

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus

Jaumann, Gustav

Leipzig, 1905

Erster Teil. Bewegung starrer Körper in Luft

Erster Teil.

Bewegung starrer Körper in Luft.

In der Mitte des 17. Jahrhunderts begann man sich von der Hilfe der die vorwissenschaftliche Bewegungslehre völlig beherrschenden Kraftvorstellungen einigermaßen unabhängig zu machen und zu reinen Bewegungsbeobachtungen überzugehen. Die technische Schwierigkeit derselben und die Verschiedenartigkeit der natürlichen Bewegungsvorgänge ließ die Auffindung umfassender und einfacher Gesetze als von einem glücklichen theoretischen Gedanken abhängig erscheinen.

Es waren folgende Bewegungstypen bekannt: Die meisten Körper fallen in Luft und in Wasser, Holz steigt aber in Wasser empor. Die Schneeflocken fallen mit gleichförmiger Geschwindigkeit (ungefähr 20 cm/sec), ebenso die kleineren Regentropfen (diese aber mit ungefähr 1000 cm/sec). Der freie Fall eines Steines ist die komplizierteste Fallbewegung. Sie findet mit stets zunehmender Geschwindigkeit statt. Die geradlinige Bewegung auf horizontaler Bahn findet hingegen mit stets abnehmender Geschwindigkeit statt. Alle geradlinigen Bewegungen scheinen hiernach ungleichförmig zu sein. Als einfachster Typus der Bewegungsvorgänge erschien die gleichförmige Kreisbewegung der Himmelskörper.

I. Die Beschleunigungen.

1. Die Fluxion der Geschwindigkeit.

1. Eine wesentlich neue Theorie der Bewegungen rührt von Galileo Galilei (1638) her. Er erkannte den freien Fall eines schweren Körpers als eine von störenden Nebenwirkungen sehr wenig beeinflusste, also typische Form der Bewegungserscheinungen. Voluminöse und leichte Körper werden durch

die Luft oder die Flüssigkeit, in welcher sie fallen, in ihrer Bewegung verschiedenartig beeinflusst. Galilei suchte ein Medium herzustellen, in welchem alle Körper in gleicher Weise fallen, eine Versuchsreihe, welche durch Torricelli und Guericke (1650) abgeschlossen wurde. In verdünnter Luft fällt eine Flaumfeder oder Schneeflocke nach demselben Gesetze wie ein Bleistück in normaler Luft.

2. Die annähernde Gültigkeit des Gesetzes der konstanten Beschleunigung des Falles schwerer Körper in Luft wies Galilei nach, indem er verschiedene Körper von verschiedenen Stockwerken eines Turmes fallen ließ und die Fallzeiten mit primitiven Wasseruhren maß.

Es wäre verlorene Mühe, die Gültigkeit des Fallgesetzes durch möglichst genaue Ausmessung feststellen zu wollen. Der Fortschritt und die Gewißheit in der theoretischen Physik beruhen nicht auf der Ausmessung einzelner Erscheinungen, sondern auf der erfolgreichen Zusammenfassung sehr mannigfaltiger Erscheinungen durch einfache Gesetze. Man geht nicht fehl, wenn man die ideal genaue Gültigkeit dieser Grundgesetze annimmt, und die stets zu beobachtenden kleinen Abweichungen störenden Nebenumständen zuschreibt.

Das Fallgesetz wurde nicht auf Grund von Messungen des freien Falles, sondern durch die Aufstellung der Gravitationstheorie verbessert.

3. Der freie Fall und der Wurf nach aufwärts werden durch dasselbe Gesetz dargestellt, wenn man abwärts gerichteten Geschwindigkeiten das umgekehrte Vorzeichen gibt als aufwärts gerichteten. Die Geschwindigkeit v ist die Fluxion der Höhe h eines sich in der Lotrechten bewegenden Körpers und seine Beschleunigung g definieren wir als die Fluxion der Geschwindigkeit

$$v = \dot{h}, \quad g = \dot{v}.$$

Hieraus folgt:

$$v \cdot \dot{v} = g \cdot \dot{h}.$$

Bei freier Bewegung in der Lotrechten ist die Beschleunigung von der Größe der Geschwindigkeit unabhängig, für alle Körper von gleichem negativem Wert $-g_0$. Es ist also:

$$(a) \quad v \cdot \dot{v} = -g_0 \cdot \dot{h}$$

oder

$$dv^2 = -2g_0 \cdot dh.$$

Dies ist eine zeitfreie Form des Fallgesetzes: Das Quadrat der Geschwindigkeit ist pro Zentimeter Höhendifferenz um den konstanten Betrag $-2g_0$ verschieden. Ist die Bahn des Körpers gegeben, so bestimmt diese Form des Fallgesetzes die Bewegung vollständig.

4. Hier lenkte die Rückwirkung der technischen Mechanik auf die Bewegungslehre die Untersuchungen Galileis auf ein praktisch sehr wichtiges, aber nicht auf dem geraden Wege des nachmaligen wissenschaftlichen Fortschrittes liegendes Gebiet.

Die vielfachen Erfahrungen über die Wirkung der Maschinen konnte auch auf das Fallproblem angewendet werden. Es ist bekannt, daß man durch verschiedene Mechanismen die Richtung der Geschwindigkeit eines Körpers mühelos ändern kann, so daß ein fallender Körper zum Steigen gebracht werden kann. Ferner ist es aber bekannt, daß man diesen Körper bei beliebigen Auf- und Abwärtsbewegungen mühelos nicht höher bringen kann als er anfangs war. Dies setzt aber eine von der Form der Bahn unabhängige Beziehung zwischen Höhe und Geschwindigkeit voraus.

Das zeitfreie Gesetz des lotrechten Falles gilt also für alle Bewegungen schwerer Körper mit oder ohne Mitwirkung solcher Maschinen.

5. Bezeichne s die in der gegebenen krummlinigen Bahn zurückgelegte Weglänge, so ist:

$$v = \dot{s}$$

und es folgt aus 3.(a)

$$\dot{s} \cdot \dot{v} = -g_0 \cdot \dot{h},$$

oder

$$(a) \quad \dot{v} = -g_0 \cdot \frac{dh}{ds}.$$

Die Fluxion der Geschwindigkeit ist gleich der Beschleunigung des lotrechten Falles multipliziert mit der Steigung der Bahn.

6. Einen charakteristischen Spezialfall dieses Gesetzes bildet die Bewegung in aufgezwingener horizontaler Bahn. Bei einer solchen ist nach 5.(a) die Fluxion der Geschwindigkeit Null, diese also unveränderlich. Es ist dies das sogenannte Beharrungsgesetz. Vor Galilei nahm man an, daß ein un-

beeinflusster Körper auf horizontaler vollkommen widerstandsfreier Bahn allmählich seine Geschwindigkeit verlieren müsse.

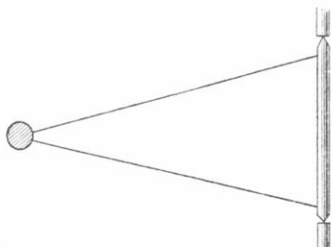


Fig. 1.

Diese Beharrung zeigt z. B. der Körper eines Horizontalpendels, welcher in einem horizontalen Kreise um die in feinen Lagern laufende vertikale Drehungsachse des Pendels umläuft (Fig. 1).

7. Ist die Drehungsachse des Pendels horizontal, so kann sich der Körper nur in einem Kreise von vertikaler Ebene bewegen. Die Steigung dieser Bahn ist:

$$\frac{dh}{ds} = \sin \alpha \doteq \frac{s}{l},$$

worin α der Ausschlagswinkel, s die vom tiefsten Punkte der Bahn gemessene Exkursion, welche nicht groß sein möge, und l die Pendellänge ist.

Hieraus folgt nach 5. (a) für die Fluxion der Geschwindigkeit des Pendelkörpers

$$(a) \quad \dot{v} = -g_0 \cdot \sin \alpha \doteq -\frac{g_0}{l} \cdot s.$$

Die Beschleunigung des Pendelkörpers in seiner Bahn ist bei kleinen Exkursionen denselben angenähert proportional.

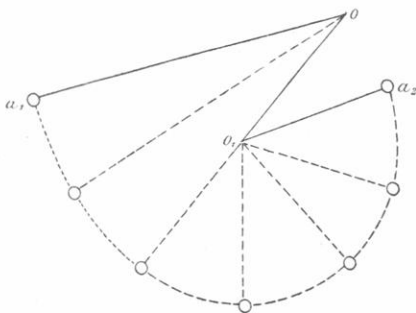


Fig. 2.

8. Ein Körper werde durch einen nicht dehnbaren, sehr leicht biegsamen Fadengezwungen einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Aufhängepunkt o (Fig. 2) sein muß und dessen Ebene vertikal sein möge, zu beschreiben.

Schlägt der Faden an den Stift o_1 , so ändert sich die Bahn und der Körper läuft nun in einem Kreise von kleinerem

Radius um a_1 als Mittelpunkt, kommt in a_2 zur Ruhe und kehrt sogleich auf gleichem Wege nach a_1 zurück, wo er wieder umkehrt. Dieses Galileische Pendel ist ein Mechanismus, welcher die in § 4 erwähnten Änderungen der Bahn eines bewegten Körpers in recht tadelloser Weise ausführt. Der Erfolg ist der vorausgesagte. Die Ruhepunkte a_1 und a_2 liegen merklich in gleicher Höhe, die Geschwindigkeit des Körpers ist im tiefsten Punkt der Bahn sichtlich am größten und überhaupt in gleichen Höhen auf beiden Seiten der Bahn gleich groß, obwohl diese unsymmetrisch ist.

9. Von weitaus größerer theoretischer Bedeutung ist die Verallgemeinerung des Fallgesetzes in seiner ursprünglichen Form, obgleich diese zunächst nur für geradlinige Fallbewegungen gilt. Nachdem einmal erkannt war, daß die Beschleunigung des lotrechten Falles konstant ist, lenkte sich die Aufmerksamkeit auf die Fluxion der Geschwindigkeit anderer geradliniger Bewegungen und man fand diese immer durch sehr einfache und umfassende Gesetze bestimmt. Besonders interessant ist, daß, ebenso wie beim freien Fall, Körper von verschiedener Geschwindigkeit unter sonst gleichen Umständen gleiche Beschleunigung zeigen.

10. Eine sehr häufig unter den verschiedensten Bedingungen auftretende geradlinige Bewegungsform ist die Sinusschwingung und es soll gezeigt werden, daß diese durch Angabe der Beschleunigung des bewegten Körpers am einfachsten beschrieben wird. So bewegt sich z. B. ein an einer elastischen Feder aufgehängter Körper (Fig. 3), wenn man ihn zunächst abwärts zieht und dann der Wirkung der Feder überläßt. Je nach der Größe der anfänglichen Dehnung derselben kann man Schwingungen von sehr verschiedener Weite erhalten. Das Gesetz einer solchen periodischen Bewegung zu bestimmen ist leicht, die hierzu dienenden experimentellen Methoden sollen weiter unten mitgeteilt werden. Der Abstand s des Körpers vom Mittelpunkt seiner Bahn (die Exkursion) bestimmt sich als Funktion der Zeit t durch



Fig. 3.

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Der Körper entfernt sich hiernach nie mehr als um die konstante Strecke a (die Amplitude) vom Mittelpunkt der Bahn und kehrt nach der konstanten Zeit τ (der Schwingungsdauer) an denselben Ort und in denselben Bewegungszustand zurück. Die Schwingungsdauer muß eine Funktion der Amplitude sein, da wir nur diese frei wählen können, oder sie muß für jede Amplitude denselben Wert haben. Letzteres trifft mit großer Annäherung zu. Wir bestimmen mit Hilfe einer Uhr mit auslösbarem Sekundenzeiger, daß z. B. der Körper 50 Schwingungen von 1 cm Amplitude in 59,3 Sekunden ausführt, hingegen 50 Schwingungen von 30 cm Amplitude in 59,1 Sekunden. Die kleine Differenz erklärt sich mehr durch Beobachtungsfehler als durch die unvollkommene Elastizität der Feder.

Aus dieser Gleichung erhält man die Geschwindigkeit

$$v = \dot{s} = \frac{2\pi}{\tau} a \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

und endlich die Beschleunigung

$$g = \ddot{s} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} a \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

des schwingenden Körpers.

Sämtliche Variable der Sinusschwingung stehen also zueinander in irrationalen oder transcendenten Beziehungen. Nur die Beschleunigung folgt einem einfachen Gesetz. Sie ist stets der Dehnung s der Feder proportional

$$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot s.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist durch den Mechanismus völlig bestimmt, von der Amplitude der Schwingungen unabhängig.

11. Die Differentialgleichung

$$(a) \quad \ddot{s} = -\kappa^2 \cdot s,$$

worin κ eine Konstante ist, hat umgekehrt eine Sinusschwingung als Integral, deren Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \cdot \frac{1}{\kappa}$$

ist. Nach 7. (a) erfüllt auch die Beschleunigung eines Pendelkörpers mit Annäherung ein Gesetz von der Form 11. (a), also

führt ein Pendel bei kleinen Amplituden mit Annäherung Sinusschwingungen in horizontaler Richtung aus, deren Schwingungsdauer

$$(b) \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}}$$

ist. Berücksichtigt man aber die genauere Form der Gleichung 7.(a) so ergibt sich eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude a . Eine für die meisten Zwecke hinreichende Annäherung wird durch die etwas genauere Formel

$$\tau = 2\pi \left(1 + \frac{a^2}{16 l^2}\right) \sqrt{\frac{l}{g_0}}$$

gegeben. Wir konstatieren z. B. wieder, daß ein Fadenpendel von 96,5 cm Länge 50 Schwingungen von sehr geringer Amplitude in 99,6 Sekunden ausführt, hingegen 50 Schwingungen, deren Bogenlänge $a = 49$ cm ist, in 101,1 Sekunden, was mit obiger Formel gut übereinstimmt.

12. Die Schwerebeschleunigung g_0 läßt sich, wie wir nun einsehen, viel bequemer und also genauer durch Beobachtung eines Fadenpendels als eines freien Falles bestimmen. Man braucht nur die Länge und die Schwingungsdauer des Pendels auszumessen und erhält nach 11.(b)

$$g_0 = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot l.$$

Die Messung der Pendellänge läßt sich freilich nur ungenau durchführen. Als Ort des kleinen kugelförmigen Pendelkörpers kann (nicht ohne Fehler) sein Mittelpunkt angesehen werden. Von größerem Einfluß auf das Messungsergebnis ist der Umstand, daß der Mittelpunkt der Kreisbahn des Pendels wegen der Fadensteifheit um ein beträchtliches Stück unter dem Aufhängepunkt liegt. Man wird die Pendellänge also immer etwas zu groß annehmen und einen zu hohen Wert der Schwerebeschleunigung erhalten. Doch läßt sich diese Methode, wie weiter unten ausgeführt werden wird, bedeutend verfeinern. Der richtige Wert der Schwerebeschleunigung ist

$$g_0 = 981 \text{ cm/sec}^2.$$

Vektorische Summe und Fluxion.

13. Die Geometrie beruht auf Naturbeobachtung, und besonders die physikalischen Beobachtungen haben auf viele eigenartige geometrische Beziehungen aufmerksam gemacht, und die Lösung der neu entstandenen geometrischen Probleme vorbereitet. Auch zu dem Zusammenwirken der höheren Algebra mit der Geometrie haben mehrfach physikalische Probleme den Anstoß gegeben. So entstanden Denkvorschriften, welche den algebraischen Rechenregeln nachgebildet sind und deren Richtigkeit algebraisch erwiesen wird, und welche doch geometrische Schlüsse vermitteln, ja sogar ein erstaunlich ökonomisches geometrisches Denken ermöglichen. Diese geometrische Rechenkunst heißt Vektoranalysis, eine kanonische Form derselben ist die analytische Geometrie. Die allgemeine Form der Vektoranalysis rührt von Grassmann und Hamilton her.

Es handelt sich vor allem darum, direkt mit jenen geometrischen Begriffen zu rechnen, welche physikalische Realität haben, d. h. direkt meßbar sind, und durch einfachste Naturgesetze zusammenhängen, und nicht mit allgemeineren oder weniger allgemeinen analytischen Begriffen.

14. Es gibt folgende physikalisch wichtige analytische Grundgebilde:

1. Die benannte Zahl oder der Skalar.

2. Der Vektor. Dieser ist durch drei Zahlen bestimmt. Er kann unter dem Bilde eines Punktes (Anfangspunkt) und einer von demselben ausgehenden gerichteten Strecke, oder eines durch den Anfangspunkt gehenden, beliebig begrenzten ebenen Flächenstückes oder endlich unter dem Bilde einer unbegrenzten, nicht durch den Anfangspunkt gehenden Ebene vorgestellt werden.

3. Die Dyade. Diese ist durch neun Zahlen oder drei Vektoren bestimmt. Man kann sich dieselbe unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, vorstellen.

4. Die Triade. Diese ist durch 27 Zahlen oder neun Vektoren oder drei Dyaden bestimmt.

Von höheren Gebilden sind besonders die symmetrischen Tetraden für die Erscheinungen in kristallischen Medien wichtig, welche Medien wir aber nicht betrachten werden.

15. Einen Vektor bezeichnen wir durch einen deutschen Buchstaben. Der gleiche lateinische Buchstabe bezeichnet die Größe des Vektors ohne Rücksicht auf seine Richtung.

Dyaden bezeichnen wir mit großen griechischen Buchstaben.

16. Haben zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gleiche Größe, aber verschiedene Richtung (Fig. 4), so bezeichnen wir dies durch

$$a = b.$$

Haben sie gleiche Richtung und gleiche Größe, so nennen wir sie vektorisch gleich und bezeichnen dies durch

$$\mathfrak{a} \stackrel{=}{=} \mathfrak{b}.$$

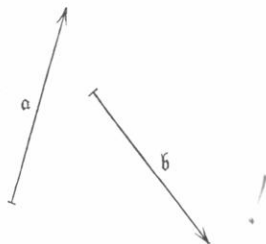


Fig. 4.

Die Ziffer 3 über dem Gleichheitszeichen bedeutet, daß es sich hier um die Gleichheit von drei Bestimmungsstücken handelt, oder daß wir die vektorische Gleichung durch drei algebraische ersetzen können. Für das Lesen vektorischer Gleichungen sind diese Ziffern sehr förderlich, bei nicht für den Druck bestimmten, rasch durchgeführten Rechnungen wird man sie aber meist weglassen.

Bezeichnen wir z. B. die Größen der Projektionen eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf die Koordinaten mit a_x a_y a_z , so ist obige vektorische Gleichung äquivalent mit

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Eine vektorische Rechenregel führt auf identische algebraische Gleichungen, wodurch ihre Richtigkeit erwiesen werden kann.

Die Parallelität ungleich großer Vektoren können wir bezeichnen durch

$$\mathfrak{a} \stackrel{=}{=} k \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{a}}{k} \stackrel{=}{=} \mathfrak{b},$$

worin k eine unbekannte oder beliebige Zahl darstellt. Diese Gleichung ist äquivalent den zwei algebraischen Gleichungen

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Wird $k = -1$ angenommen, so sind die Vektoren gleich und entgegengesetzt gerichtet

$$\mathbf{a} \doteq -\mathbf{b}.$$

17. Man nennt einen geradlinigen Weg $\mathbf{v}$, welcher von demselben Ausgangspunkt 0 (Fig. 5) zu demselben Endpunkt 2

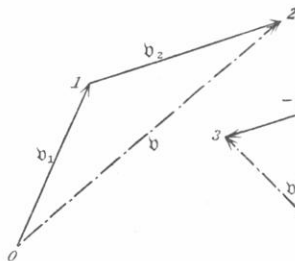


Fig. 5.

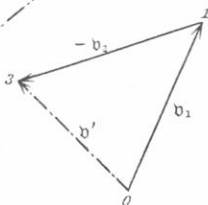


Fig. 6.

führt wie zwei eine gebrochene Linie bildende Wege $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$, die vektoriische Summe derselben und bezeichnet dies durch

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Addiert man in dieser Weise zu dem Vektor $\mathbf{v}_1$ den Vektor $-\mathbf{v}_2$, so erhält man als dritte Seite des Dreiecks die vektoriische Differenz (Fig. 6)

$$\mathbf{v}' \doteq \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

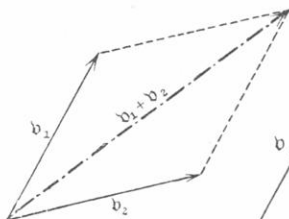


Fig. 7.

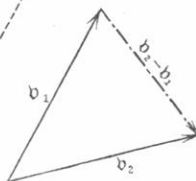


Fig. 8.

Von den beiden Diagonalen eines Parallelogrammes, dessen Seiten die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ bilden, ist die eine die Summe, die andere die Differenz der beiden Vektoren (Figg. 7 und 8).

18. Jeder Vektor ist die vektorische Summe seiner analytischen Komponenten

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{k} v_z.$$

Mit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bezeichnen wir drei aufeinander senkrecht gegebene Vektoren, welche sämtlich die Größe 1 haben und die Koordinatenrichtungen xyz definieren.

Projiziert man das Vektorendreieck auf die Koordinatenrichtungen, so erkennt man, daß die Komponenten der vektorischen Summe zweier Vektoren gleich der algebraischen Summe der Komponenten der Vektoren sind. Wenn

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{v}' + \mathbf{v}'',$$

so ist:

$$v_x = v'_x + v''_x, \quad v_y = v'_y + v''_y, \quad v_z = v'_z + v''_z.$$

19. Die Gleichung

$$\mathbf{a} + k_1 \mathbf{b} + k_2 \mathbf{c} \stackrel{\text{a}}{=} 0,$$

worin k_1 und k_2 beliebige Zahlen sind, ist äquivalent der algebraischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

und bedeutet, daß die drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ derselben Ebene parallel (koplanar) sind.

20. Man ersieht leicht auf synthetischem Wege oder kann analytisch erweisen, daß alle algebraischen Rechenregeln sich auf Summen und Differenzen zweier oder mehrerer Vektoren anwenden lassen.

Man kann den geraden Weg 12 (Fig. 9) als die Differenz der Vektoren $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_1$ ansehen, welche von einem beliebigen Nullpunkt 0 zu den Endpunkten desselben gehen. Oder auch als die Summe aller Elemente $\mathbf{v}'$ einer gebrochenen

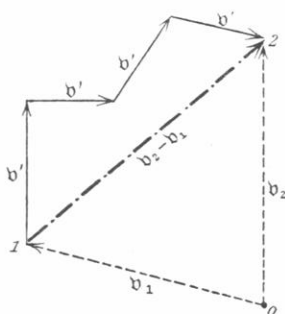


Fig. 9.

Linie, welche von 1 nach 2 führt, doch müssen alle Vektoren $\mathbf{v}'$, als im gleichen Fortlaufsinne gerichtet angenommen werden

$$\sum \mathbf{v}' \doteq \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

21. Vektorische Integration. Wir können einen krummen Linienzug als zusammengesetzt aus kleinen Vektoren $d\mathbf{s}$ betrachten, deren Richtungen in gleichem Fortlaufsinne längs der Kurve gezählt werden. Die Summe dieser unendlich vielen, unendlich kleinen Vektoren ist gleich dem Vektor $(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)$, der vom Anfangspunkte 1 zum Endpunkte 2 der Kurve geht (Fig. 10).

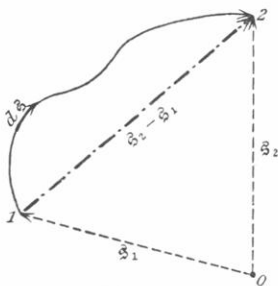


Fig. 10.

$$\int_1^2 d\mathbf{s} \doteq \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1.$$

Die Summe aller in gleichem Umlaufsinne gerichteten Elemente $d\mathbf{u}$ einer geschlossenen Linie $\mathbf{u}$ ist also Null

$$\int_{\mathbf{u}} d\mathbf{u} \doteq 0.$$

22. Die Fluxion eines Vektors. Zur Vorbereitung für den nächsten Teil der Bewegungslehre betrachten wir die zeitlichen Veränderungen eines Vektors (Fig. 11). Halten wir den Anfangspunkt 0 des Vektors fest und läuft der Pfeil a desselben mit gleich-

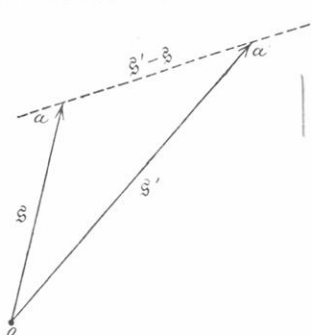


Fig. 11.

förmiger Geschwindigkeit längs einer beliebig gerichteten geraden Linie, so nennt man den Vektor gleichförmig veränderlich. Ist der Pfeil zur Zeit t in a und zur Zeit t' in a' , so ist die Strecke aa' die Änderung des Vektors, d. i. die Differenz $(\mathbf{s}' - \mathbf{s})$ und man nennt den proportionalen Vektor:

$$\mathbf{v} \doteq \frac{\mathbf{s}' - \mathbf{s}}{t' - t}$$

die Fluxion des Vektors $\mathbf{s}$. Diese ist also die Geschwindigkeit des Pfeiles dieses Vektors, wenn letzterer als Strecke dargestellt wird.

Bewegt sich der Pfeil, wie dies bei allgemeiner Veränderlichkeit des Vektors eintritt, mit ungleichförmiger Geschwindigkeit längs einer krummen Linie, so ist doch die Veränderung $d\mathfrak{s}$ des Vektors während jeder kurzen Zeit dt als eine gleichförmige zu betrachten (Fig. 12). Der Vektor.

$$\mathfrak{v} \triangleq \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$$

hat einen bestimmten endlichen Grenzwert und eine bestimmte Grenzrichtung. Er ist die Geschwindigkeit des Pfeiles des Vektors $\mathfrak{s}$ und heißt die Fluxion dieses Vektors

$$\mathfrak{v} \triangleq \dot{\mathfrak{s}}.$$

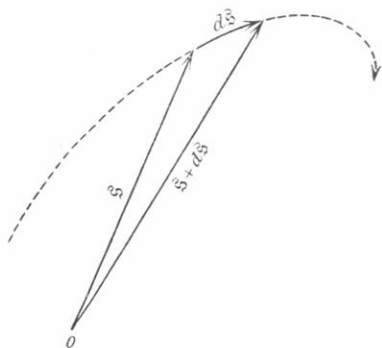


Fig. 12.

Es ist also auch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines bewegten kleinen Körpers die vektorische Fluxion des Radiusvektors $\mathfrak{s}$, welcher von einem beliebigen festen Nullpunkt 0 gegen den Körper reicht.

23. Aus der analytischen Darstellung der vektorischen Summen und Differenzen folgt sofort, daß die Komponenten der Fluxion eines Vektors gleich den Fluxionen der Komponenten desselben sind:

$$v_x = \dot{s}_x, \quad v_y = \dot{s}_y, \quad v_z = \dot{s}_z.$$

24. Die Fluxion der Summe zweier Vektoren ist gleich der Summe der Fluxionen dieser Vektoren:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) \triangleq \frac{d}{dt}\mathfrak{u} + \frac{d}{dt}\mathfrak{v},$$

eine Identität, welche sich leicht analytisch darstellen läßt und deren synthetischer Beweis auch nicht sehr kompliziert ist.

2. Die vektorische Fluxion der Geschwindigkeit.

25. Der Sieg der Galileischen Bewegungstheorie wurde erst vollständig durch ihre Erfolge in der Theorie der Planetenbewegung. Die gleichförmige Bewegung der Planeten im Kreise stellt offenbar ebenfalls einen einfachsten Typus der Bewegungsvorgänge dar, welcher aber zunächst außerhalb des von der Galileischen Theorie beherrschten Gebietes zu liegen schien, bis Christian Huyghens (1670) zeigte, daß auch die gleichförmige Bewegung im Kreise als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung aufzufassen ist. Freilich erfordert dies eine tiefgreifende Änderung der Definition der Beschleunigung.

Die Änderung der Richtung einer Geschwindigkeit tritt oft unter ganz ähnlichen Bedingungen und anstatt einer Änderung der Größe der Geschwindigkeit ein. Man kann allgemeine Gesetze für krummlinige Bewegungen nur aufstellen, wenn man diese beiden Änderungen als äquivalent betrachtet.

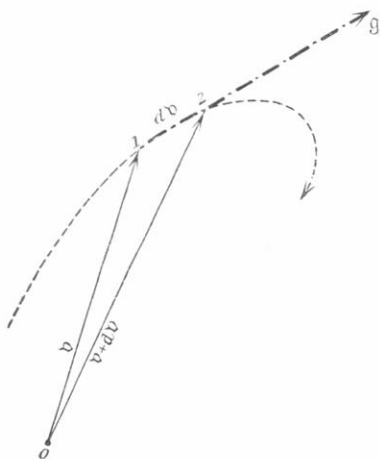


Fig. 13.

Der Begriff Beschleunigung hat nur dann umfassende Wichtigkeit, wenn man auch eine Änderung der Richtung einer ihre Größe bewahrenden Geschwindigkeit als eine Beschleunigung bezeichnet. Dieser Name ist dem neuen Begriffe so schlecht angepaßt, daß seine Anwendung zu scheinbar paradoxen Sätzen führt, doch ist derselbe allgemein eingeführt.

26. Jener Vektor, welcher bei allen Bewegungsvorgängen durch direkte Gesetze bestimmt ist und welchen man seit Huyghens als die Beschleunigung des bewegten Körpers bezeichnet, ist die vektorische Fluxion der Geschwindigkeit desselben.

Stellen wir die Geschwindigkeit des betrachteten Körpers zur Zeit t durch die Strecke $\overline{O1}$ (Fig. 13) und zur Zeit $(t + dt)$

durch $\overline{02}$ dar, so ist der kleine Vektor $\overline{12}$ die vektorische Änderung $d\mathbf{v}$ der Geschwindigkeit, und der Vektor

$$\mathbf{g} \triangleq \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{oder} \quad \mathbf{g} \triangleq \dot{\mathbf{v}}$$

wird die Beschleunigung des bewegten Körpers genannt. Er wird durch die Geschwindigkeit dargestellt, mit welcher sich der Pfeil der Strecke $\mathbf{v}$ in dem Diagramm Fig. 13 bewegt.

27. Die algebraische Fluxion der Größe der Geschwindigkeit, welche ursprünglich als Beschleunigung bezeichnet wurde, heißt heute die Beschleunigung in der Bahn und hat nicht das geringste theoretische Interesse. Sie bestimmt sich durch

$$\dot{v} = g \cos(g, v)$$

als die Projektion der vektorischen Fluxion $\mathbf{g}$ der Geschwindigkeit auf die Bahnrichtung.

28. Die Ebene des Vektorendreiecks $\mathbf{v}$, $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ und $\mathbf{g}$ ist die Schmiegungeebene der Bahn des Körpers in dem betrachteten Punkte derselben. Es liegt also die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, die Beschleunigung $\mathbf{g}$ und der Krümmungsradius der räumlich gekrümmten Bahn stets in einer Ebene.

29. Bei den geradlinigen Bewegungen hat die Beschleunigung sowohl als die Geschwindigkeit dieselbe konstante Richtung und es ist die vektorische Beschleunigung gleich der Beschleunigung in der Bahn:

$$g = \frac{dv}{dt}.$$

Auch als eine einfache Bewegungsform ist nach Huyghens eine krummlinige Bewegung anzusehen, deren Ge-

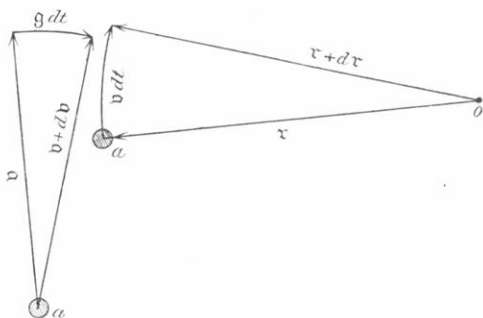


Fig. 14.

schwindigkeit konstante Größe bewahrt. Fig. 14 stellt die beiden Vektorendreiecke dar, welche die Definition der Geschwindigkeit und Beschleunigung illustrieren. Die erstere ist nach § 22 die Fluxion des Radiusvektor, welcher von einem beliebigen festen

Punkt gegen den bewegten Körper a reicht. Als solchen wählen wir den momentanen Krümmungsmittelpunkt 0 . Der Radiusvektor ist also während des nächsten kleinen Zeitelementes der Krümmungsradius r der Bahn und die Vektorendreiecke stellen die Definitionen:

$$(a) \quad \mathbf{v} \triangleq \dot{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \triangleq \dot{\mathbf{v}}$$

dar. Da sowohl r als v ihre Größe bewahren, steht die Beschleunigung auf der Geschwindigkeit und diese auf dem Radius immer senkrecht. Dieselbe geometrische Operation, welche $\mathbf{v}$ aus $\mathbf{r}$ ableitet, ergibt auch $\mathbf{g}$ aus $\mathbf{v}$. Es ist also $\mathbf{g}$ um zwei rechte Winkel gegen $\mathbf{r}$ verdreht und hat sonach die genau entgegengesetzte Richtung. Endlich folgt aus der Gleichheit dieser Operationen (aus der Ähnlichkeit der Vektorendreiecke) die algebraische Beziehung:

$$\frac{g}{v} = - \frac{v}{r}.$$

30. Die Kreisbewegung. Bei der gleichförmigen Bewegung im Kreise hat der Radius und also die Beschleunigung konstante Größe, sie ist immer gegen den Mittelpunkt gerichtet und heißt Zentralbeschleunigung. Die Definitionsgleichungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung nehmen die Form an

$$v = \frac{2\pi r}{\tau} \quad \text{und} \quad g = - \frac{v^2}{r} = - \frac{4\pi^2}{\tau^2} r,$$

worin τ die Umlaufszeit ist.

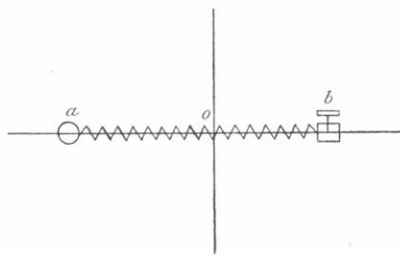


Fig. 15.

31. Wir können an jedem beliebigen speziellen Bewegungsfall die Vortheile der Huyghensschen Beschleunigungstheorie erweisen.

Ein Körper a kann sich längs des horizontalen Stabes ao (Fig. 15) verschieben. Seine Entfernung von dem beliebigen Punkte 0

des Stabes werde mit r bezeichnet. Er ist mit dem Punkte b durch eine elastische Feder verbunden, und in der Ruhelage sei $r = r_0$. Schwingt der Körper in der Richtung des Stabes

mit der Schwingungsdauer τ , so zeigt derselbe nach § 10 eine Beschleunigung

$$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot (r - r_0),$$

welche sich als Änderung der Größe der stets gleichgerichteten Geschwindigkeit zu erkennen gibt.

Lassen wir hingegen den Stab um eine vertikale durch o gehende Achse gleichmäßig mit der Umlaufszeit τ_1 rotieren, so stellt sich der Körper in den Radius r_1 dauernd ein. Die Feder ist während der Rotation gespannt und der Körper zeigt zwar keine Beschleunigung in der Bahn, wohl aber eine Zentralbeschleunigung g_1 , welche sich als Änderung der Richtung der gleichförmigen Geschwindigkeit zu erkennen gibt und welche wieder die Richtung der gespannten Feder hat.

Wir stellen durch Messung der Umlaufszeit τ_1 mittels eines Tourenzählers, der Schwingungszeit τ und des Radius r_1 fest, daß

$$r_1 = r_0 \left(\frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau^2} \right).$$

Die Dehnung der Feder wächst also sehr rasch, wenn die Umlaufszeit abnimmt, und würde den Grenzwert ∞ erreichen, wenn die Umlaufszeit τ_1 ebenso klein als die Schwingungsdauer τ würde. Nach Huyghens ist nun

$$g_1 = -\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} r_1 = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} (r_1 - r_0).$$

Die Zentralbeschleunigung g_1 ist also während der Rotation durch dasselbe Gesetz als Funktion der Dehnung $(r_1 - r_0)$ der Feder bestimmt als die Galileische Beschleunigung g der geradlinigen Schwingung.

32. Zweites Beispiel: Bei dem schiefen Wurf ist die vektorische Fluxion $\mathfrak{g}$ der Geschwindigkeit stets nach abwärts gerichtet und der Beschleunigung $\mathfrak{g}_0$ des freien Falles gleich. Stellen wir die Geschwindigkeit durch eine von dem festen Punkte a ausgehende Strecke dar, so durchläuft der Pfeil derselben mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{g}_0$ eine lotrechte Gerade nach abwärts (Fig. 16). Wir haben hiermit die Gleichung

$$\mathfrak{g} \stackrel{3}{=} \dot{\mathfrak{v}}$$

unter Einführung des bekannten Wertes der Beschleunigung integriert, und es ist uns nun die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit bekannt. Sie ist anfangs nach aufwärts gerichtet, dreht sich immer mehr in die Horizontale, wobei sie immer kleiner wird. Zu jener Zeit, zu welcher der Körper den höchsten Punkt seiner Bahn erreicht hat, also die Geschwindigkeit horizontal ist, hat sie ihren kleinsten Wert. Dann dreht sie sich weiter nach abwärts und wird wieder größer. Die Relativbewegung gegen einen Punkt, der sich mit der Minimalgeschwindigkeit in horizontaler Richtung bewegt, ist gleich einer lotrechten Wurfbewegung. Hiernach läßt sich die (parabolische) Wurfbahn konstruieren.

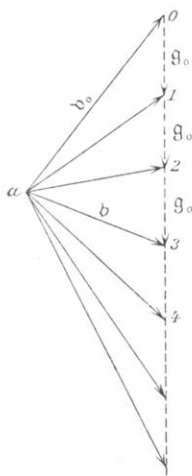


Fig. 16.

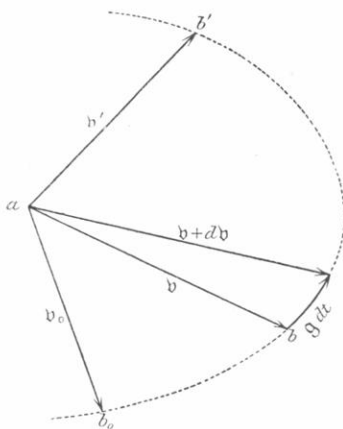


Fig. 17.

33. Ist die Beschleunigung g einer beliebigen Bewegung als Funktion der Zeit durch direkte Gesetze gegeben, so können wir wie in dem eben behandelten einfachen Falle den Pfeil der Geschwindigkeit v mit der gegebenen variablen Geschwindigkeit g bewegt denken, so daß er in dem Diagramm (Fig. 17) die Bahn $b_0 b b'$ beschreibt. Wenn der Vektor $\overline{ab_0}$ die Anfangsgeschwindigkeit darstellt, so stellt der Vektor $\overline{ab}$ jederzeit die gesuchte Geschwindigkeit des Körpers dar. Hiermit ist die Definitionsgleichung

$$g \stackrel{\Delta}{=} \dot{v}$$

integriert. Die Definitionsgleichung

$$\mathbf{v} \triangleq \dot{\mathbf{s}}$$

wird in derselben Weise integriert (Fig. 18), wodurch man für jede Zeit den Ort $\mathbf{s}$ des bewegten Körpers a , d. h. den von einem beliebigen festen Punkte o bis zu dem Körper reichenden Vektor $\mathbf{s}$, und damit die Bahn desselben erhält.

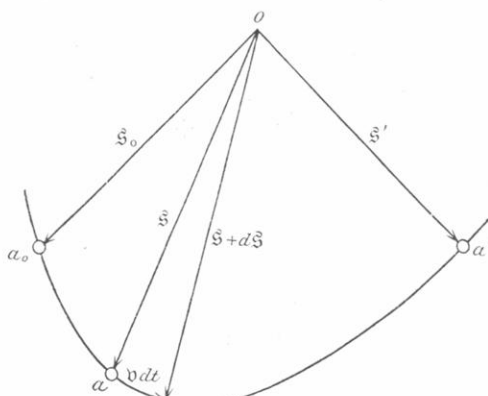


Fig. 18.

Diese Rechnungen werden wesentlich erleichtert durch die Verwendung der vektoranalytischen Multiplikationen.

Die skalaren und rotorischen Produkte zweier Vektoren.

34. Grassmann bezeichnet den Skalar S als das innere oder skalare Produkt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ durch das Symbol:

$$S \triangleq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

wenn S das algebraische Produkt der Größe des einen Vektors und der Größe der Projektion des anderen Vektors auf den erstgenannten ist.

$$S = a b \cos(a, b).$$

Dieses geometrische Gebilde hat eine große Wichtigkeit, da es in den meisten vektorischen Beziehungen erscheint.

Das skalare Produkt zweier aufeinander senkrechter Vektoren ist Null. Das skalare Produkt gleichgerichteter Vek-

toren ist gleich dem algebraischen Produkte ihrer Größen. Insbesondere ist

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \doteq \mathbf{v}^2 \doteq v^2,$$

d. h. das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist gleich dem Quadrate der Größe desselben.

35. Die analytische Form, in welcher sich das skalare Produkt S durch die Komponenten der Faktoren darstellen läßt, kann leicht abgeleitet werden und ist für alle analytischen Rechnungen von großer Bedeutung. Es ist:

$$S = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

36. Es liegt nahe, eine begrenzte ebene Fläche durch einen Vektor darzustellen, welcher die Normalrichtung hat. Grassmann bezeichnet den Vektor $\mathbf{v}$ als das äußere, vektorische oder rotorische Produkt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ durch das Symbol

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

wenn $\mathbf{v}$ senkrecht zu der Ebene der Faktoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gerichtet ist und die Größe

$$v = ab \sin(a, b)$$

des Flächeninhaltes des Parallelogrammes hat, welches man aus den beiden Vektoren bilden kann. Es muß aber noch der Sinn des Vektors $\mathbf{v}$ willkürlich festgelegt werden. Blickt man in

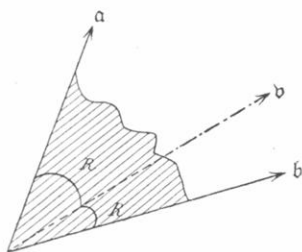


Fig. 19.

der Richtung des Vektors $\mathbf{v}$, so soll der erste Faktor $\mathbf{a}$ des Produktes durch eine Drehung im Uhrzeigersinne um weniger als 180° in die Richtung des zweiten Faktors $\mathbf{b}$ gedreht werden können (Fig. 19).

Das rotorische Produkt gleichgerichteter Vektoren ist Null

$$\mathbf{a} \times k \mathbf{a} \doteq 0.$$

37. Die Projektionen der Fläche eines Parallelogrammes auf die Koordinatenebenen werden bekanntlich durch Determinanten zweiter Ordnung ausgedrückt, welche aus den Komponenten der Seiten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ des Parallelogrammes gebildet

sind. Hieraus ergibt sich leicht der analytische Wert der Komponenten $v_x v_y v_z$ des rotorischen Produktes $\mathbf{v}$. Es ist:

$$(a) \quad \begin{aligned} v_x &= a_z b_y - a_y b_z, \\ v_y &= a_x b_z - a_z b_x, \\ v_z &= a_y b_x - a_x b_y. \end{aligned}$$

Auch diese Formen sind für alle analytischen Rechnungen von Wichtigkeit.

Die Werte 37.(a) ändern sämtlich ihr Vorzeichen, wenn man eine der Koordinatenrichtungen in umgekehrtem Sinne zählt. Sie wurden angegeben unter Zugrundelegung des französischen Koordinatensystems (Fig. 20), welches wir von nun an beibehalten müssen.

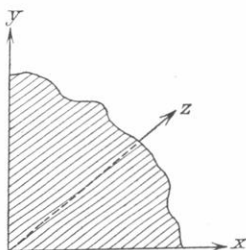


Fig. 20.

38. Die skalaren und rotorischen Produkte von vektorischen Summen können nach den algebraischen Distributionsregeln gebildet werden. Es ist:

$$\begin{aligned} k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &\stackrel{\equiv}{=} k\mathbf{a} + k\mathbf{b}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &\stackrel{\equiv}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &\stackrel{\equiv}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sagt die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke aus, die zweite sagt aus, daß die Summe der Projektionen der Seiten eines Dreiecks auf eine beliebige Strecke $\mathbf{c}$ Null ist, die dritte Gleichung besagt, daß die vektorische Summe der Seitenflächen eines schiefen Prismas Null ist.

39. Die Kommutation der Faktoren dieser Produkte ist gestattet, doch ändert hierbei das rotorische Produkt seiner Definition nach das Vorzeichen. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\stackrel{\equiv}{=} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &\stackrel{\equiv}{=} -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Also zum Beispiel

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \stackrel{\equiv}{=} -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \stackrel{\equiv}{=} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$$

40. Die Änderung der Assoziation der Faktoren eines Produktes dreier Vektoren ist immer möglich, doch ändert sich hierbei die Multiplikationsart. Wir betrachten zunächst solche Fälle, in welchen ausschließlich Grassmannsche Produkte auftreten.

Das dreifache Produkt

$$(a) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \doteq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

gestattet die Assoziationsänderung, wobei aber auch die skalare und rotorische Multiplikation vertauscht wird.

Unter Zuziehung der Kommutationsregel erhält man

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \doteq \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \doteq \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Dieses Tripelprodukt gestattet also die zyklische Vertauschung der Faktoren. Alle Produkte einer ungeraden Anzahl von Vektoren ändern das Vorzeichen, wenn sämtliche Vektoren das Vorzeichen ändern. Dieses Tripelprodukt stellt das positiv oder negativ genommene Volum des Spates dar, dessen Kanten die drei Vektoren sind.

41. Eine zweite sehr wichtige Assoziationsregel ist:

$$(a) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \doteq \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Das doppelt rotorische Tripelprodukt läßt sich also in die Differenz zweier Tripelprodukte geänderter Assoziation, aber auch Multiplikationsart zerlegen. Die Richtigkeit dieser Regel erhellt aus ihrer analytischen Form.

Hieraus folgt die Rechenregel

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{d} \doteq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \doteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

und ferner

$$(b) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \doteq 0.$$

Man kann einen Vektor $\mathbf{a}$ in folgender Weise als Summe dreier den Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ paralleler Vektoren darstellen

$$(c) \quad \mathbf{a} \doteq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{d}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{d}} \mathbf{b} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \times \mathbf{b}} \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{d}.$$

42. **Vektorische Division.** Als reziproken Vektor von $\mathbf{b}$ bezeichnen wir den Vektor

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}},$$

worin $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Vektor ist. Als reziproken Vektor von $\mathfrak{b}$ bezeichnet man einen Vektor, welcher dieselbe Richtung wie der Vektor $\mathfrak{b}$, aber dessen reziproke Größe hat, durch das Zeichen

$$\frac{1}{\mathfrak{b}}.$$

Die Projektion irgend eines Reziproken von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}$ gibt den Reziproken von $\mathfrak{b}$.

Es ist

$$\frac{1}{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b} \doteq 1 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b} \doteq 1,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{b}} \times \mathfrak{b} \doteq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} \times \mathfrak{b} \doteq \text{tg}(\mathfrak{a} \mathfrak{b}),$$

$$\frac{1}{\mathfrak{b}} \doteq \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}^2} \text{ u. s. f.}$$

43. Mit Hilfe dieser reziproken Vektoren können wir die Aufgabe lösen, aus einem gegebenen skalaren oder rotorischen Produkte und einem Faktor $\mathfrak{r}$ den anderen $\mathfrak{w}$ zu finden.

Wenn

$$\mathfrak{w} \times \mathfrak{r} \doteq \mathfrak{v}$$

und $\mathfrak{r}$ bekannt ist, so muß $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{r}$ jedenfalls senkrecht stehen. Zwei Bestimmungsstücke des Produktes $\mathfrak{v}$ können aber unabhängig von $\mathfrak{r}$ gegeben sein. Wir haben hier über das Gleichheitszeichen die Ziffer 2 gesetzt, weil diese Gleichung zur Bestimmung des unbekannten Faktors $\mathfrak{w}$ nur zwei Bestimmungsstücke liefert. Sie läßt sich durch drei lineare algebraische Gleichungen ersetzen, deren Determinante aber verschwindet.

Eine spezielle Lösung ist:

$$\mathfrak{w} \doteq \frac{1}{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{v}.$$

Ein zu $\mathfrak{r}$ paralleler sonst beliebiger Vektor $\mathfrak{r}'$ wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{r}' \doteq k \mathfrak{r},$$

worin k nicht bekannt ist, seiner Richtung nach bestimmt. Da nun

$$\mathfrak{r} \times (k \mathfrak{r}) \doteq k (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}) \doteq 0$$

ist, so ist auch

$$(\mathfrak{w} + \mathfrak{r}') \times \mathfrak{r} \doteq \mathfrak{v},$$

also ist die zu $\mathbf{r}$ parallele Komponente des gesuchten Quotienten $\mathbf{w}$ unbestimmt. Es ist allgemein

$$(a) \quad \mathbf{w} \doteq \frac{1}{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + k \mathbf{r},$$

worin k eine beliebige Zahl ist.

Wenn ferner ein skalares Produkt S und einer der Faktoren $\mathbf{r}$ gegeben ist

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \doteq S,$$

so ist eine spezielle Lösung

$$\mathbf{w} \doteq \frac{1}{\mathbf{r}} S.$$

Es ist jedoch nur ein Bestimmungsstück für den gesuchten Quotienten $\mathbf{w}$ gegeben.

Ein zu $\mathbf{r}$ senkrechter sonst beliebiger Vektor $\mathbf{r}''$ wird durch

$$\mathbf{r}'' \doteq \mathbf{f} \times \mathbf{r}$$

definiert, worin $\mathbf{f}$ ein beliebiger Vektor ist.

Da nun

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} \times \mathbf{r} \doteq \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{r} \doteq 0$$

ist, so ist auch

$$(\mathbf{w} + \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r} \doteq S,$$

also bleibt die zu $\mathbf{r}$ senkrechte Komponente des Quotienten $\mathbf{w}$ unbestimmt. Es ist allgemein

$$(b) \quad \mathbf{w} \doteq \frac{1}{\mathbf{r}} S + \mathbf{f} \times \mathbf{r}.$$

Wenn aber sowohl das rotorische als das skalare Produkt des Vektors $\mathbf{w}$ mit dem gegebenen Vektor $\mathbf{r}$ bekannt ist, so ist der Quotient $\mathbf{w}$ völlig bestimmt.

Wenn

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \doteq S$$

und

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} \doteq \mathbf{v},$$

so ist

$$\mathbf{w} \doteq \frac{1}{\mathbf{r}} S + \frac{1}{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}.$$

Hiermit ist die Möglichkeit der vektorischen Division nachgewiesen. Freilich kann man aus dem skalaren Produkte S und dem Divisor $\mathbf{r}$ nicht den Quotienten $\mathbf{w}$ finden, weil dieser ein Vektor ist und nicht durch ein Bestimmungsstück gegeben

sein kann. Man kann aber auch nicht aus dem rotorischen Produkt $\mathfrak{v}$ und dem Divisor $\mathfrak{r}$ den Quotienten $\mathfrak{v}$ finden, weil $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$ niemals unabhängig voneinander gegeben sein können, sondern aufeinander senkrecht stehen müssen. Die vektorische Division besteht in der Lösung der Aufgabe, einen Faktor zu finden, wenn beide Produkte und der andere Faktor gegeben sind.

44. Zur Kontrolle der Richtigkeit obiger Division verwende man folgende auch sonst sehr nützliche Beziehungen.

Die Projektion eines Vektors $\mathfrak{w}$ auf eine zu dem Vektor $\mathfrak{r}$ parallele Richtung hat den vektorischen Wert:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r}) \doteq \mathfrak{r} \left(\mathfrak{w} \cdot \frac{1}{\mathfrak{r}} \right).$$

Die Projektion von $\mathfrak{w}$ auf eine zu $\mathfrak{r}$ senkrechte Ebene hat den Wert

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} \times (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}) \doteq \mathfrak{r} \times \left(\mathfrak{w} \times \frac{1}{\mathfrak{r}} \right).$$

Der Vektor $\mathfrak{w}$ ist die Summe dieser Projektionen:

$$\mathfrak{w} \doteq \frac{1}{\mathfrak{r}} (\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r}) + \frac{1}{\mathfrak{r}} \times (\mathfrak{w} \times \mathfrak{r}).$$

45. Die Gleichung

$$\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r} \doteq \mathfrak{w}' \cdot \mathfrak{r}$$

bedeutet, daß die Projektionen von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ auf eine zu $\mathfrak{r}$ parallele Richtung gleich groß sind.

Die Gleichung

$$\mathfrak{w} \times \mathfrak{r} \doteq \mathfrak{w}' \times \mathfrak{r}$$

bedeutet, daß die Projektionen von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ auf eine zu $\mathfrak{r}$ senkrechte Ebene gleich und gleichgerichtet sind.

46. Es gibt eine allgemeiner verwendbare Form, die vektorische Division auszuführen, indem man die reziproken statt der reziproken Vektoren verwendet.

Wenn in der Gleichung

$$(a) \quad \mathfrak{w} \times \mathfrak{r} \doteq \mathfrak{v}$$

$\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{r}$ so gegeben sind, daß sie aufeinander senkrecht stehen, so kann man den Quotienten $\mathfrak{w}$ auch in der Form

$$(b) \quad \mathfrak{w} \doteq \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}} \times \mathfrak{v}$$

darstellen. Der Vektor $\mathfrak{a}$, der hier im Zähler und Nenner eingeschoben ist, ist ganz willkürlich. Je nach seiner Wahl bestimmt sich aber $\mathfrak{w}$, doch jedenfalls so, daß die Gleichung (a) erfüllt ist. Da zur Bestimmung von $\mathfrak{w}$ nur eine Angabe fehlt, so hat nur ein Bestimmungsstück von $\mathfrak{a}$ Bedeutung, und zwar die Angabe einer zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}$ parallelen Ebene, auf welcher dann $\mathfrak{w}$ senkrecht steht.

Aus der Gleichung

$$(c) \quad \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{r} \doteq S$$

bestimmt sich $\mathfrak{w}$ durch den Quotienten:

$$(d) \quad \mathfrak{w} \doteq \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}} S,$$

worin der Vektor $\mathfrak{a}$ willkürlich ist. Je nach der Wahl der Richtung desselben bestimmt sich $\mathfrak{w}$, jedoch stets so, daß die Gleichung (c) erfüllt ist.

Die dyadischen Produkte.

47. Hamilton und Gibbs lehrten ein geometrisches Gebilde kennen, welches den Grassmannschen Produkten verwandt ist, da es sich assoziativ und distributiv wie ein Produkt zweier Vektoren verhält.

Dieses dritte Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnen wir durch

$$\mathfrak{a} ; \mathfrak{b} \doteq \mathcal{A}'$$

und nennen es eine skalare oder lineare Dyade. Es ist aber noch ein viertes ganz gleich wichtiges Produkt zweier Vektoren angebar, welches wir mit

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \doteq \mathcal{A}''$$

bezeichnen und eine rotorische oder planare Dyade nennen.

Die meisten Rechenregeln gelten für die skalaren und rotorischen Dyaden in ganz gleicher Weise. Wir bezeichnen deshalb mit

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \doteq \mathcal{A}$$

eine Dyade, von welcher wir es unentschieden lassen, ob sie skalar oder rotorisch ist.

Die Dyaden haben eine ebenso große geometrische und physikalische Bedeutung wie die Grassmannschen Produkte,

sind ebenso reale, ihrer Größe, Form und Lage nach vorstellbare Gebilde. Keineswegs sind sie, wie Gibbs glaubt, nur symbolische analytische Operatoren. Eine Dyade ist gegeben durch fünf Bestimmungsstücke, und zwar durch die Richtungen der beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und durch das Produkt ihrer Größen. Die Größe der einzelnen Vektoren ist hier wie bei den Grassmannschen Produkten gleichgültig.

48. Die Dyaden treten in vektorischen Tripelprodukten bei Assoziationsänderung auf.

Das skalare Tripelprodukt erlaubt die Faktoren anders zu assoziieren ohne daß andere als die Grassmannschen Produkte auftreten:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} \stackrel{!}{=} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \stackrel{!}{=} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$$

Die vektorischen Tripelprodukte $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$ und $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$ gestatten ebenfalls beliebige Assoziationsänderungen, aber es treten dabei die dyadischen Produkte auf.

Das Produkt einer Dyade A mit einem Vektor $\mathbf{r}$ ist also ein vektorisches Tripelprodukt, d. h. ein Vektor $\mathbf{v}$. Es empfiehlt sich wegen mehrerer Analogien dieses Produkt ein inneres Produkt zu nennen:

$$\mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} A \cdot \mathbf{r}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ wird in folgender Weise gefunden: Der äußere Vektor $\mathbf{a}$ der Dyade gibt die Richtung von $\mathbf{v}$, der innere Vektor $\mathbf{b}$ der Dyade verschmilzt zu einem Grassmannschen Produkt. Es ist:

$$\begin{aligned} A^s \cdot \mathbf{r} &\stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{a} ; \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}), \\ A^r \cdot \mathbf{r} &\stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Hingegen ist nach derselben Definition:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot A^s &\stackrel{\Delta}{=} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} ; \mathbf{b}) \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}, \\ \mathbf{r} \cdot A^r &\stackrel{\Delta}{=} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Es ist aber nach der Regel 41.(a) und (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot A^s - A^s \cdot \mathbf{r} &\stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{r} \stackrel{\Delta}{=} A^r \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot A^r, \\ \mathbf{r} \cdot A^r - A^r \cdot \mathbf{r} &\stackrel{\Delta}{=} -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{r} \stackrel{\Delta}{=} A^s \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot A^s. \end{aligned}$$

49. Das Produkt einer Dyade mit einem Skalar s erhält man, indem man die Größe der Dyade oder eines ihrer Vektoren s -fach nimmt

$$s \mathcal{A} \doteq s \mathbf{a}, \mathbf{b} \doteq \mathbf{a}, s \mathbf{b}.$$

Als äußeres Produkt einer Dyade mit einem Vektor $\mathbf{r}$ bezeichnet man eine Dyade von gleichem, äußerem Vektor, während der innere Vektor der Dyade rotorisch mit $\mathbf{r}$ multipliziert wird

$$\mathcal{A} \times \mathbf{r} \doteq \mathbf{a}, (\mathbf{b} \times \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r} \times \mathcal{A} \doteq (\mathbf{r} \times \mathbf{a}), \mathbf{b}.$$

Als äußeres Produkt zweier Dyaden bezeichnet man eine in analoger Weise gebildete Triade.

