und kühlt ihn bis zu normaler Temperatur ab, so kondensiert der Wasserdampf zum Teil, und seine Spannung sinkt hierbei um 1015 cm.

446. Ganz in derselben Weise findet die Dampfbildung aller anderen Flüssigkeiten statt, nur daß bei gegebener Temperatur die Dampfspannungen verschiedener Flüssigkeiten verschieden sind, und zwar desto kleiner, je höher der Siedepunkt der betreffenden Flüssigkeit ist.

Die folgende Tabelle gibt für verschiedene Flüssigkeiten den Siedepunkt in Celsiusgraden (für normale Luftspannung) und die Differenz der Dampfspannung der Flüssigkeit gegen die Spannung des Wasserdampfes bei derselben normalen Temperatur (20° C.).

Flüssigkeit	Siedepunkt bei normaler Spannung	bei 20° C. Differenz der Dampfspannungen	Änderung der Spannung pro 1° C.
Kohlendioxyd	− 80° C.	58800 gr/cm²	1500 gr/cm²
Schwefeldioxyd	− 20	3000	135
Äthylchlorid	+ 12	1330	55
Äthyläther	35	570	27
Alkohol	78	37	4,6
Wasser	100	0	1,5
Propionsäure	142	− 20	0,37
Chinolin	238	− 23	0,04
Quecksilber	350	− 23,3	0,0007

Der Torricellische Versuch der Verdampfung des Quecksilbers durch Ausdehnung bei gewöhnlicher Temperatur ist der älteste und grundlegende auf diesem Gebiete (1643.) Das Guerickesche Wasserbarometer ist eine Nachbildung des Torricellischen Quecksilberbarometers.

447. Die Differenzen der Dampfspannungen verschiedener Stoffe bei gegebener Temperatur, ebenso die Differenzen der Dampfdichten sind vollkommen konstant, von allen anderen Versuchsbedingungen unabhängig. Man darf also jedem gesättigten Dampf eine bestimmte absolute Dichte und eine bestimmte absolute Spannung zuschreiben, welche nur von der Temperatur abhängen.

Die Änderung der Dampfspannungen mit der Temperatur ist in obiger Tabelle angegeben. Sie ist desto kleiner, je kleiner die Dampfspannung ist, und für hochsiedende Flüssigkeiten, vor allem Quecksilber, praktisch gleich Null.

448. *Untere Grenze der Dampfspannungen.* Von prinzipieller Bedeutung ist es, daß die Dampfspannungen hochsiedender Flüssigkeiten bei Herabsetzung der Temperatur sich einer bestimmten, für alle gemeinsamen unteren Grenze nähern, von welcher die Spannung des Wasserdampfes bei 20° C. noch um etwa + 23,6 gr/cm², die Spannung der Propionsäure bei gleicher Temperatur aber nur um 3,6 gr/cm², jene des Quecksilberdampfes nur um 0,3 gr/cm² entfernt sein mag.

Je tiefer die Temperatur sinkt, desto mehr nähern sich

alle Dämpfe in ihrer Spannung dieser bestimmten Grenzspannung.

449. *Anwendungen des Barometers.* Die absolute Konstanz der Spannung der Dämpfe bei bestimmter Temperatur, ja des Quecksilberdampfes in einem größeren Temperaturintervall hat hohe experimentelle Bedeutung. Man legt diese Spannung der Messung aller Spannungsdifferenzen zugrunde und gewinnt hierdurch die Möglichkeit, Spannungen, welche an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten gemessen wurden, miteinander vergleichen zu können, d. h. ihre Differenzen in absolutem Maße angeben zu können. Hierzu dient das Barometer (Fig. 111).

Fig. 111.

Zunächst hat man die langsame zeitliche Variation der Spannung der Luft erkannt. Diese ist im Mittel 1033 gr/cm² größer als die Spannung des kalten Quecksilberdampfes, so daß die Säule des Quecksilberbarometers 76 cm Höhe hat. Dieser Barometerstand schwankt aber oft um $\pm$ 2 cm, ja ausnahmsweise um $\pm$ 5 cm. Die Luftspannung zeigt eine tägliche und jährliche Schwankung und außerdem unregelmäßige Änderungen je nach den Luftströmungen.

Ferner verfolgen die zahlreichen über die ganze Erde zerstreuten meteorologischen Stationen die Spannungsverteilungen der Luft in der Nähe der Erdoberfläche. Aus derselben folgt die Beschleunungsverteilung der Luft, also ist die Verteilung der Windrichtung und Windstärke wesentlich durch diese Spannungsverteilung mitbestimmt. Fig. 112 stellt eine Wetterkarte dar, in welcher die Linien gleicher Luftspannung (Isobaren) und ferner die durch Pfeile angedeuteten Windrichtungen zu bemerken sind. Diese weichen überall von den auf den Isobaren orthogonalen Gefällslinien der Luftspannung im gleichen Drehungssinne ab, was davon herrührt, daß die Luftströmungen, abgesehen von dem Spannungsgefälle, ihre Richtung in bezug auf den Fixsternhimmel bewahren, so daß sich dieselbe in bezug auf die Erde dreht.

450. *Zweite Methode zur Bestimmung der Luftdichte.* Von besonderer theoretischer Wichtigkeit ist die Verteilung der

Luftspannung in vertikaler Richtung. Falls die Luft eine meßbare Dichte hat, so muß die Luftspannung nach oben zu abnehmen. Pascal wies bald nach Erfindung des Barometers nach, daß die Luftspannung auf dem 1000 m hohen Puy-de-Dôme um 117 gr/cm² kleiner ist, als am Fuße dieses Berges. Die Barometerstände unterscheiden sich für diese Höhendifferenz um 8,6 cm.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die mittlere absolute Dichte μ der Luft sich zur Dichte des Quecksilbers μ_0 wie

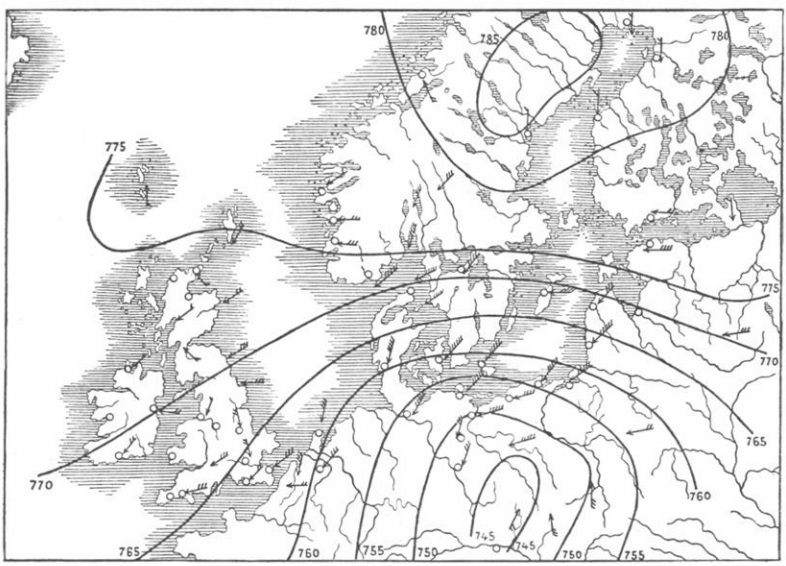

Fig. 112. Nordoststurm im Baltischen Meere am 13. November 1872 nach J. Hann, Allg. Erdkunde.

die Änderung des Barometerstandes db zur Höhenänderung dh verhält.

Für jede ruhende Flüssigkeit gilt nach 405.

$$-\mu g_0 = \frac{dp}{dh}.$$

Bezeichnet db die Änderung des Barometerstandes, welche der Höhenänderung dh entspricht, so ist

$$dp = \mu_0 g_0 db$$

und also

(a) $$\mu = -\frac{db}{dh}\mu_0 .$$

Auf diese Weise kann man die Luftdichte μ in verschiedenen Höhen bestimmen. Man beobachtet (stets bei 10° C.)

in der Höhe h	den Barometerstand b	db für 100 m Erhebung	Luftdichte μ
0 m	76,00 cm	0,91 cm	0,00124 gr/cm³
100	75,09		
500	71,66	0,86	0,00117
600	70,80		
1000	67,57	0,81	0,00110
1100	66,76		
1500	63,62	0,76	0,00103
1600	62,86		
2000	59,92	0,71	0,00096
2100	59,21		

451. *Gas- und Dampfdichten.* Da wir nun die absolute Dichte der Luft kennen, sind wir in der Lage durch eine einfache Wägung die absolute Dichte jedes anderen Stoffes be-

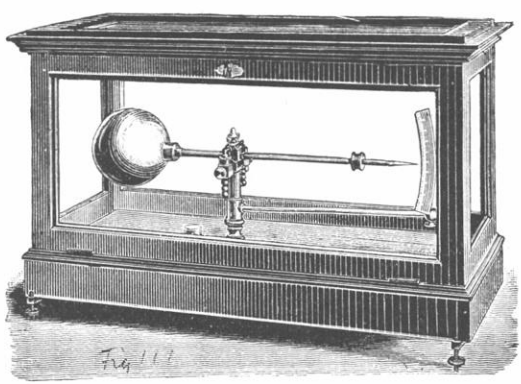

Fig. 113.

stimmen zu können. Eine mit Kohlensäure gefüllte Flasche von 1 Liter Inhalt wiegt bei 10° C. um 0,645 gr mehr als wenn sie mit Luft gefüllt ist, also ist die Dichte der Kohlensäure um 0,000645 gr pro cm³ größer als jene der Luft, also

gleich 0,00189 gr/cm³. Mit kaltem Wasserdampf gefüllt wiegt diese Flasche um 1,231 gr weniger als mit Luft gefüllt. Die Dichte des Wasserdampfes bei 10° C. ist also 0,000009 gr pro cm³. Fig. 113 stellt eine Leuchtgaswage dar.

Hiernach ergeben sich folgende absolute Gas- und Dampfdichten:

für 10° C.	Dichte
Kohlendioxyd . . .	0,00189 gr pro cm³
Sauerstoff	0,001254
Stickstoff	0,001200
Sumpfgas	0,000685
Wasserstoff . . .	0,0000855
Wasserdampf . . .	0,0000090

Die Dichten der Gase sind kleine Bruchteile der Dichten der flüssigen und festen Stoffe. Die Dichten der kalten Dämpfe hochsiedender Flüssigkeiten sind aber sogar nur kleine Bruchteile der Gasdichten. Eine Tonne Wasserdampf von 10° C. hat die Masse 0,9 gr. Eine Tonne Quecksilberdampf von 10° C. dürfte 0,02 gr Masse haben.

Es ist aber ganz unrichtig, diesen Dampf als einen Stoff zu betrachten, der nahezu immateriell ist. Seine Dichte unterscheidet sich allerdings nur um eine verschwindend kleine Differenz von dem Werte Null. Es kommt aber nicht auf die Dichtendifferenzen, sondern auf Dichtenverhältnisse an. Verglichen mit dem Stoff von der kleinsten denkbaren Dichte ist das den Torricellischen Barometerraum erfüllende Medium als ein Stoff von unendlich großer Dichte anzusehen.

20. Die untere Grenze der Spannung der Gase.

452. Eine wesentlich tiefere Einsicht in das Verhalten der Gase brachte die Erfindung der Dilatationsluftpumpe durch Guericke (1645). Dieselbe erleichtert es die Eigenschaften eines Gases in stark ausgedehntem Zustande zu studieren.

453. Die Kompressionsluftpumpen waren schon im Altertume bekannt und wurden zur Füllung der Windbüchsen verwendet. Die Idee, Luft wie eine Flüssigkeit mittels einer

genau gearbeiteten Pumpe aus einem Raume in einen anderen zu treiben, und die Beobachtung der starken Kompressibilität der Luft war also nicht neu. Merkwürdigerweise ist im Laufe eines Jahrtausends niemand auf den Gedanken gekommen, den Rezipienten an das Saugrohr der Kompressionspumpe anzuschließen und so dilatierte Luft herzustellen.

Guericke ging von dem in 443. beschriebenen Experimente aus, indem er durch Auspumpen eines geschlossenen, völlig mit Wasser erfüllten Gefäßes einen mit dem Torricellischen Barometerraum vergleichbaren Raum herstellen wollte. Tatsächlich erreichte er sein Ziel einigermaßen, weil der Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur eine nur wenig höhere Spannung und Dichte hat als der Quecksilberdampf.

Prinzipiell neu, gänzlich von den italienischen Experimenten verschieden, war der nächste Versuch Guerickes, durch möglichste Ausdehnung der Luft zu ebenso kleinen Spannungen zu gelangen. Zu diesem Ende mußte er das Spiel der Ventile der Kompressionsluftpumpe umkehren und Luft aus einem geschlossenen Rezipienten auspumpen. Nach den Erfahrungen mit der Kompressionspumpe mußte die Spannung und Dichte der Luft mit der Dilatation sinken.

Ist dieses Sinken unbegrenzt, so mußte dabei die Spannung des kalten Wasserdampfes und Quecksilberdampfes erreicht und möglicherweise wesentlich unterschritten werden. Vor Anstellung des Versuches stand nichts im Wege zu hoffen, daß man auf diesem Wege eine dilatierte Luft herstellen könne, deren Spannung um beliebig große Differenzen kleiner als jene der normalen Luft, also auch um beliebig große Differenzen kleiner als jene des Torricellischen Barometerraumes (des kalten Quecksilberdampfes) wäre.

Die Versuche Guerickes ergaben jedoch, daß die Spannung der Luft und aller anderen mit der Luftpumpe dilatierten Gase bei fortgesetztem Arbeiten der Pumpe sich einem bestimmten Grenzwerte nähert, welcher zwischen der Spannung des kalten Wasserdampfes und Quecksilberdampfes liegt, und vermutlich bei ideal präziser Konstruktion der Pumpe gleich der Dampfspannung des Öles ist, welches zur Dichtung der Pumpe unentbehrlich ist.

454. *Das Daltonsche Gesetz.* In allgemeiner Form sprach Dalton dieses Guerickesche Gesetz aus.

Steht ein Gas mit einer Flüssigkeit (z. B. Äther oder heißem Wasser) bei stets konstanter Temperatur in Kontakt, so ist die Spannung p desselben jedenfalls höher als die Dampfspannung p_0 der Flüssigkeit. Der Gasraum enthält hierbei Flüssigkeitsdampf, wie man sich durch Kondensationsversuche überzeugen kann, was wir hier nicht näher verfolgen wollen.

Dilatiert man nun dieses mit einer Flüssigkeit in Kontakt stehende Gas unbegrenzt, so nähert sich seine Spannung p einem bestimmten unteren Grenzwerte, nämlich der Dampfspannung p_0 der Flüssigkeit. Es verschwindet also die Differenz $(p - p_0)$, wenn das Volum φ unendlich wird. Die einfachste mögliche Form des Daltonschen Gesetzes ist also

$$(p - p_0)\varphi = \text{konst.}$$

und diese ist mit großer Annäherung gültig.

Ein spezieller Fall des Daltonschen Gesetzes ist das Boylesche Gesetz, welches für ein mit kaltem Quecksilber in Kontakt stehendes Gas gilt. In diesem Falle ist unter $(p - p_0)$ die mit dem Quecksilberbarometer gemessene Spannung des mit Quecksilberdampf gesättigten Gases zu verstehen.

Denken wir uns, es gäbe eine Flüssigkeit, deren Dampfspannung möglichst nahe, noch näher als jene des kalten Quecksilberdampfes, an der untersten Grenze aller Dampfspannungen liegt, und nennen wir diese jetzt p_0, bezeichnen wir mit

$$P = p - p_0$$

die Differenz der Spannung eines mit dem Dampfe dieser Flüssigkeit gesättigten Gases gegen diese Grenzspannung, und nennen P die absolute Spannung des Gases, so können wir das Boylesche Gesetz in der Form

$$P\varphi = \text{konst.}$$

aussprechen: Das Produkt aus der absoluten Spannung und dem Volum einer Gasmenge ist bei konstanter Temperatur konstant. Da dieses Gesetz ohnehin nur mit Annäherung gilt, und man bei allen Messungen das Gas durch Quecksilber absperren muß, kann man die absolute Spannung P, wenn ihr

Wert nicht sehr klein ist, als die mit dem Quecksilberbarometer gemessene Spannung bezeichnen.

455. Es ist sehr wahrscheinlich, daß unter den günstigsten Bedingungen die Spannung aller Gase bei unbegrenzter Ausdehnung gerade bis zu einem und demselben Grenzwert gebracht werden kann, welchem sich auch die Spannung aller gesättigten Dämpfe bei Herabsetzung der Temperatur nähert.

Die absolute Spannung in diesem Grenzzustande hat nach obiger Definition den Wert Null.

Keineswegs ist diese Grenzspannung der Dämpfe und Gase eine untere Grenze aller möglichen Spannungen. Die Flüssigkeiten können bei sehr vorsichtiger Dilatation weitaus niedrigere Spannungen (also negative absolute Spannungen) annehmen. Luftfreies Quecksilber bildet den Toricellischen Dampfraum nicht, auch wenn die Barometersäule vorsichtig bis auf 100 oder 120 cm Höhe gebracht wird. Es herrscht dann in den höher als 76 cm liegenden Teilen der Quecksilbersäule eine bedeutend kleinere Spannung als jene des kalten Quecksilberdampfes. Es ist aus theoretischen Extrapolationen der Zustandsgleichung wahrscheinlich, daß auch die Flüssigkeiten eine untere Grenze der Spannung haben, welche aber (bei Flüssigkeiten von hohem kritischen Druck) um viele Atmosphären niedriger liegt als die absolute Spannung Null.

456. *Das Mischungsgesetz.* Mehrere mit derselben Flüssigkeit von der Dampfspannung p_0 in Kontakt stehende Gase von den Spannungen p_i und Volumen φ_i seien gegeben. Wir bringen dieselben zunächst durch Volumsänderung auf eine beliebige gleiche Spannung p, wobei die Summe ihrer Volume gleich φ werde. Es folgt aus dem Daltonschen Gesetze durch Addition

$$(p - p_0)\varphi = \sum_i (p_i - p_0)\varphi_i .$$

Mischt man diese Gase von gleicher Spannung p ohne Änderung ihres Gesamtvolums φ, so zeigt die Mischung dieselbe Spannung p. Das Resultat des Mischungsvorganges hängt nicht von der Reihenfolge der Operationen, sondern nur vom Endvolum φ ab. Die Mischung befolgt ebenfalls das Daltonsche Gesetz.

Es ist also immer das Produkt aus dem Spannungsüberschuß $(p - p_0)$ und Volum φ der Mischung gleich der Summe dieser Produkte der Bestandteile.

Setzt man p_0 gleich der Spannung des Quecksilberdampfes, so kann man die Mischungsregel für die absoluten Spannungen P aufrecht erhalten

$$P\varphi = \sum_i P_i \varphi_i .$$

457. *Die Wirkungsgrenze der Guerickeschen Pumpe* läßt sich unter Zugrundelegung des Boyleschen Gesetzes wie folgt berechnen. Jede Pumpe besteht aus einem Raume von ver-

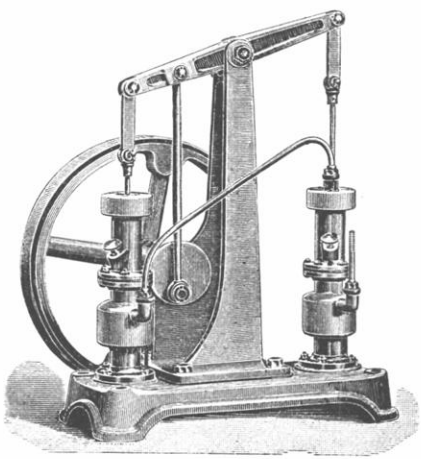

Fig. 114.

änderlichem Volum: dem Saugraume. Das kleinste Volum φ_0 desselben heißt der schädliche Raum, das größte Volum φ desselben heißt der wirksame Raum.

Ist der Saugraum einer Dilatationspumpe auf sein kleinstes Volum gebracht, so herrscht in diesem die Spannung der äußeren Luft P_0. Die kleinste Spannung P_1, welche also je in dem Saugraume vorhanden sein kann, bestimmt sich durch

$$P_1 = \frac{\varphi_0}{\varphi} P_0 .$$

Schaltet man aber zwei Pumpen hintereinander (Babinet), so kann in dem schädlichen Raume der zweiten Pumpe und

also auch in dem Rezipienten eine kleinere Spannung hergestellt werden. Als Grenze der Wirksamkeit der Guerickeschen Pumpen modernster Form (Fig. 114) kann man eine Spannung bezeichnen, welche um 10^{-3} gr/cm² höher ist als die Spannung des Öldampfes.

458. *Die Quecksilberluftpumpen. Das Mac Leodsche Manometer.* Mit tausendfach höherem Erfolg arbeiten die Quecksilberluftpumpen. Von diesen beruhen die Sprengelschen Quecksilberstrahl-Saugwerke in erster Annäherung auf der in 401. berechneten Spannungserniedrigung in engen Stellen einer von Quecksilber stationär durchströmten Röhre. In Wirklichkeit spielen kompliziertere hydrodynamische Wirkungen (die Strahlbildung, das Abreißen und Zusammenfließen von Tropfen) mit.

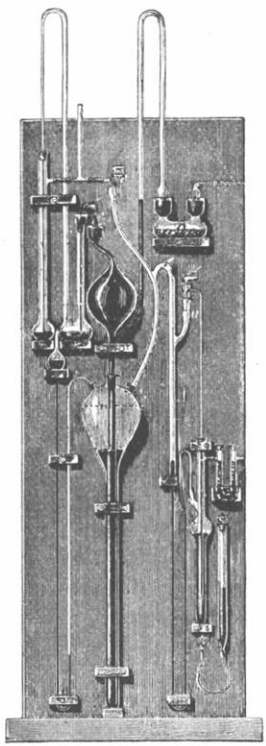

Fig. 115.

Die Geisslersche Quecksilberluftpumpe besteht aus dem Saugraum, welcher durch ein Glasgefäß dargestellt wird, dessen Fassungsraum durch eindringendes Quecksilber verkleinert werden kann. Gegen den Rezipienten und die Außenluft ist derselbe durch Ventile und zwar durch Glashähne oder besser (nach Töpler) durch Quecksilberrückschlagsventile abgeschlossen (Fig. 115).

Wie sehr diese Pumpen die Spannung im Rezipienten der Spannung des Quecksilberdampfes nähern, kann mit dem Mac Leodschen Manometer nachgewiesen werden.

Dasselbe besteht aus einem Saugraum s (Fig. 116), welcher oben in eine kalibrierte Kapillare c übergeht, deren oberes Ende geschlossen ist. Von unten kann Quecksilber eingetrieben werden und unten steht auch der Saugraum durch ein Quecksilberrückschlagsventil b mit dem Rezipienten R in Ver-

bindung. Beim Eintreiben des Quecksilbers bis in die Kapillare c kann das in dem Saugraum vorhandene Gas und Dampfgemisch bis auf 10^{-5} des Anfangsvolums gebracht werden. Man bemerkt dann, wenn der Rezipient und also der mit demselben anfängliche kommunizierende Saugraum S des Manometers gut ausgepumpt war, eine Niveaudifferenz von etwa 0,2 cm der Quecksilberkuppen in der Kapillare c und in dem Steigrohr b (welches gleiches Kaliber haben soll). Nach dem Daltonschen Gesetze folgt, daß die Spannung im Rezipienten nur um

$$0{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ cm Hg} = 1{,}5 \times 10^{-7} \text{ gr/cm}^2$$

größer als jene des Quecksilberdampfes ist, daß also der theoretische Grenzwert der Wirkung der Pumpe bis auf eine sehr kleine Differenz erreicht wurde.

