universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Compendium der höheren Analysis

in zwei Bänden

Schlömilch, Oskar

Braunschweig, 1868

Differentialrechnung

urn:nbn:at:at-ubi:2-5985

DIFFERENTIALRECHNUNG.

Cap. I.

Einfache Differentiation.

§. 1

Differenzen und Differentiale.

Zufolge unserer einleitenden Betrachtungen ist es der Quotient

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

dessen Grenzwerth eine wichtige Rolle bei den Fragen nach den Aenderungen einer Function spielt, und der zugleich eine geometrische Bedeutung gewinnt, wenn die Gleichung $y = f(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve betrachtet wird. Das häufige Vorkommen jenes Grenzwerthes macht nun zunächst eine kurze Bezeichnung desselben nöthig, und man ist daher übereingekommen, ihn mit $f'(x)$ zu bezeichnen, so dass also die Gleichung

$$1) \qquad f'(x) = Lim \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

die Definition von $f'(x)$ enthält. So ist z. B. nach Abschn. V der Einleitung

wenn $f(x) = ax + b$, $\quad f'(x) = a$,

„ $f(x) = x^2$, $\quad f'(x) = 2x$,

„ $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

überhaupt nennt man $f'(x)$ die abgeleitete oder derivirte Function im Gegensatze zu der ursprünglichen Function $f(x)$.

Eine andere Symbolik ist aus der Bemerkung entsprungen, dass die Grösse δ, welche einen Zuwachs des x bedeutet, auch als Unter-

schied zweier verschiedenen Werthe des x betrachtet werden kann, nämlich als die Differenz zwischen dem neuen Werthe $x + \delta$ und dem früheren Werthe x. Bezeichnet man überhaupt die Differenz zweier gleichartigen Grössen durch Δ, so ist die Differenz zweier verschiedenen Werthe des x mit Δ_x zu bezeichnen, wobei Δ den numerischen Betrag der Differenz darstellt und die angehangene Marke x anzeigt, dass es verschiedene x sind, welche um Δ differiren. Consequenter Weise bezeichnet hiernach Δ_y die Differenz zweier verschiedenen y, von denen das eine dem x, das andere dem $x + \Delta_x$ entspricht; vermöge der Gleichung $y = f(x)$ ist dieses $\Delta_y = f(x + \Delta_x) - f(x)$ mithin

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}.$$

Der grösseren Bequemlichkeit wegen pflegt man Δx und Δy statt Δ_x und Δ_y zu schreiben, wobei man sich nur zu hüten hat, Δx und Δy für Producte anzusehen. Die Grössen Δx und Δy heissen die Differenzen von x und y; der auf der linken Seite der Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

vorkommende Quotient wird folglich der Differenzenquotient genannt.

Wenn nun $\delta = \Delta x$ gegen die Null convergirt, so nähert sich auch Δy der Grenze Null, und daher wird

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x);$$

um jedoch die beständige Wiederholung der Sylbe *Lim.* zu ersparen, schreibt man $\frac{dy}{dx}$ statt $Lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, also

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Hier bedeuten dx und dy Differenzen, an welchen die Bedingung unendlicher Abnahme haftet; derartige Differenzen heissen Differentiale. Jedes Differential ist demnach nichts weiter, als eine gegen die Null convergirende Differenz.

Die Gleichung 2) sagt, dass der Differentialquotient und die derivirte Function einander gleich sind, dass also die Verschiedenheit allein in der Schreibweise liegt. Durch die Benutzung des Zeichens $\frac{dy}{dx}$ werden die auszuführenden Rechnungsoperationen nur

angedeutet, während $f'(x)$ das fertige Resultat angiebt, z. B.

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x;$$

der Sinn der Gleichung 2) ist demnach ein ganz ähnlicher, wie z. E. bei $3^2 = 9$, $\sqrt{25} = 5$ und dergl.

Dem Vorigen zufolge sind der Differenzenquotient und sein Grenzwerth, der Differentialquotient, so lange von einander verschieden als Δx und Δy endliche Werthe haben, jedoch beträgt dieser Unterschied um so weniger, je kleiner Δx und Δy genommen werden. Setzt man daher

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = \varrho,$$

so ist ϱ eine Grösse, deren Grenze die Null wird, sobald Δx und Δy gegen die Null convergiren. Aus Nr. 3) folgt weiter

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \varrho\right) \Delta x$$

oder wegen Nr. 2)

$$\Delta y = f'(x)\, \Delta x + \varrho\, \Delta x;$$

lassen wir Δx und Δy wieder gegen die Null convergiren, d. h. zu Differentialen werden, so verschwindet ϱ und es bleibt

4) $$dy = f'(x)\, dx$$

d. h. je kleiner die Aenderung dx ist, um so genauer wird die Aenderung dy gleich dem Producte $f'(x)\, dx$. Die geometrische Interpretation dieses Satzes lautet (Fig. 4): Je näher der Punkt P_1 dem Punkte P liegt, um so eher darf man ihn als einen Punkt der Tangente PT ansehen. Aus der Differentialgleichung 4), verglichen mit Nr. 2), geht noch hervor, dass man mit den veränderlichen, gegen die Null convergirenden Grössen dx und dy ebenso multiplicirt und dividirt, als wären sie bestimmte Zahlen; hierin besteht ein nicht geringer Vortheil der obigen Bezeichnung.

Nach diesen Erörterungen kommt es nun darauf an, die verschiedenen einfachen und zusammengesetzteren Functionen wirklich zu differenziren, d. h. ihre Differentialquotienten aufzusuchen. Bevor wir dazu schreiten, wollen wir noch einen Blick auf die geometrische Bedeutung der derivirten Function werfen; namentlich mögen die Fälle untersucht werden, wo die ursprüngliche Function eine ebene Fläche oder ein Volumen bedeutet.

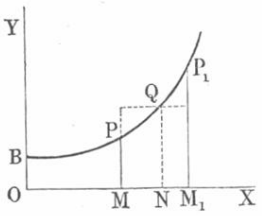
In Fig. 5 (a. f. S.) sei $OM = x$, $MP = f(x)$, und die über

der Abscisse stehende Fläche $BOMP = F(x)$; ändert sich die Abscisse um $MM_1 = \Delta x$, so ist

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \text{Fläche } MM_1P_1P.$$

Diese Fläche kommt einem Rechtecke gleich, welches Δx zur Grundlinie und eine zwischen MP und M_1P_1 liegende, wenn auch sonst nicht näher bekannte Ordinate NQ zur Höhe hat; demnach ist $MM_1P_1P = NQ.\Delta x$ und

Fig. 5.



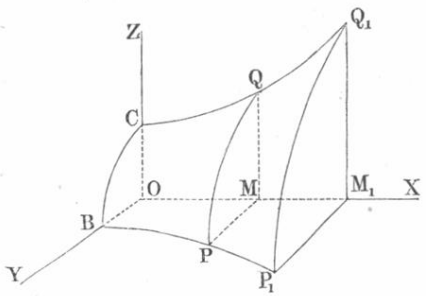
$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = NQ.$$

Bei verschwindenden Δx fallen die drei Ordinaten M_1P_1, NQ und MP in die einzige $MP = f(x)$ zusammen und es bleibt

$$F'(x) = f(x).$$

Die derivirte Function bedeutet also im vorliegenden Falle die letzte Ordinate.

Fig. 6.



In Fig. 6 sei wieder $OM = x$, die Querschnittsfläche $MPQ = \varphi(x)$ und das Volumen, welches zwischen den Querschnitten OBC und MPQ enthalten ist, $= \psi(x)$; der Aenderung $MM_1 = \Delta x$ entspricht dann die Volumenzunahme

$$\psi(x + \Delta x) - \psi(x) = \text{Vol. } MPQQ_1P_1M_1.$$

Das letztere Volumen lässt sich einem Cylinder vergleichen, welcher Δx zur Höhe (oder Dicke) und einen zwischen MPQ und $M_1P_1Q_1$ eingeschalteten Querschnitt zur Basis hat; nennen wir S die Fläche dieses mittleren Querschnittes, so ist das Volumen $MPQQ_1P_1M_1 = S.\Delta x$, mithin,

$$\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = S.$$

Bei verschwindenden Δx fallen die Querschnitte $M_1P_1Q_1 = \varphi(x + \Delta x)$, S und $MPQ = \varphi(x)$ zusammen, mithin bleibt

$$\psi'(x) = \varphi(x).$$

Betrachtet man die unabhängige Variabele x immer als Abscisse, so hat man jetzt folgende Sätze:

Der Differentialquotient eines Volumens ist dessen letzter Querschnitt; der Differentialquotient einer ebenen Curvenfläche ist deren letzte Ordinate; der Differentialquotient einer Curvenordinate ist die trigonometrische Tangente des letzten Berührungswinkels.

§. 2.

Differentiation der einfachen algebraischen Functionen.