50. Das innere Produkt zweier Dyaden (siehe § 62) und die Summe zweier Dyaden (siehe § 54) sind nicht notwendig lineare oder planare Dyaden. Diese stellen kein vollständiges geometrisches Gebilde, sondern nur einen Spezialfall, eine Komponente eines höheren Gebildes Φ vor, der kompletten Dyade, welche wir im folgenden kurzweg Dyade nennen werden.

51. Jede „Summe“ beliebig vieler skalarer Dyaden nennen wir eine komplette skalare Dyade Φ^s . Dieselbe läßt sich immer zurückführen auf oder vielmehr zerlegen in die Summe dreier skalarer linearer Dyaden; wir beweisen dies in § 54

$$\Phi^s \doteq \mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{c}; \mathbf{d} + \mathbf{e}; \mathbf{f}.$$

Jede Summe beliebig vieler rotorischer Dyaden läßt sich auf drei solche zurückführen und heißt eine komplette rotorische Dyade Φ^r

$$\Phi^r \doteq \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{d} + \mathbf{e} \times \mathbf{f}.$$

Die Antezedenten $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{e}$ oder aber die Konsequenten $\mathbf{b}$ $\mathbf{d}$ $\mathbf{f}$ können sogar ganz willkürlich gewählt werden. Das andere Vektorentripel bestimmt dann die Dyade. Eine Dyade ist also durch drei Vektoren oder neun Zahlen bestimmt. Man kann sich dieselbe sonach unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung vorstellen, welche man eine Quadrik der Dyade nennt. Jedenfalls ist eine Dyade kein symbolischer Operator, sondern ein selbständiges der Größe, Form und Lage nach vollständig vorstellbares geometrisches Gebilde,

welches sehr oft elementare physikalische Bedeutung hat, direkt meßbar ist und in wichtigen Fällen durch direkte Naturgesetze bestimmt wird.

Zum Behufe der kürzeren Darstellung der Rechenregeln bezeichnen wir wieder mit

$$\Phi \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, \mathfrak{d} + \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$$

eine komplette Dyade, welche nach Belieben als skalar oder rotorisch angesehen werden kann.

52. Die Dyaden können in jeder Beziehung den Distributionsregeln der Multiplikation unterworfen werden. Hierauf beruht der Begriff der Summe von Dyaden (siehe § 54). Es ist

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}), \mathfrak{c} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{a}, \mathfrak{c} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \\ \Phi \cdot \mathfrak{r} &\stackrel{\circ}{=} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{r} + (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \cdot \mathfrak{r} + (\mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{r} \cdot \Phi &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) + \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{e}, \mathfrak{f}), \\ \Phi \times \mathfrak{r} &\stackrel{\circ}{=} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \times \mathfrak{r} + (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) \times \mathfrak{r} + (\mathfrak{e}, \mathfrak{f}) \times \mathfrak{r}, \\ \mathfrak{r} \times \Phi &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \mathfrak{r} \times (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) + \mathfrak{r} \times (\mathfrak{e}, \mathfrak{f}). \end{aligned}$$

Es gilt also nach § 48

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} \cdot \Phi^s - \Phi^s \cdot \mathfrak{r} &\stackrel{\circ}{=} (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \times \mathfrak{f}) \times \mathfrak{r} \stackrel{\circ}{=} \Phi^r \cdot \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \cdot \Phi^r, \\ \Phi^s \cdot \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \cdot \Phi^r &\stackrel{\circ}{=} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{f}) \quad \mathfrak{r} \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{r} \cdot \Phi^s - \Phi^r \cdot \mathfrak{r}. \end{aligned}$$

53. Man bezeichnet mit

$$\Phi_s^s \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{f}$$

beziehungsweise

$$\Phi_s^r \stackrel{\circ}{=} -2(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{f})$$

Skalare, welche gegeben sind, wenn die Dyade Φ gegeben ist und welche man den ersten Skalar der Dyade Φ^s beziehungsweise Φ^r nennt.

Der Skalar einer Summe von Dyaden ist gleich der Summe der Skalare derselben:

$$(\Phi + \Psi)_s \stackrel{\circ}{=} \Phi_s + \Psi_s.$$

Man bezeichnet ferner mit

$$\Phi_r^s \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \times \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \times \mathfrak{f}$$

beziehungsweise

$$\Phi_r^r \stackrel{\circ}{=} -\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{d} - \mathfrak{e} \times \mathfrak{f}$$

Vektoren, welche ebenfalls durch die gegebene Dyade bestimmt (kovariant) sind, und welche man die Rotoren der betreffenden Dyaden nennt.

Der Rotor einer Summe von Dyaden ist gleich der Summe der Rotoren derselben

$$(\Phi + \Psi)_r \triangleq \Phi_r + \Psi_r.$$

Obige Gleichungen können also in der Form geschrieben werden:

$$(a) \quad \begin{cases} \mathbf{r} \cdot \Phi^s - \Phi^s \cdot \mathbf{r} \triangleq \Phi_r^s \times \mathbf{r} \triangleq \Phi^r \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \Phi^r, \\ \Phi^s \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \Phi^r \triangleq \Phi_s^s \quad \mathbf{r} \triangleq \mathbf{r} \cdot \Phi^s - \Phi^r \cdot \mathbf{r}. \end{cases}$$

54. Die Summe mehrerer kompletten Dyaden ist immer eine komplette Dyade. Die Summe von beliebig vielen linearen bzw. planaren Dyaden ist eine skalare bzw. rotorische komplette Dyade. Das Integral unendlich vieler, unendlich kleiner linearer bzw. planarer Dyaden ist eine komplette skalare bzw. rotorische Dyade

$$\sum_i \mathbf{n}_i, \mathbf{m}_i \triangleq \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{d} + \mathbf{e}, \mathbf{f}.$$

Die Antezedenten $\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{e}$ nehmen wir willkürlich an, zerlegen jeden anderen nach 42.(c) in drei Vektoren, welche die Richtungen $\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{e}$ haben

$$\mathbf{n}_i \triangleq \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{e}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{e}} \mathbf{a} + \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{a}} \mathbf{c} + \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}} \mathbf{e}.$$

Dann ergeben sich die Werte $\mathbf{b} \mathbf{d} \mathbf{f}$ wie folgt:

$$\mathbf{b} \triangleq \sum_i \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{e}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{e}} \mathbf{m}_i,$$

$$\mathbf{d} \triangleq \sum_i \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{a}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{a}} \mathbf{m}_i,$$

$$\mathbf{f} \triangleq \sum_i \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}} \mathbf{m}_i.$$

55. Zwei Dyaden sind gleich, wenn sie für gleiche Konsequenten $\mathbf{b} \mathbf{d} \mathbf{f}$ gleiche Antezedenten $\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{e}$ haben oder umgekehrt und beide skalar bzw. rotorisch sind.

Zwei Dyaden, deren innere Produkte mit drei nicht koplanaren Vektoren gleich sind, sind gleich.

56. Die einfachste aller Dyaden ist die Identitätsdyade oder Einheitsdyade I . Es ist

$$I \stackrel{0}{=} \mathbf{i}; \mathbf{i} - \mathbf{i} \times \mathbf{i},$$

worin $\mathbf{i}$ ein beliebig gerichteter Vektor von der Größe 1 ist. Der Skalar der Einheitsdyade ist nach § 53 gleich 3

$$I_s \stackrel{1}{=} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + 2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 3.$$

Der Rotor der Einheitsdyade ist Null.

Die Einheitsdyade hat die Eigenschaft, daß ihr Produkt mit einem Vektor oder einer Dyade wieder diesen Vektor oder diese Dyade ergibt, ihr Produkt mit einer Zahl a ist die sehr einfache und wichtige Proportionalitätsdyade aI .

Beweis: Es ist $\mathbf{r}$ gleich der Summe seiner Projektionen auf eine zu $\mathbf{i}$ parallele Gerade und auf eine zu $\mathbf{i}$ senkrechte Ebene also nach § 44

$$\mathbf{r} \stackrel{3}{=} \mathbf{i}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \stackrel{3}{=} I \cdot \mathbf{r},$$

und ebenso

$$\mathbf{r} \cdot I \stackrel{3}{=} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r} \cdot aI \stackrel{3}{=} aI \cdot \mathbf{r} \stackrel{3}{=} a\mathbf{r},$$

$$(I \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} \stackrel{3}{=} (\mathbf{a} \times I) \cdot \mathbf{r} \stackrel{3}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r} \cdot (I \times \mathbf{a}) \stackrel{3}{=} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times I) \stackrel{3}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{a}.$$

Die Einheitsdyade läßt sich als komplette Dyade mittels dreier rectangulärer Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ darstellen. Es ist

$$(a) \quad I \stackrel{0}{=} \mathbf{i}; \mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{k}$$

oder

$$(b) \quad I \stackrel{0}{=} -\frac{1}{2}(\mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \mathbf{k}).$$

Ersteres folgt aus dem Satze, daß jeder Vektor $\mathbf{r}$ die Summe seiner Projektionen auf drei rectanguläre Richtungen ist, letzteres folgt aus dem Satze, daß jeder Vektor $\mathbf{r}$ gleich der halben Summe seiner Projektionen auf drei rectanguläre Ebenen ist.

57. Die konjugierte Dyade Φ_c wird definiert durch

$$\Phi_c \stackrel{0}{=} \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{d}, \mathbf{c} + \mathbf{f}, \mathbf{e}.$$

Man erhält sie aus der Dyade Φ , indem man die Konsequenten mit den Antecedenten tauscht. Es ist deshalb

$$(\Phi_c)_c \stackrel{0}{=} \Phi.$$

Sehr wichtig ist die Beziehung:

$$\mathbf{r} \cdot \Phi^s \doteq \Phi_c^s \cdot \mathbf{r},$$

$$\mathbf{r} \cdot \Phi^r \doteq \Phi_c^r \cdot \mathbf{r}.$$

Es ist

$$(\Phi + \Psi)_c \doteq \Phi_c + \Psi_c,$$

$$\Phi_{cs} = \Phi_s \quad \Phi_{cr} \doteq -\Phi_r.$$

58. Man kann nun die rotorischen Dyaden auf skalare Dyaden zurückführen und umgekehrt. Es ist nach 53.(a)

$$\mathbf{r} \cdot \Phi^s - \Phi^r \cdot \mathbf{r} \doteq \Phi_s^s \mathbf{r},$$

$$(a) \quad \begin{cases} \Phi^r \doteq \Phi_c^s - \Phi_s^s I, \\ \Phi^s \doteq \Phi_c^r + \Phi_s^s I. \end{cases}$$

Da die Einheitsdyade I nach 56. (a und b) ebensowohl als eine skalare als rotorische Dyade dargestellt werden kann, so ist durch obige Beziehungen eine beliebige rotorische Dyade als skalare Dyade dargestellt und umgekehrt. Damit ist bewiesen, daß alle Rechenregeln, welche für skalare Dyaden gelten, auch für rotorische Dyaden gelten und umgekehrt. Keineswegs ist aber die Überflüssigkeit der rotorischen Dyaden damit nachgewiesen, da eine ihrer Natur nach rotorische Dyade sich kompliziert und unsymmetrisch durch skalare Dyaden darstellt und umgekehrt.

Nach 53.(a) folgt

$$(b) \quad \Phi^s - \Phi_c^s \doteq \Phi_c^r - \Phi^r.$$

59. Eine Dyade stellt eine eindeutige Beziehung zwischen einem Vektor $\mathbf{r}$ und dem Produkt $\mathbf{v}$ her

$$\mathbf{v} \doteq \Phi \cdot \mathbf{r}.$$

Ist die Dyade Φ gegeben, so entspricht jedem der dreifach unendlich vielen Vektoren $\mathbf{r}$ ein Vektor $\mathbf{v}$ und umgekehrt. Diese Umkehrung nennt man dyadische Division und bezeichnet dieselbe durch:

$$\mathbf{r} \doteq \Phi^{-1} \cdot \mathbf{v}.$$

Φ^{-1} ist ebenfalls eine Dyade, welche bestimmt ist, wenn die Dyade Φ gegeben ist, und welche man die reziproke Dyade nennt.

Es ist

$$(\Phi_c)^{-1} \stackrel{g}{=} (\Phi^{-1})_c.$$

Es reicht aus, die reziproke Dyade einer skalaren Dyade zu berechnen, da sich die rotorischen Dyaden jedenfalls auf skalare zurückführen lassen.

Es ist

$$(\Phi^s)^{-1} \stackrel{g}{=} \mathfrak{b}^{-1} ; \mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{d}^{-1} ; \mathfrak{c}^{-1} + \mathfrak{f}^{-1} ; \mathfrak{e}^{-1},$$

worin

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}}{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}} & \mathfrak{b}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{d} \times \mathfrak{f}}{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d} \times \mathfrak{f}}, \\ \mathfrak{c}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{e} \times \mathfrak{a}}{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e} \times \mathfrak{a}} & \mathfrak{d}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{f} \times \mathfrak{b}}{\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{f} \times \mathfrak{b}}, \\ \mathfrak{e}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}}{\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}} & \mathfrak{f}^{-1} &\stackrel{g}{=} \frac{\mathfrak{b} \times \mathfrak{d}}{\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b} \times \mathfrak{d}}. \end{aligned}$$

Sind andererseits drei zusammengehörige Wertepaare von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ gegeben, so ist hierdurch die Dyade bestimmt.

Man bezeichnet den Vektor $\mathfrak{v}$ als eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$ und umgekehrt.

60. Sehr wichtig ist, daß dieses Produkt der Distributionsregel folgt. Es ist

$$\Phi \cdot (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2) \stackrel{g}{=} \Phi \cdot \mathfrak{r}_1 + \Phi \cdot \mathfrak{r}_2.$$

Also folgt, wenn $\mathfrak{r}$ ein variabler Vektor, Φ eine konstante Dyade ist:

$$\mathfrak{v} \stackrel{g}{=} \Phi \cdot \mathfrak{r},$$

$$\mathfrak{v} + d\mathfrak{v} \stackrel{g}{=} \Phi \cdot (\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}),$$

$$d\mathfrak{v} \stackrel{g}{=} \Phi \cdot d\mathfrak{r}.$$

Die Änderung $d\mathfrak{v}$ der Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ ist gleich dem Produkt der Dyade Φ mit der Änderung $d\mathfrak{r}$ des unabhängig veränderlichen Vektors $\mathfrak{r}$. Die Dyade kann also als der Differentialquotient der Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ nach dem Vektor $\mathfrak{r}$, oder besser als die Derivation von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{r}$ bezeichnet werden.

61. Beispiele. Bezeichne $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor der Punkte eines kontinuierlich den Raum erfüllenden Mediums, d. h. ihren Abstand von einem beliebigen festen Punkte des Raumes, und bezeichne $\mathfrak{v}$ eine Verschiebung dieser Punkte, Φ eine gegebene Dyade, so stellt die Gleichung

$$\mathfrak{v} \stackrel{g}{=} \mathfrak{r} \cdot \Phi$$

die Deformation des Mediums, d. h. die Verschiebungen $\mathbf{v}$ als Funktion des Ortes $\mathbf{r}$ dar, und zwar nennt man diese Deformation, wenn Φ konstant ist, eine homogene.

Die einfachsten homogenen Deformationen sind folgende.

Wenn

$$\Phi \doteq \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{a},$$

worin $\mathbf{a}$ ein gegebener Vektor, so stellt die Deformation eine einfache Dehnung in der Richtung $\mathbf{a}$ vor. Jede zu $\mathbf{a}$ parallele Strecke wird um den Bruchteil $\pm a^2$ verlängert. Die zu $\mathbf{a}$ senkrechten Strecken bleiben unverändert. Eine Kugel wird in ein Rotationsellipsoid verwandelt, dessen Äquator denselben Radius hat wie die Kugel.

Wenn

$$\Phi \doteq \pm \mathbf{a} \times \mathbf{a},$$

so stellt die Deformation eine Querkontraktion gegen die Achse $\mathbf{a}$ dar. Jede zu $\mathbf{a}$ senkrechte Strecke wird um den Bruchteil $\pm a^2$ verkürzt, die zu $\mathbf{a}$ parallelen Strecken bleiben unverändert. Eine Kugel wird in ein Rotationsellipsoid verwandelt, dessen Achse gleich dem Kugelradius ist.

Wenn

$$\Phi \doteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \text{also} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq 0$$

ist, so stellt die Deformation eine Schiebung dar. Jede zu $\mathbf{a}$ senkrechte Ebene wird um den Betrag $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}$ verschoben, also desto mehr, je weiter sie vom Nullpunkte absteht. Eine Kugel wird in ein dreiachsiges Ellipsoid von gleichem Volum verwandelt, dessen mittlere Achse zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht und dem Kugelradius gleich ist, die anderen Achsen halbieren den Winkel $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, wenn die Deformation klein ist.

Wenn

$$\Phi \doteq a I$$

ist, so stellt die Deformation eine gleichförmige Expansion dar. Jede Strecke wird ohne Richtungsänderung um den Bruchteil a vergrößert. Jeder Raumteil verwandelt sich in einen ähnlichen und ähnlich liegenden.

Im allgemeinen Falle wird immer ein gewisses rectanguläres Vektorentripel $\mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_1$ in ein rectanguläres Tripel $\mathbf{i}_2 \mathbf{j}_2 \mathbf{k}_2$ über-

geführt. Die allgemeine Dyade Φ läßt sich deshalb in die Normalform bringen

$$\Phi \stackrel{\circ}{=} a \mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2 + b \mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2 + c \mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2.$$

$a \ b \ c$ heißen die Hauptdehnungen. Eine Kugel wird in ein dreiachsiges Ellipsoid verwandelt, dessen Achsen rectangulären Durchmessern der Kugel entsprechen.

62. Nun betrachten wir die Funktion $\mathbf{w}$ einer Funktion $\mathbf{v}$ eines Vektors $\mathbf{r}$. Es seien von den Dyaden Φ, Ψ, X zwei gegeben und es sei:

$$\mathbf{w} \stackrel{\circ}{=} \Psi \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \stackrel{\circ}{=} \Phi \cdot \mathbf{r}.$$

Dann ist

$$\mathbf{w} \stackrel{\circ}{=} X \cdot \mathbf{r}$$

und wir können setzen:

$$X \stackrel{\circ}{=} \Psi \cdot \Phi \quad \Psi \stackrel{\circ}{=} X \cdot \Phi^{-1},$$

so daß

$$\mathbf{w} \stackrel{\circ}{=} \Psi \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}$$

ist. Man hat alles Recht, die Dyade X als das innere Produkt der Dyaden Φ und Ψ zu bezeichnen, denn sie berechnet sich in folgender Weise.

63. Das innere Produkt zweier linearen Dyaden ist selbst eine lineare Dyade, deren Vektoren die äußeren Vektoren beider Dyaden sind, während die inneren Vektoren zu einem skalaren Produkt verschmelzen

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}; \mathbf{d}) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{a}; \mathbf{d} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

64. Die Summen linearer Dyaden werden nach der Distributionsregel multipliziert. Damit kann man das Produkt kompletter skalarer oder rotorischer Dyaden bilden.

Wenn

$$\Phi \stackrel{\circ}{=} \mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{c}; \mathbf{d} + \mathbf{e}; \mathbf{f}$$

und

$$\Psi \stackrel{\circ}{=} \mathbf{m}; \mathbf{n} + \mathbf{o}; \mathbf{p} + \mathbf{q}; \mathbf{r},$$

so ist

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \Psi \stackrel{\circ}{=} & \mathbf{a}; \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}; \mathbf{n} + \mathbf{a}; \mathbf{b} \cdot \mathbf{o}; \mathbf{p} + \mathbf{a}; \mathbf{b} \cdot \mathbf{q}; \mathbf{r} \\ & + \mathbf{c}; \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}; \mathbf{n} + \mathbf{c}; \mathbf{d} \cdot \mathbf{o}; \mathbf{p} + \mathbf{c}; \mathbf{d} \cdot \mathbf{q}; \mathbf{r} \\ & + \mathbf{e}; \mathbf{f} \cdot \mathbf{m}; \mathbf{n} + \mathbf{e}; \mathbf{f} \cdot \mathbf{o}; \mathbf{p} + \mathbf{e}; \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}; \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Diese einfache Multiplikationsweise linearer Dyaden gibt ihnen einen zwar nicht wesentlichen, aber doch beachtens-

werten Vorzug vor den rotorischen Dyaden. Deshalb wird man diese nur zur Aufstellung allgemeiner Beziehungen, aber nicht in speziellen Rechnungen verwenden.

Es ist

$$\begin{aligned}\Phi \cdot \Phi^{-1} &\stackrel{a}{=} I, \\ \Phi \cdot I &\stackrel{a}{=} \Phi, \\ (\Phi \cdot \Psi)^{-1} &\stackrel{a}{=} \Phi^{-1} \cdot \Psi^{-1}, \\ (\Phi \cdot \Psi)_c &\stackrel{a}{=} \Psi_c \cdot \Phi_c.\end{aligned}$$

65. Mehrfache Produkte folgen den Assoziationsregeln, wenn in der Mitte nur Dyaden, an den Enden höchstens je ein Vektor steht. Dann sind Klammern unnötig, um die Bedeutung dieser Produkte zu definieren. Es folgt aus den dyadischen Multiplikationsregeln ohne weiteres, daß:

$$\begin{aligned}\Phi \cdot (\mathbf{r} \times \Psi) &\stackrel{a}{=} (\Phi \times \mathbf{r}) \cdot \Psi, \\ \Phi \times \mathbf{r} \cdot \mathfrak{s} &\stackrel{a}{=} \Phi \cdot (\mathbf{r} \times \mathfrak{s}).\end{aligned}$$

Diese Assoziationsregeln sind analog der Assoziationsregel für das Grassmannsche Tripelprodukt und wie diese vielfach verwendbar.

66. Als symmetrisch oder autokonjugiert bezeichnet man eine Dyade θ , welche ihrer konjugierten Dyade θ_c gleich ist

$$\theta \stackrel{a}{=} \theta_c.$$

Nach 53.(a) ist

$$\mathbf{r} \cdot (\Phi - \Phi_c) \stackrel{a}{=} \Phi_r \times \mathbf{r}.$$

Also hat eine symmetrische Dyade den Rotor Null. Ist der Rotor Null, so ist die Dyade symmetrisch

$$\theta_r \stackrel{a}{=} 0.$$

Dies legt ihr drei Bedingungen auf und deshalb ist eine symmetrische Dyade schon durch sechs Bestimmungsstücke gegeben. Sowohl eine skalare als rotorische Dyade kann symmetrisch sein.

Die Summe und das Produkt zweier symmetrischen Dyaden sowie die reziproke Dyade einer symmetrischen Dyade sind symmetrische Dyaden.

Die Summe jeder Dyade und ihrer konjugierten Dyade ist eine symmetrische Dyade

$$(\Phi + \Phi_c)_c \stackrel{a}{=} \Phi_c + \Phi_{cc} \stackrel{a}{=} \Phi_c + \Phi.$$

Das innere Produkt einer Dyade mit ihrer konjugierten Dyade ist eine symmetrische Dyade

$$(\Phi \cdot \Phi_c)_c \stackrel{a}{=} \Phi_{cc} \cdot \Phi_c \stackrel{a}{=} \Phi \cdot \Phi_c.$$

Die symmetrischen Dyaden, welche man aus gegebenen physikalischen Dyaden bilden kann, haben oft noch größere Realität als diese, also die Bedeutung physikalischer Eigenschaften. Neben diesen hat aber auch der Rotor der Dyade eine selbständige physikalische Bedeutung.

Man erhält die symmetrischen Dyaden, welche einer gegebenen Dyade Φ zugeordnet sind, indem man diese mit ihrer konjugierten Dyade Φ_c addiert oder multipliziert.

Es ergibt sich so die erste symmetrische Dyade $[\Phi]$, welche definiert ist durch

$$2[\Phi] \stackrel{a}{=} [\Phi] + [\Phi] \stackrel{a}{=} \Phi + \Phi_c$$

und die zweite symmetrische Dyade $\{\Phi\}$, welche definiert ist durch

$$\{\Phi\}^2 \stackrel{a}{=} \{\Phi\} \cdot \{\Phi\} \stackrel{a}{=} \Phi \cdot \Phi_c.$$

67. Eine allgemeine Dyade läßt sich immer in der Normalform, d. i. durch zwei rectanguläre Tripel $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ und $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ von Einheitsvektoren darstellen

$$\Phi^s \stackrel{a}{=} a_1 \mathbf{i}' ; \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}' ; \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}' ; \mathbf{k},$$

$$\Phi^r \stackrel{a}{=} a_1 \mathbf{i}' \times \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}' \times \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}' \times \mathbf{k},$$

worin $a_1 a_2 a_3$ drei Zahlen sind.

Eine symmetrische Dyade θ hat eine Normalform, in welcher beide Vektorentripel zusammenfallen

$$\theta^s \stackrel{a}{=} a_1 \mathbf{i} ; \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} ; \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} ; \mathbf{k},$$

$$\theta^r \stackrel{a}{=} a_1 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \times \mathbf{k}.$$

68. Der Skalar erster Ordnung Φ_s einer Dyade bestimmt sich durch die Summe der Koeffizienten ihrer Normalform

$$\Phi_s^s \stackrel{a}{=} a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\Phi_s^r \stackrel{a}{=} -2a_1 - 2a_2 - 2a_3.$$

Der Skalar einer Dyade Φ und ihrer symmetrischen Dyade $[\Phi]$ erster Art sind gleich

$$[\Phi^s]_s \stackrel{a}{=} \Phi_s^s \quad [\Phi^r]_s \stackrel{a}{=} \Phi_s^r.$$

69. Als ersten Skalar zweiter Ordnung $[\Phi]_s^2$ wollen wir den ersten Skalar des Quadrates der symmetrischen Dyade $[\Phi]$ erster Art bezeichnen

$$[\Phi]_s^2 \triangleq \frac{1}{4}(\Phi + \Phi_c)^2.$$

Derselbe bestimmt sich durch die Quadrate der Koeffizienten der Normalform der Dyade $[\Phi]$

$$[\Phi^s]_s^2 \triangleq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$[\Phi^r]_s^2 \triangleq (a_2 + a_3)^2 + (a_3 + a_1)^2 + (a_1 + a_2)^2.$$

70. Als zweiten Skalar zweiter Ordnung $\{\Phi\}_s^2$ bezeichnen wir den ersten Skalar des Quadrates der symmetrischen Dyade $\{\Phi\}$ zweiter Art

$$\{\Phi\}_s^2 \triangleq (\Phi \cdot \Phi_c)_s.$$

Dieser bestimmt sich ebenso durch die Koeffizienten der Normalform der Dyade $\{\Phi\}$ wie der erste Skalar zweiter Ordnung durch die Koeffizienten der Normalform der Dyade $[\Phi]$.

Die beiden Skalare zweiter Ordnung dürfen nicht verwechselt werden mit dem von Gibbs als the scalar of the second dyadic Φ_{2s} bezeichneten Wert, welcher eine mehr analytische als physikalische Bedeutung hat.

71. Als dritten Skalar Φ_3 einer Dyade Φ bezeichnet man den Wert

$$\Phi_3 \triangleq (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \times \mathfrak{e})(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d} \times \mathfrak{f})$$

des Produktes der Volume der Spate der Antecedenten und der Konsequenten.

Der dritte Skalar einer Dyade, ihrer konjugierten Dyade und der zugeordneten symmetrischen Dyade zweiter Art sind gleich

$$\Phi_3 \triangleq (\Phi_c)_3 \triangleq \{\Phi\}_3.$$

Die symmetrische Dyade zweiter Art eines Produktes von Dyaden ist gleich dem Produkte der symmetrischen Dyaden

$$\{\Phi \cdot \Psi\} \triangleq \{\Phi\} \cdot \{\Psi\}.$$

Der dritte Skalar eines Produktes von Dyaden ist gleich dem Produkte der dritten Skalare derselben

$$(\Phi \cdot \Psi)_3 \triangleq \Phi_3 \cdot \Psi_3.$$

Der reziproke Wert des dritten Skalars einer Dyade ist gleich dem dritten Skalar der reziproken Dyade.

$$(\Phi_3)^{-1} \doteq (\Phi^{-1})_3.$$

Wie man sieht, spielt der dritte Skalar dieselbe Rolle für die Produkte von Dyaden, wie der erste Skalar für die Summen von Dyaden.

A n h a n g.

72. Um die Rechnungen symmetrischer zu machen, bedient man sich der Hilfe von speziellen sehr reduzierten Dyaden. Es ist dies die versorische und die antisymmetrische Dyade.

73. Eine versorische Einheitsdyade oder ein Versor X wird definiert durch

$$\{X\} \doteq I$$

oder

$$X \cdot X_c \doteq I \quad \text{oder} \quad X^{-1} \doteq X_c.$$

Es sind dies sechs Bedingungen, also ist ein Versor schon durch drei Bestimmungsstücke völlig bestimmt, ist also einem Vektor gleichwertig und durch einen solchen zu ersetzen. In der Normalform sind die Koeffizienten eines Versors gleich 1

$$X^s \doteq \mathbf{i}' ; \mathbf{i} + \mathbf{j}' ; \mathbf{j} + \mathbf{k}' ; \mathbf{k}.$$

Das skalare Produkt eines Versors mit einem Vektor $\mathbf{r}$ gibt einen Vektor $\mathbf{v}$, welcher in dem Achsensystem $\mathbf{i}' \mathbf{j}' \mathbf{k}'$ dieselbe Lage hat wie der Vektor $\mathbf{r}$ in dem Achsensystem $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$. Die Multiplikation mit einem Versor bedeutet also eine Drehung.

Jede allgemeine Dyade Φ läßt sich als das Produkt ihres Versors X mit ihrer symmetrischen Dyade zweiter Art $\{\Phi\}$ darstellen.

Wenn

$$\Phi \doteq X \cdot \{\Phi\},$$

so ist

$$\Phi_c \doteq \{\Phi\} \cdot X^{-1},$$

also tatsächlich

$$\Phi_c \cdot \Phi \doteq \{\Phi\} \cdot X^{-1} \cdot X \cdot \{\Phi\} \doteq \{\Phi\}^2.$$

74. Die antisymmetrischen Dyaden Π werden definiert durch

$$\Pi + \Pi_c \doteq 0 \quad \text{oder} \quad \Pi \doteq -\Pi_c.$$

Es sind dies sechs Bedingungen, nämlich daß die symmetrische Dyade erster Art einer antisymmetrischen Dyade Null ist. Also ist eine antisymmetrische Dyade schon durch drei Bestimmungsstücke, und zwar durch ihren Rotor Π_r völlig bestimmt und ersetzbar.

Aus ihrer Definition folgt nach 53.(a)

$$\Pi \doteq \frac{1}{2} (\Pi - \Pi_c) \doteq -\frac{1}{2} \Pi_r \times I.$$

Es ist also

$$\Pi \cdot \mathbf{r} \doteq -\frac{1}{2} \Pi_r \times \mathbf{r},$$

$$\Pi \cdot \Phi \doteq -\frac{1}{2} \Pi_r \times \Phi.$$

Die innere Multiplikation mit einer antisymmetrischen Dyade ist äquivalent der äußeren Multiplikation mit ihrem Rotor.

Jede Dyade von der Form $(\Phi - \Phi_c)$ ist antisymmetrisch, weil

$$\Phi - \Phi_c \doteq -(\Phi - \Phi_c)_c.$$

Da nun identisch

$$\Phi \doteq \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_c) + \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_c),$$

so kann man jede Dyade als die Summe ihrer symmetrischen Dyade erster Art und der komplementären antisymmetrischen Dyade darstellen

$$\Phi \doteq [\Phi] + \Pi$$

oder

$$\Phi \doteq [\Phi] - \frac{1}{2} \Phi_r \times I.$$

Der erste Skalar und der erste Skalar zweiter Ordnung einer antisymmetrischen Dyade sind Null.

Analytische Dyadenrechnung.

75. Setzen wir

$$\Phi \doteq a \mathbf{i}', \mathbf{i} + b \mathbf{j}', \mathbf{j} + c \mathbf{k}', \mathbf{k}$$

und

$$a \mathbf{i}' \doteq a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j} + a_{31} \mathbf{k},$$

so kann man eine komplette Dyade durch elementare Dyaden darstellen, welche die rechteckigen Richtungen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ haben. Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi^s &\stackrel{0}{=} a_{11} \mathbf{i} ; \mathbf{i} + a_{12} \mathbf{i} ; \mathbf{j} + a_{13} \mathbf{i} ; \mathbf{f} \\
&+ a_{21} \mathbf{j} ; \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} ; \mathbf{j} + a_{23} \mathbf{j} ; \mathbf{f} \\
&+ a_{31} \mathbf{f} ; \mathbf{i} + a_{32} \mathbf{f} ; \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{f} ; \mathbf{f}. \\
\Psi^r &\stackrel{0}{=} b_{11} \mathbf{i} \times \mathbf{i} + b_{12} \mathbf{i} \times \mathbf{j} + b_{13} \mathbf{i} \times \mathbf{f} \\
&+ b_{21} \mathbf{j} \times \mathbf{i} + b_{22} \mathbf{j} \times \mathbf{j} + b_{23} \mathbf{j} \times \mathbf{f} \\
&+ b_{31} \mathbf{f} \times \mathbf{i} + b_{32} \mathbf{f} \times \mathbf{j} + b_{33} \mathbf{f} \times \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

Damit

$$\Phi^s \stackrel{0}{=} \Psi^r,$$

muß

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -b_{22} - b_{33}, & a_{22} &= -b_{11} - b_{33}, & a_{33} &= -b_{11} - b_{22}, \\
b_{12} &= a_{21}, & b_{21} &= a_{12}, & b_{13} &= a_{31}, & b_{31} &= a_{13}, & b_{23} &= a_{32}, & b_{32} &= a_{23}.
\end{aligned}$$

Das Achsensystem $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{f}$ ist willkürlich, doch ändern die 9 Koeffizienten ihren Wert bei Wahl eines anderen Koordinatensystems (bei Multiplikation mit einer versorischen Dyade).

Wir schreiben einfach und hinreichend deutlich:

$$\begin{aligned}
\Phi^s &\stackrel{0}{=} a_{11}, a_{12}, a_{13}, & \Psi^r &\stackrel{0}{=} b_{11}, b_{12}, b_{13}, \\
&a_{21}, a_{22}, a_{23}, & &b_{21}, b_{22}, b_{23}, \\
&a_{31}, a_{32}, a_{33}. & &b_{31}, b_{32}, b_{33}.
\end{aligned}$$

Es werden die Koeffizienten der konjugierten Dyade einer skalaren oder rotorischen Dyade Φ durch Vertauschung erhalten:

$$\begin{aligned}
\Phi_c &\stackrel{0}{=} a_{11}, a_{21}, a_{31}, \\
&a_{12}, a_{22}, a_{32}, \\
&a_{13}, a_{23}, a_{33}.
\end{aligned}$$

Für eine symmetrische Dyade ist

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}.$$

In einer antisymmetrischen Dyade ist

$$a_{12} = -a_{21}, \quad a_{23} = -a_{32}, \quad a_{31} = -a_{13}, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.$$

Die symmetrische Dyade erster Art hat die analytische Form

$$\begin{aligned}
[\Phi] &\stackrel{0}{=} a_{11}, & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}), \\
&\frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}), & a_{22}, & \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}), \\
&\frac{1}{2}(a_{31} + a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}), & a_{33}.
\end{aligned}$$

Die komplementäre antisymmetrische Dyade hingegen

$$\begin{aligned} II \stackrel{\circ}{=} & \quad 0, & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}), \\ & \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}), & 0, & \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}), \\ & \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}), & 0. \end{aligned}$$

Der Rotor Φ_r^s hat die Komponenten

$$\Phi_r^s \left\{ \begin{array}{l} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{array} \right.$$

Der Skalar Φ_s^s hat den Wert

$$\Phi_s^s = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Der erste Skalar zweiter Ordnung hat den Wert

$$[\Phi^s]_s^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})^2 + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})^2 + \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13})^2.$$

Der zweite Skalar zweiter Ordnung hat den Wert

$$\{\Phi^s\}_s^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2.$$

Der dritte Skalar Φ_3 ist nichts anderes als die Determinante D der neun Koeffizienten $a_{i\kappa}$ der Dyade Φ .

Da nach § 71 der dritte Skalar eines Produktes zweier Dyaden gleich dem Produkte ihrer dritten Skalare ist, so findet man die Koeffizienten dieses Dyadenproduktes nach derselben Regel, nach welcher die Glieder des Produktes zweier Determinanten gebildet werden.

Wenn

$$\Phi^s \stackrel{\circ}{=} a_{i\kappa} \quad \text{und} \quad \Psi^s \stackrel{\circ}{=} b_{i\kappa},$$

so ist

$$\Phi^s \cdot \Psi^s \stackrel{\circ}{=} \left\{ \begin{array}{l} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}, \\ \quad a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}, \\ \quad \quad a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33}, \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31}, \\ \quad a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}, \\ \quad \quad a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}, \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31}, \\ \quad a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32}, \\ \quad \quad a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} + a_{33} b_{33}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir mit $A_{i\kappa}$ die Unterdeterminante der Koeffizienten $a_{i\kappa}$, welche man erhält, wenn man die Zeile i und die Kolonne κ wegläßt, so hat die reziproke Dyade Φ^{-1} den Wert

$$D \Phi^{-1} \doteq \begin{array}{ccc} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{31} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{array}.$$

Die analytische Darstellung einer linearen Vektorfunktion und ihre Umkehrung ist hiernach

$$\mathbf{v} \doteq \Phi \cdot \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \doteq \Phi^{-1} \cdot \mathbf{v}.$$

$$\begin{array}{ll} v_x = a_{11} r_x + a_{12} r_y + a_{13} r_z & D r_x = A_{11} v_x - A_{12} v_y + A_{13} v_z \\ v_y = a_{21} r_x + a_{22} r_y + a_{23} r_z & D r_y = -A_{21} v_x + A_{22} v_y - A_{23} v_z \\ v_z = a_{31} r_x + a_{32} r_y + a_{33} r_z & D r_z = A_{31} v_x - A_{32} v_y + A_{33} v_z. \end{array}$$

Die Fluxion vektoranalytischer Produkte.

76. Das Produkt eines Skalars s mit einem Vektor $\mathbf{v}$, das skalare, rotorische und die dyadischen Produkte zweier Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ werden in derselben Weise wie algebraische Produkte, nach einer beliebigen skalaren Veränderlichen t differenziert.

Es gelten die wichtigen Regeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(s \mathbf{v}) &\doteq \frac{ds}{dt} \mathbf{v} + s \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &\doteq \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) &\doteq \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 ; \mathbf{v}_2) &\doteq \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} ; \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 ; \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) &\doteq \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}. \end{aligned}$$

Die Summen von solchen Produkten werden nach der algebraischen Distributionsregel differenziert, wobei also der Operator d/dt wie ein skalarer Faktor zu behandeln ist.

3. Das Beschleunigungsfeld.

77. Wir haben im vorigen Kapitel ausgeführt, daß die nach Huyghens als vektorische Fluxion der Geschwindigkeit definierte Beschleunigung stets durch einfache Gesetze bestimmt ist. Nun wollen wir auf die Form dieser Gesetze eingehen. Dieselben haben immer geometrischen Charakter. Nie ist die Beschleunigung eines Körpers als Funktion der Zeit gegeben, wie wir dies in § 33 noch vorausgesetzt haben, sondern sie ist stets durch den Ort des Körpers bestimmt oder wenigstens mitbestimmt.

Oft sind sogar die sonstigen Eigenschaften des Körpers sowie seine Geschwindigkeit so ohne Bedeutung, daß recht verschiedene und verschieden bewegte Körper an demselben Orte dieselbe Beschleunigung zeigen. Ja es kommt sogar vor, daß die Beschleunigung als universelle Funktion des Ortes gegeben ist, d. h. durch ein Gesetz, nach welchem man die Beschleunigung jedes Körpers angeben kann, wenn man nichts von ihm weiß, als seinen Ort.

Einen Raum, in welchem überall die Beschleunigung eines bewegten Körpers als Funktion des Ortes vorausbestimmt ist, nennt man ein gegebenes Beschleunigungsfeld.

Wir wollen nun den Definitionsgleichungen der Bewegung (22. und 26.)

$$(a) \quad \mathbf{g} \doteq \dot{\mathbf{v}} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \doteq \dot{\mathbf{s}}$$

eine solche Form geben, daß sie zur Berechnung von Bewegungen, deren Beschleunigung als Funktion des Ortes $\mathbf{s}$ gegeben sind, geeignet sind.

78. *Die zeitfreie Bewegungsgleichung.* Vereinigen wir die Definitionsgleichungen durch skalare Multiplikation, so ergibt sich die wichtige Gleichung

$$(a) \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \doteq \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s},$$

aus welcher ein Bestimmungsstück, und zwar die Größe der Geschwindigkeit als Funktion des Ortes $\mathbf{s}$ berechnet werden kann, wenn $\mathbf{g}$ als solche gegeben ist.

Die algebraische Form derselben ist:

$$\frac{1}{2} d v^2 = g_x dx + g_y dy + g_z dz,$$

worin xyz die Komponenten des von dem beliebigen festen Nullpunkt gegen den bewegten Körper reichenden Radiusvektor $\mathfrak{s}$, also die Koordinaten dieses kleinen Körpers sind.

79. Ein schief geworfener Körper hat eine stets nach abwärts gerichtete Beschleunigung g_0 .

Es folgt also

$$g_0 \cdot d\mathfrak{s} \doteq -g_0 dh,$$

worin h die Höhe des Körpers ist und nach 78. (a), daß das zeitfreie Gesetz des freien Falles

$$\frac{1}{2} dv^2 = -g_0 dh$$

auch für den schiefen Wurf gilt.

80. Als zweites Beispiel betrachten wir die Bewegung eines (der Schwerebeschleunigung entzogenen) Körpers a im Raume, welcher nach Fig. 21 derart an einer durch die Öse o laufenden und in eine elastische Feder übergehenden Schnur hängt, daß er im Ruhefalle gerade bis o gezogen wird. Es ist dann seine Beschleunigung stets proportional und entgegengerichtet dem Radiusvektor $\mathfrak{s}$, welcher von o bis a reicht

$$(a) \quad g \doteq -\kappa^2 \mathfrak{s},$$

worin κ eine gegebene Zahl. Nach 78. (a) ist

$$\frac{1}{2} d\mathfrak{v}^2 \doteq -\kappa^2 \mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{s} \cdot,$$

$$(b) \quad v^2 = -\kappa^2 s^2 + \text{konst.}$$

Es ist also die Größe der Geschwindigkeit dieses Körpers (bei gegebener Geschwindigkeit in der Anfangslage) nur von der Größe der Entfernung s vom Nullpunkte abhängig.

81. *Das Moment der Geschwindigkeit. Der Flächensatz.* Man bezeichnet das rotorische Produkt $(\mathfrak{s} \times \mathfrak{v})$ des Radiusvektor $\mathfrak{s}$ eines Punktes mit einem für diesen Punkt gegebenen Vektor $\mathfrak{v}$ als das Moment des Vektors $\mathfrak{v}$ in bezug auf den Nullpunkt, von welchem aus $\mathfrak{s}$ gezählt wird. Das Moment

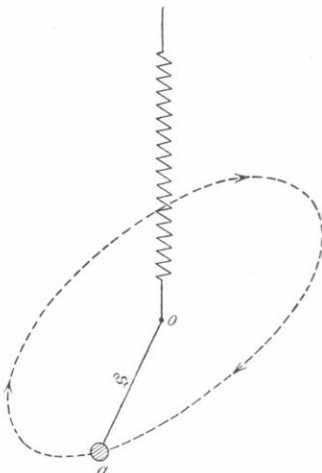


Fig. 21.

der Geschwindigkeit hat eine sehr anschauliche Bedeutung. Der Radius $\mathfrak{s}$ eines bewegten Körpers würde bei gleichförmiger Weiterbewegung seines Pfeiles mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in zwei Sekunden eine Dreiecksfläche durchstreichen, welche der Größe und der Richtung ihrer Normalen nach durch das rotorische Produkt $\mathfrak{s} \times \mathfrak{v}$ dargestellt wird. Nun ist

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{s} \times \mathfrak{v}) \stackrel{=}{=} \dot{\mathfrak{s}} \times \mathfrak{v} + \mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{v}}.$$

Unter Einführung der Definitionsgleichungen 77. (a) erhalten wir, da $\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \stackrel{=}{=} 0$ ist:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{s} \times \mathfrak{v}) \stackrel{=}{=} \mathfrak{s} \times \mathfrak{g}.$$

Ist $\mathfrak{g}$ als Funktion von $\mathfrak{s}$ gegeben, so liefert dieser Flächensatz die zwei Bestimmungsstücke der Richtung von $\mathfrak{v}$. Die zeitfreie Bewegungsgleichung bestimmt die Größe von $\mathfrak{v}$, so daß beide jedenfalls zur Lösung des Problems hinreichen.

82. Besonders brauchbar ist jedoch der Flächensatz für solche Felder, in welchen die Beschleunigung $\mathfrak{g}$ überall in die Richtung des Radiusvektors fällt. Dann nennt man die Bewegung eine Zentralbewegung. Es ist dann $\mathfrak{s} \times \mathfrak{g} = 0$ und der Flächensatz hat die einfache Form

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{s} \times \mathfrak{v}) \stackrel{=}{=} 0.$$

Die vom Radiusvektor pro Zeiteinheit durchstrichene Fläche ist bei einer Zentralbewegung ihrer Richtung und Größe nach konstant. Eine Zentralbewegung verläuft also immer in einer Ebene von konstanter Richtung. Auch der umgekehrte Satz ist gültig. Wenn die vom Radiusvektor pro Sekunde durchstrichene Fläche konstante Richtung und Größe hat, so ist die Bewegung eine Zentralbewegung.

83. Die in § 80. betrachtete Bewegung ist eine Zentralbewegung. Der Körper a bewegt sich also stets in einer ebenen Bahn und der Radius $\mathfrak{s}$ durchstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Die Bewegung läßt sich, wie man nun leicht einsieht, jedenfalls als eine schiefe Parallelprojektion einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachten, findet also mit entsprechend ungleichförmiger Geschwindigkeit in einer elliptischen Bahn statt, deren Mittelpunkt im Nullpunkt o liegt. Wir werden dieses Beispiel weiter unten völlig durchrechnen.

84. *Krümmungsradius der Bahn.* Es soll nun noch die Form der Bahn des in einem beliebig gegebenen Beschleunigungsfelde bewegten Körpers, und, da ihre Richtung stets bekannt ist, insbesondere die Größe des Krümmungsradius bestimmt werden. Er liegt nach 28. in der Ebene der Beschleunigung und Geschwindigkeit und steht notwendig auf letzterer senkrecht. Letztere Beziehung liefert auch unter Zuziehung der Definitionsgleichungen 29. (a)

$$\mathbf{v} \perp \dot{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \perp \dot{\mathbf{v}}$$

die Größe des Krümmungsradius r .

Es ist

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \equiv 0.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} \equiv 0$$

oder

$$(a) \quad v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{g} \equiv 0.$$

Eine algebraische Form dieser Gleichung ist:

$$r = - \frac{v^2}{g \sin(g, v)}.$$

Die Projektion der Beschleunigung $\mathbf{g}$ auf den Krümmungsradius $\mathbf{r}$ hat nach 44. den Wert

$$\frac{1}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}) \equiv - \frac{1}{r} v^2.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der in 30. angeführten Gleichung für die Zentralbeschleunigung einer Kreisbewegung.

Es ist zu beachten, daß man bei einer weiteren Differentiation der Gleichung 84. (a) nach der Zeit die Fluxion des Krümmungsradius nicht mehr der Geschwindigkeit gleichsetzen darf, sondern dieselbe wird durch die Krümmungsänderung und Torsion der Bahnkurve mit bestimmt.

Der Gradient eines skalaren Feldes. Die Dyade eines Vektorfeldes.

85. *Kontinuierliche Verteilung eines Skalars.* Ein Skalar ist eine benannte Zahl. Da alle reellen Zahlen sich durch die Punkte einer Linie darstellen lassen, ist es nicht leicht, jedem Punkte eines Raumes einen anderen Wert des Skalars zuzuschreiben, sondern es lassen sich bei kontinuierlicher Verteilung desselben stets Flächen angeben, in welchen der Skalar

konstanten Wert hat. Diese nennt man Niveauflächen. Man erhält stets unendlich viele Niveauflächen, jede ist durch einen anderen Wert des Skalars charakterisiert. Zwei verschiedene Flächen, in welchen der Skalar denselben Wert hat, betrachtet man als Blätter derselben Niveaufläche. Diese können sich schneiden oder berühren, nie aber zwei Niveauflächen, in welchen der Skalar verschiedene Werte hat. Greifen wir nur jene Niveauflächen heraus, deren Skalare S sich um die konstanten Differenzen δS unterscheiden, so wird durch diese der Raum in dünne Schichten, Niveauschichten, zerlegt, deren Dicke sehr verschieden sein kann.

Von Interesse sind ferner die Orthogonaltrajektorien der Niveauflächen; das sind krumme Linien, welche alle Niveauflächen senkrecht durchschneiden.

Beispiele von skalaren Verteilungen sind: die Temperaturverteilung in einem ungleichförmig erwärmten Körper, die Verteilung des Salzgehaltes in einer ungleichmäßigen Lösung usw.

86. Der Gradient einer gleichförmigen Skalarenverteilung. Gleichförmig nennt man die Verteilung eines Skalars, wenn der Unterschied der Werte S und S_0 des Skalars am Anfangs- und Pfeilpunkt einer beliebigen Strecke $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ nicht von der Lage des Anfangspunktes, sondern nur von Länge und Richtung der Strecke abhängt. Hieraus folgt sofort, daß der Skalar in der ganzen Erstreckung einer Tangente an eine Niveaufläche konstanten Wert hat, daß also alle Niveauflächen Ebenen sind, ferner daß sie parallele Ebenen sind und daß die Niveauschichten überall dieselbe Dicke haben.

Ferner folgt, daß sich aus einer solchen Verteilung ein Vektor $\mathbf{v}$ ableiten läßt, welchen man den Gradienten derselben nennt, und welcher durch die Gleichung

$$(a) \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \stackrel{\Delta}{=} S - S_0$$

völlig bestimmt und nicht überbestimmt ist, wenn $\mathbf{r}$ eine beliebige Strecke des Feldes ist. Diese skalare Gleichung hat den Wert von drei algebraischen Gleichungen, weil man sie auf drei nicht in derselben Ebene liegende Strecken anwenden kann, wodurch $\mathbf{v}$ bestimmt ist. Sind diese Strecken rechteckig, so gilt:

$$\mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} \frac{S_1 - S_0}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0} + \frac{S_2 - S_0}{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0} + \frac{S_3 - S_0}{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0}.$$

Der Gradient $\mathbf{v}$ steht auf den Niveauflächen senkrecht, da das skalare Produkt desselben mit einer in der Niveaufläche liegenden Strecke Null sein muß. Die Größe des Gradienten ist der Dicke der Niveauschichten verkehrt proportional. Für eine in die Richtung des Gradienten fallende Strecke, wie es die Dicke der Niveauschichten ist, nimmt nämlich die Gleichung 86. (a) algebraische Bedeutung an.

87. *Der Gradient einer allgemeinen skalaren Verteilung.* Jeder unendlich kleine Raumteil einer allgemeinen skalaren Verteilung kann als eine gleichförmige Verteilung angesehen werden, durch welche ein Gradient $\mathbf{v}$ nach der Gleichung

$$(a) \quad \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \triangleq dS$$

bestimmt ist. Aber dieser Vektor $\mathbf{v}$ hat für jeden Raumteil eine andere Richtung und Größe. Es ist hierdurch eine Vektorverteilung bestimmt. Der Gradient steht überall auf den Niveauflächen senkrecht und seine Größe ist in jedem Punkte des Raumes der Dicke der Niveauschichten verkehrt proportional. Man bezeichnet den Gradienten $\mathbf{v}$ als Ableitung aus der Verteilung des Skalars S durch das Symbol:

$$\mathbf{v} \triangleq \text{grad } S.$$

Nach Gleichung 87. (a) ist der Gradient $\mathbf{v}$ als die Derivation des Skalars S nach dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ zu bezeichnen.

88. *Komponenten des Gradienten.* Es sei S als Funktion der Koordinaten gegeben. Betrachten wir die Änderung von S auf einem Wege, dessen Form dadurch gegeben ist, daß die Koordinaten x, y, z der Punkte dieses Weges als Funktion einer skalaren Hilfsvariablen t gegeben sind. Hiermit hängt auch S nur von t ab und die totale Änderung dS , welche der Änderung dt entspricht, ist

$$(a) \quad dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz,$$

worin dx, dy, dz die totalen Änderungen der nur von t abhängenden Koordinaten sind. Dieselben sind aber die Komponenten der Strecke $d\mathbf{r}$, um welche der betrachtete Punkt sich längs des gegebenen Weges verschoben hat. Es fällt also Gleichung 88. (a) mit 87. (a) zusammen und die Komponenten

des Gradienten müssen gleich den partiellen Ableitungen der Funktion S der Koordinaten nach diesen sein.

$$v_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Deshalb wird der Gradient einer Funktion der skalaren Verteilung s nach der Differentiationsregel einer sekundären Funktion gebildet durch

$$(b) \quad \text{grad } f(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{df(s)}{ds} \text{grad } s.$$

89. Der Hamiltonsche Operator. Man kann viele vektorische Differentiationen durch symbolische vektorische Multiplikationen ausführen, was nicht nur die Rechnung erleichtert, sondern auch diese Derivationen in einen sachgemäßen Zusammenhang bringt.

Der Hamiltonsche Differentialoperator ∇ ist ein fingierter Vektor, dem deshalb keine geometrische Richtung oder Größe zugeschrieben werden kann, weil er definiert ist durch die Eigenschaft

$$(a) \quad \nabla; \mathbf{r} \stackrel{\Delta}{=} I,$$

worin $\mathbf{r}$ der von einem beliebigen festen Nullpunkt aus gerechnete Ortsvektor ist. Es ist ganz unmöglich die Einheitsdyade I als lineare Dyade darzustellen, also wird Unmögliches von dem Vektor ∇ verlangt. Er hat also kein geometrisches Bild, läßt sich nicht als eine Strecke vorstellen. Sonst aber kann dieser nicht reelle Vektor fast wie ein gewöhnlicher Vektor in der Rechnung behandelt werden und stellt merkwürdigerweise die Relationen zwischen den (skalaren, vektorischen, dyadischen) Funktionen des Ortsvektors und deren Derivationen her.

Es ist nach der Definition 89.(a)

$$\mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} \nabla; \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \stackrel{\Delta}{=} \nabla S.$$

Hierin wurde

$$S \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

gesetzt. Es ist also $\mathbf{v}$ der Gradient einer gleichförmigen Verteilung S . Da jede skalare Verteilung in ihren kleinsten Raumteilen gleichförmig ist, so gilt allgemein

$$(b) \quad \text{grad } S \stackrel{\Delta}{=} \nabla S.$$

90. Analytische Darstellung des Hamiltonschen Operators.

Betrachtet man das Differentiationssymbol $\partial/\partial x$ als einen fingierten skalaren Faktor (skalaren Operator) und sind $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ drei aufeinander senkrechte Vektoren von den Richtungen $x y z$ und den Größen 1, so läßt sich der Hamiltonsche Operator, ohne daß ein Rechenfehler zu befürchten ist, durch die fingierte vektorische Summe darstellen:

$$\nabla \triangleq \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Da nämlich

$$\mathbf{r} \triangleq \mathbf{i} x + \mathbf{j} y + \mathbf{k} z,$$

so ist

$$\begin{aligned} \nabla; \mathbf{r} &\triangleq \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}; \mathbf{i} x + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}; \mathbf{j} y + \dots \\ &\quad + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}; \mathbf{i} x + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Da nun

$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} x = 0 \text{ usw.},$$

so ist tatsächlich

$$\nabla; \mathbf{r} \triangleq \mathbf{i}; \mathbf{i} + \mathbf{j}; \mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{k} \triangleq I.$$

91. Wir können nun in sehr einfacher Weise die Größe der Komponenten eines Gradienten berechnen. Es ist

$$\mathbf{v} \triangleq \nabla S \triangleq \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) S \triangleq \mathbf{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial S}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial z},$$

also ist

$$v_x = \frac{\partial S}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial S}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

92. Nach der Distributionsregel folgt:

$$\nabla (S_1 + S_2) \triangleq \nabla S_1 + \nabla S_2.$$

Der Gradient der algebraischen Summe zweier im selben Felde gegebener skalaren Verteilungen ist gleich der vektorischen Summe der Gradienten dieser Verteilungen.

93. Kontinuierliche Verteilung eines Vektors. Einen Punkt des Raumes bezeichnen wir durch den Ortsvektor $\mathbf{r}$, welcher von einem beliebigen aber festen Nullpunkt zu dem betrachteten Punkte reicht. Ist für jeden Punkt $\mathbf{r}$ des Raumes ein Vektor $\mathbf{v}$ seiner Größe und Richtung nach gegeben, und ist

diese Vektorverteilung kontinuierlich, so lassen sich zweifach unendlich viele Linien (Vektorlinien) angeben, deren Tangentialrichtung überall die Richtung des Vektors $\mathbf{v}$ angibt. Schneiden sich zwei Vektorlinien, so betrachtet man sie als Zweige derselben Vektorlinie. In dem Schnittpunkte muß der Vektor die Größe Null haben, da er nicht zwei verschiedene Richtungen haben kann. Eine sehr dünne Röhre, deren Oberfläche ganz von Vektorlinien gebildet wird, heißt eine Vektorröhre.

Beispiele von Vektorverteilungen sind: Die Geschwindigkeitsverteilung in einer beliebig bewegten Flüssigkeit, z. B. im Meere, die Verteilung der magnetischen Kraft in der Umgebung und im Innern von Magneten und galvanischen Strömen usw.