459. *Dritte Methode zur Messung der Spannungen.* Nach dem Boyleschen Gesetze kann man aus den Volumsänderungen eines Gases auf seine Spannungsänderungen schließen. Hat eine in einem einerseits geschlossenen Glasrohre durch einen Quecksilberfaden abgeschlossene Gasmenge (Gasmanometer, Fig. 117) anfänglich die Spannung der Außenluft, so hat sie die n-fache absolute Spannung (n Atm.), wenn ihr Volum n-mal kleiner geworden ist. Die andere Kuppe des Quecksilberfadens grenzt an den Raum, dessen Spannung gemesen werden soll. Haben die beiden Quecksilberkuppen eine Niveaudifferenz, so muß das vertikale Spannungsgefälle in dem ruhenden Quecksilber mit in Rechnung gezogen werden.

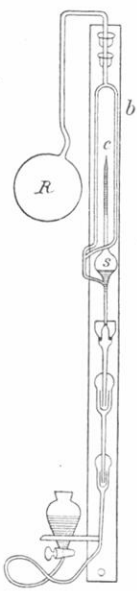

Fig. 116.

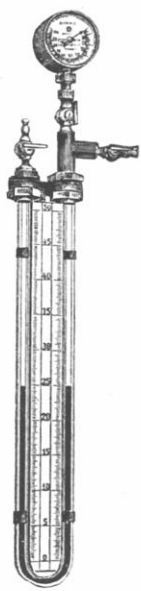
Fig. 117.

Dieses Manometer hat (abgesehen von seiner geringeren Genauigkeit) den Vorzug der Barometer, die Differenz einer

beliebigen zu messenden Spannung gegen die Grenzspannung anzuzeigen, also absolute Spannungsmessungen zu gestatten.

460. *Das Volumenometer.* Umgekehrt kann man aus der Spannungsänderung eines Gasraumes auf seine Volumsänderung schließen.

Ändert man ferner das unbekannte Gasvolum φ um den bekannten Betrag $d\varphi$ und beobachtet dabei eine Änderung der absoluten Spannung P um dP, so ist

$$\varphi = -P\frac{d\varphi}{dP}.$$

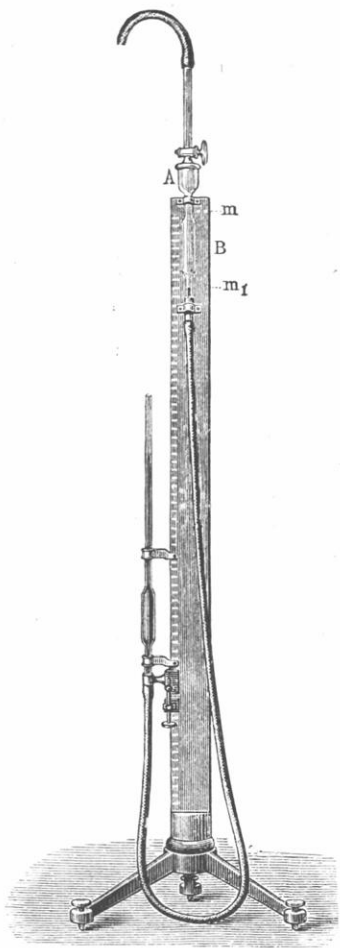

Fig. 118.

Man verwendet diese Methode, um das Volum von Körpern zu bestimmen, die man nicht gern in eine Flüssigkeit eintauchen möchte (leicht lösliche, pulverförmige oder poröse Körper). Diese bringt man in den vorher nach obiger Methode ausgemessenen Gasraum φ und wiederholt die Messung, wodurch der restliche Gasraum, also auch das zu messende Volum des Körpers bestimmt wird.

Der Raum A des Volumenometers (Fig. 118) verlängert sich nach unten in eine mit Volumsmarken m versehene Röhre B, welche durch die Quecksilberkuppe eines Manometers abgeschlossen wird. Es ist so möglich durch Änderung des Quecksilberstandes bekannte Volumsänderungen durchzuführen und die zugehörigen Spannungsänderungen zu bestimmen.

461. *Abweichungen von dem Boyleschen Gesetze.* Das Daltonsche Gesetz gilt, besonders

für die Mischungen von Gasen mit Dämpfen großer Spannung (z. B. Ätherdampf, heißer Wasserdampf usw.), nur mit geringer Genauigkeit. Genau richtig scheint nur der durch dasselbe bestimmte untere Grenzwert der Spannung der Mischung zu sein. Für Dämpfe kleiner Spannung sind die Abweichungen viel kleiner, aber auch das Boylesche Gesetz gilt nur für verhältnismäßig kleine Volumsänderungen mit hinreichender Genauigkeit.

1. Natterer fand, daß bei hohen Spannungen (100 bis 3000 Atmosphären) alle Gase viel weniger kompressibel

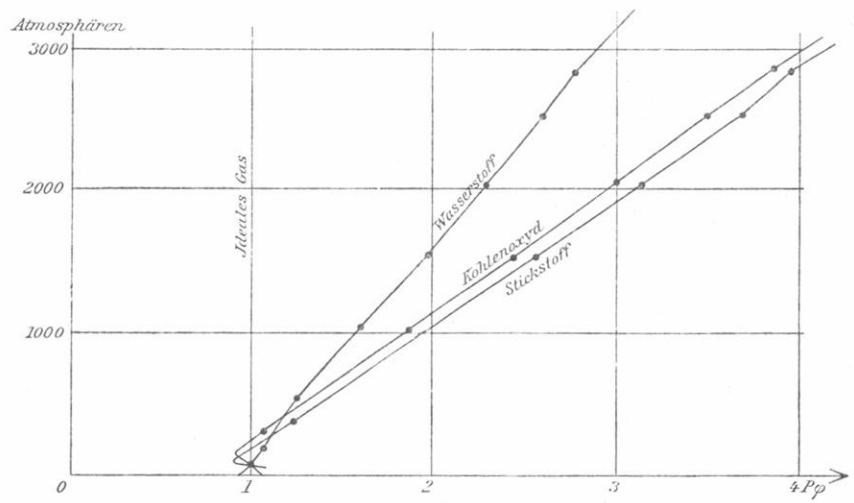

Fig. 119.

sind als nach dem Boyleschen Gesetz zu erwarten wäre, so daß für ungemein hohe Spannungen das Volum φ nicht dem Grenzwerte Null, sondern einem Grenzwerte β zustrebt, welcher in Bruchteilen des Volums bei normaler Spannung folgende Werte hat:

für Wasserstoff $\beta = 0{,}0007$,
„ Luft $0{,}0010$,
„ Kohlenoxyd $0{,}0012$.

Hiernach ergibt sich statt der Boyleschen Gleichung ein linearer Zusammenhang zwischen $P\varphi$ und P (Fig. 119)

$$P(\varphi - \beta) = \text{konst.},$$

worin als Volumseinheit das Volum bei normaler Spannung gewählt ist.

2. Eine weitere Verbesserung dieses Gesetzes stützt sich auf die älteren Messungen von Regnault, welche nur bis 100 Atmosphären gehen, aber sehr genau sind, und auf die Beobachtung Cailletets, daß das Produkt $P\varphi$ für alle Gase außer Wasserstoff in diesem Spannungsintervall ein Minimum hat (Fig. 119).

3. Auf Grund von Andrews Darstellung der Zustandsänderungen der Kohlensäure in der Nähe der kritischen Temperatur hat endlich James Thomson erkannt, daß die Zustandsgleichung in bezug auf die Spannung von erster Ordnung, in bezug auf das Volumen aber von dritter Ordnung sein müsse.

Eine verbesserte Form der Boyleschen Gleichung, welche der Nattererschen, Cailletetschen und James Thomsonschen Bedingung entspricht, hat van der Waals aufgestellt. Dieselbe lautet

$$\left(P + \frac{a}{\varphi^2}\right)(\varphi - b) = \text{konst.}$$

Hierin haben die Konstanten a und b die Werte

	a	b
Wasserstoff	0	0,0007
Luft	0,004	0,003
Kohlendioxyd	0,012	0,003
Schwefeldioxyd	0,03	0,005
Ammoniak	0,017	0,005

Es gilt dies für die Temperatur 0° C. Als Einheit der Spannungen ist eine Atmosphäre, als Einheit der Volume das Volum des Gases bei der Spannung 1 angenommen.

---

21. Erhaltung der Masse bei Volumsänderung.

462. Galilei komprimierte Luft in einer Flasche und fand dieselbe schwerer als wenn sie mit normaler Luft gefüllt ist. Die Dichte der Luft wächst also mit ihrer Spannung.

Guericke wog Glasgefäße, welche mit dilatierter Luft gefüllt waren und fand, daß die Dichte der Luft mit ihrer Spannung sinkt. Ist dieses Sinken unbegrenzt, so mußte bei fortgesetztem Auspumpen der Luft die Dichte des kalten Wasserdampfes erreicht und möglicherweise wesentlich unterschritten werden. Da schon die normale Luft sehr kleine Dichte hat, und man doch nicht das Auftreten negativer Dichten erwarten konnte, so wußte Guericke vor Anstellung des Versuches, daß bei fortgesetztem Auspumpen ein sehr nahe an Null liegender Grenzwert der Dichte (ein nahezu masseloser Raum) erreicht werden würde. Die Dichte des stark abgekühlten Quecksilberdampfes kann praktisch nicht unterschritten werden, ist aber wahrscheinlich viele tausendmal kleiner als jene der Luft.

463. *Das Guerickesche Gesetz.* Es zeigte sich, daß die absolute Dichte μ eines jeden Gases der mit dem Quecksilberbarometer gemessenen Spannung P desselben in weiten Grenzen proportional ist. Diese Zustandsgleichung lautet

(a) $$\mu = \text{konst.}\, P.$$

Für nicht allzu kleine Spannungen gilt diese Beziehung vermutlich mit ähnlichen Abweichungen wie das Boylesche Gesetz, doch hat man viel weniger Messungen angestellt, um dieselben direkt zu bestimmen, so daß rein experimentell genommen das Guerickesche Gesetz als weniger genau gültig angesehen werden müßte.

Beide Gesetze bilden zusammengenommen einen direkten experimentellen Beweis für die Gültigkeit des Gesetzes der Erhaltung der Masse eines Gases bei isothermischer Ausdehnung. Setzt man aber dieses Gesetz als unbedingt gültig ohne Beweis voraus (433.), so folgt das Guerickesche aus dem Boyleschen Gesetze.

Hierauf beruht die dritte Methode zur Messung absoluter Gasdichten. Mittels einer Luftpumpe kann man die Dichte des Inhaltes eines Gefäßes bis auf eine kleine Differenz dem absoluten Nullwerte nähern. Wägt man das Gefäß mit dieser Füllung und andererseits mit einem beliebigen Gase gefüllt, so erhält man die absolute Dichte des letzteren.

464. *Abnahme der Luftdichte mit der Höhe.* Wir haben schon in 450. Messungen angeführt, welche eine mäßige Ab-

nahme der Luftdichte mit der Erhebung bis auf 2000 m beweisen. Wir wollen nun das Gesetz dieser Abnahme berechnen.

In ruhenden Flüssigkeiten nimmt die Spannung nach oben zu ab, und zwar ist

$$\mu g_0 = -\frac{dP}{dh} = -\varkappa \frac{d\mu}{dh},$$

worin $\varkappa$ der Koeffizient der Zustandsgleichung 463. (a) ist. Wenn die Temperatur konstant ist, so hat dieser in weiten Grenzen den konstanten Wert $\varkappa_1$ und es folgt

$$\log \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{g_0}{\varkappa_1}(h_2 - h_1).$$

Es nimmt dann Dichte und Spannung nach einem logarithmischen Gesetze nach oben zu ab. Es wäre hiernach

in der Höhe	die Luftdichte
0 m	0,00124
2000	0,00097
10000	0,00035
20000	0,00009
30000	0,00003

Tatsächlich muß die Abnahme eine raschere sein, weil auch die Temperatur nach oben zu abnimmt. Jedenfalls herrscht in großer Höhe eine so kleine Spannung, wie man sie auch mit der besten Quecksilberluftpumpe nicht herstellen kann. In größeren Höhen gilt wahrscheinlich die Poissonsche Zustandsgleichung, da die Wärmeleitungsfähigkeit sehr verdünnter Luft verschwindend klein ist. Es nimmt dann die Spannung rascher als die Dichte ab und der Quotient beider, welchen man die absolute Temperatur nennt, strebt ebenfalls dem Grenzwerte Null zu.

465. *Der Weltäther.* Das Medium, welches den Weltraum erfüllt, hat sonach wahrscheinlich eine Dichte, eine absolute Spannung und eine absolute Temperatur, welche sich nur um kleine Differenzen von den absoluten Nullwerten unterscheiden. Damit ist nicht gesagt, daß dieses Medium im ganzen Weltraume einigermaßen homogen sei, da es nicht

auf Differenzen, sondern auf die Verhältnisse dieser Eigenschaften ankommt. Insbesondere die Geschwindheitsverteilung des Weltäthers dürfte sehr ungleichförmig sein. Im Mittel dürfte derselbe in der Umgebung des Sonnensystems keine Relativgeschwindheit gegen den Sonnenmittelpunkt, also die absolute Geschwindheit Null haben.

Dichte, Spannung, Temperatur und Geschwindheit des Weltäthers haben also nahezu oder im Mittel den absoluten Wert Null.

Bezeichnender drückt man dies in folgender Form aus: Es treten in den Naturgesetzen nur Differenzen der Eigenschaften der Stoffe auf, und nur solche sind meßbar. Die absoluten Werte der Eigenschaften irdischer Stoffe, welche die irdischen Vorgänge bedingen und in den physikalischen Gesetzen auftreten, sind in Wirklichkeit nur die Differenzen der Eigenschaften dieser Stoffe gegen das nach dem Volum genommene Mittel der Eigenschaften des die weitere Umgebung erfüllenden Mediums, für uns also des Weltäthers, welcher sich sonach an jedem Prozesse mitbeteiligt.

Die meisten im kleinen ablaufenden Bewegungsvorgänge werden schon durch die Differenzen der Geschwindheiten gegen die nächste Umgebung, also die terrestrischen Geschwindheiten, hinreichend genau bestimmt. Bei genauerer Beobachtung oder für Vorgänge in größerem Maßstabe (Winddrehung, Planetenbewegung) ersieht man, daß die mittlere Geschwindheit des Weltäthers den Nullpunkt der Geschwindheiten bestimmt.

Der Schwerpunkt des Sonnensystems hat gegen den Schwerpunkt der nächsten Fixsterne eine Relativbewegung, welche gegen den Stern Wega (278° Länge vom Frühlingspunkt, 35° nördl. Breite) gerichtet ist und etwa 17 km pro Sekunde beträgt. Von diesem „Apex der Sonnenbahn“ bewegen sich die Sterne scheinbar fort, um sich im Gegenpunkte zu sammeln, so wie die Bäume eines Waldes vor dem Wanderer auseinander zu weichen und sich hinter ihm zusammen zu schließen scheinen. Es entsteht nun die Frage, ist dem Schwerpunkt des Sonnensystems oder dem Schwerpunkt des Fixsternsystems die absolute Geschwindheit Null zuzuschreiben, gelten also unsere Bewegungsgesetze nur in unserem Sonnensystem, oder im

ganzen Raume. Diese Frage würde erst aktuell, wenn eine Beschleunung der Apikalbewegung, d. i. eine Relativbeschleunung beider Schwerpunkte nachgewiesen würde.

Es ist wahrscheinlich, daß auch auf einem Weltkörper inmitten eines Nebelfleckes, der weithin nicht von unserem Weltäther, sondern von glühendem Wasserstoff umgeben ist, die Gesetze von Boyle, Guericke und Poisson gelten. Es entsteht aber die Frage, ob die absoluten Werte der Dichte, Spannung und Temperatur, welche in diesen Gesetzen erscheinen, auch dort wie bei uns die Differenzen dieser Eigenschaften gegen die Eigenschaften unseres Weltäthers und nicht vielmehr die Differenzen dieser Eigenschaften gegen die Eigenschaften glühenden Wasserstoffes sind.

V. Die elastischen und zähen Medien.

22. Homogene elastische Medien.

466. Die festen Medien und die zähen Flüssigkeiten bewegen sich bei gleicher Verteilung der äußeren Beschleunungen in charakteristischer Weise anders als die idealen Flüssigkeiten, woraus folgt, daß der Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ der inneren Beschleunungen in diesen Medien kein skalares Potential hat. Immerhin muß derselbe durch ein einfaches Differentialgesetz bestimmt sein, weil die inneren Beschleunungen auch in elastischen und zähen Medien den Typus der irdischen Beschleunungen haben und doch das Gegenbeschleunungsgesetz erfüllen (siehe 394.).

467. Wir betrachten zunächst die Bewegung eines unbegrenzten homogenen elastischen Mediums. In einer Hinsicht verhalten sich diese ganz wie die Flüssigkeiten. Es sind auch in festen Medien Schallwellen, also longitudinale Fortschreitungen der Geschwindheitsverteilung $\mathfrak{v}$ möglich. Bezeichne c_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in dem elastischen Medium, so muß, wenn die Geschwindheitsverteilung rotorfrei ist,

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{s}{=} 0 ,$$

die Differentialgleichung der longitudinalen Fortschreitungen (391.(a), erfüllt sein

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \overset{3}{=} c_1{}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}\,.$$

Eine solche Gleichung kann mit Vorteil in zwei lineare Differentialgleichungen zerlegt werden, indem man eine neue skalare Variable P einführt (vgl. 335.)

(a) $$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{3}{=} - \nabla P,$$

(b) $$- \frac{\partial P}{\partial t} \overset{1}{=} \mu c_1{}^2 \nabla \cdot \mathfrak{v}\,.$$

Bezeichne $\mathfrak{u}$ die Verschiebung eines Teilchens des Mediums aus seinem Anfangsorte, so ist die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ die totale Fluxion von $\mathfrak{u}$. Hierfür können wir mit hinreichender Annäherung die partielle Fluxion setzen, wenn die derivierte Dyade der Verschiebungen sehr klein ist

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \overset{3}{=} \mathfrak{v} \cdot (I - \nabla\,; \mathfrak{u}).$$

Es ergibt sich nun durch Integration der Gleichung (b)

$$P \overset{1}{=} - \mu c_1{}^2 \operatorname{div} \mathfrak{u} + P_0$$

und endlich aus der vorhergehenden Gleichung

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{3}{=} A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{g}_0\,,$$

worin die spezifische Konstante

$$A = \mu c_1{}^2$$

der Dehnungsmodul heißt. P_0 und $\mathfrak{g}_0$ sind von der Zeit unabhängige Verteilungen.

Alle diese Gleichungen stimmen mit hinreichender Annäherung mit den Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten zusammen, welche wir zur Not auch auf diesem Wege hätten ableiten können.

468. Die weitere Ausgestaltung der elastischen Bewegungsgleichung setzt wie die Aufstellung jeder physikalischen Grundgleichung eine große Erfahrung über die Form des Zusammenhanges der räumlichen und zeitlichen Verteilungen physikalischer Eigenschaften in anderen Erscheinungsgebieten voraus.

Die Mechanik deformierbarer Medien war deshalb keiner selbständigen Entwicklung fähig. Die Wirbelbewegungen

der Flüssigkeiten wurden erst verstanden, nachdem die Wirbelringe der magnetischen Vektorverteilungen (das magnetische Feld galvanischer Ströme) hinreichend untersucht war, sich die Vorstellung an diesen leicht ausmeßbaren Vektorfeldern hinreichend geübt hatte und der Begriff des Rotors einer Vektorverteilung sich entwickelt hatte.

Die Theorie der Bewegung kompressibler Medien ging aus von der Theorie des Schalles. Diese ältere Theorie der Elastizität erwies sich so lange einer weiteren Entwickelung unfähig, als sie nicht von seiten der Theorie des Lichtes die nötigen formellen Vorbilder erhielt.

469. *Die transversalen elastischen Wellen.* Auf Grund der Schalltheorie stellte Huyghens (1671) die Undulationstheorie des Lichtes auf. Hiernach ist ein Lichtstrahl anzusehen als eine periodische Verteilung eines besonderen Zustandes des Mediums, welche mit der Lichtgeschwindigkeit fortschreitet. Die Periodizität des Lichtes wird durch Interferenzexperimente ebenso wie die Periodizität des Schalles erwiesen.

Die Polarisation des Lichtes führte Fresnel dazu, das Licht als eine transversale Welle aufzufassen. Die Durchbildung der theoretischen Optik brachte die genaue Kenntnis der Geometrie der transversalen Wellen mit sich. Hiervon war die Folge, daß man auch in anderen Erscheinungsgebieten die Möglichkeit des Auftretens transversaler Wellen einsah. So erkannten Poisson und Cauchy, ersterer durch lange Zeit ein Gegner dieser prinzipiell neuen Vorstellung, die Möglichkeit transversaler elastischer Wellen und begründeten damit die moderne Elastizitätslehre. Faraday und Maxwell erkannten, ebenfalls von der Lichttheorie ausgehend, die Möglichkeit transversaler elektrischer Wellen und begründeten damit die moderne Elektrizitätslehre.

470. Wir gehen wie Poisson von der Vermutung aus, daß transversale elastische Wellen möglich sind, leiten aber direkt aus dieser Annahme die Bewegungsgleichung homogener elastischer Medien ab, und vergleichen dann die Integrale derselben mit den vorliegenden zerstreuten Beobachtungen. In einer transversalen Welle muß, wenn die Geschwindheitsverteilung divergenzfrei ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \overset{1}{=} 0,$$

die Differentialgleichung 392.(a) erfüllt sein

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} \overset{3}{=} - c_2{}^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

Eine solche Gleichung kann mit Vorteil in zwei lineare Differentialgleichungen zerlegt werden, indem man eine neue vektorische Variable $\mathfrak{P}$ einführt

(a) $$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{3}{=} \nabla \times \mathfrak{P},$$

(b) $$- \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \overset{3}{=} \mu c_2{}^2 \nabla \times \mathfrak{v}.$$

Ist für irgend ein Erscheinungsgebiet die Möglichkeit transversaler Wellen zugegeben, so folgt, daß für diese Vorgänge die Verteilungen zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{P}$ charakteristisch sind, von welchen jeder mit Annäherung dem Vektorpotential der Fluxion des anderen Vektors proportional ist. Streng gültige Gleichungen kann man auf diesem Wege wohl nicht gewinnen, weil einfache transversale Wellen meist nur mit Annäherung (für kleine Amplituden) möglich sind.

Für die elektromagnetischen Erscheinungen in Nichtleitern wurden die Gleichungen (a) und (b) von Maxwell aufgestellt.

Besonders bemerkenswert ist die Symmetrie dieser zwei Gleichungen. Zufolgedessen entspricht jeder möglichen divergenzfreien veränderlichen Verteilung der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{P}$ eine ganz ähnliche, ebenfalls mögliche Verteilung, bei welcher $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{v}$ vertauscht sind. Wir wollen dies sogleich an dem wichtigsten Beispiel, den transversalen Kugelwellen, anschaulich machen.

471. Die geeignetste Form erhält diese Bewegungsgleichung, wenn wir wie vorhin einmal nach der Zeit integrieren, wobei die lokale Beschleunung $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ und die Verschiebung $\mathfrak{u}$ in derselben auftritt. Es folgt durch Integration der letzten Gleichung

$$\mathfrak{P} \overset{3}{=} - \mu c_2{}^2 \operatorname{rot} \mathfrak{u} + \mathfrak{P}_0$$

und aus der vorangehenden Gleichung

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{s}{=} - K \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{g}_0 ,$$

wobei wieder annäherungsweise gesetzt wurde

$$\mathfrak{v} \overset{s}{=} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \quad \text{und} \quad K = \mu c_2^2 .$$

Die Konstante K heißt der Torsionsmodul. $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{g}_0$ sind von der Zeit unabhängige Vektorverteilungen.