I. Differentiation einer Constanten. Wenn $f(x)$ für jedes x denselben Werth a behält, also constant bleibt, so ist auch $f(x + \Delta x) = a$, mithin $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$. Hier findet bei abnehmenden Δx weiter keine Aenderung statt, mithin ist

1) $$\frac{da}{dx} = 0 \text{ und } da = 0.$$

II. Differentiation der Potenz. Als Differenzenquotienten von x^μ erhält man augenblicklich

$$\frac{\Delta(x^\mu)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{\mu-1}$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ gesetzt wird,

$$\frac{\Delta(x^\mu)}{\Delta x} = \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} x^{\mu-1}.$$

Wenn nun Δx gegen die Null convergirt, so hat auch δ die Null zur Grenze, und der rechter Hand stehende Bruch nähert sich der Grenze μ (s. Einl. IV, Nr. 9); daher ist

2) $$\frac{d(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1} \text{ und } d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx.$$

III. Differentiation der Exponentialgrösse. Als Differenzenquotienten von a^x erhält man

$$\frac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

und daraus folgt nach Formel 8) in Abschn. IV der Einleitung

3) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \frac{1}{{}^a\log e}.$$

Gewöhnlich stellt man diese Gleichung unter etwas anderer Gestalt dar. Man denkt sich nämlich die Zahl e als Basis eines Systems von Logarithmen und bezeichnet letztere mit einem blossen l, so dass immer $e^{lz} = z$ ist; man hat dann auch

$$e^{la} = a$$

und wenn man beiderseits die Logarithmen der Basis a nimmt

$$la \,.\, {}^a\log e = {}^a\log a = 1,$$

woraus folgt

4) $${}^a\log e = \frac{1}{la}, \quad \frac{1}{{}^a\log e} = la.$$

Hiernach lautet die Gleichung 3)

5) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x la \text{ und } d(a^x) = a^x la\, dx.$$

Für $a = e$ wird diese Formel am einfachsten, nämlich

6) $$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \text{ und } d(e^x) = e^x dx;$$

man nennt desswegen e^x die natürliche Exponentialgrösse.

IV. Differentiation des Logarithmus. Der Differentialquotient von $\log x$ ist

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{\Delta x}{x}$ mit δ bezeichnet wird

$$\frac{\Delta \log x}{\Delta x} = \frac{\log(1+\delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{x}.$$

Wenn nun Δx gegen die Null convergirt, so ist diess auch mit δ der Fall, und zufolge dessen hat der erste Bruch rechter Hand zur Grenze den Werth $\log e$ (Einl. IV, Formel 7); diess giebt

7) $$\frac{d \log x}{dx} = \frac{\log e}{x}.$$

Bezeichnen wir mit a die Basis des hier vorkommenden logarithmischen Systems, so können wir nach Nr. 4) $\log e$ durch

8) $$\frac{1}{la} = M_a$$

ersetzen; die Grösse M_a heisst dann der Modulus des logarithmischen Systems der Basis a; statt Nr. 7) haben wir jetzt

9) $$\frac{d\,({}^a\log x)}{dx} = \frac{M_a}{x} \text{ und } d\,({}^a\log x) = \frac{M_a}{x}\,dx.$$

Am einfachsten werden diese Formeln für $a = e$ nämlich

10) $$\frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x} \text{ und } d\,lx = \frac{1}{x}\,dx;$$

die Logarithmen, deren Basis e ist, nennt man desswegen natürliche Logarithmen.

§. 3.

Differentiation der goniometrischen Functionen.

Unter Anwendung der bekannten goniometrischen Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

erhält man für den Differenzenquotienten von $\sin u$ folgenden Ausdruck

$$\frac{\Delta \sin u}{\Delta u} = \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin u}{\Delta u} = \frac{2\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\sin\tfrac{1}{2}\Delta u}{\Delta u}$$

oder, wenn $\frac{1}{2}\Delta u$ kurz mit ϑ bezeichnet wird,

$$\frac{\Delta \sin u}{\Delta u} = \cos(u + \vartheta)\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}.$$

Die Grössen Δu und ϑ convergiren gleichzeitig gegen die Null, $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ hat die Einheit zur Grenze (Einl. IV, Nr. 10), mithin ist

1) $$\frac{d\sin u}{du} = \cos u \text{ und } d\sin u = \cos u\,du.$$

Eine ganz gleiche Behandlung gestattet der Cosinus. Unter Benutzung der Formel

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

erhält man nämlich für $\frac{1}{2}\Delta u = \vartheta$

$$\frac{\Delta \cos u}{\Delta u} = \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos u}{\Delta u} = -\frac{2\sin(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\sin\tfrac{1}{2}\Delta u}{\Delta u}$$

$$= -\sin(u + \vartheta)\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

und durch Uebergang zur Grenze

2) $$\frac{d\cos u}{du} = -\sin u \text{ oder } d\cos u = -\sin u\,du.$$

Für die Secante hat man zunächst

$$\frac{\Delta \sec u}{\Delta u} = \frac{\sec(u+\Delta u)-\sec u}{\Delta u} = \frac{\cos u - \cos(u+\Delta u)}{\cos(u+\Delta u)\cos u \,.\, \Delta u}$$

$$= \frac{2\sin(u+\frac{1}{2}\Delta u)\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\cos(u+\Delta u)\cos u \,.\, \Delta u} = \frac{\sin(u+\vartheta)}{\cos(u+2\vartheta)\cos u} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

mithin

3) $$\frac{d\sec u}{du} = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \text{ oder } d\sec u = \sec^2 u \sin u \, du.$$

Als Differenzenquotient der Cosecante ergiebt sich

$$\frac{\Delta \csc u}{\Delta u} = \frac{\csc(u+\Delta u)-\csc u}{\Delta u} = \frac{\sin u - \sin(u+\Delta u)}{\sin(u+\Delta u)\sin u \,.\, \Delta u}$$

$$= -\frac{2\cos(u+\frac{1}{2}\Delta u)\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\sin(u+\Delta u)\sin u \,.\, \Delta u} = -\frac{\cos(u+\vartheta)}{\sin(u+2\vartheta)\sin u} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

und daraus folgt

4) $$\frac{d\csc u}{du} = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \text{ oder } d\csc u = -\csc^2 u \cos u \, du.$$

Um den Differenzenquotienten von $\tan u$ in eine passende Form zu bringen, machen wir Gebrauch von der Relation

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

und erhalten

$$\frac{\Delta \tan u}{\Delta u} = \frac{\tan(u+\Delta u)-\tan u}{\Delta u} = \frac{1}{\cos(u+\Delta u)\cos u} \cdot \frac{\sin\Delta u}{\Delta u}.$$

Wenn Δu gegen die Null convergirt, wird $Lim \frac{\sin\Delta u}{\Delta u} = 1$

folglich

5) $$\frac{d\tan u}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} \text{ oder } d\tan u = \sec^2 u \, du.$$

Mit Hülfe der bekannten Formel

$$\cot\alpha - \cot\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

erhält man auf ähnliche Weise

$$\frac{\Delta \cot u}{\Delta u} = \frac{\cot(u+\Delta u)-\cot u}{\Delta u} = -\frac{1}{\sin(u+\Delta u)\sin u} \cdot \frac{\sin\Delta u}{\Delta u}$$

und durch Uebergang zur Grenze

6) $$\frac{d\cot u}{du} = -\frac{1}{\sin^2 u} \text{ oder } d\cot u = -\csc^2 u \, du.$$

§. 4.

Differentiation der cyclometrischen Functionen.

Zufolge der Definition von $arcsin\, x$ zieht die Gleichung

$$u = arcsin\, x$$

die umgekehrte Gleichung nach sich:

$$sin\, u = x;$$

aus der geänderten Gleichung

$$u + \Delta u = arcsin\, (x + \Delta x)$$

erhält man analog

$$sin\, (u + \Delta u) = x + \Delta x;$$

und nach diesen Bemerkungen kann man den Differenzenquotienten von $arcsin\, x$ in folgender Form darstellen

$$\frac{\Delta\, arcsin\, x}{\Delta x} = \frac{arcsin\, (x + \Delta x) - arcsin\, x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta u}{sin\, (u + \Delta u) - sin\, u} = \frac{1}{\frac{sin\, (u + \Delta u) - sin\, u}{\Delta u}}.$$

Der Nenner des letzten Bruches ist der Differenzenquotient von $sin\, u$ und geht in den Differentialquotienten $cos\, u$ über, wenn Δx und Δu gegen die Null convergiren; man hat daher

$$\frac{d\, arcsin\, x}{d\, x} = \frac{1}{cos\, u} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 u}}$$

oder, weil $sin\, u = x$ ist,

1) $$\frac{d\, arcsin\, x}{d\, x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad d\, arcsin\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, d\, x.$$

Da unter $arcsin\, x$ ein Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ verstanden wird und jeder Bogen dieser Art einen positiven Cosinus hat, so ist das vorkommende Wurzelzeichen immer positiv zu nehmen.

Ein ähnliches Verfahren wäre zur Differentiation von $arccos\, x$ anwendbar, man gelangt aber kürzer zum Ziele, wenn man von der Relation

$$arccos\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arcsin\, x$$

Gebrauch macht; es ergiebt sich

$$\frac{\Delta\, arccos\, x}{\Delta x} = \frac{arccos\, (x + \Delta x) - arccos\, x}{\Delta x}$$

$$= -\frac{arcsin\, (x + \Delta x) - arcsin\, x}{\Delta x} = -\frac{\Delta\, arcsin\, x}{\Delta x}$$

mithin auch beim Uebergange zur Grenze

$$\frac{d\,arccos\,x}{dx} = -\frac{d\,arcsin\,x}{dx}$$

d. i.