94. Die Dyade einer homogenen Vektorverteilung. Homogen nennt man eine Vektorverteilung, wenn der Unterschied der Werte $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}_0$ des Vektors am Anfangs- und Pfeilpunkte einer beliebigen Strecke $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ nicht von der Lage der Anfangspunkte $\mathbf{r}_0$, sondern nur von der Länge und Richtung der Strecke abhängt. Hieraus folgt, daß $\mathbf{v}$ eine lineare Vektorfunktion von $\mathbf{r}$ ist, da nur diese die distributive Eigenschaft:

$$\Phi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \stackrel{a}{=} \Phi \cdot \mathbf{r} - \Phi \cdot \mathbf{r}_0 \stackrel{a}{=} \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$$

hat. Die vektorische Gleichung

$$(a) \quad \Phi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \stackrel{a}{=} \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$$

hat den Wert von neun algebraischen Gleichungen, weil man sie auf drei nicht koplanare Strecken $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ anwenden kann. Sind die drei zugehörigen Werte $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ gegeben, so ist nach 55. die Dyade Φ des homogenen Vektorfeldes bestimmt. Sind diese Strecken rektangulär so gilt:

$$\Phi \stackrel{a}{=} \frac{1}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0} ; (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + \frac{1}{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0} ; (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0) + \frac{1}{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0} ; (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_0).$$

95. Die Dyade einer allgemeinen Vektorverteilung. Jeder unendlich kleine Raumteil eines allgemeinen Vektorfeldes $\mathbf{v}$ kann als eine homogene Vektorverteilung angesehen werden, durch welche eine Dyade Φ nach der Gleichung

$$d\mathbf{r} \cdot \Phi \stackrel{a}{=} \Phi_c \cdot d\mathbf{r} \stackrel{a}{=} d\mathbf{v}$$

bestimmt ist. Aber diese Dyaden haben für jeden Raumteil eine andere Größe, Form und Lage. Es ist hierdurch eine Verteilung der Dyade Φ bestimmt.

Ebensogut kann man aber den linearen Zusammenhang der Änderungen $d\mathbf{v}$ und $d\mathbf{r}$ durch rotorische Dyaden beschreiben.

96. Auswertung der derivierten Dyaden. Wir bedienen uns wieder des nicht reell geometrischen Vektors ∇ (des Hamiltonschen Operators), welchen wir definiert haben durch

$$\nabla; \mathbf{r} \stackrel{a}{=} I.$$

Es ist

$$\Phi \stackrel{a}{=} I \cdot \Phi \stackrel{a}{=} (\nabla; \mathbf{r}) \cdot \Phi \stackrel{a}{=} \nabla; (\mathbf{r} \cdot \Phi) \stackrel{a}{=} \nabla; \mathbf{v}.$$

Wir haben hierbei von der Assoziationsregel

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \cdot \Phi \stackrel{a}{=} \mathbf{a}; (\mathbf{b} \cdot \Phi)$$

Gebrauch gemacht, und ferner

$$\mathbf{v} \stackrel{a}{=} \mathbf{r} \cdot \Phi$$

gesetzt. Es ist also Φ die konstante derivierte Dyade einer homogenen Vektorverteilung $\mathbf{v}$ und da jede Vektorverteilung in dem bei Derivationen in Betracht kommenden kleinen Raumgebiete homogen ist, so ist allgemein die derivierte Dyade Φ einer beliebigen Vektorverteilung $\mathbf{v}$ gleich

$$\Phi \stackrel{a}{=} \nabla; \mathbf{v}.$$

Ebenso erhält man die konjugierte derivierte Dyade

$$\Phi_c \stackrel{a}{=} \mathbf{v}; \nabla.$$

Es ist

$$d\mathbf{v} \stackrel{a}{=} d\mathbf{r} \cdot \nabla; \mathbf{v} \stackrel{a}{=} \mathbf{v}; \nabla \cdot d\mathbf{r}.$$

Von großer Wichtigkeit sind auch der Rotor und Skalar dieser derivierten Dyaden

$$\Phi_s \stackrel{a}{=} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \Phi_r \stackrel{a}{=} \nabla \times \mathbf{v},$$

worauf wir weiter unten zurückkommen. Ferner sind die zugeordneten rotorischen Dyaden von Interesse

$$\Phi^r \stackrel{a}{=} \nabla \times \mathbf{v} \stackrel{a}{=} \mathbf{v}; \nabla - \nabla \cdot \mathbf{v} I,$$

$$\Phi_c^r \stackrel{a}{=} \mathbf{v} \times \nabla \stackrel{a}{=} \nabla; \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{v} I.$$

Besondere Bedeutung haben endlich die symmetrischen Dyaden

$$2[\nabla; \mathbf{v}] \stackrel{a}{=} \nabla; \mathbf{v} + \mathbf{v}; \nabla$$

$$2[\nabla \times \mathbf{v}] \stackrel{a}{=} \nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \nabla$$

und der erste Skalar zweiter Ordnung $[\nabla; \mathbf{v}]_s^2$.

97. *Analytische Darstellung der derivierten Dyaden.* Es seien die Komponenten $v_x v_y v_z$ der nicht linearen Vektorfunktion $\mathbf{v}$ des Ortsvektors $\mathbf{r}$ gegeben, dessen Komponenten $x y z$ sind. Dann ist

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz, \\ dv_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz, \\ dv_z &= \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Da $dx dy dz$ die Komponenten von $d\mathbf{r}$ sind, so haben die Koeffizienten $a_{i\kappa}$ der variablen derivierten Dyaden Φ folgende Werte:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial v_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z}, & \frac{\partial v_y}{\partial z}, & \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{matrix} & \Phi_c = \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{\partial v_x}{\partial y}, & \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x}, & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}, & \frac{\partial v_z}{\partial y}, & \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{matrix} \end{aligned}$$

Je nachdem die mit diesen Koeffizienten behafteten Einheitsdyaden die skalaren $\mathbf{i}; \mathbf{i} \mathbf{i}; \mathbf{j}$ usw. oder die rotorischen $\mathbf{i} \times \mathbf{i}; \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ usw. sind, ergeben sich die skalaren oder rotorischen derivierten Dyaden Φ^s oder Φ^r .

Sind die Zahlen $v_x v_y v_z$ als Funktionen der Koordinaten gegeben, so haben diese Koeffizienten angebbare Werte, welche ebenfalls Funktionen der Koordinaten sind.

Jede der derivierten Dyaden einer Vektorverteilung ist also ein vollständig reelles auswertbares Gebilde.

Die symmetrische Dyade hat die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} [\Phi^s] &= \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c) = \begin{matrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), & \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), & \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{matrix} \end{aligned}$$

Die komplementäre antisymmetrische Dyade wird meist nach 74. vertreten durch den deshalb sehr wichtigen Rotor Φ_r der derivierten Dyaden, dessen Komponenten sind:

$$(\Phi_r^s)_x = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

$$(\Phi_r^s)_y = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$(\Phi_r^s)_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Wir wollen jedoch den Begriff dieses Rotors nicht auf diese indirekte Weise, sondern durch unmittelbare Anschauung gewinnen, was wir erst viel weiter unten durchführen können.

Auch der erste Skalar

$$\Phi_s^s = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

und der erste Skalar zweiter Ordnung

$$[\Phi]_s^2 = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2$$

werden durch wichtige analytische Formen bestimmt.

98. Es folgt nach der Distributionsregel:

$$\nabla; (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{a}{=} \nabla; \mathbf{v}_1 + \nabla; \mathbf{v}_2.$$

Die derivierte Dyade der Summe zweier im selben Felde gegebenen Vektorverteilungen ist gleich der Summe der derivierten Dyaden derselben.

Das Vektorpotential einer Dyadenverteilung. Das skalare Potential einer Vektorverteilung.

99. *Kontinuierliche Verteilung einer Dyade.* Ist für jeden Punkt $\mathbf{r}$ des Feldes eine Dyade Φ ihrer Größe, Form und Lage nach gegeben, so muß, damit diese Verteilung kontinuierlich sei, zunächst der Rotor Φ_r der Dyade kontinuierlich verteilt sein. Stellen wir dann die symmetrische Dyade $[\Phi]$ in der Normalform dar:

$$[\Phi] \stackrel{a}{=} a \mathbf{i}, \mathbf{i} + b \mathbf{j}, \mathbf{j} + c \mathbf{k}, \mathbf{k},$$

so müssen die Zahlen $a b c$ kontinuierlich verteilt sein und die rectangulären Einheitsvektoren $\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}$ ebenfalls. Die Vektor-

linien dieser Vektoren müssen also drei Linienscharen bilden, welche überall aufeinander senkrecht stehen und deren Tangentialrichtungen die von Ort zu Ort variablen Achsenrichtungen der Dyade geben.

Beispiele von Dyadenverteilungen sind: Die Verteilung der elastischen Deformation eines beliebig bewegten Mediums, die Verteilung der dielektrischen Eigenschaften in einem inhomogenen, z. B. ungleichförmig erwärmten Kristall usw.

100. Das Vektorpotential einer Dyade. Keineswegs in allen, aber in sehr wichtigen Fällen läßt sich eine gegebene Dyadenverteilung Φ darstellen als die derivierte Dyade eines Vektors $\mathbf{v}$, den man dann das Vektorpotential der Dyade nennt

$$\Phi \stackrel{\circ}{=} \nabla ; \mathbf{v}.$$

Dann ist

$$d\mathbf{v} \stackrel{\circ}{=} d\mathbf{r} \cdot \Phi$$

und wenn wir über einen vom Orte $\mathbf{r}_1$ bis $\mathbf{r}_2$ reichenden Weg integrieren

$$(a) \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \Phi.$$

Soll eine Dyade Φ schon durch die Verteilung eines Vektors $\mathbf{v}$, dessen Derivation sie ist, bestimmt sein, so muß also das Linienintegral derselben für jeden geschlossenen Weg im Felde gleich Null sein.

Eine andere Form dieser Bedingung ergibt sich aus der Beziehung $\nabla \times \nabla \stackrel{\circ}{=} 0$

$$(b) \quad \nabla \times \Phi \stackrel{\circ}{=} \nabla \times \nabla ; \mathbf{v} \stackrel{\circ}{=} 0.$$

Sind die neun Koeffizienten $a_{i\kappa}$ der Dyade als Funktionen der Koordinaten gegeben, so soll

$$\begin{aligned} \Phi \stackrel{\circ}{=} a_{11}, a_{12}, a_{13} &\stackrel{\circ}{=} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} &\stackrel{\circ}{=} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} &\stackrel{\circ}{=} \frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

sein.

Eine Dyadenverteilung hat also nur dann ein Vektorpotential, so daß sie schon durch die Verteilungen von drei Zahlen bestimmt ist, wenn

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial y} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x} = \frac{\partial a_{11}}{\partial z} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x} = \frac{\partial a_{12}}{\partial z} - \frac{\partial a_{32}}{\partial y} = 0 \text{ usw.}$$

Das heißt, wenn die Koeffizienten der Dyade

$$(b) \quad \nabla \times \Phi \stackrel{a}{=} 0$$

gleich Null sind, also auch diese selbst gleich Null ist.

101. Orthogonalflächen einer Vektorverteilung. Keineswegs bei allen, aber bei manchen wichtigen Vektorverteilungen lassen sich Orthogonalflächen angeben, welche alle Vektorlinien senkrecht schneiden. Es können auch in einem beschränkten Raumgebiete einer Vektorverteilung Orthogonalflächen möglich sein, während in den übrigen Gebieten die Vektorlinien keine Orthogonalflächen haben. Die Bedingung für das Vorhandensein von Orthogonalflächen wollen wir erst w. u. anführen.

102. Die Potentialverteilung. Unter den Vektorverteilungen, welche Orthogonalflächen haben, gibt es noch viel speziellere, aber sehr wichtige Verteilungen, welche sich als die Verteilung des Gradienten eines Skalars S darstellen lassen. Alle drei Bestimmungsstücke des Vektors können dann für alle Punkte des Raumes gefunden werden, wenn nur der Skalarwert S in denselben bekannt ist. In diesem Falle nennt man den Skalar S das Potential des Vektors $\mathbf{v}$. Es ist dann nach Gleichung 87. (a)

$$dS \stackrel{a}{=} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v},$$

und wenn wir über eine beliebige vom Punkte $\mathbf{r}_1$ bis $\mathbf{r}_2$ reichende Linie integrieren

$$(a) \quad S_2 - S_1 \stackrel{a}{=} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}.$$

Soll ein Vektor $\mathbf{v}$ schon durch die Verteilung einer Zahl S bestimmt sein, deren Gradient er ist, so muß also das Linienintegral desselben für jede geschlossene Linie im Felde Null sein.

103. Die Bedingung dafür, daß eine gegebene Vektorverteilung $\mathbf{v}$ ein Potential hat, folgt wieder aus $\nabla \times \nabla \stackrel{a}{=} 0$

$$(b) \quad \nabla \times \mathbf{v} \stackrel{a}{=} \nabla \times \nabla S \stackrel{a}{=} 0.$$

Da

$$v_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial S}{\partial z}$$

sein soll und jedenfalls

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = 0$$

ist, falls S als Funktion der Koordinaten denkbar sein soll, so muß

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0.$$

Dies sind die Bedingungen dafür, daß der Vektor $\mathbf{v}$ als Gradient eines Skalars darstellbar ist. Dieselben lassen sich auch in der Form schreiben

$$\Phi_r \triangleq \nabla \times \mathbf{v} \triangleq 0.$$

Es muß also der Rotor der derivierten Dyade Null sein, damit $\mathbf{v}$ ein skalares Potential habe. Die derivierte Dyade eines Gradienten ist also immer symmetrisch und umgekehrt.

104. Können zwei Vektorverteilungen $\mathbf{g}_1$ und $\mathbf{g}_2$ als Gradienten der Potentiale P_1 und P_2 dargestellt werden, so hat auch ihre vektorische Summe ein Potential P , welches die algebraische Summe der Potentiale P_1 und P_2 ist. Es ist

$$\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \triangleq \nabla P_1 + \nabla P_2 \triangleq \nabla (P_1 + P_2) \triangleq \nabla P.$$

105. *Das Potential eines Beschleunigungsfeldes.* Wenn eine Beschleunigungsverteilung, wie dies oft vorkommt, die spezielle Eigenschaft hat, durch ein Potential P bestimmt zu sein, so gilt für jede unendlich kleine Strecke $d\mathbf{s}$ die Gleichung

$$(a) \quad \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} \triangleq dP.$$

Dann gewinnt die zeitfreie Bewegungsgleichung die Form

$$\frac{1}{2} dv^2 = dP,$$

welche wir sogleich algebraisch schreiben konnten, und deren Integral

$$(b) \quad \frac{1}{2} v^2 - P = \text{konst.}$$

ist. Es ist dann bei gegebenen Anfangsbedingungen die Größe der Geschwindigkeit nicht nur durch den Ort, sondern sogar schon durch den Potentialwert bestimmt. Jedesmal wenn der

Körper durch dieselbe Niveaufläche des Potentials tritt, hat seine Geschwindigkeit denselben Wert, gleichgültig, welche Bahnen der Körper beschreibt.

Die in 80. betrachtete Bewegung eines Körpers, der durch ein elastisches Band mit einem Punkte verbunden ist, ist ein Beispiel der Verteilung einer Beschleunigung, für welche sich ein Potential angeben läßt, und zwar muß

$$P = -\frac{1}{2} \kappa^2 s^2 + \text{konst.}$$

sein. Hieraus folgt nämlich

$$dP = -\kappa^2 \hat{s} \cdot d\hat{s},$$

und da

$$\mathbf{g} = -\kappa^2 \hat{s}$$

ist, so ist tatsächlich Gleichung 105. (a) erfüllt. Führt man diesen Potentialwert in Gleichung 105. (b) ein, so ergibt sich die Schlußgleichung 80. (b).

Unter Zugrundelegung des Flächensatzes könnten wir nun diese Zentralbewegung völlig berechnen. Wir führen aber diese Rechnung lieber für eine viel wichtigere Zentralbewegung aus, deren Beschleunigung ebenfalls ein Potential hat.

106. Die planetarische Bewegung. Das Potential P des Beschleunigungsfeldes sei gegeben durch

$$P = \frac{k}{r},$$

worin k eine Konstante und r die Entfernung vom Nullpunkt ist. Die Niveauflächen sind konzentrische Kugeln, der Gradient dieses Potentials, d. i. die Beschleunigung $\mathbf{g}$ des bewegten Körpers hat also radiale Richtung und die Bewegung ist eine Zentralbewegung.

Die Größe der Geschwindigkeit bestimmt sich nach 105. (b) durch

$$(a) \quad v^2 = \frac{2k}{r} + c,$$

worin c eine Konstante ist, deren Wert bestimmt ist, wenn die Größe der Geschwindigkeit und der Entfernung des Körpers, vom Zentrum für irgend einen Zeitpunkt gegeben ist.

Bezeichnen wir mit α den Polarwinkel des Radius r in der Bahnebene, so sind $r\dot{\alpha}$ und $\dot{r}$ die Komponenten der Geschwindigkeit und unsere Gleichung erhält die Form:

$$r^2(\dot{\alpha})^2 + (\dot{r})^2 = \frac{2k}{r} + c,$$

während der Flächensatz die Form

$$r^2 \dot{\alpha} = C$$

hat. C ist eine Konstante, welche ebenfalls durch die Anfangsbedingungen und insbesondere durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt wird. Eliminieren wir $\dot{\alpha}$, so ergibt sich

$$r \cdot \dot{r} = \pm (cr^2 + 2kr - C^2)^{1/2}.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt die zeitfreie Gleichung der Bahnkurve:

$$\pm r d\alpha (cr^2 + 2kr - C^2)^{1/2} = C dr,$$

deren Integral

$$\frac{C^2}{r} = k + (C^2 c + k^2)^{1/2} \cdot \cos(\alpha + \text{konst.})$$

die Gleichung eines Kegelschnitts ist, dessen Brennpunkt im Nullpunkte liegt. Für $c < 0$ kann nach 106. (a) der Radius r niemals über einen leicht zu bestimmenden Betrag wachsen und die Bahn muß also elliptisch sein. Wenn aber die Anfangsgeschwindigkeit groß ist, so daß $c \geq 0$ ist, so kann r unendlich werden und die Bahn ist dann parabolisch beziehungsweise hyperbolisch.

4. Die partiellen Beschleunigungen.

107. *Die Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung* sind nicht selbst Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen des Körpers, denn dieser kann jederzeit nur eine Geschwindigkeit und nur eine Beschleunigung haben, sondern sie sind die Projektionen dieser physikalischen Vektoren auf die Koordinaten und haben also nur geometrische, keine physikalische Bedeutung.

Es können drei verschiedene im selben Felde mögliche Geschwindigkeitsverteilungen $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in der für jeden Punkt des Feldes gültigen Beziehung stehen

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

man nennt dann die erste Verteilung die Summe der beiden andern. Gleichzeitig können aber diese verschiedenen Geschwindigkeitsverteilungen im selben Felde nicht bestehen.

108. Eine Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, die ein Körper aus zwei verschiedenen Ursachen gleichzeitig hat, gibt es nicht. Denn erstens kann derselbe überhaupt nicht gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten haben, und zweitens gibt es nicht zwei verschiedene Ursachen der Geschwindigkeit eines Körpers, sondern diese ist stets nur durch die Geschwindigkeit in einer früheren Zeit und durch die Beschleunigung bestimmt.

Man bezeichnet zwar die Wirbelringe und Divergenzgebiete (siehe weiter unten) einer Geschwindigkeitsverteilung oft als die Ursachen derselben, einerseits weil man die Verteilung berechnen kann, wenn ihre Wirbel und Quellen bekannt sind, andererseits weil diese in anderen (elektrischen und magnetischen) Verteilungen wirklich die Ursache der Verteilung sind, nämlich selbst durch direkte Naturgesetze bestimmt sind. Nicht so für Geschwindigkeitsverteilungen. Wenn auch das Feld zweier Wirbelringe gleich der Summe ihrer Einzelfelder ist, so ist doch die Geschwindigkeit eines Punktes des Feldes nicht die Summe zweier Geschwindigkeiten, welche einzeln durch die beiden Wirbelringe verursacht werden.

109. Geometrische Addition von Relativgeschwindigkeiten. Man nennt die vektorische Differenz der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zweier Körper ihre Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Damit man kurzweg von der Geschwindigkeit eines Körpers sprechen kann, muß derselbe sehr klein sein oder seine Teile müssen alle dieselbe Geschwindigkeit haben.

Die Relativgeschwindigkeiten sind sehr wichtig, weil wir stets nur die relative Lage zweier Körper und also stets nur Relativgeschwindigkeiten messen können und von keinem Körper, selbst nicht vom Erdboden wissen können, ob wir berechtigt sind, ihm die Geschwindigkeit Null zuzuschreiben.

Hat ein Körper gegen zwei andere Körper die Relativgeschwindigkeiten $\mathbf{v}'$ und $\mathbf{v}''$, so folgt unmittelbar aus der geometrischen Definition derselben, daß diese gegeneinander die Relativgeschwindigkeit $(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}')$ haben.

Hat ein Körper gegen einen zweiten Körper die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_a$ und dieser gegen einen dritten Körper die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_b$, so hat der erste gegen den dritten Körper die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$, welche sich aus einfachem geometrischen Grunde bestimmt durch

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b.$$

Diese rein geometrische Operation kann man als die Zusammensetzung von Relativgeschwindigkeiten bezeichnen.

Eine Polarexpedition bewege sich z. B. mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_a = 3$ km pro Stunde auf einer Treibeisfläche in nördlicher Richtung, was durch direkte Ausmessung des Weges auf der Eisfläche mittels Zyklometern oder Triangulierungen unter Zuhilfenahme des Kompasses konstatiert werden kann. Nach Aufhellung des Himmels oder Sichtbarwerden des Landes bemerkt dieselbe, daß ihre geographische Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ während dieser Zeit östlich gerichtet war und $\mathbf{v} = 4$ km pro Stunde betrug. Hieraus folgt, daß das Treibeis gegen das Land sich verschob und zwar gegen dasselbe die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_b = 5$ km in südöstlicher Richtung hatte.

110. Geometrische Addition von Relativbeschleunigungen. Die vektorische Fluxion der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ zweier Körper, deren Relativgeschwindigkeiten gegen einen dritten Körper $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_1$ seien, nennt man ihre Relativbeschleunigung $\mathbf{g}$. Da

$$\mathbf{g} \doteq \dot{\mathbf{v}} \doteq \dot{\mathbf{v}}_2 - \dot{\mathbf{v}}_1 \doteq \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1,$$

so ist die Relativbeschleunigung zweier Körper gleich der vektorischen Differenz ihrer Relativbeschleunigungen gegen einen dritten Körper.

Ferner folgt

$$\mathbf{g}_2 \doteq \mathbf{g} + \mathbf{g}_1.$$

Das heißt die Relativbeschleunigung $\mathbf{g}_2$ des ersten und dritten Körpers ist gleich der vektorischen Summe der Relativbeschleunigungen $\mathbf{g}$ (des ersten und zweiten) und $\mathbf{g}_1$ (des zweiten und dritten Körpers). Diese rein geometrische Operation kann man als die Zusammensetzung von Relativbeschleunigungen bezeichnen.

111. Addition partieller Beschleunigungen. Eine wohl von dieser Addition der Relativbeschleunigungen zu unterscheidende

wichtige und keineswegs vorauszusehende physikalische Tatsache ist die Addition zweier durch zwei verschiedene Umstände bestimmten partiellen Beschleunigungen desselben Körpers.

Man kann die Umstände, welche die wirkliche Beschleunigung bestimmen, oft in zwei Gruppen teilen, von welchen jede eine andere Beschleunigung g_1 und g_2 bestimmen würde, wenn sie allein vorhanden wäre, was aber nicht der Fall ist. Diese partiellen Beschleunigungen g_1 und g_2 sind also niemals vorhanden, noch weniger hat sie der Körper gleichzeitig, sie sind überhaupt keine Beschleunigungen, sondern Vektoren anderer Art, mit Hilfe deren sich aber einfach aussagen läßt, welche wirkliche Beschleunigung der Körper hat.

Es brauchte nun zwischen diesen partiellen und der wirklichen Beschleunigung überhaupt kein Zusammenhang zu bestehen, noch weniger kann man a priori sagen, daß dieser Zusammenhang ein universeller ist, sondern wenn dieselben partiellen Beschleunigungen g_1 und g_2 eines Körpers einmal durch elastische Umstände, ein zweites Mal durch magnetische Umstände gefordert würden, so könnte die wirkliche Beschleunigung des Körpers in beiden Fällen ganz verschieden sein.

Es ist dies aber nicht so, sondern es besteht das Gesetz, daß die wirkliche Beschleunigung die vektorische Summe aller partiellen Beschleunigungen ist.

Alle Beobachtungen bestätigen dieses Naturgesetz, dessen Einfachheit eine wichtige Stütze der Beschleunigungstheorie bildet, und dessen Gültigkeit als eine ideal genaue angenommen wird.

Wo man eine Abweichung von diesem Gesetze bemerkt, muß man schließen, daß noch Umstände unbeachtet geblieben sind, welche eine weitere partielle Beschleunigung bestimmen würden, wenn sie allein vorhanden wären.

112. Als Beispiel der vektorischen Summierung partieller Beschleunigungen betrachten wir das Kegelpendel. Der Körper a (Fig. 22) bewegt sich in einem horizontalen Kreis vom Radius r mit der Umlaufzeit τ und ist durch einen gespannten Stiel oder Faden von der Länge l mit dem Aufhängepunkte o ver-

bunden, welcher die Höhe h über der Bahnebene hat. Er hat nicht die Schwerebeschleunigung g_0 , aber er würde sie haben, wenn der Faden l nicht vorhanden wäre. Dieser würde die elastische Beschleunigung g_1 bestimmen, wenn der Körper nicht schwer wäre. Die wirkliche Beschleunigung g des Körpers ist die in die negative Richtung des Radius fallende Zentralbeschleunigung, und es ist

$$g \stackrel{a}{=} g_1 + g_0.$$

Aus der Ähnlichkeit dieses Vektorendreiecks mit dem Dreieck $r \ l \ h$ folgt:

$$g = -g_0 \frac{r}{h},$$

und da

$$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r,$$

so muß

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g_0}}$$

sein, d. h. die Bahnebene liegt desto höher, je kleiner die Umlaufszeit ist. Da h

nicht größer als die Länge l des Aufhängefadens sein kann, so ist diese Bewegungsform nur möglich, wenn die Umlaufszeit kleiner ist als die Schwingungsdauer desselben Pendels in vertikaler Ebene.

113. Zweites Beispiel. Man kann das Gesetz einer Schwingung sehr genau bestimmen, indem man einen zweiten Körper Schwingungen von gleicher Dauer in einer senkrechten Richtung ausführen läßt und die relative Bahn des ersten gegen den zweiten Körper, d. i. die Änderung ihrer vektorischen Distanz, beobachtet.

Es ist aber sogar möglich, zwei Schwingungen, welche derselbe Körper ausführen kann, zu einer möglichen Schwingung desselben zusammenzusetzen, doch fordert dies ein ganz spezielles Beschleunigungsfeld.

Die Versuchsanordnung ist dieselbe wie in 80. Doch berücksichtigen wir nun die Schwerebeschleunigung. Der Körper a

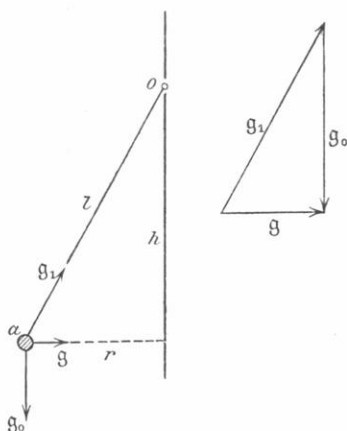


Fig. 22.

hängt an einem Faden, welcher durch die Öse o (Fig. 23) durchläuft und in eine elastische Feder übergeht. Er kann ohne Änderung der Ausdehnung der Feder als Pendel in horizontaler Richtung schwingen, oder auch ohne Biegung des Fadens eine vertikale elastische Schwingung ausführen. Die Anordnung ist so getroffen, daß, wenn die Feder ungespannt ist, der Körper gerade bei der Öse sich befindet, daß also die Pendellänge der Ausdehnung der Feder im Ruhefalle gleich ist. Dann ist für jeden beliebigen an diese Pendelfeder gehangenen Körper a die Schwingungsdauer der horizontalen Pendelschwingung gleich jener der vertikalen elastischen Schwingung, was wir sogleich beweisen werden.

Bezeichne $\mathbf{l}$ den Vektor, welcher von dem bewegten Körper a zu dem Fixpunkt o reicht, so ist derselbe stets gleich der Ausdehnung der Feder, also gleichgerichtet und proportional der partiellen Beschleunigung, welche durch die Spannung der Feder bestimmt wird. Bezeichne $\mathbf{l}_0$ einen vom Fixpunkt o vertikal nach abwärts gerichteten Vektor, welcher der Schwerkraft proportional sei. Den Pfeilpunkt a_0

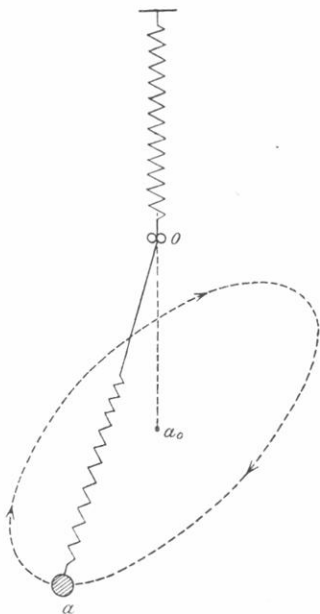


Fig. 23.

desselben nennen wir aus einem weiter unten aufzuklärenden Grunde den Ruhepunkt. Dann muß der von diesem Ruhepunkte a_0 zu dem bewegten Körper reichende Radiusvektor $\mathbf{r}$ der wahren Beschleunigung desselben stets proportional und entgegengerichtet sein.

Hier haben wir also wirklich jenes Beschleunigungsfeld, welches wir in 80. und 105. vorausgesetzt, dort aber nur mit Vernachlässigung der Schwerkraft hergestellt haben. Nur liegt der Mittelpunkt des Feldes nicht im Punkte o , sondern im Ruhepunkte a_0 .

Aus dem beschriebenen Beschleunigungsdreieck folgt für die Größe der wahren Beschleunigung g des Körpers die Proportion

$$g = - \frac{g_0}{l_0} r.$$

Der Körper kann also in jeder durch das Zentrum a_0 gehenden Geraden eine Sinusschwingung mit der Schwingungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}}$$

ausführen.

Dieses Beschleunigungsfeld, in welchem die Beschleunigung dem Radius proportional ist, hat die ganz spezielle Eigenschaft, daß die Projektion einer möglichen Bewegung des Körpers auf einen Radius selbst eine mögliche Bewegung ist, weil die Projektion der Beschleunigung des Körpers in diesem Falle nicht nur wie selbstverständlich die Beschleunigung der Projektion des Körpers ist, sondern die partielle Beschleunigung des Körpers, welche er hätte, wenn er sich an der Stelle seiner Projektion befinden würde.

Umgekehrt kann man zwei beliebige mögliche Schwingungen in zwei radialen Richtungen derart zu einer möglichen Bewegung des Körpers zusammensetzen, daß der Radiusvektor der resultierenden Bewegung stets die vektorische Summe der Entfernungen der geradlinig schwingenden Punkte vom Zentrum ist.

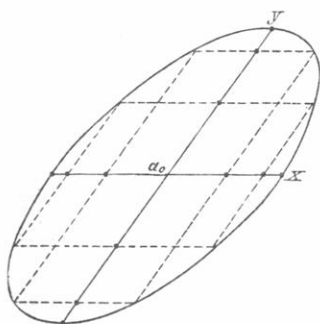


Fig. 24.

Da die geradlinigen Schwingungen sämtlich dieselbe Schwingungsdauer haben, so wird jede mögliche Bewegung die gleiche Umlaufdauer haben. Die Bahnkurve

muß symmetrisch sein in bezug auf das Zentrum a_0 . Wählt man die Achsen y, x eines Koordinatensystems als Richtungen der Partialschwingungen, so lautet die Gleichung dieser geradlinigen Schwingungen

$$y = b \sin \frac{2\pi}{\tau} t$$

$$x = a \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \varphi \right).$$

Die Konstante φ heißt der Phasenwinkel. b und a sind die Amplituden der Partialschwingungen. x und y sind gleichzeitig die Koordinaten des in der ebenfalls möglichen resultierenden Bewegung befindlichen Körpers. Die allgemeine Bahn desselben ist also eine elliptische.

114. Gegenseitige Aufhebung partieller Beschleunigungen. Ein Körper, welcher gleichzeitig zwei Bedingungen unterworfen ist, welche für sich allein gleiche aber entgegengesetzte Beschleunigungen bestimmen würden, bewegt sich unbeschleunigt weiter. War er unbewegt, so verharrt er in Ruhe. Man sieht diese gegenseitige Aufhebung zweier Beschleunigungsbedingungen an jedem an einer elastischen Feder hängenden oder auf einer elastischen Unterlage ruhenden Körper. Es ist dies eine sehr charakteristische Auffassungsweise der Beschleunigungstheorie. Um in einem solchen Falle, wo überhaupt keine Bewegung und oft keine deutliche Deformation der Unterlage stattfindet, doch mit aller Bestimmtheit zwei genau gleiche, wenn auch nur partielle Beschleunigungen anzunehmen, deren vektorische Summe die wahre Beschleunigung Null des Körpers ergibt, muß man von der ideal genauen Gültigkeit der Gesetze der Beschleunigungstheorie und der Unmöglichkeit, diesen Ruhefall anders im System unterzubringen, ganz überzeugt sein.

Als Beispiel betrachten wir das Tangentenpendel. Ein Eisenstückchen a hängt an einem Faden. Ein nebenanliegender Magnet würde ihm eine horizontale Beschleunigung g_1 erteilen, wenn es frei und nicht schwer wäre. Hierzu kommen noch

die partiellen Beschleunigungen g_0 des freien Falles und g_2 der Fadenspannung. Die vektorische Summe dieser drei partiellen Beschleunigungen muß Null sein, wenn das Eisenstückchen in

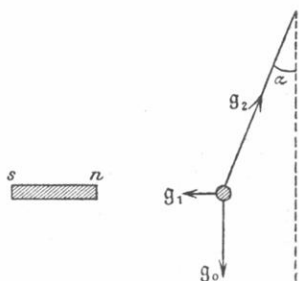


Fig. 25.

Ruhe bleibt. Ist dann der Faden um den Winkel α aus der Vertikalen abgelenkt, so folgt aus dem Beschleunungsdreieck:

$$g_1 = g_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Man kann sonach durch Ausmessung des Ablenkungswinkels α die Größe der magnetischen Beschleunigung g_1 bestimmen.

5. Die absoluten Beschleunigungen.

115. Die Sterne sind Lichtpunkte, welche in unregelmäßiger aber fast unveränderlicher Anordnung über den Himmel zerstreut sind. Man stellt ihren Ort durch Zentralprojektion auf eine große Kugelfläche aus deren Mittelpunkt, dem Beobachtungsorte, dar, und nennt diese Fläche die Himmelskugel des Beobachtungsortes. Es bedarf nur weniger Minuten Aufmerksamkeit, um mit freiem Auge zu bemerken, daß die Sterne in lebhafter und gemeinsamer Bewegung begriffen sind. Sie beschreiben Kreisbahnen von paralleler Ebene auf der Himmelskugel (die Deklinationskreise derselben) und vollenden dieselben in fortdauernder überaus gleichmäßiger Bewegung innerhalb $23^h 56'$ (eines Sterntages). Die Achse dieser Rotation der Himmelskugel heißt die Weltachse, sie ist für jeden Beobachtungsort auf der Erde gegenwärtig ungefähr gegen den Stern α ursae minoris (Polarstern) gerichtet, woraus folgt, daß sich die Sterne wie ungeheuer weit entfernte Körper auf die Himmelskugeln der verschiedenen Beobachtungsorte projizieren. Diese Umwälzung des Sternhimmels liefert uns das beste Zeitmaß.

116. *Kugelgestalt der Erde.* Die Schwererichtung (Lotrichtung, Zenithrichtung) steht überall auf der Meeresoberfläche und auch auf der Erdoberfläche, soweit sie nicht bergig ist, senkrecht. Als Polhöhe bezeichnet man den Winkel, welchen die Weltachse mit der auf der Schwererichtung senkrechten Ebene, der Horizontalebene des Beobachtungsortes bildet. Die Ebene dieses Winkels heißt die Meridianebene, die horizontale Gerade derselben gibt die Nord-Südrichtung an. Es war bereits im Altertume bekannt, daß die Polhöhe an verschiedenen Orten der Erde verschieden ist und Hipparch (130 v. Chr.)

baute hierauf das geographische Koordinatensystem auf. Geht man in der Meridianrichtung nach Norden, so nimmt die Polhöhe proportional dem zurückgelegten Wege zu, und zwar um 1° pro 110 km. Da der großen Entfernung der Sterne wegen die Weltachsen verschiedener Beobachtungsorte parallel sind, so sind die Horizonte zweier Orte, welche in 110 km Entfernung im selben Meridian liegen, um 1° gegeneinander geneigt und ihre Schnittlinie hat west-östliche Richtung. Die Meridianlinien auf der Erdoberfläche sind also große Kreise von $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 110 \text{ km} = 6300 \text{ km}$ Radius.

Alle Orte, welche gleiche Polhöhe haben, bestimmen eine Breitenlinie. Diese steht senkrecht auf den Meridianen. An allen Orten desselben geographischen Meridians kulminieren dieselben Sterne gleichzeitig, d. h. sie passieren gleichzeitig die Meridianebene. In Orten, welche auf unserer Breitenlinie von 50° Polhöhe liegen, gehen die Sterne desto später auf und kulminieren desto später, je weiter westlich der Beobachtungsort liegt, und zwar um je $\frac{1}{360}$ Sterntag später für je 77 km westlicher Entfernung. Hieraus folgt, daß diese Breitenlinie ein Kreis von $\frac{360}{2\pi} \cdot 77 = 4200 \text{ km}$ Radius ist.

Sind die Verhältnisse, wie sich dies bestätigt, auf der ganzen Erde ähnliche, so sind alle Breitenlinien Kreise, die Erde hat eine Rotationsform, die Erdachse ist den Weltachsen parallel. Da die Meridiane Kreise von 6300 km Radius sind, so ist die Erde eine Kugel von gleichem Radius. Am Äquator kulminieren die Sterne um $\frac{1}{360}$ Sterntag später für je 110 km westlichere Lage.

Da im Mittelalter noch keine eigentlichen Uhren bekannt und die Mondfinsternisse wenig studiert waren, konnte die indische mit der europäischen Zeit nicht verglichen werden und deshalb war man in bezug auf die geographische Länge Ostindiens auf die unsicheren Entfernungsschätzungen der Araber angewiesen. Behaim setzte auf seinem Globus Ostindien in die Länge, welche tatsächlich Westindien hat. Toscanelli (1480) faßte die Idee, gegen Westen nach Ostindien zu fahren, also die Idee der Erdumsegelung, und überredete Chr. Columbus zu diesem Wagnis.

117. Da man nun die Gestalt und die Dimensionen der Erde kennt, so ist eine Basis gewonnen, von welcher aus die Entfernung der himmlischen Objekte beurteilt werden kann. Doch zeigt sich, daß diese Entfernungen zu groß sind, um von einer Basis von nur einigen tausend Kilometern aus meßbar zu sein. Nur der Mond ist nicht zu weit entfernt. Wenn derselbe von Wien aus betrachtet ein wenig südlich vom Himmelsäquator steht, so erscheint er von Kapstadt aus ein wenig nördlich von demselben und zwar beträgt diese (parallaktische) Verschiebung des Mondes gegen die Sterne $1,3^{\circ} = 0,022$ Bogenmaß. Da Kapstadt in gerader Linie 8500 km von Wien liegt, so beträgt die Entfernung des Mondes von der Erde

$$\frac{8500}{0,022} = 384000 \text{ km.}$$

Bei Sonnenfinsternissen ist es anschaulich, daß die Sonne viel weiter entfernt ist als der Mond. Die Beleuchtungsphasen desselben zeigen, daß auch dieser kugelförmig ist. Bei Halbmond sind Mond und Sonne um den Winkel von $89^{\circ} 51'$ voneinander getrennt, während vom Mond aus Erde und Sonne um genau 90° getrennt erscheinen müssen. Nun kennt man eine große Basis, nämlich die Entfernung der Erde vom Mond und die beiden Winkel an derselben und kann hieraus die Entfernung der Sonne von der Erde bestimmen. Dieselbe beträgt 149 Millionen Kilometer. Es gibt aber viel bessere auf der Beobachtung der Venusdurchgänge vor der Sonne und der Aberration des Sternlichtes beruhende Methoden zur Bestimmung dieser Entfernung.

118. Die Sonne steht zwischen den Sternen nicht ruhig, sondern bleibt hinter deren täglicher Bewegung zurück, und zwar im Jahre um einen Sterntag. Sie beschreibt im Jahre einen größten Kreis am Sternhimmel, die Ekliptik, dessen Ebene mit der Äquatorebene einen Winkel von $23^{\circ} 28'$ bildet. Am 21. März steht die Sonne im absteigenden Knoten des Äquators, dem Frühlingspunkte, d. i. in dem Schnittpunkte, in welchem die Ekliptik von Süden nach Norden durch den Äquator tritt.

Der Mond bleibt noch weiter hinter den Sternen zurück, und zwar in $27\frac{1}{3}$ Tagen um einen Sterntag. Er zeigt in $29\frac{1}{2}$ Tagen den ganzen Zyklus der Beleuchtungsphasen und beschreibt

einen größten Kreis am Sternhimmel, welcher fast mit der Ekliptik zusammenfällt, mit derselben einen Winkel von 6° bildet. Im Winter, wenn die Sonne tief steht, steht also der Vollmond hoch, im Sommer sind im Gegenteil die Tage lang, der Vollmond bleibt aber nur kurze Zeit über dem Horizont.

Die Kenntnis von fünf Sternen (Planeten), welche zwischen den übrigen nicht ruhig stehen, reicht in vorhistorische Zeiten. Die inneren Planeten Merkur und Venus bleiben immer in der Nähe der Sonne, die äußeren Planeten Mars, Jupiter und Saturn, zu welchen auch die in neuerer Zeit entdeckten Planeten Uran und Neptun gehören, können sich um 180° von der Sonne entfernen, so daß die Erde zwischen Sonne und Planet steht.

119. Die Planetenbahnen. Die Bahnen der Planeten am Sternhimmel bleiben stets in der Nähe der Ekliptik, sind aber verwickelt gewunden und verschlungen. Das einfachste Bild zeigen die Bahnen der äußeren Planeten. Sie sind im wesentlichen

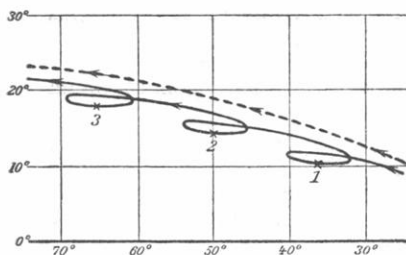


Fig. 26.

Saturn 1882—1884

Stellung 1, am 1. November 1882

„ 2, am 1. November 1883

„ 3, am 1. November 1884

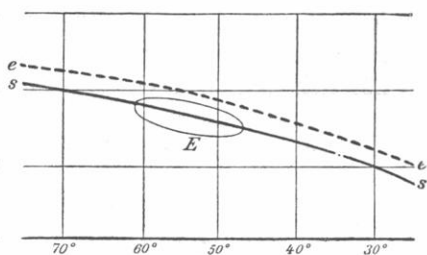


Fig. 27.

e Ekliptik*s* Deferent*E* Epizykel

epizyklisch (Fig. 26) und setzen sich aus einer Fortschreitung längs eines mit der Ekliptik nahezu zusammenfallenden größten Kreises, des Deferenten, und aus einer epizyklischen, aber elliptischen Kreisung zusammen (Fig. 27).

Den Winkel des Deferenten mit der Ekliptik nennt man die Neigung der Planetenbahn. Die Schnittpunkte mit der Ekliptik heißen die Knoten der Bahn. Der Umlauf längs des Deferenten findet rechtläufig, d. h. im gleichen Sinne wie der

Sonnenumlauf statt. Den Umlauf um den ganzen Himmel vollenden diese Planeten mit verschiedener Umlaufszeit, und zwar

Jupiter in 12 Jahren

Saturn „ 29 „

Uran „ 84 „

Neptun „ 217 „

Die epizyklische Ellipse ist stets sehr schmal. Ihre große Achse ist der Ekliptik parallel und hat für jeden Planeten einen anderen konstanten Wert, und zwar ist die halbe große Achse des Epizykels für

$$\text{Jupiter } 10^{\circ} 56' = \frac{1}{5,2} \text{ Bogenmaß}$$

$$\text{Saturn } 6^{\circ} 0' = \frac{1}{9,54} \quad ,,$$

$$\text{Uran } 3^{\circ} 3' = \frac{1}{19,18} \quad ,,$$

$$\text{Neptun } 1^{\circ} 35' = \frac{1}{36,1} \quad ,,$$

Die kleine Achse der epizyklischen Ellipse ist desto größer, je weiter entfernt der Planet von der Ekliptik ist. In der Nähe der Knoten ist sie Null. Die elliptische Kreisung findet nördlich und südlich von der Ekliptik in entgegengesetztem Umlaufsinne statt.

Diese sehr verschieden geformten epizyklischen Ellipsen werden aber von allen äußeren Planeten in derselben Zeit durchlaufen, und zwar in jener Zeit, in welcher auch die Sonne um die Erde läuft, in einem Jahre.

120. Das Kopernikanische System. Dieser letztere Umstand brachte Nik. Kopernikus (1500) auf den Gedanken, daß der epizyklische Umlauf der äußeren Planeten eine Bewegung sei, welche diese Planeten mit der Sonne gemeinsam haben, die Fortschreitung der Planeten im Deferenten aber eine Kreisbewegung derselben um einen in der Nähe der Sonne liegenden Punkt sei.

Die Bahn der inneren Planeten läßt sich in gleicher Weise zerlegen. Hier findet aber der Umlauf im Deferenten in einem Jahre statt, während die epizyklische Kreisung mit den Umlaufzeiten

Merkur 0,24 Jahre

Venus 0,62 „

erfolgt. Im Mittelpunkt des Epizykels steht immer die Sonne (Fig. 28 und Fig. 29).

Alle Planeten bewegen sich in Kreisen mit den angegebenen Umlaufzeiten um die Sonne. Eine andere Relativbewegung haben die Planeten gegen die Sonne nicht. Das ganze System kreist also jährlich translativ mit der Sonne, d. h. jeder Planet beschreibt noch jährlich einen Kreis, welcher kongruent und parallel gelegen ist zu der Sonnenbahn. Dieser Kreis erscheint uns bei den äußeren Planeten als Epizykel, bei dem inneren als Deferent. Daraus kann man erkennen, daß die inneren Planeten der Sonne sehr nahe bleiben müssen, die äußeren

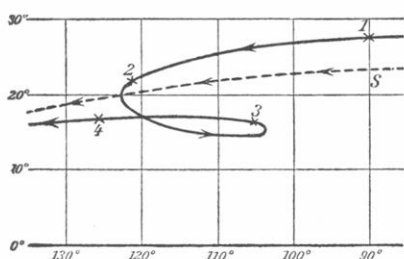


Fig. 28.

Venus 1876

Stellung 1, am 5. Mai

„ 2, am 14. Juni

„ 3, am 3. August

„ 4, am 12. September

S Sommersolstitium.

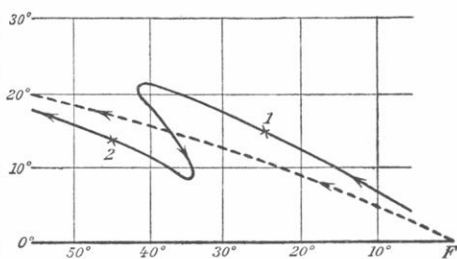


Fig. 29.

Merkur 1852

Stellung 1, am 28. März

„ 2, am 1. Juni

F Frühlingspunkt.

Planeten aber so weit entfernt sein müssen, daß ihre mächtige epizyklische Kreisung als eine kleine Ellipse erscheint.

121. Dimensionen des Weltraumes. Wie bereits erwähnt, gibt es kein direktes Mittel, die Entfernung der Planeten zu messen. Aus der Kopernikanischen Hypothese folgt aber auch die räumliche Konfiguration des Planetensystems, während man vor Kopernikus nur die Projektion desselben auf den Himmel kannte. Wenn es richtig ist, daß die Epizykeln aller äußeren Planeten kongruente Kreise sind, dann sind dieselben desto weiter von der Sonne entfernt, je kleiner die große Achse der epizyklischen Ellipse ist. Diese sind in 119. angegeben. Der Winkel in Bogenmaß, unter welchem uns diese halbe große Achse erscheint, gibt das Verhältnis des

Halbmessers der epizyklischen Kreisbahn des Planeten, welche gleich dem Radius der Sonnenbahn ist, zu der Entfernung des Planeten von der Sonne an. Es ist also

Jupiter 5,2 mal

Saturn 9,54 „

Uran 19,18 „

Neptun 36,1 „

so weit von der Sonne entfernt, als diese von der Erde.

In neuerer Zeit konnte man nachweisen, daß einige Fixsterne ebenfalls epizyklische Ellipsen beschreiben, deren große Achse der Ekliptik parallel und deren Exzentrizität desto kleiner ist, je weiter sie von der Ekliptik entfernt sind. In der Nähe des Poles der Ekliptik haben diese parallaktischen Ellipsen der Fixsterne Kreisform, in der Nähe der Ekliptik führen die Sterne geradlinige, der Ekliptik parallele Schwingungen aus. Nördlich von derselben kreisen sie im Sinne, südlich gegen den Sinn des Uhrzeigers. Die Umlaufszeit in diesen für verschiedene Sterne sehr verschieden großen, aber immer sehr kleinen parallaktischen Ellipsen beträgt genau ein Jahr.

Nach Bessel (1838) ist die halbe große Achse der parallaktischen Ellipse für den Stern α Centauri gleich $0,8'' = \frac{1}{265000}$ Bogenmaß. Dieser Stern ist also 265000 mal so weit von uns als die Sonne und ist noch einer der nächsten Fixsterne. Diesen verblüffenden Distanzmessungen liegt die berechtigte Annahme zugrunde, daß die parallaktischen Kreisungen der Sterne in Bahnen erfolgen, welche der Sonnenbahn kongruent sind.

Die Sonne, die Planeten und die Sterne bilden ein System, welches jährlich eine translative Kreisbewegung von ungeheurem Radius gegen die Erde ausführt und sich außerdem täglich um die Erdachse dreht.

122. Heliozentrische Geschwindigkeiten. Bis dahin bot sich das geographische (geozentrische) Koordinatensystem am natürlichsten zu jeder Ortsbestimmung dar. Man bezog alle Distanzmessungen auf einen fest mit der Erde verbundenen Punkt, und alle Richtungsmessungen auf fest mit der Erde verbundene Richtungen. Kopernikus lehrte aber ein zweites System von hoher Bedeutung und unendlicher Ausdehnung, nämlich die Sonne mit den Fixsternen, kennen, in welchem sich Richtungen

mit großer Genauheit festlegen lassen und dessen Dimensionen hinreichend bekannt sind. Es entstand nun die Frage, ob es nicht besser sei, die Orts- und Geschwindheitsangaben auf dieses, das heliozentrische System, zu beziehen. Es macht dies einen scheinbar ungeheuren Unterschied, denn die beiden Systeme haben gegeneinander keine feste Lage, sondern eine mächtige jährliche Kreisung und eine tägliche Rotation. Daß es vorteilhaft ist, die astronomischen Bewegungen auf das heliozentrische System zu beziehen, konnte nie bezweifelt werden. Denn in diesem System stehen die Sonne und alle Sterne ruhig und die Planeten führen einfache Kreisbewegungen um die Sonne aus, während alle diese Bewegungen vom irdischen Standpunkt aus verwickelt erscheinen. Anders, wenn man terrestrische Bewegungsvorgänge im heliozentrischen System darstellen will. Es war vor Aufstellung der Galileischen Bewegungstheorie nur den kühnsten Denkern möglich, dem Augenschein und dem nüchternen Verstande entgegen den Wert der Vorstellung zu erraten, daß auch in physikalischer Beziehung der Himmel ruhend und die Erde bewegt sein könnte.

123. *Absolute Beschleunigungen.* Jedenfalls hat die Frage, ob die Bewegungsgesetze für die auf das heliozentrische oder geozentrische System bezogenen Beschleunigungen gelten, eine hohe theoretische Bedeutung. Um die Geschwindheiten handelt es sich hierbei gar nicht, da diese nicht durch direkte Gesetze bestimmt sind. Deshalb ist der Unterschied der in beiden Fällen zu erwartenden Erscheinungen nicht so groß wie die astronomischen Geschwindheiten, sondern nur so klein, wie die sehr unbedeutenden astronomischen Beschleunigungen. Es erfordert sehr feine Messungen, um diesen Unterschied überhaupt bemerken zu können. Dieselben gelangen zum Teil erst im 19. Jahrhundert und entschieden für das heliozentrische System. Die Beschleunigung der Körper, bezogen auf ein in Fixsternen festgelegtes Koordinatensystem, wird durch einfache Gesetze bestimmt. Die drei hiefür sprechenden Beobachtungen wollen wir in historischer Reihenfolge anführen.

124. *Die absolute Fallbeschleunigung.* Huyghens erfand (1660) die Pendeluhr. Picard sagte (1671) voraus, daß dasselbe Pendel am Äquator langsamer schwingen müsse als bei

uns. Richer (1672) fand tatsächlich, daß eine Pendeluhr (bei gleicher Temperatur) am Äquator langsamer geht als in unseren Breiten. Die Relativbeschleunigung, mit welcher die Körper gegen den Erdboden fallen, ist hiernach am Äquator um 3,4 cm/sec kleiner als an den Erdpolen. Hieraus erkannte Huyghens, daß sich das Fallgesetz nicht auf die geozentrische, sondern auf die heliozentrische oder absolute Beschleunigung bezieht. Diese absolute Fallbeschleunigung ist auf der ganzen Erdoberfläche nahezu gleich und zwar $g_0 = 982 \text{ cm/sec}^2$ und überall gegen den Erdmittelpunkt gerichtet. Da aber die Erdoberfläche eine Kreisbewegung ausführt mit dem Radius

$$r = R \cos \varphi,$$

worin r der Erdradius und φ die Polhöhe des Beobachtungs-ortes ist, so hat jeder terrestrische Fixpunkt in der Nähe des Beobachtungsortes die absolute Zentralbeschleunigung

$$g_1 = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} R \cos \varphi = -3,4 \cos \varphi \text{ cm/sec}^2,$$

worin $\tau = 86400 \text{ sec}$ (ein Tag) ist. Diese Zentralbeschleunigung ist senkrecht gegen die Erdachse gerichtet.

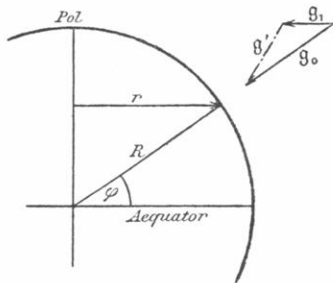


Fig. 30.

Die terrestrische Beschleunigung g'_0 des freien Falles ist die Relativbeschleunigung des fallenden Körpers gegen den Erdboden. Ihre Richtung ist die Lotrichtung. Sie ist die vektorielle Differenz der absoluten Beschleunigung des Körpers und der absoluten Beschleunigung des Erdbodens

$$g'_0 \triangleq g_0 - g_1.$$

Die terrestrische Fallbeschleunigung ist also nicht senkrecht gegen die Erdoberfläche gerichtet und am Äquator kleiner als am Pol. Auf jenem hat sie den Wert

$$g'_0 = g_0 - 3,4 \text{ cm/sec}^2 = 978,6 \text{ cm/sec}^2.$$

125. Die Bahn des freien Falles. Ein aus großer Höhe ohne (terrestrische) Anfangsgeschwindigkeit herabfallender Körper kann nicht in der Lotrechten fallen. Er hat nämlich zu Be-

ginn seiner Bewegung die große horizontale absolute Geschwindigkeit, welche durch die Rotation der Erde bedingt ist, und wird sich in einer Ellipse bewegen, deren Scheitel im Anfangspunkte seiner Bahn liegt. Diese von Fermat herrührende Bahnberechnung regte Newton zu seinen Berechnungen der genauen Form der Planetenbahnen an. Die elliptische Bahn des frei fallenden Steines unterscheidet sich bedeutend von einer Geraden. Da aber auch der Beobachtungsort die Erdrotation mitmacht, ist dieser Unterschied kaum zu erkennen. Die Spitze eines 183 m hohen Turmes hat (am Äquator der Erde) eine um nur 1 cm/sec größere Geschwindigkeit als der Boden. Ein frei fallender Stein braucht 6 sec, um die Höhe zu durchfallen. Er fällt tatsächlich nicht in einer geozentrischen Lotrechten, sondern in einer Parabel und weicht 6 cm gegen Osten ab, wie verschiedene Physiker zu Beginn des 19. Jahrhunderts konstatiert haben.

126. Das Foucaultsche Pendel. Am Erdpol wird ein schwingendes Fadenpendel, dessen oberer Drehpunkt durch eine feine cardanische Aufhängung gebildet wird, durch kein Gesetz irgendwie an eine bestimmte Orientierung gegen die Erde gebunden, sondern die Richtung seiner Schwingungsebene muß im heliozentrischen System eine feste sein, sich also in bezug auf die Erde drehen und in einem Sterntag den Umlauf vollenden. In unseren Breiten dreht sich die Schwingungsebene eines solchen Pendels im selben Sinne (Foucault 1851), vollendet aber, wie vorausszusehen war, einen ganzen Umlauf erst in 32 Stunden. In derselben Weise dreht sich die horizontale Achse eines frei aufgehängten rotierenden Kreisel.

6. Das Gravitationsfeld.

127. Kopernikus hielt die auf die ruhend gedachte Sonne bezogenen Planetenbahnen für schwach exzentrische Kreise. Die Entfernung der Planeten von der Sonne ist nämlich nicht völlig konstant. Am stärksten exzentrisch ist die Merkurbahn. In Sonnennähe (im Perihel) ist der Merkur 0,35, in Sonnenferne (im Aphel) 0,54 Erdbahnradien von der Sonne entfernt. Die Bahnen der Venus und des Neptun haben

die kleinste Exzentrizität, sie sind von Kreisen, in deren Mittelpunkt die Sonne steht, kaum zu unterscheiden. Die Bahnen der zahlreichen, größtenteils zwischen Mars und Jupiter kreisenden Planetoiden haben aber zum Teil große Exzentrizität.

128. Die Planeten durchlaufen ihre exzentrische Bahn nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit, sondern bewegen sich im Perihel merklich rascher als im Aphel. Am deutlichsten ist dies bei Merkur. Jene Planeten, deren Bahn wenig exzentrisch ist, bewegen sich in derselben mit viel gleichförmigerer Geschwindigkeit.

In folgender Tabelle ist die Marsbewegung angegeben. Es bedeutet r die variable Entfernung des Mars von der Sonne (in Erdbahnradien), w die Geschwindigkeit seiner Projektion auf eine Himmelskugel, deren Mittelpunkt in der Sonne liegt (in Bogensekunden pro Tag), $w r$ seine absolute Geschwindigkeit v (in Erdbahnsekunden pro Tag) für verschiedene Punkte seiner Bahn.