472. *Bewegungsgleichung der elastischen Medien.* Wir haben schon im Vorhergehenden immer die Fluxion der Geschwindheit mit der Dichte des Mediums multipliziert, da die gesuchten Bewegungsgleichungen jedenfalls den Fluktor $\mu \mathfrak{g}'$ bestimmen müssen (466). Deshalb werden wir nicht fehlgehen, vielmehr einen Fehler obiger Gleichungen verbessern, wenn wir, was jedenfalls mit Annäherung richtig ist, statt der partiellen Fluxion der Geschwindheit die Beschleunung einsetzen.

Vereinigen wir die oben abgeleiteten Bewegungsgleichungen für longitudinale (rotorfreie) und transversale (divergenzfreie) Wellen, so ergibt sich für eine allgemeine Verteilung der Geschwindheiten $\mathfrak{v}$ und Verschiebungen $\mathfrak{u}$ die Bewegungsgleichung

(a) $$\mu \frac{d \mathfrak{v}}{d t} \overset{s}{=} A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - K \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} ,$$

worin

$$\mathfrak{v} \overset{s}{=} \frac{d \mathfrak{u}}{d t}, \quad A = \mu c_1^2 \quad \text{und} \quad K = \mu c_2^2 .$$

Die für unsere Betrachtungen gleichgültigen äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}_0$ wurden fortgelassen.

In Flüssigkeiten, für welche der Fluktor notwendig ein Potential hat, muß der Torsionsmodul K gleich Null sein. Transversale Wellen in Flüssigkeiten sind also nicht möglich, da sie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c_2 = 0$ haben müßten.

Dies ist der wesentliche Unterschied zwischen idealen Flüssigkeiten und elastischen Medien.

Wir wollen nun die einfachsten Integrale dieser Bewegungsgleichung entwickeln, worunter manche der Beobachtung sehr gut zugänglich sind.

473. *Statische Deformationen.* Damit das anfänglich im Ruhezustande gegebene deformierte Medium in Ruhe verharrt, muß

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \stackrel{s}{=} 0 \quad \text{oder} \quad A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - K \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \stackrel{s}{=} 0$$

sein. Insbesondere ist diese Bedingung für alle homogenen linearen Deformationen erfüllt, bei welchen materielle Gerade oder Ebenen des Mediums zwar gedreht werden, aber gerade bzw. eben bleiben. Es ist dann die Verschiebung $\mathfrak{u}$ eine lineare Vektorfunktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$, oder die derivierte Dyade Φ der Vektorverteilung $\mathfrak{u}$ ist vom Orte unabhängig

$$\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} \Phi \cdot \mathfrak{r}, \qquad \Phi \stackrel{0}{=} \nabla ; \mathfrak{u} \stackrel{0}{=} \text{konst.}$$

Markiert man in einem Gelatineprisma durch Färbung einige Gerade von verschiedener Lage, so kann man zeigen, daß diese bei jeder Schiebung und Dehnung gerade bleiben, daß es aber auch statische Deformationen gibt, bei welchen sie gekrümmt werden, welche also nicht linear sind. Es ist dies insbesondere die Torsion und die Biegung.

474. *Statische Dilatation.* Für eine nicht notwendig lineare, aber rotorfreie Verteilung der Verschiebungen muß im Ruhefalle

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} \stackrel{s}{=} 0$$

sein, d. h. die Divergenz der Verschiebungen oder die Volumsvergrößerung pro Volumseinheit muß für alle Teile des Mediums denselben Wert haben.

Hat z. B. die Verschiebung $\mathfrak{u}$ überall die Richtung des von einem festen Zentrum aus gezählten Radius $\mathfrak{r}$ und ist ihre Größe nur von $\mathfrak{r}$ abhängig, so muß im Ruhefalle

$$\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = 3\varkappa_1$$

und also

$$u = \varkappa_1 r + \frac{\varkappa_2}{r^2}$$

sein, worin $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ beliebige Konstante sind.

475. *Homogene Torsion.* Ist hingegen die Verschiebung divergenzfrei verteilt, so muß

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \stackrel{s}{=} 0$$

sein, damit die elastischen Beschleunungen Null sind. Es muß also der Rotor der Verschiebungen und somit auch das Vektorpotential $\mathfrak{P}$ ein skalares Potential haben.

Ein einfaches Beispiel ist die homogene Torsion, bei welcher

(a) $$\mathfrak{u} \overset{3}{=} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a} ; \mathfrak{b} \times \mathfrak{r} \overset{3}{=} \mathfrak{b} \times \mathfrak{r} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r})$$

ist. Die Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Dyade seien klein, konstant und gleichgerichtet. Sie ist also die Dyade einer linearen Dehnung. Die Dyade einer kleinen Torsion

$$\nabla ; \mathfrak{u} \overset{3}{=} \mathfrak{a} ; \mathfrak{b} \times \mathfrak{r}$$

ist also das rotorische Produkt einer linearen Dehnungsdyade mit dem Ortsvektor. Das in 267. (c) definierte Schwungmoment eines starren Körpers bestimmt sich durch die gleiche vektorische Funktion $\mathfrak{u}$ des Ortes.

In jeder auf $\mathfrak{a}$ senkrechten Ebene ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r} \overset{1}{=} \text{konst.}$$

Jede solche Ebene ist also ohne Deformation um die Achse $\mathfrak{b}$ gedreht. Der Drehungswinkel

(b) $$\mathfrak{b} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r})$$

nimmt in der Richtung $\mathfrak{a}$ gleichförmig zu. Es ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{u} \overset{3}{=} 2 \mathfrak{b} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}) + \mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}) \overset{3}{=} 3 \mathfrak{b} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}) - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \mathfrak{r} ,$$

woraus folgt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \overset{3}{=} 0 .$$

Die homogene Torsion ist also eine statische Deformation.

476. *Die longitudinalen Kugelwellen.* Falls die Verschiebungen $\mathfrak{u}$ überall in dem elastischen Medium die Richtung des von einem festen Nullpunkte (dem Ursprung der Schallwelle) gezählten Radius $\mathfrak{r}$ haben und ihre Größe ebenfalls nur von der Größe der Entfernung r vom Ursprung abhängt, so ist das Verschiebungsfeld rotorfrei und in diesem Falle verhält sich das Medium nicht anders als eine Flüssigkeit. Es gelten dann die Gleichungen 467. (a), (b)

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{3}{=} - \operatorname{grad} P, \qquad - \frac{\partial P}{\partial t} \overset{1}{=} A \operatorname{div} \mathfrak{v} .$$

Eine Lösung derselben ist

$$P - P_0 \overset{1}{=} \mathfrak{c}_1 \cdot \frac{a}{\mathfrak{r}} \sin \alpha_1$$

$$\psi - \psi_0 \overset{1}{=} \frac{\tau}{2 \pi \mu} \mathfrak{c}_1 \cdot \frac{a}{\mathfrak{r}} \cos \alpha_1 \qquad \alpha_1 \overset{1}{=} \frac{2 \pi}{\tau} \frac{1}{\mathfrak{c}_1} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_1 t),$$

worin ψ das Geschwindheitspotential ist

$$\mathfrak{v} \overset{s}{=} \nabla \psi ,$$

τ ist die Schwingungsdauer. Die Amplitude der Wellen der skalaren Potentiale P und ψ ist dem Radius verkehrt proportional, die Welle hat also nach außen zu abnehmende Amplitude.

Direkte Bestimmungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_1 longitudinaler Schallwellen in festen Medien liegen vor für verschiedene Felsgesteine und wurden in Bergwerken und bei Tunnelbauten vorgenommen. Sie ergaben Werte von etwa $c_1 = 3{,}1 \times 10^5$ cm pro Sekunde, welche also ungefähr 10 mal größer sind als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft. Hieraus und aus der Dichte $\mu = 2{,}6$ dieser Gesteine berechnet sich der Dehnungsmodul derselben zu

$$A = \mu c_1^{\,2} = 2{,}5 \times 10^{11} (\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-2}}).$$

In kleinem Maßstabe für andere Materialien solche Messungen vorzunehmen ist deshalb schwer, weil die Schallfortpflanzung in Stäben keine rein longitudinale ist. Es ist deshalb eine umfassendere Untersuchung der elastischen Vorgänge nötig, um die geeigneten Methoden zur Bestimmung des Dehnungsmoduls A anderer Medien aufzufinden.

477. *Die transversalen Kugelwellen erster Art.* Falls die Verschiebungen $\mathfrak{u}$ überall im Felde divergenzfrei verteilt sind, so gelten die Gleichungen 470. (a), (b)

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{s}{=} \mathrm{rot}\, \mathfrak{P}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \overset{s}{=} - K \mathrm{rot}\, \mathfrak{v} .$$

Von diesen sind die transversalen Kugelwellen das interessanteste Integral. Jede solche Welle ist in bezug auf einen Ursprungspunkt, von welchem aus wir die Radien $\mathfrak{r}$ zählen, und in bezug auf eine durch diesen Ursprung gehende Achse $\mathfrak{w}$ symmetrisch.

Wir betrachten den Verlauf der Welle nur in größerer Entfernung von ihrem Ursprung, und denken uns das Medium in dünne konzentrische Kugelschalen zerlegt, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Jede dieser Kugelflächen dreht sich wie ein starrer Körper um die Achse der Welle mit einer Rotations-

geschwindheit $\mathfrak{w}$, welche eine periodische Funktion der Zeit und des Abstandes r vom Ursprung ist. Es ist

$$\mathfrak{w} \triangleq \frac{w_0}{r^2} \sin \alpha_2 , \quad \text{worin} \quad \alpha_2 \triangleq \frac{2\pi}{\tau} \frac{1}{c_2} \cdot (r - c_2 t),$$

also

$$\mathfrak{v} \triangleq \mathfrak{w}_0 \times \frac{1}{\mathfrak{r}} \sin \alpha_2 .$$

Diese Rotationsschwingungen der Kugelflächen pflanzen sich also unter Abschwächung mit der Geschwindigkeit c_2 nach außen fort. Das Vektorpotential $\mathfrak{P}$ ist annäherungsweise

$$\mathfrak{P} \triangleq \mu c_2 \times \mathfrak{v} \triangleq K \frac{1}{c_2} \times \mathfrak{v} .$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_2 hat die Richtung des Radius $\mathfrak{r}$. Das Vektorpotential $\mathfrak{P}$ steht hiernach überall auf der Geschwindheit $\mathfrak{v}$ und dem Radius $\mathfrak{r}$ senkrecht.

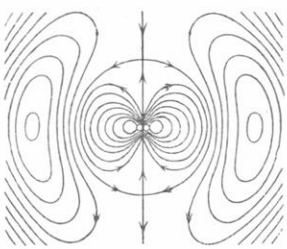

Fig. 120.

Letzteres ist aber in größerer Nähe des Ursprunges nur mit Annäherung zutreffend. Zwar liegt das Vektorpotential überall in den Meridianebenen der Welle, steht also auf der Geschwindheit senkrecht, es verläuft aber nicht genau in konzentrischen Kreisen, sondern weicht hiervon besonders in der Nähe der Achse der Welle ab. Fig. 120 stellt die Verteilung des Vektorpotentials $\mathfrak{P}$ in einem Meridian der Welle nach Hertz dar.

In der Nähe der Achse der Welle ist also diese Vektorverteilung nicht rein transversal, ja in der Achse selbst ist sie auch in größeren Entfernungen vom Ursprung rein longitudinal.

Hieraus erkennt man, daß durch die Richtung des Vektors gegen die Fortpflanzungsrichtung (Transversalität oder Longitudinalität) die Eigenart der beiden Wellenarten, von welchen die erstere nur in festen Medien möglich ist, nicht zutreffend bezeichnet ist. Man muß sie unterscheiden als divergenzfreie bzw. rotorfreie Wellen oder durch ihre charakteristischen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Nur in letzteren Wellen hat

der Fluktor $\mu\,\mathfrak{g}'$ der elastischen Beschleunungen ein skalares, nur in ersteren ein vektorisches Potential.

478. *Die Tebenen ransversalwellen oder divergenzfreien Biegungswellen.* In der Äquatorebene der transversalen Kugelwellen schreiten nach jeder radialen Richtung $\mathfrak{r}$ Transversalwellen von nahezu ebenen Wellenflächen und nahezu konstanter Amplitude fort. Die Wellen der Geschwindheiten $\mathfrak{v}$ und Vektorpotentiale $\mathfrak{P}$ sind gleichphasig. Diese beiden Vektorverteilungen sind transversal, senkrecht gegeneinander und von proportionaler Größe

$$\mathfrak{P} \stackrel{s}{=} \mu\,\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{v}\,.$$

Jede in dem ruhenden Medium in die Fortpflanzungsrichtung fallende materielle Gerade ist in der Welle sinusförmig gebogen. Die Summe einer transversalen Welle und einer ganz gleichen, aber in entgegengesetzter Richtung fortschreitenden Welle ist eine stehende transversale Welle. In einer solchen führt jede ursprünglich in die Fortpflanzungsrichtung fallende materielle Gerade stehende Biegungsschwingungen aus. Es ist jedoch hervorzuheben, daß diese Biegungswellen divergenzfrei sind und sich mit der Geschwindigkeit c_2 fortpflanzen. Die gewöhnlichen Biegungswellen in Stäben sind nicht divergenzfrei und pflanzen sich rascher fort.

Die Verteilung der Verschiebungen $\mathfrak{u}$ in einer divergenzfreien Biegungswelle wird durch

$$\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}_2 \sin \alpha_2\,, \quad \text{worin} \quad \alpha_2 \stackrel{1}{=} \frac{2\pi}{\tau}\frac{1}{\mathfrak{c}_2}\cdot(\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_2\, t)\,,$$

beschrieben, worin $\mathfrak{a}$ ein konstanter Vektor ist. Es ist

$$\operatorname{rot}\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} (\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{a}) \times \nabla \sin \alpha_2 \stackrel{s}{=} \frac{2\pi}{\tau}(\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{a}) \times \frac{1}{\mathfrak{c}_2}\cos \alpha_2\,.$$

479. Eine divergenzfreie Biegung kann niemals im Ruhefalle bestehen. Eine statische Biegung wird beschrieben durch

$$\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{r} + \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{r})^2\,,$$

worin $\mathfrak{a}$ ein beliebiger konstanter Vektor von der Richtung der Krümmung, $\mathfrak{b}$ ein Vektor von der Tangentialrichtung und der Größe

$$\mathfrak{b}^2 = \frac{2A - K}{K}$$

ist. Dann ist

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{u} \overset{s}{=} 4\,\mathfrak{a}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u} \overset{s}{=} 2\,\mathfrak{a}(1+\mathfrak{b}^2)$$

also die Ruhebedingung 473. erfüllt. In einem divergenzfreien Biegungsfelde wäre aber

$$\mathfrak{u} \overset{s}{=} \mathfrak{a} f(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{r}),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u} \overset{s}{=} (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})\times\mathfrak{b} f''(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{r}).$$

Damit dieser zweite Rotor Null wäre, müßte $f''=0$,

$$\text{konst}\,(\mathfrak{u}-\mathfrak{u}_0) \overset{s}{=} \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{r}) \overset{s}{=} \mathfrak{a}\,;\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{r}$$

sein. Dies ist aber eine homogene lineare Schiebung, bei welcher die materiellen Geraden des Mediums zwar gedreht, aber nicht gebogen werden.

480. *Die Torsionswellen.* Auch in der Nähe der Achse der transversalen Kugelwelle kann man Wellenebenen angeben. Es sind dies die Tangentialebenen der Kugelflächen, in welchen die Rotationsgeschwindheit $\mathfrak{w}$ konstant ist. Jede dieser Ebenen führt Rotationsschwingungen um die Achse der Welle aus. Da die Rotationsgeschwindheit längs der Achse periodisch verteilt ist, so erfährt das Medium eine Torsion um die Achse, welche ebenfalls in der Fortpflanzungsrichtung periodisch verteilt ist. Durch die Interferenz in entgegengesetzter Richtung fortschreitender Torsionswellen können stehende Torsionswellen entstehen. Die sämtlichen auf der Achse senkrechten Wellenebenen führen in einer solchen stehenden Welle ihre Rotationsschwingungen gleichphasig, aber mit verschiedener Amplitude aus, die äquidistanten, um je eine halbe Wellenlänge voneinander abstehenden Knotenebenen bleiben hierbei in Ruhe.

Auch die Torsionswellen sind divergenzfrei und pflanzen sich mit der Geschwindigkeit c_2 fort. Diese Wellen können in Stäben und Drähten in voller Reinheit auftreten, so daß man durch Bestimmung der Wellenlänge stehender Torsionswellen von bekannter Schwingungsdauer die Geschwindigkeit c_2 und also den Torsionsmodul K messen kann.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_2 der Transversalwellen ist selbst in den festesten Medien, wie Stahl oder Quarz, kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_1 der Longitudinalwellen, so daß der Torsionsmodul K immer viel kleiner

als der Dehnungsmodul A ist. In erhöhtem Maße gilt dies für Kautschuk und die Gallerten, welche äußerst kleinen Torsionsmodul haben und den Übergang zu den Flüssigkeiten bilden, deren Torsionsmodul Null ist.

481. Die Verteilung der Verschiebungen in einer fortschreitenden Torsionswelle wird beschrieben durch

$$\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} a\,\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{r} \sin \alpha_2\,, \quad \text{worin} \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{\tau}\frac{1}{\mathfrak{c}_2}\cdot(\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_2\, t)\,,$$

und a eine Konstante. Es ist

$$\operatorname{rot}\mathfrak{u} \stackrel{s}{=} 2a\,\mathfrak{c}_2 \sin\alpha_2 + \frac{2\pi a}{\tau}\frac{1}{\mathfrak{c}_2} \times (\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{r}) \cos\alpha_2\,.$$

Dieser Rotor setzt sich also aus zwei Komponenten zusammen, von welchen die eine die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, also eine longitudinale Welle bildet, die andere aber senkrecht zur Achse der Welle gerichtet ist, also eine transversale (radiale) Dilatationswelle bildet, welche gegen erstere Welle um eine Viertelwellenlänge verschoben ist. Für sich ist keine dieser Wellenkomponenten divergenzfrei, aber ihre Divergenzen heben sich in der Summe auf.

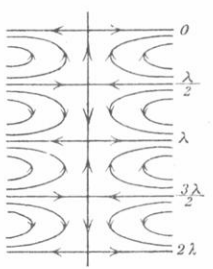

Fig. 121.

Da nach 470. (b) die Fluxion des Vektorpotentials $\mathfrak{P}$ diesem $\operatorname{rot}\mathfrak{u}$ proportional ist, so bildet auch dieser Vektor divergenzfreie Wellen von der eben beschriebenen Form. Fig. 121 stellt den Verlauf des Vektorpotentials $\mathfrak{P}$ in einem Meridianschnitt der Welle dar. Dasselbe verläuft in je um eine Viertelwellenlänge voneinander abstehenden Wellenebenen abwechselnd transversal (radial) und longitudinal.

482. *Die transversalen Kugelwellen zweiter Art.* Vertauscht man in § 477. die Verteilungen des Vektorpotentials $\mathfrak{P}$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so erhält man eine transversale Kugelwelle, welche die Gleichungen 470. (a), (b) wegen deren Symmetrie ebenfalls erfüllt.

Für diese transversale Welle zweiter Art stellt Fig. 120 die Verteilung der Geschwindheiten $\mathfrak{v}$ dar, welche nun in den Meridianebenen der Welle verlaufen, während das Vektor-

potential $\mathfrak{P}$ in den orthogonalen Kreisen um die Achse der Welle läuft.

In größerer Entfernung vom Ursprunge der Welle finden wir in radialer Richtung wieder ebene transversale Wellen oder divergenzfreie Biegungswellen fortschreitend vor, nur daß nun die Biegungen im Meridian liegen, während sie bei den Wellen erster Art in äquatorealer Richtung erfolgten.

483. *Die divergenzfreien Longitudinalwellen oder Stauchungswellen.* In der Nähe der Achse der transversalen Kugelwelle zweiter Art finden wir aber eine divergenzfreie Welle mit der Geschwindheit $\mathfrak{c}_2$ fortschreiten, welche einen neuen Typus dieser Wellen darstellt: eine divergenzfreie Stauchungswelle. Dieselbe ist die Umkehrung der in 480. beschriebenen Torsionswellen.

Es ist nun

$$\mathfrak{v} \doteq 2a\,\mathfrak{c}_2 \sin\alpha_2 + \frac{2\pi}{\tau} a\,\mathfrak{c}_2 \times \left(\frac{1}{\mathfrak{c}_2} \times \mathfrak{r}\right) \cos\alpha_2 ,$$

und

$$\mathfrak{P} \doteq \frac{2\pi}{\tau} a\,\mu\,\mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{r} \sin\alpha_2 .$$

Für diese Stauchungswelle stellt Fig. 121 die Verteilung der Geschwindheiten in einem Meridianschnitt dar. Die der Achse parallele Komponente der Geschwindheit bildet eine longitudinale Welle. Die radiale Komponente ist dem Radius proportional, also in der Achse Null, und ist um eine Viertelwellenlänge verschoben. In der Achse selbst ist die Bewegung also rein longitudinal. In den Ebenen

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_2} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_2 t) \doteq 0,\ \tau,\ 2\tau \ldots$$

findet die größte Stauchung statt. Es bewegen sich dort die benachbarten Teile von beiden Seiten in longitudinaler Rich-Richtung gegen diese Ebene, während sie sich in radialer Richtung von der Achse entfernen. Das Medium erfährt also dort eine Längskontraktion, welche mit einer Querdilatation verbunden ist. In den dazwischen liegenden Ebenen

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_2} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_2 t) \doteq \frac{\tau}{2},\ \frac{3\tau}{2}, \ldots$$

findet umgekehrt Längsdilatation mit Querkontraktion statt. Die räumliche Dilatation ist aber Null, kein Teilchen des Mediums erfährt Volumsänderungen.

Die gewöhnlichen Stauchungswellen in Stäben sind aber nicht divergenzfrei und pflanzen sich rascher fort, wenn auch nicht so rasch wie reine (rotorfreie) Longitudinalwellen.

Derivationen einer allgemeinen Dyadenverteilung.

484. *Die derivierten Triaden.* Die allgemeine Derivation einer Dyadenverteilung Φ nach dem Ortsvektor ist eine Triade

$$T \overset{27}{=} \nabla ; \Phi \qquad d\Phi \overset{9}{=} d\mathfrak{r} \cdot \nabla ; \Phi ,$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{r}_1}^{\mathfrak{r}_2} d\mathfrak{r} \cdot \nabla ; \Phi .$$

Jede Triade läßt sich in folgender Form darstellen

$$T \overset{27}{=} \mathfrak{i} ; \Omega_1 + \mathfrak{j} ; \Omega_2 + \mathfrak{k} ; \Omega_3 ,$$

worin die Ω drei gegebene Dyaden sind. Für die derivierte Triade haben dieselben die Werte

$$\Omega_1 \overset{9}{=} \frac{\partial}{\partial x} \Phi , \quad \Omega_2 \overset{9}{=} \frac{\partial}{\partial y} \Phi , \quad \Omega_3 \overset{9}{=} \frac{\partial}{\partial z} \Phi .$$

Die derivierte Triade läßt sich also auch zerlegen in die 27 aus den rektangulären Einheitsvektoren $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ gebildeten Triaden, deren Koeffizienten die partiellen Ableitungen der Koeffizienten a_{11}, a_{12} nach den Koordinatenrichtungen sind.

$$T \overset{27}{=} \frac{\partial}{\partial x} a_{11}\, \mathfrak{i} ; \mathfrak{i} ; \mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial x} a_{12}\, \mathfrak{i} ; \mathfrak{i} ; \mathfrak{j} + \dots$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} a_{11}\, \mathfrak{j} ; \mathfrak{i} ; \mathfrak{i} + \dots$$
$$\dots$$

Das innere Produkt einer Triade mit einem Vektor $\mathfrak{v}$ ist eine Dyade

$$\mathfrak{v} \cdot T \overset{9}{=} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{i}\, \Omega_1 + \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{j}\, \Omega_2 + \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{k}\, \Omega_3 ,$$
$$T \cdot \mathfrak{v} \overset{9}{=} \mathfrak{i} ; \Omega_1 \cdot \mathfrak{v} + \mathfrak{j} ; \Omega_2 \cdot \mathfrak{v} + \mathfrak{k} ; \Omega_3 \cdot \mathfrak{v} .$$

Außer diesen skalaren Triaden treten auch rotorische Triaden bei Assoziationsänderungen von Produkten mehrerer Vektoren auf.