2) $$\frac{d\,arccos\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,arccos\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Um ferner die Function $u = arctan\,x$ zu differenziren, gehen wir von folgenden vier Gleichungen aus

$$u = arctan\,x \quad , \quad tan\,u = x$$
$$u + \Delta u = arctan\,(x + \Delta x) \quad , \quad tan\,(u + \Delta u) = x + \Delta x,$$

und stellen mit Hülfe derselben den Differenzenquotienten von $arctan\,x$ in nachstehende Form

$$\frac{\Delta\,arctan\,x}{\Delta x} = \frac{arctan\,(x + \Delta x) - arctan\,x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta u}{tan\,(u + \Delta u) - tan\,u} = \frac{1}{\dfrac{tan\,(u + \Delta u) - tan\,u}{\Delta u}}.$$

Der letzte Nenner ist der Differenzenquotient von $tan\,u$ und geht in den Differentialquotienten $sec^2\,u$ über, wenn Δx und Δu gegen die Null convergiren; diess giebt

$$\frac{d\,arctan\,x}{dx} = \frac{1}{sec^2\,u} = \frac{1}{1 + tan^2\,u}$$

oder, weil $tan\,u = x$ ist,

3) $$\frac{d\,arctan\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arctan\,x = \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Die Differentiation von $arccot\,x$ lässt sich mittelst der Formel

$$arccot\,x = \tfrac{1}{2}\pi - arctan\,x$$

auf die Differentiation von $arctan\,x$ zurückführen; man findet

4) $$\frac{d\,arccot\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d\,arccot\,x = -\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Setzt man $u = arcsec\,x$ mithin $sec\,u = x$, so gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\frac{\Delta\,arcsec\,x}{\Delta x} = \frac{arcsec\,(x + \Delta x) - arcsec\,x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta u}{sec\,(u + \Delta u) - sec\,u} = \frac{1}{\dfrac{\Delta\,sec\,u}{\Delta u}}$$

woraus durch Uebergang zur Grenze folgt

$$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,x}{dx} = \frac{1}{\frac{d\sec u}{du}} = \frac{1}{\frac{\sin u}{\cos^2 u}} = \frac{1}{\sec u\,\sqrt{\sec^2 u - 1}}$$

d. i. wegen $\sec u = x$

5) $$\frac{d\,\mathrm{arcsec}\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d\,\mathrm{arcsec}\,x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Mit Hülfe der Relation

$$\mathrm{arccsc}\,x = \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{arcsec}\,x$$

gelangt man endlich noch zu der Formel

6) $$\frac{d\,\mathrm{arccsc}\,x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d\,\mathrm{arccsc}\,x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Nachdem hiermit die Differentiation der einfachen Functionen erledigt ist, haben wir uns nun mit der Differentiation zusammengesetzter Functionen zu beschäftigen.

§. 5.

Differentiation der Aggregate, Producte und Quotienten.

I. Sind A und B Constanten, u und v Functionen der unabhängigen Variabelen x, so bildet das Aggregat $Au + Bv$ eine zusammengesetzte Function von x, welche u. A. die Summe $u + v$, die Differenz $u - v$ und das Product Au als specielle Fälle in sich enthält. Die Aenderung des x hat gleichzeitige Aenderungen von u und v zur Folge und es ist demnach der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta(Au+Bv)}{\Delta x} = \frac{A\,(u+\Delta u) + B\,(v+\Delta v) - (Au+Bv)}{\Delta x}$$

$$= A\frac{\Delta u}{\Delta x} + B\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Je kleiner Δx ist, desto weniger unterscheiden sich die Differenzenquotienten $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ von den entsprechenden Differentialquotienten, und man kann daher

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \varrho_1, \qquad \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} + \varrho_2$$

setzen, wo ϱ_1 und ϱ_2 nicht näher bekannt sind, aber gleichzeitig mit Δx gegen die Null convergiren. Die vorige Gleichung wird jetzt

$$\frac{\Delta (Au + Bv)}{\Delta x} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + A\varrho_1 + B\varrho_2$$

und hieraus folgt, indem man zur Grenze für verschwindende Δx, ϱ_1 und ϱ_2 übergeht

1) $$\frac{d(Au + Bv)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx}$$

oder auch

2) $$d(Au + Bv) = A\,du + B\,dv.$$

Für $B = +1$, $B = -1$ und $B = 0$ liefert die Formel drei specielle Gleichungen, die man leicht in Worte fassen und als Regeln aussprechen kann.

Mittelst derselben Schlussweise, die zur Formel 1) führte, gelangt man auch zu dem allgemeineren Resultate

3) $$\frac{d(Au + Bv + Cw + \cdots)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx} + \cdots$$

worin das Aggregat $Au + Bv +$ etc. aus einer beliebigen endlichen Menge von Summanden zusammengesetzt sein darf; für eine unendliche Menge derselben gilt aber die Formel nicht ohne Weiteres, weil es in diesem Falle fraglich bleibt, ob $A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 + \cdots$ in inf. die Null zur Grenze habe, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ gegen die Null convergiren.

Mittelst der Formel 3) kann die Differentiation jeder zusammengesetzten Function ausgeführt werden, die sich in ein Aggregat einfacher Functionen auflösen lässt. So hat man z. B.

$$\frac{d[(a + bx)^3]}{dx} = \frac{d[a^3 + 3a^2bx + 3ab^2x^2 + b^3x^3]}{dx}$$

$$= \frac{d(a^3)}{dx} + 3a^2b\frac{d(x)}{dx} + 3ab^2\frac{d(x^2)}{dx} + b^3\frac{d(x^3)}{dx}$$

$$= 3a^2b + 3ab^2 \cdot 2x + b^3 \cdot 3x^2$$

$$= 3b(a^2 + 2abx + b^2x^2) = 3b(a + bx)^2.$$

Ein zweites Beispiel ist

$$\frac{d\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)}{dx} = \frac{d(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1})}{dx}$$

$$= \frac{d(1)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx} + \cdots + \frac{d(x^{n-1})}{dx}$$

$$= 1 + 2x + \cdots + (n-1)x^{n-2}.$$

II. Sind wieder u und v Functionen der Variabelen x, so hat man als Differenzenquotienten des Productes uv

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x}$$

$$= u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

Die Grenzwerthe von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ und Δx sind der Reihe nach $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ und Null; mithin wird

4) $$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

und

5) $$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Als Beispiel diene der Fall $u = x^\alpha$, $v = x^\beta$; man erhält

$$\frac{d(x^\alpha x^\beta)}{dx} = x^\alpha \beta x^{\beta-1} + x^\beta \alpha x^{\alpha-1} = (\alpha+\beta)\,x^{\alpha+\beta-1}$$

wie sich auch direct ergiebt, wenn $x^\alpha x^\beta$ in $x^{\alpha+\beta}$ zusammengezogen wird.

III. Behufs der Differentiation des Quotienten $\frac{v}{u}$ bilden wir zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta\left(\frac{v}{u}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{v+\Delta v}{u+\Delta u} - \frac{v}{u}}{\Delta x} = \frac{u\frac{\Delta v}{\Delta x} - v\frac{\Delta u}{\Delta x}}{(u+\Delta u)\,u}$$

und erhalten durch Uebergang zur Grenze

6) $$\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$$

oder

7) $$d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2}.$$

Hiernach ist z. B.

$$\frac{d\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{dx} = \frac{(1-x)(-nx^{n-1}) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)\,x^n}{(1-x)^2}.$$

Derselbe Ausdruck wurde schon in Nr. I. auf anderem Wege differenzirt; vergleicht man beide Differentialquotienten mit einander, so hat man die neue Summenformel

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Ueberhaupt lässt sich aus jeder analytischen Gleichung, die eine willkührliche Variabele enthält, immer eine neue derartige Gleichung durch Differentiation in Beziehung auf jene Variabele ableiten.

§. 6.

Differentiation der Functionen von Functionen.

Wenn z eine Function von y, und y wieder eine Function von x ist, so hat man zwei Gleichungen

1) $$z = f[y], \qquad y = \varphi(x),$$

welche sich auch in die eine

2) $$z = f[\varphi(x)]$$

zusammenziehen lassen. Ebenso kann umgekehrt eine Gleichung der letzten Art in zwei Gleichungen von der obigen Form zerlegt werden, z. B. $z = log\,sin\,x$ in $z = log\,y$ und $y = sin\,x$. Einer Aenderung des x entsprechen nun Aenderungen von y und z, mithin ist nach Nro. 1)

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f[y + \Delta y] - f[y]}{\Delta x};$$

dafür kann man schreiben

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f[y + \Delta y] - f[y]}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und hier ist der Differenzenquotient von $f[y]$ ebenso gebildet, als wenn y eine unabhängige Variabele, mithin Δy eine willkührliche Zunahme des y wäre. Gehen wir nun in der vorigen Gleichung oder in der folgenden mit ihr identischen

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

zur Grenze über, so gelangen wir zu der Formel

2) $$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

oder

3) $$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Demnach erhält man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$, wenn man erst den Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$ so bildet, als wäre y eine unabhängige Variabele, und ihn nachher mit $\frac{dy}{dx}$ multiplicirt; die Werthe von $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$ leitet man unmittelbar aus den Gleichungen 1) ab.