Mars	Datum	r	w	$w r = v$	$w r^2 = v r$
im Aphel	1.5. 1867	1,665	1574	2620	4363
	1.9. 1867	1,580	1745	2760	4359
	1.12. 1867	1,466	2030	2980	4360
im Perihel	1.4. 1868	1,382	2285	3171	4363

Man erkennt das Anwachsen der Geschwindigkeit v des Planeten bei Annäherung an die Sonne. Das in der letzten Spalte der Tabelle angegebene Produkt $v \cdot r$ bleibt aber hierbei merklich konstant. Dieses Produkt stellt den vom Radiusvektor r in zwei Tagen durchstrichenen Flächenraum dar, wobei die Basis dieses Dreiecks in Sekundenlängen des Erdbahnkreises, die Höhe desselben in Erdbahnradien ausgedrückt ist. Gleiches fand Kepler für alle Planeten: Der von der Sonne zu einem Planeten reichende Radiusvektor durchstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Hieraus folgt für uns unmittelbar (nach 82.), daß die absolute Beschleunigung des Planeten trotz der exzentrischen Bahn desselben stets nach der Sonne gerichtet ist.

129. Es ist bewunderungswürdig, daß Kepler, dem selbst die Galileische Bewegungstheorie ganz unbekannt war, diesem

Gesetze eine so treffende Fassung gab, durch welche die Theorie der Zentralbewegung wesentlich gefördert wurde.

Die leichter aufzufindende Beziehung der Größe der Geschwindigkeit der Planeten zu ihrer Entfernung von der Sonne entging jedoch Kepler, wodurch die Entdeckung des Gravitationsfeldes verzögert wurde.

Die zahlreichen und für ihre Zeit vortrefflichen Messungen von Planetenpositionen, welche Tyge Brahe hinterließ und welche Kepler seinen Untersuchungen zugrunde legte, hätten ihm gestattet, auch die universelle Beziehung zwischen dem Quadrat der Geschwindigkeit der Planeten und ihren reziproken Abstand von der Sonne zu finden, welche zusammen mit dem Flächensatz die Planetenbewegung völlig bestimmt.

Die folgende Tabelle gibt beispielsweise für einige Marsorte die Entfernung r des Mars in Erdbahnradien und seine absolute Geschwindigkeit v in Erdbahnradien pro Jahr. Die letzte Spalte der Tabelle zeigt, daß der Wert

$$v^2 - \frac{8\pi^2}{r} = c$$

konstant ist.

Mars	Datum	r	v	c
im Aphel	1.5. 1867	1,665	4,65	— 25,68
	1.9. 1867	1,580	4,90	— 25,75
	1.12. 1867	1,466	5,32	— 25,70
im Perihel	1.4. 1868	1,382	5,61	— 25,67

Hierdurch ist nun das Beschleunigungsfeld der Marsbewegung bestimmt. Dasselbe fällt völlig mit den in gleicher Weise bestimmten Beschleunigungsfeldern der anderen Planeten zusammen.

130. Statt dessen stellte Kepler das Gesetz der Umlaufzeiten auf und erkannte die genaue Form der Bahn der Planeten. Dieselben bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht. Die folgende Tabelle gibt die Bahnelemente der Planeten an. Hierin bedeutet r den mittleren Bahnradius, e die numerische Exzentrizität, π die Länge des Perihels (den Winkelabstand der

großen Achse der elliptischen Bahn vom Frühlingspunkte), i die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, in welchem der Planet von Süden nach Norden durch die Ekliptik tritt.

	r	e	π	i	Ω
Merkur	0,39	0,21	75°	7° 0'	47°
Venus	0,72	0,01	129°	3° 23'	75°
Erde	1,00	0,02	100°	0° 0'	—
Mars	1,52	0,09	333°	1° 51'	48°
Jupiter	5,20	0,05	12°	1° 19'	99°
Saturn	9,54	0,06	90°	2° 29'	112°
Uran	19,18	0,05	168°	0° 46'	73°
Neptun	36,15	0,01	50°	1° 47'	130°

Die Planetoiden, mehrere Hundert an Zahl, kreisen zwischen Mars und Jupiter, mit Ausnahme des Eros, welcher der Sonne näher kommt als Mars. Ihre Umlaufszeiten liegen zwischen drei und acht Jahren. Die Exzentrizität ihrer Bahnen schwankt zwischen 0 und 0,4, die Neigung derselben geht bis zu 34°.

Man hat etwa 500 Kometen genauer beobachtet, von welchen viele in elliptischen, andere in parabolischen, viele auch in hyperbolischen Bahnen, in deren Brennpunkt stets die Sonne steht, umlaufen. Die Exzentrizitäten schwanken zwischen 0,4 bis 1,1, die Neigungen ihrer Bahnen zwischen 0 und 360°. Auch die Periheldistanzen haben alle möglichen Werte. Etwa zwanzig von den in elliptischen Bahnen umlaufenden Kometen hat man mehrfach beobachtet, sie haben Umlaufszeiten von 3 bis 80 Jahren.

131. Die Planeten sind ohne Zweifel kugelförmige Körper, so gut wie Erde und Mond. Starke Fernrohre lassen ihre Dimensionen und ihre Oberflächenbeschaffenheit erkennen. Die Kometen freilich sind größtenteils, aber nicht gänzlich eine körperlose Erscheinung.

Kepler war lange Zeit bemüht, durch Zusammenstellung der Planeten in Reihen zu zeigen, daß die Erde als dritter Planet in diese Reihen gehöre. Von diesen Versuchen ist für uns das Gesetz der Umlaufszeiten von bleibendem Werte geworden. Die folgende Tabelle gibt den Bahnradius r der

Planeten und ihre Umlaufszeit an. Der Quotient r^3/τ^2 ist konstant: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Bahnradien der Planeten.

	r in Erdbahnradien	τ in Jahren	$\frac{r^3}{\tau^2}$
Merkur . . .	0,39	0,24	0,974
Venus . . .	0,72	0,62	0,980
Erde . . .	1,00	1,00	1,000
Mars . . .	1,52	1,88	0,992
Jupiter . . .	5,20	11,87	1,008
Saturn . . .	9,54	29,46	0,900
Uran . . .	19,18	84,01	0,985
Neptun . . .	36,15	217,40	1,002

132. Die absolute Beschleunigung g der Planeten ist die Zentralbeschleunigung ihrer Kreisbewegung um die Sonne:

$$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r.$$

Das eben angeführte Gesetz der Umlaufszeiten:

$$\frac{r^3}{\tau^2} = k,$$

worin k eine Konstante ist, wurde von Wren und Halley benützt, um die Umlaufszeit τ zu eliminieren und die Zentralbeschleunigung der Planeten als Funktion ihres Bahnradius r darzustellen:

$$(a) \quad g = -\frac{4\pi^2 k}{r^2}.$$

Die Zentralbeschleunigung der Planeten ist dem Quadrate ihres Bahnradius verkehrt proportional.

Um die Konstante k dieses Wrenschen Gesetzes in terrestrischen Maßen auszudrücken, müssen wir r und τ für irgend einen Planeten, z. B. die Erde, in diesen Maßen angeben. Der Erdbahnradius ist

$$r_1 = 1,49 \times 10^{13} \text{ cm.}$$

Die Umlaufszeit τ_1 der Erde ist

$$\tau_1 = 3,15 \times 10^7 \text{ sec.}$$

Hieraus folgt

$$k = \frac{r_1^3}{\tau_1^2} = 3,36 \times 10^{24} \text{ cm}^3/\text{sec}^2.$$

Wir können nun die Zentralbeschleunigung der Planeten in zweifacher Weise in cm/sec^2 berechnen, und zwar nach dem Wrenschens Gesetz aus k und r , oder nach der Huyghensschen Gleichung aus r und τ , und erhalten:

	$g = -\frac{4\pi^2}{r^2} k$ nach Wren	$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r$ nach Huyghens
Merkur	4,11 cm/sec^2	4,02 cm/sec^2
Venus	1,17	1,15
Erde	0,591	0,591
Mars	0,254	0,252
Jupiter	0,0221	0,0223
Saturn	0,0070	0,0065
Uran	0,00167	0,00165
Neptun	0,00041	0,00041

Die Übereinstimmung ist eine sehr gute, wenn man berücksichtigt, daß die extremen Werte sehr verschieden sind. Die Beschleunigung des Neptun ist 10000 mal kleiner als die des Merkur.

Die absoluten Beschleunigungen der Planeten sind wie alle astronomischen Beschleunigungen sehr klein. Die Zentralbeschleunigung der Erde in ihrer heliozentrischen Bahn ist 1660 mal kleiner als die Schwerebeschleunigung.

133. Die Beschleunigung der Planeten ist nach dem Wrenschens Gesetz nur abhängig von ihrem Bahnradius, von ihren sonstigen Eigenschaften unabhängig. Dies brachte alle Physiker auf die Vermutung, daß die Beschleunigung eines beliebigen Körpers im Weltraum von den Eigenschaften, auch von der Geschwindigkeit desselben unabhängig, eine universelle Funktion der Entfernung von der Sonne sei. Die für jeden Ort dieses ungeheuren Feldes vorausbestimmte Beschleunigung nennt man die Gravitation.

Den Beweis für die Richtigkeit dieser Vermutung zu erbringen, war Isaak Newton vorbehalten.

Er zeigte, daß die elliptische Form der Planetenbahnen aus der Annahme folgt, daß ihre Beschleunigung stets gegen die Sonne gerichtet ist und den Wert

$$(a) \quad g = - \frac{4\pi^2 k}{r^2}$$

hat, worin r nun nicht mehr wie in dem Wrenschens Gesetze den mittleren Bahnradius des Planeten, sondern dessen variable Entfernung von der Sonne bedeutet, k aber der Konstanten des Wrenschens Gesetzes gleichgesetzt werden kann, wodurch das Newtonsche Gesetz allgemeine Geltung für alle Planeten erlangt.

Die Bewegungsform der tausend Planetoiden und Kometen bestätigt die universelle Gültigkeit der Newtonschen Beschleunigungsverteilung. Dieses Gravitationsfeld hat das Potential

$$(b) \quad P = \frac{4\pi^2 k}{r}.$$

Die Newtonsche Rechnung haben wir schon in 106. mitgeteilt. Aus derselben erklärt sich auch die hyperbolische Form mancher Kometenbahnen.

Der schönste Erfolg der Kenntnis des Gravitationsfeldes ist, daß man die ganze Bahn eines Planetoiden oder periodischen Kometen aus der Beobachtung eines kleinen Stückes derselben auf viele Jahre vorausberechnen kann.

134. Beschleunigung der Planetenmonde. Man bemerkt in der Nähe der Planeten wesentliche Abweichungen von diesem einfachen Gesetze der Gravitationsverteilung. Die Bewegungen der Planetenmonde finden nicht in Ellipsen statt, in deren Brennpunkt die Sonne steht, sondern sie sind in bezug auf den ruhend gedachten Planeten nahezu einfache Kreisbewegungen, im heliozentrischen System also Zykloiden.

Die absolute Beschleunigung eines Trabanten ist gleich der vektorischen Summe der Relativbeschleunigungen gegen seinen Planeten und der Relativbeschleunigung des Planeten gegen die Sonne. Letztere wird, wie oben abgeleitet wurde, durch das Newtonsche Verteilungsgesetz mit großer Annäherung bestimmt.

Die Relativbeschleunigung g_1 des Trabanten gegen seinen

Planeten ist aber die Zentralbeschleunigung seiner relativen Kreisbewegung um diesen

$$g_1 = - \frac{4\pi^2}{\tau^2} r,$$

worin τ die Umlaufszeit des Trabanten, r seine Entfernung von dem Planeten ist. Für unseren Mond ist $r = 3,84 \times 10^{10}$ cm und $\tau = 27^d 7^h 43^m = 2,36 \times 10^6$ sec. Die Relativbeschleunigung des Mondes gegen die Erde ist also

$$g_1 = - 0,272 \text{ cm/sec}^2.$$

135. Gravitationsfelder der Planeten. Von allen äußeren Planeten außer dem Neptun kennt man mehr als einen Mond. Mars hat zwei merkwürdig nahe und rasch umlaufende Monde, Jupiter hat fünf Monde, Saturn gar neun Monde und ist von einem merkwürdigen, wahrscheinlich aus zahllosen winzigen Monden bestehenden System: drei flachen, ebenen, frei schwebenden, etwas gegen die Ekliptik geneigten Ringen umschlossen.

Innerhalb eines jeden dieser Trabantensysteme gelten für die Relativbewegung der Monde gegen den Planeten mit großer Annäherung die Keplerschen Gesetze und also auch das Wrensche Gesetz. Doch hat die Konstante k dieses Gesetzes für jedes dieser Trabantensysteme einen anderen Wert.

Die folgende Tabelle gibt als Beispiel die mittleren Entfernungen r der Jupitermonde (in Erdbahnradien) und ihre Umlaufszeiten τ (in Jahren) an. Der Quotient $r^3/\tau^2 = k$, die Wrensche Konstante, hat nicht den Wert 1 wie im Planetensystem, sondern einen tausendmal kleineren, aber konstanten Wert.

Jupitermonde	r	τ	$k = \frac{r^3}{\tau^2}$
5. Mond	0,00124	0,00137	0,000955
1. Mond	0,00282	0,00485	0,000959
2. Mond	0,00452	0,00977	0,000961
3. Mond	0,00721	0,01960	0,000952
4. Mond	0,01270	0,04560	0,000953

Die Wrensche Konstante k hat für die verschiedenen Zentralkörper folgende Werte:

Zentralkörper	$k \times 10^{-20} \text{ cm}^3/\text{sec}^2$
Sonne	33600,0
Erde	0,112
Mars	0,0109
Jupiter	32,23
Saturn	9,63
Uran	1,40
Neptun	2,42

136. Das wahre Gravitationsfeld. Die eben beschriebenen Beschleunigungsfelder der Planeten beziehen sich auf die relative Bahn der Trabanten, und also auf die Relativbeschleunigung der Trabanten gegen den Planeten. Die Summe dieser Relativbeschleunigung und der Relativbeschleunigung des Planeten gegen die Sonne ergibt die absolute Beschleunigung des Trabanten.

Wir können aber diese zwei Relativbeschleunigungen der drei Körper mit großer Annäherung auch auffassen als zwei partielle Beschleunigungen des Trabanten, welche sich dann auch zu der wahren Beschleunigung desselben vereinigen.

Das ungestörte Gravitationsfeld der Sonne, ebenso wie die ähnlichen Gravitationsfelder der Planeten, sind hiernach nur partielle Beschleunigungsfelder. Die wahre Beschleunigung eines Körpers im Weltraum ist gleich der vektorischen Summe aller für seinen Ort vorausbestimmten Gravitationsbeschleunigungen.

137. Die Störungen. Die Planetenbewegung folgt nicht mit voller Genauigkeit den Keplerschen Gesetzen. Der mittlere Bahnradius jedes Planeten ändert sich periodisch, ebenso aber mit länger dauernder Periode ändert sich die Exzentrizität und Neigung der Bahn, hingegen dreht sich die Richtung der großen Achse und die Knotenlinie stetig, aber außerordentlich langsam.

Der schönste Erfolg der Newtonschen Gravitationstheorie ist die Erklärung dieser Abweichungen. Die Planeten bewegen sich nicht im partiellen Gravitationsfelde der Sonne, sondern für sie sind noch andere partielle Beschleunigungen bestimmt, welche gegen alle anderen Planeten gerichtet sind und den Gravitationsfeldern dieser anderen Planeten angehören. Sie sind besonders ausgiebig, wenn es sich um Planeten handelt,

die dem gestörten Planeten nahe stehen oder deren Felder eine große Wrensche Konstante haben.

Aus den Störungen der Merkurbahn durch das Gravitationsfeld der Venus folgt die Wrensche Konstante des Venusfeldes zu $0,083 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{sec}^2$. Aus den Störungen der Venusbahn folgt die Wrensche Konstante des Gravitationsfeldes des Merkur zu $0,0056 \times 10^{20} \text{ cm}^3/\text{sec}^2$. Er stört die Venus 15 mal weniger als die Venus seine Bahn. Freilich zeigen gerade Merkur und in geringerem Grade auch Venus noch unaufgeklärte kleine Abweichungen von dem Gravitationsgesetze.

Die Störungen der Uranbahn ließen auf die Existenz eines äußersten Planeten schließen. Dieser, der Neptun, wurde bei dieser Gelegenheit wirklich entdeckt.

Wenn die Kometen überhaupt Gravitationsfelder bestimmen (was wir mit den im obigen vorgetragenen mechanischen Kenntnissen zu beurteilen noch nicht in der Lage sind), so muß die Wrensche Konstante derselben äußerst klein sein, weil die Planeten von den Kometen nicht im mindesten gestört werden.

Die Planetenmonde bestimmen aber Gravitationsfelder, da die Planetenbahnen außer den erwähnten Störungen noch zyklodische Kräuselungen zeigen, welche den Mondumläufen entsprechen. Die Wrensche Konstante unseres Mondes ist 81 mal kleiner als jene der Erde.

138. Identität der Schwere und der Gravitation. Betrachten wir das partielle Beschleunigungsfeld der Erde. Als flüchtige Vermutung wurde schon von Fermat und R. Hooke, in bestimmter Weise aber erst von Newton (1687) der Gedanke ausgesprochen, daß die Schwerebeschleunigung, welche ebenso wie die Gravitationsbeschleunigungen von den Eigenschaften und der Geschwindigkeit des beschleunigten Körpers nicht abhängt, mit diesen verwandt ist, daß also der Mond als ein gegen die Erde fallender, oder schwerer Körper, und ein geworfener Stein als ein Trabant der Erde betrachtet werden kann. Tatsächlich ist die Schwerebeschleunigung nicht konstant, sondern vom Orte abhängig, und zwar auf hohen Gebirgen kleiner, in mäßig tiefen Schächten größer als auf der Erdoberfläche.

Ist das Feld der Schwerebeschleunigung nichts anderes als ein Teil des Gravitationsfeldes der Erde, so muß die Zentralbeschleunigung

$$g_1 = - 0,272 \text{ cm/sec}^2$$

des Mondes zu der Schwerebeschleunigung

$$g_0 = - 982 \text{ cm/sec}^2$$

im verkehrt quadratischen Verhältnis des Radius r_1 der Mondbahn zu dem Radius r_0 der Erdkugel stehen

$$\frac{g_0}{g_1} = \frac{r_1^2}{r_0^2}.$$

Da $r_1 = 60,3 r_0$, also

$$\frac{r_1^2}{r_0^2} = 3640$$

ist, während

$$\frac{g_0}{g_1} = 3610$$

ist, so ist hiermit bewiesen, daß die Schwerebeschleunigung keine besondere Erscheinung ist, sondern dem partiellen Gravitationsfelde der Erde angehört.

II. Die Gegenbeschleunigungen.

7. Das Gegenbeschleunigungsprinzip.

139. Niemals bewegt sich ein Körper beschleunigt, ohne daß mindestens ein zweiter, oft weit entfernter Körper sich in koordinierter ebenfalls beschleunigter Bewegung befände. Handelt es sich nur um zwei kleine Körper, deren gleichzeitige Bewegung zum vollen Verständnis des Bewegungsprozesses betrachtet werden muß, so sind deren Beschleunigungen immer entgegengesetzt gerichtet und haben die Richtung ihrer Verbindungslinie. Als Beispiel mag der Rückstoß dienen, welchen die Geschütze zeigen, während die Geschwindigkeit des Geschosses bis zur Wurfgeschwindigkeit steigt.

140. Auf den ersten Blick scheinen manche Tatsachen diesem Gegenbeschleunigungsprinzip zu widersprechen. Ein frei fallender Stein hat eine Beschleunigung, ohne daß man erkennt, welcher Körper die Gegenbeschleunigung zeigt. Da Kepler es

war, welcher diesen Widerspruch löste, muß man ihn als einen der Urheber dieses Prinzips betrachten. Nach Kepler fällt nicht sowohl der Stein gegen die Erde, als auch die Erde gegen den Stein, letztere freilich mit viel geringerer Beschleunigung. Erst Newton formulierte jedoch das Gegenbeschleunigungsprinzip mit einer für den praktischen Gebrauch desselben hinreichenden Klarheit.

Es wird sich empfehlen, daß der Leser sich hier von vorgefaßten Kenntnissen frei macht, um nach der folgenden von E. Mach¹ herrührenden Fassung dieses Gesetzes sich den Massenbegriff neu zu bilden.

141. Die Beschleunigungen g_1 und g_2 , welche zwei kleine Körper zeigen, die allein an einem Bewegungsprozeß beteiligt sind, sind entgegengesetzt gerichtet und stehen im verkehrten Verhältnis zweier konstanter Zahlen m_1 und m_2 , von welchen je eine einem der beiden Körper eigentümlich, von dem zweiten Körper, von der Art des Bewegungsprozesses und vielen anderen Umständen aber unabhängig ist:

$$(a) \quad m_1 g_1 + m_2 g_2 \stackrel{\Delta}{=} 0.$$

Diese wichtigen Konstanten nennt man die Massen der Körper.

Das Gegenbeschleunigungsgesetz ist eines jener Idealgesetze, welche die Grundlage einer umfangreichen Theorie bilden und an welche eine Bestätigung durch direkte Messungen nicht heranreichen würde (vgl. § 2).

142. Die Konstanz vieler Eigenschaften bei Änderung des Ortes, der Geschwindigkeit, der Beleuchtung, Temperatur und mancher anderer Eigenschaften, welche einen als Körper bezeichneten Raum charakterisiert, erhält ihren wissenschaftlichen Ausdruck durch den Nachweis, daß gewisse skalare Eigenschaften des Körpers ihren genauen Zahlenwert trotz Änderung mancher anderen Eigenschaften desselben bewahren. Je genauer die Konstanz dieser Zahl ist, desto mehr gewöhnen wir uns daran, sie als Charakteristikon des Körpers zu betrachten. Es gelang nach vielen Anpassungsschwierigkeiten, welche sich besonders auf gasförmige Ausscheidungen und

¹ E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1889, S. 202.

Volumänderungen von Körpern, die von Gasen umgeben sind, bezogen, die unbedingte Konstanz der Massenzahl festzuhalten. Seither betrachtet man dieselbe mit Recht, sowie vorher ohne Recht, als die körperlichste aller Eigenschaften.

143. Da es sich nach Gleichung 141. (a) stets nur um das Verhältnis der Massen handelt, sind diese wesentlich Relativzahlen. Weil es aber bequemer ist, mit absoluten Werten zu rechnen, so benennen wir die Massenzahl irgend eines Körpers, z. B. des in Paris aufbewahrten Etalons aus Platiniridium, willkürlich, z. B. mit 1000 Gramm. Dann sind auch alle anderen Massen nicht mehr als unbenannte Verhältniszahlen, sondern als benannte Zahlen zu gebrauchen.

144. Bezeichne $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ die beliebig gerichteten Geschwindigkeiten der beiden kleinen, allein an irgend einem Bewegungsvorgang beteiligten Körper, so kann das Gegenbeschleunigungsgesetz auch in der Form

$$m_1 d\mathbf{v}_1 + m_2 d\mathbf{v}_2 \stackrel{\Delta}{=} 0$$

ausgesprochen werden. Der Körper, dessen Massenzahl größer ist, erfährt die kleinere Geschwindigkeitsänderung. Es folgt durch Integration:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{f},$$

worin $\mathbf{f}$ ein konstanter, durch den Anfangszustand bestimmter Vektor ist.

Man bezeichnet das wegen dieser Gleichung zu öfterer Berücksichtigung kommende Produkt aus der Massenzahl und Geschwindigkeit eines Körpers als seine Bewegungsgröße.

In gleicher Weise bezeichnen wir das wegen der Gleichung 141 (a) und nur wegen dieser zu öfterer Berücksichtigung gelangende Produkt $m\mathbf{g}$ aus der Massenzahl und Beschleunigung eines Körpers als seine Beschleunigungsgröße.

Das Prinzip lautet also in der Differentialform: Die vektoriische Summe der Beschleunigungsgrößen ist Null, oder in der Integralform: Die vektoriische Summe der Bewegungsgrößen ist ein konstanter Vektor (Erhaltung der Bewegungsgrößen).

145. *Erste Methode der Massenbestimmung.* Durch die Beobachtung der gleichzeitigen Geschwindigkeitsänderungen der zwei Körper kann man die Konstanz des Verhältnisses dieser

Änderungen nachweisen und aus der Größe dieses Verhältnisses das Massenverhältnis der beiden Körper bestimmen. Der beobachtete Bewegungsvorgang ist beliebig, muß aber auf die zwei Körper beschränkt sein.

146. Erstes Beispiel: Der Geschwindigkeitsausgleich. Man erspart eine Geschwindigkeitsmessung, wenn die Geschwindigkeiten der beiden Körper sich während des beobachteten Bewegungsvorganges ausgleichen, so daß die Endgeschwindigkeit beider dieselbe ist.

Es findet dies stets nach einiger Zeit statt, wenn die beiden Körper während des Prozesses aneinander (durch Sperrhaken, Klebstoffe) hängen bleiben, und auch beim Stoß unelastischer sehr zäher Körper, z. B. plastischer Lehmklumpen.

Wenn ein mit der Geschwindigkeit v_1 schwebender Vogel, dessen Masse m_1 ist, von dem mit der Geschwindigkeit v_2 ankommenden Projektil, dessen Masse m_2 sei, getroffen, aber nicht durchschossen wird, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit v nach dem Ausgleich der Richtung und Größe nach bestimmt durch

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Lagen die Einzelgeschwindigkeiten in derselben Richtung, so gilt dies auch für die Ausgleichsgeschwindigkeit, und man erhält dann

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v}.$$

Dann kann das Massenverhältnis durch Messung der Größe der beiden Einzelgeschwindigkeiten und der Ausgleichsgeschwindigkeit bestimmt werden. Es steht diese Methode in formaler Analogie zu der Bestimmung der Wärmekapazitäten zweier Körper durch kalorimetrische Beobachtung des Temperatureausgleiches.

Denselben Vorteil hat man, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Körper gleich waren und sie während des Bewegungsvorganges mit verschiedenen Geschwindigkeiten auseinander geworfen werden, wie dies durch elastische Wirkungen oder Explosionen zu erreichen ist.

147. Da man viel bessere Methoden zur Massenbestimmung besitzt, wird in der Praxis die Methode des Geschwindigkeits-

ausgleiches und ihre Umkehrung selten verwendet, am häufigsten in der Geschütztechnik.

Die Geschwindigkeiten können mittels des ballistischen Pendels gemessen werden. Hat ein Pendelkörper in seiner tiefsten Lage die Geschwindigkeit v , so erreicht derselbe die Höhe $v^2/2g_0$. Man beobachtet den Ausschlagswinkel α und es berechnet sich aus demselben die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g_0 l(1 - \cos \alpha)} \doteq \alpha \sqrt{g_0 l} = \frac{\alpha}{2\pi} g_0 \tau,$$

worin die Pendellänge l , oder besser die Schwingungsdauer τ des Pendels bekannt sein muß.

Das Gewehr 1 (Fig. 31) und die Zielscheibe 2 werden pendelartig aufgehängt. Während des Schusses nimmt das

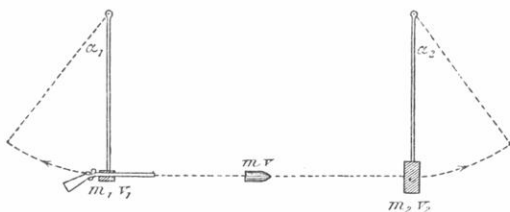


Fig. 31.

Gewehr, dessen Masse m_1 sei, die der Schußrichtung entgegengesetzte Geschwindigkeit v_1 an, die sich aus dem Pendelausschlag messen läßt.

Das Projektil von der Masse m gewinnt hierbei die Geschwindigkeit v und es ist:

$$0 = m_1 v_1 + m v.$$

Während des Einschlagens des Geschosses steigt die Geschwindigkeit der Scheibe, deren Masse m_2 ist, von Null auf v_2 . Bei diesem Ausgleich ist

$$m v = (m + m_2) v_2.$$

Aus diesen zwei Gleichungen könnte man, wenn m_1 und m_2 bekannt ist, die Masse m und die Geschwindigkeit v des Geschosses bestimmen. Es sei z. B. $m_1 = m_2 = 10000$ g,

$v_1 = -50$ cm/sec, $v_2 = +49,95$ cm/sec, dann ist des Geschosses Geschwindigkeit $v = 50000$ cm/sec und seine Masse $m = 10$ g.

Wenn m sehr klein ist, kann man m/m_2 gegen 1 vernachlässigen, und erhält dann die Beziehung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Man kann so mit einiger Genauigkeit aus dem Verhältnis der beiden ballistischen Ausschläge das Verhältnis der Massen der beiden Pendelkörper bestimmen.

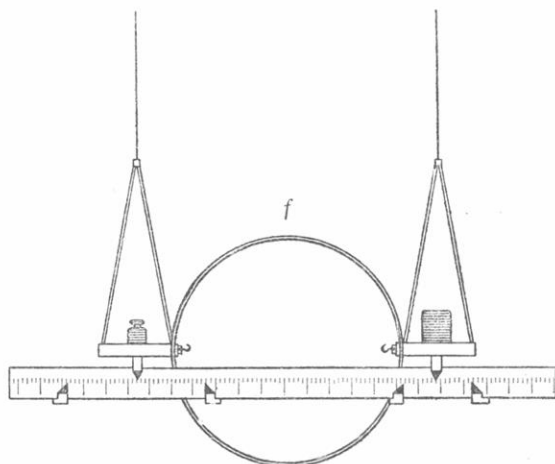


Fig. 32. Schwingungswage.

Die Bestimmung der großen Geschößgeschwindigkeit v bei genau bekannter Masse m des Geschosses hat formale Ähnlichkeit mit der kalorimetrischen Bestimmung der hohen Temperatur eines Körpers von bekannter Wärmekapazität.

148. Zweites Beispiel: Die Schwingungswage. Recht gute Bestimmungen kann man in der Weise machen, daß man die zwei Körper durch eine gespannte elastische Feder f (Fig. 32) verbindet und nun frei schwingen läßt.

Diese Anordnung bietet folgenden Messungsvorteil. Da die Körper gleichzeitig zu schwingen beginnen, müssen ihre Geschwindigkeiten stets im negativen verkehrten Verhältnis ihrer Massen stehen, und deshalb stehen auch die bequem meßbaren

Amplituden a_1 und a_2 dieser Schwingungen in dem negativen verkehrten Verhältnis der Massen m_1 und m_2 der beiden Körper

$$\frac{a_1}{a_2} = - \frac{m_2}{m_1}.$$

Damit die Massen in horizontaler Richtung beweglich sind, müssen sie pendelartig aufgehängt werden. Hierdurch wird der Einfluß der Schwerebeschleunigung aufgehoben, ohne daß die Genauigkeit der Messung des Massenverhältnisses durch das Amplitudenverhältnis im geringsten beeinträchtigt würde.

Statt der elastischen Schwingung können dann aber die beiden Körper auch zusammen (in gleicher Richtung) die Pendelschwingung ausführen. Um diese Schwingungsform zu vermeiden, spannt man die Feder mittels eines Fadens, bringt die Pendel zur Ruhe, und brennt nun den Faden ab, wobei die reinen elastischen Schwingungen eintreten.

149. Partielle Gegenbeschleunigungen. Beteiligen sich n kleine Körper an einem Bewegungsvorgange, so läßt sich die wahre Beschleunigung $\mathfrak{g}_i$ eines jeden derselben oft darstellen als die Summe von $(n - 1)$ partiellen Beschleunigungen $\mathfrak{g}_{ik}$

$$\mathfrak{g}_i \stackrel{s}{=} \sum_k \mathfrak{g}_{ik},$$

von welchen sich jede auf einen anderen Körper k des Systems bezieht, und welche durch direkte Gesetze bestimmt sind.

Wenn die Körper i und k z. B. durch eine elastische Feder verbunden sind, so bestimmt die Spannung derselben die zwei Beschleunigungen $\mathfrak{g}_{ik}$ und $\mathfrak{g}_{ki}$. Im Gravitationsfelde mehrerer Körper ist die partielle Beschleunigung $\mathfrak{g}_{ik}$ des Körpers i durch das im vorigen Abschnitt beschriebene partielle Gravitationsfeld des Körpers k bestimmt.

Es läßt sich in solchen Fällen nachweisen, daß für jedes Paar dieser partiellen Beschleunigungen das Gegenbeschleunigungsgesetz erfüllt ist:

$$m_i \mathfrak{g}_{ik} + m_k \mathfrak{g}_{ki} \stackrel{s}{=} 0.$$

Man erhält dann $\binom{n}{2}$ derartige Gleichungen. Sind jedoch die partiellen Beschleunigungen unbekannt, so kann man nicht

mehr als die Gültigkeit der Summe aller dieser Gleichungen behaupten. Es ist nämlich

$$\sum_i (m_i \sum_k \mathbf{g}_{ik}) \stackrel{a}{=} \sum_i m_i \mathbf{g}_i \stackrel{a}{=} 0.$$

In dieser Gleichung erscheinen die direkt meßbaren wahren Beschleunigungen $\mathbf{g}_i$ der Körper. Durch Integration folgt

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \stackrel{a}{=} \mathbf{f}.$$

Die vektorische Summe der Beschleunigungsgrößen $m_i \mathbf{g}_i$ aller an dem Prozeß beteiligten Körper ist Null. Die vektorische Summe aller Bewegungsgrößen ist ein konstanter Vektor $\mathbf{f}$.

Wenn z. B. ein Explosionsgeschloß von der Masse m und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ während des Fluges platzt, so daß die Sprengstücke von den Massen m_i die nach allen Seiten gerichteten Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i$ und Bewegungsgrößen $m_i \mathbf{v}_i$ erhalten, so ist die Summe dieser Vektoren $m_i \mathbf{v}_i$ gleich und gleichgerichtet der Bewegungsgröße $m \mathbf{v}$ des Geschosses vor der Explosion.

150. Der Massenmittelpunkt. Bezeichne $\mathbf{r}_i$ den Abstand des Körpers von der Masse m_i von einem beliebigen ruhenden Zentrum, so heißt der Vektor $m_i \mathbf{r}_i$ das Moment der Masse in bezug auf das Zentrum. Das nach den Massen genommene vektorische arithmetische Mittel aller Massenmomente der Körper eines Systems definiert den vektorischen Abstand $\mathbf{r}_0$ des Massenmittelpunktes des Systems von dem Zentrum

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \stackrel{a}{=} \mathbf{r}_0 \sum m_i.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit folgt

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \stackrel{a}{=} \mathbf{v}_0 \sum m_i,$$

worin $\mathbf{v}_0$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist. Da die Summe der Bewegungsgrößen sowohl als der Massen konstant ist, so ist auch $\mathbf{v}_0$ konstant, d. h. der Massenmittelpunkt sämtlicher Körper eines Systems verharret unbedingt in gleichförmiger (unbeschleunigter) Bewegung.

151. Erhaltung der Bewegungsmomente. Der Flächensatz. Der Satz der Erhaltung der Bewegungsgrößen stellt das Gegen-

beschleunigungsgesetz nicht vollständig dar. Wir haben dasselbe schon in 141. in nicht vollständiger Form ausgesprochen und fügen nun hinzu: Die Beschleunigung und Gegenbeschleunigung zweier allein an einen Bewegungsprozeß beteiligter kleiner Körper liegen immer in der Verbindungslinie derselben.

Zum Zwecke der Verallgemeinerung wollen wir dies in folgender Weise ausdrücken.

Es seien $\mathbf{g}_{ik}$ und $\mathbf{g}_{ki}$ die Gegenbeschleunigungen der allein vorhandenen zwei Körper i und k , deren Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_k$, deren Verbindungslinie also $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ ist. Die Gegenbeschleunigungen fallen in die Richtung dieser Verbindungslinie, es ist also

$$(a) \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{g}_{ik} \stackrel{a}{=} 0,$$

und ferner gilt das Gegenbeschleunigungsgesetz:

$$m_i \mathbf{g}_{ik} + m_k \mathbf{g}_{ki} \stackrel{a}{=} 0.$$

Hieraus folgt

$$(b) \quad m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}_{ik} + m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{g}_{ki} \stackrel{a}{=} 0.$$

Die Ortsvektoren $\mathbf{r}$ können von einem beliebigen festen Nullpunkt aus gezählt werden. Man bezeichnet das rotorische Produkt $\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ eines für den Punkt i bestimmten Vektors $\mathbf{v}_i$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_i$ dieses Punktes als das Moment dieses Vektors $\mathbf{v}_i$ in bezug auf den Nullpunkt.

Das Gegenbeschleunigungsgesetz läßt sich also in vollständiger Form folgendermaßen aussprechen:

Die Summe der Momente der Beschleunigungsgrößen zweier allein an einem Bewegungsprozeß beteiligten Körper in bezug auf einen beliebigen Nullpunkt ist Null

$$(c) \quad \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}_{ik} + \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{g}_{ki} \stackrel{a}{=} 0.$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\mathbf{v}_i \stackrel{a}{=} \dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{also} \quad \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i \stackrel{a}{=} 0,$$

so können wir diese Gleichung auf die Form bringen

$$(d) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) \stackrel{a}{=} 0.$$

Die Summe der Momente der Bewegungsgrößen in bezug auf einen beliebigen Nullpunkt ist konstant.

Ein sehr spezieller Fall dieses Satzes ist der Flächensatz der Zentralbewegung (82.). Wenn die eine der beiden

Massen weit überwiegende Größe hat, so bleibt sie nahezu in Ruhe und die Beschleunigung des anderen Körpers ist dann stets nach einem festen Zentrum gerichtet.

152. Verallgemeinerung. In den eben ausgesprochenen Formen läßt sich das vollständige Gesetz der Gegenbeschleunigung auf Bewegungsprozesse, an welchen beliebig viele kleine Körper teilnehmen, verallgemeinern. Wenn wir auch in diesem Falle nicht immer die partiellen Einzelbeschleunigungen $\mathbf{g}_{ik}$ kennen und also auch nicht behaupten können, daß sie in die Richtungen der Verbindungslinien fallen, so können wir doch die Gültigkeit der Summe aller $\binom{n}{2}$ Gleichungen 151.(c) oder 151.(d) konstatieren, denn diese Summe enthält wieder die wahren direkt beobachteten Beschleunigungen $\mathbf{g}_i$ der Körper.

Die höchste Form des Gegenbeschleunigungsgesetzes ist also:

$$(a) \quad \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}_i \stackrel{=}{=} 0$$

oder

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \stackrel{=}{=} \mathbf{f}.$$

Die Summe der Momente der Beschleunigungsgrößen ist Null, die Summe der Momente der Bewegungsgrößen ist ein konstanter Vektor $\mathbf{f}$.

153. Diese Momente können auf einen beliebigen Nullpunkt bezogen werden. Es folgt deshalb aus diesem Momentensatz der Satz der Erhaltung der Bewegungsgrößen.

Es seien $\mathbf{r}'_i$ die von einem zweiten Nullpunkt aus gezählten Ortsvektoren der Körper i , so daß $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)$ die konstante Entfernung beider Nullpunkte ist. Wenn nun auch

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{g}_i \stackrel{=}{=} 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \stackrel{=}{=} \mathbf{f}$$

ist, so folgt durch Subtraktion von 152.(a)

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i) \times \sum_i m_i \mathbf{g}_i \stackrel{=}{=} 0 \quad \text{oder} \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i) \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i \stackrel{=}{=} \mathbf{f}.$$

Da die Richtung $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i)$ beliebig ist, muß

$$\sum_i m_i \mathbf{g}_i \stackrel{=}{=} 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i m_i \mathbf{v}_i \stackrel{=}{=} \mathbf{f}$$

sein und umgekehrt: Aus dem Satz der Erhaltung der Bewegungsgrößen und dem auf einen bestimmten Nullpunkt be-

zogenen Satz der Erhaltung der Bewegungsmomente folgt, daß letzterer Satz für jeden beliebigen Nullpunkt gilt. Deshalb wendet man oft diese beiden Sätze nebeneinander an, wobei man dann den Momentensatz nur auf ein Zentrum zu beziehen braucht.

154. Das Moment $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ist die von dem Radiusvektor $\mathbf{r}$ in zwei Sekunden durchstrichene Fläche. Der Momentensatz ist deshalb sehr anschaulich und führt auch den Namen des Flächensatzes. Die von den Radien der einzelnen Körper

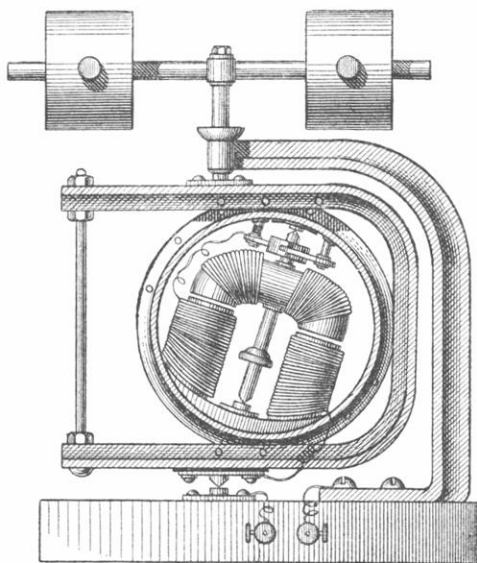


Fig. 33. Vorlesungsapparat.

durchstrichenen Flächen also ausgeführten Drehungen müssen verschiedene Richtungen haben, wenn sie, mit den Massen multipliziert, sich vektorisch aufheben, was immer der Fall sein muß, wenn das System aus der Ruhe in die betrachtete Bewegung gelangte.

In der Technik kommen Drehungen um feste Zentren selten, desto häufiger Drehungen um feste Achsen vor. Man spezialisiert deshalb den Momentensatz für eine Achse $\mathbf{h}$, von welcher die Körper die senkrechten Abstände $\mathbf{a}_i$ haben,

indem man nur die Projektion der Momente auf diese Achse betrachtet. Es ergibt sich:

$$\mathbf{b} \cdot \sum_i m_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{v}_i = \text{konst.}$$

Das Produkt $\mathbf{a}_i \times \mathbf{v}_i$ nennt man das Moment des Vektors $\mathbf{v}_i$ in bezug auf die ruhende Achse. Die Summe der Projektionen dieser Momente der Bewegungsgrößen auf jede beliebige ruhende Achse ist ein konstanter Vektor.

Als Beispiel betrachten wir ein steuerloses, anfänglich ruhendes Schiff, auf welchem nun eine Maschine ein Schwungrad mit lotrechter Achse dreht. Während des Anlaufens setzt sich auch das Schiff in beschleunigte, aber umgekehrte Drehung um dieselbe Achse, bei gleichmäßiger Drehung des Schwungrades ist auch die Rotation des Schiffes gleichmäßig. Bringt man nun die auf dem Schiff befindlichen Lasten in größere Entfernung von der Drehachse, so wird hierbei und ist hiernach die Drehung des Schiffes langsamer. Hält die Maschine das Schwungrad wieder an, so wird hierdurch auch die Drehung des Schiffes aufgehoben (vgl. Fig. 33).

155. Wir haben das Gegenbeschleunigungsgesetz bisher nur für ein System kleiner Körper ausgesprochen, es läßt sich aber ohne weiteres auf große kontinuierlich ihren Raum erfüllende Körper übertragen, da man diese in kleine Körper zerlegt denken kann.

Man kann sich diese Zerlegung wirklich vorgenommen und die Masse jedes Körperteilchens einzeln gemessen denken. Als Masse M des ganzen Körpers definiert man die Summe der Massen m seiner Teile. $M = \sum m$.

Man kann aber, ohne den Körper zu zerlegen, diese Massensumme oder wie man sagt die Masse M des ganzen Körpers auch durch ein einziges Gegenbeschleunigungsexperiment mit der Masse eines anderen Körpers vergleichen. Es ist jedoch notwendig, daß bei diesem Versuch alle Teile eines Körpers dieselbe Beschleunigung haben, daß also die Körper nur translativ Verschiebungen ausführen. Sei $\mathbf{v}_1$ die Geschwindigkeit aller Teile des einen, $\mathbf{v}_2$ die Geschwindigkeit aller Teile des zweiten großen Körpers, so lautet der Summensatz der Erhaltung der Bewegungsgrößen

$$v_1 \sum_1 m_1 + v_2 \sum_2 m_2 \stackrel{=}{=} M_1 v_1 + M_2 v_2 \stackrel{=}{=} f,$$

hat also dann ganz dieselbe Form, wie für kleine Körper.

Die wichtigste experimentelle Vorschrift für Massenbestimmungen ist also, daß die zu vergleichenden Körper bei dem Versuch nur Parallelverschiebungen, aber keine Drehungen ausführen.

156. Die Massen der verschiedenen Körper haben nicht zufällige, sondern gesetzmäßige Werte. Kennt man alle übrigen Eigenschaften eines Körpers, so kann man aus denselben seine Massenzahl berechnen. Zwei in jeder anderen Beziehung gleiche Körper haben auch gleiche Masse.

Denkt man sich einen homogenen Körper in gleichgeformte kleine Teile zerlegt, so müssen diese alle dieselbe Masse haben. Die Masse eines aus ihnen zusammengesetzten größeren Körpers ist dann ihrer Anzahl proportional. Die Massen zweier aus demselben Stoff bestehender Körper beliebiger Form verhalten sich deshalb wie ihre Volume.

Gleiches Volum verschiedener Stoffe hat aber verschiedene Masse. Die Masse eines Körpers pro Raumeinheit, die spezifische Masse oder Dichte, ist eine jener spezifischen Konstanten, welche den Stoff des Körpers charakterisieren. Der Stoff zweier Körper wird gleich genannt, wenn dieselben gleiche Dichte haben, und wenn auch die übrigen spezifischen Konstanten derselben (spezifische Wärmekapazität, Wärmeleitungsfähigkeit, elektrische und magnetische Konstante, elastische und Zähigkeitskonstanten usw.) gleich sind. Viele von diesen spezifischen Konstanten sind noch nicht scharf präzisiert, es ist uns aber immer leicht, die Gleichheit zweier Stoffe aus ihren Eigenschaften zu erkennen.

Den reziproken Wert der Dichte, d. i. das Volum der Masseneinheit eines Stoffes, nennt man spezifisches Volum.

157. *Erhaltung der Massensumme.* Die Masse ist eine so charakteristische Eigenschaft der Körper, daß sie im wesentlichen vor aller Wissenschaft bekannt war. Auch das Gesetz, daß die Summe der Massen aller an irgend einem Vorgang beteiligten Körper konstant ist, stammt aus vor-

wissenschaftlichen Zeiten, wurde bei Entdeckung neuartiger Vorgänge stets von neuem geprüft und immer genau bestätigt gefunden.

8. Die astronomischen Gegenbeschleunigungen.

158. Die Gültigkeit des Gegenbeschleunigungsgesetzes für die astronomischen Bewegungen ist leicht zu erkennen und wurde nie bezweifelt. Schon Kepler vermutete, wie bereits erwähnt, daß nicht nur der Stein gegen die Erde, sondern auch die Erde gegen den Stein falle, letztere freilich wegen ihrer großen Masse mit sehr kleiner Beschleunigung. Doch war es erst Newton, welcher das Gegenbeschleunigungsgesetz ausgiebig zu astronomischen Massenbestimmungen verwendete.

159. Die Konstanz des Verhältnisses der astronomischen Gegenbeschleunigungen geht aus allen Beobachtungen der Planeten- und Satellitenbewegung hervor. Es kreist z. B. der Mond nicht in einer elliptischen Bahn um den die Sonne umkreisenden Erdmittelpunkt, sondern dieser und der Mondmittelpunkt kreisen in entgegengesetzter Richtung um einen zwischen ihnen liegenden Punkt, welcher allerdings noch im Innern der Erde liegt, aber 4800 km von dem Erdmittelpunkt entfernt ist, und welcher die einfach elliptische Erdbahn durchläuft. Daß die Erde außer ihrem jährlichem Umlauf um die Sonne noch diesen monatlichen Umlauf in einem Kreise von 4800 km Radius vollführt, erkennt man an der entsprechenden parallaxischen Kreisung aller Planeten, welche für Mars in Erdnähe eine flache Ellipse darstellt, deren große Achse der Mondbahn parallel ist und unter dem Winkel von 11" erscheint.

160. *Verhältnis der Massen der Erde und des Mondes.* Da der Mond in einem Kreise von 384000 km, also in einem 81 mal größeren Kreise um den gemeinsamen Mittelpunkt läuft, um welchen auch die Erde monatlich kreist, so ist die Zentralbeschleunigung des Mondes 81 mal größer als die Zentralbeschleunigung der Erde bei ihrer monatlichen Kreisung. Da wir hiermit das Verhältnis der Beschleunigung und Gegenbeschleunigung kennen, so ergibt das Gegenbeschleunigungsgesetz das Verhältnis der Massen. Die Masse des Mondes ist 81 mal

kleiner als die Masse der Erde. Da der Durchmesser des Mondes 3,7 mal kleiner ist als jener der Erde, das Volum des Mondes also 50 mal kleiner als jenes der Erde, so ergibt sich, daß der Mond eine im Verhältnis 50:81 geringere Dichte hat als die Erde. Immerhin sind diese Dichten so weit von gleicher Größenordnung, daß man hier das erste Beispiel hat, daß sich der Stoff der Himmelskörper nicht sehr wesentlich von irdischen Stoffen unterscheidet. Hierdurch erhält auch das Gegenbeschleunigungsgesetz eine Stütze, die insofern nicht überflüssig ist, als ja doch sehr wohl das konstante Verhältnis der Gravitation und Gegengravitation zweier Weltkörper durch andere Massenzahlen als ihre sonstigen Beschleunigungen bestimmt sein könnte, da sie sich auch in anderer Beziehung wesentlich von den irdischen Beschleunigungen unterscheiden.

161. *Typus des Gravitationsgesetzes.* In § 133. wurde nachgewiesen, daß die Beschleunigungen im Felde eines Weltkörpers nur von dem Orte, aber nicht von den sonstigen Eigenschaften der beschleunigten Körper abhängen. Ein Spezialfall dieses Gesetzes ist, daß die Schwerebeschleunigung nur von dem Orte, aber nicht von den Eigenschaften des beschleunigten Körpers abhängt. Wir wollen nun die Konsequenzen dieser Tatsache erwägen.

162. Da die Beschleunigung jedes der beiden gegenbeschleunigten Weltkörper von seiner eigenen Masse unabhängig ist, so muß sie durch die Masse des anderen Körpers bestimmt sein, weil man sonst das Gegenbeschleunigungsgesetz nicht erfüllt finden könnte, wenn man die Beschleunigungen der beiden Körper vergleicht.

Alle Beschleunigungen g im Gravitationsfelde eines Weltkörpers werden aber durch das Newtonsche Gesetz bestimmt:

$$g = - \frac{4\pi^2 k}{r^2},$$

worin k die Wrensche Konstante des Weltkörpers und r die Entfernung von demselben ist. Die Wrensche Konstante jedes Weltkörpers muß also von der Masse desselben abhängig sein.

163. Die Form dieser Abhängigkeit ist leicht festzustellen. Da die Gegenbeschleunigungen zweier Weltkörper von den

eigenen Massen unabhängig und ihr Verhältnis doch durch das verkehrte Verhältnis der beiden Massen bestimmt wird, so muß jede der Masse des gegenbeschleunigten Körpers gerade proportional sein. Mit anderen Worten:

Da von den Gegenbeschleunigungen jede dem Felde des anderen Weltkörpers angehört, sind sie den Wrenschen Konstanten der beiden Körper verkehrt proportional, und da sie auch den Massen verkehrt proportional sein müssen, so müssen die Wrenschen Konstanten k aller Weltkörper deren Massen M proportional sein.

$$(a) \quad 4\pi^2 k = KM.$$

Der Proportionalitätsfaktor K , die Gravitationskonstante, ist eine universelle, für alle Weltkörper gleiche Konstante. Da k die Dimension ($\text{cm}^3 \text{sec}^{-2}$) des dritten Keplerschen Gesetzes § 132 hat, so hat die Gravitationskonstante die Dimension $\text{gr}^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-2}$. Ihr Wert muß so lange unbekannt bleiben, als wir nicht die Masse irgend eines Weltkörpers mit einer irdischen Masse, also auch mit dem Gramme vergleichen können.

164. Das Newtonsche Gravitationsgesetz hat sonach die Form

$$g = -K \frac{M}{r^2}.$$

Hierin ist g die Beschleunigung irgend eines Körpers an einem Orte, welcher den Abstand r von dem Mittelpunkt des Weltkörpers hat.

165. Zweite Methode der Massenbestimmung. Bei der ersten, nur auf das Gegenbeschleunigungsgesetz gegründeten Methode zur Bestimmung eines Massenverhältnisses, muß das Verhältnis der gleichzeitigen Beschleunigungen beider Körper gemessen werden. Auch astronomische Massenvergleiche werden oft nach dieser Methode gemacht. Ein Beispiel hierfür ist die in 160. mitgeteilte Bestimmung des Massenverhältnisses von Erde und Mond.

Nun können wir aber aus dem Gravitationsgesetz durch die Beobachtung der Richtung oder Größe der Beschleunigung an irgend einem Orte des Feldes zweier Weltkörper deren Massenverhältnis bestimmen.

Diese Methode ist von praktischer Bedeutung: für die Vergleichung der Massen von Planeten, die keine Satelliten haben, wobei man die Bahnstörungen von Kometen im Felde dieser Planeten zugrunde legt; für den Vergleich einer Planeten- und der Sonnenmasse auf Grund der Störungen eines Trabanten dieses Planeten durch die Sonne; für den Vergleich der Erd- und Mondmasse auf Grund der beobachteten Zusammensetzung der Mondgravitation mit der Erdschwere; endlich bei der Auswertung der Gravitationskonstanten in terrestrischen Maßeinheiten.

Eine wichtige Modifikation dieser Methode ist die folgende.

166. *Bestimmung der Masse eines Zentralkörpers aus dem Umlauf eines Trabanten.* Man kann durch Ausmessung der Größe einer Beschleunigung im partiellen Felde eines einzelnen Weltkörpers die Masse desselben allerdings mit dem universellen Proportionalitätsfaktor K behaftet bestimmen.

Diese Methode der Massenbestimmung beruht auf der Bestimmung der Wrenschens Konstanten des Gravitationsfeldes des betreffenden Weltkörpers. Die Methoden hierfür haben wir in 135. und 137. kennen gelernt. Wir brauchen also nur die dort angegebenen Werte der Wrenschens Konstanten k mit $4\pi^2$ zu multiplizieren, um nach 163. (a) die Massen der Weltkörper in absolutem Maß, aber mit dem unbekannten Faktor K behaftet zu bestimmen.

Man erhält folgende Werte der Massen M und der Dichten μ der Weltkörper. Letztere beziehen wir auf die Dichte μ_0 der Erde.

Zentralkörper	Masse $K M \times 10^{-20}$	Durchmesser in Kilometern	Relative Dichte μ/μ_0
Sonne . . .	1297000,0	13700000	0,25
Merkur . . .	0,13	4740	0,63
Venus . . .	3,21	12700	0,80
Erde	3,99	12700	1,00
Mond	0,05	3420	0,62
Mars	0,42	6710	0,71
Jupiter . . .	1235,0	147000	0,23
Saturn	371,0	118000	0,11
Uran	58,8	53700	0,19
Neptun . . .	66,0	48200	0,30

Es ist nicht so lange her, daß man die Himmelskörper für immaterielle Lichter gehalten hat. Nun sehen wir, daß die Dichte der Weltkörper mit der Erddichte vergleichbar ist. Immerhin ist die Dichte der Weltkörper desto kleiner, je weiter sie von der Erde abstehen, was nicht ohne weiteres auf optische Fehler bei der Messung der Durchmesser (Wolkenhüllen der Weltkörper usw.) zurückgeführt werden kann.

Nur die Kometen haben trotz ihrer ungeheuren Größe keine nachweisbare Masse.

167. *Bestimmung der Summe der Massen zweier Weltkörper aus deren relativer Kreisung.* Die meisten der angegebenen Massen (oder Wrenschens Konstanten) erhält man durch Beobachtung des mittleren Abstandes r und der Umlaufszeit τ eines Trabanten des betrachteten Zentralkörpers. Genau genommen erkennt man jedoch hierdurch nicht die Masse des Zentralkörpers, sondern die Summe der Massen beider Körper.

Wir haben die Beschleunigung des Trabanten bisher immer durch die Huyghenssche Gleichung

$$g \stackrel{a}{=} - \frac{4\pi^2}{\tau^2} r$$

berechnet. Wenn aber unter r nicht der Abstand r_1 von dem wahren Mittelpunkte der Bahn, sondern von dem Mittelpunkte des Zentralkörpers verstanden wird, so ist g nicht die Beschleunigung des Trabanten, sondern seine Relativbeschleunigung gegen den Zentralkörper. Das Gravitationsgesetz bezieht sich aber auf die absolute Beschleunigung desselben. Bezeichnen wir diese mit g_1 , die absolute Zentralbeschleunigung des Zentralkörpers in seiner Bahn vom Radius r_0 mit g_0 , die Massen beider Körper mit m_1 bzw. m_0 , so ist

$$\begin{aligned} g_1 &\stackrel{a}{=} -K \frac{m_0}{r r}, & g_0 &\stackrel{a}{=} K \frac{m_1}{r r}, \\ g_1 &\stackrel{a}{=} -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r_1, & g_0 &\stackrel{a}{=} -\frac{4\pi^2}{\tau^2} r_0. \end{aligned}$$

Da $r_1 - r_0 \stackrel{a}{=} r$ oder $g_1 - g_0 \stackrel{a}{=} g$ ist, so folgt:

$$(a) \quad K(m_0 + m_1) = 4\pi^2 \frac{r^3}{\tau^2}.$$

Es steht also nicht, wie aus der Tabelle § 135. hervorgehen würde, die Wrensche Konstante der Sonne zu jener der Erde

in dem Verhältnis 33600:0,112, sondern dies ist genau genommen das Verhältnis der Summe dieser Wrenschens Konstanten zu der Summe der Wrenschens Konstanten von Erde und Mond, oder das Verhältnis der Summe der Sonnen- und Erdmasse zu der Summe der Erd- und Mondmasse. Diese kleine Korrektur wurde in der Tabelle § 166. bereits berücksichtigt.

Mißt man aber nicht die relative Distanz der beiden Körper, sondern die Radien r_1 und r_0 der Bahnen derselben um den gemeinsamen Mittelpunkt, so erhält man ihr genaues Massenverhältnis (vgl. § 160.)

$$\frac{m_1}{m_0} = - \frac{r_0}{r_1}.$$

Es ist dies eine der Bestimmung eines Massenverhältnisses durch ein Amplitudenverhältnis (§ 148.) ganz ähnliche, auf die erste Methode zur Massenbestimmung gegründete Messung.