485. *Die derivierte Dyade und der derivierte Vektor.* Für uns sind von besonderer Wichtigkeit die spezielleren Deriva-

tionen der Dyade Φ, und zwar der derivierte Vektor $\nabla \cdot \Phi$ und die derivierte Dyade $\nabla \times \Phi$. Diese spielen für stetige differenzierbare Dyadenverteilungen dieselbe Rolle wie die Divergenz $\nabla \cdot \mathfrak{v}$ und der Rotor $\nabla \times \mathfrak{v}$ für Vektorverteilungen.

Bezeichnen wir das vektorische Oberflächenintegral der Dyade Φ über eine geschlossene Oberfläche $\mathfrak{o}$ mit

$$\mathfrak{A}_\Phi \overset{s}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Phi .$$

Schrumpft die Oberfläche unter beliebiger Formänderung zusammen, so nähert sich das Verhältnis des Oberflächenintegrals $\mathfrak{A}_\Phi$ zu dem von der Oberfläche eingeschlossenen Volum φ einem endlichen Grenzwert, und dieser ist der derivierte Vektor $\nabla \cdot \Phi$

(a) $$\frac{d\,\mathfrak{A}_\Phi}{d\,\varphi} \overset{s}{=} \nabla \cdot \Phi .$$

Da die Summe dieser Oberflächenintegrale für mehrere aneinander stoßende Räume gleich dem über die äußere Oberfläche derselben erstreckten Integrale ist, so folgt der dem Gaussschen Integralsatze analoge Satz:

(b) $$\int_{\varphi} d\varphi \, \nabla \cdot \Phi \overset{s}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Phi .$$

Stellen wir die Dyade Φ in der Form

$$\Phi \overset{9}{=} \mathfrak{a};\mathfrak{i} + \mathfrak{b};\mathfrak{j} + \mathfrak{c};\mathfrak{k}$$

dar, so hat der derivierte Vektor den Wert

(c) $$\nabla \cdot \Phi \overset{s}{=} \mathfrak{i}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{j}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{k}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{c},$$

worin $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ auch beliebige konstante Vektoren sein können.

486. Gleiches gilt für das dyadische Integral

$$\Omega_\Phi \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \Phi .$$

(a) $$\frac{d\,\Omega_\Phi}{d\,\varphi} \overset{9}{=} \nabla \times \Phi .$$

Die derivierte Dyade $\nabla \times \Phi$ der Dyade Φ läßt sich ebenfalls durch einen Differentialquotienten definieren und wir erhalten einen dem Integralsatz 370. (a) analogen Satz

(b) $$\int_{\varphi} d\varphi \, \nabla \times \Phi \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \times \Phi .$$

Der derivierte Vektor dieser Dyade ist identisch Null

$$\nabla \cdot \nabla \times \Phi \overset{3}{=} 0 .$$

Aus der Definition der derivierten Dyade folgt nämlich der dem Stokesschen Integralsatz analoge Satz

(c) $$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \cdot \nabla \times \Phi \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u} \cdot \Phi .$$

Das vektorische Umfangsintegral einer Dyade Φ ist gleich dem Integral der derivierten Dyade $\nabla \times \Phi$ bezogen auf die von dem Umfange $\mathfrak{u}$ begrenzte Fläche. Ferner ergibt sich

(d) $$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \cdot \nabla \times \Phi \overset{9}{=} \int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u} \times \Phi ,$$

(e) $$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \times \nabla ; \Phi \overset{27}{=} \int_{\mathfrak{u}} d\mathfrak{u} ; \Phi ,$$

(f) $$\int_{\varphi} d\varphi \, \nabla , \Phi \overset{27}{=} \int_{\mathfrak{v}} d\mathfrak{v} , \Phi .$$

Wenn

$$\Phi \overset{9}{=} \mathfrak{a} ; \mathfrak{i} + \mathfrak{b} ; \mathfrak{j} + \mathfrak{c} ; \mathfrak{k} ,$$

so ist die derivierte Dyade

(g) $$\nabla \times \Phi \overset{6}{=} (\operatorname{rot} \mathfrak{a}) ; \mathfrak{i} + (\operatorname{rot} \mathfrak{b}) ; \mathfrak{j} + (\operatorname{rot} \mathfrak{c}) ; \mathfrak{j} .$$

Diese sechs Integralsätze gelten nicht nur für Vektoren und Dyaden, sondern wie alle distributiven Regeln in analoger Weise auch für Triaden, Tetraden u. s. f.

487. *Derivationen der linearen Dyade zweier Vektorverteilungen* $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$. Setzen wir nun spezieller

$$\Phi \overset{5}{=} \mathfrak{v}_1 ; \mathfrak{v}_2 ,$$

so ist

$$\mathfrak{a} \overset{3}{=} v_{2x} \mathfrak{v}_1 \qquad \mathfrak{b} \overset{3}{=} v_{2y} \mathfrak{v}_1 \qquad \mathfrak{c} \overset{3}{=} v_{2z} \mathfrak{v}_1 .$$

Der derivierte Vektor dieser linearen Dyade hat also den Wert

(a) $$\nabla \cdot \mathfrak{v}_1 ; \mathfrak{v}_2 \overset{3}{=} \mathfrak{v}_2 \operatorname{div} \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_1 \cdot \nabla ; \mathfrak{v}_2 .$$

Ebenso läßt sich die derivierte Dyade entwickeln

(b) $$\nabla \times (\mathfrak{v}_1 ; \mathfrak{v}_2) \overset{6}{=} (\nabla \times \mathfrak{v}_1) ; \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1 \times (\nabla ; \mathfrak{v}_2) .$$

Hiernach lassen sich die Derivationen einer in allgemeiner Form gegebenen kompletten Dyade entwickeln.

Derivationen zweiter Ordnung einer Vektorverteilung.

488. Die zweiten Derivationen einer vektorischen Funktion des Ortsvektors nach diesem erhält man durch zweimalige Multiplikation mit dem Hamiltonschen Operator. Je nachdem diese zwei Multiplikationen skalar, rotorisch oder dyadisch sind, erhält man eine große Zahl von Derivationen zweiter Ordnung, welche wir von den höheren zu den niedrigeren fortschreitend betrachten wollen.

489. *Die derivierte Triade einer Vektorverteilung.* Wenn die im obigen betrachtete allgemeine Dyadenverteilung Φ spezieller die derivierte Dyade einer Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ ist

$$\Phi \overset{9}{=} \nabla\,,\mathfrak{v}$$

so ist die Triade die allgemeine Derivation zweiter Ordnung der Vektorverteilung

$$T \overset{2\,7}{=} \nabla\,,\nabla\,,\mathfrak{v}$$

$$T \overset{2\,7}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathfrak{i},\mathfrak{i},\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathfrak{i},\mathfrak{i},\mathfrak{j} + \dots$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathfrak{j},\mathfrak{i},\mathfrak{i} + \dots$$

490. *Die dyadischen Derivationen.* Da nach 100. (a)

$$\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1 \overset{3}{=} \int_{r_1}^{r_2} d\mathfrak{r}\cdot\Phi\,,$$

so muß dieses Linienintegral für jede geschlossene Linie verschwinden, also nach 486. (c)

$$\nabla\times\Phi \overset{6}{=} \nabla\times\nabla\,;\mathfrak{v} \overset{6}{=} 0$$

sein, wie schon in 100. (b) und 210. erwähnt wurde.

Ferner ist die Dyade des Rotors eines Vektors

$$\nabla\,;(\nabla\times\mathfrak{v}) \overset{8}{=} (\nabla\times\mathfrak{v})\times\nabla \overset{8}{=} -\nabla\,;(\mathfrak{v}\times\nabla)$$

eine Derivation zweiter Ordnung.

491. *Die vektorischen Derivationen zweiter Ordnung.* Ersetzt man in der derivierten Triade T der gegebenen Vektorverteilung die erste dyadische Multiplikation durch eine innere

Multiplikation, so erhält man einen Vektor, welcher eine Derivation zweiter Ordnung des Vektors $\mathfrak{v}$ darstellt. Da es vier derivierte Dyaden gibt

$$\nabla ; \mathfrak{v} \qquad \mathfrak{v} ; \nabla \qquad \mathfrak{v} \times \nabla \qquad \nabla \times \mathfrak{v}$$

so lassen sich vier derivierte Vektoren zweiter Ordnung bilden

$$\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \qquad \nabla \cdot \mathfrak{v} ; \nabla \qquad \nabla \cdot \mathfrak{v} \times \nabla \qquad \nabla \cdot \nabla \times \mathfrak{v}$$

Weil zwischen den Dyaden die Beziehung besteht

$$\nabla ; \mathfrak{v} - \mathfrak{v} ; \nabla \overset{9}{=} \mathfrak{v} \times \nabla - \nabla \times \mathfrak{v}$$

(siehe 349.), so besteht zwischen den derivierten Vektoren ebenfalls diese Beziehung

(a) $$\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v} - \nabla \cdot \mathfrak{v} ; \nabla \overset{3}{=} \nabla \cdot \mathfrak{v} \times \nabla - \nabla \cdot \nabla \times \mathfrak{v}$$

welche eine wichtige Rechenregel bildet.

492. *Der Laplacesche Vektor.* Der erstangeführte dieser derivierten Vektoren könnte durch geänderte Assoziation der drei Faktoren auch in folgender Form geschrieben werden

$$\nabla \cdot (\nabla ; \mathfrak{v}) \overset{3}{=} (\nabla \cdot \nabla) \mathfrak{v} .$$

Diese Assoziationsänderung empfiehlt sich deshalb nicht, weil hierdurch ein neuer Operator

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \overset{1}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

auftritt und wir außer dem Operator ∇ nur reale Größen zulassen möchten (vergl. 352. und 355.). Der Laplacesche Operator ∇^2 ist als inneres Produkt des Hamiltonschen Operators ∇ mit sich selbst wie ein Skalar zu behandeln.

Der Laplacesche Vektor $\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v}$ hat die Komponenten

$$\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} , \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} , \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} . \end{array} \right.$$

493. *Der Gradient einer Divergenz und der Rotor eines Rotors.* Von den übrigen Derivationen zweiter Ordnung sind uns zwei bereits geläufig. Es ist

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} \,;\, \nabla \overset{3}{=} (\nabla \cdot \mathfrak{v}) \nabla \overset{3}{=} \nabla (\nabla \cdot \mathfrak{v}) \overset{3}{=} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

und

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} \times \nabla \overset{3}{=} (\nabla \times \mathfrak{v}) \times \nabla \overset{3}{=} - \nabla \times (\nabla \times \mathfrak{v}) \overset{3}{=} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

Der letzte von den vier derivierten Vektoren ist identisch gleich Null. Es ist nämlich nach 373. (b)

$$\int_0 d\mathfrak{v} \cdot \nabla \times \mathfrak{v} \overset{3}{=} 0$$

und es folgt also aus 485. (b)

(a) $$\nabla \cdot \nabla \times \mathfrak{v} \overset{3}{=} (\nabla \times \nabla) \times \mathfrak{v} \overset{3}{=} 0.$$

Hierdurch gewinnt die Rechenregel 491. (a) die Gestalt

(b) $$\nabla \cdot \nabla \,;\, \mathfrak{v} \overset{3}{=} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

494. *Die Derivation der symmetrischen Dyade.* Außer diesen Derivationen ist, besonders für die Elastizitätstheorie, die vektorische Derivation der symmetrischen Dyade

$$2\,[\nabla \,;\, \mathfrak{v}] \overset{6}{=} \nabla \,;\, \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \,;\, \nabla$$

von Wichtigkeit. Es ist

(a) $$2\,\nabla \cdot [\nabla \,;\, \mathfrak{v}] \overset{3}{=} \nabla \cdot \nabla \,;\, \mathfrak{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v}.$$

Nach der Regel 493. (b) kann man diese symmetrische Derivation zweiter Ordnung in folgender Form darstellen

(b) $$\nabla \cdot [\nabla \,;\, \mathfrak{v}] \overset{2}{=} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

Die Komponenten dieser Vektoren haben folgende Werte

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x\, \partial y} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x\, \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y\, \partial x} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y\, \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z\, \partial x} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z\, \partial y} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \end{array} \right.$$

$$- \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y\, \partial x} - \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z\, \partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z\, \partial y} - \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\, \partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x\, \partial z} - \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y\, \partial z}. \end{array} \right.$$

$$\nabla\cdot[\nabla\,;\mathfrak{u}]\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u_x}{\partial x} & +\frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\ \frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial u_y}{\partial y} & +\frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\ \frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right)+\frac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}+\dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial u_z}{\partial z}. & \end{cases}$$

495. *Berechnung des Vektorpotentials* $\mathfrak{v}$ *eines gegebenen Vektors* $\mathfrak{q}$. Ist die derivierte Dyade

$$\Phi \overset{3}{=} \nabla\,;\mathfrak{v}$$

eines Vektors $\mathfrak{v}$ gegeben, so wie der Wert von $\mathfrak{v}$ in irgend einem Punkte des Feldes, so läßt sich die ganze Verteilung von $\mathfrak{v}$ berechnen. Da diese Dyade der Bedingung

$$\nabla\times\Phi\overset{6}{=}0\,,\quad(\nabla\cdot\nabla\times\Phi\overset{3}{=}0)$$

unterworfen ist, so ist sie durch drei Bestimmungsstücke gegeben. In unserem Falle ist aber nur ihr Rotor

$$\mathfrak{q}\overset{2}{=}\nabla\times\mathfrak{v}\,,\quad(\nabla\cdot\nabla\times\mathfrak{v}\overset{1}{=}0)$$

gegeben, und da dessen Divergenz notwendig Null ist, so liefert dies nur zwei Bestimmungsstücke. Ein Bestimmungsstück der gesuchten Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ ist frei, und wir können deshalb voraussetzen, daß der gesuchte Vektor keine Divergenz habe

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}\overset{1}{=}0\,.$$

Es folgt nun aus der Regel 493. (b)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v}\overset{3}{=}\operatorname{rot}\mathfrak{q}\overset{3}{=}-\nabla\cdot\nabla\,;\mathfrak{v}\,.$$

Die leicht zu berechnenden Komponenten des zweiten Rotors mögen mit $\operatorname{rot}_x\mathfrak{q}$, $\operatorname{rot}_y\mathfrak{q}$ und $\operatorname{rot}_z\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Sie stellen bekannte Skalarverteilungen vor. Man erhält also die drei algebraischen Differentialgleichungen von der Poissonschen Form

$$\operatorname{rot}_x\mathfrak{q}=-\nabla^2 v_x\,,\quad\operatorname{rot}_y\mathfrak{q}=-\nabla^2 v_y\,,\quad\operatorname{rot}_z\mathfrak{q}=-\nabla^2 v_z\,.$$

Dieselben können nach 210. integriert werden und ergeben die skalaren Potentialwerte $v_x\,v_y\,v_z$, d. i. die gesuchten Komponenten des Vektorpotentials $\mathfrak{v}$.

496. Wir haben bereits in 210. die Verteilung eines Vektors $\mathfrak{g}$ berechnet, dessen Divergenz μ gegeben ist, also das vektorische Potential $\mathfrak{g}$ eines Skalars μ. Doch mußte dort

die Voraussetzung gemacht werden, daß der Vektor $\mathfrak{g}$ ein skalares Potential habe, daß also

$$\operatorname{rot} \mathfrak{g} \stackrel{2}{=} 0 .$$

Addieren wir die Vektorverteilungen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{g}$, so erhalten wir die Verteilung eines Vektors

$$\mathfrak{p} \stackrel{3}{=} \mathfrak{v} + \mathfrak{g} ,$$

dessen Divergenz μ und Rotor $\mathfrak{q}$ beliebig als Funktionen des Ortes gegebene Werte haben

$$\mu \stackrel{1}{=} \operatorname{div} \mathfrak{p} , \quad \mathfrak{q} \stackrel{2}{=} \operatorname{rot} \mathfrak{p} .$$

Die Komponenten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{g}$ dieses gesuchten Vektors $\mathfrak{p}$ können nach 210. und 495. berechnet werden. Der Vektor $\mathfrak{p}$ selbst hat kein vektorisches Potential in Raumgebieten, in welchen seine Divergenz nicht Null ist, und kein skalares Potential in Raumgebieten, in welchen sein Rotor nicht Null ist.

---

23. Inhomogene elastische Medien.

497. Die bisher entwickelten Bewegungsgleichungen gelten auch mit großer Annäherung für inhomogene Medien, z. B. für einen ungleichmäßig temperierten elastischen Körper, obgleich die Moduln A und K von der Temperatur abhängen, oder für eine Flüssigkeit von ungleichmäßig verteiltem Salzgehalt.

Dennoch kann man diese Gleichungen nicht als mit völliger Exaktheit für inhomogene Medien geltend annehmen. Tatsächlich bemerkt man in Gebieten sehr starker Inhomogenität, insbesondere in den Grenzschichten zwischen zwei Medien, auffallende Abweichungen von dem elastischen Verhalten homogener Medien.

Da diese Grenzschichten ungemein dünn sind, so wären sie überhaupt ohne Einfluß, wenn eine Bewegungsgleichung nach Art von 472.(a) für homogene und inhomogene Medien gelten würde. Hat aber die Inhomogenität des Mediums, die Größe und Richtung der Eigenschaftsgefälle in demselben, einen spezifischen Einfluß auf sein Verhalten, so wird dieser Einfluß in den ungemein dünnen Oberflächenschichten eine endliche

Größe haben, da die Eigenschaftsgefälle in diesen Schichten ungemein groß sind.

Tatsächlich sind die meisten charakteristischen elastischen Erscheinungen in begrenzten Medien nicht durch die Eigenschaften des Mediums, sondern durch seine Oberflächenschichten oder Eigenschaftsgefälle bedingt.

Hierüber war man sich, was die Flüssigkeiten betrifft, immer klar und bezeichnete die betreffenden Erscheinungen als Wirkungen der Oberflächenspannung. Die große Differenz der Spannungen p auf beiden Seiten der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten ist bekannt, der große Wert der potentiellen Energie (siehe Kap. 25) dieser Grenzschicht wurden schon von Laplace erkannt. Noch viel stärkere, jedoch völlig anders geartete, Wirkungen hat die Oberflächenschiche fester elastischer Körper, und dies wurde zufolge der von Poisson eingeschlagenen Betrachtungsweise bisher übersehen.

So wie z. B. die Kugelform eines unbeeinflußten Flüssigkeitstropfens nicht auf dem Verhalten der Flüssigkeit selbst beruht, sondern ausschließlich durch ihre Oberflächenschicht bestimmt wird, so ist auch z. B. die Erscheinung, daß ein gedehntes elastisches Prisma eine ganz bestimmte Querkontraktion zeigt, nicht durch das Verhalten des homogenen elastischen Mediums bedingt, sondern wesentlich eine Folge des Verhaltens der dünnen Oberflächenschichte des Prismas, und ein gleiches gilt für jede andere nur an begrenzten elastischen Medien zu beobachtende Erscheinung.

Deshalb hat die Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung inhomogener elastischer Medien die größte Wichtigkeit.

498. Wir gehen aus von der Bewegungsgleichung homogener elastischer Medien 471. (a)

$$\text{(a)} \qquad \mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \stackrel{s}{=} A \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} - K \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}$$

und suchen dieselbe für inhomogene Medien zu verallgemeinern.

Der Schluß aus dem bekannten Gesetze eines einfachen speziellen Falles auf das Gesetz des allgemeinen Falles ist eine oftmals mit Glück versuchte Methode, in der Theorie eines Erscheinungsgebietes vorzudringen. Der Erfolg beruht

hierbei wesentlich darauf, daß man aus den zahlreichen mathematisch gleichwertigen Formen, in welchen man das Gesetz des speziellen Falles aussprechen kann, jene Form auswählt, für welche man irgend einen einigermaßen stichhaltigen Grund angeben kann, daß sie die zur Verallgemeinerung geeignetste ist. In welcher Weise die Verallgemeinerung zu erfolgen hat, ist dann leicht anzugeben oder zu erraten. Ein einfaches Beispiel dieser Schlußweise findet sich schon in § 3 und 4.

Im vorliegenden Falle handelt es sich zunächst darum, die rechte Seite der Bewegungsgleichung umzugestalten, denn jedenfalls ist auch in inhomogenen Medien der Fluktor $\mu\,\dot{\mathfrak{v}}$ der elastischen Beschleunungen durch ein direktes Gesetz bestimmt. Es sind also unter den Derivationen zweiter Ordnung der Verschiebungsverteilung $\mathfrak{u}$ jene auszuwählen, welche die Deformation des Mediums am besten charakterisieren, denn diese bestimmt die elastischen Beschleunungen. Die Divergenz der Verschiebungen ($\operatorname{div}\mathfrak{u}$) ist allerdings die Volumsänderung pro Volumseinheit und also für die Deformation des Mediums charakteristisch, und so wird auch die zweite Derivation ($\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{u}$) die Beschleunung der Teile des inhomogenen Mediums mit bestimmen.

Hingegen steht der zweite Rotor der Verschiebung ($\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u}$) in keiner direkten Beziehung zu der Deformation des Mediums. Er ist die Derivation der nicht symmetrischen Dyade

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u} \overset{3}{=} \nabla\cdot\mathfrak{u}\times\nabla\,.$$

Es sind aber die symmetrischen Dyaden für die Deformation charakteristisch, während der antisymmetrische Anteil der Dyade die Drehung der Teile des Mediums darstellt.

Wir werden also dadurch die Bewegungsgleichung einer Verallgemeinerung fähig machen, daß wir statt der unsymmetrischen Dyade $\mathfrak{u}\times\nabla$ die symmetrische Dyade

$$2[\nabla\times\mathfrak{u}] \overset{6}{=} \nabla\times\mathfrak{u} + \mathfrak{u}\times\nabla$$

einführen. Es ist dies ohne weiteres möglich, da die Derivation der konjugierten Dyade $\nabla\times\mathfrak{u}$ nach 493. (a) Null ist

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathfrak{u} \overset{3}{=} 0\,.$$

Es ist also

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{u} \overset{3}{=} 2\,\nabla\cdot[\nabla\times\mathfrak{u}]$$

und die Bewegungsgleichung homogener Medien kann in der Form dargestellt werden

$$\text{(b)} \qquad \mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{s}{=} A \nabla (\nabla \cdot \mathfrak{u}) + 2K \nabla \cdot [\nabla \times \mathfrak{u}].$$

499. Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 498. (a) und gilt also ebensowenig wie diese für inhomogene Medien, in welchen die Moduln A und K nicht konstant, sondern Funktionen des Ortes sind. Da die Eigenschaftsgefälle, also die Gradienten ∇A und ∇K ohne Zweifel von Einfluß sind, so liegt es nahe von dieser Bewegungsgleichung für homogene Medien dadurch zu der Bewegungsgleichung für inhomogene Medien überzugehen, daß man die Moduln A und K in die Differentiation einbezieht. Dieser Schluß reicht zur Begründung der Theorie inhomogener Medien aus. Allerdings hängt der Erfolg davon ab, daß unter den an sich identischen Formen der zu verallgemeinernden Gleichung die richtige gewählt wird, eine Wahl, welche die allgemeinere Gleichung wesentlich mit bestimmt.