In der Anwendung auf das Beispiel

$$z = (a + bx^n)^p$$

gestaltet sich die Sache folgendermaassen. Statt der vorstehenden Gleichung schreibt man die beiden Gleichungen

$$z = y^p, \quad y = a + bx^n$$

und erhält daraus

$$\frac{dz}{dy} = py^{p-1}, \quad \frac{dy}{dx} = bnx^{n-1}$$

mithin durch Multiplication dieser Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx} = bnpy^{p-1}x^{n-1}$$

oder endlich, wenn man für y und z ihre Werthe setzt,

$$\frac{d[(a + bx^n)^p]}{dx} = bnp\,(a + bx^n)^{p-1}x^{n-1}.$$

Bei mehrfacher Uebung in diesem Verfahren wird man finden, dass es nicht nothwendig ist, die Variabelen y und z in Rechnung zu bringen, weil sie später doch wieder daraus verschwinden; vielmehr kann man diese Substitutionen im Gedächtnisse behalten und dadurch eine wesentliche Abkürzung herbeiführen. Auch ist es bequemer, nicht gleich auf die Entwickelung des Differentialquotienten auszugehen, sondern vorläufig erst das Differential der gegebenen Function zu suchen. So würde man bei dem vorigen Beispiele sagen: analog $d(y^p) = py^{p-1}dy$ ist

$$\begin{aligned} d[(a + bx^n)^p] &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,d(a + bx^n) \\ &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,b\,d(x^n) \\ &= p\,(a + bx^n)^{p-1}\,bnx^{n-1}dx, \end{aligned}$$

was mit dem früheren Resultate übereinstimmt.

Als zweites Beispiel diene die Differentiation von x^x. In der Form einer Exponentialgrösse dargestellt, ist dieser Ausdruck

$$x^x = (e^{lx})^x = e^{x\,lx};$$

nach der Regel $d(e^y) = e^y\,dy$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} d(x^x) &= e^{x\,lx}\,d(x\,lx) \\ &= e^{x\,lx}(x\,d\,lx + lx\,dx) \\ &= e^{x\,lx}\left(x\,\frac{1}{x}\,dx + lx\,dx\right) \\ &= x^x(1 + lx)\,dx. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man zu der folgenden kleinen Formelsammlung, welche später von Nutzen sein wird:

$$d\left[\frac{1}{b}\,l(a + bx)\right] = \frac{dx}{a + bx},$$

$$d\left[-\frac{1}{b\,(a + bx)}\right] = \frac{dx}{(a + bx)^2},$$

$$d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,arctan\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2},$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right)\right] = \frac{dx}{\alpha^2 - \beta^2 x^2},$$

$$d\left[\frac{1}{2\,b}\,l(a + bx^2)\right] = \frac{x\,dx}{a + bx^2},$$

$$d\left[\frac{2\sqrt{a + bx}}{b}\right] = \frac{dx}{\sqrt{a + bx}},$$

$$d\left[\frac{l(\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2})}{\beta}\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}},$$

$$d\left[\frac{1}{\beta}\,arcsin\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}},$$

$$d\left[\frac{\sqrt{a + bx^2}}{b}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}},$$

$$d\left[\frac{x}{a\sqrt{a + bx^2}}\right] = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}},$$

$$d\left[-\frac{1}{b\sqrt{a + bx^2}}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}},$$

$$d\,[x\,lx - x] = lx\,dx,$$

$$d\,[-\,l\,cos\,u] = tan\,u\,du,$$

$$d\,[l\,sin\,u] = cot\,u\,du,$$

$$d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,arctan\left(\frac{\beta\,tan\,u}{\alpha}\right)\right] = \frac{du}{\alpha^2 cos^2 u + \beta^2 sin^2 u},$$

$$d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha + \beta\,tan\,u}{\alpha - \beta\,tan\,u}\right)\right] = \frac{du}{\alpha^2 cos^2 u - \beta^2 sin^2 u}.$$

§. 7.

Anwendungen der vorigen Formeln.

I. Wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, so liefert die wirkliche Ausführung der durch $(1 + x)^m$ angezeigten m Multiplicationen ein Resultat von der Form

1) $(1 + x)^m = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_m x^m$,

worin C_1, C_2, C_3, $\ldots$ C_m gewisse, vorläufig noch unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten. Um sie zu bestimmen, differenziren wir beiderseits, und erhalten

$m(1 + x)^{m-1} = 1\,C_1 + 2\,C_2 x + 3\,C_3 x^2 + \cdots + m\,C_m x^{m-1}$.

Diese Gleichung multipliciren wir mit $1 + x$, die Gleichung 1) dagegen mit m, dann sind die linken Seiten der beiden neuen Gleichungen dieselben, mithin müssen auch die rechten Seiten gleich sein, d. h.

$$1\,C_1 + (2\,C_2 + 1\,C_1)x + (3\,C_3 + 2\,C_2)x^2 + (4\,C_4 + 3\,C_3)x^3 + \cdots$$
$$= m + m\,C_1 x + m\,C_2 x^2 + m\,C_3 x^3 + \cdots$$

Die vorstehende Gleichung kann aber für jedes beliebige x nur dann bestehen, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x gleich sind; es ist daher der Reihe nach

$$C_1 = \frac{m}{1}, \quad C_2 = C_1 \frac{m-1}{2} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2},$$

$$C_3 = C_2 \frac{m-2}{3} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$$

u. s. w.

Durch Substitution dieser Coefficientenwerthe erhält man aus Nro. 1) die Gleichung

$$2)\ (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots$$

welche den Namen des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten führt. Die darin vorkommenden Coefficienten heissen Binomialcoefficienten und werden am zweckmässigsten auf folgende Weise bezeichnet:

$$(m)_0 = 1,\ (m)_1 = \frac{m}{1},\ (m)_2 = \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}, \ldots\ldots$$

$$(m)_k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[k-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k}.$$

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplicirt beiderseits mit a^m, so gelangt man zu der Formel

3) $(a + b)^m = (m)_0 a^m + (m)_1 a^{m-1} b + (m)_2 a^{m-2} b^2 + \cdots$
$\cdots + (m)_{m-1} a b^{m-1} + (m)_m b^m,$

mittelst deren jede zweitheilige Grösse auf eine beliebige ganze positive Potenz erhoben werden kann.

Die Gleichung 2) dient auch zur Berechnung der Zahl e, wenn $x = \frac{1}{m}$ genommen und m als unendlich wachsende Zahl betrachtet wird. Man erhält zunächst

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1\,\,2\,.\,3\,\ldots\,m},$$

wobei die rechte Seite $m + 1$ Summanden zählt. Verstehen wir unter k eine beliebige ganze positive Zahl $< m$, so können wir die rechte Seite in zwei Theile zerlegen, deren erster die $k + 1$ ersten Summanden enthält, während der zweite, welcher R heissen möge, den noch übrigen Rest von $m - k$ Summanden umfasst; dies giebt

4) $$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$
$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2} + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,k} + R,$$
$$R = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{m}\right)}{1\,.\,2\,\ldots\,(k+1)}\left\{1 + \frac{1-\frac{k+1}{m}}{k+2} + \cdots\cdots\right.$$
$$\left. \cdots + \frac{\left(1-\frac{k+1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(k+2)\,.\,\,.\,m}\right\}.$$

In der zuletzt eingeklammerten Summe sind die Zähler aller Summanden positive ächte Brüche; setzen wir statt derselben durchweg die Einheit und nehmen statt der Nenner

$k+2, \quad (k+2)(k+3), \ldots \quad (k+2)(k+3)\ldots m$

die kleineren Nenner

$k+1, \quad (k+1)^2, \ldots \quad (k+1)^{m-k-1},$

so erhalten wir zu viel, mithin ist die erwähnte Summe kleiner als

$$1+\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{k+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-k}}{1-\frac{1}{k+1}} \quad <\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}.$$

Andererseits beträgt jene Summe mehr als Null, sie liegt also zwischen

$$0 \text{ und } \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k}$$

und kann folglich $= \varepsilon \frac{k+1}{k}$ gesetzt werden, wo ε einen nicht näher bestimmten positiven ächten Bruch bezeichnet; es ist dann

$$5) \qquad R=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{\varepsilon}{k}.$$

Gehen wir nun in den Gleichungen 4) und 5) zur Grenze für unendlich wachsende m über, ohne die Zahl k zu ändern, und berücksichtigen die Gleichungen

$$Lim\,\frac{1}{m}=Lim\,\frac{2}{m}=\cdots=Lim\,\frac{k}{m}=0,$$

so gelangen wir zu folgender Formel

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\;\;2}+\cdots+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}+R,$$

$$R=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{\varepsilon}{k},$$

worin k eine beliebige endliche positive ganze Zahl ist. Indem man für ε einmal die Null, das andere Mal die Einheit setzt, erhält man zwei verschiedene Summen, zwischen denen e liegt; weil aber R beliebig klein gemacht werden kann, wenn man k gross genug wählt, so lassen sich jene Summen einander beliebig nahe bringen und liefern den Werth von e so genau, als man es verlangt. So ist z. B. für $k=10$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 10} = 2{,}7182818011$$

$$R = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 10} \cdot \frac{\varepsilon}{10} = 0{,}0000000276 \cdot \varepsilon,$$

mithin für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$

$$2{,}7182818011 < e < 2{,}7182818287,$$

womit e auf sieben Decimalstellen genau bestimmt ist.