168. Gravitation und Massen der Doppelsterne. Nicht nur in dem verhältnismäßig kleinen Raume, welchen das Planetensystem einnimmt, sondern in dem ganzen Weltraum bemerken wir gleiche Bewegungsformen. Es gibt viele Doppelsterne, welche nach den Keplerschen Gesetzen in elliptischen Bahnen um einen gemeinsamen Mittelpunkt kreisen.

α Centauri ist z. B. ein Doppelstern, welcher 0,8'' jährliche Parallaxe zeigt, also 265 000 mal so weit von uns entfernt ist als die Sonne. Die beiden Sterne haben den Abstand 17,7'' voneinander. Da derselbe 22 mal so groß ist als die Parallaxe des Gestirns, so sind die beiden Sterne 22 mal so weit voneinander entfernt als die Erde von der Sonne. Ihre Umlaufszeit beträgt 81 Jahre. Hieraus folgt nach Gleichung 167 (a), daß die Summe ihrer Massen gleich 1,7 Sonnenmassen ist

$$\frac{1}{4\pi^2} K(m_0 + m_1) = \frac{22^3}{81^2} = 1,7.$$

Da beide Sterne sich nahezu gleich stark bewegen, hat jeder ungefähr 0,85 Sonnenmassen.

Aus den Bewegungen des Sirius schloß man auf das Vorhandensein eines dunklen Begleitsternes. Derselbe wurde später entdeckt, er ist 16 000 mal lichtschwächer als der Sirius, bewegt sich aber nur doppelt so rasch als dieser, seine Masse ist also nur zweimal kleiner als die Masse des Sirius. Die jährliche Parallaxe desselben beträgt 0,19'', die Distanz beider

Sterne voneinander ist 39 mal so groß (7,5'') also gleich 39 Erdbahnradien. Die Umlaufszeit des Doppelsternes ist 49 Jahre. Die Summe der Massen beider Sterne ist also $39^3/49^2$ gleich 24 Sonnenmassen. Der Sirius hat also 16 Sonnenmassen, sein dunkler Begleiter hat 8 Sonnenmassen.

169. *Das wahre Gravitationsfeld* mehrerer Weltkörper resultiert aus den partiellen Feldern derselben durch vektorische Summation. Die wahre Beschleunigung $\mathbf{g}$ in irgend einem Punkte des Feldes ist gleich der vektorischen Summe der durch die Masse und Entfernung der einzelnen Weltkörper bestimmten partiellen Beschleunigungen $\mathbf{g}_i$

$$\mathbf{g} \stackrel{3}{=} \sum_i \mathbf{g}_i.$$

Diese haben die Potentiale P_i , so daß:

$$\mathbf{g}_i \stackrel{3}{=} \nabla P_i, \quad \text{wobei} \quad P_i = K \frac{M_i}{r_i}.$$

Hierin ist r_i die Entfernung des Weltkörpers von der Masse M_i von dem betrachteten Punkte des Feldes.

Nach 104. folgt, daß die wahre Beschleunungsverteilung des Feldes ebenfalls ein Potential P besitzt, welches die algebraische Summe der Einzelpotentiale P_i ist

$$(a) \quad P = \sum_i P_i = K \sum_i \frac{M_i}{r_i}.$$

170. Beispiel. Die Potentialniveauflächen des Feldes zweier Weltkörper, welche die gleiche Masse M haben, bilden Rotationsflächen, deren Achse die Verbindungslinie beider Körper, ist und deren Meridiankurven nach 169. (a) durch

$$KM \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \text{konst.},$$

also durch eine Cassinische Kurvenschar dargestellt werden.

Die Beschleunigung $\mathbf{g}$ ist der Gradient dieses resultierenden Potentials und steht deshalb überall auf den Niveauflächen senkrecht, ausgenommen in dem Mittelpunkt des Feldes, wo sie Null ist. Auch ihre Größe erkennt man leicht, sie ist der Dicke der Niveauschichten verkehrt proportional. Fig. 34 stellt das ähnliche aber unsymmetrische Feld zweier Weltkörper von ungleichen Massen, z. B. Erde und Mond, dar, und zwar die Meridiane der Niveauflächen durch gestrichelte Linien, die

Vektorlinien des Feldes aber durch voll ausgezogene Linien. In der Nähe jedes der beiden Weltkörper, z. B. der Erde, überwiegt ihr eigenes Gravitationsfeld jenes des anderen so sehr, daß die Verteilung der Schwerebeschleunigung in der Nähe der Oberfläche der Erde nahezu genau deren ungestörtes Gravitationsfeld darstellt. Noch weniger deutlich ist die Mondwirkung, weil wir nicht absolute, sondern nur relative Be-

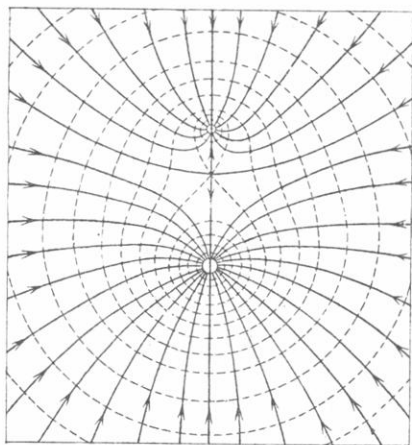


Fig. 34.

schleunigungen irdischer Körper gegen die Erdoberfläche beobachten können.

Diese werden modifiziert: 1. Durch den gemeinsamen Umlauf der Erde und des Mondes um den Massenmittelpunkt, und 2. durch die Ungleichförmigkeit des Gravitationsfeldes des Mondes für verschiedene Orte der Erde.

171. *Abplattung der Erde zufolge ihres monatlichen Umlaufes.* Sehen wir zunächst von der täglichen und jährlichen Rotation der Erde und von der Ungleichförmigkeit des Gravitationsfeldes des Mondes ab und betrachten nur den monatlichen Umlauf der Erde um eine Achse, welche 4800 km von ihrem Mittelpunkte, der immer dem Monde gegenüberliegt, entfernt ist und auf der Ebene der Mondbahn senkrecht steht.

Würde die ganze Masse der Erde im Mittelpunkte konzentriert und sich mit der Beschleunigung desselben bewegen,

so bliebe hierdurch das Moment der Beschleunigungsgrößen ungeändert und entgegengesetzt dem Moment der Mondmasse in bezug auf die gemeinsame Achse. Dann müßte der Erdmittelpunkt die partielle Beschleunigung des Gravitationsfeldes des Mondes zeigen, er hat sie also tatsächlich.

Die Beschleunigung des Erdmittelpunktes zufolge der monatlichen Rotation ist $0,0034 \text{ cm/sec}^2$. Dies stellt also auch die mittlere Größe der Beschleunigung irgend eines irdischen Körpers k im Gravitationsfelde des Mondes dar. Sie ist dem vektorischen Abstände oa der gemeinsamen Rotationsachse aa_1 von Erde und Mond und der durch den Erdmittelpunkt gehen-

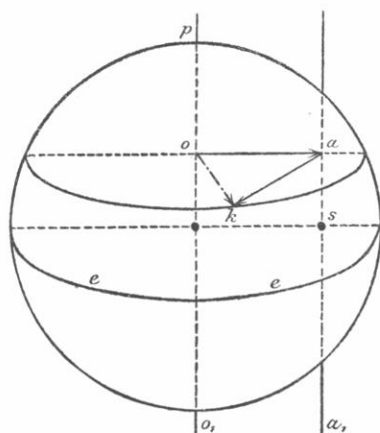


Fig. 35.

p Pol der Mondbahn, ee Ebene der Mondbahn.

den parallelen Achse oo_1 (4800 km) proportional. Die Erdoberfläche in der Nähe von k hat aber eine dem Vektor ka proportionale Zentralbeschleunigung zufolge der monatlichen Rotation der Erde um die Achse aa_1 . Die Relativbeschleunigung des Körpers k gegen die Erdoberfläche ist die Differenz dieser Vektoren, wird also durch den Vektor ok dargestellt.

Zufolge des monatlichen Umlaufes der Erde unterscheidet sich die terrestrische Fallbeschleunigung ebenso von der absoluten Schwerebeschleunigung, als wenn die Erde diesen Umlauf um die durch ihren Mittelpunkt gehende, die Richtung des

Poles der Mondbahn angehende Achse in $27\frac{1}{3}$ Tagen ausführen würde und die Mondgravitation nicht vorhanden wäre. Hierzu kommt noch die 13 mal langsamere Rotation der Erde um die Sonne und die 27 mal raschere tägliche Rotation der Erde, sämtlich um nicht sehr voneinander abweichende Achsen. Die Folge dieser Rotationen ist eine Abplattung der Niveauflächen der relativen Schwerebeschleunigung, so daß die Meeresoberfläche ein abgeplattetes Ellipsoid darstellt, dessen Achse nahezu mit der Weltachse zusammenfällt, aber merklich gegen den Pol der Mondbahn und etwas gegen den Pol der Ekliptik abgelenkt ist.

172. Ebbe und Flut. Nun ist noch zu berücksichtigen, daß die dem Monde zugewandte Seite der Erdoberfläche demselben um $\frac{1}{60}$ näher ist, daher ist dort die Mondgravitation um $\frac{1}{30}$, d. i. um $0,0001 \text{ cm/sec}^2$ größer. Da sie hier der Fallrichtung entgegengesetzt ist, so verkleinert dies die terrestrische Fallbeschleunigung an diesem Punkte. Auf der gegenüberliegenden Seite der Erde, welche am weitesten vom Monde entfernt ist, weicht die Mondgravitation um den entgegengesetzten Betrag — $0,0001 \text{ cm/sec}^2$ vom Mittelwerte ab, und da sie hier im Sinne der Schwerebeschleunigung wirkt, ist diese ebenfalls verkleinert.

Diese Abweichungen von dem Mittelwerte, welche die Mondgravitation in irdischen Gegenden zeigt, dürfen nicht als Relativbeschleunigungen gegen den Erdboden gedeutet werden. Es hat nur der Erdmittelpunkt eine diesem Mittelwerte gleiche Beschleunigung. Die übrigen Teile der Erde haben zufolge ihrer monatlichen Rotation desto größere Beschleunigungen, je weiter sie von der Rotationsachse entfernt sind.

Berücksichtigt man auch diese Verkleinerung der Beschleunigung nicht fest mit der Erde verbundener Körper an der dem Monde zu- und abgewendeten Seite der Erde, so erkennt man, daß die Meeresoberfläche, abgesehen von der täglichen Rotation ein dreiachsiges Ellipsoid bilden müßte, dessen kleinste Achse gegen den Pol der Mondbahn und dessen größte Achse gegen den Mond gerichtet ist.

Der tägliche Durchgang dieser Meereserhebungen durch alle Hafenorte zufolge der täglichen Rotation der Erde bestimmt die Flut- und Hafenzeiten.

Aus gleichem Grunde fallen die Steine bei hochstehenden sowohl als bei untergegangenen Monde langsamer gegen den Erdboden, als wenn der Mond im Horizonte steht, doch ist diese Veränderung der Schwerebeschleunigung kaum mit den besten Pendeluhrn zu erkennen, sie beträgt nämlich nur 1 Millionstel des Wertes.

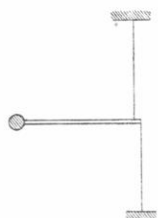


Fig. 36.

Ein in nahezu horizontaler Ebene bewegliches, in der Ruhelage im Meridian liegendes Pendel (Horizontalpendel Fig. 36) sucht schon bei geringer Richtungsänderung der relativen Schwerebeschleunigung eine andere Ruhelage. Beträgt die Neigung der Schwingungsebene gegen die Horizontale nur $10'' = \frac{1}{20\,000}$ Bogenmaß, so macht dasselbe zurzeit des Mondaufganges und Unterganges gegen den Mond gerichtete Ausschläge bis zu $\frac{1}{50} = 1,2^\circ$.

Die skalaren Flächenintegrale.

173. Der Flächenvektor. Die Fläche eines Dreieckes, dessen Seiten in demselben Umlaufssinne gerichtet sind, kann durch das halbe rotorische Produkt zweier beliebiger Seiten dargestellt werden, also durch einen Vektor, welcher die Richtung der Normale der Fläche hat, und in dessen Richtung gesehen der Umfang der Fläche im Sinne des Uhrzeigers gerichtet ist.

Eine ebene polygonale Fläche kann, wenn die Seiten des Umfanges sämtlich in gleichem Umlaufssinne gerichtet sind, in Dreiecke zerlegt werden, deren Seiten sämtlich gleichen Umlaufssinn haben. Da die Flächengröße des Polygons gleich der algebraischen Summe der Dreiecksflächen und die Richtungen sämtlicher Flächen gleich sind, kann die Polygonfläche durch einen Vektor dargestellt werden, welcher die vektorische Summe der Flächenvektoren der Dreiecke ist.

Da man jede ebene, krummlinig begrenzte Fläche in kleine Dreiecke zerlegen kann, so kann man sie durch einen Vektor $\mathbf{f}$ darstellen, dessen Größe gleich dem Flächeninhalte und dessen Richtung jene Normalrichtung der Fläche ist, in welcher blickend man alle Linienelemente des Umfanges der Fläche im Sinne des Uhrzeigers gerichtet erblickt (Fig. 37).

Die Komponenten dieses Vektors $f_x f_y f_z$ sind die Projektionen der Fläche auf die Koordinatenebenen.

174. Auch eine begrenzte gekrümmte Fläche läßt sich durch einen bestimmten Vektor $\mathbf{f}$ darstellen.

Man zerlegt zu diesem Zweck die gekrümmte Fläche in sehr kleine, also ebene Flächenelemente, welche durch die Vektoren $d\mathbf{f}$ dargestellt werden, die sämtlich nach derselben Seite der Fläche gerichtet sein mögen. Hierdurch ist für den Umfang sämtlicher Flächenelemente derselbe Umlaufssinn fest-

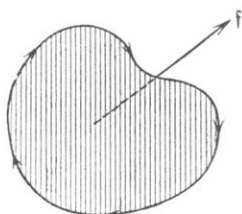


Fig. 37.

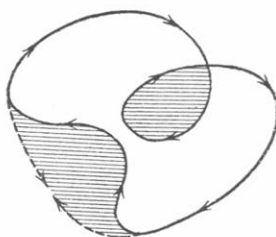


Fig. 38.

gelegt und der Umlaufssinn des ganzen Umfanges der Fläche mitbestimmt.

Der Flächenvektor $\mathbf{f}$ oder vektorische Wert der gekrümmten Fläche wird durch die vektorische Summe

$$\mathbf{f} \triangleq \int_{\mathbf{f}} d\mathbf{f}$$

definiert. Die Komponenten desselben sind die Projektionen der Fläche auf die Koordinatenebenen.

In der Richtung des Flächenvektors $\mathbf{f}$ blickend, sieht man die Projektion des Umfanges der Fläche auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene die Projektion der Fläche im Sinne des Uhrzeigers umlaufen, oder wenigstens überwiegen die in diesem Sinne umlaufenden Teile der Projektion, wobei mehrfach überdeckte Teile mehrfach mit dem Vorzeichen der Umlaufsinne gezählt werden müssen. Grenzen der Projektion, welche nicht durch die Projektion des Umfanges gebildet werden, müssen dabei zweimal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden (Fig. 38).

175. Die Flächenelemente einer geschlossenen Oberfläche σ stellt man durch überall nach außen gerichtete Vektoren $d\sigma$ dar. Ihre vektorische Summe ist Null

$$\int_{\sigma} d\sigma \stackrel{!}{=} 0.$$

Dieser Satz wird uns später sehr anschaulich werden, hier aber deuten wir nur den analytischen Beweis an. Die Komponenten dieses Integrals sind die Projektionen der geschlossenen Fläche auf die Koordinatenebenen. Jede derselben besteht aus zwei gleichen sich überdeckenden entgegengesetzt zu zählenden Blättern und ist also Null.

Hieraus folgt, daß die vektorische Summe mehrerer ebener oder gekrümmter begrenzter Flächen, welche einen Raum abschließen und sämtlich nach außen gerichtet sind, Null ist.

Ferner folgt, daß die Differenz zweier durch denselben Umfang begrenzten und gleich gerichteten Flächen Null ist.

176. Man kann das zweifache Integral, durch welches eine begrenzte Fläche dargestellt wird, auf ein einfaches zurückführen, d. h. die Summe der Flächenelemente $d\mathfrak{f}$, welche Produkte von zwei unendlich kleinen Vektoren sind, auf eine Summe von Dreiecken zurückführen, von welchen nur eine Seite unendlich klein ist.

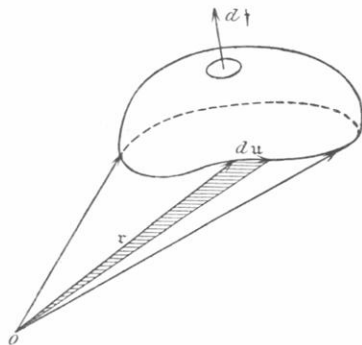


Fig. 39.

Die von einem beliebigen Punkte o bis zu dem Umfang u der begrenzten gekrümmten Fläche $\mathfrak{f}$ reichenden Radien r bilden eine Kegelfläche $\mathfrak{f}$. Jedes

dreieckige Element $d\mathfrak{f}$ derselben hat den Wert

$$d\mathfrak{f} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} r \times du.$$

Die ganze Kegelfläche hat den Wert

$$\mathfrak{f} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \int_u r \times du.$$

Durch ein solches rotorisches Linienintegral kann nun jedes Flächenintegral ersetzt werden.

Die Flächen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}$ bilden nämlich zusammen eine geschlossene Fläche, es ist also

$$\mathfrak{f} - \mathfrak{f} \stackrel{=} = 0$$

oder

$$(a) \quad \mathfrak{f} \stackrel{=} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{u}} \mathbf{r} \times d\mathbf{u}.$$

Liegt der Umfang $\mathfrak{u}$ in einer Ebene, so können wir die Integration vollends ausführen. Sei $\mathfrak{f}_0$ der vektorische Wert der ebenen durch diesen Umfang begrenzten Fläche, so ist

$$\int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \stackrel{=} = \mathfrak{f}_0.$$

177. *Der Durchfluß.* Man bezeichnet das skalare Produkt des Vektors $d\mathfrak{f}$ einer kleinen Fläche mit einem Vektor $\mathbf{v}$ als den Durchfluß dD_v des Vektors $\mathbf{v}$ durch die Fläche $d\mathfrak{f}$

$$(a) \quad dD_v \stackrel{=} = \mathbf{v} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Ist eine Vektorverteilung $\mathbf{v}$ gegeben und eine gekrümmte begrenzte Fläche $\mathfrak{f}$ im Felde, so bezeichnet man als den Durchfluß D_v des Vektors $\mathbf{v}$ durch die Fläche das skalare Flächenintegral:

$$D_v \stackrel{=} = \int_{\mathfrak{f}} \mathbf{v} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Jedes Element desselben ist der Durchfluß des für einen Punkt der Fläche $\mathfrak{f}$ gegebenen Vektors $\mathbf{v}$ mit dem dort befindlichen Flächenelement $d\mathfrak{f}$.

Den Durchfluß der gegebenen Vektorverteilung durch eine geschlossene Oberfläche $\mathfrak{o}$ bezeichnen wir als Ausfluß A_v des Vektors $\mathbf{v}$ aus der Oberfläche.

$$A_v \stackrel{=} = \int_{\mathfrak{o}} \mathbf{v} \cdot d\mathfrak{v}.$$

178. *Erstes Beispiel.* Das Volum eines schiefen Kegels, dessen Basis $d\mathfrak{f}$ im vektorischen Abstände $\mathbf{r}$ von der Spitze o liegt, ist

$$d\varphi \stackrel{=} = \frac{1}{3} \mathbf{r} \cdot d\mathfrak{f}.$$

Dieses Volum $d\varphi$ wird also durch den Durchfluß des Radius $\mathbf{r}$ durch die Fläche $d\mathfrak{f}$ dargestellt und zwar als eine

positive oder negative Zahl je nach der Richtung beider Vektoren.

Das Volum φ , welches durch den Kegel (Fig. 39 auf Seite 114), dessen Spitze in o liegt, und andererseits durch die gekrümmte Fläche $\mathfrak{f}$ begrenzt ist, wird dargestellt durch

$$\varphi = \int_{\mathfrak{f}} d\varphi \doteq \frac{1}{3} \int_{\mathfrak{f}} \mathbf{r} \cdot d\mathfrak{f},$$

ist also der dritte Teil des Durchflusses des Radius $\mathbf{r}$ durch die Fläche $\mathfrak{f}$.

Das Volum φ eines von der Oberfläche $\mathfrak{o}$ umschlossenen Raumes ist gleich dem dritten Teile des Ausflusses der von einem beliebigen Zentrum o gezählten Radien $\mathbf{r}$ durch die Oberfläche.

$$(a) \quad \varphi = \int_{\mathfrak{o}} d\varphi \doteq \frac{1}{3} \int_{\mathfrak{o}} \mathbf{r} \cdot d\mathfrak{o}.$$

179. Zweites Beispiel. Der Durchfluß des Flächenvektors $\mathbf{f}_0$ einer Fläche durch diese selbst ist immer positiv, was zur Definition des Richtungssinnes dieses Flächenvektors verwendet werden kann, ja im Grunde genommen mit der in 174. gegebenen Definition ganz identisch ist. Die Richtung des Flächenvektors ist jene, für welche sein Durchfluß durch die Fläche ein Maximum ist. Es ist:

$$\int_{\mathfrak{f}} \mathbf{f}_0 \cdot d\mathfrak{f} \doteq \mathbf{f}_0 \cdot \int_{\mathfrak{f}} d\mathfrak{f} \doteq \mathbf{f}_0^2,$$

also ist der Durchfluß des Flächenvektors durch die Fläche das Quadrat des Flächenvektors.

180. Durchfluß der Vektorröhren. Stromfäden. Jedes Vektorfeld $\mathbf{v}$ läßt sich in Vektorröhren (93.) zerlegen. Sehen wir von Ausnahmestellen des Feldes ab, so kann man ein kurzes Stück einer sehr dünnen Vektorröhre immer als einen Zylinder betrachten, in welchem der Vektor nahezu konstant ist. Der Durchfluß $dD_{\mathbf{v}}$ des Vektors $\mathbf{v}$ durch einen beliebigen schiefen Querschnitt $d\mathfrak{f}$ der Vektorröhre ist dann immer gleich dem Durchflusse durch einen senkrechten Querschnitt dq derselben, ist also von der Richtung des schiefen Querschnittes unabhängig und kann in der algebraischen Form

$$dD_{\mathbf{v}} = v dq$$

angegeben werden.

Wohl aber ist in einem längeren Stück der Vektorröhre der Durchfluß nicht konstant. Ist aber in einem speziellen Felde die Größe v des Vektors dem senkrechten Querschnitt $d q$ der Vektorröhre überall verkehrt proportional, so nennt man diese einen Stromfaden. Der Durchfluß

$$d D_v \doteq v \cdot d f$$

eines Stromfadens für einen ganz beliebigen Querschnitt $d f$ desselben ist eine für den Stromfaden charakteristische Zahl.

181. Ein Raumgebiet, in welchem die Vektorverteilung in Stromfäden verläuft, nennt man divergenzfrei. Die übrigen Raumgebiete, in welchen die Vektorröhren keinen konstanten Durchfluß haben, nennt man Divergenzgebiete. Ein

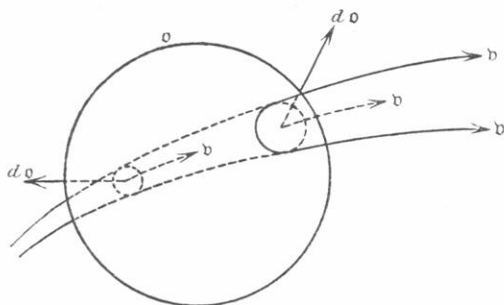


Fig. 40.

Stromfaden kann nicht in einem divergenzfreien Raume ein Ende haben, denn die ihn umschließenden Vektorlinien berühren oder schneiden sich nicht, weil sein Durchfluß konstant ist. Ein Stromfaden, der ganz in divergenzfreiem Gebiete verläuft, muß also einen geschlossenen Ring bilden oder vom Unendlichen ins Unendliche laufen. Sonst muß ein Stromfaden zwei Divergenzgebiete verbinden oder von einem Divergenzgebiet zu diesem zurück oder ins Unendliche verlaufen.

182. Eine geschlossene Fläche σ (Fig. 40), welche kein Divergenzgebiet einschließt, hat den Ausfluß Null.

Jeder Stromfaden durchstößt die Oberfläche σ in gerader Anzahl und schneidet die Flächenelemente $d \sigma$ aus derselben. Da diese überall nach außen gerichtet angenommen werden,

der Stromfaden aber abwechselnd in die Oberfläche eindringt und aus derselben herauskommt, so schließen die Vektoren $d\mathbf{v}$ abwechselnd stumpfe und spitze Winkel mit dem Vektor $\mathbf{v}$ ein, dessen divergenzfreies Feld wir betrachten.

Der Ausfluß $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$ des Vektors durch diese Oberflächenelemente ist stets gleich groß, aber von abwechselndem Vorzeichen. Dasselbe gilt für alle Stromfäden des Feldes. Es ist also

$$A_v \stackrel{\pm}{=} \int_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \stackrel{\pm}{=} 0.$$

183. Umschließt jedoch die Oberfläche $\mathbf{v}$ ein Divergenzgebiet, so ist der Ausfluß des Vektors nicht Null, auch wenn die Fläche selbst ganz in divergenzfreiem Gebiete verläuft.

Umschließen zwei Flächen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ein Divergenzgebiet, schließen sie aber zwischen sich einen divergenzfreien Raum

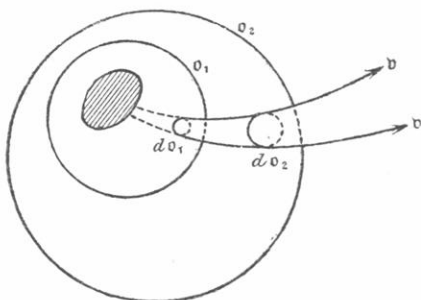


Fig. 41.

ein, so muß jeder Stromfaden, der die eine Fläche in ungerader Anzahl durchbricht, die andere Fläche in gleicher Richtung und ungerader Anzahl durchbrechen, also zum Ausfluß beider Flächen gleich viel beitragen. Beide Flächen haben also gleichen Ausfluß

$$\int_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}_1 \stackrel{\pm}{=} \int_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}_2.$$

184. *Beispiel.* Das Vektorfeld sei gleichförmig, d. h. der Vektor habe überall den konstanten Wert $\mathbf{c}$. Die Vektorröhren sind dann Zylinder von konstantem Durchfluß.

Betrachten wir eine geschlossene Oberfläche in diesem Felde. Ihr Ausfluß muß Null sein. Hieraus folgt

$$\int_0 \mathbf{c} \cdot d\mathbf{v} \doteq \mathbf{c} \cdot \int_0 d\mathbf{v} \doteq 0.$$

Nehmen wir für $\mathbf{c}$ drei verschiedene, nicht in derselben Ebene liegende Vektoren, so ergeben sich die drei Gleichungen

$$\int_0 d\mathbf{v} \doteq 0.$$

Diese Ableitung ist von der in 175. angegebenen analytischen nur in der Form verschieden.

185. Die *kegelförmigen* Vektorröhren der Gravitationsbeschleunigung eines einzelnen Weltkörpers sind in ihrem ganzen Verlaufe außerhalb des Körpers bis ins Unendliche Stromfäden.

Da nämlich die Beschleunigung $\mathbf{g}$ dem Quadrate der Entfernung von dem Mittelpunkte des Weltkörpers, also auch dem senkrechten Querschnitt dq der Vektorröhre verkehrt proportional ist, so ist der Durchfluß

$$\mathbf{g} \cdot d\mathbf{f} \doteq g dq$$

für jeden Querschnitt der Vektorröhre konstant, eine für diesen Stromfaden charakteristische Zahl, welche unabhängig ist von dem Ort und der Richtung des Querschnittes $d\mathbf{f}$.

186. Alle geschlossenen Flächen im Felde, welche den Weltkörper ausschließen, haben also den Ausfluß Null.

Zwei beliebige geschlossene Flächen, welche den Weltkörper einschließen, haben denselben Ausfluß.

Der Ausfluß A_g der Gravitationsbeschleunigung aus einer Kugelfläche vom Radius r , deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Weltkörpers ist, welche aber in dem äußeren divergenzfreien Gebiete verläuft, berechnet sich leicht, da die Beschleunigung $\mathbf{g}$ überall dieselbe Richtung hat wie die Flächenvektoren der Oberflächenelemente und überall dieselbe Größe

$$g = -K \frac{M}{r^2}$$

hat. Er ist gleich dem algebraischen Produkte der Kugelfläche und dieser Beschleunigung.

$$A_g = 4\pi r^2 g = -4\pi K M.$$

Jede beliebige geschlossene Fläche, welche den Weltkörper von der Masse M einschließt, hat also den Ausfluß

$$(a) \quad A_g = -4\pi K M.$$

187. *Addition von Durchflüssen.* Die resultierende Vektorverteilung $\mathbf{v}$ mehrerer Vektorverteilungen $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v} \triangleq \sum_i \mathbf{v}_i$$

hat für ein beliebiges Flächenelement $d\mathbf{f}$ im Felde den Durchfluß

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \triangleq d\mathbf{f} \cdot \sum_i \mathbf{v}_i \triangleq \sum_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{f}.$$

Der Durchfluß der vektorischen Summe mehrerer Vektoren durch dasselbe Flächenelement ist gleich der algebraischen Summe der Durchflüsse der einzelnen Vektoren.

Endlich gilt für eine größere gekrümmte begrenzte oder geschlossene Fläche $\mathbf{f}$

$$\int_{\mathbf{f}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \triangleq \sum_i \int_{\mathbf{f}} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{f}.$$

Der Durchfluß der vektorischen Summe $\mathbf{v}$ mehrerer Vektorverteilungen $\mathbf{v}_i$ durch eine gegebene Fläche $\mathbf{f}$ ist gleich der algebraischen Summe der Durchflüsse der einzelnen Vektoren durch dieselbe Fläche. Hierauf beruht die analytische Wichtigkeit der skalaren Flächenintegrale.

188. Betrachten wir eine geschlossene Fläche $\mathbf{v}$ in einem allgemeinen Gravitationsfelde. Eine Masse M_i , welche sich innerhalb dieser Fläche befindet, bestimmt nach 186.(a) den Ausfluß $-4\pi K M_i$ durch dieselbe. Das partielle Feld einer außerhalb liegenden Masse hat aber den Ausfluß Null durch diese Fläche. Der wahre Ausfluß der Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$ ist also

$$(a) \quad A_g \triangleq -4\pi K \sum_i M_i.$$

Er ist in jedem Gravitationsfelde der Summe der von der betrachteten Oberfläche eingeschlossenen Massen proportional, von der Form der Fläche, Lage der eingeschlossenen Massen und von dem Vorhandensein ausgeschlossener Massen ganz unabhängig. Wir werden den hohen Wert dieses Satzes bald erproben.

9. Die allgemeine Gravitation.

189. Ein geworfener Stein ist ein Trabant der Erde, der Mond ein schwerer Körper (138.). Es besteht also zwischen irdischen und Weltkörpern kein wesentlicher Unterschied. Jeder irdische Körper und das Meer zeigt je nach seiner Lage im Gravitationsfelde des Mondes eine andere Beschleunigung. Andererseits ist es, um das Gegenbeschleunigungsprinzip aufrecht zu erhalten, naheliegend, anzunehmen, daß umgekehrt jeder Teil des Erdkörpers eine Gegenbeschleunigung des Mondes bestimmt. Jeder Teil eines Weltkörpers bestimmt hiernach ein besonderes, sehr schwaches Gravitationsfeld, und das Gravitationsfeld des ganzen Weltkörpers resultiert aus der Summierung

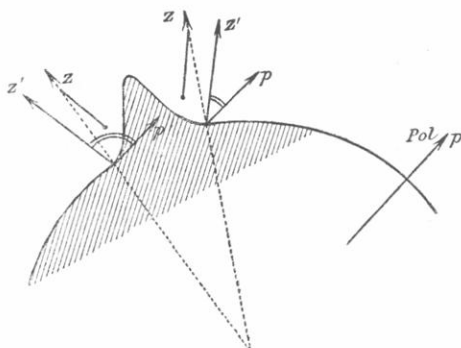


Fig. 42.

p Richtung der Weltachse
 z geographische Zenitrichtung
 z' lotrechter Zenit (Libellenzenit).

der zahllosen ungemein schwachen partiellen Gravitationsfelder seiner Teile (Fermat und Newton).

190. *Lotablenkungen. Die Schwerebeschleunigung auf hohen Bergen.* In der Nähe eines isoliert stehenden Berges bemerkt man wirklich, daß die Lotrichtung (der Libellenzenit) aus dem geographischen Zenit (dem Erdradius) gegen den Berg abgelenkt ist, was auf das Gravitationsfeld des Berges zurückzuführen ist.

Bouguer (1740) beobachtete z. B. an der Nordseite des Chimborasso eine um $8''$ zu große Polhöhe verglichen mit der Polhöhe an der Südseite des Berges (Fig. 42), was auf die Ablenkung des Libellenzenits zurückzuführen ist.

Die Schwerebeschleunigung g soll nach dem Gravitationsgesetze verkehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r vom Erdmittelpunkte abnehmen. Es ist also:

$$\frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}.$$

Für eine Erhebung $dr = 2700$ m bzw. 4400 m sollte also die Schwerebeschleunigung um den Bruchteil

$$-\frac{dg}{g} = \frac{1}{1200} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{680}$$

abnehmen. Sie ist jedoch tatsächlich auf einem isolierten Berge von dieser Höhe nur um den Bruchteil

$$-\frac{dg}{g} = \frac{1}{1300} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{850}$$

kleiner. Diese verhältnismäßig zu große Beschleunigung auf den Bergspitzen ist auf das Gravitationsfeld des Berges zurückzuführen.

Gebirgsketten und Kontinente haben wohl auf die Richtung aber nicht wie die isolierten Berge auch auf die Größe der Schwerebeschleunigung merklichen Einfluß. Ihre Gravitation dürfte durch den entgegengesetzten Einfluß von Massendefekten unter der Erdoberfläche größtenteils kompensiert sein. Man kann hiernach die Gebirge als Blasen der Erdoberfläche ansehen oder auch mit schwimmenden Schollen vergleichen.

191. Zulässigkeit der Annahme der allgemeinen Gravitation. Es lag im Wesen der Newtonschen Schlußweise, daß ein kugelförmiger Weltkörper nach außen, selbst ganz nahe seiner Oberfläche, dasselbe Gravitationsfeld bestimmt, als wäre seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt. Newton hat unter dieser Voraussetzung die Abnahme der Schwerebeschleunigung von der Erdoberfläche bis zum Monde verfolgt, und dessen Zentralbeschleunigung so als seine Schwerebeschleunigung erkannt.

Es muß nun gezeigt werden, daß auch bei Annahme der allgemeinen Gravitation das resultierende Feld aller Teile

eines kugelförmigen Weltkörpers außerhalb desselben das gleiche ist, als wäre alle Masse im Mittelpunkte vereinigt.

Die Potentialniveauflächen der resultierenden Gravitation sind jedenfalls konzentrische Kugeln und die Beschleunigung hat überall die Richtung gegen den Mittelpunkt des Weltkörpers und hängt nur von der Entfernung von demselben ab.

Der Ausfluß A_g derselben aus einer dieser Kugelflächen hat nach Gleichung 188.(a) den Wert

$$(a) \quad 4\pi r^2 g = -4\pi K M',$$

worin M' die von der Kugel eingeschlossene Masse ist. Falls dies die ganze Masse M des Körpers ist, folgt also jedenfalls das Newtonsche Gesetz

$$g = -K \frac{M}{r^2}.$$

192. Im Innern der Erde muß man hingegen eine wesentliche Abweichung von diesem Verteilungsgesetz der Schwerebeschleunigung erwarten, falls das Gravitationsfeld wirklich aus den Feldern aller Teile des Erdballs resultiert.

Hätte die Erde überall die gleiche Dichte μ , so wäre für eine konzentrische Kugel im Erdinneren

$$M' = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu,$$

und also nach Gleichung 191.(a)

$$g = -\frac{4}{3} \pi K \mu r.$$

Dann würde im Erdinneren die Schwerebeschleunigung proportional der Annäherung an den Erdmittelpunkt abnehmen und in diesem den Wert Null erreichen. Letzteres muß auch dann stattfinden, wenn die Erde aus konzentrischen Kugelschichten von verschiedener Dichte besteht. Doch kann, wenn die oberflächlichen Schichten wenig dicht sind, beim Eindringen in das Erdinnere anfangs noch eine Zunahme der Schwerebeschleunigung und erst in größerer Tiefe eine Abnahme derselben eintreten, wie man dies in tiefen Schächten und unter der Meeresoberfläche tatsächlich beobachtet hat.

193. *Differentialgesetz der allgemeinen Gravitation.* Wir haben nun keine kleine Aufgabe vor uns, wenn wir das aus der Zusammensetzung der Gravitationen der unendlich vielen

Teile aller Körper resultierende Beschleunigungsfeld berechnen wollen. Die Beschreibung dieses Feldes wird jedoch äußerst einfach und durchsichtig, wenn wir die skalaren Ableitungen der Beschleunigung, nämlich ihr Potential und ihre Divergenz betrachten, deren Kenntnis wir den Arbeiten von Lagrange (1777), Laplace (1782), Green (1828) und Gauss (1845) verdanken.

Betrachten wir das skalare Flächenintegral (den Ausfluß) δA_g der Gravitationsbeschleunigung für eine geschlossene Fläche, welche das sehr kleine Volum $\delta \varphi$ umschließt. In diesem Raume ist jedenfalls ein Stoff von konstanter Dichte μ vorhanden (welche auch Null sein kann) und also die Masse $\mu \delta \varphi$ eingeschlossen. Die ausgeschlossenen Massen sind gleichgültig. Nach 188.(a) folgt also

$$\delta A_g \doteq - 4\pi K \mu \delta \varphi.$$

Das Verhältnis des Ausflusses dieser Oberfläche zu dem von ihr umschlossenen Volum strebt also bei Verkleinerung dieses Volums dem bestimmten Grenzwerte

$$\frac{d A_g}{d \varphi} \doteq - 4\pi K \mu$$

zu, welcher unabhängig von der Art des Grenzüberganges, von den Formen, welche die Oberfläche während des Einschrumpfens annimmt, ist.

Diesen echten Differentialquotienten nennt man die Divergenz des Vektors $\mathbf{g}$ und bezeichnet ihn durch

$$\frac{d A_g}{d \varphi} \doteq \operatorname{div} \mathbf{g}.$$

Wir erhalten somit folgende Form des Gesetzes der allgemeinen Gravitation

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{g} \doteq - 4\pi K \mu.$$

Aus diesem Differentialgesetz folgt, wenn die Dichte μ als Funktion des Ortes gegeben ist, die Verteilung der Gravitationsbeschleunigung im ganzen Felde (siehe § 210). Es kann aber auch andererseits durch Multiplikation mit $\mathbf{g}$ auf die Form

$$\mu \mathbf{g} \doteq - \frac{1}{4\pi K} \mathbf{g} \operatorname{div} \mathbf{g}$$

gebracht werden, welche dem Gesetze der elektrischen Beschleunigungen analog ist.

194. *Divergenz der Schwerebeschleunigung im Erdinneren.*

Wenn die Dichte μ im Erdinneren nur von dem Abstände r vom Mittelpunkte abhängt, also die Erde aus konzentrischen Kugelschalen von verschiedener, aber konstanter Dichte besteht, so hat die Schwerebeschleunigung jedenfalls radiale Richtung und hängt ebenfalls nur von r ab.

Der Durchfluß derselben durch zwei benachbarte Kugel-
flächen ist $4\pi r^2 g$ beziehungsweise

$$4\pi(r^2 + 2r dr)\left(g + \frac{dg}{dr} dr\right).$$

Die Differenz dieser Durchflüsse ist der Ausfluß δA_g aus der Oberfläche der von beiden konzentrischen Kugeln eingeschlossenen Schicht

$$\delta A_g = 4\pi r^2 dr \left(\frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r}\right).$$

Da $4\pi r^2 dr = \delta \varphi$ das Volumen der Kugelschichte ist, folgt für die Divergenz des Vektors $\mathbf{g}$

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{g} \triangleq \frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r}.^{1)}$$

Die Divergenz der Schwerebeschleunigung außerhalb der Erde ist hiernach gleich Null. Innerhalb der Erde gilt aber nach 193.(a) das Gesetz:

$$(b) \quad \frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r} = -4\pi K\mu.$$

195. Da die Masse der Erde gleich

$$\frac{4}{3}\pi r_0^3 \mu_0$$

ist, worin r_0 den Erdradius und μ_0 die mittlere Erddichte bezeichnet, ist die Schwerebeschleunigung g_0 in der Nähe der Erdoberfläche

$$g_0 = -\frac{4}{3}\pi K r_0 \mu_0.$$

Ist die oberflächliche Erddichte μ , so folgt aus Gleichung 194.(b)

¹⁾ Das gilt für jeden beliebigen Vektor von durchaus radialer Richtung, der nur von r abhängt. Deshalb ist z. B. die Divergenz des Radius $\mathbf{r}$ selbst gleich 3

$$\operatorname{div} \mathbf{r} \triangleq 3.$$

$$(a) \quad \frac{dg_0}{dr} + 2 \frac{g_0}{r_0} = -4\pi K \mu$$

oder

$$\frac{dg_0}{dr} = 4\pi K \left(\frac{2}{3} \mu_0 - \mu \right).$$

In der Meerestiefe und selbst in Schächten ist der numerische Wert der Schwerebeschleunigung größer als an der Erdoberfläche, also ist dg_0/dr eine positive Zahl. Hieraus folgt, daß die mittlere Erddichte mehr als 1,5 mal so groß als die oberflächliche Gesteinsdichte ist. Es ist dies ein Massenvergleich auf Grund der Verteilung der resultierenden Beschleunigung (165.).

196. Zum Vergleich der nach der ersten und zweiten Methode bestimmten Massenwerte ist es notwendig die Konstante des Gravitationsfeldes einer terrestrischen Masse zu bestimmen, welche man nach der ersten oder einer der drei weiter unten angegebenen Methoden mit der Kilogrammmasse verglichen hat. Dann kann man den Wert aller astronomischen Massen in Kilogramm, also auch die Erddichte in gr cm^{-3} , und die Gravitationskonstante K in $\text{gr}^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-2}$ angeben.

Wir haben bereits mehrere meßbare Gravitationswirkungen terrestrischer Massen kennen gelernt.

Mit Hilfe des Bathometers (§ 220) kann man konstatieren, daß die Schwerebeschleunigung in 1000 m Meerestiefe um 0,391 (cm sec^{-2}) größer ist. Es ist also

$$\frac{dg_0}{dr} = 0,391 \times 10^{-5} (\text{sec}^{-2}),$$

$\mu = 1,026 (\text{gr cm}^{-3})$ ist die Dichte des Meerwassers.

Aus Gleichung 195.(a), in welcher alle Werte bekannt sind, berechnet sich nun die Gravitationskonstante:

$$K = 6,67 \times 10^{-8} (\text{gr}^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-2}).$$

Da wir nun den Wert der Gravitationskonstanten im terrestrischen Maßsystem kennen, so können wir die Masse der Erde M in diesem Maße berechnen. Es ist

$$g_0 = -K \frac{M}{r_0^2},$$

worin $g_0 = -982 \text{ cm/sec}^2$, der Erdradius $r_0 = 6,4 \times 10^8 \text{ cm}$ ist. Man erhält so die Masse der Erde gleich $5,98 \times 10^{27} \text{ gr}$. Die mittlere Erddichte ist hiernach $5,5 \text{ gr cm}^{-3}$.

197. Auch aus der Lotablenkung in der Nähe isolierter Berge und aus dem Werte der Schwerebeschleunigung auf isolierten Bergspitzen kann man die Gravitationskonstante berechnen (Cavendish 1781), da die Gesteinsdichte und Form des Berges und die Entfernung seiner Teile vom Beobachtungs-orte bekannt ist.

198. Cavendish zeigte, daß schon eine große Bleikugel von 1000 kg Masse ein meßbares Gravitationsfeld bestimmt. Man kann mittels einer an einem feinen Quarzfaden suspendierten Drehwage (Fig. 43) die Gravitation von Körpern nachweisen, die kaum 1 kg Masse haben. Wenn bei diesen äußerst empfindlichen Experimenten alle Versuchsfehler ausgeschlossen sind, bilden sie eine schöne Bestätigung der allgemeinen Gravitation.

Die Divergenz eines Vektors. Das Vektorpotential eines Skalars.

199. Für jeden Ort im Felde einer kontinuierlichen (und differenzierbaren) Vektorverteilung $\mathbf{v}$ läßt sich ein derivierter Skalar angeben, welchen man die Divergenz des Vektors an dem betrachteten Orte nennt. Derselbe ist der Grenzwert des Verhältnisses des Ausflusses dA_v aus einer Oberfläche zu dem eingeschlossenen Volum $d\varphi$, auf welchen die Art des Grenzüberganges keinen Einfluß hat

$$\frac{dA_v}{d\varphi} \doteq \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Alle für den Physiker nur einigermaßen beachtenswerten Vektorverteilungen haben diese Eigenschaft einer bestimmten Divergenz für jeden Punkt des Raumes.

Diese Divergenzzahl ist nicht nur als echter Differentialquotient, sondern auch als skalare Ableitung eines Vektors von größter rechnerischer Bedeutung.

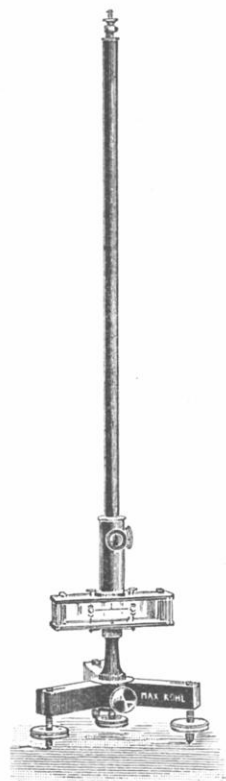


Fig. 43.

200. Der Gauss'sche Integralsatz. Wenn zwei Räume φ_1 und φ_2 (Fig. 44) zusammenstoßen, so daß sie durch die Fläche ab geschieden werden, so ist die Summe der Ausflüsse A_1 und A_2 eines Vektors $\mathbf{v}$ durch die ganzen Oberflächen beider Räume gleich dem Ausflusse A durch die äußere Oberfläche beider Räume

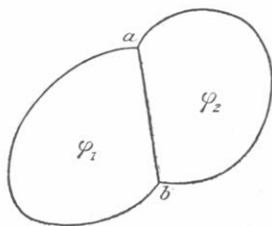


Fig. 44.

$$A = A_1 + A_2.$$

Ein Anteil jedes der Oberflächenintegrale A_1 und A_2 bezieht sich allerdings auf die Scheidewand, aber diese Anteile sind gleich und entgegengesetzt, denn der Scheidewand muß als Oberfläche des einen oder anderen Raumes betrachtet entgegengesetzte Richtung zugesprochen werden.

Man kann nun einen Raum φ durch viele Scheidewände in kleine Zellen $d\varphi$ zerlegen. Das Oberflächenintegral

$$A_v \triangleq \int_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

über die äußere Oberfläche $\mathbf{v}$ dieses Raumes ist gleich der Summe der Ausflüsse dA_v aller Zellen $d\varphi$

$$\int_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \triangleq \int_{\varphi} dA_v.$$

Diese bestimmen sich aber durch die Divergenz des Vektors

$$dA_v \triangleq \operatorname{div} \mathbf{v} d\varphi.$$

Wir erhalten so den wichtigen Gauss'schen Integralsatz:

$$(a) \quad \int_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \triangleq \int_{\varphi} \operatorname{div} \mathbf{v} d\varphi.$$

Das über eine geschlossene Oberfläche erstreckte skalare Integral eines Vektors ist gleich dem über den eingeschlossenen Raum erstreckten algebraischen Integral der Divergenz des Vektors.

201. Beispiel. Die Verteilung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Punkte einer beliebig bewegten Flüssigkeit sei gegeben und wir betrachten eine Oberfläche σ im Innern der Flüssigkeit, welche als eine dünne, aus bewegten Flüssigkeitsteilen bestehende Haut vorgestellt werden muß. Die Fluxion des von dieser Oberfläche eingeschlossenen Volums φ ist

$$(a) \quad \frac{d\varphi}{dt} \doteq \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\sigma} \doteq \int_{\varphi} \operatorname{div} \mathbf{v} d\varphi.$$

Ist das betrachtete Volum selbst sehr klein, so folgt für die Fluxion desselben

$$(b) \quad \frac{d\varphi}{dt} \doteq \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Die Divergenz der Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteile ist also gleich der Fluxion jedes kleinen Flüssigkeitsvolums an dieser Stelle, bezogen auf die Volumseinheit.

202. Zweites Beispiel. Die gegebene Vektorverteilung $\mathbf{r}$ stellt die Entfernung der Punkte des Feldes von einem Nullpunkt o dar. Es ist dann nach Gleichung 178.(a) das Volum φ , welches von einer Oberfläche σ eingeschlossen wird

$$\varphi \doteq \frac{1}{3} \int_{\sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{\sigma} \doteq \frac{1}{3} \int_{\varphi} \operatorname{div} \mathbf{r} d\varphi.$$

Da dies für jede Oberfläche in dem Felde gelten muß, ist

$$\operatorname{div} \mathbf{r} \doteq 3.$$

Es ist dies also eine Vektorverteilung mit gleichförmiger Divergenz.

203. Für die Divergenz einer Vektorverteilung an dem betrachteten Orte ist nicht etwa die Divergenz der Vektorlinien, also die kegelförmige Gestalt der kleinsten Vektorröhren allein maßgebend, sondern auch die Änderung der Größe des Vektors in der Längsrichtung der Röhren. Die Divergenz ist der Differentialquotient des Durchflusses $D = vq$ der Vektorröhren (vom senkrechten Querschnitt q) nach ihrer Länge l , bezogen auf die Querschnittseinheit:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \doteq \frac{1}{q} \frac{dD}{dl} = \frac{dv}{dl} + \frac{v}{q} \frac{dq}{dl}.$$

In § 196 findet sich hierzu ein einfaches Beispiel.

In einem Gebiete des Feldes, in welchem die Divergenz Null ist, können also doch die Vektorlinien divergieren, wie dies z. B. in dem Gravitationsfelde eines oder mehrerer Weltkörper stattfindet.

204. Auch ein Vektor $\mathbf{v}_x$, welcher überall im Felde dieselbe Richtung x hat, dessen Vektorröhren also zylindrisch sind und dessen Richtungen nicht divergieren, kann eine Divergenz haben, welche nach obiger Gleichung durch

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_x \doteq \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

dargestellt wird. Hierin kann die Zahl v_x eine Funktion aller drei Koordinaten sein. Da wir jedoch die in die x -Richtung fallenden Vektorröhren beliebig dünn annehmen können, kommen die partiellen Ableitungen der Zahl v_x noch y und z nicht in Betracht.

205. Der Ausfluß der vektorischen Summe zweier Vektoren ist nach 187. gleich der Summe der Ausflüsse derselben durch dieselbe Fläche. Wenn

$$\mathbf{v} \doteq \sum \mathbf{v}_i,$$

so ist

$$dA_{\mathbf{v}} \doteq \sum dA_{\mathbf{v}_i}.$$

Das gleiche gilt also für die Divergenz der vektorischen Summe, welche die Summe der Divergenzen der einzelnen Vektoren ist

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \doteq \sum \operatorname{div} \mathbf{v}_i.$$

206. Addieren wir die drei nach den Koordinaten gerichteten sonst beliebigen Vektorverteilungen $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$ und $\mathbf{v}_z$ zu der allgemeinen Vektorverteilung $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

so ergibt sich nach 204. (a) und 205. (a) die analytische Form der Divergenz eines Vektors

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \doteq \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz eines Vektors ist gleich der Summe der partiellen Differentialquotienten seiner Komponenten nach ihren Richtungen.

207. Die allgemeine Derivation einer Vektorverteilung $\mathbf{v}$ nach dem unabhängig veränderlichen Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist die Dyade Φ dieser Vektorverteilung (siehe § 95 und 96)

$$d\mathbf{v} \triangleq \Phi \cdot d\mathbf{r}.$$

Der erste Skalar Φ_s (siehe § 96) dieser Dyade ist nach 97. und 206. die Divergenz des Vektors $\mathbf{v}$

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \triangleq \Phi_s.$$

208. Mit Hilfe des Hamiltonschen Differentialoperators ∇ kann man diese Werte in folgender Art darstellen. Es ist

$$\Phi \triangleq \nabla ; \mathbf{v}$$

$$(a) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} \triangleq \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Die Divergenz eines Vektors $\mathbf{v}$ kann als das skalare Produkt des vektorischen Operators ∇ mit dem Vektor $\mathbf{v}$ dargestellt werden.

209. Das skalare Produkt $\nabla \cdot \mathbf{v}$ folgt der Distributionsregel

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \triangleq \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot \mathbf{v}_2$$

oder

$$(a) \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \triangleq \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \operatorname{div} \mathbf{v}_2.$$

Die Divergenz der vektorischen Summe zweier Vektorverteilungen ist, wie schon in 205. mitgeteilt wurde, gleich der algebraischen Summe der Divergenzen derselben.

210. *Das vektorische Potential einer skalaren Verteilung.* Nicht jede Dyadenverteilung Φ hat ein Vektorpotential $\mathbf{v}$ (siehe § 100), sondern sie muß die sechs Bedingungen

$$\nabla \times \Phi \triangleq 0$$

erfüllen.

Ist nur der erste Skalar Φ_s der Dyade gegeben, d. h. nur die Divergenzzahl Φ_s des Potentialvektors $\mathbf{v}$, so sind noch zweifach unendlich viele Vektorverteilungen $\mathbf{v}$ angebbar, welche diese Divergenzverteilung haben, da man jede beliebige divergenzfreie Vektorverteilung addieren kann. Wir können dem Vektor also noch die zwei Bedingungen

$$\nabla \times \mathbf{v} \triangleq 0$$

auferlegen, also nach 103. verlangen, daß derselbe ein skalares Potential S habe

$$\mathbf{v} \triangleq \nabla S.$$

Dann ist

$$\nabla \cdot \nabla S \doteq \Phi_s$$

oder

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \Phi_s(xyz).$$

Das Integral dieser Differentialgleichung wurde von Laplace und Poisson angegeben. Sie ist gleich jener der allgemeinen Gravitation 193.(a), wenn man

$$\Phi_s = -4\pi K\mu$$

setzt. Das skalare Potential P der Gravitationsbeschleunigung ergibt sich jedoch nach Gleichung 169.(a) durch das Integral

$$P_i = K \int_{\varphi} \frac{\mu}{r_i} d\varphi,$$

welches über den ganzen Raum zu erstrecken ist, von welchem $d\varphi$ ein Element ist, welches die Masse $\mu d\varphi$ enthält. r_i ist die Entfernung dieses Massenelementes von jenem Punkte i , dessen skalares Potential P_i obiges Integral angibt.

Das Integral der Laplace-Poissonschen Gleichung

$$\nabla \cdot \nabla S \doteq \Phi_s$$

ist also

$$(a) \quad S_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} \frac{\Phi_s}{r_i} d\varphi.$$

Das gesuchte vektorische Potential $\mathbf{v}$ des gegebenen Skalars Φ_s ist der Gradient dieses skalaren Potentials S .¹⁾

10. Die irdischen Gegenbeschleunigungen.

211. Wir haben die Gravitationsbeschleunigungen, zu welchen auch die Schwerebeschleunigung gehört, als astronomische Beschleunigungen bezeichnet, weil weitaus die meisten Beobachtungen auf diesem Gebiete astronomischer Natur sind.

Alle übrigen Beschleunigungen verhalten sich wesentlich

¹⁾ Näheres hierüber siehe Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1900.

anders und wir fassen sie als irdische Beschleunigungen zusammen, obgleich sie auch an Himmelskörpern ausnahmsweise beobachtbar sein könnten. So sind z. B. elektrische Beschleunigungen aller Himmelskörper, besonders der Kometen, nicht unwahrscheinlich.

212. *Typus der irdischen Beschleunigungsgesetze.* Während die Gravitationsbeschleunigungen von den Eigenschaften des beschleunigten Körpers unabhängig sind, sind die sämtlichen irdischen Beschleunigungen von den Eigenschaften des gegenbeschleunigten Körpers unabhängig. Die absolute Größe der Beschleunigung des einen Körpers bestimmt sich durch die Zustände des Raumes zwischen beiden Körpern, aber sie muß auch irgendwie von den Massen beider Körper abhängen, weil man sonst das Gegenbeschleunigungsgesetz nicht erfüllt finden würde, wenn man die durch direkte Gesetze bestimmten Beschleunigungen beider Körper miteinander vergleicht. Da nun eine irdische Beschleunigung nicht von der Masse des gegenwirkenden Körpers abhängt, so muß sie der Masse des beschleunigten Körpers verkehrt proportional sein.

213. Es ist also in diesen Fällen nicht nur die Beschleunigung g des Körpers, wie immer, durch ein einfaches Gesetz bestimmt, sondern es ist die Beschleunigungsgröße mg , worin m die Masse des beschleunigten Körpers ist, insofern durch ein noch einfacheres Gesetz bestimmt, als die Beschleunigungsgröße durch den Zustand des Raumes zwischen beiden Körpern völlig bestimmt ist und von den Eigenschaften beider Körper unabhängig ist. Hierdurch gewinnt die Beschleunigungsgröße, welche auch hier nur durch das Gegenbeschleunigungsgesetz Bedeutung erlangt, eine erhöhte Wichtigkeit für die Theorie der Bewegung diskreter starrer Körper.

214. Als *erstes Beispiel* betrachten wir das Gesetz der elastischen Beschleunigungen. Eine elastische Feder sei zwischen zwei Körpern von den Massen m_1 und m_2 ausgespannt. Die Beschleunigung, welche der erste Körper zeigt, ist zunächst durch die Ausdehnung s der Feder bestimmt, muß aber außerdem seiner Masse verkehrt proportional sein. Es ist also

$$m_1 g_1 = \kappa^2 s,$$

worin κ^2 eine Konstante ist, die nur von den Eigenschaften der Feder abhängt. Für die Gegenbeschleunigung gilt

$$m_2 g_2 = -\kappa^2 s.$$

215. Zweites Beispiel. Zwei Hohlkugeln aus Blech, welche entgegengesetzt elektrisch geladen sind, zeigen Beschleunigungen, welche vor allem von dem zwischen ihnen übergehenden elektrischen Durchfluß D und von ihrer Entfernung r abhängen.