Die Bewegungsgleichung inhomogener elastischer Medien wird also folgende Gestalt haben

$$\text{(a)} \qquad \mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{s}{=} \nabla A \nabla \cdot \mathfrak{u} + 2 \nabla \cdot K [\nabla \times \mathfrak{u}].$$

500. Wir wollen noch eine identische Umformung dieser allgemeinen Gleichung durchführen. Es ist zunächst wünschenswert, statt der speziellen Derivation $\nabla \cdot \mathfrak{u}$ die skalare symmetrische Dyade $[\nabla ; \mathfrak{u}]$ einzuführen. Nun ist nach 356.

$$I \nabla \cdot \mathfrak{u} = [\nabla ; \mathfrak{u}] - [\nabla \times \mathfrak{u}].$$

Es ergibt sich also die Bewegungsgleichung

$$\text{(b)} \qquad \mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{s}{=} \nabla \cdot (A [\nabla ; \mathfrak{u}] - \lambda [\nabla \times \mathfrak{u}]).$$

Der Modul

$$\lambda = A - 2K$$

heißt der Lamésche Modul. Die derivierte Dyade der Verschiebung $\mathfrak{u}$, welche die elastischen Beschleunungen bestimmt, setzt sich also aus der skalaren und rotorischen symmetrischen Dyade im Verhältnis der Moduln A und $-\lambda$ zusammen.

Wir bezeichnen als die Spannungsdyade Ψ eines deformierten inhomogenen Mediums die symmetrische Dyade

(c) $$\Psi \overset{6}{=} \lambda[\nabla \times \mathfrak{u}] - A[\nabla ; \mathfrak{u}].$$

Dieselbe läßt sich in manchen Fällen und mit Vorteil in folgenden Formen darstellen

(d) $$\Psi \overset{6}{=} - A \operatorname{div} \mathfrak{u}\, I - 2K[\nabla \times \mathfrak{u}]$$

und

(e) $$\Psi \overset{6}{=} - 2K[\nabla ; \mathfrak{u}] - \lambda \operatorname{div} \mathfrak{u}\, I.$$

501. Die Bewegungsgleichung inhomogener elastischer Medien gewinnt sonach folgende einfache Form

(a) $$\mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{3}{=} - \nabla \cdot \Psi + \mathfrak{g},$$

worin $\mathfrak{g}$ die übrigen (nicht elastischen) Beschleunungen sind. Dieselbe gilt für alle (nicht zähen) deformierbaren Medien, also auch für Flüssigkeiten und Gase, nur daß in diesen der Torsionsmodul nahezu Null, also die Spannungsdyade Ψ ausschließlich durch die skalare Spannung p bestimmt wird

(b) $$\Psi \overset{6}{=} p\, I.$$

Nicht inbegriffen ist aber die allerdings geringe Oberflächenspannung der Flüssigkeiten, deren Gesetz einen ganz anderen Charakter hat als jenes der elastischen Beschleunungen.

Auch starre Körper können als elastische Medien aufgefaßt werden, deren Moduln ungemein groß und deren Deformation ungemein klein sind, so daß die Spannungsdyade endlich ist.

Im weiteren haben wir nichts anderes mehr vor uns, als diese Gleichung zu integrieren und ihre Integrale mit den Beobachtungen zu vergleichen. Die Integration ist, da hier nur analoge Regeln für die Dyadenrechnung als für die Skalarrechnung in Betracht kommen, ebenso leicht als die Integration der analogen Gleichung der idealen Flüssigkeiten.

502. *Fluxion der Bewegungsgröße.* Wir wollen nun die Fluxion der Bewegungsgröße eines Teiles der deformierbaren Medien berechnen. Sei φ dieser von der Oberfläche $\mathfrak{o}$ umschlossene Raum und bezeichne $\mathfrak{g}'$ die elastische Beschleunung des Volumelementes $d\varphi$, so ist

$$\mu\, \mathfrak{g}' \overset{3}{=} - \nabla \cdot \Psi.$$

Die Fluxion $\mathfrak{B}$ der Bewegungsgröße zufolge der elastischen Beschleunungen ist

$$\mathfrak{B} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \mu\, \mathfrak{g}'\, d\varphi\,,$$

(a) $$\mathfrak{B} \overset{3}{=} -\int_{\varphi} d\varphi \bigtriangledown \cdot \Psi \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Psi\,.$$

Dieselbe wird also bestimmt durch das vektorische Oberflächenintegral der Spannungsdyade.

503. *Drehmoment der elastischen Beschleunungen.* Wir bestimmen ferner das Drehmoment $\mathfrak{D}$ der elastischen Beschleunungen

$$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} d\varphi\, \mathfrak{r} \times \mu\, \mathfrak{g}',$$

Es ergibt sich unter Berücksichtigung der Regel 487. (a)

$$\bigtriangledown \cdot (\Phi \times \mathfrak{a}) \overset{3}{=} (\bigtriangledown \cdot \Phi) \times \mathfrak{a}$$

(a) $$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \bigtriangledown \cdot \Psi \times \mathfrak{r}\, d\varphi \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Psi \times \mathfrak{r}\,.$$

Der Vektor $d\mathfrak{o} \cdot \Psi$ bestimmt also die Fluxion des Bewegungsmomentes der Teile elastischer Medien, ebenso wie der Vektor $d\mathfrak{o}\, p$ für Flüssigkeiten.

Wir haben hiermit die Fluxionen der Bewegungsgröße und des Bewegungsmomentes durch Oberflächenintegrale dargestellt. Da ein Oberflächenintegral sein Vorzeichen wechselt, wenn man von dem eingeschlossenen Raume zu dem ausgeschlossenen übergeht, so folgt, daß der eine Raum ebensoviel an Bewegungsgröße und Bewegungsmoment gewinnt, als der andere verliert. Die elastischen Beschleunungen deformierbarer Medien, welche an ihrer äußeren Oberfläche von einem Medium konstanter Spannungsdyade umhüllt werden, erfüllen also das Gegenbeschleunungsgesetz und den Flächensatz.

504. *Starre Körper in elastischen Medien.* Wie die Spannungsdyade Ψ in einem starren Körper verteilt ist, wissen wir nicht, da die Deformationen zu klein und die Moduln zu groß sind. Wir denken uns aber wieder (analog wie in 409.) die Verteilung der Spannungsdyade Ψ, welche in den umgebenden Medien vorhanden ist, irgendwie aber kontinuierlich

in den Raum des starren Körpers fortgesetzt, und bezeichnen mit $\mathfrak{g}_1$ die fingierten Beschleunungen, welche die Teile des starren Körpers, deren Dichte μ_1 ist, dann hätten, wenn die Verteilung der Spannungsdyade in dem starren Körper wirklich gleich dieser willkürlichen Verteilung wäre. Es ist dann

$$\mu_1 \mathfrak{g}_1 \overset{s}{=} - \nabla \cdot \Psi.$$

Jedenfalls würden diese fingierten Beschleunungen zusammen mit den Beschleunungen der umgebenden Medien nach 503. das Gegenbeschleunungsgesetz erfüllen. Denn wäre an Stelle des starren Körpers ein elastisches Medium von derselben Dichteverteilung μ_1, so könnte dieses tatsächlich die Dyadenverteilung Ψ und die elastischen Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$ haben.

Die wirklichen elastischen Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ des starren Körpers sind ganz anders verteilt. Ihre gesamte Beschleunungsgröße und ihr Drehmoment muß aber vektorisch gleich sein der Beschleunungsgröße und dem Drehmoment der fingierten Beschleunungen, denn sonst würden erstere Beschleunungen $\mathfrak{g}'$ zusammen mit den Beschleunungen der umgebenden Medien das Gegenbeschleunungsgesetz nicht erfüllen.

Der starre Körper bewegt sich also ebenso, als wäre er nicht von dem elastischen Medium, sondern von verdünnter Luft (vergl. 408) umgeben, als hätten seine Teile aber außer der Schwerebeschleunung und anderen wirklich gegebenen äußeren Beschleunungen noch die fingierten äußeren Beschleunungen $\mathfrak{g}_1$.

Es ist auch hier (so wie in 415.) nicht nötig eine Angabe über die willkürliche Verteilung der Spannungsdyade im Innern des starren Körpers zu machen. Man kann die Beschleunungsgröße $\mathfrak{B}_1$ und das Drehmoment $\mathfrak{D}_1$ der fingierten Beschleunungen direkt aus der gegebenen Verteilung der Dyade Ψ in dem elastischen Medium an der Oberfläche $\mathfrak{o}$ des starren Körpers berechnen, da sich dieselben durch die oben angegebenen Oberflächenintegrale bestimmen

(a) $$\mathfrak{B}_1 \overset{s}{=} -\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Psi,$$

(b) $$\mathfrak{D}_1 \overset{s}{=} \int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Psi \times \mathfrak{r},$$

worin $\mathfrak{o}$ die Oberfläche des starren Körpers ist. Der starre Körper bewegt sich also so, als wäre er von verdünnter Luft umgeben und als würde jeder unter dem Oberflächenelement $d\mathfrak{o}$ liegende Teil desselben die äußere Beschleunungsgröße

(b) $$d\mathfrak{b} \stackrel{s}{=} -d\mathfrak{o}\cdot\Psi$$

erfahren. Dieselbe hat nur dann dieselbe Richtung wie der Vektor $d\mathfrak{o}$ (die Normalrichtung der Oberfläche), wenn diese mit einer der drei Hauptrichtungen der Dyade Ψ zusammenfällt.

505. *Die Grenzbedingung.* Meist sind die elastischen Medien, deren Bewegung man betrachtet, hinreichend homogen, um für alle im Innern derselben liegenden Teile derselben die Bewegungsgleichung homogener Medien anwenden zu können. Eine starke Inhomogenität zeigen aber die ungemein dünnen Grenzschichten zwischen zwei verschiedenen Medien. Zufolge der in dieser Schicht geltenden Bewegungsgleichung für inhomogene Medien hat diese Gleichung einen bestimmenden charakteristischen Einfluß auf die Bewegung auch homogener Körper, was ganz denselben Effekt hat, als würden zwar die Gleichungen für homogene Medien gelten, als hätte aber die dünne Grenzschicht besonders große Wirkungen. Dieser Einfluß der Grenzschicht läßt sich aber auch in Form einer einfachen Grenzbedingung beschreiben.

Betrachten wir ein Stück von der Fläche $d\mathfrak{o}$ einer solchen Grenzschicht. Auf der einen Seite desselben in dem Medium 1 habe die Spannungsdyade den Wert Ψ_1, auf der anderen Seite in dem Medium 2 den Wert Ψ_2. Der Flächenvektor $d\mathfrak{o}$ sei von dem Medium 1 gegen das Medium 2 gerichtet. Das betrachtete Volumelement hat die Form einer Platte, deren Basisflächen $d\mathfrak{o}$ sind, und deren Randfläche von höherer Ordnung unendlich klein ist. Bilden wir das Oberflächenintegral der Spannungsdyade, so kann diese Randfläche außer acht gelassen werden, da auch im Innern der Grenzschicht die Spannungsdyade einen endlichen Wert haben muß. Es ist also die Fluxion $d\mathfrak{B}$ der Bewegungsgröße dieses Volumelementes nach 502. (a) bestimmt durch

$$d\mathfrak{B} \stackrel{s}{=} d\mathfrak{o}\cdot\Psi_2 - d\mathfrak{o}\cdot\Psi_1.$$

Da die Masse dieses Elementes von höherer Ordnung unendlich klein ist als seine Fläche $d\mathfrak{o}$, so kann dasselbe keine merkliche Bewegungsgröße annehmen und deshalb muß

(a) $$d\mathfrak{o} \cdot \Psi_2 \overset{s}{=} d\mathfrak{o} \cdot \Psi_1$$

sein. Diese Grenzbedingung ist den Spannungsdyaden in den aneinander grenzenden Teilen beider Medien auferlegt. Dieselben behalten auch dort noch drei Freiheiten.

Da in Flüssigkeiten die Spannungsdyade gleich der skalaren Spannung p (multipliziert mit der Einheitsdyade) ist, so muß an der Grenze eines elastischen Mediums und einer Flüssigkeit die Bedingung

(b) $$d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{s}{=} p\, d\mathfrak{o}$$

erfüllt sein. Beide Vektoren haben also notwendig die Richtung der Normale $d\mathfrak{o}$ und dies muß sonach in diesem Falle eine Hauptrichtung der Dyade sein.

506. *Analytische Form der Spannungsdyade.* Bezeichne $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren von den Richtungen $x\ y\ z$, und zerlegen wir die Dyade Ψ in neun skalare Dyaden nach diesen Richtungen

$$\begin{aligned} -\Psi \overset{6}{=}\ & a_{11}\,\mathfrak{i};\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{i};\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{i};\mathfrak{k} + \\ & + a_{21}\,\mathfrak{j};\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j};\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{j};\mathfrak{k} + \\ & + a_{31}\,\mathfrak{k};\mathfrak{i} + a_{32}\,\mathfrak{k};\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k};\mathfrak{k}, \end{aligned}$$

so haben die Koeffizienten der ersten Zeile folgende Werte

$$a_{11} = \lambda \operatorname{div} \mathfrak{u} + 2K\frac{\partial u_x}{\partial x} = A\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$a_{12} = K\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \qquad a_{13} = K\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Der analytische Wert des Oberflächenelementes $d\mathfrak{o}$ ist

$$d\mathfrak{o} \overset{s}{=} \mathfrak{i}\,dy\,dz + \mathfrak{j}\,dz\,dx + \mathfrak{k}\,dx\,dy,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} -d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{s}{=}\ & dy\,dz(a_{11}\,\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{k}) + \\ & + dz\,dx(a_{21}\,\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{k}) + \ldots. \end{aligned}$$

Grenzt eine Flüssigkeit von der Spannung p an dieses Oberflächenelement, so ist

$$p\,dy\,dz = a_{11}\,dy\,dz + a_{21}\,dz\,dx + a_{31}\,dx\,dy \text{ usw.}$$

507. *Erstes Beispiel: Torsion eines elastischen Zylinders.* Die Verteilung der Verschiebung $\mathfrak{u}$ in einem homogenen Torsionsfelde ist nach 475.

(a) $$\mathfrak{u} \overset{3}{=} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}\,;\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}\,.$$

Hierin ist $\mathfrak{r}$ die Entfernung von einem beliebigen festen Punkt, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind zwei konstante gegebene Vektoren, welche beide der Achse des tordierten Zylinders parallel seien. Dann ergibt sich unter Zuziehung von 374.

$$d\,\mathfrak{u} \overset{3}{=} d\,\mathfrak{r} \cdot \big(\mathfrak{a}\,;\mathfrak{b} \times \mathfrak{r} - (I \times \mathfrak{b})(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})\big)\,.$$

Die Dyade $I \times \mathfrak{b}$ ist antisymmetrisch, sie stellt die Drehung der Querschnitte des Zylinders dar und fällt bei der Bildung der symmetrischen Deformationsdyade weg. Es ist also

(b) $$[\nabla\,;\mathfrak{u}] \overset{6}{=} [\mathfrak{a}\,;\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}]$$

und, da $\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0$, so bestimmt sich die Spannungsdyade durch

(c) $$-\Psi = 2\,K\,[\mathfrak{a}\,;\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}]\,.$$

Für ein der Mantelfläche des Zylinders angehöriges Oberflächenelement $d\mathfrak{o}$, dessen Normale also auf $\mathfrak{a}$ und auf $\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}$ senkrecht steht, ist

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{3}{=} 0\,.$$

Diese Mantelfläche muß also an einen Gasraum von sehr geringer Spannung grenzen. Wenn ferner eine Grenzfläche des tordierten Mediums eine konaxiale Schraubenfläche von 45^0 Steigung ist, also ihre Normalen den Winkel der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}$ halbieren, so hat $d\mathfrak{o} \cdot \Psi$ dieselbe Richtung und deshalb kann diese Fläche an einen Gasraum grenzen. Die zylindrischen sowie diese schraubenförmigen Flächen bilden die Hauptflächenscharen dieser Dyade.

Ein Element $d\mathfrak{o}$ der Basisfläche des tordierten Zylinders ist entgegengesetzt gerichtet dem Vektor $\mathfrak{a}$ und also ist für dieses Element

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{3}{=} 2\,d\,o\,K\,a\,(\mathfrak{b} \times \mathfrak{r})\,.$$

Wenn diese Basisfläche $\mathfrak{o}$ an einen starren Körper grenzt, so erhält derselbe die Beschleunungsgröße

$$\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{3}{=} 0\,,$$

welche Null ist, weil die Anteile, welche zwei symmetrisch zur Achse liegende Elemente liefern, sich aufheben. Die Vektoren $\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}$ sind nämlich tangential gerichtet und dem Radius $\mathfrak{r}$ proportional. Das Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ der elastischen Beschleunungen der Teile des starren Körpers ist nach 504.(b)

$$\mathfrak{D} \stackrel{3}{=} \int_0 d\mathfrak{o} \cdot \Psi \times \mathfrak{r} \stackrel{3}{=} 2\,K a \int_0 (\mathfrak{b} \times \mathfrak{r}) \times \mathfrak{r}\, do,$$

also wenn $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r} \stackrel{1}{=} 0$

$$\mathfrak{D} \stackrel{3}{=} -\,2K a \mathfrak{b} \int_o r^2\, do \stackrel{3}{=} -\,\pi a K r_0^4\, \mathfrak{b},$$

worin r_0 der Radius der Basisfläche ist. Das Drehungsmoment hat also die Richtung der Achse $\mathfrak{b}$ des Zylinders und ist der vierten Potenz des Radius desselben proportional.

Außerdem hängt dasselbe von dem Torsionsmodul K ab. Man kann so durch statische Messungen an tordierten Stäben und Drähten diese wichtige Konstante und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_2$ der divergenzfreien (transversalen) elastischen Wellen in dem Medium bestimmen. Man erhält für

	K (gr cm^{-1}sec^{-2})	μ (gr cm^{-3})	$\mathfrak{c}_2$ (cm sec^{-1})
Stahl	$83 \cdot 10^{10}$	7,8	330000
Eisen	79	7,8	330000
Kupfer	50	8,9	240000
Messing	36	8,5	210000
Glas	24	2,6	300000
Hartgummi	22	1,2	130000
Kautschuk	$33 \cdot 10^6$	1	5800
Leimgallerte	$99 \cdot 10^2$	1	100

Wir berechnen nun die Schwingungsdauer τ eines elastischen Zylinders (Drahtes) von der Länge l, dessen oberes Ende befestigt ist und an dessen unterem Ende ein starrer Körper hängt, dessen Trägheitsmoment in bezug auf die Achse Φ_s^r ist.

Die Rotation $\mathfrak{w}$ desselben und deren Fluxion bestimmen sich nach 475.(b) durch

$$\mathfrak{w} \stackrel{3}{=} a l \dot{\mathfrak{b}}, \quad \dot{\mathfrak{w}} \stackrel{3}{=} a l \ddot{\mathfrak{b}}.$$

Wenn die Schwingungen sehr langsam sind, so ist die Torsion nahezu homogen, so daß wir obigen Wert für das

Drehungsmoment in Gleichung 283. (a) verwenden können. Dann ist die Schwingungsdauer τ bestimmt durch

$$\frac{4\pi^2}{\tau^2} = \pi K \frac{r_0^4}{l} \frac{1}{\Phi_s^r}.$$

Die Beobachtung dieser Schwingungsdauer kann also ebenfalls zur Auswertung des Torsionsmoduls K dienen.

Endlich sehen wir nun auch ein, daß reine Torsionswellen nicht nur in einem unbegrenzten homogenen Medium möglich sind, sondern auch längs eines von Luft von kleiner Spannung umgebenen Zylinders oder Drahtes fortschreiten können, weil hierbei jedenfalls die Grenzbedingungen für die Oberfläche desselben erfüllt ist.

Man kann also auch durch die Bestimmung der Schwingungsdauer τ der stehenden Torsionsschwingungen unbelasteter elastischer Stäbe, deren Länge dann in einfachem Verhältnis zur Wellenlänge

$$c_2 \tau$$

steht, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_2 und somit den Torsionsmodul

$$K = \mu c_2^2$$

bestimmen.

Es zeigt sich freilich, daß man für so rasche Schwingungen nicht vollkommen elastischer (etwas zäher) Medien ein wenig (0,1—2 %) zu hohe Werte des Torsionsmoduls erhält.

508. *Zweites Beispiel. Dehnung eines elastischen Zylinders.* Die einfache Dehnung

$$\mathfrak{u} \overset{3}{=} \pm \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a} ; \mathfrak{a} \quad \nabla ; \mathfrak{u} \overset{6}{=} \pm \mathfrak{a} ; \mathfrak{a}$$

eines Zylinders in der Richtung seiner Achse, welcher der konstante Vektor $\mathfrak{a}$ parallel ist, ist nicht möglich, wenn die Luft, welche an die Mantelfläche des Zylinders grenzt, geringe Spannung hat. Es ist für ein Element $d\mathfrak{o}$ der Mantelfläche, da

$$\mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{o} \overset{1}{=} 0,$$

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi = \mp \lambda a^2 d\mathfrak{o}.$$

Die Spannung p der umgebenden Luft müßte also

$$p = \mp \lambda a^2$$

sein. Es ist nur das untere Vorzeichen möglich, also nur eine Verkürzung des Zylinders, wobei die Spannung p entsprechende Höhe haben muß.

Ebenso verhält es sich mit einer einfachen Querkontraktion des Zylinders, wobei die Verschiebungen radial sind

$$\mathfrak{u} \overset{3}{=} \pm \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \qquad \nabla ; \mathfrak{u} \overset{6}{=} \pm \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} .$$

Wenn sich sein Querschnitt verkleinert, während seine Länge unverändert bleiben soll, so muß an die Basisflächen ($\mathfrak{a} \times d\mathfrak{o} \overset{3}{=} 0$) ein Gas von der Spannung $p = 2\lambda a^2$ grenzen.

Hingegen ist eine mit einer proportionalen Querkontraktion verbundene Dehnung

(a) $$\nabla ; \mathfrak{u} \overset{3}{=} \pm \mathfrak{a} ; \mathfrak{a} \pm \varrho\, \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} ,$$

worin ϱ die Poissonsche Zahl heißt, dann möglich, wenn die Mantelfläche des Zylinders von Luft von geringer Spannung umgeben ist, gleichgültig ob diese Deformation eine statische ist oder während der Bewegung erfolgt. Es ist nämlich für einen gewissen Wert von ϱ die Grenzbedingung

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{3}{=} 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{o} \overset{1}{=} 0$$

erfüllt. Zunächst ist:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \overset{6}{=} \mathfrak{a} ; \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}\, I ,$$

d. h. eine Querkontraktion ist gleich einer Dehnung mit nachfolgender Volumsverkleinerung. Es folgt ferner

(b) $$\nabla ; \mathfrak{u} \overset{6}{=} \pm (1 + \varrho)\, \mathfrak{a} ; \mathfrak{a} \mp \varrho\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}\, I ,$$

(c) $$\operatorname{div} \mathfrak{u} \overset{1}{=} \pm (1 - 2\varrho)\, a^2 ,$$

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi \overset{3}{=} \pm \left(2K\varrho - \lambda(1 - 2\varrho)\right) a^2\, d\mathfrak{o} .$$

Wir gewinnen also folgende Beziehungen:

$$2K\varrho - \lambda(1 - 2\varrho) = 0$$

(d) $$\Psi \overset{6}{=} \mp 2K(1 + \varrho)\, \mathfrak{a} ; \mathfrak{a}$$

(e) $$\varrho = \frac{\lambda}{2(K + \lambda)} = \frac{A - 2K}{2A - 2K} .$$

Das Volum aller bekannten Stoffe wird bei einer Längsdehnung größer oder doch nicht kleiner. Ferner sind die Moduln λ und K immer positiv, also muß die Poissonsche Zahl nach (c) und (e) kleiner als $^1/_2$, aber größer als Null sein.