II. Setzt man zur Abkürzung

$$P_n = \frac{\cos n u}{\cos^n u}, \qquad Q_n = \frac{\sin n u}{\cos^n u},$$

so findet man sehr leicht folgende zwei Relationen

$$P_{n+1} = P_n - Q_n \tan u, \qquad Q_{n+1} = Q_n + P_n \tan u;$$

von den Werthen $P_0 = 1$ und $Q_0 = 0$ ausgehend, kann man diese Formeln der Reihe nach für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ anwenden und erhält

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & Q_1 &= \tan u, \\ P_2 &= 1 - \tan^2 u, & Q_2 &= 2 \tan u, \\ P_3 &= 1 - 3 \tan^2 u, & Q_3 &= 3 \tan u - \tan^3 u, \\ P_4 &= 1 - 6 \tan^2 u + \tan^4 u, & Q_4 &= 4 \tan u - 4 \tan^3 u, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die vorstehenden Gleichungen berechtigen zu dem allgemeinen Schlusse, dass für jedes ganze positive m sein werde

6) $$P_m = \frac{\cos m u}{\cos^m u}$$

$$= 1 - C_2 \tan^2 u + C_4 \tan^4 u - C_6 \tan^6 u + \cdots,$$

7) $$Q_m = \frac{\sin m u}{\cos^m u}$$

$$= C_1 \tan u - C_3 \tan^3 u + C_5 \tan^5 u - \cdots$$

worin C_1, C_2, C_3 etc. gewisse vorläufig unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten. Um diese zu bestimmen, differenziren wir jede der vorigen Gleichungen und bemerken dabei, dass

$$\frac{d P_m}{d u} = - m Q_m + m P_m \tan u,$$

$$\frac{d Q_m}{d u} = + m P_m + m Q_m \tan u,$$

$$\frac{d (\tan^k u)}{d u} = k \tan^{k-1} u \sec^2 u$$

ist, wie sich bei wirklicher Ausführung der Differentiation leicht findet; wir erhalten

8) $$-mP_m \tan u + mQ_m = (2C_2 \tan u - 4C_4 \tan^3 u + 6C_6 \tan^5 u - \cdots) \sec^2 u,$$

9) $$mP_m + mQ_m \tan u = (1C_1 - 3C_3 \tan^2 u + 5C_5 \tan^4 u - 7C_7 \tan^6 u + \cdots) \sec^2 u.$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $\tan u$ und ziehen das Product von der zweiten Gleichung ab, so bleibt linker Hand $mP_m(1 + \tan^2 u) = mP_m \sec^2 u$ übrig, wobei sich der Factor $\sec^2 u$ hebt; gleichzeitig setzen wir statt P_m den in Nro. 6) verzeichneten Ausdruck und gelangen so zu der Gleichung

10) $$m - mC_2 \tan^2 u + mC_4 \tan^4 u - mC_6 \tan^6 u + \cdots = 1C_1 - (2C_2 + 3C_3) \tan^2 u + (4C_4 + 5C_5) \tan^4 u - (6C_6 + 7C_7) \tan^6 u + \cdots$$

Das Seitenstück hierzu ergiebt sich, wenn wir aus den Gleichungen 8) und 9) die Grösse P_m eliminiren und statt des übrig bleibenden Q_m den in Nro. 7) verzeichneten Ausdruck setzen; es wird

11) $$mC_1 \tan u - mC_3 \tan^3 u + mC_5 \tan^5 u - \cdots = (1C_1 + 2C_2) \tan u - (3C_3 + 4C_4) \tan^3 u + (5C_5 + 6C_6) \tan^5 u - \cdots$$

Vergleichen wir nun wechselweise in 10) und 11) die Coefficienten gleicher Potenzen von $\tan u$, so erhalten wir

$$C_1 = \frac{m}{1}, \quad C_2 = C_1 \frac{m-1}{2} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2},$$

$$C_3 = C_2 \frac{m-2}{3} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}, \text{ u. s. f.}$$

woraus augenblicklich hervorgeht, dass C_1, C_2, C_3 etc. mit dem Binomialcoefficienten $(m)_1$, $(m)_2$, $(m)_3$ etc. identisch sind. Demnach haben wir nach Nro. 6) und 7) folgende Formeln

12) $$\frac{\cos mu}{\cos^m u} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2 u + (m)_4 \tan^4 u - (m)_6 \tan^6 u + \cdots$$

13) $$\frac{\sin mu}{\cos^m u} = (m)_1 \tan u - (m)_3 \tan^3 u + (m)_5 \tan^5 u - \cdots$$

oder auch durch beiderseitige Multiplication mit $\cos^m u$

14) $$\cos mu = (m)_0 \cos^m u - (m)_2 \cos^{m-2} u \sin^2 u + (m)_4 \cos^{m-4} u \sin^4 u - \cdots$$

15) $$\sin m u = (m)_1 \cos^{m-1} u \sin u - (m)_3 \cos^{m-3} u \sin^3 u + (m)_5 \cos^{m-5} u \sin^5 u - \cdots$$

Diese Formeln lassen noch einige Umgestaltungen zu, die wir kurz andeuten wollen. Die Gleichung 14) enthält nur gerade Potenzen von $\sin u$, d. h. ganze Potenzen von $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, man kann daher den binomischen Satz anwenden, indem man

$$\sin^{2k} u = (1 - \cos^2 u)^k$$
$$= 1 - (k)_1 \cos^2 u + (k)_2 \cos^4 u - (k)_3 \cos^6 u + \cdots$$

und $k = 1, 2, 3$ etc. setzt; nach Zusammenfassung aller Glieder, welche gleiche Potenzen von $\cos u$ zu Factoren haben, gelangt man zu einem Resultate von der Form

16) $$\cos m u = A_0 \cos^m u + A_2 \cos^{m-2} u + \cdots,$$

worin A_0, A_2, A_4 etc. gewisse constante Coefficienten bedeuten, deren Werthe sich durch Ausführung der angedeuteten Operationen von selbst ergeben. Schreibt man ferner statt Nro. 15)

$$\sin m u = \sin u \,[(m)_1 \cos^{m-1} u - (m)_3 \cos^{m-3} u \sin^2 u + \cdots],$$

so ist innerhalb der Parenthese wieder die vorige Transformation anwendbar und führt zu einem Resultate von folgender Form

17) $$\sin m u = \sin u \,[B_1 \cos^{m-1} u + B_3 \cos^{m-3} u + \cdots].$$

Will man die Cosinuspotenzen in Sinuspotenzen umsetzen, so braucht man nur $u = \frac{1}{2}\pi - v$ zu substituiren, doch hat man dann linker Hand gerade und ungerade m zu unterscheiden.

§. 8.

Zusammenhang zwischen einer Function und ihrem Differentialquotienten.

I. Wie in §. 1, Formel 3) bezeichnen wir mit ϱ den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten einer Function $f(x)$, wir setzen also

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varrho,$$

wo ϱ zwar nicht näher bekannt ist, aber gleichzeitig mit Δx gegen die Null convergirt. Eben desswegen lässt sich auch, wenn Δx hinreichend klein genommen wird, ϱ so weit verringern, dass sein absoluter Werth weniger als der absolute Werth von $f'(x)$ beträgt; für noch kleinere Δx findet diese Ungleichung um so mehr statt wegen der weiteren Abnahme des ϱ. Die rechte Seite der obigen Glei-

chung hat jetzt dasselbe Vorzeichen wie $f'(x)$, mithin kommt das nämliche Vorzeichen auch der linken Seite zu. Ist nun $f'(x)$ und daher $f'(x) + \varrho$ positiv, so folgt, Δx immer als positiv vorausgesetzt, dass $f(x + \Delta x) > f(x)$ sein muss; in diesem Falle entspricht der grösseren Variabele ein grösserer Functionswerth. Wenn dagegen $f'(x)$, mithin auch $f'(x) + \varrho$ negativ ist, so ergiebt sich $f(x + \Delta x) < f(x)$, und hier gehört zur grösseren Variabele ein kleinerer Functionswerth. Man hat daher folgenden Satz: Je nachdem der Differentialquotient einer Function das positive oder negative Vorzeichen besitzt, ist die Function selber im Wachsen oder im Abnehmen begriffen, und umgekehrt.

Hieraus erklärt sich z. B., warum der Differentialquotient des Sinus positiv, der des Cosinus negativ ist, wenn der Bogen im ersten Quadranten liegt.