Vergrößert man die Masse der Kugel 2, indem man sie z. B. mit Schrot füllt, so hat dies *et. par.* keinen Einfluß auf die Beschleunigung g_1 , welche die Kugel 1 zeigt. Es folgt deshalb aus dem Gegenbeschleunigungsgesetz, daß nicht die Beschleunigungen g_1 und g_2 der beiden Kugeln, sondern deren Beschleunigungsgrößen $m_1 g_1$ und $m_2 g_2$ durch ein direktes Gesetz bestimmt sind. Es ist

$$m_1 g_1 = \frac{D^2}{r^2} \quad \text{und} \quad m_2 g_2 = -\frac{D^2}{r^2}.$$

216. Dritte Methode der Massenbestimmung. Ebenso wie man nach der zweiten Methode das Verhältnis der Massen zweier Planeten durch zwei getrennte Beobachtungen von Beschleunigungen in ihren Feldern messen kann, braucht man auch bei irdischen Beschleunigungen das Massenverhältnis zweier Körper nicht aus dem negativen verkehrten Verhältnis der Beschleunigung und Gegenbeschleunigung derselben zu bestimmen, sondern kann dasselbe durch zwei getrennte Beobachtungen feststellen.

Man bringt die beiden Körper nacheinander unter dieselben Beschleunigungsbedingungen, so werden sie gleiche Beschleunigungsgröße annehmen und das Verhältnis ihrer Beschleunigungen gibt das positive verkehrte Verhältnis ihrer Massen.

Wir wollen diese Methode durch ein Beispiel erläutern.

217. Massenbestimmung aus der Dauer elastischer Schwingungen. Ein Körper von der Masse m_1 hängt an einer Feder. Man beobachtet die Schwingungsdauer τ_1 . Die Beschleunigung des Körpers bestimmt sich nach § 10 durch

$$g_1 = -\frac{4\pi^2}{\tau_1^2} \cdot s,$$

worin s die Exkursion ist. Andererseits ist diese Beschleunigung nach 214. der Masse des Körpers verkehrt proportional

$$g_1 = -\frac{\kappa^2}{m_1} s.$$

Es ist also die reciproke Masse des Körpers bis auf die unbekannte Konstante κ^2 bestimmt:

$$(a) \quad \frac{\kappa^2}{m_1} = \frac{4\pi^2}{\tau_1^2}.$$

Beobachtet man nun die Schwingungsdauer τ_2 eines anderen Körpers von der Masse m_2 an derselben Feder, so ergibt sich das Massenverhältnis durch das direkte Verhältniß der Quadrate der Schwingungsdauern

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}.$$

218. *Bestimmung der Summe der reziproken Massen* zweier Körper aus deren relativer Schwingung. Wir haben hier eine ähnliche Korrektion auf die gegenbeschleunigte Masse anzubringen wie in 167. Sind zwei Massen m_1 und m_2 durch eine elastische Feder verbunden, deren Ausdehnung s ist, so ändert sich s sinusartig mit der Zeit und

$$g = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} s$$

ist die zweite Fluxion von s oder die Relativbeschleunigung der beiden Körper.

Das Gesetz der elastischen Beschleunigung (214.) bestimmt aber die absoluten Beschleunigungen g_1 und g_2 der beiden Körper, deren Differenz die Relativbeschleunigung g ist

$$g = g_2 - g_1 = -\frac{\kappa^2}{m_1} s - \frac{\kappa^2}{m_2} s.$$

Man erhält also:

$$(a) \quad \kappa^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{4\pi^2}{\tau^2}.$$

Dies ist die genauere Form der Gleichung 217.(a). Ist das eine Ende der Feder an einer sehr großen Masse, z. B. der Wand befestigt, so fällt diese aus der Gleichung fort.

Man kann sonach mit der in 148. beschriebenen Schwingungswage nicht nur durch Beobachtung des Amplitudenverhältnisses das Massenverhältnis zweier Körper be-

stimmen, sondern auch durch Beobachtung der Schwingungsdauer die Summe der reziproken Massen bestimmen, zu welchen sich natürlich die Massen der Wagschalen addieren.

Während die pendelartige Aufhängung der Schalen, die sich aus praktischen Gründen nicht vermeiden läßt, keinen Einfluß auf erstere Messung hat, beeinflußt sie die Schwingungsdauer des Apparates, aber in einfacher Weise: Es bestimmt sich die Schwingungsdauer τ der reinen elastischen Schwingung aus der beobachteten Schwingungsdauer τ_1 des Apparates

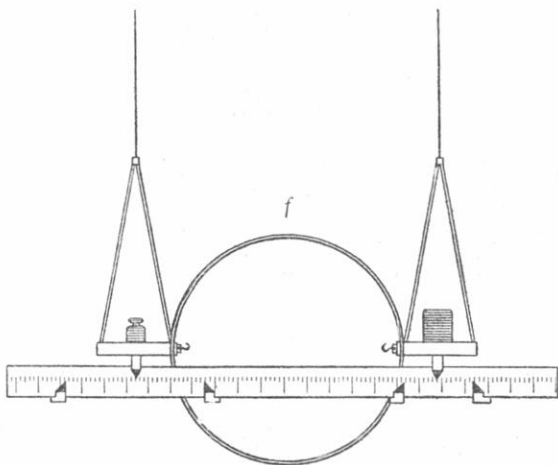


Fig. 45.

nach dem Abbrennen des Fadens und aus der Schwingungsdauer τ_2 der Pendelschwingung, welche man erhält, wenn man beide Massen in gleicher Richtung ohne Spannung der Feder schwingen läßt, und zwar ist, wie man leicht berechnet

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2}.$$

Bei der abgebildeten Schwingungswage ist die Dauer der Pendelschwingung $\tau_2 = 2$ sec. Für die Masse der leeren Schale setzt man am besten 77 gr. Es entspricht dies aber nicht ganz dem wahren Wert, sondern ist ein zur Ausgleichung der Fehler des Apparates angenommener Wert. Derselbe gestattet

dann Massenbestimmungen mit einer Genauigkeit von etwa zwei Prozent, wie nachfolgende Tabelle zeigt.

m_1 gr	m_2 gr	τ_1 sec beobachtet	$\frac{4 \pi^2}{\kappa^2}$ sec ² /gr berechnet
77	77	0,27	0,00193
264	264	0,49	194
514	264	0,56	193
577	577	0,70	192
1077	577	0,78	193
1077	1077	0,91	195

219. Vierte Methode der Massenbestimmung. Eine ganz eigenartige Methode der Massenbestimmung, nicht durch Beobachtung von Beschleunigungen, sondern durch Beobachtung eines Ruhefalles resultiert aus der Kombination einer irdischen Beschleunigung, welche *et. par.* der Masse des beschleunigten Körpers verkehrt proportional ist mit einer astronomischen Beschleunigung, welche von seiner Masse unabhängig ist.

Wird der Körper z. B. an einer Federwage (Fig. 46) aufgehängt, so muß die elastische Beschleunigung desselben im Ruhefalle gleich und entgegengesetzt der Schwerebeschleunigung g_0 sein. Man kennt also nicht nur wie immer die Beschleunigungsgröße, welche durch die Spannung s der Feder bestimmt wird, sondern auch die Beschleunigung selbst und also auch die Masse des Körpers.

Es ist nach 214. für zwei Körper von den Massen m_1 und m_2

$$m_1 g_0 = \kappa^2 s_1$$

und

$$m_2 g_0 = \kappa^2 s_2,$$

so daß sich das Massenverhältnis durch das Verhältnis der Dehnungen bestimmt

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Ein gespannter Muskel und eine gespannte Feder haben ganz ähnliche Wirkungen. Gehört der Muskel meinem Arme an, so empfinde ich seine Spannung mittels des sogenannten Kraftsinnes direkt, ohne die Deformation des Muskels betrachten

zu müssen. Zufolgedessen kann man das Verhältnis gehobener Massen nach den Kraftempfindungen beurteilen.

Nun ist vom Standpunkte der modernen Bewegungslehre diese vierte Methode der Massenbestimmung die künstlichste von den bisher aufgezählten Methoden, und läßt für sich betrachtet die wahre Bedeutung der Masse als der Konstanten des Gegenbeschleunigungsprinzips durchaus nicht erkennen.

Gerade diese Methode umfaßt aber die ältesten mechanischen Beobachtungen. Da man sich den Begriff einer physikalischen Größe stets an der bekanntesten Meßmethode derselben bildet, so ist die verbreitetste Vorstellung von der Masse die einer drückenden oder zerrenden Last, was dem wissenschaftlichen Massenbegriff durchaus nicht entspricht.

220. Das Bathometer. Umgekehrt kann man mit einer Federwage, an welcher ein Körper von unveränderlicher Masse hängt, Veränderungen der Schwerebeschleunigung nachweisen. Da

$$m g_0 = \kappa^2 s,$$

so ist

$$\frac{d g_0}{g_0} = \frac{d s}{s},$$

d. h. eine Änderung der Federdehnung zeigt eine Änderung der Schwerebeschleunigung um denselben Bruchteil an.

Auf diese Weise kann man sehr genau die Zunahme der Schwerebeschleunigung in der Meerestiefe bestimmen. Hierzu verwendet man das Bathometer von W. Siemens. Die elastische Feder ist durch ein elastisches Blech (Manometerblech) ersetzt. Hierauf lastet die Quecksilbersäule eines Barometers, welche das Federblech desto mehr spannt, je größer



Fig. 46.

blech) ersetzt. Hierauf lastet die Quecksilbersäule eines Barometers, welche das Federblech desto mehr spannt, je größer

die Schwerebeschleunigung wird. Die Deformation des Bleches wird durch einen Fühlhebel markiert. Das Instrument ist so genau, daß man mit Hilfe desselben und der bekannten Zunahme der Schwerebeschleunigung in der Meerestiefe (196.) die letztere bestimmen kann.

221. *Antrieb und Bewegungsgröße.* Aus der Huyghensschen Definition der Beschleunigung

$$\mathbf{g} \stackrel{\text{a}}{=} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

folgt durch Multiplikation mit der Masse m des bewegten Körpers

$$\mathbf{b} \stackrel{\text{a}}{=} m \mathbf{g} \stackrel{\text{a}}{=} \frac{d}{dt}(m \mathbf{v}).$$

Die Beschleunigungsgröße $\mathbf{b}$ ist die vektorische Fluxion der Bewegungsgröße, weil die Masse unveränderlich ist.

Da für alle irdischen Beschleunigungen diskreter starrer Körper die Beschleunigungsgröße $\mathbf{b}$ durch direkte Gesetze bestimmt ist, empfiehlt es sich, diesen Vektor in die Bewegungsgleichungen diskreter starrer Körper einzuführen. Für die Bewegung kontinuierlicher deformierbarer Medien hat derselbe jedoch keine Bedeutung.

Aus obiger Definitionsgleichung folgt:

$$\mathbf{b} dt \stackrel{\text{a}}{=} d(m \mathbf{v})$$

und

$$(a) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{b} dt \stackrel{\text{a}}{=} m \mathbf{v}_2 - m \mathbf{v}_1.$$

Das Produkt $\mathbf{b} dt$ nennt man den Antrieb des Körpers in der Zeit dt , das obige vektorische Integral nennt man den Antrieb des Körpers in der Zeit $(t_2 - t_1)$.

Etwas Neues ist für uns in diesem Satze nicht enthalten. Er hat auch insofern keine praktische Form, als der Vektor $\mathbf{b}$ gewöhnlich nicht als Funktion der Zeit, sondern des Ortes gegeben ist.

222. *Arbeit und Bewegungsenergie.* Deshalb geht man besser von der skalaren Form

$$\frac{1}{2} d\mathbf{v}^2 \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$$

[siehe 78.(a)] der Definitionsgleichungen der Bewegungen aus, und führt durch Multiplikation mit der Masse des bewegten Körpers die Beschleunigungsgröße $\mathfrak{b}$ desselben ein. Man erhält so:

$$\frac{1}{2} m d \mathfrak{v}^2 \doteq \mathfrak{b} \cdot d \mathfrak{s},$$

und wenn man über einen längeren Weg des Körpers integriert

$$(a) \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \doteq \int_{\mathfrak{s}_1}^{\mathfrak{s}_2} \mathfrak{b} \cdot d \mathfrak{s}.$$

Auch dieser Satz folgt somit durchaus aus Definitionen. Doch hat er große rechnerische Wichtigkeit. Die Beschleunigungsgröße $\mathfrak{b}$ des Körpers ist nämlich bei allen Bewegungsvorgängen (außer der Gravitation, für welche sie keine Bedeutung hat) durch einfachste Gesetze als Funktion des Ortes $\mathfrak{s}$ bestimmt; ferner aber auch wegen der skalaren Form der Gleichung und den dadurch bedingten einfachen geometrischen Eigenschaften des Linienintegrals.

Dieses nennt man die Arbeit des Körpers. Den durch obige Gleichung zu öfterer Verwendung gelangenden Ausdruck $\frac{1}{2} m \mathfrak{v}^2$ nennt man die Bewegungsenergie des Körpers.

Die Einheit der Bewegungsenergie oder Arbeit: $1 (\text{gr cm}^2 \text{sec}^{-2})$ bezeichnet man als ein Erg.

Die Einheit der Beschleunigungsgrößen: $1 (\text{gr cm sec}^{-2})$ bezeichnet man als ein Dyne.

Die skalaren Linienintegrale.

223. Man bezeichnet das skalare Produkt eines Vektors $\mathfrak{v}$ mit einer kleinen Strecke $d \mathfrak{s}$ als den Fortlauf $d F_{\mathfrak{v}}$ des Vektors auf dieser Strecke

$$(a) \quad d F_{\mathfrak{v}} \doteq \mathfrak{v} \cdot d \mathfrak{s}.$$

Ist eine Vektorverteilung gegeben und eine gekrümmte begrenzte Linie $\mathfrak{s}$ im Felde, so bezeichnet man als den Fortlauf $F_{\mathfrak{v}}$ des Vektors $\mathfrak{v}$ auf diesem Wege das Integral

$$F_{\mathfrak{v}} \doteq \int_{\mathfrak{s}} \mathfrak{v} \cdot d \mathfrak{s}.$$

Jedes Element desselben ist der Fortlauf für ein kleines Element $d\mathfrak{s}$ des Weges.

Diese sämtlichen Wegelemente sind längs des Weges in gleichem Fortlaufssinne positiv zu zählen. Der Fortlauf F_v kehrt sein Vorzeichen um, wenn der Integrationsweg, d. h. sämtliche Elemente desselben in umgekehrtem Sinne gerichtet angenommen werden.

Den Fortlauf auf einem geschlossenen Umfange u bezeichnen wir als den Umlauf U_v des Vektors v auf diesem Umfange

$$U_v \triangleq \int_u v \cdot d u.$$

224. Die *Potentialdifferenz* läßt sich als Fortlauf des Gradienten darstellen. Da nach 87.

$$dP \triangleq \nabla P \cdot d\mathfrak{s},$$

so ist

$$\int_{\mathfrak{s}_1}^{\mathfrak{s}_2} dP \triangleq \int_{\mathfrak{s}_1}^{\mathfrak{s}_2} \nabla P \cdot d\mathfrak{s}$$

oder

$$P_2 - P_1 = F_{\nabla P}.$$

Der Fortlauf eines Gradienten auf einem beliebigen Wege von einem Punkte 1 zu einem Punkte 2 des Feldes ist gleich der Differenz der Potentialwerte dieser Punkte.

225. *Bedingung für das Vorhandensein eines Potentials.* Wenn eine Vektorverteilung v als Gradientenverteilung eines Potentials P darstellbar sein soll, so muß der Fortlauf des Vektors auf zwei beliebigen Wegen, die von demselben Anfangspunkt zu demselben Endpunkt führen, gleich sein, denn dieser wird dann nur durch die Potentialdifferenz dieser zwei Punkte bestimmt.

Kehrt man den einen der beiden Integrationswege um, so ist die Summe beider Fortläufe, welche dann einen Umlauf bilden, Null.

Die hinreichende Bedingung dafür, daß ein Vektor v in einem Raumgebiete ein Potential hat, ist, daß jeder Umlauf des Vektors in diesem Gebiete Null ist.

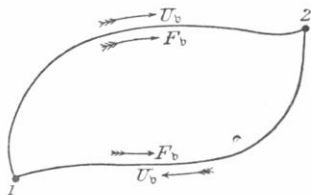


Fig. 47.

226. Wenn zwei Flächen $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ (Fig. 48) zusammenstoßen, so daß sie durch eine gemeinsame Scheidelinie getrennt sind, so ist die Summe der Umläufe U_1 und U_2 einer beliebigen Vektorverteilung auf den Umfängen der beiden Flächen gleich dem Umlauf U auf dem äußeren Umfange beider Flächen

$$U = U_1 + U_2.$$

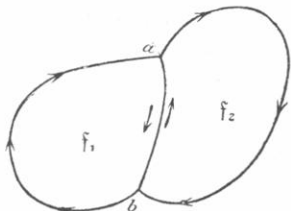


Fig. 48.

Sämtliche Flächenelemente sollen nach derselben Seite der Flächen gerichtet und also sämtliche Umläufe in gleichem Sinne gezählt sein. Ein Teil der Umläufe U_1 und U_2 bezieht sich aller-

dings auf die Scheidelinie, aber diese Anteile sind gleich und wegen ihres entgegengesetzten Fortlaufssinnes entgegengesetzt und heben sich in der Summe auf.

Man kann ein (gekrümmtes) Flächenstück $\mathbf{f}$, welches durch den Umfang $\mathbf{u}$ begrenzt wird, durch viele Scheidelinien in die Elemente $d\mathbf{f}$ verlegen. Der Umlauf des Vektors $\mathbf{v}$ auf dem Umfange eines solchen Flächenelementes sei dU_v . Der Umlauf auf dem äußeren Umfange $\mathbf{u}$ der ganzen Fläche ist dann:

$$(a) \quad \int_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \int_{\mathbf{f}} dU_v.$$

227. Die notwendige Bedingung dafür, daß ein Vektor $\mathbf{v}$ in einem unendlich kleinen Raumgebiete ein Potential hat, ist, daß jeder unendlich kleine Umlauf dU_v in diesem Gebiete Null ist.

Ein endlicher Umfang $\mathbf{u}$ kann aber durchaus in einem Potentialgebiet verlaufen und doch kann der Umlauf U_v auf demselben von Null verschieden sein. Spannt man über denselben eine beliebige Fläche $\mathbf{f}$, so muß aber dieselbe einen Raum schneiden, in welchem der Vektor kein Potential hat, und welchen man einen Wirbelraum nennt.

Denn nach Gleichung 226. (a) können die Umläufe dU_v nicht in allen Teilen dieser Fläche Null sein, sonst müßte auch der ganze Umlauf U_v Null sein.

Es muß aber nach derselben Gleichung das Flächenintegral

$$\int_{\mathfrak{f}} dU_v = W$$

für jede beliebige Fläche $\mathfrak{f}$, die über den gegebenen Umfang gespannt wird, einen und denselben Wert W haben. Jede dieser Flächen muß also den Wirbelraum schneiden (Fig. 49). Daher muß also der Wirbelraum einen mindestens zweifach zusammenhängenden Raum, einen geschlossenen Ring bilden, welcher mit dem Umfang u kettenringartig zusammenhängt. Man

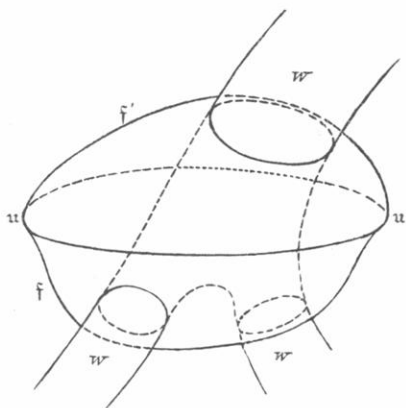


Fig. 49.

nennt die Wirbelräume, weil sie immer ringförmig sind, Wirbelringe. Die Potentialräume außerhalb dieser Ringe müssen also ebenfalls ringförmig bzw. von mehrfachem Zusammenhang sein.

228. Periodische Potentialverteilung. Weist ein Vektorfeld einen Wirbelring auf, so ist auch der Potentialraum zweifach zusammenhängend. Spannt man aber eine Fläche π über die Öffnung des Wirbelringes und sieht auch diese als Grenzfläche des Potentialraumes an, so ist derselbe einfach zusammenhängend und jeder Umlauf U_v in diesem Räume ist Null. Durchbricht aber der geschlossene Umfang u den Querschnitt π , so hat der Umlauf einen ganz bestimmten Wert W , welcher für dieses Feld charakteristisch ist und welchen man die Periode des Potentials oder die Wirbelstärke des Wirbelrings nennt.

Zwei den Wirbelring umschlingende Umfänge (Fig. 50 links) bilden nämlich, wenn man einen derselben umkehrt, zusammen einen Umfang, welcher eine ganz im Potentialgebiet verlaufende ringförmige Fläche begrenzt, sie müssen also gleichen Umlauf W haben, da ihre Umläufe sich aufheben müssen, wenn man einen derselben umkehrt. Zwei ungeschlossene Wege von dem Punkte 1 zu dem Punkte 2 des Potentialraumes haben die Fortläufe F_1 und F_2 . Kehrt man den einen Integrationsweg um, so bilden sie einen geschlossenen Umfang.

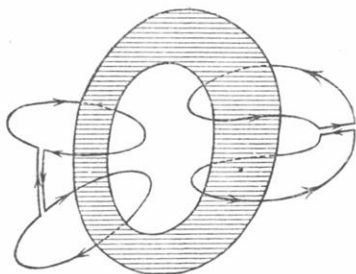


Fig. 50.

Umschlingt derselbe den Wirbelring n mal, so läßt er sich durch Zufügung geschlossener, nicht mit dem Wirbelring verschlungener Umläufe in n einmal mit dem Wirbelring verschlungene Umläufe zerlegen (Fig. 50 rechts) und hat also den Umlauf

$$U_v = F_1 - F_2 = n W.$$

Die Umschlingungszahl n kann positiv oder negativ sein, je nachdem der Umfang im selben oder im umgekehrten Sinne um den Wirbelring läuft, wie ein Umfang, welcher den Umlauf W hat. Es ist also

$$F_1 = F_2 + n W.$$

Die Fortläufe F_1 und F_2 messen aber die Potentialdifferenz der zwei Punkte 1 und 2. Diese ist also in einem solchen Felde nur bis auf ein Vielfaches der konstanten Periode W bestimmt, und zwar von der Verschlingung des Integrationsweges mit dem Wirbelring abhängig.

229. Algebraische Addition der Fortläufe. Ist das betrachtete Vektorfeld $\mathbf{v}$ die vektorische Summe der Vektorverteilungen $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} \sum_i \mathbf{v}_i,$$

so ist der Fortlauf auf einem beliebigen Wegelement

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\Delta}{=} \sum_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{s}$$

oder

$$F_v = \sum_i F_{v_i}.$$

Während sich die Vektoren vektoriisch addieren, summieren sich ihre Fortläufe auf einem beliebig gegebenen Wege algebraisch. Diese Eigenschaft macht die skalaren Linienintegrale zu einem wichtigen Rechenmittel.

230. Ein Feld, welches mehrere Wirbelringe enthält, kann man hiernach als die Summe mehrerer Felder mit je einem Wirbelringe betrachten. Umschlingt ein Umfang die Wirbelringe, deren Wirbelstärken W_i seien, n_i mal, so ist der Umlauf des resultierenden Vektors $\mathbf{v}$ auf demselben

$$U_{\mathbf{v}} = \sum_i U_{\mathbf{v}i} = \sum_i n_i W_i.$$

Einen Wirbelring, welcher sehr kleinen Querschnitt hat, also die Form eines großen Ringes aus dünnen Draht hat, nennt man einen Wirbelfaden. Haben mehrere Vektorfelder $\mathbf{v}_i$ je einen Wirbelfaden von solcher Lage, daß alle diese Wirbelfäden nebeneinander liegen wie ein Bündel Drahringe, so hat das resultierende Feld an dieser Stelle einen dicken Wirbelring, dessen Wirbelstärke oder Potentialperiode W gleich ist der Summe der Wirbelstärken $d W_i$ der einzelnen Wirbelringe

$$W = \sum_i d W_i.$$

Bezeichne $d U_{\mathbf{v}}$ den Umlauf des resultierenden Vektors auf einem Umfange, welcher einen dieser Wirbelfäden irgendwo knapp umschließt, so ist dieser gleich der Wirbelstärke dieses Fadens

$$d U_{\mathbf{v}} = d U_{\mathbf{v}i} = d W_i.$$

Ein Umfang, welcher in keinem der Teilfelder einen Wirbelfaden umschlang, hat auch im resultierenden Felde den Umlauf Null. Er liegt entweder ganz im Potentialraume außerhalb des resultierenden Wirbelringes, oder er liegt in den Trennungsflächen der Wirbelfäden.

231. Die Orthogonalflächen. Nicht für jede Vektorverteilung lassen sich Orthogonalflächen angeben, welche alle Vektorlinien senkrecht schneiden. Jeder Umlauf in einer solchen Fläche muß nämlich Null sein, weil der Vektor $\mathbf{v}$ auf jedem Element $d\mathbf{u}$ eines solchen Umlaufes senkrecht steht, und also das skalare Produkt $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{u}$ Null ist.

In einem Potentialraum sind jedoch immer Orthogonalflächen vorhanden, und zwar sind dieselben die Niveauflächen. Zwei Niveauflächen begrenzen eine Niveauschicht. Der Fortlauf des Vektors auf jedem beliebigen Querwege dieser Schicht hat denselben Wert, der Umlauf auf jedem kleinen Umfange den Wert Null. Im Innern eines Wirbelringes muß aber ein Umfang, welcher den Umlauf Null haben soll, auf einer Trennungsfläche von zwei Wirbelringen liegen, in welche man den resultierenden Wirbelring zerlegen kann. Nur diese Trennungsflächen können also auf dem Vektor senkrecht stehen. Ist der Vektor nicht überall senkrecht zu seinen Wirbelfäden, so hat die Vektorverteilung keine Orthogonalflächen.

232. Beispiel. Der gerade Wirbelzylinder. Ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ sei beschrieben durch die Gleichungen

$$\mathbf{v} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{q} \times \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \doteq \frac{2 \mathbf{v}_0^2}{\mathbf{q} \times \mathbf{r}},$$

welche in verschiedenen Raumgebieten gelten sollen. $\mathbf{r}$ ist der von einem Nullpunkt gezählte Ortsvektor. $\mathbf{q}$ und $\mathbf{v}_0$ sind gegebene konstante Vektoren. Die Raumgebiete, in welchen beziehungsweise die eine oder andere Gleichung für $\mathbf{v}$ gelten soll, werden durch die Angabe bezeichnet, daß $\mathbf{v}_0^2$ der maximale Wert von $\mathbf{v}^2$ im ganzen Felde sein soll. Da aus beiden Gleichungen folgt, daß dieser maximale Wert sich auf der Oberfläche eines Zylinders findet, dessen Achse durch den Nullpunkt geht und die Richtung $\mathbf{q}$ hat, und dessen Radius a_0 durch

$$a_0 = \frac{2 v_0}{q}$$

bestimmt ist, daß die erste Gleichung innerhalb, die zweite außerhalb dieses Zylinders gelten muß, so ist diese Vektorverteilung eine kontinuierliche.

Der Vektor $\mathbf{v}$ ist überall senkrecht gegen die Zylinderachse und gegen den zu ihr senkrechten Radius a gerichtet. Die Vektorlinien sind Kreise. Die Größe des Vektors hängt nur von dem Radius a ab und ist im Innern des Zylinders bestimmt durch

$$v = \frac{1}{2} q a,$$

und außerhalb desselben durch

$$v = \frac{1}{2} q \frac{a_0^2}{a}.$$

Die Vektorröhren sind Kreisringe von konstantem Durchfluß, also Stromfäden. Die Divergenz dieser Vektorverteilung ist überall gleich Null.

Die Vektorverteilung hat überall Orthogonalflächen, welche ein durch die Achse gehendes Ebenenbüschel bilden.

233. In dieser Weise ist der magnetische Vektor $\mathbf{v}$ im Felde eines vom galvanischen Strome durchflossenen kupfernen Zylinders (Drahtes) vom Radius a_0 verteilt. Der charakteristische Vektor $\mathbf{q}$ (die galvanische Stromdichte) war in diesen Feldern früher bekannt, als der magnetische Vektor $\mathbf{v}$ selbst. Diese magnetischen Wirbelringe waren die ersten Wirbel eines Vektors, welche man beobachtete. Die Wasserwirbel wurden viel später untersucht. Eine Vektorverteilung, wie sie für das Innere des Zylinders beschrieben wurde, war aber längst bekannt. So ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Punkte eines rotierenden starren Zylinders verteilt. Wird derselbe außen von Wasser umgeben, welches an seiner Oberfläche haftet und dort dieselbe Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$, wie diese zeigt, so wird die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ der Wasserteile meist in der oben beschriebenen Weise nach außen abnehmen.

234. Das Innere des Zylinders vom Radius a_0 ist ein Wirbelraum. Betrachten wir den Umlauf des Vektors auf irgend einem Umfange $\mathbf{u}$ im Innern des Wirbelzylinders, so ergibt sich

$$\int_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{u}} \mathbf{q} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \int_{\mathbf{u}} \mathbf{r} \times d\mathbf{u} \stackrel{!}{=} \mathbf{q} \cdot \mathbf{f}.$$

Hierin ist nach § 176 $\mathbf{f}$ der Flächenvektor einer beliebigen durch den Umfang $\mathbf{u}$ begrenzten Fläche. Wenn also $\mathbf{f}$ nicht senkrecht zu $\mathbf{q}$ ist, so hat der Umlauf einen von Null verschiedenen Wert.

Der Umlauf U_v um eine ebene auf $\mathbf{q}$ senkrechte Fläche f hat den Wert

$$U_v = qf.$$

Jeder zu $\mathbf{q}$ parallele Zylinder von beliebigem Querschnitt $d\mathbf{f}$ bildet einen Wirbelfaden von der Wirbelstärke

$$dW = dU_v \stackrel{!}{=} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f}.$$

Der ganze Wirbelzylinder hat die Wirbelstärke

$$W = \pi a_0^2 q.$$

235. Ist nicht der Vektor $\mathbf{q}$, sondern die Vektorverteilung $\mathbf{v}$ gegeben, so kann man durch die Gleichung

$$dU_v \triangleq \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f},$$

welche für jedes beliebige Flächenelement $d\mathbf{f}$ gelten soll, wenn man sie auf drei nicht koplanare Vektoren $d\mathbf{f}$ anwendet, einen ganz bestimmten Vektor $\mathbf{q}$ ableiten und bezeichnet ihn mit

$$\mathbf{q} \triangleq \text{rot } \mathbf{v}.$$

Diesen derivierten Vektor nennt man den Rotor, den Quirl (curl) oder die Wirbeldichte der gegebenen Vektorverteilung $\mathbf{v}$.

236. In dem Raum außerhalb des Wirbelzylinders hat der Vektor $\mathbf{v}$ ein skalares Potential. Betrachten wir die zwischen zwei Orthogonalebene eingeschlossene keilförmige Orthogonalschicht, so ist zu zeigen, daß dieselbe eine Niveauschicht ist, d. h. daß der Fortlauf dF_v des Vektors $\mathbf{v}$ auf jedem beliebigen schiefen Querwege in dieser Schicht gleich groß ist. Nun ist die Dicke der Schicht der Entfernung von der Wirbelachse verkehrt proportional, der Vektor aber derselben Entfernung gerade proportional, also hat der Fortlauf auf einem orthogonalen und also auch schiefen Querwege der Schicht einen für dieselbe charakteristischen Wert

$$dF_v = dP,$$

welchen man die Potentialdifferenz der Niveauebenen nennt, welche die Schicht begrenzen

$$dP = v d\alpha = \frac{1}{2} q a_0^2 d\alpha.$$

Hierin ist $d\alpha$ der Winkel der Niveauebenen und es folgt für die Potentialverteilung im Felde außerhalb des Wirbelzylinders

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{2} q a_0^2 (\alpha_1 - \alpha_0).$$

Der Fortlauf F_v auf einem Wege, welcher von einer Niveauebene um den Wirbelzylinder herum zur selben Niveauebene führt, hat den Wert

$$\Pi = \frac{1}{2} q a_0^2 2\pi = W.$$

Die Periode Π des Potentials außerhalb des Wirbelzylinders ist also gleich der Wirbelstärke desselben.

Der Fortlauf F_1 und F_2 auf zwei verschiedenen Wegen von einem Punkte zu einem anderen Punkte des Feldes ist um $n\Pi$ verschieden, wenn diese zwei Wege nach Umkehrung des zweiten einen n mal um den Wirbelzylinder geschlungenen Umfang bilden

$$F_1 - F_2 = n\Pi = nW.$$

237. Zweites Beispiel. Antiparallele Wirbelzylinder. Das resultierende Feld zweier ganz gleicher Wirbelzylinder von gleichem entgegengesetzten Rotor q , deren Achsen eine ge-

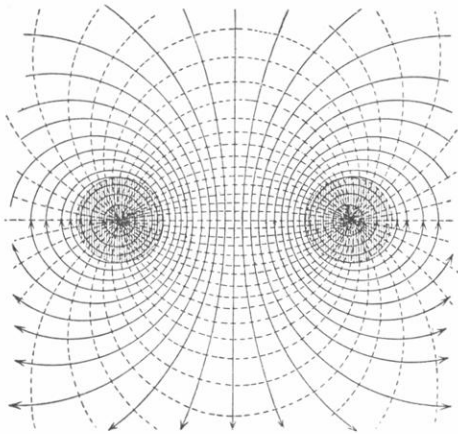


Fig. 51.

gebene Distanz haben, hat außerhalb derselben ein Potential, welches gleich der Summe der Potentiale

$$P_1 = \frac{1}{2} q a_0^2 \alpha_1 \quad \text{und} \quad P_2 = -\frac{1}{2} q a_0^2 \alpha_2$$

der einzelnen Wirbelzylinder ist. α_1 und α_2 sind die Winkel der betrachteten Niveauebenen der Einzelfelder gegen die Ebene der Wirbelachsen. Das resultierende Potential ist

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} q a_0^2 (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Die Niveauebenen müssen also konstanten Peripheriewinkel $(\alpha_1 - \alpha_2)$ haben und sind sonach eine Schar von Kreiszylindern, die durch beide Wirbelachsen gehen. In Fig. 51

sind die Schnitte der Niveauflächen mit der Zeichnungsebene durch gestrichelte Kreise, die Vektorlinien, welche das orthogonale Kreisbüschel darstellen, durch voll ausgezogene Kreise dargestellt.

Das Potential hat wieder die Perioden

$$\pm H = \frac{1}{2} q a_0^2 2\pi = W.$$

Betrachten wir den ebenen Flächenstreifen zwischen beiden Achsen als Querschnitt, so ist der Umlauf U_v auf einem Wege, welcher n_1 mal im selben Sinne wie der Vektor v , und n_2 mal im entgegengesetzten Sinne durch diesen Querschnitt tritt, gleich $(n_1 - n_2) H$.

238. Ein Feld, welches einen Wirbelring aufweist, kann immer als das resultierende Feld aller unendlich dünnen ringförmig geschlossenen Wirbelfäden betrachtet werden, in welche man den Wirbelring zerteilen kann. Jedes kurze Stück eines Wirbelfadens kann als ein Wirbelzylinder betrachtet werden, dessen Rotor q sich durch

$$dU_v \doteq q \cdot d\mathfrak{f}$$

bestimmt, worin $d\mathfrak{f}$ ein beliebiger Querschnitt durch den Wirbelfaden an der betrachteten Stelle ist. Unter dU_v kann man ebensowohl den Umlauf des resultierenden Vektors v als auch den Umlauf des Vektors in einem Teilfelde betrachten, welches nur diesen einen Wirbelfaden enthält.

An verschiedenen Stellen des allgemeinen Vektorfeldes v hat der Rotor q verschiedene Richtung und Größe, er muß aber überall die Richtung der Achse der Wirbelfäden haben. Ferner muß das skalare Produkt

$$q \cdot d\mathfrak{f} \doteq dW,$$

welches die Wirbelstärke eines ringförmigen Fadens darstellt, für jeden beliebigen Querschnitt $d\mathfrak{f}$ desselben gleichen Wert haben. Jeder Wirbelfaden stellt also einen Stromfaden des derivierten Vektors oder Rotors q der gegebenen Vektorverteilung dar. Außerhalb des Wirbelringes und überhaupt in jedem Gebiete, in welchem der Vektor v ein skalares Potential hat, ist sein Rotor q gleich Null.

Der Rotor (curl) eines Vektors. Das vektorische Potential eines Vektors.

239. Für jeden Ort im Felde einer stetigen (und differenzierbaren) Vektorverteilung $\mathbf{v}$ läßt sich ein derivierter Vektor $\mathbf{q}$, der Rotor (curl, Quirl) angeben, welcher die Gleichung

$$(a) \quad d U_{\mathbf{v}} \triangleq \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f}$$

für jede beliebige kleine Fläche $d\mathbf{f}$, welche den betrachteten Ort enthält, erfüllt. $d U_{\mathbf{v}}$ ist der Umlauf des gegebenen Vektors $\mathbf{v}$ auf dem Umfange der kleinen Fläche $d\mathbf{f}$.

Durch diese Definitionsgleichung ist der Rotor $\mathbf{q}$ zweifellos bestimmt, denn man braucht sie nur auf drei durch denselben Punkt gehende Flächen, deren Flächenvektoren $d\mathbf{f}$ nicht koplanar sind, anzuwenden, um drei Bestimmungsstücke für $\mathbf{q}$ zu erhalten. Daß der Vektor $\mathbf{q}$ nicht überbestimmt ist, folgt aus § 238. Der Rotor $\mathbf{q}$ ist die Wirbeldichte jenes Wirbelfadens, der durch den betrachteten Punkt geht.

Der derivierte Vektor $\mathbf{q}$ hat also in jedem Punkte des Feldes eine bestimmte Richtung und Größe, verläuft aber in ganz anderer Richtung, in ganz anderen Vektorröhren, als der gegebene Vektor $\mathbf{v}$. In Feldern, in welchen der Vektor $\mathbf{v}$ Orthogonalflächen hat, verläuft der Rotor $\mathbf{q}$ in denselben, steht also auf dem Vektor $\mathbf{v}$ überall senkrecht.

Die Vektorröhren des Rotors sind die ringförmigen Wirbelfäden des Feldes. Sie sind immer Stromfäden von konstantem Durchfluß, denn dieser ist die Wirbelstärke oder Potentialperiode des Wirbelfadens. Ein Rotor oder Quirl hat also nach seiner Definition niemals eine Divergenz.

240. Man bezeichnet den Rotor $\mathbf{q}$ als Ableitung des Vektors $\mathbf{v}$ durch

$$\mathbf{q} \triangleq \text{rot } \mathbf{v}$$

und nennt den Vektor $\mathbf{v}$ das vektorische Potential des Vektors $\mathbf{q}$. Es hat nicht jede beliebige Vektorverteilung $\mathbf{q}$ ein vektorisches Potential $\mathbf{v}$. Denn es muß, damit $\mathbf{q}$ als Rotor eines Vektors $\mathbf{v}$ angesehen werden kann,

$$\text{div } \mathbf{q} \triangleq 0 \text{ sein, da immer } \text{div rot } \mathbf{v} \triangleq 0$$

ist. An Orten des Feldes, in welchen ein Vektor eine von Null verschiedene Divergenz hat, läßt sich kein Vektorpotential desselben angeben.

241. Da der Umlauf dU_v eines Vektors $\mathbf{v}$, der ein skalares Potential haben soll, stets gleich Null sein muß, so muß auch der Rotor $\mathbf{q}$ dieses Vektors, seiner Definition nach, Null sein. Die Bedingung dafür, daß ein Vektor $\mathbf{v}$ als Gradient einer skalaren Verteilung S angesehen werden kann, lautet also

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} 0 \text{ und es ist stets } \operatorname{rot} \operatorname{grad} S \stackrel{\Delta}{=} 0.$$

242. *Der Stokessche Integralsatz.* Nach 226. ist der Umlauf U_v auf dem Umfange $\mathbf{u}$ einer Fläche $\mathbf{f}$ gleich der Summe der Umläufe dU_v auf den Umfängen ihrer Flächenelemente $d\mathbf{f}$

$$\int_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\mathbf{f}} dU_v.$$

Diese bestimmen sich aber nach 239.(a) durch den Rotor von $\mathbf{v}$

$$dU_v \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}.$$

Wir erhalten so den wichtigen Stokesschen Integralsatz

$$(a) \quad \int_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{u} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\mathbf{f}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}.$$

Das über eine geschlossene Linie $\mathbf{u}$ erstreckte skalare Integral eines Vektors ist gleich dem über eine beliebige durch diese Linie begrenzte Fläche erstreckten skalaren Integral des Rotors dieses Vektors.

Beispiele hierzu sind schon in § 234 ff. gegeben. Das wichtigste ist, daß der Umlauf U_v auf irgend einem Umfange $\mathbf{u}$ außerhalb eines Wirbelringes, der mit diesem kettenringartig zusammenhängt, also die Periode II des skalaren Potentials des Vektors $\mathbf{v}$, gleich ist dem Durchfluß des Rotors $\mathbf{q}$ durch irgend einen Querschnitt des Wirbelringes, also der Wirbelstärke W desselben.

Als Beispiel der Anwendung des Stokesschen Satzes wollen wir streng nachweisen, daß aus der Definition des Rotors, aus welcher der Stokessche Satz folgt, auch folgt, daß die Divergenz jedes Rotors Null ist.

Zwei Flächen f und f' (Fig. 49 in § 227), welche durch denselben Umfang begrenzt werden, haben nach dem Stokes'schen Satze gleichen Durchfluß des Rotors. Betrachtet man sie also als Oberflächen eines Raumes, wobei die eine in umgekehrter Richtung gezählt werden muß, so muß der Ausfluß des Rotors, also nach dem Gauss'schen Satz, auch die Divergenz des Rotors immer Null sein.

243. Da nach 229. die Summe der Umläufe zweier Vektorverteilungen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ für denselben Umfang gleich dem Umlaufe der Summe der Vektoren ist:

$$U_{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)} \stackrel{\text{a}}{=} U_{\mathbf{v}_1} + U_{\mathbf{v}_2},$$

so ist auch

$$(a) \quad \text{rot}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{\text{a}}{=} \text{rot } \mathbf{v}_1 + \text{rot } \mathbf{v}_2.$$

Der Rotor der Summe mehrerer Vektoren ist gleich der Summe der Rotoren dieser Vektoren.

244. Für den Wert des Rotors einer Vektorverteilung $\mathbf{v}$ ist zunächst die Verteilung der Größe v dieses Vektors auf einem senkrechten Querschnitte einer Vektorröhre an dem betrachteten Orte des Feldes maßgebend. Eine auf dem Vektor $\mathbf{v}$ und dem Gradienten dieser ebenen skalaren Verteilung senkrechte Komponente des Rotors ist diesem Gradienten an Größe gleich.

Ferner ist die Krümmung der Vektorröhre maßgebend. Eine zweite auf dem Vektor $\mathbf{v}$ senkrechte Komponente des Rotors steht auch auf dem Krümmungsradius der Vektorlinien senkrecht und ist gleich dem Quotienten der Größe des Vektors und des Krümmungsradius.

Endlich bestimmt die Drillung der Vektorröhren, d. h. der schraubenförmige Verlauf der Vektorlinien auf der Oberfläche derselben die zu dem Vektor $\mathbf{v}$ parallele Komponente des Rotors, welche gleich ist dem Quotienten der Größe des Vektors und der Länge eines Schraubenganges der Vektorlinien.

Beispiel. Ein starrer Körper rotiere um eine Achse mit der Rotationsgeschwindigkeit w und verschiebe sich dabei in der Richtung dieser Achse mit der Geschwindigkeit v_0 . Bedeute a den senkrechten Abstand eines Punktes von der Achse, so ist seine Geschwindigkeit senkrecht zur Achse gleich $v = wa$.

Der Umlauf dieser Komponente auf einem koaxialen Kreise vom Radius a ist $U_v = 2\pi a \cdot v a$, auf dem benachbarten in derselben Ebene liegenden Kreise vom Radius $(a + da)$ aber gleich

$$U_v + dU_v = 2\pi(a + da)\left(v + \frac{dv}{da} da\right).$$

Es ist also

$$dU_v = 2\pi a da \left(\frac{dv}{da} + \frac{v}{a}\right),$$

und da $2\pi a da$ die Fläche des Kreisringes ist, so ist nach 239. (a)

$$(a) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \frac{dv}{da} + \frac{v}{a}.$$

Es ist dies auch der Rotor der totalen Geschwindigkeitsverteilung, da die Komponente v_0 keinen Rotor hat. Der Rotor ist also der Rotationsachse parallel und nicht senkrecht auf der totalen Geschwindigkeit. Die Vektorröhren haben eine Drillung und keine Orthogonalflächen.

245. Zweites Beispiel. Der Rotor eines Schiefungsfeldes. In einem solchen hat der Vektor $\mathbf{j} v_y$ überall dieselbe Richtung y . Seine Größe ändere sich nur in der Richtung z und der Gradient dieser Größe ist also $\mathbf{k} \frac{dv_y}{dz}$. Die Dyade dieser Verteilung ist linear und rektangulär.

Der Umlauf auf dem kleinen Rechteck, dessen Seiten δx und δy sind, hat den Wert

$$\left(v_y + \frac{dv_y}{dz} \delta z\right) \delta y - v_y \delta y = \frac{dv_y}{dz} \delta z \delta y.$$

Es hat also der Rotor dieses Vektors v_y die Größe des Gradienten ∇v_y und die x -Richtung, denn auf dem Rechteck $\delta x \delta y$ ist der Umlauf Null. Hängt die Größe von v_y auch von x und y ab, so hat zunächst der Gradient $\mathbf{j} \frac{\partial v_y}{\partial y}$ keinen Einfluß auf diese Umläufe und der Gradient von v_y in der Ebene xz hat die Komponenten

$$\text{grad } v_y \stackrel{s}{=} \mathbf{i} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Der Rotor von $\mathbf{j} v_y$, welcher auf diesem Gradienten senkrecht steht und ihm gleich ist, hat die Komponenten

$$\text{rot } \mathbf{j} v_y \stackrel{s}{=} \mathbf{i} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \mathbf{k} \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Ebenso folgt für zwei geradlinige Vektorverteilungen $\mathbf{f} v_z$ und $\mathbf{i} v_x$:

$$\text{rot } \mathbf{f} v_z \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{j} \frac{\partial v_z}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

$$\text{rot } \mathbf{i} v_x \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{f} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

246. *Analytische Form der Rotorkomponenten.* Addieren wir die letzten drei Gleichungen, so folgt, daß der Rotor $\mathbf{q}$ des ganz beliebig verteilten Vektors

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{f} v_z$$

Komponenten $q_x q_y q_z$ von folgenden Werten hat:

$$(a) \quad \begin{aligned} q_x &= \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ q_y &= \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ q_z &= \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

247. Die allgemeine Derivation der Vektorverteilung $\mathbf{v}$ nach dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist die derivierte Dyade

$$\Phi \stackrel{\text{a}}{=} \nabla ; \mathbf{v}.$$

Der Rotor Φ_r dieser Dyade (siehe 96. und 97.) ist der Rotor des Vektors $\mathbf{v}$

$$(b) \quad \Phi_r \stackrel{\text{a}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Der Rotor einer Vektorverteilung $\mathbf{v}$ kann als das rotorische Produkt des Operators ∇ mit dem Vektor $\mathbf{v}$ angesehen werden.

Dieses symbolische Produkt folgt der Distributionsregel

$$\nabla \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{\text{a}}{=} \nabla \times \mathbf{v}_1 + \nabla \times \mathbf{v}_2.$$

Dies ist die uns bereits bekannte Gleichung

$$\text{rot}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \stackrel{\text{a}}{=} \text{rot } \mathbf{v}_1 + \text{rot } \mathbf{v}_2.$$

III. Die starren Medien.

11. Geometrie der Bewegung starrer Körper.

248. Bezeichne $\mathbf{r}_i$ eine Strecke, welche von einem Körperteilchen des Mediums zu einem anderen reicht. Der vektorische Wert dieser Strecken ändert sich bei Bewegungen des Mediums.

Die Fluxion desselben ist die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ der beiden Teilchen

$$\mathbf{v}_i \triangleq \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Starr nennen wir das Medium, wenn das skalare Produkt zweier beliebiger Strecken bei jeder möglichen Bewegung konstant bleibt

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \triangleq \text{konst.}$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit die kinematische Grundgleichung starrer Medien:

$$(a) \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \triangleq 0.$$

Fallen die beiden Strecken zusammen, so ist

$$\mathbf{r}^2 \triangleq \text{konst.},$$

d. h. die Länge jeder Strecke bleibt konstant. Hieraus folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$(b) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \triangleq 0,$$

d. h. die Relativgeschwindigkeit der Endpunkte einer Strecke steht immer auf dieser senkrecht. Ferner folgt: Parallele Strecken bleiben parallel und erfüllen also die Gleichung:

$$\mathbf{r} \triangleq \kappa \mathbf{r}',$$

worin die Zahl κ nicht von der Zeit abhängt. Hieraus folgt

$$\mathbf{v} \triangleq \kappa \mathbf{v}'.$$

Die Relativgeschwindigkeiten der Endpunkte paralleler Strecken sind parallel und stehen im Verhältnis mit diesen Strecken. Zwei parallele und gleiche Strecken in einem starren Medium kann man also wie identische Vektoren behandeln.

Durch nochmalige Differentiationen nach der Zeit erhält man Gleichungen für die Relativbeschleunigungen $\mathbf{g}$ der Endpunkte der Strecken

$$\mathbf{g} \triangleq \kappa \mathbf{g}'; \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{v}_1^2 \triangleq 0; \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{g}_2 + 2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \triangleq 0.$$

249. Translation. Es mögen sich zwei nicht parallele Strecken $\mathbf{r}_m$ und $\mathbf{r}_n$ angeben lassen, die keine Relativgeschwindigkeit haben

$$\mathbf{v}_m \triangleq \mathbf{v}_n \triangleq 0.$$

Dann gilt nach 248.(a) für eine beliebige Strecke $\mathbf{r}_i$ des Mediums

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_m \stackrel{1}{=} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_n \stackrel{1}{=} 0.$$

Da die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ auch auf $\mathbf{r}_i$ senkrecht steht, müßte sie auf drei nicht koplanaren Strecken $\mathbf{r}_m$, $\mathbf{r}_n$ und $\mathbf{r}_i$ senkrecht stehen, was unmöglich ist, oder Null sein

$$\mathbf{v}_i \stackrel{3}{=} 0.$$

Alle Punkte des Mediums haben also dieselbe Geschwindigkeit. Eine solche Bewegungsform nennt man eine translativ Bewegung.

250. Allgemeine Bewegungsform eines starren Mediums. Es möge sich nur eine Richtung angeben lassen, so daß die Endpunkte einer in diese Richtung fallenden Strecke $\mathbf{r}_w$ keine Relativgeschwindigkeit haben

$$\mathbf{v}_w \stackrel{3}{=} 0.$$

Dann gilt nach 248.(a) für eine beliebige Strecke $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_w \stackrel{1}{=} 0.$$

Es stehen sonach alle Relativgeschwindigkeiten auf $\mathbf{r}_w$ senkrecht und sind also einer Ebene parallel.

Da nach 248.(b) jede Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ auf ihrer Strecke $\mathbf{r}_1$ senkrecht steht, kann man setzen

$$\mathbf{v}_1 \stackrel{1}{=} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{r}_1,$$

worin $\mathbf{w}_1$ ein unbekannter Vektor ist. Durch Division folgt nach 46(b):

$$\mathbf{w}_1 \stackrel{2}{=} \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{a} \times \mathbf{v}_1,$$

worin $\mathbf{a}$ ein beliebiger Vektor ist. Setzen wir hierfür eine beliebige Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ irgend einer Strecke $\mathbf{r}_i$ des Mediums, so nimmt $\mathbf{w}_1$ einen völlig bestimmten Wert $\mathbf{w}$ an:

$$(a) \quad \mathbf{w} \stackrel{3}{=} \frac{1}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i.$$

Unabhängig von $\mathbf{v}_i$ bestimmt ist dieser Wert $\mathbf{w}$, weil alle Relativgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_i$ derselben Ebene parallel sind (siehe 46).

Man nennt den so definierten Vektor $\mathbf{w}$, welcher auf allen Relativgeschwindigkeiten senkrecht ist, die Rotationsgeschwindigkeit des Mediums. Er ist nämlich für die Bewegung aller Strecken des Mediums charakteristisch, weil man in 250.(a) nach der Grundgleichung 248.(a) die Indizes vertauschen darf

$$\mathbf{w} \stackrel{a}{=} \frac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_i,$$

woraus folgt:

$$(b) \quad \mathbf{v}_i \stackrel{a}{=} \mathbf{w} \times \mathbf{r}_i.$$

Dies ist die allgemeine Beziehung zwischen allen Relativgeschwindigkeiten und ihren Strecken. Da sich der Vektor $\mathbf{w}$ aus 250.(a) jedenfalls angeben läßt, wenn man eine Strecke $\mathbf{r}_1$, ihre Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_1$, und außerdem nur noch die Richtung irgend einer anderen Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ kennt, und alle zu $\mathbf{w}$ parallelen Strecken $\mathbf{r}_w$ nach 250.(b) keine Relativgeschwindigkeit haben, so lassen sich solche Strecken immer angeben und deshalb beschreibt Gleichung 250.(b) die allgemeinste Bewegungsform eines starren Mediums.

251. Wir wollen von nun an mit $\mathbf{r}$ den Abstand eines Punktes des starren Körpers von einem ruhenden Nullpunkte, und mit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ die absolute Geschwindigkeit eines Teilchens des Körpers bezeichnen. Ferner seien $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{r}_0$ diese Werte für einen irgendwie ausgezeichneten Punkt des Körpers. Dann erhält die kinematische Gleichung 250.(b) die Form

$$(a) \quad \mathbf{v} \stackrel{a}{=} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Läßt sich ein Punkt finden, der dieser Gleichung folgt, also als dem Körper zugehörig betrachtet werden kann, dessen Geschwindigkeit dauernd Null ist, so nennt man diese spezielle Bewegungsform eine Rotation des Körpers um diesen seinen ruhenden Punkt.

Legt man eine Achse durch diesen Punkt, welche stets die Richtung der veränderlichen Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ hat, und von welcher die Teile des Körpers den senkrechten Abstand α haben, so ist

$$(b) \quad \mathbf{v} \stackrel{a}{=} \mathbf{w} \times \mathbf{r} \stackrel{a}{=} \mathbf{w} \times \alpha,$$

worin $\mathbf{r}$ der Abstand von dem ruhenden Punkte ist.

Wenn die Rotationsgeschwindigkeit ω nicht konstante Richtung im Raume hat, so kann keineswegs dieselbe Strecke des Körpers dauernd mit der Achse zusammenfallen. Man sagt, der Körper verändert seine Orientierung gegen die Rotationsachse, oder diese ändert ihre Richtung im Körper.

Ist aber ω der Größe nach konstant und die Rotationsachse eine stets ruhende Strecke des Körpers, so ist a der Größe nach konstant und ebenso auch v . Jeder Punkt des Körpers beschreibt einen Kreis um die Achse. Die Umlaufzeit τ dieser einfachen gleichmäßigen Drehung bestimmt sich durch

$$v = \frac{2 \pi a}{\tau},$$

es ist ferner nach 250.(b) $v = \omega a$ also endlich

$$\tau = \frac{2 \pi}{\omega}.$$

252. Relative Rotationsgeschwindigkeit. Wenn zwei starre Körper sich so bewegen, daß ein materieller oder gedachter Punkt, der mit dem ersten Körper starr verbunden ist und dessen Ort und Geschwindigkeit $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}_0$ seien, gleichzeitig mit dem zweiten Körper starr verbunden bleibt, so sagt man, daß die beiden Körper keine relative Translation haben. Legen wir den Nullpunkt in diesen gemeinsamen Punkt ($\mathbf{r}_0 \doteq 0$), so sind ihre Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ bzw. $\mathbf{v}_2$ dargestellt durch

$$\mathbf{v}_1 \doteq \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{v}_2 \doteq \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2.$$

Die Relativgeschwindigkeit zweier mit je einem der Systeme verbundener Punkte ($\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$), welche sich in einem gegebenen Augenblick am selben Orte $\mathbf{r}$ befinden, und von welchen also nur einer materiell sein kann, ist

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \doteq (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

Das eine der starren Systeme wäre z. B. die Erde, das zweite der Fixsternhimmel, welche sich um den Erdmittelpunkt drehen mögen und von deren relativer Translation wir absehen. Wir können nun die Relativgeschwindigkeit ($\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$) eines irdischen Punktes gegen einen benachbarten mit dem Fixsternhimmel starr verbunden gedachten Punkte oder die

Relativgeschwindigkeit eines Sternes gegen einen ihm benachbarten mit der Erde starr verbunden gedachten Punkt bestimmen. Wenn wir auch ihre Richtung gegen $\mathbf{r}$, ferner die Richtung einer zweiten nicht parallelen derartigen Relativgeschwindigkeit $(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')$ bestimmen, so ergibt sich nach 250.(a)

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \stackrel{a}{=} \frac{1}{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'')} (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \times \mathbf{r}.$$

Die in 250. angeführte Methode zur Bestimmung der absoluten Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ eines Körpers läßt sich also nur anwenden, wenn man ein absolut ruhendes starres System zur Vergleichung heranziehen könnte. In Wirklichkeit kann man nur die Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten $(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)$ zweier Körper bestimmen, welche man ihre relative Rotationsgeschwindigkeit nennt.

Es ist aber doch bequemer von absoluten Rotationen zu sprechen, und das kann man stets, wenn man dem Fixsternhimmel eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_2$ zuschreibt. Es ist aber durchaus gleichgiltig, welcher Wert und welche Richtung dieser fiktiven absoluten Rotation $\mathbf{w}_2$ gegeben wird, und es ist nicht weniger fingiert, wenn man der Kürze wegen sagt, daß der Himmel ruhe ($\mathbf{w}_2 \stackrel{a}{=} 0$) und die Erde sich dreht.

253. Addition der relativen Rotationen. Um Verwechslungen vorzubeugen, führen wir zunächst zwei andere Sätze über die Addition von Rotationen an, von welchen der erste eine oft verwendete, aber unrichtige Fassung hat.