Wenn der Torsionsmodul K sehr klein ist, wie dies für die Gallerten und Kautschuk zutrifft, so ist ϱ nahezu gleich $^1/_2$ und die Volumsvergrößerung div $\mathfrak{u}$ ist auch bei bedeutenden Dehnungen verschwindend klein. Deshalb sind Stoffe von kleinem Torsionsmodul so dehnbar, während sie nur für hohe Spannungsdyaden merkliche Volumsänderung zulassen.

509. *Fortsetzung. Der Youngsche Modul.* Die inneren Beschleunungen eines starren Körpers, der an eine Basisfläche $\mathfrak{o}$ des gedehnten elastischen Zylinders grenzt, haben kein Drehmoment. Jedes Flächenelement der Grenzfläche erhält nämlich die zur Achse parallele Beschleunungsgröße

$$d\mathfrak{o} \cdot \Psi_0 \overset{s}{=} \mp 2K(1+\varrho)a^2 d\mathfrak{o} \overset{s}{=} \mp E a^2 d\mathfrak{o}.$$

Der Modul

$$E = 2K(1+\varrho) = K\frac{3A-4K}{A-K} \tag{a}$$

heißt der Youngsche Modul.

Derselbe läßt sich durch Beobachtung der Verlängerung $(l - l_0)$ eines Stabes oder Drahtes von der Länge l_0 aus dem zu untersuchenden Material, wenn unten eine Masse m angehängt wird, bestimmen. Es ist nach 61.

$$a^2 = \frac{l-l_0}{l_0}$$

und also im Gleichgewichtsfalle

$$m\mathfrak{g}_0 \overset{s}{=} E\frac{l-l_0}{l_0}\mathfrak{o}. \tag{b}$$

Es ist dies eine der am frühesten durchgeführten elastischen Messungen. Statt die statische Dehnung zu beobachten, kann man auch den Belastungskörper in vertikaler Richtung schwingen lassen, wobei seine Beschleunungsgröße bei der Exkursion $\mathfrak{s}$ und seine Schwingungsdauer nach

$$m\ddot{\mathfrak{s}} \overset{s}{=} -\frac{Eo}{l_0}\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{Eo}{m l_0}$$

den Youngschen Modul E bestimmt.

Es ergibt sich nun aus (a) der uns noch unbekannte Wert des Dehnungsmoduls A

$$A = K\frac{4K-E}{3K-E} \tag{c}$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_1

$$A = \mu c_1^2$$

der reinen (rotorfreien) Longitudinalwellen.

Man erhält so für

	E (gr cm^{-1} sec^{-2})	A (gr cm^{-1} sec^{-2})	c (cm sec^{-1})	c_1 (cm sec^{-1})
Stahl	$210 \cdot 10^{10}$	$260 \cdot 10^{10}$	$520 \cdot 10^3$	$580 \cdot 10^3$
Eisen	200	234	501	550
Kupfer	125	150	375	410
Messing	90	105	326	352
Glas	60	72	480	526
Hartgummi	$6 \cdot 10^{10}$	13	223	327
Kautschuk	$98 \cdot 10^6$	5	16	224
Leimgallerte	$3 \cdot 10^4$	2	0	145

Hieraus berechnen sich nun nach

$$\varrho = \frac{E - 2K}{2K}$$

folgende Werte der Poissonschen Zahl, zu welchen auch einige direkte Beobachtungen des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längsdilatation zugezogen sind. Die besten direkten Bestimmungen von ϱ beziehen sich auf Glas. Es ist für

ϱ	beobachtet	berechnet
Kork	0,01	—
Zinn	0,15	—
Stahl	0,30	0,27
Eisen	—	0,25
Kupfer	—	0,25
Messing	—	0,24
Glas	0,23	0,25
Hartgummi	0,39	0,40
Kautschuk	—	0,48
Leimgallerte	—	0,50

510. *Fortsetzung.* Die Longitudinalwellen in Stäben sind nicht rotorfrei, sondern werden von einer transversalen (radialen) Stauchungswelle begleitet, welche gegen die Dehnungswelle um eine Viertelwellenlänge verschoben ist, so daß überall

die Querkontraktion gleich der ϱ-fachen Längsdehnung ist, da nur so die Grenzbedingung an der Oberfläche des Stabes erfüllt sein kann. Diese Wellen haben eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$, welche größer als jene der rein transversalen, aber kleiner als jene der rein longitudinalen Wellen ist.

Es ist in einer solchen Welle die Spannungsdyade gleich

$$\Psi \stackrel{6}{=} \Psi_0 \sin\alpha, \quad \text{worin} \quad \alpha = \frac{1}{\mathfrak{c}} \cdot (\mathfrak{r} - \mathfrak{c}\, t)$$

und Ψ_0 der konstante in 508. (d) angegebene Wert ist. Hieraus folgt

$$\nabla \cdot \Psi \stackrel{3}{=} \Psi_0 \cdot \nabla \sin\alpha \stackrel{3}{=} E a^2 \nabla \sin\alpha .$$

Aus der Bewegungsgleichung 501. (a) folgt nun

$$\mu\, \mathfrak{c}^2 = E, \tag{a}$$

allerdings erkennt man auch, daß solche Wellen nur mit Annäherung (für dünne Stäbe) möglich sind.

Man beobachtet ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$, indem man die Schwingungsdauer der stehenden Longitudinalschwingungen von Stäben, deren Länge bekannt ist, mittels der Kundtschen Röhre bestimmt (436).

Die beobachteten Werte dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind etwas größer als die in der Tabelle (509) nach dieser Formel aus dem Youngschen Modul berechneten, was wieder eine Folge der bei raschen Schwingungen mehr zur Geltung kommenden Zähigkeit der elastischen Medien ist.

Für sehr feste Stoffe unterscheiden sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}$ der reinen Longitudinalwellen im unbegrenzten Medium und dieser Longitudinalwellen in Stäben nur wenig, ebenso wie die Moduln A und E. In Gallerten aber ist der Unterschied groß. Der Youngsche Modul E des Kautschuks und der Gallerten ist sehr klein und ebenso die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$, während die Schallgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ in diesen Medien recht groß ist.

511. *Drittes Beispiel. Gleichförmige Kompression.* Die einfachste Deformation erfährt ein solider, aber beliebig gestalteter elastischer Körper, wenn derselbe im Piezometer von einer Flüssigkeit von hoher Spannung p umgeben ist. Er verkleinert hierbei sein Volum so, daß seine Gestalt sich ähn-

lich bleibt. Die derivierte Dyade der Verschiebungen $\mathfrak{u}$ ist der Einheitsdyade proportional

$$\nabla ; \mathfrak{u} = c\, I, \quad \nabla \times \mathfrak{u} = -2c\, I, \quad \nabla \cdot \mathfrak{u} = 3c,$$

worin c eine Konstante. Die Spannungsdyade hat also den Wert

$$\Psi \stackrel{6}{=} -A[\nabla ; \mathfrak{u}] + \lambda[\nabla \times \mathfrak{u}] \stackrel{6}{=} -(A + 2\lambda)c\, I.$$

Den Modul

(a) $$H = \tfrac{2}{3}K + \lambda = A - \tfrac{4}{3}K = \tfrac{1}{3}(A + 2\lambda)$$

nennt man den Kompressionsmodul. Da

$$\Psi \stackrel{6}{=} -H \operatorname{div} \mathfrak{u}\, I,$$

so ergibt sich

(b) $$p = -H \operatorname{div} \mathfrak{u}.$$

Man kann beliebige Teile des Körpers durch die Flüssigkeit ersetzen, da diese Dyade keine ausgezeichnete Richtung hat. Deshalb verhält sich ein Piezometergefäß wie ein solider Körper (vgl. 438). Der Kompressionsmodul gibt das Verhältnis der Spannungserhöhung zur Volumsverkleinerung der Volumseinheit. Die piezometrische Messung dieses Moduls für die festeren Stoffe ist nicht leicht, so daß man denselben besser nach der Gleichung

(c) $$H = \tfrac{1}{3}E\frac{K}{3K - E}$$

berechnet. So ergeben sich folgende Werte

	H (gr cm^{-1} sec^{-2})	A (gr cm^{-1} sec^{-2})
Stahl	$150 \cdot 10^{10}$	$262 \cdot 10^{10}$
Eisen	131	235
Kupfer	83	150
Messing	59	107
Glas	45	72
Hartgummi	10	13
Kautschuk	5	5
Leimgallerte	2	2

Der Kompressionsmodul des Kautschuks und der Gallerten unterscheidet sich wenig von dem Dehnungsmodul A, so daß für diese die piezometrische Messung des Kompressionsmoduls

sogar die beste Methode ist, ihren sonst schwer zu bestimmenden Dehnungsmodul sowie ihre Poissonsche Zahl zu bestimmen

$$\varrho = \frac{1}{2} - \frac{E}{6H}. \tag{d}$$

Für Kautschuk ist der Youngsche Modul $E = 10^8$, der Kompressionsmodul nach Amagat $H = 5 \cdot 10^{10}$, also

$$\varrho = \frac{1}{2} - \frac{1}{3000} = 0{,}4997,$$

eine Zahl, welche weit verläßlicher ist als der in 509. angeführte Wert $\varrho = 0{,}48$.

512. *Viertes Beispiel. Spannung einer Hohlkugel.* Das elastische Medium werde durch zwei konzentrische Kugelflächen, vom Radius r_1 und r_2 begrenzt. Es ist möglich, daß dasselbe eine statische Deformation annimmt, wenn der Hohlraum von einer Flüssigkeit, deren Spannung p_1 ist, erfüllt ist, während die den Außenraum erfüllende Flüssigkeit die Spannung p_2 hat.

Die Verschiebungen haben dann jedenfalls die Richtung des Radius und konstante Divergenz (siehe 474.), also folgt

$$\mathfrak{u} \overset{3}{=} \varkappa_1 \mathfrak{r} + \frac{\varkappa_2}{r^3} \mathfrak{r}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} = 3 \varkappa_1$$

$$\nabla ; \mathfrak{u} \overset{6}{=} \left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2}{r^3}\right) I - \frac{3 \varkappa_2}{r^5} \mathfrak{r} ; \mathfrak{r}$$

und da allgemein

$$\Psi \overset{6}{=} \left(\tfrac{2}{3} K - H\right) \operatorname{div} \mathfrak{u}\, I - 2K [\nabla ; \mathfrak{u}],$$

so folgt

$$d\mathfrak{v} \cdot \Psi \overset{3}{=} (2K - 3H) \varkappa_1 \, d\mathfrak{v} - 2K \left(\varkappa_1 - \frac{2 \varkappa_2}{r^3}\right) d\mathfrak{v}.$$

Die Grenzbedingungen lauten

$$p_1 = -3H\varkappa_1 + 4K \frac{\varkappa_2}{r_2^3},$$

$$p_2 = -3H\varkappa_1 + 4K \frac{\varkappa_2}{r_1^3}.$$

Hieraus können die Konstanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ berechnet werden, womit die Deformation der Hohlkugel bekannt ist.

Falls $p_1 = p_2$, also das Gefäß von beiden Seiten derselben Spannung ausgesetzt ist, wie dies bei Piezometergefäßen der Fall ist, so ist

$$\varkappa_2 = 0$$

$$p_1 = -H \operatorname{div} \mathfrak{u},$$

das Gefäß verkleinert sich also, wie wir bereits wissen, so, als wäre es ein solider Körper aus dem Material der Gefäßwand, an dessen äußerer Oberfläche die Spannung p_1 vorhanden ist.

Ferner hat praktisches Interesse die Spannung einer dünnwandigen Blase. Es sei $r_2 - r_1 = \triangle$ die geringe Dicke der Blasenwand, dann ist

$$p_1 - p_2 = -\,4\,K\varkappa_2\,\frac{3\,\triangle}{r_1^4}$$

Ferner ist, wenn es sich nur um Spannungen von der Größenordnung einer Atmosphäre handelt, die Divergenz $3\varkappa_1$ der Verschiebungen verschwindend klein.

Der Inhalt der Blase vergrößert sich um den Bruchteil

$$\frac{3u}{r} = 3\varkappa_1 + \frac{3\varkappa_2}{r^3} = \frac{1}{4K}\,\frac{p_1 - p_2}{\triangle}\,r\,.$$

Die Aneroide und akustischen Tambours zeigen Spannungsdifferenzen durch die Vorwölbung h elastischer Platten an, deren Rand festgeklemmt ist. Die Flächenvergrößerung der Flächeneinheit bestimmt sich wie oben durch die Krümmung. Es ist:

$$\frac{h}{2r} = \frac{2u}{r} = \frac{1}{6K}\,\frac{p_1 - p_2}{\triangle}\,r\,.$$

Es ist also die Ausdehnung der Blase sowie die Vorwölbung der Platte ausschließlich durch ihren Torsionsmodul K bestimmt. Es gibt dies eine gute Methode, diesen kleinen Modul zu messen.

Eine mit Wasser gefüllte Kautschukblase vom Radius $r_1 = 5$ cm, deren Wandstärke $\triangle = 0{,}05$ cm ist, wird in Wasser getaucht. An dieselbe schließt sich ein mit Wasser gefülltes Glasrohr an, welches in ein Quecksilbermanometer übergeht. Es ist leicht aus dem Stand der Quecksilberkuppe in dem kalibrierten Rohre die Inhaltsvergrößerung der Blase zu messen. Das Manometer zeigt die Spannungsdifferenz innerhalb und außerhalb der Blase an. Man beobachtet bei $p_1 - p_2 = 10^5\,(\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-2}})$, d. i. bei $^1/_{10}$ Atmosphäre, eine Vergrößerung des Fassungsraumes der Blase (522 ccm) um 3,95 cm, d. i. um den Bruchteil 0,076. Hieraus folgt der Torsionsmodul des Kautschuks

$$K = 33 \cdot 10^6\ \mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-2}}.$$

24. Die zähen Flüssigkeiten.

513. Die Flüssigkeiten zeigen bei raschen Bewegungen oft deutliche Abweichungen von dem bisher geschilderten Verhalten, also eine andere Verteilung der inneren Beschleunungen. Zähe Flüssigkeiten, z. B. Honig oder hellrotglühendes Glas, verhalten sich nur bei langsamen Bewegungen wie ideale Flüssigkeiten, insbesondere verschwinden die Beschleunungen der Zähigkeit im Ruhefalle, selbst nach großen Deformationen der Flüssigkeit. Diese schmiegt sich z. B. selbst unter dem Einflusse der kleinen Schwerebeschleunung vollständig an die Gefäßwände und nimmt eine ebene Oberfläche an. Die Zähigkeit hängt ferner nicht von der Größe der Geschwindheit ab, so zeigt z. B. eine rasch rotierende zähe Flüssigkeit dieselbe Spannungsverteilung und dieselbe parabolische Form der Oberfläche wie eine ideale Flüssigkeit. Vielmehr macht sich die Zähigkeit bei raschen Deformationen geltend, derart, daß sehr zähe Körper unter dem Einflusse kleiner äußerer Beschleunungen nur sehr langsame Deformationen zeigen, also sich nahezu wie starre Körper verhalten, wie man z. B. an durchhängenden Bleiröhren oder Siegellackstangen beobachten kann, die zufolge der Schwerebeschleunung ungemein langsame, aber monatelang fortschreitende Deformationen zeigen, an welchem Beispiel deutlich zu sehen ist, daß nicht die Größe, sondern die Geschwindheit der Deformation die inneren Beschleunungen der Zähigkeit bestimmt.

514. Eine sehr bekannte Eigenschaft zäher Flüssigkeiten ist ihre Klebrigkeit. Das Haften der Flüssigkeiten an festen Flächen, welche sie benetzen, folgt daraus, daß sie nicht wie ideale Flüssigkeiten beliebig rasche Schiebungen oder Dehnungen zeigen können, da diesen innere Beschleunungen entgegenstehen. Wenn die Flüssigkeit in der Nähe einer festen Wand eine andere Geschwindheit hätte als diese, so müßte die dünne Grenzschicht eine ungemein rasche Schiebung erfahren, was desto weniger möglich ist, je größer ihre Zähigkeit ist. Wenn jedoch zwischen der festen Wand und der Flüssigkeit eine dünne Gasschicht vorhanden ist, deren Zähigkeit sehr gering ist, so kann ein Gleiten der Flüssigkeit an der von ihr nicht benetzten Wand eintreten.

515. Die Beschleunungen, welche die Flüssigkeitsteile zufolge der Zähigkeit erfahren, kommen zu ihren elastischen Beschleunungen hinzu. Man kann die Spannung p in zähen Flüssigkeiten nach denselben Methoden messen, wie in idealen Flüssigkeiten, und findet bei langsamen Bewegungen fast vollständige Übereinstimmung in der Spannungsverteilung bei gleicher Bewegungsform idealer und zäher Flüssigkeiten.

516. Die inneren Beschleunungen, welche das charakteristische Verhalten der zähen Flüssigkeiten bedingen, hängen von der Geschwindigkeit ab, mit welcher die Flüssigkeitsteile deformiert werden, während die Größe der Deformation ebenso als die Größe der Geschwindheiten gleichgültig ist.

Es läßt sich dies in zwei verschiedenen Weisen formulieren. Entweder kann man annehmen, daß diese Beschleunungen durch die Fluxion der Deformationsdyade bestimmt werden, also durch die Fluxion der derivierten Dyade der Verschiebungen, oder aber, daß sie durch die derivierte Dyade der Fluxion der Verschiebungen, d. i. durch die derivierte Dyade der Geschwindheitsverteilung bestimmt werden.

Diese beiden Annahmen fallen nur zusammen, wenn sämtliche Geschwindheiten sehr klein sind, oder wenn die Geschwindheitsverteilung eine spezielle ist, insbesondere wenn die Verschiebungsverteilung in der Richtung der Geschwindheit sich nicht ändert. Gerade dieses ist aber in allen der Beobachtung zugänglichen Fällen mit Annäherung erfüllt, und so steht es frei, uns für die zweite Annahme zu entscheiden. Jedenfalls gewinnen wir hierdurch die Möglichkeit, von den Verschiebungen der Flüssigkeitsteile ganz absehen zu können, da die Beschleunungen derselben dann durch Derivationen der Geschwindheitsverteilung bestimmt wird.

517. Es bestimmen sich hiernach die inneren Beschleunungen der Zähigkeit ebenso durch die Dyade der Geschwindheitsverteilung, als sich die inneren Beschleunungen der Elastizität durch die Dyade der Verschiebungsverteilung bestimmen.

Unter der Spannungsdyade Ψ der Zähigkeit verstehen wir den Wert

$$\Psi \overset{6}{=} \lambda [\nabla \times \mathfrak{v}] - A [\nabla ; \mathfrak{v}]$$

oder, wenn wir

$$K = \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \lambda$$

setzen,

$$\Psi \overset{6}{=} -2 K [\nabla ; \mathfrak{v}] - \lambda \operatorname{div} \mathfrak{v} I,$$

worin die Koeffizienten A, K und λ die Zähigkeitsmoduln der Flüssigkeit genannt werden.

Die Bewegungsgleichung inhomogener zäher Medien dürfte die Form haben

(a) $$\mu \frac{d \mathfrak{v}}{d t} \overset{3}{=} -\nabla \cdot (\Psi' + \Psi) + \mathfrak{g}.$$

Hierin sind $\mathfrak{g}$ die äußeren Beschleunungen, Ψ' die elastische Spannungsdyade. Für inhomogene zähe Flüssigkeiten wird diese gleich der Spannung p und wir erhalten

(b) $$\mu \frac{d \mathfrak{v}}{d t} \overset{3}{=} -\nabla p - \nabla \cdot \Psi + \mathfrak{g}.$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Gestalt wie die Elastizitätsgleichung und ihre allgemeinen Integrale werden in derselben Weise gebildet (siehe 502. bis 505.).

518. Ein starrer Körper wird sich also in einer zähen Flüssigkeit ebenso bewegen, als wäre er von verdünnter Luft umgeben, als würden aber die unter den Oberflächenelementen $d \mathfrak{o}$ liegenden Teile desselben die äußeren Beschleunungsgrößen

$$d \mathfrak{b} \overset{3}{=} -d \mathfrak{o} p - d \mathfrak{o} \cdot \Psi$$

erfahren. Die gesamte Beschleunungsgröße $\mathfrak{B}$ der inneren Beschleunungen aller Teile des starren Körpers ist nämlich

$$\mathfrak{B} \overset{3}{=} -\int_{\varphi} \nabla p \, d \varphi - \int_{\varphi} \nabla \cdot \Psi \, d \varphi \overset{3}{=} -\int_{\mathfrak{o}} d \mathfrak{o} \, p - \int_{\mathfrak{o}} d \mathfrak{o} \cdot \Psi$$

und das Drehungsmoment derselben in bezug auf einen Punkt, von welchem die Teile des starren Körpers den Abstand $\mathfrak{r}$ haben, ist

$$\mathfrak{D} \overset{3}{=} \int_{\varphi} \nabla p \times \mathfrak{r} \, d \varphi + \int_{\varphi} \nabla \cdot \Psi \times \mathfrak{r} \, d \varphi \overset{3}{=} \int_{\mathfrak{o}} d \mathfrak{o} \, p \times \mathfrak{r} + \int_{\mathfrak{o}} d \mathfrak{o} \cdot \Psi \times \mathfrak{r}.$$

In derselben Weise bestimmt sich die Beschleunungsgröße $\mathfrak{B}$ und das Drehmoment $\mathfrak{D}$ der inneren Beschleunungen eines beliebigen Volumteiles φ der inhomogenen zähen Flüssigkeit.

519. Die Grenzschicht zwischen zwei homogenen Flüssigkeiten 1 und 2 kann ihrer sehr geringen Masse wegen keine merkliche Bewegungsgröße annehmen. Hieraus ergibt sich die Grenzbedingung

(a) $$p_1\, d\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}\cdot\Psi_1 \overset{s}{=} p_2\, d\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}\cdot\Psi_2 .$$

Es müssen also nicht notwendig die Spannungen p_1 und p_2 auf beiden Seiten gleich sein, d. h. beide Flüssigkeiten eine entsprechende Kompression haben, sondern es kann ein verschiedener Kompressionszustand der aneinander grenzenden Flüssigkeitsteile durch eine verschiedene Deformationsgeschwindheit derselben aufgewogen werden, ein Fall, der allerdings nur dann vorkommen wird, wenn in der Grenzschicht gleichzeitig eine Diskontinuität der Geschwindheitsverteilung eintritt.

520. *Inkompressible homogene Flüssigkeiten.* Falls die Divergenz der Geschwindheitsverteilung Null ist, hat die Spannungsdyade den Wert

$$\Psi \overset{6}{=} -2K[\nabla;\mathfrak{v}],$$

und wenn die Flüssigkeit homogen ist, nimmt dann die Bewegungsgleichung die Form an

(a) $$\mu\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \overset{s}{=} -\nabla p - K\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}.$$

K ist hiernach jener Zähigkeitsmodul, welcher die größte experimentelle Wichtigkeit hat.