II. Wir betrachten ferner die Function $\varphi(x)$ als endlich und continuirlich von $x = a$ bis $x = b$, und setzen voraus, dass ihre Derivirte $\varphi'(x)$ die nämliche Eigenschaft besitze; durchläuft nun x das genannte Intervall, so wird $\varphi'(x)$ das eine Mal einen grössten Werth M', ein anderes Mal einen kleinsten Werth N' annehmen, mithin ist innerhalb jenes Intervalles

$$\varphi'(x) - M' \text{ negativ}, \qquad \varphi'(x) - N' \text{ positiv}.$$

Andererseits lässt sich $\varphi'(x) - M'$ als Differentialquotient von

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - (x - a) M'$$

betrachten, ebenso $\varphi'(x) - N'$ als Differentialquotient von

$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - (x - a) N',$$

und nun folgt aus dem in Abschn. I. bewiesenen Satze, dass u eine abnehmende, dagegen v eine zunehmende Function ist. Für $x = a$ verschwinden diese Functionen; demnach fängt u seine Abnahme mit dem Werthe $u = 0$ an und muss folglich immer negativ sein; v beginnt sein Wachsthum mit $v = 0$ und ist daher positiv. Dies gilt von $x = a$ bis $x = b$, mithin ist auch

$$1) \quad \begin{cases} \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a) M' \text{ negativ}, \\ \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a) N' \text{ positiv}. \end{cases}$$

Lassen wir nun in dem Ausdrucke

$$w = \varphi(b) - \varphi(a) - (b - a) \varphi'(x)$$

die Variabele x das Intervall $x = a$ bis $x = b$ durchlaufen, so erreicht $\varphi'(x)$ einmal den Werth M', ein anderes Mal den Werth N'; im ersten Falle wird w negativ, im zweiten positiv. Dieser Uebergang vom Negativen zum Positiven ist bei einer continuirlichen Func-

tion nur mittelst Durchganges durch den Werth $w = 0$ möglich; zwischen a und b muss es daher wenigstens einen speciellen Werth $x = \xi$ geben, für welchen $w = 0$ oder

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(\xi)$$

wird. Dass $a < \xi < b$ ist, kann man durch die Gleichung $\xi = a + \vartheta(b - a)$ ausdrücken, wenn man unter ϑ einen nicht näher bekannten positiven ächten Bruch versteht; die vorige Gleichung lautet dann:

2) $\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(a + \vartheta[b - a]), \quad 0 < \vartheta < 1,$

oder auch, wenn $b = a + h$ gesetzt wird,

3) $\varphi(a + h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$

wobei jede der Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ endlich und stetig bleiben muss von $x = a$ bis $x = b$.

Die Wichtigkeit der Formel 2) wird es rechtfertigen, wenn wir einen zweiten Beweis derselben mittheilen, welcher noch einfacher ist und die Kenntniss des in Absch. I. entwickelten Theoremes nicht voraussetzt. Denken wir uns die Differenz $b - a$ in n gleiche Theile getheilt und bezeichnen wir einen solchen Theil mit δ, so ist

$$\delta = \frac{b - a}{n}, \qquad b - a = n\delta, \qquad b = a + n\delta$$

und identisch

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{n\delta}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(a + \delta) - \varphi(a)}{\delta} + \frac{\varphi(a + 2\delta) - \varphi(a + \delta)}{\delta} + \cdots + \frac{\varphi(a + n\delta) - \varphi(a + \overline{n - 1}\,\delta)}{\delta}\right]$$

In Worten heisst dies: der Quotient $\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$ ist das arithmetische Mittel aus den n Werthen, welche der Differenzenquotient

$$\frac{\varphi(x + \delta) - \varphi(x)}{\delta}$$

annimmt, wenn der Reihe nach

$$x = a, \quad a + \delta, \quad a + 2\delta, \ldots. \quad a + (n - 1)\delta$$

gesetzt wird, oder, wenn x das Intervall a bis $b - \delta$ in Absätzen von δ zu δ durchläuft. Das arithmetische Mittel aus mehreren Zahlen liegt immer zwischen der kleinsten und grössten derselben; bezeichnen wir daher mit M den grössten und mit N den kleinsten

Werth, welchen der genannte Differenzenquotient erreicht, wenn x sich auf die vorgeschriebene Weise ändert, so ist

$$M > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} > N.$$

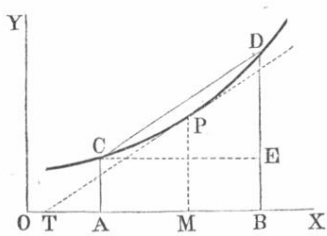
Bei unendlich wachsenden n convergirt δ gegen die Null, und dann durchläuft x stetig das Intervall a bis b; der Differenzenquotient wird zum Differentialquotienten, M geht über in M', N in N', und die vorige Ungleichung lautet jetzt

$$M' > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} > N'.$$

Dies ist einerlei mit Dem, was unter Nro. 1) gefunden wurde; die übrige Schlussweise bleibt dieselbe.

Der gewonnene Satz kann auf verschiedene Weise geometrisch interpretirt werden, je nachdem man $\varphi(x)$ als die zur Abscisse x gehörende Ordinate einer ebenen Curve, oder als die über der Abscisse x stehende Fläche einer anderen Curve, oder als Volumen betrachtet. Wir wollen die erste Voraussetzung genauer untersuchen.

Fig. 7.



In Fig. 7 sei die ebene Curve CPD durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ bestimmt, $OA = a$, $OB = b$, $AB = b - a = h$, $AC = \varphi(a)$, $BD = \varphi(b) = \varphi(a + h)$, endlich CE parallel und gleich AB; man hat dann einerseits $DE = BD - AC = \varphi(b) - \varphi(a)$, andererseits $DE = CE \cdot tan\, DCE$, mithin

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h\, tan\, DCE.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Curve von C bis D ununterbrochen verläuft und dass die Tangente an derselben ihre Richtung stetig ändert, wenn der Berührungspunkt den Bogen CD durchläuft, giebt es jedenfalls eine zur Sehne CD parallele Tangente, deren Berührungspunkt P zwischen C und D liegt; es ist dann $\angle\, DCE = \angle\, PTM = \tau$ und

$$\varphi(a + h) - \varphi(a) = h\, tan\, \tau.$$

Für $OM = \xi$ ist weiter $tan\, \tau = \varphi'(\xi) = \varphi'(a + AM)$, und da AM einen Bruchtheil von AB ausmacht, so kann $AM = \vartheta h$ gesetzt werden. Nach diesen Substitutionen geht die vorige Gleichung in Nro. 3) über und bedeutet geometrisch, dass es im Allgemeinen zu jeder Sehne einer Curve eine parallele Tangente giebt.

Nicht überflüssig ist es, sich von den Ausnahmen zu überzeugen, welche dieser Satz erleidet, wenn entweder $\varphi(x)$ oder $\varphi'(x)$ oder beide Functionen discontinuirlich werden. So erkennt man augenblicklich aus Fig. 8, dass der Satz nicht mehr richtig zu sein braucht, wenn die Curve von C bis D durch imaginäre Ordinaten unterbrochen ist. Setzen wir ferner voraus, dass $\varphi(x)$ zwar reell, aber discontinuirlich zwischen $x = a$ und $x = b$, dagegen $\varphi'(x)$ continuirlich sei, so besteht die Curve aus zwei nicht zusammenhängenden Bögen CH und KD, wobei die Tangenten in H und K parallel laufen (Fig. 9); auch hier giebt es keine zu CD parallele Tangente, deren Berührungspunkt zwischen C und D fällt. Im dritten Falle, wenn nämlich $\varphi(x)$ continuirlich, aber $\varphi'(x)$ discontinuirlich ist, erleidet zwar die Curve keine Unterbrechung, dagegen ändert die Tangente ihre Lage sprungweise zwischen C und D (Fig. 10), d. h. sie geht in einem

Fig. 8.

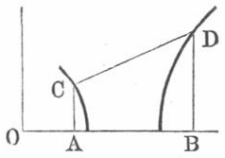


Fig. 9.

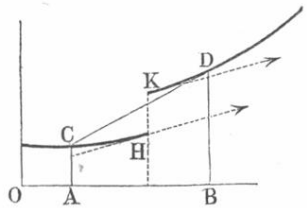
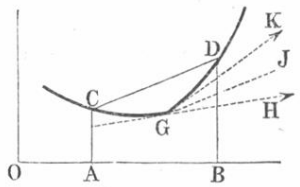


Fig. 10.



Punkte G plötzlich von GH nach GK über, wodurch die Curve eine Spitze erhält. Wiederum gilt hier der Satz nicht, da eine Parallele zu CD zwischen GH und GK, etwa nach GJ, fallen kann und dann keine Lage der Tangente darstellt. Sind endlich $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ gleichzeitig discontinuirlich, so erhält man eine ähnliche Figur wie Nro. 9), nur sind in diesem Falle die Tangenten in H und K nicht parallel; die Folgerung bleibt aber dieselbe.

Behufs einer zweiten geometrischen Deutung denken wir uns $\varphi(x)$ als die über der Abscisse x stehende Fläche einer Curve; die Gleichung der letzteren ist dann $y = \varphi'(x)$, und die Formel 2) enthält nun den unmittelbar klaren Satz, dass die über der Strecke AB stehende Fläche als ein Rechteck angesehen werden kann, welches AB zur Basis und eine mittlere Ordinate zur Höhe hat. Aehnlich gestaltet sich die Sache in dem Falle, wo $\varphi(x)$ als ein Volumen betrachtet wird.