1. Wenn ein Körper gleichzeitig die Rotationsgeschwindigkeiten $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ hat, oder dieselben durch zwei Ursachen ihm gleichzeitig erteilt werden, so summieren sich diese Rotationen vektoriell. Dieser Satz ist deshalb nicht zutreffend, weil ein Körper gleichzeitig nur eine Rotationsgeschwindigkeit hat und es nur eine Ursache derselben gibt, nämlich die Rotationsgeschwindigkeit im vorangehenden Augenblick und die durch verschiedene Umstände bestimmten Beschleunigungen der Körperteile.

2. Ein starrer Körper bewegt sich mit der Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_1$, an den Orten $\mathbf{r}$ ist dann die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ vorhanden

$$\mathbf{v}_1 \stackrel{a}{=} \mathbf{v}_{01} + \mathbf{w}_1 \times \mathbf{r}.$$

Ein anderer Körper bewege sich im selben Felde mit der Geschwindigkeitsverteilung $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_2 \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{v}_{02} + \mathbf{w}_2 \times \mathbf{r}.$$

Wenn ein dritter Körper sich mit der Geschwindigkeitsverteilung $\mathbf{v} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ bewegt, so ist seine Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$. Dieser Satz ergibt sich durch Addition obiger Gleichungen, hat aber nur analytische Bedeutung.

3. Wenn ein Körper 1 gegen einen Körper 2 die relative Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{12} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)$ hat, und der Körper 2 gegen einen Körper 3 die relative Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{23} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3)$ hat, so ist die relative Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_{13} \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3)$ des Körpers 1 gegen den Körper 3 die Summe der anderen Relativrotationen

$$\mathbf{w}_{13} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{w}_{12} + \mathbf{w}_{23}.$$

Dieser einfache geometrische Satz hat eine vielseitige Verwendbarkeit.

254. Beispiel. *Der Foucaultsche Kreisel.* Ein vollkommen freier rotierender Kreisel wird unbedingt Richtung und Größe seiner relativen Rotation gegen den Fixsternhimmel bewahren, wo er sich auch auf der Erde befindet. Dieser Kreisel müßte etwa in eine kugelförmige Hülse eingeschlossen sein, welche auf Wasser schwimmt, oder eine feine Cardanische Aufhängung haben.

In der Foucaultschen Aufhängung (Fig. 52) muß aber die Kreiselachse horizontal bleiben, und deshalb kommt es auf den geographischen Ort an, wo sich der Kreisel befindet. Am Pol ist derselbe zwangsfrei und dreht sich den Sternen nach. Am Äquator ist seine Achse aber vollständig zwangsweise

geführt und bewahrt ihre Lage gegen die Erde. Man versteht dies, wenn man sich die Erde 1 ruhend und den

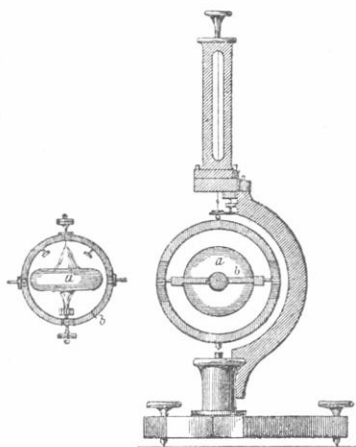


Fig. 52.

Himmel 2 mit der Rotationsgeschwindigkeit w_{21} gegen die Erde gedreht denkt. Welche Orientierung die Kreiselachse auch hat, sie müßte sich um die am Äquator horizontale Weltachse drehen, wenn sie den Sternen folgen soll, und diese Drehung wird durch die Suspension nicht gestattet. Das Verhalten des in mittlerer geographischer Breite aufgehängenen Kreisels mit stets horizontaler Achse versteht man, wenn man dem Himmel eine fingierte absolute Rotation w_2 um eine zur Nordsüdrichtung des Beobachtungsortes parallele horizontale Achse, und der Erde eine Rotation w_1 um die Zenitrichtung r zuschreibt. Die Relativrotation von Himmel und Erde

$$w_{12} = w_1 - w_2$$

muß die Richtung der Weltachse und die Größe $\frac{2\pi}{86400} \text{ sec}^{-1}$ haben. Hierdurch sind auch die beiden fingierten Rotationen w_1 und w_2 bestimmt

$$w_2 \triangleq (w_{12} \times r) \times \frac{1}{r}; \quad w_1 \triangleq (w_{12} \cdot r) \frac{1}{r}.$$

Der Kiesel befindet sich nun auf dem fingierten absoluten Nordpol der Erde, den wir verlegen können wohin wir wollen, und in den Beobachtungsort gelegt haben. Die Erde dreht sich unter ihm mit der Rotationsgeschwindigkeit w_1 , aber diese Drehung der Erde ist für den Kiesel gleichgiltig. Er macht sie nicht mit und sein Gehäuse oder Lagerring dreht sich deshalb mit der relativen Rotationsgeschwindigkeit $-w_1$ gegen die Erde. Was die Drehung w_2 des Himmels anlangt, so findet dieselbe um eine horizontale Achse statt, und diese kann der Kiesel nicht mitmachen. Der Kiesel, dessen Achse zwangsläufig horizontal geführt ist, macht also auch in mittlerer geographischer Breite keine dieser fingierten absoluten Rotationen mit, seine Achse bleibt bei dieser Annahme der absoluten Rotation des Himmels in absoluter Ruhe.

Von physikalischer Wichtigkeit ist hingegen nur die in besonderem Sinne sogenannte absolute Rotation, worunter man die Relativrotation des betrachteten Körpers gegen den Fixsternhimmel versteht. Diese bleibt nur für einen vollkommen freien Kiesel erhalten.

255. Die Rotationsbeschleunigung. Unter diesem Namen versteht man die vektorische Fluxion $\dot{\mathbf{w}}$ der Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$. Hat diese zur Zeit t eine Größe und Richtung, welche durch den Vektor 01 Fig. 53 dargestellt ist und zur Zeit $(t + dt)$ den durch den Vektor 02 dargestellten Wert, so stellt der Vektor 12 die Änderung $d\mathbf{w}$ der Rotation und der seiner Richtung und Größe nach bestimmte Grenzwert

$$(a) \quad \dot{\mathbf{w}} \triangleq \frac{d\mathbf{w}}{dt}$$

die Rotationsbeschleunigung dar. Ändert die Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ihre Größe, aber nicht ihre Richtung, so fällt die Rotationsbeschleunigung in dieselbe Richtung. Gleichung 255.(a) nimmt dann die algebraische Form an

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt}.$$

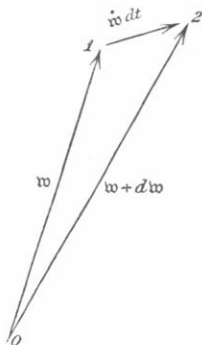


Fig. 53.

Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung eines physikalischen Pendels (278.).

Ändert die Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ihre Richtung, aber nicht ihre Größe, so steht die Rotationsbeschleunigung auf ihr senkrecht. Beschreibt die Rotationsachse bei gleichförmiger Drehung eine Kegelfläche, deren Achse durch den Einheitsvektor $\mathbf{f}$ dargestellt werde, mit der Umlaufszeit T , so beschreibt der Pfeil des Vektors $\mathbf{w}$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{w}}$ einen Kreis vom Radius $w \sin \alpha$, worin α der Öffnungswinkel des Kegels ist. Es ist also dann

$$(a) \quad \dot{\mathbf{w}} = \frac{2\pi}{T} w \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{w}} \triangleq \frac{2\pi}{T} \mathbf{f} \times \mathbf{w}.$$

Ein Beispiel hierfür ist die Präzessionsbewegung eines Kreisels (283.).

256. Änderung der Lage der Rotationsachse im Körper. Wenn die Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ und Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$ eines Körpers, der sich um einen seiner Punkte dreht, gegeben sind, so ist die ganze Bewegung desselben beschrieben und man kann jedenfalls auch die Frage beantworten, welche Strecken des Körpers zu verschiedenen Zeiten mit der Rotationsachse zusammenfallen.

Hat die Rotationsbeschleunigung dieselbe Richtung als die Rotationsgeschwindigkeit, so bewahrt allerdings diese ihre Richtung und fällt die Rotationsachse immer mit derselben Strecke des Körpers zusammen.

Ist die Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$ stets senkrecht gegen $\mathbf{w}$ und einen Vektor $\mathbf{f}$ gerichtet, so präzediert die Rotationsachse in der im Raume feststehenden oben beschriebenen Kegelfläche. Dieselbe ist in Fig. 54 und Fig. 55 dargestellt für die zwei Fälle, daß der mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{w}}$ bewegte

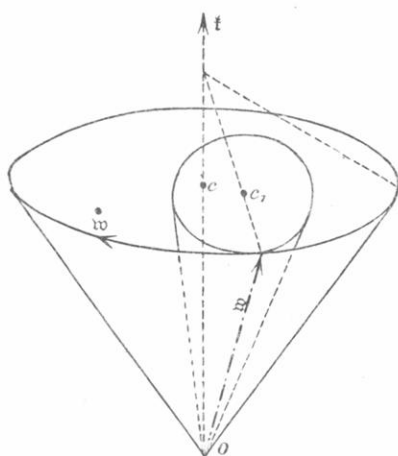


Fig. 54.

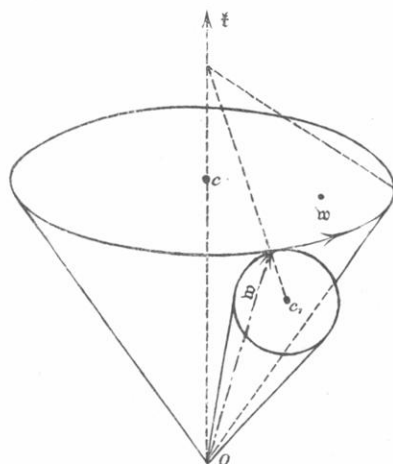


Fig. 55.

Pfeil des Vektors $\mathbf{w}$, in der Richtung der Kegelachse $\mathbf{f}$ gesehen, im Sinne bzw. gegen den Sinn des Uhrzeigers umläuft.

Betrachten wir einen Kegel von sehr kleinem Öffnungswinkel α_1 , dessen Spitze ebenfalls im Ruhepunkt liegt. Es sei

$$(a) \quad \alpha_1 = \sin \alpha \frac{2\pi}{w T} = \frac{\dot{w}}{w^2}.$$

Dieser Kegel möge auf der inneren bzw. äußeren Seite des Präzessionskegels abrollen. Die Berührungslinie beider Kegel soll immer mit der Rotationsachse zusammenfallen. Dann dreht sich der Rollkegel mit der Rotationsgeschwindigkeit w' immer um die momentane Rotationsachse des Körpers, wobei

$$(b) \quad w' = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa_1}$$

sein muß, wenn das Rollen ohne Gleiten stattfindet. Es ist also $w' = w$, d. h. der Rollkegel dreht sich auch mit derselben Rotationsgeschwindigkeit wie der Körper. Er hat also eine feste Lage im Körper und stellt den Ort aller Strecken des Körpers dar, welche nacheinander mit der Rotationsachse zusammenfallen. Wir nennen ihn den Nutationskegel.

Die Achse oc_1 des Nutationskegels ist jene Strecke des Körpers, welche die einfachste Bewegung zeigt. Sie beschreibt in der Zeit T einen mit dem Präzessionskegel konaxialen Kegel vom Öffnungswinkel $(\kappa \mp \kappa_1)$. Jede Erzeugende des Nutationskegels führt eine zyklroidische Bewegung aus. Die übrigen durch den Ruhepunkt gehenden Strecken des Körpers führen die entsprechenden trochoidischen Bewegungen aus.

Lassen wir nun die Annahme fallen, daß der Präzessionskegel eine größere Öffnung κ hat als der Nutationskegel, nehmen wir aber der Einfachheit wegen an, daß beide Öffnungswinkel κ und κ_1 sehr klein sind. Nun sei

$$(c) \quad \mp \kappa_1 = \kappa \frac{2\pi}{2\pi - Tw} = \frac{v\kappa}{v - w^2\kappa},$$

worin das obere oder untere Vorzeichen gelten soll, je nachdem sich die beiden Kegel ausschließen oder einschließen. Rollen sie ohne Gleiten aufeinander, so muß

$$(d) \quad \frac{\kappa_1}{T_1} = \mp \frac{\kappa}{T},$$

worin T_1 die Umlaufszeit ist, mit welcher die Rotationsachse den Nutationskegel umläuft. Die Rotationsgeschwindigkeit w' , mit welcher sich dieser stets um die Rotationsachse, in welcher sich beide Kegel berühren, dreht, muß dann

$$(e) \quad w' = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_1}$$

sein, woraus nach (c) folgt $w' = w$. Der Nutationskegel gehört also wieder dem starren Körper an.

Auch im Falle allgemeiner Veränderlichkeit der Rotationsgeschwindigkeit kann man die Bewegung des Körpers darstellen als das Abrollen einer materiellen Kegelfläche, deren Erzeugende

jene Strecken des Körpers sind, die nacheinander mit der Rotationsachse zusammenfallen, auf der Fläche des im Raum feststehenden Präzessionskegels, welcher den Ort der Rotationsachsen darstellt, doch sind diese Kegel dann nicht Kreiskegel.

257. *Die Beschleunungsverteilung eines starren Körpers.* Die wahre Beschleunigung $\dot{\mathbf{v}}$ eines Teilchens des starren Körpers ist die Fluxion der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ dieses Teilchens. Nach 251.(a) ist

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Differenziert man nach der Zeit, so ergibt sich für die Beschleunungsverteilung die Gleichung

$$(a) \quad \dot{\mathbf{v}} \triangleq \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

$\dot{\mathbf{v}}_0$ ist die Beschleunigung des irgendwie ausgezeichneten Punktes des Körpers, dessen Geschwindigkeit und Ortsvektor $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{r}_0$ sind. Man kann $\dot{\mathbf{v}}_0$ die Translativbeschleunigung nennen.

Den zweiten Teil $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ kann man, wie wir sogleich ausführen werden, die Zentralbeschleunigung nennen.

Der dritte Teil $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ rührt von der Fluxion der Rotation her, d. h. von der Änderung ihrer Größe und Richtung im Raume.

Dreht sich der Körper um einen seiner Punkte, so ist nach 251.(b)

$$\mathbf{v} \triangleq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \triangleq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Wenn wir nun differenzieren um $\dot{\mathbf{v}}$ zu erhalten, können wir aber nur die erste dieser Gleichungen verwenden. Es ist nämlich wohl

$$\mathbf{v} \triangleq \dot{\mathbf{r}}.$$

Hingegen dürfen wir die Fluxion $\dot{\mathbf{a}}$ nicht mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ verwechseln. Der Vektor $\mathbf{a}$ bedeutet nicht den Abstand zweier Teilchen des Körpers, sondern den Abstand von der Rotationsachse, welche ihre Lage im Körper rasch ändern kann. Alle Teilchen, welche im gegebenen Augenblicke in der Rotationsachse sich befinden, ruhen wirklich. Jedoch ist die Fluxion $\dot{\mathbf{a}}$ nicht die Relativgeschwindigkeit des betrachteten Teilchens gegen dieses ruhende Teilchen in der Achse, ja nicht einmal gegen den damit momentan zusammen-

fallenden, aber nicht ruhenden Punkt der Achse, sondern die Fluxion des senkrechten Abstandes von dieser nicht ruhenden Achse.

Wir erhalten durch Differentiation der Gleichung

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

$$\dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}.$$

Es ist aber

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{a}$$

und

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{r} + \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}).$$

Also bestimmt sich die Beschleunigungsverteilung durch

$$(a) \quad \dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{a} + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}$$

oder durch

$$(b) \quad \dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{r} + \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}.$$

Das erste Glied in 257.(a) ist die Zentralbeschleunigung. Wenn die Rotation $\mathbf{w}$ konstant bleiben würde und die Umlaufszeit τ hätte, so wäre

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{a}) \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{a} \stackrel{\text{a}}{=} -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \mathbf{a}.$$

258. Das Moment der Beschleunigungen. Endlich berechnen wir das sehr wichtige Moment der Beschleunigung $\dot{\mathbf{v}}$ in bezug auf den ruhenden Punkt des Körpers. Es ist nach 257.(a)

$$(c) \quad \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{a}}{=} -\mathbf{w}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r})$$

oder nach 257.(b)

$$(d) \quad \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \stackrel{\text{a}}{=} -(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{w} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}).$$

259. Die Dichteverteilung des starren Mediums. Bestimmt man die Masse dm eines Teilchens vom Volum dq eines starren Körpers, so zeigt sich, daß der Quotient

$$\frac{dm}{dq} = \mu$$

einem bestimmten Grenzwert sich nähert, wenn das Volum dq unbegrenzt kleiner wird, und diesen nennt man die Dichte des Körpers an dem betrachteten Punkte.

Man hat also außer der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverteilung $\mathbf{v}$ und $\mathbf{g}$ auch noch die Verteilung dieses skalaren

Wertes μ in starren, wie in allen anderen kontinuierlichen Medien zu berücksichtigen, sowie ferner die Verteilung der Vektoren $\mu \mathbf{v}$ und $\mu \mathbf{g}$.

Die Masse des starren Körpers, welche den Raum φ einnimmt, ist

$$m = \int_{\varphi} \mu d\varphi.$$

260. Der Massenmittelpunkt. Da das Volum jedes Teilchens des starren Körpers unveränderlich ist, und ebenso auch seine Masse, so ist auch die Dichte desselben unveränderlich. Aus der kinetischen Grundgleichung

$$\mathbf{v} \stackrel{=}{{}} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

erhalten wir durch Multiplikation mit dem Massenelement $\mu d\varphi$ und Integration

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{v} \cdot d\varphi = m \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times \left(\int_{\varphi} \mu \mathbf{r} d\varphi - m \mathbf{r}_0 \right).$$

Wir können also die Bewegungsgröße des Körpers

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{v} d\varphi \stackrel{=}{{}} m \mathbf{v}_0$$

und das lineare Massenmoment

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{r} d\varphi \stackrel{=}{{}} m \mathbf{r}_0$$

setzen, d. h. $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{r}_0$ in der kinetischen Grundgleichung als Geschwindigkeit und Ort des Massenmittelpunktes des starren Körpers ansehen. Dieser Massenmittelpunkt ist also mit dem Körper starr verbunden.

261. Die skalaren Massenmomente zweiter Ordnung. Integriert man die Produkte der Massenelemente mit einer Funktion der Radien $\mathbf{r}$ über den ganzen Körper, so erhält man die höheren Massenmomente desselben, deren einfachste wir zunächst anführen. Man bezeichnet das Integral

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{r}^2 d\varphi = \Phi_s$$

als das Trägheitsmoment des starren Körpers in bezug auf den Nullpunkt, von welchem aus die Radien $\mathbf{r}$ gezählt werden.

Sei $\mathbf{r}'$ die Entfernung des Volumelementes $d\varphi$ vom Massenmittelpunkt, so ist

$$\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \stackrel{=}=\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}'^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0^2 = \mathbf{r}^2.$$

Da das lineare Massenmoment in bezug auf den Schwerpunkt

$$(a) \quad \int_{\varphi} \mu \mathbf{r}' d\varphi \stackrel{=}=\mathbf{0}$$

ist, weil dieses Integral der Entfernung des Massenmittelpunktes von sich selbst proportional ist, so folgt durch Multiplikation mit $\mu d\varphi$ und Integration

$$(b) \quad \Phi_{so} + m \mathbf{r}_0^2 = \Phi_s,$$

worin Φ_{so} das Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt ist (Steinerscher Satz).

Das bekannteste dieser Integrale

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{a}^2 d\varphi = \Phi_a^r,$$

worin $\mathbf{a}$ die senkrechte Entfernung von einer Achse a ist, heißt das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse. Es ist wieder das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige Achse a gleich dem Trägheitsmoment in bezug auf eine parallele, durch den Massenmittelpunkt gehende Achse, vermehrt um das Produkt der Masse m des ganzen Körpers und des Quadrates des Abstandes $\mathbf{a}_0$ des Massenmittelpunktes von der Achse a .

Endlich bezeichnet man das Integral

$$\int_{\varphi} \mu \mathbf{e}^2 d\varphi = \Phi_e^s,$$

worin $\mathbf{e}$ den senkrechten Abstand von einer Ebene bedeutet, als das Trägheitsmoment in bezug auf diese Ebene. Sind xyz drei aufeinander senkrechte Koordinatenachsen, so ist also für deren Ursprung:

$$\Phi_s = \Phi_x^s + \Phi_y^s + \Phi_z^s = \Phi_x^r + \Phi_x^r.$$

Die Summe der Momente in bezug auf drei rechteckige Ebenen hat den invarianten Wert Φ_s .

262. Das einfachste vektorische Moment zweiter Ordnung ist das Schwungmoment $\mathfrak{G}$ in bezug auf eine Achse a , von welcher die Punkte des Körpers den senkrechten Abstand $\mathfrak{a}$ haben und in bezug auf einen in ihr liegenden Punkt, von welchem die Radien $\mathfrak{r}$ gezählt werden

$$\mathfrak{G} \triangleq \int_{\varphi} \mu \mathfrak{r} \times \mathfrak{a} d\varphi.$$

Dasselbe ist ein Vektor von einer festen Lage im Körper, wenn die Achse a eine feste Lage in demselben hat. Er steht notwendig auf der Achse senkrecht. Bezeichne $\mathfrak{a}_0$ den Abstand des Massenmittelpunktes von der Achse und $\mathfrak{r}_0$ von dem Nullpunkt in derselben, $\mathfrak{G}'$ das Schwungmoment für eine parallele Achse und den in derselben liegenden Massenmittelpunkt als Nullpunkt, von welchem die Elemente $d\varphi$ die Entfernungen $\mathfrak{a}'$ bzw. $\mathfrak{r}'$ haben, so ist

$$\mathfrak{a} \triangleq \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}_0 \quad \mathfrak{r} \triangleq \mathfrak{r}' + \mathfrak{r}_0$$

und

$$(a) \quad \mathfrak{G}' + m \mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{a}_0 \triangleq \mathfrak{G}.$$

Die Bedeutung dieses Moments geht aus 265. hervor.

263. *Die dyadischen Massenmomente.* Die in 261. definierten quadratischen Momente haben nur deshalb Wichtigkeit, weil sie Invarianten oder Koeffizienten der beiden Trägheitsdyaden oder dyadischen Massenmomente Φ^s und Φ^r sind. Diese sind symmetrische Dyaden, welche für jeden Punkt des starren Körpers einen bestimmten Wert haben. Sei $\mathfrak{r}$ die Entfernung des Volumelementes $d\varphi$ von dem Nullpunkt, so stellt die unendliche kleine Dyade

$$\mu d\varphi \mathfrak{r}; \mathfrak{r}$$

das dyadische Moment des Massenteils $\mu d\varphi$ in bezug auf den Nullpunkt dar. Die Summe dieser unendlich vielen unendlich kleinen linearen Dyaden stellt die skalare Trägheitsdyade für den Nullpunkt dar

$$\Phi^s \triangleq \int_{\varphi} \mu \mathfrak{r}; \mathfrak{r} d\varphi.$$

Das Trägheitsmoment Φ_s des Körpers in bezug auf den Nullpunkt ist der erste Skalar dieser Dyade. Die Haupt-

richtungen derselben oder die Achsenrichtungen ihrer Quadrik nennt man die Trägheitshauptrichtungen in dem Nullpunkt.

Die neun Koeffizienten a_{ik} der Dyade in der analytischen Form derselben heißen die Trägheitsmomente und Deviationsmomente in bezug auf die Koordinatenebenen. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi^s \stackrel{a}{=} & \mathbf{i}; \mathbf{i} \int_{\varphi} \mu x^2 d\varphi + \mathbf{i}; \mathbf{j} \int_{\varphi} \mu xy d\varphi + \mathbf{i}; \mathbf{k} \int_{\varphi} \mu xz d\varphi \\ & + \mathbf{j}; \mathbf{i} \int_{\varphi} \mu yx d\varphi + \mathbf{j}; \mathbf{j} \int_{\varphi} \mu y^2 d\varphi + \mathbf{j}; \mathbf{k} \int_{\varphi} \mu yz d\varphi \\ & + \mathbf{k}; \mathbf{i} \int_{\varphi} \mu zx d\varphi + \mathbf{k}; \mathbf{j} \int_{\varphi} \mu zy d\varphi + \mathbf{k}; \mathbf{k} \int_{\varphi} \mu z^2 d\varphi.\end{aligned}$$

Werden die Koordinatenachsen in die Hauptachsen der Dyade verlegt, so verschwinden die Deviationsmomente. Die Trägheitsmomente $\Phi_x^s \Phi_y^s \Phi_z^s$ in bezug auf die Hauptebenen sind also die Koeffizienten der Normalform der Dyade

$$\Phi^s \stackrel{a}{=} \Phi_x^s \mathbf{i}; \mathbf{i} + \Phi_y^s \mathbf{j}; \mathbf{j} + \Phi_z^s \mathbf{k}; \mathbf{k}.$$

264. Das *rotorisch-dyadische Massenmoment* oder die *rotorische Trägheitsdyade* ist das dyadische Integral

$$\Phi^r \stackrel{a}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{r} d\varphi.$$

Die neun Koeffizienten dieser rotorischen Dyade heißen die Trägheits- und Deviationsmomente in bezug auf die Koordinatenachsen.

Die Hauptachsen der rotorischen Trägheitsdyade fallen mit jenen der zugeordneten skalaren Dyade zusammen. Werden die Koordinatenachsen in diese Hauptachsen gelegt, so verschwinden die Deviationsmomente. Die Trägheitsmomente $\Phi_x^r \Phi_y^r \Phi_z^r$ in bezug auf die Hauptachsen sind also die Koeffizienten der Normalform der rotorischen Dyade

$$- \Phi^r \stackrel{a}{=} \Phi_x^r \mathbf{i}; \mathbf{i} + \Phi_y^r \mathbf{j}; \mathbf{j} + \Phi_z^r \mathbf{k}; \mathbf{k}.$$

265. Die *vektorisken Momente zweiter Ordnung*. Die Wichtigkeit der Trägheitsdyaden beruht darauf, daß in dem Ausdrucke für die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{y}}$ der Punkte eines starren Körpers und für das Moment derselben nach 257. und 258.

die vektorischen Tripelprodukte $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$ und $(\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$ vorkommen und Integrationen über den ganzen Körper durchgeführt werden müssen.

Betrachten wir das Integral

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{a}}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) d\varphi,$$

welches ein vektorisches Moment zweiter Ordnung ist. Falls $\mathbf{m}$ nicht vom Orte abhängt, so kann man diesen Vektor aus dem Integral herausheben und erhält

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{m} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r}; \mathbf{r} d\varphi \stackrel{\text{a}}{=} \Phi^s \cdot \mathbf{m}.$$

Dieses vektorische Moment kann als die lineare Trägheitsfunktion skalarer Art von $\mathbf{m}$ bezeichnet werden.

Wenn die Koordinatenebenen mit den Hauptebenen der Dyade zusammenfallen, so ist

$$S_x = \Phi_x^s m_x, \quad S_y = \Phi_y^s m_y, \quad S_z = \Phi_z^s m_z.$$

266. Das rotorische Moment zweiter Ordnung hat die Form

$$\mathfrak{T} \stackrel{\text{a}}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{m}) d\varphi.$$

Wenn $\mathbf{m}$ nicht vom Orte abhängt, so ist

$$\mathfrak{T} \stackrel{\text{a}}{=} \mathbf{m} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{r} d\varphi \stackrel{\text{a}}{=} \Phi^r \cdot \mathbf{m}.$$

Dieses vektorische Moment ist also die lineare Trägheitsfunktion rotorischer Art von $\mathbf{m}$.

$$T_x = -\Phi_x^r m_x, \quad T_y = -\Phi_y^r m_y, \quad T_z = -\Phi_z^r m_z.$$

Haben wir eine der Trägheitsdyaden Φ' für den Massenzentrum einer Dichteverteilung berechnet, so können wir sie auch für einen Punkt im Abstände $\mathbf{r}_0$ angeben. Es ist

$$\Phi' + m \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0 \stackrel{\text{a}}{=} \Phi.$$

267. Es kommen in den Bewegungsgleichungen starrer Körper noch folgende Produkte vor

$$(\mathbf{w} \times \mathbf{r})^2 \stackrel{1}{=} -\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w}),$$

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})^2 \stackrel{1}{=} \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{w}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{a} \stackrel{2}{=} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{w} \times \mathbf{r} \stackrel{3}{=} -\mathbf{w} \times (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w})).$$

Hierin ist $\mathbf{a}$ der senkrechte Abstand von einer zu $\mathbf{w}$ parallelen Achse. Multiplizieren wir mit $\mu d\varphi$ und integrieren über das ganze Volum φ des Körpers, so ergibt sich

$$(a) \quad \int_{\varphi} \mu (\mathbf{w} \times \mathbf{r})^2 d\varphi \stackrel{1}{=} -\mathbf{w} \cdot \Phi^r \cdot \mathbf{w} \stackrel{1}{=} +\mathbf{w}^2 \Phi_w^r,$$

$$(b) \quad \int_{\varphi} \mu (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})^2 d\varphi \stackrel{1}{=} +\mathbf{w} \cdot \Phi^s \cdot \mathbf{w} \stackrel{1}{=} +\mathbf{w}^2 \Phi_w^s,$$

$$(c) \quad \int_{\varphi} \mu (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{w} \times \mathbf{r} d\varphi \stackrel{2}{=} -\mathbf{w} \times \Phi^r \cdot \mathbf{w} \stackrel{3}{=} \mathbf{w}^2 \mathfrak{G}_w,$$

$$(d) \quad \int_{\varphi} \mu \mathbf{w} \times \mathbf{r} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) d\varphi \stackrel{2}{=} +\mathbf{w} \times \Phi^s \cdot \mathbf{w} \stackrel{3}{=} \mathbf{w}^2 \mathfrak{G}_w.$$

Hierin ist Φ_w^r das Trägheitsmoment in bezug auf eine zu $\mathbf{w}$ parallele Achse, Φ_w^s das Trägheitsmoment in bezug auf eine zu $\mathbf{w}$ senkrechte Ebene und $\mathfrak{G}_w$ das Schwungmoment in bezug auf eine zu $\mathbf{w}$ parallele Achse. Es ist nach (c) und (d)

$$\mathfrak{G}_w \stackrel{3}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{a} d\varphi,$$

$$(e) \quad \mathfrak{G}_i \stackrel{3}{=} -\mathbf{i} \times \Phi^r \cdot \mathbf{i} \stackrel{3}{=} \mathbf{i} \times \Phi^s \cdot \mathbf{i}.$$

Hierin ist $\mathbf{i}$ ein Einheitsvektor, welcher die Richtung der Achse des Schwungmomentes angibt. Dasselbe hat also die Komponenten

$$(f) \quad \begin{cases} C_{ix} = i_x i_y (\Phi_y^s - \Phi_z^s) = i_x i_y (\Phi_z^r - \Phi_y^r), \\ C_{iy} = i_x i_z (\Phi_z^s - \Phi_x^s) = i_x i_z (\Phi_x^r - \Phi_z^r), \\ C_{iz} = i_y i_x (\Phi_x^s - \Phi_y^s) = i_y i_x (\Phi_y^r - \Phi_x^r), \end{cases}$$

worin $i_x i_y i_z$ die Richtungskosinus der Achse $\mathbf{i}$ des Schwungmomentes gegen die Hauptachsen der Trägheitsdyade sind.

268. Das Beschleunigungsmoment. Wir nennen das Integral

$$\mathfrak{M} \stackrel{3}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} d\varphi,$$

welches die Summe der Momente der Beschleunigungsgrößen ($\mu d\varphi \dot{\mathbf{v}}$) darstellt, kurz das Beschleunigungsmoment des starren Körpers. Nach 258.(d) ist

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \triangleq -(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{w} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}).$$

Multiplizieren wir mit $\mu d\varphi$ und integrieren über den ganzen Körper, so ergibt sich nach 267.(c) und 266.

$$(a) \quad \mathfrak{M} \triangleq \mathbf{w} \times \Phi^r \cdot \mathbf{w} - \Phi^r \cdot \dot{\mathbf{w}}.$$

Das Beschleunigungsmoment kann aber auch nach 267.(c) in der Form

$$(b) \quad \mathfrak{M} \triangleq -w^2 \mathfrak{G}_w - \Phi^r \cdot \dot{\mathbf{w}}$$

dargestellt werden. $\Phi^r \cdot \dot{\mathbf{w}}$ ist die lineare Trägheitsfunktion rotorischer Art der Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$.

Das Beschleunigungsmoment hat also nach 267(f) für ein mit den Trägheitsachsen zusammenfallendes Koordinatensystem die zuerst von Euler (1758) berechneten Komponenten

$$(c) \quad \begin{cases} M_x = w_z w_y (\Phi_y^r - \Phi_z^r) + \Phi_x^r \dot{w}_x, \\ M_y = w_x w_z (\Phi_z^r - \Phi_x^r) + \Phi_y^r \dot{w}_y, \\ M_z = w_y w_x (\Phi_x^r - \Phi_y^r) + \Phi_z^r \dot{w}_z. \end{cases}$$

12. Die inneren Beschleunigungen starrer Körper.

269. Die Teile eines starren Körpers können partielle Beschleunigungen der verschiedensten Herkunft haben. Jedes Teilchen eines Glaskörpers, in dessen Inneren freie Elektrizität vorhanden ist, d. h. der elektrische Vektor nicht divergenzfrei verteilt ist, hat eine partielle elektrische Beschleunigung in der Richtung dieses Vektors. Jedes Teilchen eines magnetischen Stahlstückes, d. i. eines Stahlstückes, in welchem der magnetische Vektor nicht quirlfrei verteilt ist, hat eine zu diesem Vektor und zu seinem Rotor senkrechte partielle magnetische Beschleunigung. Zum mindesten haben die Teile eines starren Körpers die partiellen Gravitationsbeschleunigungen. Nie, außer bei dem freien Falle, sind dies aber die wahren Beschleunigungen.

nungen, mit welchen sich die Teile wirklich bewegen, denn es kommen stets noch mindesten zwei partielle Beschleunigungen jedes Teilchens dazu: die elastischen und die Beschleunigungen der Zähigkeit.

Erstere sind dadurch charakterisiert, daß sie durch die kleinen Deformationen der Umgebung des betrachteten Teilchens bestimmt sind, letztere dadurch, daß sie durch die Fluxion dieser Deformationen bestimmt sind.

Da diese Beschleunigungen von ausschlaggebender Bedeutung sind, so sollte man die Theorie der starren Körper erst auf die Theorie der deformierbaren Medien folgen lassen und auf die Differentialgesetze der Elastizität und Zähigkeit stützen.

270. Die starren Körper stellen aber einen so extremen Fall deformierbarer Medien dar, daß ihr Verhalten schon dadurch vollständig bestimmt ist, daß ihre inneren Beschleunigungen den Satz der Erhaltung der Bewegungsmomente (152.) erfüllen.

Dieser Satz, dessen Richtigkeit ohnehin unbezweifelt ist, folgt sowohl aus der Elastizitätstheorie als aus der Theorie der inneren Reibung. Auf Grund desselben können wir die Bewegung starrer Körper, welche nicht in Flüssigkeiten oder elastischen Medien eingebettet sind (welchen Fall wir erst bei Darstellung der Bewegungsgesetze dieser deformierbaren Medien in Betracht ziehen können), sondern welche von verdünnter Luft umgeben sind, vollständig verstehen.

271. Wir haben die elastischen Beschleunigungen starrer Körper, sowie die aus ihrer Zähigkeit folgenden, unter dem gemeinsamen Namen innere Beschleunigungen zusammengefaßt, weil man sie in diesem extremen Falle schwer trennen kann. Ein äußerst zäher Körper ist ohne Zweifel ebenso starr, wie ein äußerst stramm elastischer Körper. Blei und Siegelack verdanken ihre Starrheit hauptsächlich ihrer Zähigkeit. Quarz bei 500° C. ebenso, bei gewöhnlicher Temperatur aber hauptsächlich seinen dann sehr großen elastischen Moduln. Auch Stahl ist mehr elastisch als zäh usw.

272. *Technische Mechanik der starren Körper.* Wir haben vorerst elastische und flüssige Medien als Umgebung des starren Körpers ausgeschlossen, müssen aber doch davon, so wie bisher,

die für die Praxis wichtigsten Ausnahmen machen und können dies auch, insofern es sich nur um Abstraktionen handelt, die uns längst geläufig sind.

Wir wissen, wie sich ein sehr kleiner starrer Körper bewegt, welcher an einer gedehnten elastischen Feder befestigt ist. Er erfährt nach 214. eine elastische Beschleunigung $\mathbf{g}$, welche die Richtung der Federdehnung und eine derselben proportionale Größe hat und außerdem der reziproken Masse m des Körpers proportional ist. Die Beschleunigungsgröße $\mathbf{b} \triangleq m \mathbf{g}$ ist durch die Feder allein bestimmt, von der Masse des Körpers unabhängig.

Ist nun dieser kleine Körper *cet. par.* mit einem großen starren Körper starr verbunden, so heißt er ein Angriffsteil desselben. Die Feder bestimmt dann wohl dieselbe nun aber partielle Beschleunigung $\mathbf{g}$ und Beschleunigungsgröße $\mathbf{b}$ des Angriffsteiles. Nur sind neu hinzukommende Beschleunigungen durch die minimalen Deformationen der angrenzenden Teile des starren Körpers bestimmt, dem er angehört und welche also innere Beschleunigungen sind.

Man kann nun die Grenzfläche zwischen dem Angriffsteil und dem übrigen starren Körper beliebig gewählt denken, wenn derselbe nur immer hinreichend klein bleibt, so daß sich sein Massenmittelpunkt nicht wesentlich verschiebt. Da seine Beschleunigungsgröße $\mathbf{b}$ von seiner Masse unabhängig ist, ist sie bestimmt, ohne daß eine bestimmte Abgrenzung des Angriffsteiles gegen den festen Körper angegeben werden muß.

Man kann also durch gespannte Federn, gespannte Seile, gespannte oder gebogene dünne Hebelstangen usw. schließlich auch mit dem Finger oder, wenn es sich um sehr große starre Körper handelt, mit der Hand beliebigen kleinen Angriffsteilen in der Oberfläche eines starren Körpers bestimmte Beschleunigungsgrößen $\mathbf{b}$ erteilen, d. h. für jeden Angriffspunkt einen Vektor $\mathbf{b}$ seiner Richtung und Größe nach bestimmen, welcher die wahre Beschleunigungsgröße $m \mathbf{g}$ des Angriffsteiles wäre, wenn dieser frei wäre und jedenfalls eine partielle Beschleunigungsgröße desselben ist.

273. *Die äußeren Beschleunigungen.* Die wahre Beschleunigung $\mathbf{b}$ eines kleinen Teiles eines starren Körpers,

d. i. die Fluxion der Geschwindigkeit $\dot{v}$ desselben setzt sich wie erwähnt aus mehreren Beschleunigungen zusammen. Von diesen scheiden wir die inneren Beschleunigungen g' aus, welche durch die minimalen Deformationen der Umgebung des Teilchens bestimmt werden. Die Summe der übrigen partiellen Beschleunigungen des Teilchens (seine Gravitationsbeschleunigung, elektrische, magnetische Beschleunigung usw.) nennen wir die äußere Beschleunigung g desselben. Es ist also

$$(a) \quad \dot{v} \doteq g + g'.$$

Die wahre Beschleunigung ist die Summe der inneren und äußeren Beschleunigung. Auch die Beschleunigungen der Angriffsteile an der Oberfläche des starren Körpers lassen sich so zerlegen. Die partielle Beschleunigung eines Angriffsteiles zufolge der minimalen Deformation des angrenzenden starren Mediums ist eine innere, die Beschleunigungsgröße zufolge der großen Deformation der angrenzenden elastischen Medien (z. B. der angreifenden Federn, Seile usw.) bestimmen eine äußere Beschleunigung des Angriffsteiles.

274. Moment der inneren Beschleunigungen. Wie schon in 270. angedeutet wurde, müssen die inneren Beschleunigungen g' eines von Luft umgebenen starren Körpers das Gegenbeschleunigungsgesetz mit sehr großer Annäherung erfüllen, und zwar der sehr kleinen zu vernachlässigenden Dichte der Luft wegen. Die vektorische Summe der Beschleunigungsgrößen $\mu d\varphi g'$ für alle Volumselemente $d\varphi$ des ganzen Volums φ des starren Körpers ist also Null

$$(a) \quad \int_{\varphi} \mu g' d\varphi \doteq 0.$$

Diese Behauptung wird eingeschlossen von der allgemeineren Annahme, daß die inneren Beschleunigungen eines von Luft umgebenen starren Körpers mit großer Annäherung den Satz der Erhaltung der Bewegungsmomente (siehe § 152) erfüllen. Man muß dies als eine Folge der Elastizitätstheorie ansprechen, da die Giltigkeit des allgemeinen Prinzips in diesem Falle nicht evident ist. Daß, um nur den einfachsten Fall zu erwähnen, zwei durch einen sehr dünnen (masselosen) gebogenen Stab verbundene Körper den Momentensatz erfüllen, hängt

ganz von der Form der Gesetze der elastischen Wirkungen ab. Man muß sich sogar wundern, daß unabhängig von der unsymmetrischen Biegungsform des Stabes die Beschleunigungsgrößen der Körper nicht nur gleich und antiparallel sind, sondern immer in die Verbindungslinie beider Körper fallen. Es ist also noch weniger a priori einzusehen, daß ein nahezu starrer Körper infolge kleiner gegebener Deformationen nie sein Rotationsmoment ändern wird, doch ist dies durch mannigfaltige Beobachtungen sichergestellt, welche wir nun beschreiben wollen.

Nach dem Flächensatz ist die Summe der Momente $\mu d\varphi \mathbf{r} \times \mathbf{g}'$ der inneren Beschleunigungsgrößen in bezug auf einen (beliebig bewegten) Punkt, von welchem die Volumenelemente $d\varphi$ den Abstand $\mathbf{r}$ haben, gleich Null

$$(b) \quad \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{g}' d\varphi \stackrel{!}{=} 0.$$

275. Die Arbeit eines starren Körpers. Ist $\dot{\mathbf{v}}$ die wahre Beschleunigung eines Teiles des starren Körpers und $\mathbf{v} dt$ der Weg desselben in der Zeit dt , so ist $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt$ der Fortlauf der Beschleunigung auf diesem Wege und $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$ der Fortlauf in der Bahnrichtung pro Zeiteinheit; $\mu d\varphi \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$ ist die Arbeit des Volumenelementes $d\varphi$ des Körpers pro Zeiteinheit. Die Arbeit A des ganzen Körpers pro Zeiteinheit ist also

$$A \stackrel{!}{=} \int_{\varphi} \mu \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} d\varphi.$$

Es ist nun nach der kinematischen Grundgleichung

$$\mathbf{v} \stackrel{!}{=} \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

worin $\mathbf{v}_0$ die Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Körpers und $\mathbf{r}$ der Abstand des Volumenelementes $d\varphi$ von demselben ist. Deshalb zerfällt die Arbeit in zwei Teile

$$A \stackrel{!}{=} \mathbf{v}_0 \cdot \int_{\varphi} \mu \dot{\mathbf{v}} d\varphi + \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} d\varphi.$$

Den ersten Teil kann man die Translationsarbeit, den zweiten die Rotationsarbeit nennen. In diesem Teile haben wir das Tripelprodukt anders assoziiert, um die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ herausheben zu können.

Zerlegen wir die wahre Beschleunigung $\mathbf{b}$ in die innere $\mathbf{g}'$ und äußere Beschleunigung $\mathbf{g}$. Die Arbeiten dieser Komponenten summieren sich algebraisch. Die Arbeit A' der inneren Beschleunigungen ist aber Null, weil die Summe und das Moment der inneren Beschleunigungsgrößen nach dem Gegenbeschleunigungsprinzip bzw. Flächensatz (274.) gleich Null sind

$$(a) \quad A' \triangleq \mathbf{v}_0 \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{g}' d\varphi + \mathbf{w} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{g}' d\varphi \triangleq 0.$$

Die Arbeit A des Körpers wird also ausschließlich durch seine äußeren Beschleunigungen $\mathbf{g}$ bestimmt

$$(b) \quad A \triangleq \mathbf{v}_0 \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{g} d\varphi + \mathbf{w} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{g} d\varphi.$$

Sind noch mehrere diskrete äußere Beschleunigungsgrößen $\mathbf{b}_i$ von Angriffsteilen m_i der Oberfläche des Körpers gegeben, so addiert sich zu obiger Arbeit noch der Anteil

$$(c) \quad \mathbf{v}_0 \cdot \sum_i \mathbf{b}_i + \mathbf{w} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{b}_i.$$

Die Summe aller äußeren Beschleunigungsgrößen seiner Teile nennt man die äußere Beschleunigungsgröße $\mathfrak{B}$ des ganzen Körpers

$$\mathfrak{B} \triangleq \int_{\varphi} \mu \mathbf{g} d\varphi + \sum_i \mathbf{b}_i.$$

Die Summe der Momente aller äußeren Beschleunigungsgrößen seiner Teile nennt man das Drehmoment $\mathfrak{D}$ des ganzen Körpers

$$\mathfrak{D} \triangleq \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{g} d\varphi + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{b}_i.$$

Die gesamte Arbeit A des starren Körpers, das ist die Arbeit seiner wahren Beschleunigungen pro Zeiteinheit, ist also gleich der Summe der skalaren Produkte aus Translationsgeschwindigkeit und Beschleunigungsgröße bzw. aus Rotationsgeschwindigkeit und Drehmoment der äußeren Beschleunigungen

$$(d) \quad A \triangleq \mathbf{v}_0 \cdot \mathfrak{B} + \mathbf{w} \cdot \mathfrak{D}.$$

276. Die Energiegleichung. Daß die Arbeit A eines Systems von Körpern oder eines starren oder deformierbaren Mediums pro Zeiteinheit gleich der Fluxion der Bewegungsenergie E ist, ist eine identische Gleichung, welche aus der Definition dieser Werte folgt. Es ist

$$A \doteq \int_{\varphi} \mu \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\varphi \doteq \frac{1}{2} \int_{\varphi} \mu \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 d\varphi \doteq \dot{E},$$

worin

$$E = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \mu \mathbf{v}^2 d\varphi$$

gesetzt wurde. Es ist

$$\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2 + 2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0 \times \mathbf{w} + (\mathbf{w} \times \mathbf{r})^2.$$

Nun multiplizieren wir mit $\mu d\varphi$ und integrieren, wobei das zweite Glied

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{w} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} d\varphi = 0$$

wegfällt, wenn $\mathbf{r}$ die Entfernung vom Massenmittelpunkt oder von einem ruhenden Punkte ist. So ergibt sich

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} \int_{\varphi} \mu (\mathbf{w} \times \mathbf{r})^2 d\varphi$$

oder nach 267.(a)

$$(a) \quad E \doteq \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \Phi^r \cdot \mathbf{w}$$

oder auch

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} \Phi_w^r \mathbf{w}^2,$$

worin Φ^r die Trägheitsdyade, Φ_w^r das Trägheitsmoment in bezug auf die durch den ruhenden oder mit dem Schwerpunkt zusammenfallenden Nullpunkt gehende, der Rotation $\mathbf{w}$ parallele Achse ist. Die Bewegungsenergie zerfällt in zwei durch die Translation und Rotation bestimmte Anteile. Die Fluxion der Bewegungsenergie nimmt nur in dem Falle eine gleich einfache Form an, wenn das Trägheitsmoment seinen Wert nicht ändert

$$\frac{d}{dt} \Phi_w^r = 0.$$

Dann ist

$$(b) \quad \dot{E} \doteq m \mathbf{v}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}}_0 + \Phi_w^r \mathbf{w} \cdot \dot{\mathbf{w}}.$$

Es tritt dies ein, wenn die Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ihre Richtung im Raume, also auch die Rotationsachse ihre Lage im Körper nicht ändert. Ferner, wenn die Rotationsachse in der Ebene eines Kreisschnittes des Trägheitsellipsoides bleiben muß, oder falls dieses ein Rotationsellipsoid ist, wenn die Rotationsachse im Körper in einem Kreiskegel umläuft, dessen Achse die Trägheitsachse ist. Ferner wenn die Rotationsachse in der unmittelbaren Nähe einer der drei Hauptträgheitsachsen bleiben muß. Endlich stets, wenn das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist.

In diesen Fällen hat die Arbeits- oder Energiegleichung die Form

$$(c) \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathfrak{B} + \mathbf{w} \cdot \mathfrak{D} \doteq \mathbf{v}_0 \cdot m \dot{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{w} \cdot \Phi_w^r \dot{\mathbf{w}}.$$

Man könnte übrigens diese Gleichung in zwei für die Translationsarbeit bzw. für die Rotationsarbeit gültige Gleichungen zerlegen, da, wie wir weiter unten ausführen wollen, $\mathfrak{B} \doteq m \dot{\mathbf{v}}_0$ ist. Bei der Auswertung des Drehmomentes braucht auf die Zwangsbeschleunigungen (§ 289), welche die Rotationsachse so führen, daß das Trägheitsmoment konstant bleibt, keine Rücksicht genommen zu werden.

277. Man kann nach der Energiegleichung die Bewegung eines starren Körpers vollständig berechnen, wenn derselbe zwangsläufig so geführt wird, daß von den 6 Bestimmungsstücken der unbekannten Vektoren $\dot{\mathbf{v}}_0$ und $\dot{\mathbf{w}}$ nur eines frei ist. Der Körper muß also fünf Bedingungen unterworfen sein. Es trifft dies bei vielen Maschinenbestandteilen zu.

Beispiel. Ein starrer Zylinder rollt, ohne zu gleiten, auf einer schiefen Ebene nach abwärts, oder eine Schraubenmutter fällt unter einer der Ganghöhe der Schraube entsprechenden Rotation auf ihrer ruhenden Schraube nach abwärts. Im ersten Falle verlegen wir die Rotationsachse in die Achse des Zylinders. Ferner ist die Richtung der Translations- und Rotationsgeschwindigkeit gegeben, das sind je zwei Bedingungen. Endlich muß zwischen der Größe dieser beiden Geschwindigkeiten eine leicht anzugebende Proportionalität bestehen

$$w = \kappa v_0.$$

Ein Drehmoment ist nicht zu berücksichtigen. Die Beschleunigungsgröße $\mathfrak{B}$ ist gleich der Masse des bewegten Körpers multipliziert mit der Schwerebeschleunigung g_0 . Man hat also nach 276.(c) (vergl. übrigens auch 289.)

$$m g_0 \cos(v_0 g_0) = (m + \kappa^2 \Phi_w^r) \ddot{v}_0.$$

Die Beschleunigung $\ddot{v}_0$, mit welcher diese Körper fallen, ist um so kleiner, je größer ihr Trägheitsmoment ist.

278. Das physische Pendel. Die erste Bewegungsform eines starren Körpers, welche (durch Huyghens 1673) vollständig beschrieben wurde, war die des physischen Pendels, d. i. eines Körpers, der sich um eine feste Achse dreht. Bezeichnen wir mit $\mathbf{r}_0$ den Abstand des Massenmittelpunktes von irgend einem Punkte der Achse, auf welchen auch das Drehmoment der Schwerebeschleunigungen $\mathbf{g}_0$ der Teile des Körpers bezogen werde

$$\mathfrak{D} \triangleq \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{g}_0 d\varphi.$$

Es ist also

$$\mathbf{w} \cdot \mathfrak{D} \triangleq \mathbf{g}_0 \times \mathbf{w} \cdot \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} d\varphi \triangleq m \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{g}_0 \times \mathbf{w}.$$

Ist α das Komplement des Winkels zwischen dem kürzesten Radius $\mathbf{r}_0$ und seiner horizontalen Lage, welche die Richtung des Vektors $\mathbf{g}_0 \times \mathbf{w}$ hat, so ist $r_0 \sin \alpha$ die Projektion von $\mathbf{r}_0$ auf $\mathbf{g}_0 \times \mathbf{w}$ und ferner $\mathbf{w} = -\dot{\alpha}$. Bezeichnen wir den Winkel $(\mathbf{g}_0, \mathbf{w})$ also die Neigung der Pendelachse gegen die Vertikale mit γ . Die Energiegleichung lautet, da $\mathbf{w}$ dieselbe Richtung hat wie $\mathbf{w}$

$$-m g_0 r_0 \sin \gamma \sin \alpha = \Phi_w^r \ddot{\alpha}.$$

Dies ist eine Schwingungsgleichung, so gut wie die eines mathematischen Pendels. Die Schwingungsdauer τ bestimmt sich also für kleine Amplituden und eine horizontale Achse durch

$$(a) \quad \tau \triangleq 2\pi \sqrt{\frac{\Phi_w^r}{m r_0 g_0}}.$$

Nun ist nach dem Steinerschen Satze

$$\Phi_w^r = \Phi_o^r + m r_0^2,$$

worin Φ_0^r das Trägheitsmoment in bezug auf eine parallele, durch den Massenmittelpunkt gehende Achse ist. Man erhält somit

$$r_0^2 - \frac{\tau^2}{4\pi^2} g_0 r_0 + \frac{\Phi_0^r}{m} = 0.$$

Für eine gegebene Schwingungsdauer τ des Körpers gibt diese Gleichung für r_0 die Wurzeln r_1 und r_2 , wobei

$$(b) \quad r_1 + r_2 = \frac{\tau^2}{4\pi^2} g_0$$

sein muß. Sämtliche parallele Achsen eines Körpers, für welche die Schwingungsdauer gleich ist, liegen also auf zwei



Fig. 56.

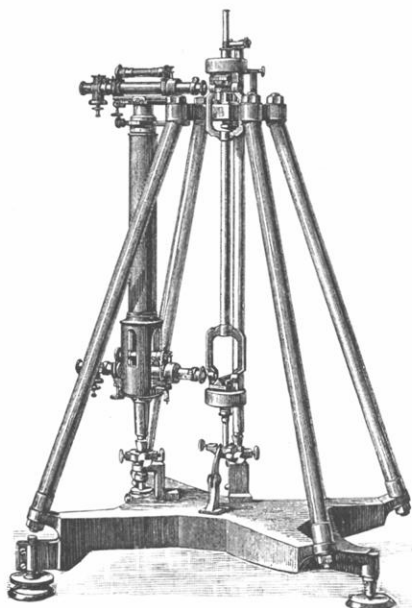


Fig. 57. Reversionspendel nach Bessel.

konaxialen Zylindern, deren Achse durch den Schwerpunkt geht. Die Summe der Radien r_1 und r_2 dieser Zylinder hängt ebenso mit der Schwerebeschleunigung und dieser konstanten Schwingungsdauer zusammen, wie die Länge eines mathematischen Pendels, und heißt deshalb die reduzierte Länge

des physischen Pendels. Man findet dieselbe experimentell, indem man den Abstand zweier paralleler Achsen a_1 und a_2 (Fig. 56) mißt, in deren Ebene der Schwerpunkt s des Pendels liegt, und für welche die Schwingungsdauer gleich ist. Da diese Längenmessung sehr genau vorgenommen werden kann, so ist damit die beste Methode zur Bestimmung der Schwerebeschleunigung gegeben (Reversionspendel von Kater, Fig. 57). Zur Demonstration dieser konaxialen Zylinder dient das Pendelbrett von Mach (Fig. 58).

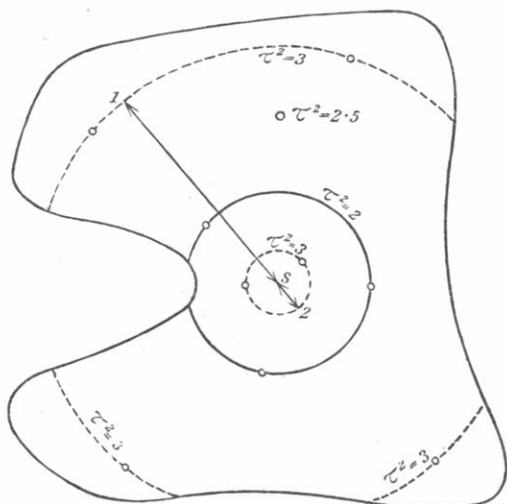


Fig. 58. Pendelbrett nach Mach.

279. Messung von Drehungsmomenten. Die Schwingungsdauer eines um eine beliebige feste Achse drehbaren Körpers, z. B. eines um eine vertikale oder horizontale Achse drehbaren Magnetstabes, dessen Trägheitsmoment bekannt ist, kann umgekehrt zur Bestimmung des Drehungsmomentes der äußeren Beschleunigungen, z. B. magnetischer Drehmomente dienen, falls dieses ebenso wie das Drehmoment der Schwerebeschleunigungen eines Pendels mit Annäherung den Ablenkungswinkel proportional ist.

280. Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Zur vollständigen Bestimmung der Bewegung eines starren Körpers

braucht man zwei vektorische Gleichungen, um die Translationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{v}}_0$ und die Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$ berechnen zu können. Die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit können dann für jede Zeit angegeben werden, wenn sie für irgend eine Zeit gegeben sind.

Diese Bewegungsgleichungen müssen äquivalent sein den Sätzen, daß die inneren Beschleunigungen keine Beschleunigungsgröße und kein Drehmoment haben (274), sie müssen ferner die Beschleunigungsgröße $\mathfrak{B}$ und das Drehmoment $\mathfrak{D}$ der äußeren Beschleunigungen (275), welche durch direkte Gesetze bestimmt also gegeben sind, enthalten. Sie haben also die Form

$$(a) \quad \mathfrak{B} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\varphi} \mu \dot{\mathbf{v}} d\varphi \stackrel{\Delta}{=} m \dot{\mathbf{v}}_0$$

und

$$(b) \quad \mathfrak{D} \stackrel{\Delta}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} d\varphi,$$

worin $\dot{\mathbf{v}}$ die wahren Beschleunigungen, und zwar $\dot{\mathbf{v}}_0$ jene des Massenmittelpunktes sind.

Diese Gleichungen sagen aus, daß die Beschleunigungsgröße $\mathfrak{B}$ der äußeren Beschleunigungen gleich ist der Beschleunigungsgröße der wahren Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$, und daß das Drehmoment $\mathfrak{D}$ der äußeren Beschleunigungen gleich ist dem Drehmoment der wahren Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$.