Erstes Beispiel: Strömung in Röhren. Wir betrachten die gleichförmige Strömung einer Flüssigkeit in einem Rohr vom Radius r_0, dessen Achse die Richtung $\mathfrak{i}$ hat. Es ändert sich die Geschwindheit $\mathfrak{v}$ in ihrer eigenen Richtung nicht

$$\mathfrak{v}\cdot\nabla;\mathfrak{v} \overset{s}{=} 0, \qquad \mathrm{div}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{div}\,\mathfrak{v} = 0,$$

und es folgt aus der Bewegungsgleichung (a)

$$\mathrm{div}\,\nabla p = 0.$$

Diese Bedingung erfüllt die Spannungsverteilung außerdem in jeder langsam bewegten inkompressiblen Flüssigkeit.

In unserem Falle erfahren die Flüssigkeitsteile keine Beschleunung in der radialen Richtung. Es tritt also ein konstantes Spannungsgefälle $\varkappa$ in der Richtung der Röhre ein

$$\nabla p \overset{s}{=} -\varkappa\mathfrak{i}.$$

Da $\mathfrak{v} \stackrel{s}{=} \mathfrak{i} v$ und v nur von r abhängt, ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{s}{=} \nabla v \times \mathfrak{i} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v} \stackrel{s}{=} -\mathfrak{i} \operatorname{div} \nabla v .$$

Die Bewegungsgleichung nimmt also die Form an

$$0 = \frac{\varkappa}{K} + \operatorname{div} \nabla v .$$

Das Integral derselben ist, da $\operatorname{div} \mathfrak{r} = 2$

$$v_0 - v = \frac{\varkappa}{4K} r^2 ,$$

worin v_0 die Geschwindheit in der Achse des Rohres ist. An der Wand der ruhenden Röhre ist

$$v = 0 \quad \text{und} \quad r = r_0 .$$

Hieraus folgt

(a) $$v = \frac{\varkappa}{4K} (r_0^2 - r^2) .$$

Die Ausflußmenge, d. h. das Flüssigkeitsvolum $\dot{\varphi}$, welches pro Sekunde durch den Querschnitt der Röhre fließt, ist

(b) $$\dot{\varphi} = \int_0^{r_0} v \, 2\pi r \, dr = \frac{\pi}{8} \frac{\varkappa}{K} r_0^4 .$$

Das gleichförmige Spannungsgefälle in einer stationär durchströmten Röhre kann leicht demonstriert werden, indem man einige Manometer an die Röhre setzt (Fig. 122). Dasselbe ist nach Gleichung (a) desto größer, je größer die Strömungsgeschwindigkeit und die Zähigkeit K der Flüssigkeit, ist und je kleiner der Querschnitt der Röhre ist.

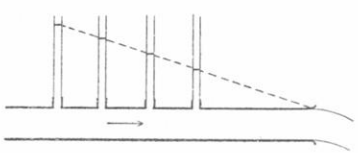

Fig. 122.

Die Ausflußmenge, welche pro Sekunde durch ein Kapillarrohr von bekanntem Kaliber und der Länge l fließt, ist dem Spannungsunterschied $(p_1 - p_2)$ in den beiden Gefäßen proportional, welche das Rohr verbindet

$$\varkappa = \frac{p_1 - p_2}{l} .$$

Durch ein Kapillarrohr von der Länge $l = 100$ cm und dem Radius $r_0 = 0{,}05$ cm strömt bei dem Spannungsunterschied $p_1 - p_2 = 1$ Atm., also bei dem Spannungsgefälle

$$z = 10^4 (\mathrm{gr\,cm^{-2}\,sec^{-2}})$$

das Wasservolum $\varphi = 2{,}0$ ccm. Hieraus folgt der Zähigkeitsmodul des Wassers $K = 0{,}012\,(\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-1}})$. Die folgende Tabelle gibt den Zähigkeitsmodul einiger Flüssigkeiten für gewöhnliche Temperatur. Derselbe wird mit steigender Temperatur meist kleiner (Poiseuille), am auffallendsten beim Schmelzen und Verdampfen.

Gummilösung	$K = 50{,}0\ \mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-1}}$
Glycerin	9,0
Zuckerlösung	3,0
Rüböl	1,7
Sesamöl	0,8
Schwefelsäure	0,22
Amylalkohol	0,06
Alkohol	0,03
Wasser	0,012
Äther	0,003
Sauerstoff	0,0002
Wasserstoff	0,0001

521. *Diffusion der Geschwindheiten in zähen Flüssigkeiten.* Eine sehr charakteristische Seite des Verhaltens zäher Flüssigkeiten ist, daß bei Geschwindheitsunterschieden in parallel strömenden Flüssigkeitsschichten die langsamer bewegte Flüssigkeit beschleunt, die rascher bewegte verzögert wird. Es diffundiert also der Wert der Geschwindheit senkrecht zu ihrer Richtung aus Gebieten höherer Geschwindheit in langsamer bewegte Schichten, ein Vorgang, welcher mit der Diffusion gelöster Stoffe und dem Temperaturausgleich durch Wärmeleitung formelle Ähnlichkeit hat. Allerdings sind letztere Diffusionen solche von skalaren Werten. Die Diffusion der elektrischen Stromdichte in einem ungleichförmig durchströmten Leiter zeigt jedoch eine vollständige Analogie mit der Diffusion der Geschwindheiten in zähen Flüssigkeiten. Falls diese inkompressibel sind und die Spannung konstant ist, nimmt die Bewegungsgleichung nach 520.(a) und 493.(b) die Fouriersche Form

$$\mu \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \stackrel{s}{=} K \bigtriangledown \cdot \bigtriangledown ; \mathfrak{v}$$

an. Hat die Geschwindheit überall die x-Richtung und ändert sich dieselbe nur in der y-Richtung, so ist

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Ein Integral ist nach Fourier

$$v_x = a\, \Lambda,$$

worin a eine Konstante ist. Für $y = 0$ sei $v_x = 0$, ferner sei

$$\frac{d\Lambda}{d\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

worin

$$\xi = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{y}{\sqrt{t}}.$$

Für $t = 0$ und $y \gtrless 0$ ist $v_x = \pm a$. Wir haben also zwei Flüssigkeitsmassen von verschiedener gleichförmiger Anfangs-

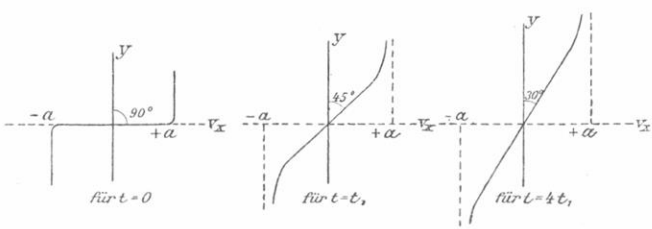

Fig. 123.

geschwindigkeit $+ a$ bzw. $- a$, welche sich in der Ebene $y = 0$ berühren und parallel derselben strömen. Der Gradient der Größe der Geschwindheit

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = a \frac{d\Lambda}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a \sqrt{\frac{\mu}{\pi K t}} \cdot e^{-\xi^2}$$

nimmt in der Ebene $y = 0$ der Wurzel aus der Zeit proportional ab. Es findet also ein immer weiter gehender Ausgleich der Geschwindheiten statt. Ein Wert der Geschwindheit, welcher zur Zeit t_1 in der Entfernung y_1 von der Trennungsebene sich vorfand, findet sich zur Zeit t_2 in der Entfernung y_2, wobei

$$\frac{y_2}{\sqrt{t_2}} = \frac{y_1}{\sqrt{t_1}}.$$

Hierdurch charakterisiert sich das allmähliche Vordringen der Geschwindheiten. Die Abszisse der Kurven Fig. 123 stellt die Werte der Geschwindheit v_x als Funktion der Entfernung y und für drei verschiedene Zeiten dar.

522. *Die transversale gedämpfte Welle.* Ein zweites Integral der Fourierschen Gleichung ist

$$v_y = v_z = 0, \quad v_x = a\, e^{-\alpha y} \sin \alpha (y - c\, t).$$

Es stellt dies eine ebene Transversalwelle dar, deren Amplitude $a\, e^{-\alpha y}$ in der Fortschreitungsrichtung y kleiner wird, also eine gedämpfte Welle, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ ist.

Für $y = \lambda$ ist die Amplitude $a\, e^{-2\pi}$, sie nimmt also unter allen Umständen in jeder Wellenlänge im Verhältnis $e^{2\pi} : 1 = 533$ ab.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ergibt sich die Bedingung

$$c = \alpha \frac{2K}{\mu} \quad \text{oder} \quad \mu c^2 = \frac{4\pi K}{\tau}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst also mit der Zähigkeit und mit der Schwingungszahl $\frac{1}{\tau}$. Es ist

$$\lambda^2 = \frac{4\pi K \tau}{\mu}.$$

Die Wellenlänge nimmt also mit der Wurzel aus der Schwingungsdauer zu. Da die Dämpfung für jede Wellenlänge dieselbe ist, dringen rasche Schwingungen weniger, und zwar desto weniger in dem Medium vor, je geringer die Zähigkeit und je größer die Dichte ist.

Die analoge Diffusion rasch wechselnder elektrischer Ströme, welche in guten Leitern wenig tief eindringen, bezeichnet man als Skineffekt oder Oberflächeneffekt.

Solche transversale Flüssigkeitswellen beobachtet man in der Nähe jedes in einer Flüssigkeit periodisch bewegten starren Körpers, z. B. einer Platte, welche auf der Flüssigkeitsoberfläche aufliegt und Drehschwingungen um eine zu ihr senkrechte Achse ausführt. Es schreitet dann in der Flüssigkeit eine Torsionswelle fort, deren Amplitude in jeder Wellenlänge auf den 533 ten Teil absinkt.

Für die Schwingungsdauer $\tau = 1$ sec beträgt diese Wellenlänge für

Glycerin	$\lambda = 9{,}3$ cm
Wasser	$\lambda = 0{,}39$ „
Luft	$\lambda = 1{,}42$ „

Eine um eine ruhende Achse schwingende, mit einer Flüssigkeit gefüllte Hohlkugel sendet transversale Kugelwellen erster Art (477.) in das Innere der Flüssigkeit, welche die beschriebene starke Dämpfung haben, also nur wenige Millimeter tief eindringen. Die Flüssigkeit in der Achse der Kugel ruht (Helmholtz).

523. *Die longitudinalen gedämpften Wellen.* Von theoretischem Interesse wäre es, die Dämpfung der longitudinalen Wellen in kompressiblen zähen Flüssigkeiten zu bestimmen, da hiermit der Wert des anderen Zähigkeitsmoduls A sich ergeben würde, den man noch nicht kennt. Für langsame Strömungen mit Geschwindheitspotential lautet die Bewegungsgleichung

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} \overset{3}{=} - \varkappa \bigtriangledown \mu + A \bigtriangledown \operatorname{div} \mathfrak{v} ,$$

worin $\varkappa$ die Konstante der Zustandsgleichung der Flüssigkeit ist. Hierzu kommt noch die Kontinuitätsgleichung. Eine Lösung ist

$$v_y = v_z = 0 , \qquad v_x = a e^{-\alpha x} \sin \beta ,$$

$$\mu - \mu_0 = \frac{\mu_0}{c} a e^{-\alpha x} \sin \beta - \frac{A}{c^2} \frac{2\pi}{\lambda} a e^{-\alpha x} \cos \beta ,$$

worin

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} (x - c t) .$$

Die Dichtewelle ist also gegen die Geschwindheitswelle ein wenig verschoben. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c hängt nicht merklich von der Zähigkeit ab und hat mit großer Annäherung den Wert

$$c^2 = \varkappa .$$

Die Dämpfungskonstante α bestimmt sich durch

$$\alpha = \frac{A}{\mu_0 c} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} .$$

Hätte nun freilich A einen mit K vergleichbaren Wert, so wäre die Dämpfung der Schallwellen auch in den zähesten

Flüssigkeiten verschwindend klein. Jedenfalls wäre dann die dämpfende Wirkung der Wärmeleitung auch für die kürzesten Schallwellen größer als die Dämpfung zufolge der Zähigkeit.

524. Das einfachste Beispiel der Bewegung eines starren Körpers in einer zähen Flüssigkeit, welches auch die größte praktische Wichtigkeit hat, ist die Bewegung einer zylindrischen Achse in einem geschmierten Lager. Sei $\mathfrak{r}_0$ der Radius der Achse, $\mathfrak{v}_0$ ihre Umfangsgeschwindigkeit, $\mathfrak{r}_1$ die Dicke der Schmierschicht, und K der Zähigkeitsmodul der Schmierflüssigkeit, so ist die derivierte Dyade der Geschwindheitsverteilung in dieser Flüssigkeit nach § 94

$$\nabla ; \mathfrak{v} \stackrel{\circ}{=} -\frac{1}{\mathfrak{r}_1} ; \mathfrak{v}_0$$

und die Spannungsdyade hat in derselben den Wert

$$\Psi = 2K\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_1} ; \mathfrak{v}_0\right].$$

Das Oberflächenelement $d\mathfrak{v}$ der Achse erhält die Beschleunungsgröße

$$-d\mathfrak{v} \cdot \Psi = -K\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{r}_1}\mathfrak{v}_0,$$

welche der Geschwindheit entgegengesetzt gerichtet ist, und die Achse erfährt ein Drehungsmoment, welches ihrem Radius, ihrer Umfangsgeschwindheit und der geschmierten Fläche proportional ist, außerdem desto größer, je dünner die Schmierschicht und je größer ihr Zähigkeitsmodul ist (Fig. 124).

Wenn also die Dicke der Schmierschicht gegeben ist, werden die am wenigsten zähen Flüssigkeiten oder vielmehr Gase die besten Schmiermittel sein. Bei Achsen, welche in ihren Lagern aufliegen, ist es im Gegenteile notwendig, recht zähe Flüssigkeiten anzuwenden, weil sonst die Schmierschicht an der Auflagestelle zu dünn würde.

Man kann sehr wohl das gleiche entgegengesetzte Drehungsmoment, welches das Lager erfährt, messen, und die Umlaufsgeschwindheit der Achse mittels eines Tourenzählers bestimmen und erhält hieraus gute Werte des Zähigkeitsmoduls K, wenn die Flüssigkeitsschicht im Lager nicht zu dünn ist.

Eine Achse von 10 cm Länge und 2 cm Radius ist zentriert

in einem Lager von 2,1 cm Radius. Der Zwischenraum von 1 mm Dicke ist ausgefüllt mit Glycerin. Das Lager ist um seine Achse drehbar, wird aber durch Gewichte oder Federn, die an Hebelarmen von bekannter Länge angreifen, also durch ein meßbares Drehungsmoment während der Rotation der Achse in Ruhe erhalten. Bei der Tourenzahl 25 $\sec^{-1}$ der Achse beträgt dieses Drehungsmoment $7{,}2 \times 10^6$ ($\mathrm{gr\,cm^{-2}\,sec^{-2}}$), woraus $K = 9{,}1$ ($\mathrm{gr\,cm^{-1}\,sec^{-1}}$) folgt.

525. Feinere Messungen kann man nach der Schwingungsmethode anstellen. Ein an einer feinen Drehwage aufgehangener Körper führt in Luft nahezu ungedämpfte Schwingungen um eine vertikale Achse aus. Ist er jedoch von

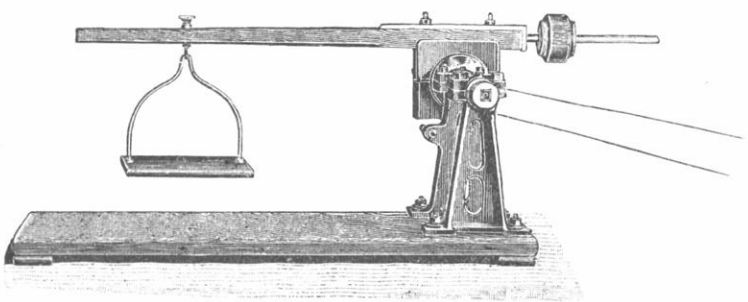

Fig. 124. Pronysches Bremsdynameter.

einer Flüssigkeit umgeben, so nimmt die Amplitude seiner Schwingungen rasch ab. Aus dieser Dämpfung berechnet man die Drehungsmomente, welche derselbe von Seite der Flüssigkeit erfährt und welche stets seiner Rotation entgegengerichtet sind. Da die Dyade der Geschwindheitsverteilung in der gedämpften transversalen Welle, welche der Körper in die Flüssigkeit entsendet, annähernd berechenbar ist, so ergibt sich aus dem beobachteten Wert der Drehungsmomente der Wert des Zähigkeitsmoduls K.

Wesentlich genauer berechenbar ist die Schwingung einer starren Hohlkugel, welche die zu untersuchende Flüssigkeit einschließt (vergl. § 522), und welche von Helmholtz zu solchen Messungen verwendet wurde.

Derivationen allgemeiner Vektorfunktionen.

526. Als eine allgemeine Funktion $\mathfrak{w}$ einer gegebenen Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ bezeichnet man das innere Produkt letzterer Verteilung mit einer allgemein verteilten Dyade Φ

$$\mathfrak{w} \overset{3}{=} \Phi \cdot \mathfrak{v} .$$

Nach einer skalaren Variablen t wird eine solche Vektorfunktion $\mathfrak{w}$ nach der Regel (359.) differenziert

$$\frac{d\,\mathfrak{w}}{d\,t} \overset{3}{=} \mathfrak{v} \cdot \frac{d}{d\,t}\,\Phi_c + \Phi \cdot \frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} .$$

Wenn die Dyade Φ_0 nicht vom Orte abhängt, so heißt die Vektorfunktion eine lineare. Eine solche kann leicht partiell nach irgend einem Vektor, zunächst total nach dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ differenziert werden. Es ist die derivierte Dyade einer linearen Vektorfunktion des Vektors $\mathfrak{v}$

(a) $$\nabla ; (\Phi_0 \cdot \mathfrak{v}) \overset{9}{=} (\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_{0c} .$$

Eine allgemeine Vektorfunktion $\Phi \cdot \mathfrak{v}$ zeigt aber eine örtliche Veränderung, welche von der derivierten Triade T, der Dyadenverteilung Φ abhängt (siehe 484.)

$$T \overset{27}{=} \nabla ; \Phi .$$

527. *Die derivierte Dyade einer allgemeinen Vektorfunktion.* Zunächst berücksichtigen wir wieder die Vertauschungsregel

$$\Phi \cdot \mathfrak{v} \overset{3}{=} \mathfrak{v} \cdot \Phi_c ,$$

worin Φ_c die konjugierte Dyade ist. Nun können wir von diesem Produkt nach der Differentiationsregel (359.) die dyadische Derivation bilden

(a) $$\nabla ; (\Phi \cdot \mathfrak{v}) \overset{9}{=} (\nabla ; \Phi) \cdot \mathfrak{v} + (\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_c .$$

528. *Die Divergenz einer allgemeinen Vektorfunktion* kommt besonders oft vor. Dieselbe ist der erste Skalar der eben entwickelten derivierten Dyade und wir erhalten sie, wenn wir von allen drei Dyaden obiger Gleichung 527.(a) den Skalar nehmen.

Man erhält so

(b) $$\nabla \cdot (\Phi \cdot \mathfrak{v}) \overset{1}{=} (\nabla \cdot \Phi) \cdot \mathfrak{v} + \big((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_c\big)_s .$$

Das letzte Glied kann nicht einfacher bezeichnet werden. Es ist der Skalar des Produktes der beiden Dyaden $\nabla ; \mathfrak{v}$ und Φ_c. Sind die 9 Koeffizienten der Dyade Φ a_{11} a_{12} ..., so hat dieser Skalar den analytischen Wert

$$\begin{aligned}((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_c)_s \overset{1}{=} & \frac{\partial v_x}{\partial x} a_{11} + \frac{\partial v_y}{\partial x} a_{12} + \frac{\partial v_z}{\partial x} a_{13} + \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial y} a_{21} + \frac{\partial v_y}{\partial y} a_{22} + \frac{\partial v_z}{\partial y} a_{23} + \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial z} a_{31} + \frac{\partial v_y}{\partial z} a_{32} + \frac{\partial v_z}{\partial z} a_{33} .\end{aligned}$$

529. *Der Rotor einer allgemeinen Vektorfunktion* ist der Rotor der in 527. (a) entwickelten Dyade und kann in folgender Weise zerlegt werden

(c) $$\nabla \times (\Phi \cdot \mathfrak{v}) \overset{3}{=} (\nabla \times \Phi) \cdot \mathfrak{v} + ((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_c)_r .$$

530. Uns interessieren hier besonders jene Funktionen eines Vektors, welche wir in 347. bis 358. als partielle Ableitungen des Vektors nach seiner eigenen Richtung bezeichnet haben. In diesem Falle ist die Dyade Φ eine derivierte Dyade des Vektors $\mathfrak{v}$ selbst, z. B.

$$\Phi \overset{9}{=} \nabla ; \mathfrak{v} .$$

Es handelt sich also um die Funktionen

$$\nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}, \quad [\nabla ; \mathfrak{v}] \cdot \mathfrak{v} \quad \text{usw.}$$

und wir wollen die Derivationen derselben bestimmen.

Da die derivierte Dyade dieser Dyade verschwindet, weil dieselbe ein Vektorpotential $\mathfrak{v}$ hat

$$\nabla \times \Phi \overset{6}{=} \nabla \times (\nabla ; \mathfrak{v}) \overset{6}{=} 0$$

und da ferner das Produkt der Dyaden

$$(\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Phi_c \overset{9}{=} \nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} ; \nabla$$

eine symmetrische Dyade ist, deren Rotor Null ist, so ist der Rotor der erstangeführten Ableitung nach 529. (c) gleich Null

$$\nabla \times (\nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) \overset{3}{=} \tfrac{1}{2} \nabla \times \nabla \mathfrak{v}^2 \overset{3}{=} 0 .$$

531. *Die Divergenz dieser partiellen Ableitungen* hat eine sehr große Wichtigkeit für die Theorie der Bewegung deformierbarer Medien. Es ist zunächst der derivierte Vektor $\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v}$

der Dyade eine Ableitung zweiter Ordnung der Vektorverteilung $\mathfrak{v}$ (siehe 492.) und es ist nach 528. (b)

(a) $$\nabla \cdot (\nabla ; \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) \stackrel{1}{=} (\nabla \cdot \nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \mathfrak{v} + \big((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{v} ; \nabla)\big)_s .$$

Das letzte Glied ist der zweite Skalar zweiter Ordnung der derivierten Dyade Φ (siehe 70.)

$$\big((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{v} ; \nabla)\big)_s = \{\Phi\}^2_s .$$

Ferner ist

(b) $$\nabla \cdot (\mathfrak{v} ; \nabla \cdot \mathfrak{v}) \stackrel{1}{=} \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \Phi^2_s .$$

Wenn endlich Φ die symmetrische derivierte Dyade ist

$$\Phi \stackrel{6}{=} [\nabla ; \mathfrak{v}] ,$$

so ist

(c) $$\nabla \cdot ([\nabla ; \mathfrak{v}] \cdot \mathfrak{v}) \stackrel{1}{=} (\nabla \cdot [\nabla ; \mathfrak{v}]) \cdot \mathfrak{v} + [\Phi]^2_s ,$$

worin

$$[\Phi]^2_s = [\nabla ; \mathfrak{v}]^2_s$$

der erste Skalar zweiter Ordnung der derivierten Dyade ist (siehe § 69).

Die Divergenz dieser vektorischen Ableitungen des Vektors $\mathfrak{v}$ nach sich selbst läßt sich also zerlegen in das skalare Produkt des Vektors mit einer Derivation zweiter Ordnung (siehe 491. bis 494.) desselben und in den Skalar zweiter Ordnung der derivierten Dyade.