Trotz ihrer Einfachheit ist die Formel 2) doch eine sehr wichtige, die viele Anwendungen gestattet. Hier nur eine derselben. Für $\varphi(x) = \log x$ wird $\varphi'(x) = \frac{\log e}{x}$, mithin

$$\log(a + h) - \log a = h \frac{\log e}{a + \vartheta h};$$

setzt man an die Stelle des ächten Bruches ϑ das eine Mal die Einheit, das andere Mal die Null, so gelangt man zu den beiden Ungleichungen

4) $$\log(a + h) > \log a + \frac{h \log e}{a + h},$$

5) $$\log(a + h) < \log a + \frac{h \log e}{a}.$$

Bei grossen a und kleinen h können diese Formeln zur Berechnung von $\log(a + h)$ dienen, wenn $\log a$ bekannt ist. Wollte man z. B. eine bis zur Zahl 100000 gehende Tafel der Brigg'schen Logarithmen erweitern und etwa $\log 100003$ berechnen, so hätte man nach dem Obigen

$$\log 100003 > 5 + \frac{3 \cdot 0{,}43429448}{100003},$$

$$\log 100003 < 5 + \frac{3 \cdot 0{,}43429448}{100000},$$

oder

$$\log 100003 > 5{,}000013028, \qquad \log 100003 < 5{,}000013029;$$

beide Zahlwerthe stimmen in 8 Decimalen überein, daher ist, mit Rücksicht auf die neunte Stelle

$$\log 100003 = 5{,}00001303$$

zu setzen, wie man auch in grösseren Tafeln angegeben findet.

III. Durch Verallgemeinerung der Schlüsse, welche zu Formel 2) führten, kann man noch weiter gehende Resultate erreichen. Sind z. B. $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ Functionen, die von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben, und deren letzte innerhalb des genannten Intervalles nur positive, von Null verschiedene Werthe besitzt, so ändert sich der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ continuirlich von $x = a$ bis $x = b$; sein grösster Werth innerhalb dieses Intervalles sei M', sein kleinster N', so ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - M' \text{ negativ}, \qquad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - N' \text{ positiv},$$

ferner wegen des positiven $\psi'(x)$

$$\varphi'(x) - M'\psi'(x) \text{ negativ}, \qquad \varphi'(x) - N'\psi'(x) \text{ positiv}.$$

Der erste Ausdruck kann als Differentialquotient von

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - M'[\psi(x) - \psi(a)]$$

angesehen werden, der zweite als Differentialquotient von

$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - N'[\psi(x) - \psi(a)],$$

und wie in Absch. I. überzeugt man sich leicht, dass u eine abnehmende und negativ bleibende Function ist, dagegen v eine wachsende und positive; daraus folgt

$$\varphi(b) - \varphi(a) - M'[\psi(b) - \psi(a)] \text{ negativ},$$
$$\varphi(b) - \varphi(a) - N'[\psi(b) - \psi(a)] \text{ positiv}.$$

Da ferner $\psi'(x)$ als positiv vorausgesetzt wurde, so ist $\psi(x)$ eine wachsende Function, $\psi(b) - \psi(a)$ positiv und nach dem Vorigen

$$M' > \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} > N'.$$

Lässt man in dem Ausdrucke

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} - \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

x das Intervall a bis b durchlaufen, so ändert sich der Quotient rechter Hand stetig, erreicht einmal den Werth M', ein ander Mal den Werth N' und wird demnach einmal grösser und einmal kleiner als der links stehende Quotient; es giebt daher zwischen a und b wenigstens einen Werth $x = \xi$ oder $x = a + \vartheta(b - a)$, für welchen die Gleichheit beider Quotienten emtritt, nämlich

$$6) \qquad \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a + \vartheta[b - a])}{\psi'(a + \vartheta[b - a])}, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

oder für $b - a = h$,

$$7) \qquad \frac{\varphi(a + h) - \varphi(a)}{\psi(a + h) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(a + \vartheta h)}{\psi'(a + \vartheta h)}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Zu derselben Formel gelangt man auch durch folgende Betrachtung. Wenn wie früher

$$\delta = \frac{b - a}{n}, \text{ mithin } b = a + n\delta$$

gesetzt wird, und wenn ferner $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und durchaus eindeutig, d. h. continuirlich bleiben, so hat man zunächst die identische Gleichung

$$Q = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} =$$

$$\frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a) + \varphi(a+2\delta) - \varphi(a+\delta) + \cdots + \varphi(a+n\delta) - \varphi(a+\overline{n-1}\delta)}{\psi(a+\delta) - \psi(a) + \psi(a+2\delta) - \psi(a+\delta) + \cdots + \psi(a+n\delta) - \psi(a+\overline{n-1}\delta)},$$

wobei sowohl im Zähler als im Nenner n Summanden stehen, wenn jede Differenz als ein Summand gerechnet wird. Hier lässt sich der bekannte Satz anwenden, dass der Werth des Quotienten

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n}$$

zwischen dem grössten und kleinsten der einzelnen Quotienten

$$\frac{V_1}{W_1}, \quad \frac{V_2}{W_2}, \quad \frac{V_3}{W_3}, \cdots \frac{V_n}{W_n}$$

liegt, falls $W_1, W_2, \ldots W_n$ sämmtlich positiv sind*). Die letzte Bedingung ist hier erfüllt, wenn $\psi(x)$ eine wachsende Function von x bedeutet, und unter dieser Voraussetzung liegt nun Q zwischen dem grössten und kleinsten der Quotienten

$$\frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)}, \quad \frac{\varphi(a+2\delta) - \varphi(a+\delta)}{\psi(a+2\delta) - \psi(a+\delta)}, \text{ u. s. w.}$$

d. h. Q bildet eine Mittelgrösse zwischen den n Werthen, welche der Quotient

$$\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\psi(x+\delta) - \psi(x)} = \frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{\delta}}$$

annimmt, sobald x die n Werthe a, $a+\delta$, $a+2\delta$, ... $a+(n-1)\delta$ erhält. Bei unendlich wachsenden n wird

$$Lim \frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{\delta}} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

---

*) Der grösste der genannten Quotienten sei M, der kleinste N; man hat dann

$$M > \frac{V_1}{W_1} > N, \quad M > \frac{V_2}{W_2} > N, \ldots \quad M > \frac{V_n}{W_n} > N,$$

und durch Multiplication mit den positiven Factoren $W_1, W_2, \ldots W_n$

$$M W_1 > V_1 > N W_1, \quad M W_2 > V_2 > N W_2 \text{ u. s. w.}$$

Indem man diese Ungleichungen addirt und nachher mit $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ dividirt, erhält man

$$M > \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n} > N, \text{ w. z. b. w.}$$

und es ist nun Q eine Mittelgrösse zwischen den unendlich vielen Werthen, welche $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ annimmt, sobald x das Intervall a bis b stetig durchläuft. Daraus folgt unmittelbar, dass einer dieser Werthe, etwa der für $x = \xi = a + \vartheta(b - a)$ eintretende, dem Quotienten Q gleichkommen muss, wofern sich $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ continuirlich ändert von $x = a$ bis $x = b$. Uebrigens kann hierbei $\psi'(a)$ oder $\psi'(b)$ verschwinden, denn es wird dadurch die Continuität von $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ innerhalb des Intervalles a bis b nicht gestört.

Den für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ angegebenen Bedingungen genügt z. B. die Function

$$\psi(x) = b^p - (b - x)^p, \qquad \psi'(x) = p(b - x)^{p-1},$$

bei welcher in der That

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(x)}{p(b - x)^{p-1}}$$

continuirlich bleibt, so lange x die Stelle $x = b$ nicht überschreitet, und $\varphi'(x)$ continuirlich ist; man erhält in diesem Falle aus Nro. 6)

8) $$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b - a}{p(1 - \vartheta)^{p-1}} \varphi'(a + \vartheta[b - a]).$$

Für den speciellen Werth $p = 1$ geht diese Gleichung in die früher unter Nro. 2) entwickelte Formel über.

§. 9

Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen.