Der Radius $\mathbf{r}$ kann von jedem beliebigen Punkte aus gezählt werden, er wird aber meist von einem ruhenden Punkte des Körpers aus gezählt werden, wenn ein solcher vorhanden ist. Dann bestimmt die erste Gleichung nur die Zwangsbeschleunigungen, und es verbleibt dann nur die Frage nach der Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$. Wenn wir den in 268. angegebenen Werten des Momentes der wahren Beschleunigungsgrößen in die zweite Bewegungsgleichung einsetzen, so nimmt dieselbe folgende Formen an

$$(c) \quad \mathfrak{D} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{w} \times \Phi^r \cdot \mathbf{w} - \Phi^r \cdot \dot{\mathbf{w}}$$

oder

$$(d) \quad \mathfrak{D} \stackrel{\Delta}{=} -\mathbf{w}^2 \mathfrak{G} - \Phi^r \cdot \dot{\mathbf{w}}.$$

Hierin ist Φ^r die rotorische Trägheitsdyade und

$$(e) \quad \mathfrak{G} \stackrel{\Delta}{=} -\mathbf{i} \times \Phi^r \cdot \mathbf{i}$$

das Schwungmoment in bezug auf die momentane Rotationsachse, welcher der Einheitsvektor $\mathbf{i}$ parallel sein soll.

281. Erstes Beispiel. Konstante Rotation. Wenn die Rotationsbeschleunigung $\dot{\mathbf{w}}$ dauernd gleich Null ist, so ändert die Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ weder ihre Größe noch Richtung, und die Rotationsachse verschiebt sich auch in dem Körper nicht, sondern fällt stets mit derselben materiellen Strecke zusammen.

Damit dies eintrete, muß nach 280. (d)

$$(a) \quad \mathfrak{D} \stackrel{!}{=} -\mathbf{w}^2 \mathfrak{G}$$

sein, d. h. ein äußeres Drehmoment $\mathfrak{D}$ vorhanden sein, welches stets dem Schwungmoment $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{G} \stackrel{!}{=} \int_{\varphi} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{a} d\varphi$$

proportional ist. Hierin ist $\mathbf{a}$ der senkrechte Abstand von der Rotationsachse. Das Schwungmoment ist stets senkrecht gegen die Rotationsachse gerichtet und hat gegen den Körper eine feste Lage, dreht sich also mit diesem. Das gleiche muß für das Drehmoment gelten.

Ist die Rotationsachse Hauptträgheitsachse eines ihrer Punkte, so ist das Schwungmoment nach 280. (e) Null und also kein äußeres Drehmoment erforderlich. Ist dieser Punkt der Schwerpunkt, so ist auch keine äußere Beschleunigungsgröße erforderlich, um ihn in Ruhe zu halten, wenn er anfangs ruht und der Körper rotiert dann ganz frei und konstant.

Ist die Rotationsachse einer Trägheitsachse des Schwerpunktes parallel und haben diese beiden Achsen den Abstand $\mathbf{a}_0$, so ist nach 262. (a)

$$\mathfrak{G} \stackrel{!}{=} m \mathbf{r}_0 \times \mathbf{a}_0,$$

worin $\mathbf{r}_0$ der Abstand des Schwerpunktes von einem beliebig in der Achse gewählten Nullpunkt ist. Das äußere Drehmoment in bezug auf denselben Punkt ist dann

$$\mathfrak{D} \stackrel{!}{=} -m \mathbf{w}^2 \mathbf{r}_0 \times \mathbf{a}_0,$$

und die äußere Beschleunigungsgröße $\mathfrak{B}$ nach 257. und 280. (a)

$$\mathfrak{B} \stackrel{!}{=} m \dot{\mathbf{v}}_0 \stackrel{!}{=} m \mathbf{w} \times \mathbf{v}_0.$$

Rotiert der Körper um eine vertikale Achse, deren Spitzen in Lagern laufen und die Höhen h_1 und h_2 haben, während die Höhe des Schwerpunktes h_0 sei, so müssen diese Spitzen zufolge minimaler Deformationen die Beschleunigungsgrößen b_1 und b_2 haben, welche horizontal gerichtet sind und in der Ebene der Achse und des Schwerpunktes liegen. Die Beschleunigungsgröße b_1 der oberen Spitze ist vom Schwerpunkt abgewendet und hat die Größe

$$b_1 = \frac{m a_0}{h_1 - h_2} [w^2(a_0 + h_2 - h_0) + g_0],$$

die untere Spitze hat die entgegengesetzt gerichtete Beschleunigungsgröße

$$b_2 = \frac{m a_0}{h_2 - h_1} [w^2(a_0 + h_1 - h_0) + g_0].$$

Außerdem haben die Spitzen vertikale Beschleunigungsgrößen, welche zusammen gleich $m g_0$ sind, worin g_0 die Schwerebeschleunigung ist.

282. Zweites Beispiel. Freie Rotation. Wir betrachten nun die Bewegung eines völlig freien starren Körpers, dessen äußeres Drehmoment $\mathfrak{D}$ Null ist, für welchen also nach 280.(d)

$$(a) \quad 0 = w^2 \mathfrak{C} + \Phi^r \cdot \ddot{w}.$$

Sein Schwerpunkt ruhe anfangs, also bei Abwesenheit äußerer Beschleunigungen dauernd.

Diese Bewegungsgleichung sagt nichts anderes, als daß das Moment der Bewegungsgrößen dieser freien Körper in bezug auf einen ruhenden Punkt unveränderlich ist, also

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\varphi \stackrel{!}{=} 0.$$

Sie reicht hin, um die Richtung der Rotationsachse im Raume sowohl als im Körper, und die Größe der Rotationsgeschwindigkeit für jede Zeit zu berechnen, wenn sie für die Anfangszeit gegeben sind, da diese Gleichung nämlich die Winkelbeschleunigung $\ddot{w}$ und damit die ganze Bewegung des Körpers bestimmt.

In derselben kommt eine lineare Vektorfunktion $\Phi^r \cdot \ddot{w}$ vor. Wir bedienen uns hier einfacher der von Euler aufgestellten

analytischen Form des Beschleunigungsmomentes [268. (c)]. Beschränken wir uns auf den Fall, daß die Abweichung der Rotationsachse von der Hauptträgheitsachse z stets klein bleibe. Das Koordinatensystem ist nach den Trägheitsachsen orientiert, liegt also im Körper fest. Es ist

$$w_z \doteq w_0, \quad w_x w_y \doteq 0, \quad C_z = 0,$$

woraus folgt

$$\dot{w}_z = 0.$$

Die Rotationsbeschleunigung steht also auf der Rotationsgeschwindigkeit senkrecht und diese bewahrt ihre Größe w_0 , beschreibt aber im Raume den Präzessionskegel und im Körper den Nutationskegel (256.).

Endlich ist nach 268 (c)

$$w_0 w_y (\Phi_y^s - \Phi_z^s) = (\Phi_y^s + \Phi_z^s) \dot{w}_x,$$

$$w_0 w_x (\Phi_z^s - \Phi_x^s) = (\Phi_z^s + \Phi_x^s) \dot{w}_y,$$

worin die Φ_e^s die planaren Hauptträgheitsmomente sind. Eine Lösung ist

$$w_x = a \sin w_1 t,$$

$$w_y = b \cos w_1 t.$$

Der Nutationskegel ist also ein elliptischer Kegel, dessen Achsen a und b in den Hauptebenen liegen; w_1 ist die Periodenzahl des Umlaufes der Rotationsachse um diesen Rollkegel. Die Achse desselben ist die Trägheitsachse z . Setzt man diese Lösung in die Differentialgleichungen ein, so ergeben sich folgende Bedingungen für die Konstanten a , b und w_1

$$w_0 b (\Phi_y^s - \Phi_z^s) = (\Phi_y^s + \Phi_z^s) w_1 a,$$

$$w_0 a (\Phi_x^s - \Phi_z^s) = (\Phi_x^s + \Phi_z^s) w_1 b.$$

Hieraus erhält man

$$w_1 = w_0 \sqrt{\frac{(\Phi_y^s - \Phi_z^s)(\Phi_x^s - \Phi_z^s)}{(\Phi_y^s + \Phi_z^s)(\Phi_x^s + \Phi_z^s)}},$$

w_1 ist also imaginär, wenn Φ_z^s zwischen den Werten Φ_x^s und Φ_y^s liegt. In der Nähe jener von den drei Trägheitsachsen, für welche das planare Moment den mittleren Wert hat, ist

also ein derartiger elliptischer Umlauf der Rotationsachse nicht möglich. Ferner folgt

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{(\Phi_x^s + \Phi_z^s)(\Phi_y^s - \Phi_z^s)}{(\Phi_x^s - \Phi_z^s)(\Phi_y^s + \Phi_z^s)}}.$$

Das Verhältniß der Achsen des Nutationskegels ist also für jeden Körper vorausbestimmt. Die Größe derselben hängt aber von dem Anfangszustand ab. Je weiter die Rotationsachse anfänglich von der Hauptträgheitsachse abwich, desto größer ist die Öffnung dieses Rollkegels.

Falls $\Phi_x^s = \Phi_y^s = \frac{1}{2} \Phi_z^r$, also das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, so ist

$$a = b,$$

also der Nutationskegel stets ein Kreiskegel, das gleiche gilt dann für den Präzessionskegel und es ist dann

$$w_1 = w_0 \frac{\Phi_z^r - 2 \Phi_z^s}{\Phi_z^r + 2 \Phi_z^s}.$$

Unter allen Umständen findet also der Umlauf der Rotationsachse im Körper langsamer statt als die Rotation w_0 und hat die gleiche oder entgegengesetzte Richtung wie diese, je nachdem $\frac{1}{2} \Phi_z^r \geq \Phi_z^s$, je nachdem also das Trägheitsellipsoid abgeplattet oder verlängert ist.

Nach 256.(d) bestimmt sich die Periodenzahl w des Umlaufes der Rotationsachse auf dem Präzessionskegel, welcher im Raume feststeht, durch

$$w = w_0 + w_1 = w_0 \frac{2 \Phi_z^r}{\Phi_z^r + 2 \Phi_z^s}.$$

Dieser Umlauf hat stets die Richtung der Rotation und dauert kürzer oder länger als diese, je nachdem $\frac{1}{2} \Phi_z^r \geq \Phi_z^s$.

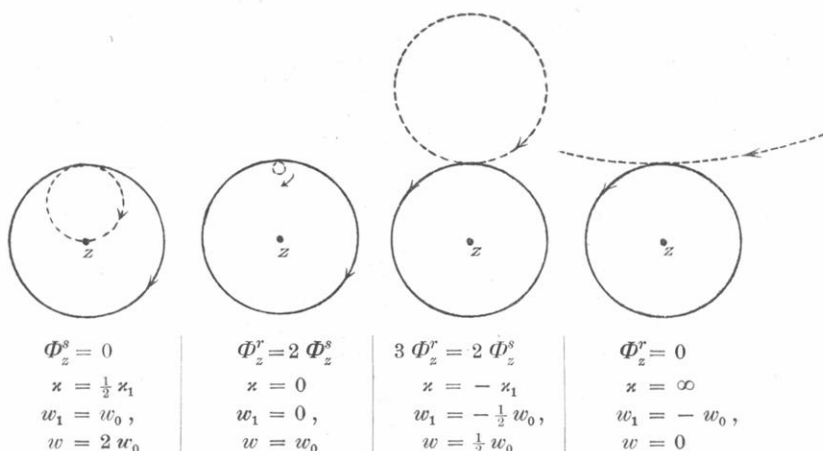
Der Öffnungswinkel κ_1 des Nutationskegels ist von Anfang gegeben. Er bleibt gleich dem Winkel, welchen die Rotationsachse und die Trägheitsachse anfänglich einschlossen. Der Öffnungswinkel κ des Präzessionskegels bestimmt sich durch

$$(a) \quad \kappa = \kappa_1 \frac{w_1}{w} = \kappa_1 \frac{\Phi_z^r - 2 \Phi_z^s}{2 \Phi_z^r}.$$

Da die Trägheitsmomente stets positiv sind, muß

$$\kappa < \frac{1}{2} \kappa_1$$

sein. Je nachdem diese beiden Winkel gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben, müssen sich die beiden Kegel einschließen oder ausschließen. Der Nutationskegel liegt aber nach obiger Ungleichung stets weit außerhalb des Präzessionskegels. Dieser kann aber innerhalb des Nutationskegels liegen. Es tritt dies ein für $\frac{1}{2} \Phi_z^r > \Phi_z^s$.



Leitlinie des Nutationskegels voll ausgezogen,
Leitlinie des Präzessionskegels gestrichelt.

Fig. 59.

Ist $\Phi_z^s = 0$ (z. B. für eine kreisförmige Blechscheibe), so erreicht der Präzessionskegel die größte Öffnung $\kappa = \frac{1}{2} \kappa_1$. Dann läuft nicht nur die Rotationsachse, sondern auch die ihr gegenüberliegende Trägheitsachse auf dem Präzessionskegel um. Es ist dann $w_1 = w_0$ und $w = 2 w_0$. Wenn $2 \Phi_z^s$ nahe gleich Φ_z^r ist (z. B. für eine Kugel), so hat der Präzessionskegel verschwindend kleine Öffnung und wird mit der Periode $w = w_0$ umlaufen. Es ist dann $w_1 = 0$.

Wenn $2 \Phi_z^s > \Phi_z^r$ ist, so schließen sich die beiden Kegel aus. Für $2 \Phi_z^s = 3 \Phi_z^r$ sind sie kongruent ($\kappa = -\kappa_1$). Dann ist $w = \frac{1}{2} w_0$ und $w_1 = -\frac{1}{2} w_0$. Wenn Φ_z^r sehr klein ist (z. B. für

einen stabförmigen Körper), so ist der Präzessionskegel sehr groß. Der Nutationskegel wird dann mit der Periode $w = -w_0$ durchlaufen.

283. *Drittes Beispiel. Rotation um eine Hauptträgheitsachse.*

Wir betrachten nun die Bewegung eines Körpers um einen seiner Punkte, wenn das Schwungmoment für diesen Punkt und für die Rotationsachse dauernd Null ist, also nach (280)

$$(a) \quad \mathfrak{D} \stackrel{a}{=} -\Phi^r \cdot \ddot{\mathbf{w}}.$$

Dies fordert, daß die Rotationsachse stets mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt. Die Präzession eines sehr rasch rotierenden Kreisel ist hierfür ein Beispiel. Ist das äußere Drehmoment klein, so wird auch die Rotationsbeschleunigung klein sein und der Präzessionskegel also sehr langsam durchlaufen werden. Wenn ferner anfänglich die Rotationsachse nahezu mit der Achse des Kreisel, also einer Hauptträgheitsachse zusammenfiel, also der Nutationskegel klein ist, und wenn endlich das Trägheitsellipsoid des Kreisel nicht sehr stark verlängert ist, so wird die Kreiselachse einfach in dem Präzessionskegel umlaufen.

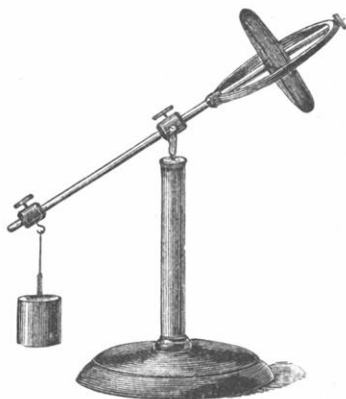


Fig. 60.

Ist dieselbe gegen die Vertikale geneigt und in einem ihrer Punkte gestützt (Fig. 60), so ist das Drehmoment der Schwerebeschleunigung $\mathfrak{g}_0$

$$\mathfrak{D} \stackrel{a}{=} m \mathbf{r}_0 \times \mathfrak{g}_0$$

stets senkrecht gegen die Kreiselachse $\mathbf{r}_0$ gerichtet. Sei Φ_a^r das Trägheitsmoment des Kreisel für eine zu $\mathfrak{D}$ parallele, durch den Stützpunkt gehende Achse, so ist also

$$\ddot{\mathbf{w}} \stackrel{a}{=} \frac{m}{\Phi_a^r} \mathbf{r}_0 \times \mathfrak{g}_0.$$

Nach 255. (a) folgt für die Umlaufszeit T der Kreiselachse in dem Präzessionskegel

$$T = 2 \pi w \frac{\Phi_a^r}{m r_0 g_0}.$$

Es sei z. B. $w = 100 \text{ sec}^{-1}$, d. h. der Kreisel vollendet einen Umlauf in $\frac{2 \pi}{100} \text{ sec}$, ferner $\Phi_a^r = 10^5 \text{ gr cm}^2$, $m = 10^3 \text{ gr}$, $r_0 = 1 \text{ cm}$. Dann vollendet die Kreiselachse den Präzessionsumlauf in $T = 63 \text{ sec}$, welche Neigung gegen die vertikale sie auch habe.

284. Die Nutation. Im allgemeinen Falle, wenn die Rotationsachse des Kreisels anfänglich nicht mit seiner Trägheitsachse zusammenfällt, wird derselbe außer der eben beschriebenen großen Präzession noch den in 282. beschriebenen Umlauf der freien Achse zeigen. Der kleine Präzessionskegel dieses Umlaufes steht aber nicht im Raume fest, sondern seine Achse läuft in dem großen Präzessionskegel um eine vertikale Achse. Die resultierende Bewegung der Rotationsachse im Raume ist also trochoidisch. Der Umlauf auf dem kleinen (zweiten) Präzessionskegel hat nach 282. die Periodenzahl

$$w = w_0 \frac{2 \Phi_z^r}{\Phi_z^r + 2 \Phi_z^s}$$

und stets die Richtung der Rotation. Die Kreiselachse führt dieselbe Bewegung aus, wenn das Trägheitsellipsoid sehr abgeplattet ist, indem sie dann der Rotationsachse stets diametral in diesem Kegel gegenüberliegt. Ist das Trägheitsellipsoid des Stützpunktes nahezu eine Kugel, so zeigt die Rotationsachse die einfache Präzession in dem großen Kegel mit vertikaler Achse, die Kreiselachse bewegt sich längs einer sehr abgeflachten Trochoide.

285. Präzession des Frühlingspunktes. Die Weltachse führt in 26000 Jahren eine solche Kegeldrehung aus, so daß die Knotenlinie des Äquators, d. i. die Richtung gegen den Frühlingspunkt, in dieser Zeit einen Umlauf vollendet. In diese Knotenlinie fällt das Drehmoment der Gravitationsbeschleunigungen der Sonne und mit Annäherung auch das etwa doppelt so große Drehmoment der Gravitationsbeschleunigungen des Mondes.

Diese Drehmomente sind Null, wenn diese Himmelskörper in den Äquinoktialpunkten stehen, und am größten, wenn dieselben in den Solstitialpunkten der Ekliptik stehen, stets aber ungefähr gegen den Herbstpunkt gerichtet. Die Präzession ist deshalb nicht gleichmäßig, was Ursache der ebenfalls als Nutation bezeichneten Kräuselung des Präzessionskegels ist, aber stets von derselben Umlaufsrichtung. Da die Mondknoten rasch umlaufen, wäre sie im Mittel ebenso groß, wenn die Masse des Mondes M_1 gleichmäßig auf einen in der Ekliptik liegenden Kreis vom Radius R_1 der Mondbahn, und die Masse der Sonne M_2 auf die Sonnenbahn vom Radius R_2 verteilt wäre. Dann würde in irdischen Gegenden folgendes Gravitationsfeld vorhanden sein.

$$\mathfrak{g} \doteq \frac{3}{2} K \left(\frac{M_1}{R_1^3} + \frac{M_2}{R_2^3} \right) \mathfrak{a} \doteq n \mathfrak{a}, \quad \text{worin} \quad \frac{1}{n} = 700 \text{ (Tage}^2\text{)}$$

und $\mathfrak{a}$ die Entfernung von der gegen den Pol der Ekliptik gerichteten Achse ist. Das Drehmoment der Gravitation in bezug auf den Erdmittelpunkt ist also

$$\mathfrak{D} \doteq n \int \mu \mathbf{r} \times \mathfrak{a} d\varphi \doteq n \mathfrak{C}.$$

Es ist dasselbe also dem Schwungmoment $\mathfrak{C}$ der Erde in bezug auf die Achse der Ekliptik proportional.

Bezeichnen wir die Richtung der Weltachse mit z , das Trägheitsmoment der Erde in bezug auf den Äquator mit Φ_z^s , und auf die Weltachse mit Φ_z^r , so ist es in bezug auf einen Meridian $\frac{1}{2} \Phi_z^r$. Die gegen den Pol der Ekliptik gerichtete Achse schließt mit der Weltachse den Winkel $\alpha = 23^\circ 28'$ ein. Dann ist nach 267. (f)

$$C_x = \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \Phi_z^r - \Phi_z^s \right).$$

Das Drehmoment habe die x -Richtung (gegen den Herbstpunkt). Dann ist

$$D_x = n \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{2} \Phi_z^r - \Phi_z^s \right).$$

Der Präzessionskegel hat den Öffnungswinkel α . Es ist also nach 283. (a) die Umlaufzeit der Weltachse auf demselben in Tagen

$$4 \pi^2 \sin \alpha \frac{\Phi_x^r}{D_x} = \frac{4 \pi^2}{n \cos \alpha} \frac{\Phi_z^r + 2 \Phi_z^s}{\Phi_z^r - 2 \Phi_z^s},$$

was mit der tatsächlichen Umlaufsdauer recht gut übereinstimmt, wenn man die Trägheitsmomente der Erde unter der Annahme homogener Dichteverteilung unter Berücksichtigung ihrer Abplattung berechnet. Es ist der Halbmesser r des Äquators 6378 km, der Radius z eines Poles 6356 km. Die planaren Trägheitsmomente sind den Quadraten der betreffenden Halbachsen proportional. Es ist also

$$\frac{\Phi_z^r + 2\Phi_z^s}{\Phi_z^r - 2\Phi_z^s} = \frac{r^2 + z^2}{r^2 - z^2} = \frac{r}{r - z} = 294.$$

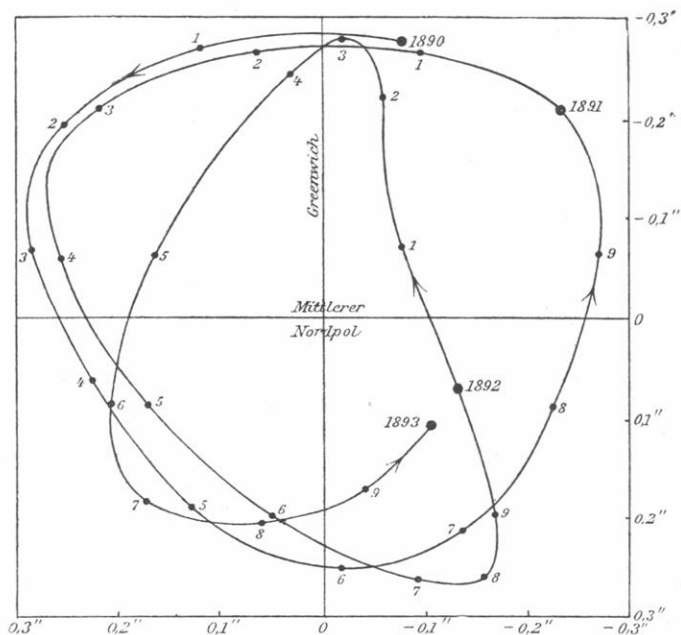


Fig. 61. Geographischer Umlauf des Nordpols. Maßstab 1 : 233.

286. Die Polschwankungen. Außer der Präzession könnte die Erdachse noch den Umlauf der freien Rotationsachsen im Erdkörper zeigen. Da man tatsächlich einen Umlauf der Rotationsachse im Erdkörper beobachtet hat, also periodische Änderungen der geographischen Lage des Nordpols der Erde, so ist es von Interesse, die freie Rotation der Erde zu berechnen. Das Verhältnis der Öffnung des Roll-

kegels zu jener des Präzessionskegels des freien Umlaufs ist nach 282. (a)

$$\frac{\kappa_1}{\kappa} = \frac{2\Phi_z^r}{\Phi_z^r - 2\Phi_z^s} = \frac{2r^2}{r^2 - \kappa^2} \doteq \frac{r}{r - \kappa} = 294,$$

worin 294 die Abplattungszahl der Erde ist.

Es wird der sehr kleine Präzessionskegel in einem Tage von der Weltachse durchlaufen, während diese im Erdkörper in dem 294 mal größeren Rollkegel in 294 Tagen umlaufen muß. In Wirklichkeit dauert der geographische Umlauf der Erdpole einige Tage länger, was durch eine ungleichförmige Verteilung der Erddichte erklärt werden könnte, und ist sehr unregelmäßig, wahrscheinlich zufolge der Luft- und Meeresströmungen.

13. Die Maschinen ohne innere Arbeit.

287. Wir wollen nun die praktisch sehr wichtigen und darum früh untersuchten Maschinenbewegungen beschreiben, welche wir in § 4. bereits vorübergehend erwähnt haben. Es sind dies Bewegungen eines Systems von Körpern unter der Mitwirkung sehr schwer oder sehr leicht deformierbarer Verbindungsmechanismen. Es handelt sich also wieder um einen Spezialfall elastischer Wirkungen, der aber besonders einfachen Charakter hat und ohne Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie recht gut beschrieben werden kann.

288. Betrachten wir zunächst die Bewegung zweier Körper, deren Beschleunigungen $\ddot{u}$ immer solche Richtung und GröÙe haben, daß die Distanz beider Körper konstante GröÙe bewahrt. Derartige Zwangsbewegungen sind möglich, und zwar unter Zuhilfenahme starrer Verbindungen der beiden Körper. Wenn die Körper zufolge anderer* äußerer Umstände die partiellen Beschleunigungen $\mathfrak{g}$ haben, so muß die starre Verbindung noch andere innere, elastische oder Zwangsbeschleunigungen $\mathfrak{g}'$ bestimmen, so daß die wahren Beschleunigungen $\ddot{u}$

$$\ddot{u} \doteq \mathfrak{g} + \mathfrak{g}'$$

der beiden Körper eine solche Beziehung zueinander haben, daß die Distanz derselben konstant bleibt.

Die inneren Beschleunigungen müssen deshalb manchmal sehr große Werte haben, dennoch läßt sich als eine Folge des Gegenbeschleunigungsgesetzes und des Flächensatzes zeigen, daß sie zusammengenommen keine Arbeit der Körper bestimmen. Wir haben diesen Beweis für einen großen starren Körper bereits in 275. geführt. In dem jetzt betrachteten einfachsten Falle einer starren Verbindung ist derselbe noch viel leichter.

Aus dem Flächensatze, welcher nach reichlicher Erfahrung für alle Maschinenbewegungen gilt, folgt, daß die Zwangsbeschleunigungen $\mathbf{g}'_1$ und $\mathbf{g}'_2$ zweier durch ein starres Medium verbundener Körper immer in die Richtung der Verbindungslinie beider Körper fallen. Sind $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ die Abstände der beiden Körper von einem festen Nullpunkt, m_1 m_2 ihre Massen, und κ eine unbekannte Zahl, so lautet das Gegenbeschleunigungsgesetz und das eben erwähnte Gesetz

$$a) \quad \kappa(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \stackrel{a}{=} m_1 \mathbf{g}'_1 \stackrel{a}{=} -m_2 \mathbf{g}'_2.$$

Die Bedingung, daß die Distanz beider Körper ihre Größe bewahrt, wenn sie auch ihre Richtung ändert, lautet

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \stackrel{b}{=} \text{konst.},$$

woraus folgt

$$b) \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 \stackrel{b}{=} 0.$$

Aus dem Gegenbeschleunigungsgesetz Gleichung (a) folgt nun

$$c) \quad m_1 \mathbf{g}'_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{g}'_2 \cdot d\mathbf{r}_2 \stackrel{c}{=} 0,$$

$d\mathbf{r}_1$ und $d\mathbf{r}_2$ sind die vektorischen Werte zweier beliebiger, unter Einhaltung der Distanz möglicher Verschiebungen. Gleichung (c) besagt, daß die Summe der durch die Zwangsbeschleunigungen $\mathbf{g}'_1$ und $\mathbf{g}'_2$ bestimmten Arbeiten beider Körper Null ist.

289. Haben wir dies für zwei starr verbundene Körper nachgewiesen, so gilt es ebenso für jedes Paar der Zwangsbeschleunigungen beliebig vieler starr verbundener Körper. Wenn mehrere große Körper so verbunden sind, daß sie sich deformieren müßten, was unmöglich sein soll, oder sich in ihren Bewegungen aneinander anpassen müssen, so bestimmen ihre kleinen Deformationen an den Berührungsstellen genau jene

Beschleunigungsgrößen dieser Angriffsteile, welche noch fehlen, damit die Körper keine mit ihrer Starrheit unverträglichen Bewegungen ausführen.

Bei einem Kreisel, dessen Achsenspitzen in konischen Lagern von größerem Öffnungswinkel laufen, sind diese Angriffsteile wohl definierte Punkte des Kreisels, meist ist dies aber nicht der Fall, so z. B. bei Führungen, Gelenken, zylindrischen Achsenlagern usw.

Wie sich dann die Zwangsbeschleunigungen über die Angriffsflächen verteilen, ist eine Frage der Elastizitätstheorie. Die Bewegung der starren Körper ist hinreichend durch die Zwangsbedingung charakterisiert und es ist immer möglich, die resultierenden Bestimmungsstücke der Zwangsbeschleunigungen, soweit sie von Bedeutung sind, anzugeben. Hierzu ist der Nachweis erforderlich, daß auch diese Zwangsbeschleunigungen niemals Arbeit leisten, welchen wir sogleich vervollständigen werden. Einfache Beispiele hierzu finden sich schon in 277.

290. Sehr leicht deformierbar nennen wir einen Mechanismus, dessen Deformation keine Beschleunigungen der durch denselben verbundenen Körper und also auch keine Arbeit derselben bedingt. Deshalb lassen sich sehr schwer und sehr leicht deformierbare Mechanismen zu einer Maschine ohne elastische und Reibungsarbeit verbinden.

Diese Mechanismen bedingen bei gewissen Deformationen sehr große, bei anderen Deformationen sehr kleine innere Beschleunigungen der verbundenen Körper. Wenn z. B. zwei starre Stangen durch ein Gelenk verbunden sind, sind sie in bezug auf eine Drehung im Gelenk leicht, in bezug auf jede andere Veränderung schwer deformierbar. Ein Faden ist in jeder Beziehung leicht deformierbar, auch in bezug auf eine Näherung der beiden durch ihn verbundenen Körper, während er in bezug auf eine Verlängerung als schwer deformierbar anzusehen ist. Andere Beispiele sind starre Räder, die leicht in ihren Achsenlagern laufen, Verzahnungen, Ketten, Führungen, Schrauben usw.

291. Diese Maschinenteile sind starre Körper, welche von Luft oder Flüssigkeiten allseitig umgeben sind, ohne sich wirklich zu berühren. Im ersteren Falle leisten die inneren Be-

schleunungen dieser starren Körper nach 275. keine merkliche Arbeit.

Das gleiche gilt nun freilich nicht genau, wenn diese Maschinenteile teilweise an zähe Flüssigkeiten (Schmieröl in den Lagern, Gelenken, Führungen) grenzen. Auch die an ungeschmierten Berührungsflächen vorhandene komprimierte Luft ist eine zähe Flüssigkeit. Nehmen wir aber an, diese Schmierflüssigkeiten wären ideale inkompressible Flüssigkeiten. Solche sind (siehe Kapitel 17) dadurch charakterisiert, daß ihre inneren Beschleunigungen sowie die inneren Beschleunigungen eingetauchter starrer Körper keine Arbeit leisten. Wir können dies freilich erst in Kapitel 17 nachweisen.

292. Hier wollen wir vorgreifend diesen Satz, der jedenfalls ein abgeleiteter ist, als Prinzip aussprechen: Die Summe der Arbeiten der inneren Beschleunigungen $\mathbf{g}'$ ist für alle aus solchen Elementen zusammengesetzten Mechanismen immer Null. Wir beschränken uns ferner von nun an meist auf die Betrachtung kleiner Körper von den Massen m_i , welche durch sonst masselose Mechanismen verbunden sind. Es ist

$$\sum_i m_i \mathbf{g}'_i \cdot d\mathbf{r}_i \doteq 0.$$

Bezeichne $\dot{\mathbf{v}}_i$ die wahre Beschleunigung des Körpers i und $\mathbf{g}_i$ die durch äußere Umstände bestimmte partielle Beschleunigung derselben, so ist

$$\dot{\mathbf{v}}_i \doteq \mathbf{g}_i + \mathbf{g}'_i,$$

und also

$$(a) \quad \sum_i m_i (\dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{g}_i) \cdot d\mathbf{r}_i \doteq 0.$$

Diese Gleichung wird nach d'Alembert benannt.

293. Die *Fundierung der Maschinen* wird durch einen Körper von sehr großer Masse, z. B. einen Betonblock oder ein Mauerwerk gebildet. Dieser zeigt nach dem Gegenbeschleunigungsprinzip immer sehr kleine Beschleunigung, erreicht nie merkliche Geschwindigkeit, und erfährt also keine merkliche Verschiebung. Der Fortlauf seiner Beschleunigung ist deshalb von zweiter Ordnung klein, seine Arbeit also trotz seiner großen Masse zu vernachlässigen.

294. Da keine Möglichkeit vorhanden ist, daß die Bewegung sehr kleiner Massen, die mit dem System verbunden sind, ungemein rasch würde, so verschwindet auch deren Arbeit. Man kann also nicht nur sehr große, sondern auch sehr kleine an der Zwangsbewegung beteiligte Massen außer acht lassen.

295. *Die Energiegleichung für Maschinenbewegungen.* Da die Summe der Arbeiten der Zwangsbeschleunigungen Null ist, verwendet man die Arbeitsgleichung 222.(a) mit Vorteil für die Beschreibung der Bewegung von Körpern, die durch Maschinenelemente miteinander verbunden sind, doch muß man die Summe aller Arbeitsgleichungen für die an der Bewegung beteiligten Massen m_i bilden. Dies gibt

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} \sum_i d\left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2\right),$$

diese Gleichung ist eine Identität und folgt direkt aus der Definition der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i \stackrel{s}{=} \dot{\mathbf{r}}_i$. Unter Zuziehung der d'Alembertschen Gleichung ergibt sich aber

$$(a) \quad \sum_i m_i \mathbf{g}_i \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} \sum_i d\left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2\right),$$

worin die $\mathbf{g}_i$ die äußeren Beschleunigungen der Körper (ohne Rücksicht auf die Zwangsbeschleunigungen $\mathbf{g}'$) sind. Diese Energiegleichung gibt ein Bestimmungsstück der Bewegung der verbundenen Körper. Da man in derselben außerdem alle sehr großen oder sehr kleinen Massen m_i vernachlässigen kann, ist sie so viel einfacher als der in elastischer Hinsicht so sehr komplizierte Prozeß, den sie teilweise beschreibt, daß sie für die Rechnung von höchstem Werte ist.

296. *Beispiel.* Ein einzelner Körper sei gezwungen, sich auf vorgeschriebener Bahn (z. B. längs einer starren Linie) zu bewegen. Die Zwangsbeschleunigungen, welche von minimalen Verzerrungen der starren Linie oder des Mechanismus, welcher die Bahn bestimmt, herrühren, bedingen keine Arbeit des Körpers. Sie sind daher Null oder stehen auf der Bahn senkrecht. Die Summe derselben und der zur Bahn senkrechten äußeren Beschleunigungskomponenten gibt die Zentralbeschleunigung der Bewegung. Diese Zwangsbeschleunigungen braucht man aber

nicht zu kennen, um die Bewegung in der Bahn von bekannter vorgeschriebener Form zu berechnen.

Hierzu genügt die Arbeitsgleichung

$$\frac{1}{2} d v^2 = g \cdot d r,$$

worin r der Ortsvektor des Körpers und g die äußere Beschleunigung bedeutet. Die Arbeitsgleichung bezieht sich hier nur auf einen Körper. Der gegenwirkende Körper ist die große Masse, auf welcher die starre Bahn fundiert sein muß. Diese Masse braucht nach 293. nicht berücksichtigt zu werden.

Es fällt also auch die Masse des bewegten Körpers aus der Arbeitsgleichung heraus. Deshalb konnten wir schon in der ersten Vorlesung Fallbewegungen auf vorgeschriebener Bahn hinreichend beschreiben, um die praktisch unentbehrliche Pendelbewegung zu verstehen.

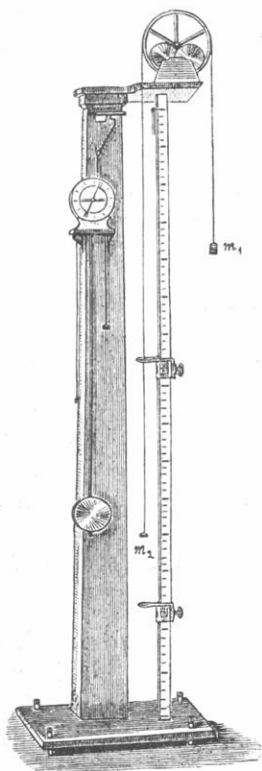


Fig. 62.

297. Zweites Beispiel. Die Atwoodsche Fallmaschine. Zwei Körper von den Massen m_1 und m_2 sind durch einen nicht ausdehnbaren, sehr leicht biegsamen Faden verbunden, der über eine starre Rolle von sehr kleiner Masse läuft, die sich leicht in ihren Lagern dreht, die auf einem Fundament von sehr großer Masse befestigt sind (Fig. 62).

Die großen elastischen Beschleunigungen der Körper, welche durch die Spannung des Fadens bestimmt sind, haben keine Arbeit. Zufolgedessen haben wir in der Arbeitsgleichung nur die Schwerebeschleunigung g_0 zu berücksichtigen und erhalten

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) d v_2^2 = g_0 (m_2 - m_1) d h_2.$$

Das negative Zeichen auf der rechten Seite kommt daher, daß die Masse m_1 den Weg $-dh_2$ zurücklegen muß, wenn die Masse m_2 den Weg $+dh_2$ macht.

Aus der zeitfreien Definitionsgleichung 78. (a)

$$\frac{1}{2} d v_2^2 = g_2 d h_2$$

folgt nun

$$g_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g_0,$$

womit die konstante Beschleunigung g_2 der Bewegung, welche nur einen Bruchteil der Schwerebeschleunigung bildet, erkannt ist.

298. Ruhebedingung. Mehrere Körper mit den Massen m_i , welche durch einen Mechanismus verbunden sind, sollen die äußeren Beschleunigungen $\mathbf{g}_i$ erfahren. Es gilt die Arbeitsgleichung

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i d \mathbf{v}_i^2 \stackrel{!}{=} \sum_i m_i \mathbf{g}_i \cdot d \mathbf{r}_i.$$

Hierin bedeutet $d \mathbf{r}_i$ den vektorischen Wert einer vom Mechanismus zugelassenen Verschiebung des Körpers i .

Waren die Körper anfangs in Ruhe, so kann ihre Bewegungsenergie nur größer werden, oder gleich Null bleiben. Die links stehende Summe ist also notwendig ≥ 0 . Ist also die rechts stehende Arbeitssumme größer als Null, so kann eine Bewegung eintreten. Ist aber

$$(a) \quad \sum_i m_i \mathbf{g}_i \cdot d \mathbf{r}_i \stackrel{!}{\leq} 0,$$

so bleibt die Ruhe der Körper erhalten.

Es kann sein, daß diese Ruhebedingung nur für gewisse Verschiebungen erfüllt ist, während sie für andere gleichfalls mögliche Verschiebungen nicht erfüllt ist. Diese letzteren können dann wirklich eintreten.

Die Ruhebedingung muß nur für alle unendlich kleinen Verschiebungen erfüllt sein. Ist dieselbe für endliche Verschiebungen erfüllt, so nennt man den Ruhefall indifferent.

Haben die Körper außer den nicht zu berücksichtigenden Zwangsbeschleunigungen nur noch die Schwerebeschleunigung, so fällt diese aus der Ruhebedingung heraus und dieselbe enthält dann eine Beziehung der Massen und der simultanen Hebungen $d h_i$

$$\sum_i m_i d h_i \leq 0.$$

Ein System von Massen bleibt also an einem beliebigen Mechanismus im Gleichgewicht, wenn bei einer möglichen Verschiebung der Massenmittelpunkt nicht sinken kann.

299. Fünfte Methode der Massenbestimmung. Die Beobachtung der Bewegung von Massen, die durch eine Maschine ohne innere Arbeit verbunden sind, ergibt, wenn die äußeren Beschleunigungen bekannt sind, nach der Arbeitsgleichung eine Beziehung zwischen den Massen.

Beobachtet man z. B. die Beschleunigung g_2 der Atwood'schen Maschine, so erhält man das Verhältnis der beiden Massen.

300. Nullmethode. Die bequemste und feinste Methode der Massenbestimmung beruht auf der Abgleichung der zu messenden Masse m_1 mit der aus einem Gewichtssatz zusammengestellten Masse m_2 an einem Mechanismus ohne innere Arbeit, wenn die äußeren Beschleunigungen ausschließlich die Schwerebeschleunigungen sind. Die Ruhebedingung lautet

$$m_1 dh_1 + m_2 dh_2 \equiv 0.$$

Läßt jedoch der Mechanismus auch die umgekehrten Verschiebungen zu, so muß die Ruhebedingung eine Gleichung sein und zwar

$$\frac{m_1}{m_2} = - \frac{dh_2}{dh_1}.$$

Der Mechanismus muß ferner so gebaut sein, daß die Massen seiner Teile für sich allein die Ruhegleichung erfüllen.

Zu einer Wage wird der Mechanismus durch die Wagschalen, das sind Körper, deren Bewegung eine Parallelverschiebung ist. Man kann dann die zu wägenden Massen mit beliebigen Punkten der Wagschalen verbinden, oder wenn dieselben horizontale Platten sind, sie auf beliebige Stellen dieser Platten legen.

Wir konstatieren an dem komplizierten Mechanismus (Fig. 63) zunächst, daß alle Teile starr, alle Gelenke leicht beweglich sind, und daß die Lager auf einer großen Masse hinlänglich fest montiert sind. Daß seine Teile für sich die Ruhebedingung erfüllen und doch aus der Ruhelage Verschiebungen nach zwei entgegengesetzten Richtungen möglich sind.

Endlich, daß die Platten 1 und 2 nur Parallelverschiebungen ausführen können, also Wagschalen sind. Wir messen diese Verschiebungen aus und finden, daß sich die große Platte um 0,3 cm hebt, während die kleine Platte um 3 cm sinkt.

Dieser Mechanismus kann also als Dezimalwage verwendet werden, doch ist noch zu wünschen, daß der Ruhefall kein indifferent ist, weil sonst die Ausschläge der Wage zu groß werden. Es wird deshalb noch eine kleine Masse μ (Fig. 63) so an der Wage angebracht, daß der Massenmittelpunkt ihrer Teile, der in der Ruhestellung die tiefste Lage

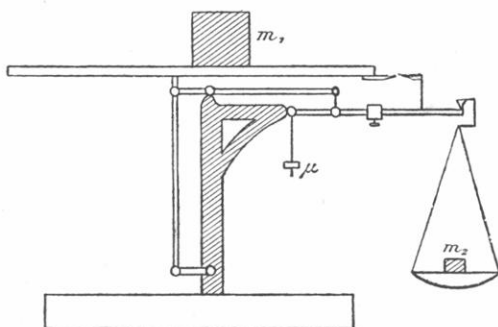


Fig. 63.

hat, bei dem Ausschlag der Wage nach jeder Richtung sich hebt und nicht in horizontaler Richtung sich bewegt oder ruht. Hierdurch kann man die Empfindlichkeit der Wage beliebig verkleinern.

301. Die *gleicharmige Wage* ist symmetrisch gebaut, so daß nur gleiche Massen auf beiden Wagschalen die Ruhebedingung erfüllen. Man kann so die Masse eines Körpers bequem mit den Massen eines Gewichtssatzes vergleichen. Die wichtigsten Formen sind die Robervalsche Tafelwage, bei welcher die Parallelverschiebung der Wagschalen durch eine Parallelogrammführung erzielt ist, und die Krämerwage, bei welcher die Wagschalen pendelartig hängen und deshalb immer horizontal bleiben. Letztere Wage hat sich von jeher am besten bewährt und das gleiche Prinzip liegt auch den

Präzisionswagen (Fig. 64) zugrunde, welche zu den feinsten Meßinstrumenten gehören, und Massenbestimmungen bis auf den Bruchteil 10^{-7} gestatten.

302. *Einfache Bewegung eines Systems von Massen*, welche arbeitslose Zwangsbeschleunigungen erfahren. Wir haben bisher nur die Summe der Arbeiten betrachtet. Diese Summen-

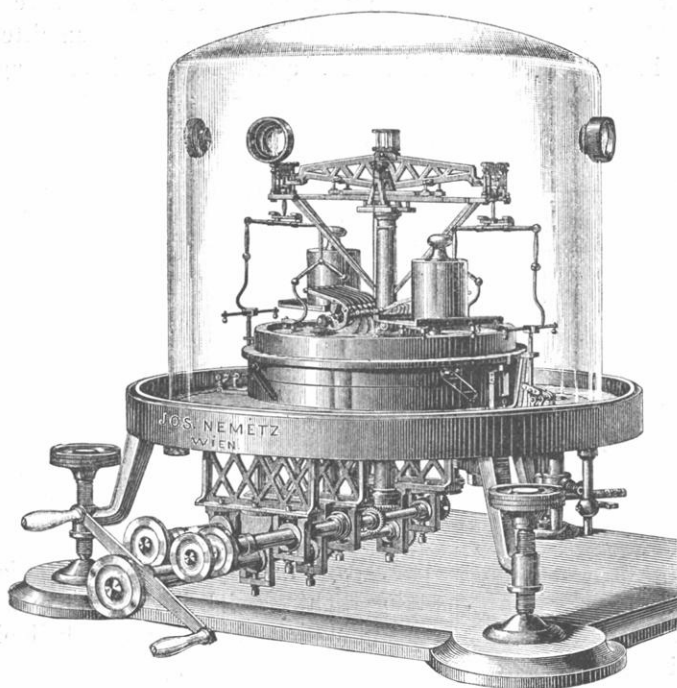


Fig. 64. Vakuumwage.

gleichung gibt aber nur ein, allerdings sehr wichtiges, Bestimmungsstück der Bewegung. Wir wollen nun zunächst die Bewegung eines Systems von Massen beschreiben, welche partielle Zwangsbeschleunigungen erfahren, welche in die Richtung der Verbindungslinien je zweier Körper fallen. Kehren wir zu der Anfangsgleichung 288. (a) zurück

$$x_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \stackrel{?}{=} m_i \mathbf{g}'_{ij} \stackrel{?}{=} -m_j \mathbf{g}'_{ji}.$$

Hierin sind $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_j$ die Ortsvektoren zweier Körper i und j des Systems, $\mathbf{g}'_{ij}$ und $\mathbf{g}'_{ji}$ ihre Zwangsbeschleunigungen. κ_{ij} ist eine unbekannte Zahl.

Die äußere Beschleunigung des Körpers i soll durch $\mathbf{g}_i$, seine wahre Beschleunigung durch $\dot{\mathbf{v}}_i$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\dot{\mathbf{v}}_i \stackrel{a}{=} \mathbf{g}_i + \sum_{\kappa} \mathbf{g}'_{i\kappa}$$

und

$$(a) \quad m_i \dot{\mathbf{v}}_i \stackrel{a}{=} m_i \mathbf{g}_i + \sum_{\kappa} \kappa_{i\kappa} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\kappa}).$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen dieser Körper, in welchen aber noch die Zahlen $\kappa_{i\kappa}$ bestimmt werden müssen. Fügen wir noch die Bedingung hinzu, daß die Arbeit der Zwangsbeschleunigungen Null sein soll, oder was dasselbe ist, daß entweder die Distanz je zweier Körper konstant sein oder ihre gegenseitigen Beschleunigungen Null sein sollen, so folgt

$$(b) \quad \kappa_{ij} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{r}_i - \kappa_{ij} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{r}_j \stackrel{a}{=} 0.$$

Es folgt durch Differentiation

$$(c) \quad (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{v}}_j) \stackrel{a}{=} 0.$$

Die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$ der Körper müssen gegeben sein. Setzt man die Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$ aus den Bewegungsgleichungen (a) ein, so erhält man eine hinreichende Zahl linearer Gleichungen zur Bestimmung der $\kappa_{i\kappa}$. Eine beliebige Anzahl dieser Größen kann willkürlich gleich Null gesetzt werden, d. h. das entsprechende Paar der Beschleunigungen ist Null oder die beiden Körper sind miteinander nicht direkt verbunden.

303. Die Lagrangeschen Gleichungen. Nach demselben Schema verfährt man, wenn statt der einfachen Bedingungen 302.(b) irgendwelche allgemeine Bedingungen

$$(a) \quad \begin{cases} f_r(\mathbf{r}_i, t) \stackrel{a}{=} 0 \\ \mathfrak{f}_{\mu}(\mathbf{r}_i, t) \stackrel{a}{=} 0 \\ \Phi_{\lambda}(\mathbf{r}_i, t) \stackrel{a}{=} 0 \end{cases}$$

den Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ der n Körper des Systems auferlegt sind, welche auch die Zeit t enthalten können. Durch jede skalare Bedingungsgleichung verlieren die Ortsvektoren eine, durch jede vektorische Bedingungsgleichung drei, durch jede dyadische

Bedingungsgleichung neun Freiheiten ihrer $3n$ Bestimmungsstücke, und nicht jede Veränderung der $\mathbf{r}_i$ ist also möglich.

Als virtuelle Verschiebungen $d\mathbf{r}_i$ bezeichnet man solche mögliche Verschiebungen, welche in hinreichend kurzer Zeit ausgeführt werden, daß sich während derselben die Bewegungsbedingungen, auch wenn sie die Zeit enthalten, nicht merklich ändern. Damit solche Verschiebungen wirklich eintreten, wären ungemein große äußere Beschleunigungen erforderlich. Die Zwangsbeschleunigungen $\mathbf{g}_i'$ würden hierbei keine Arbeit leisten, daraus kann man den Wert derselben berechnen.

Durch Differentiation der Bedingungsgleichungen (a), wobei alle Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$, aber nicht die Zeit als variabel angenommen wird, müssen diese, damit sie durch arbeitslose Zwangsbeschleunigungen erfüllt werden können, die Form annehmen

$$\sum_i q_{i\nu} \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\sum_i \mathbf{p}_{i\mu} \times d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\sum_i \mathbf{v}_{i\lambda} \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Hierin sind die Vektoren $\mathbf{q} \mathbf{p} \mathbf{q}$ als Funktion der Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ und der Zeit gegeben.

Diese Gleichungen verwandeln wir durch innere Multiplikation mit den beliebigen Zahlen n , Vektoren $\mathbf{m}$ und kompletten Dyaden $\mathcal{A}$ in skalare Gleichungen von der Form der Arbeitsgleichung

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i n_\nu q_{i\nu} \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0, \\ \sum_i \mathbf{m}_\mu \cdot \mathbf{p}_{i\mu} \times d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} \sum_i \mathbf{m}_\mu \times \mathbf{p}_{i\mu} \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0, \\ \sum_i \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{v}_{i\lambda} \cdot d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{b}_\lambda + \dots \stackrel{!}{=} \sum_i \mathbf{v}_{i\lambda} \cdot \mathcal{A}_\lambda \cdot d\mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 0. \end{array} \right.$$

Die willkürlichen Werte $n \mathbf{m} \mathcal{A}$ können nun immer so gewählt werden, daß die Zwangsbeschleunigungen $\mathbf{g}_i'$ der Körper i den Wert haben

$$m_i \mathbf{g}_i' \stackrel{!}{=} \sum_\nu n_\nu q_{i\nu} + \sum_\mu \mathbf{m}_\mu \times \mathbf{p}_{i\mu} + \sum_\lambda \mathbf{v}_{i\lambda} \cdot \mathcal{A}_\lambda.$$

Diese Beschleunigungen werden nach (b) zusammengekommen bei virtuellen Verschiebungen keine Arbeit leisten. Die

Lagrangeschen Bewegungsgleichungen haben nun die Form

$$(c) \quad m_i (\dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{g}_i) \stackrel{=}{=} \sum_{\nu} n_{\nu} \mathbf{q}_{i\nu} + \sum_{\mu} \mathbf{m}_{\mu} \times \mathbf{p}_{i\mu} + \sum_{\lambda} \mathbf{v}_{i\lambda} \cdot \mathbf{A}_{\lambda},$$

worin $\mathbf{g}_i$ die gegebenen äußeren Beschleunigungen sind. Zusammen mit den Bedingungsgleichungen reichen sie gerade hin, die Werte n $\mathbf{m}$ $\mathbf{A}$ und die gesuchten wahren Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}$ zu bestimmen, womit das Problem gelöst ist.

304. Beispiel. Zwei Körper 1 und 2 erfüllen die Bewegungsbedingungen

$$a \mathbf{r}_1 \stackrel{=}{=} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_2; \quad \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_0 \stackrel{=}{=} 0; \quad \mathbf{r}_1^2 \stackrel{=}{=} b.$$

Hierin sind die Zahlen a und b sowie der Vektor $\mathbf{r}_0$ gegebene Funktionen der Zeit. Abgesehen von der Veränderlichkeit dieser Werte, welche für die Arbeit bei einer in unendlich kurzer Zeit ausgeführten Verschiebung nicht in Betracht kommt, bilden die drei Vektoren $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_0$ ein starres rectanguläres System. Dasselbe ist fünf Bedingungen unterworfen, die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ haben also nur eine Bewegungsfreiheit, sie können sich um $\mathbf{r}_0$ drehen.

Es folgt wie in 303.(b)

$$a \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}_2 \stackrel{=}{=} 0; \quad \kappa \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_2 \stackrel{=}{=} 0; \quad \kappa_1 \mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 \stackrel{=}{=} 0,$$

worin $\mathbf{f}$ ein unbekannter Vektor, κ und κ_1 zwei unbekannte Zahlen sind. Die Lagrangeschen Gleichungen haben die Form

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 \stackrel{=}{=} m_1 \mathbf{g}_1 + a \mathbf{f} + \kappa_1 \mathbf{r}_1,$$

$$m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 \stackrel{=}{=} m_2 \mathbf{g}_2 + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{f} + \kappa \mathbf{r}_0,$$

$\mathbf{g}_1$ und $\mathbf{g}_2$ sind die gegebenen äußeren Beschleunigungen der Körper. Um die Unbekannten κ κ_1 und $\mathbf{f}$ zu bestimmen, wird man die Bedingungsgleichungen zweimal nach der Zeit differenzieren, wobei die eventuelle Veränderlichkeit von a , b und $\mathbf{r}_0$ zur Geltung kommt und $\dot{\mathbf{v}}_1$ und $\dot{\mathbf{v}}_2$ aus den Lagrangeschen Gleichungen einsetzen, während die bei dieser Differentiation auftretenden Werte $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ der Geschwindigkeiten bekannt sein müssen. Hierdurch ergeben sich dann die Zwangsbeschleunigungen als abhängig von den Geschwindigkeiten. Wir wollen einfachere Fälle, wo dies nicht der Fall ist, durchrechnen.

305. Zweites Beispiel. Es seien

$$S_1 \doteq \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \quad \text{und} \quad S_2 \doteq \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + c t^2$$

zwei von dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ und der Zeit t abhängende skalare Verteilungen, welche durch ihre konstanten Gradienten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ charakterisiert sind. Ein Körper sei genötigt in der Schnittlinie der Niveauebenen $S_1 = S_2 = \text{konst.}$ zu bleiben. Es folgt

$$0 \doteq \kappa_1 \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad 0 \doteq \kappa_2 \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r}$$

und die Lagrangesche Gleichung hat die Form

$$m \dot{\mathbf{v}} \doteq m \mathbf{g} + \kappa_1 \mathbf{a} + \kappa_2 \mathbf{b}.$$

Durch Differentiation der Bedingungsgleichungen nach der Zeit erhält man

$$0 \doteq \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad \text{und} \quad 0 \doteq \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{v}} + 2c,$$

also zur Bestimmung der Unbekannten κ_1 und κ_2 die Gleichungen

$$m \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} + \kappa_1 \mathbf{a}^2 + \kappa_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \doteq 0,$$

$$m \mathbf{g} \cdot \mathbf{b} + \kappa_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \kappa_2 \mathbf{b}^2 \doteq -2mc.$$

Ist $\mathbf{g}$ konstant, so sind κ_1 und κ_2 konstant und also auch $\dot{\mathbf{v}}$ konstant und leicht berechenbar.

306. Drittes Beispiel. Vier Körper, deren Höhe h_i ist, sollen sich nur in vertikaler Richtung bewegen können und die Schwerebeschleunigung g_0 haben.

Die Bedingungsgleichungen seien

$$1. \quad h_4 + h_3 = C,$$

$$2. \quad h_2 - 2h_4 + h_1 = c.$$

Dieselben können durch zwei hintereinander geschaltete Atwoodsche Fallmaschinen, deren Fadenlängen durch C bzw. c bestimmt sind, erfüllt werden.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$3. \quad m_1 \ddot{h}_1 = m_1 g_0 + \kappa_2,$$

$$4. \quad m_2 \ddot{h}_2 = m_2 g_0 + \kappa_2,$$

$$5. \quad m_3 \ddot{h}_3 = m_3 g_0 + \kappa_1,$$

$$6. \quad m_4 \ddot{h}_4 = m_4 g_0 + \kappa_1 - 2\kappa_2.$$

Die Masse m_4 der beweglichen Rolle sei Null. Es ist also die durch den Faden C bestimmte Beschleunigungs-

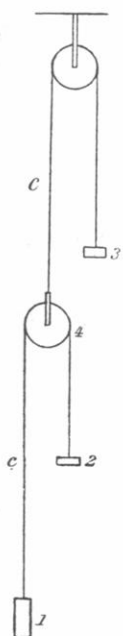


Fig. 65.

größe stets doppelt so groß als die durch den Faden c bestimmte

$$\kappa_1 = 2 \kappa_2.$$

Man differenziert Gleichung (1) und (2) zweimal nach der Zeit, es folgt

$$\ddot{h}_1 + \ddot{h}_2 = -2 \ddot{h}_3$$

und, indem man die Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen einsetzt, erhält man die durch den Faden c bestimmte Beschleunigungsgröße

$$\kappa_2 = -4g_0 \cdot \frac{m_1 m_2 m_3}{4m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}.$$

Der Körper m_3 ist unbeschleunigt oder nach unten beschleunigt, je nachdem in

$$m_3 g_0 + 2 \kappa_2 \gtrless 0$$

das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen gilt, je nachdem also

$$m_3 \gtrless \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Den auf den ersten Blick paradoxen Fall, daß der Körper m_3 nach unten beschleunigt ist, obwohl auf der anderen Seite der Fallmaschine eine größere Masse angebracht ist

$$(m_1 + m_2) > m_3,$$

kann man, da die Ungleichung

$$(m_1 + m_2)^2 > 4m_1 m_2$$

für jeden Wert von m_1 und m_2 gilt, immer erreichen, wenn m_3 zwischen den Grenzen eingeschlossen ist

$$(m_1 + m_2) > m_3 > \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Die Geschwindigkeiten der drei Körper sind hierauf ohne Einfluß.