---

25. Die Arbeit der inneren Beschleunungen.

532. Die innere Beschleunung $\mathfrak{g}'$ eines Teilchens einer zähen Flüssigkeit bestimmt sich durch die Bewegungsgleichung

$$\mu \mathfrak{g}' = - \nabla p - \nabla \cdot \Psi ,$$

worin p die Spannung und Ψ die Spannungsdyade ist. Die Arbeit dieser Beschleunung pro Sekunde, d. i. die Fluxion der Bewegungsenergie, bezogen auf die Volumseinheit, ist also

$$\mu \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} - \nabla p \cdot \mathfrak{v} - (\nabla \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{v} .$$

Die Fluxion der Bewegungsenergie in einem Raumteile φ der Flüssigkeit läßt sich nicht durch ein Oberflächenintegral darstellen. Es findet deshalb keine Erhaltung der Bewegungsenergie statt, der von der Oberfläche des Raumes φ ausgeschlossene Raum gewinnt nicht ebensoviel Bewegungsenergie

als der Raum φ verliert. Dies gilt auch für ideale Flüssigkeiten, wie wir schon in 419. ausgeführt haben.

Doch haben wir dort gezeigt, daß diese Arbeit der inneren Beschleunungen oder Fluxion der Bewegungsenergie sich wenigstens teilweise durch das Raumintegral der Divergenz eines Vektors oder durch das Oberflächenintegral dieses Vektors, welchen man deshalb oft bildlich den Energiefluß nennt, darstellen läßt. Es ist

$$- \nabla p \cdot \mathfrak{v} \doteq - \operatorname{div}(p\,\mathfrak{v}) + p \operatorname{div} \mathfrak{v}\,.$$

Für ideale Flüssigkeiten ist also (nach 419.) der Energiefluß $(p\,\mathfrak{v})$ gleich dem Produkte aus Spannung und Geschwindheit. Der Rest stellt die pro Sekunde gewonnene Bewegungsenergie dar

$$\int_{\varphi} p \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\varphi\,.$$

Die in einem Flüssigkeitsteilchen gewonnene Bewegungsenergie ist gleich dem Produkte der Spannung und der Fluxion des Volums und wird durch eine äquivalente Abkühlung oder andere Veränderungen des Teilchens aufgewogen.

533. In einer zähen Flüssigkeit wird die innere Beschleunung aber außerdem durch die Spannungsdyade Ψ bestimmt (vergl. 517.)

$$\Psi \overset{6}{=} - 2K[\nabla\,;\mathfrak{v}]\,.$$

Wir setzen hier der Einfachheit wegen den Zähigkeitsmodul λ, dessen Wert unbekannt ist, gleich Null. Die Arbeit dieses Anteiles der inneren Beschleunungen (der eigentlichen Zähigkeitsbeschleunungen) läßt sich in derselben Weise zerlegen und teilweise durch die Divergenz eines Vektors darstellen, welcher der Energiefluß zufolge der Zähigkeit genannt wird. Der übrige Teil dieser Arbeit liefert gewonnene Energie. Es ist nach Gleichung 528. (b)

$$- (\nabla \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{v} = - \operatorname{div}(\Psi \cdot \mathfrak{v}) + ((\nabla\,;\mathfrak{v}) \cdot \Psi)_s\,.$$

Dieser Energiefluß hat hiernach den Wert $\Psi \cdot \mathfrak{v}$, er ist gleich dem Produkte der Spannungsdyade und der Geschwindheit.

Unser Interesse muß sich nun dem Skalar des Produktes der beiden Dyaden zuwenden, welcher die gewonnene Energie bestimmt.

Da nach 57. und 64.

$$((\nabla\,;\mathfrak{v})\cdot(\nabla\,;\mathfrak{v}))_s \doteq ((\mathfrak{v}\,;\nabla)\cdot(\mathfrak{v}\,;\nabla))_s$$

und

$$((\nabla\,;\mathfrak{v})\cdot(\mathfrak{v}\,;\nabla))_s \doteq ((\mathfrak{v}\,;\nabla)\cdot(\nabla\,;\mathfrak{v}))_s\,,$$

so ist

$$((\nabla\,;\mathfrak{v})\cdot[\nabla\,;\mathfrak{v}])_s \doteq [\nabla\,;\mathfrak{v}]_s^2\,.$$

Die pro Sekunde und pro Volumeinheit gewonnene Bewegungsenergie wird sonach durch den Wert

$$((\nabla\,;\mathfrak{v})\cdot\Psi)_s = -2K[\nabla\,;\mathfrak{v}]_s^2 = -\frac{1}{2K}(\Psi^2)_s$$

dargestellt. Dieselbe ist also immer negativ. Bei Abwesenheit äußerer Beschleunungen nimmt die Bewegungsenergie einer zähen Flüssigkeit immer ab, so daß dieselbe bald zur Ruhe kommt, eine sehr bekannte und charakteristische Eigenschaft der zähen Flüssigkeiten.

Für diese verlorene Bewegungsenergie wird in demselben Raumteile der Flüssigkeit und in derselben Zeit eine äquivalente Wärmemenge erzeugt.

534. Die pro Volumeinheit und Zeiteinheit verlorene Bewegungsenergie oder gewonnene Wärme ist dem ersten Skalar zweiter Ordnung der derivierten Dyade $\nabla\,;\mathfrak{v}$ der Geschwindheitsverteilung oder dem ersten Skalar des Quadrates der Spannungsdyade proportional.

Die Skalare sind nach 69. gleich der Summe der Quadrate der Koeffizienten der Normalform dieser Dyaden, welche Hauptdehnungsgeschwindheiten bzw. Hauptspannungen heißen, und sind also wesentlich positive Zahlen. Wir haben diesen Skalar zweiter Ordnung in 357. und 389. in folgender anderer Form dargestellt

(a) $$[\nabla\,;\mathfrak{v}]_s^2 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\mathfrak{v})^2 + \mathrm{div}\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} - \frac{d}{d\,t}\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,.$$

Es ist also die pro Volums- und Zeiteinheit verlorene Bewegungsenergie oder gewonnene Wärme W

(b) $$W = 2K\left(\tfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\mathfrak{v})^2 + \mathrm{div}\frac{d}{d\,t}\mathfrak{v} - \frac{d}{d\,t}\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\right).$$

535. Um diesen Wert für ein beliebiges Volum φ der Flüssigkeit, welches von der unveränderlich gedachten Oberfläche $\mathfrak{v}$ im betrachteten Augenblicke eingeschlossen wird, be-

rechnen zu können, berücksichtigen wir zunächst das nach der Regel über die Fluxion von Integralen mit materiellem Träger 384. (a)

$$\int_{\varphi} \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\varphi = \frac{d}{dt} \int_{\varphi} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\varphi - \int_{\varphi} (\operatorname{div} \mathfrak{v})^2\, d\varphi$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} - \int_{\varphi} (\operatorname{div} \mathfrak{v})^2\, d\varphi .$$

Die in diesem Raume φ pro Sekunde produzierte Wärmemenge oder verlorene Bewegungsenergie bestimmt sich also durch

(a)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\varphi} W\, d\varphi &= 2K \int_{\varphi} \left(\tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2 + (\operatorname{div} \mathfrak{v})^2\right) d\varphi + \\ &+ 2K \int_{\mathfrak{o}} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \cdot d\mathfrak{o} - 2K \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o} . \end{aligned} \right.$$

Das Integral

$$\int_{\mathfrak{o}} \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}$$

stellt die Geschwindheit dar, mit welcher die im gegebenen Augenblicke (aber nicht dauernd) von der unveränderlichen Oberfläche $\mathfrak{o}$ eingeschlossene Flüssigkeitsmasse ihr Volum ändert. Die totale Fluxion dieses Integrals ist also die Beschleunung, mit welcher sich dieses Flüssigkeitsvolum ändert.

Die verlorene Bewegungsenergie wird also bestimmt durch das Raumintegral über das Quadrat des Rotors und der Divergenz der Geschwindheitsverteilung, außerdem durch die Beschleunung, mit welcher die Flüssigkeit ihr Volum ändert. Endlich aber noch durch das Oberflächenintegral der wahren Beschleunungen der Flüssigkeitsteile.

Letzteres Oberflächenintegral bestimmt die Wärmeproduktion in inkompressiblen, wirbelfrei bewegten Flüssigkeiten völlig.

Erstes Beispiel. Ein starrer Zylinder vom Radius $\mathfrak{r}$ rotiert in einer solchen Flüssigkeit, welche an seiner Oberfläche haftet und dort die Geschwindheit $\mathfrak{v}_0$, also die radial nach einwärts

gerichtete Beschleunung $-\frac{v_0^2}{\mathfrak{r}}$ hat. Das Oberflächenintegral dieser Zentralbeschleunung bestimmt die gesamte Wärmeproduktion W in der Flüssigkeit, falls diese inkompressibel ist und sich wirbelfrei bewegt, also ihre Geschwindheit dem Abstand von der Achse verkehrt proportional ist

$$W = -2K\int_0 \frac{v_0^2}{\mathfrak{r}} \cdot d\mathfrak{v} = 4\pi K v_0^2.$$

Dies bezieht sich auf die Längeneinheit in der Achsenrichtung und die Zeiteinheit.

Zweites Beispiel. Die Schmierflüssigkeit in einem zylindrischen Lager (524.) produziert zufolge ihrer Zentralbeschleunung an der Oberfläche der Achse zunächst die eben berechnete Wärmemenge, welche aber sehr klein ist und welche wir vernachlässigen. Außerdem ist aber hier noch nach 535. (a) das Raumintegral des Rotors der Geschwindheitsverteilung zu berücksichtigen. Es ist nach 94.

$$\nabla ; \mathfrak{v} \overset{9}{=} \frac{1}{\mathfrak{r}_1} ; \mathfrak{v}_0 \text{ also } \operatorname{rot}\mathfrak{v} \overset{3}{=} \frac{1}{\mathfrak{r}_1} \times \mathfrak{v}_0 .$$

Da die Dicke $\mathfrak{r}_1$ der Schmierschicht sehr klein ist, so ist mit hinreichender Genauigkeit

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2 = \frac{v_0^2}{r_1^2}.$$

Also beträgt die gewonnene Bewegungsenergie pro Längeneinheit der Achse, wenn W die gewonnene Wärme ist:

$$-W = -2\pi K \frac{r_0}{r_1} v_0^2.$$

Da die Schmierflüssigkeit ihre Bewegungsenergie nicht ändert, so muß dieser Energiebetrag ganz auf die Achse übertragen werden, welche also, da derselbe negativ ist, gebremst wird. Diese übertragene Energie können wir auch direkt berechnen. Der Energiefluß durch die Oberfläche ist $\Psi \cdot \mathfrak{v}_0$, worin die Spannungsdyade nach 533 den Wert hat

$$\Psi \overset{6}{=} -2K\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_1} ; \mathfrak{v}_0\right].$$

Es ist also der Energiefluß pro Flächeneinheit

$$\Psi \cdot \mathfrak{v}_0 \overset{3}{=} -K v_0^2 \frac{1}{\mathfrak{r}_1}$$

und durch die ganze Oberfläche $-2\pi\mathfrak{r}_0$ strömt pro Längeneinheit der Energiewert in die Schmierflüssigkeit

$$W \doteq 2\pi\mathfrak{r}_0 \cdot K v_0^{\,2} \frac{1}{\mathfrak{r}_1}.$$

Die Achse und das Lager bleiben unbeschleunt zufolge der äußeren mit dem Bremsdynamometer meßbaren Arbeit. Diese ist nach 275. (d) gleich dem Produkt des Drehungsmomentes und der Rotationsgeschwindheit der Achse.

536. *Die Arbeit der elastischen Beschleunungen.* Die Fluxion der Bewegungsenergie eines Teilchens eines ideal elastischen Körpers, dessen elastische Beschleunung $\mathfrak{g}'$ ist, hat (abgesehen von äußeren Beschleunungen) pro Volumseinheit den Wert

$$\dot{E} \doteq \mu\,\mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{v} \doteq -(\nabla \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{v},$$

worin Ψ die elastische Spannungsdyade ist

$$\Psi \overset{9}{=} -2K[\nabla\,;\mathfrak{u}] - \lambda \operatorname{div}\mathfrak{u}\, I.$$

Hierin ist K der Torsionsmodul, λ der Lamésche Modul.

Da die Fluxion der Bewegungsenergie sich nicht durch die Divergenz eines Vektors darstellen läßt, also das Raumintegral derselben sich nicht in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt, findet keine Erhaltung der Bewegungsenergie statt. Der von einer beliebigen Oberfläche eingeschlossene Teil des Mediums gewinnt nicht ebensoviel Bewegungsenergie, wie der ausgeschlossene verliert. Diese Fluxion $\dot{E}$ läßt sich aber teilweise durch die Divergenz eines Vektors darstellen, und zwar des Vektors $(\Psi \cdot \mathfrak{v})$. Dieser stellt den Energiefluß dar. Der andere Anteil der Fluxion der Bewegungsenergie stellt die pro Sekunde gewonnene Energie dar.

Es ist nach Gleichung 528. (b)

(a) $$\dot{E} \doteq -(\nabla \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{v} \doteq -\nabla \cdot (\Psi \cdot \mathfrak{v}) + \big((\nabla\,;\mathfrak{v}) \cdot \Psi\big)_s.$$

Die pro Sekunde und Volumseinheit gewonnene Bewegungsenergie wird also durch den Skalar des Produktes der derivierten Dyade der Geschwindheit und der Spannungsdyade dargestellt. Es ist

(b) $$\big((\nabla\,;\mathfrak{v}) \cdot \Psi\big)_s \doteq -\lambda \operatorname{div}\mathfrak{v} \operatorname{div}\mathfrak{u} - 2\big((\nabla\,;\mathfrak{v}) \cdot K[\nabla\,;\mathfrak{u}]\big)_s.$$

537. Nun setzen wir voraus, daß die betrachteten Deformationen sehr langsam erfolgen, sämtliche Geschwindheiten also sehr klein sind. Es ist dies dieselbe Voraussetzung, von

welcher wir bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung zäher Flüssigkeiten ausgegangen sind. Wir haben dort zwischen der Fluxion der Dyade der Verschiebungen und der Dyade der Fluxion der Verschiebungen nicht unterschieden und wollen auch hier

$$\nabla ; \mathfrak{v} \stackrel{\circ}{=} \frac{d}{dt} \nabla ; \mathfrak{u}$$

setzen, wobei der Wert

$$\mathfrak{v} \cdot (\nabla ; \nabla ; \mathfrak{u}) - \nabla ; (\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{u})$$

vernachlässigt wird, und ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{u}$$

setzen, wobei der Wert

$$\mathfrak{v} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathfrak{u}) - \nabla \cdot (\mathfrak{v} \cdot \nabla ; \mathfrak{u})$$

vernachlässigt wird. Die vernachlässigten Werte sind der als sehr klein angenommenen Geschwindheit $\mathfrak{v}$ proportional.

Es ist ferner mit Genauigkeit

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \nabla ; \mathfrak{u} \right) \cdot [\nabla ; \mathfrak{u}] \right)_s \stackrel{1}{=} \tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\nabla ; \mathfrak{u}) \cdot [\nabla ; \mathfrak{u}])_s$$

und

$$((\nabla ; \mathfrak{u}) \cdot [\nabla ; \mathfrak{u}])_s = ([\nabla ; \mathfrak{u}]^2)_s ,$$

also mit obiger Vernachlässigung

$$\text{(a)} \qquad ((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot [\nabla ; \mathfrak{u}])_s \stackrel{1}{=} \tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} ([\nabla ; \mathfrak{u}]^2)_s$$

und ebenso

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} \stackrel{1}{=} \operatorname{div} \mathfrak{u} \frac{d}{dt} \operatorname{div} \mathfrak{u} \stackrel{1}{=} \frac{d}{dt} (\operatorname{div} \mathfrak{u})^2 .$$

Es ist also die pro Sekunde und Volumseinheit verlorene Bewegungsenergie annäherungsweise gleich

$$\text{(c)} \qquad -((\nabla ; \mathfrak{v}) \cdot \Psi)_s = \frac{d}{dt} \left(\tfrac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathfrak{u})^2 + \tfrac{1}{4} K ([\nabla ; \mathfrak{u}]^2)_s \right) .$$

Dieselbe kann also (jedoch nur mit obigen Vernachlässigungen) der totalen Fluxion einer skalaren Derivation der Verschiebungen gleich gesetzt werden, welche man die potentielle elastische Energie U der Volumseinheit nennt

$$\text{(d)} \qquad U = \tfrac{1}{2} \lambda (\operatorname{div} \mathfrak{u})^2 + K [\nabla ; \mathfrak{u}]_s^2 .$$

Hieraus folgt, daß die bei irgendeiner beliebig großen Deformation verlorene Bewegungsenergie gleich dem Zuwachs

des Wertes U ist. Da dieser wesentlich positiv ist, wird ein ruhendes, deformiertes Medium bei Abwesenheit äußerer Beschleunungen, indem es Bewegungsenergie annimmt, anfänglich stets seine potentielle Energie U verringern. Wenn auf irgend einem Wege der anfängliche Deformationszustand wieder erreicht wird, gleichgültig, welche geänderte Verteilung der Geschwindheiten dann vorhanden ist, so wird doch jeder Raumteil des Mediums die gleiche und entgegengesetzte Änderung der Bewegungsenergie erfahren haben wie die angrenzenden Medien.

538. Es ist für einen Raumteil φ, welcher von der Oberfläche $\mathfrak{o}$ umschlossen wird, nach Gleichung 536. (a)

$$\int_{\varphi}(\dot{E}+\dot{U})\,d\varphi = -\int_{\varphi}\nabla\cdot(\Psi\cdot\mathfrak{v})\,d\varphi = -\int_{\mathfrak{o}} d\mathfrak{o}\cdot\Psi\cdot\mathfrak{v}\,.$$

Die Summe der „Energien" $(E+U)$ bleibt erhalten, weil sich ihre Fluxion durch die Divergenz eines Vektors darstellen läßt. Man kann also den Vektor $(\Psi\cdot\mathfrak{v})$ auch als den Fluß der (skalaren) Energie $(E+U)$ bezeichnen, wobei auch an die Redensart erinnert werden soll, daß die Dyade Ψ den Fluß der vektorischen Bewegungsgröße darstellt, d. h. die Fluxion der Bewegungsgröße eines Raumes wird durch das vektorische Oberflächenintegral dieser Spannungsdyade dargestellt.

Die Summe der potentiellen Energie U und der Bewegungsenergie E in dem ganzen von elastischen Medien erfüllten, von verdünnter Luft oder ruhenden Medien begrenzten Raume ist konstant. An verdünnte Luft kann nämlich keine Bewegungsenergie übertragen werden, weil in dieser die Spannungsdyade Ψ gleich Null ist, und an ruhende Medien kann natürlich auch keine Bewegungsenergie übertragen werden, weil $\mathfrak{v}$ gleich Null ist. In beiden Fällen ist der Energiefluß $(\Psi\cdot\mathfrak{v})$ gleich Null.

539. Ein so abgeschlossenes System von idealen elastischen, flüssigen und gasförmigen Körpern gewinnt unbedingt ebensoviel an potentieller elastischer Energie als an Bewegungsenergie verloren geht oder Arbeit der äußeren Beschleunungen (z. B. Schwerebeschleunungen) gewonnen wird. Nach obiger Definition der potentiellen Energie ist es hierbei gleichgültig, ob, wie dies immer der Fall ist, bei den Deformationen Wärme

entsteht oder nicht, doch muß hiervon die Wärmeproduktion zufolge der Zähigkeit ausgeschlossen werden. Daß nämlich die Summe der potentiellen und Bewegungsenergie erhalten bleibt, ist ein aus der Bewegungsgleichung deduzierter Satz, welcher keinen Zusammenhang mit der Wärmetheorie hat. Man bezeichnet die Differenz der potentiellen elastischen Energie und der produzierten Wärmemenge als die innere Energie des Mediums. Diese ist also für Gase gleich Null.

540. *Beispiel.* Wir berechnen die potentielle Energie der Volumseinheit eines gedehnten elastischen Zylinders, welcher die Poissonsche Querkontraktion erfahren hat. Sei a^2 die Verlängerung der Längeneinheit der Achse, deren Richtung die Richtung des Dehnungsvektors $\mathfrak{a}$ bestimmt, so ist nach 508.(a) die Dyade der Verschiebungen

$$[\nabla\,;\mathfrak{u}] \overset{6}{=} \mathfrak{a}\,;\mathfrak{a} + \varrho\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \overset{6}{=} (1+\varrho)\,\mathfrak{a}\,;\mathfrak{a} - \varrho\,a^2 I,$$

worin ϱ die Poissonsche Zahl ist. Das Quadrat dieser Dyade ist

$$[\nabla\,;\mathfrak{u}]^2 \overset{6}{=} (1-\varrho^2)\,a^2\,\mathfrak{a}\,;\mathfrak{a} + \varrho^2 a^4 I$$

und der Skalar dieses Quadrates ist

$$[\nabla\,;\mathfrak{u}]_s^2 \overset{1}{=} (1-\varrho^2)\,a^4 + 3\,\varrho^2 a^4 = (1+2\,\varrho^2)\,a^4.$$

Die Divergenz der Verschiebungen ist

$$\nabla\cdot\mathfrak{u} = (1+\varrho)\,a^2 - 3\,\varrho\,a^2 = (1-2\,\varrho)\,a^2.$$

Die potentielle Energie ist also pro Volumseinheit

$$U = a^4\left(\tfrac{1}{2}\lambda(1-2\,\varrho)^2 + K(1+2\,\varrho^2)\right).$$

Da nach 508. für die Poissonsche Zahl ϱ die Beziehung gilt

$$\lambda(1-2\,\varrho) = 2\,K\varrho,$$

so ist

(a) $$U = a^4 K(1+\varrho) = \tfrac{1}{2} E a^4.$$

Um einen Kubikzentimeter Kautschuk ($K = 33.10^6$ und $\varrho = \frac{1}{2}$) um $a^2 = \frac{1}{1000}$ zu dehnen, braucht man also die Arbeit 5.10^3 Erg.

541. *Zweites Beispiel.* Bei dieser Dehnung ändert sich die Volumseinheit um den Betrag

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = (1-2\,\varrho)\,a^2.$$

Wir berechnen nun die potentielle Energie pro Volumseinheit desselben Körpers, wenn er eine gleichförmige Kompression oder Dilatation erfahren hat. Dann ist die Dyade der Verschiebungen nach 511.

$$[\nabla\,;\mathfrak{u}] \overset{6}{=} c\,I,$$

wobei

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} \overset{1}{=} 3\,c$$

und

$$[\nabla\,;\mathfrak{u}]_s^2 = 3\,c^2$$

also endlich die potentielle Energie

(a) $$U_1 = 3\,c^2\left(\tfrac{3}{2}\,\lambda + K\right) = \tfrac{9}{2}\,c^2 H.$$

Nehmen wir nun an, daß

$$3\,c = (1 - 2\,\varrho)\,a^2$$

ist, d. h. daß das Medium bei dieser gleichförmigen Dilatation dieselbe Volumsänderung erfahren hat, wie bei der in 540. berechneten Dehnung, so ist, da der Kompressionsmodul

$$3\,H = \frac{E}{1 - 2\,\varrho},$$

(b) $$U_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 2\,\varrho)\,U,$$

d. h. um eine bestimmte Volumsänderung eines Körpers zu erzielen, ist bei gleichförmiger Kompression immer eine viel kleinere Arbeit U_1 erforderlich, als die zur Dehnung bis zu gleicher Volumsänderung nötige Arbeit U, und zwar ist gerade für die dehnbarsten Stoffe (siehe § 508, S. 375) das Verhältnis $U : U_1$ am größten.

	Zinn	Glas	Hartgummi	Kautschuk
ϱ	0,15	0,25	0,4	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3000}$
$\frac{U}{U_1}$	4	6	15	4500