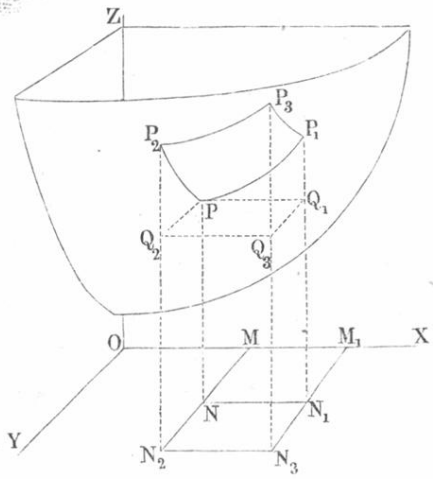
I. Wenn z als Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y betrachtet und

1) $$z = f(x, y)$$

gesetzt wird, so sind drei verschiedene Aenderungen zu unterscheiden; es kann nämlich entweder x allein geändert werden, während y constant bleibt, oder man lässt y bei constanten x sich ändern, oder endlich, man setzt voraus, das x und y gleichzeitige Aenderungen erleiden. Begreiflicherweise ändert sich z in jedem Falle, da aber diese Aenderungen verschieden sein können, so bedarf es einer Unterscheidung derselben, und zwar nennt man die erste die partielle Aenderung von z nach x, die zweite die partielle Aenderung nach y, und

die letzte die totale Aenderung des z (nach x und y). Diese drei Aenderungen kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man die Gleichung 1) als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche betrachtet, etwa wie in Fig. 11, wo $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ ist. Lässt man hier x allein um $\Delta x = MM_1$ wachsen, so rückt N nach N_1, P bewegt sich auf dem Durchschnitte der Fläche mit der Ebene PNN_1 und erhält die neue Lage P_1; der Aenderung Δx entspricht daher die partielle Aenderung

Fig. 11.



$$\Delta z_{(x)} = P_1 Q_1 = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Wenn zweitens y allein um $\Delta y = NN_2$ zunimmt, so rückt P parallel zur Ebene yz auf der Fläche fort, etwa bis P_2, und es ist die zugehörige partielle Aenderung

$$\Delta z_{(y)} = P_2 Q_2 = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Im Fall endlich x um Δx, und gleichzeitig y um Δy zunimmt, gelangt N nach N_3, P nach P_3 und es entsteht die totale Aenderung

$$\Delta z_{(x, y)} = P_3 Q_3 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Was nun die partiellen Aenderungen betrifft, so sind dieselben sehr leicht zu behandeln. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta z_{(x)}}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ist nämlich ganz so gebildet, als wäre y eine Constante, und es bedarf daher beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δx nur eines Zeichens, dass x hier als alleinige Variabele angesehen wurde. Für den Grenzwerth linker Hand, d. h. für den partiell nach x genommenen Differentialquotienten, benutzt man eins der Zeichen,

$$\frac{dz_{(x)}}{dx}, \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial x},$$

von denen das letzte am bequemsten ist; den Grenzwerth rechter

Hand, d. h. die partiell nach x derivirte Function, bezeichnet man mit $f'_x(x, y)$, und hat nun

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

oder

2) $$\partial_x z = f'_x(x, y) \cdot \partial x.$$

Dem entsprechend ist für das zweite partielle Differential

3) $$\partial_y z = f'_y(x, y) \cdot \partial y.$$

So erhält man z. B. aus

$$z = arctan \frac{y}{x}$$

nach den gewöhnlichen Regeln die beiden partiellen Differentiale

$$\partial_x z = -\frac{y}{x^2 + y^2}\partial x, \qquad \partial_y z = +\frac{x}{x^2 + y^2}\partial y.$$

Was endlich die totale Aenderung betrifft, die man schlechthin mit Δz zu bezeichnen pflegt, so kann man dieselbe in folgender Form darstellen

4) $$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y,$$

und es ist nun zu untersuchen, welchen Grenzen sich die vorkommenden Quotienten bei gleichzeitig verschwindenden Δx und Δy nähern. Beachtet man, dass der Zähler des ersten Quotienten ebenso gebildet ist, als wenn $y + \Delta y$ constant und nur x um Δx geändert wäre, so erhellt augenblicklich die Anwendbarkeit der Formel 2) des vorigen Paragraphen und dann hat man für $a = x, h = \Delta x$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y + \Delta y) + \Delta x f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y),$$

mithin statt der Gleichung 4) die folgende

5) $$\Delta z = f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\Delta y.$$

Bei verschwindenden Δx und Δy wird nun

$$Lim\, f'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$Lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y),$$

mithin aus der vorigen Gleichung

6) $$dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy$$

oder

$$7) \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

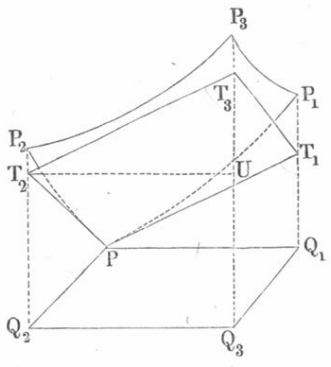
Statt der Gleichung 6) kann, den Formeln 2) und 3) zufolge, auch geschrieben werden

$$8) \qquad dz = \partial_x z + \partial_y z,$$

und es liegt hierin der Satz, dass das totale Differential einer Function gleich ist der Summe ihrer partiellen Differentiale.

Der geometrische Sinn dieses Resultates erhellt aus folgender Betrachtung. Denkt man sich in der Gleichung $z = f(x, y)$ vorerst y als constant, so hat man die Gleichung der Curve PP_1, in welcher die Fläche von der Ebene $PNN_1 \parallel xz$ geschnitten wird, daher ist $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Tangente des Winkels Q_1PT_1 (Fig. 12), welchen eine durch P an die Curve PP_1 gelegte berührende Gerade mit der x-Achse einschliesst. Aus ganz ähnlichen Schlüssen folgt, dass $\frac{\partial z}{\partial y}$ die trigonometrische Tangente des Winkels Q_2PT_2 darstellt, welchen die Tangente am Schnitte PP_2 mit der y-Achse bildet. Es gelten daher die Gleichungen

Fig. 12.



$$Q_1T_1 = \frac{\partial z}{\partial x} PQ_1, \qquad Q_2T_2 = \frac{\partial z}{\partial y} PQ_2.$$

Durch die Tangenten PT_1 und PT_2 kann man eine Ebene legen, welche von P_3Q_3 in einem Punkte T_3 geschnitten wird; das Viereck $PT_1T_3T_2$ ist dann ein Parallelogramm, und wenn man noch $T_2U \parallel PQ_1$ zieht, so erhält man die congruenten Dreiecke T_2UT_3 und PQ_1T_1, mithin $T_3U = T_1Q_1$. Dies giebt

$$Q_3T_3 = T_3U + UQ_3 = Q_1T_1 + Q_2T_2.$$

Je kleiner nun PQ_1 und PQ_2 genommen werden, um so näher rückt P_1 an T_1, P_2 an T_2, P_3 an T_3, um so genauer gelten daher auch die Beziehungen

$$Q_1 P_1 = \frac{\partial z}{\partial x} P Q_1, \qquad Q_2 P_2 = \frac{\partial z}{\partial y} P Q_2,$$
$$Q_3 P_3 = Q_1 P_1 + Q_2 P_2;$$

diese sind identisch mit den Gleichungen 2), 3) und 8), weil ein gegen die Null convergirendes PQ_1 mit dx, ebenso PQ_2 mit dy bezeichnet werden muss und Q_1P_1, Q_2P_2, Q_3P_3 die entsprechenden Zunahmen $\partial_x z$, $\partial_y z$, dz darstellen. Mit einem Worte: je näher die Punkte P_1, P_2, P_3 dem Punkte P liegen, um so eher ist es erlaubt, P_1 und P_2 als Punkte der Tangenten PT_1, PT_2, und P_3 als einen Punkt der anschliessenden Ebene T_1PT_2 zu betrachten. In der That wird sich in Cap. III. zeigen, dass diese Ebene die Fläche berührt.

II. Bei Functionen mehrerer Variabelen gestaltet sich die Sache sehr ähnlich. Aus

$$u = F(x, y, z)$$

erhält man für die totale Differenz

$$\Delta u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\Delta u = \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x} \Delta x$$
$$+ \frac{F(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y} \Delta y$$
$$+ \frac{F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z.$$

Unter Anwendung der Formel 2) in §. 8 wird hieraus, wenn ϑ und η positive ächte Brüche bezeichnen,

$$\Delta u = F'_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \,.\, \Delta x$$
$$+ F'_y(x, y + \eta \Delta y, z + \Delta z) \,.\, \Delta y$$
$$+ \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z$$

und durch Uebergang zur Grenze

9) $$du = F'_x(x, y, z) \,.\, dx + F'_y(x, y, z) \,.\, dy + F'_z(x, y, z) \,.\, dz$$

oder

10) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$
$$= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u.$$

Diese Betrachtungen sind leicht auf beliebig viele Variabele auszudehnen und führen zu dem allgemeinen Theoreme: **Das totale Differential einer Function beliebig vieler Variabelen ist die Summe der partiellen Differentiale jener Function.**

§. 10.

Differentiation unentwickelter Functionen.

I. Besteht zwischen zwei Variabelen x und y eine Gleichung, die man immer auf die Normalform

1) $$f(x, y) = 0$$

bringen kann, so sind nicht beide Variabele willkührlich; denn durch Auflösung der Gleichung nach y würde man ein Resultat von der Form

$$y = \varphi(x)$$

erhalten, wo nun y von x abhängig ist. Lässt sich diese Reduction ausführen, so kann auch

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

nach den früheren Regeln abgeleitet werden; dies geht jedoch nicht mehr, wenn die Gleichung 1) unauflösbar, mithin y eine unentwickelte (implicite) Function von x ist. Man hilft sich dann auf folgende Weise.

Aus der Gleichung 1) erhält man zunächst, weil sie für alle x und die zugehörigen y bestehen soll,

2) $$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0;$$

Die Differenz der Gleichungen 2) und 1), dividirt durch Δx, liefert weiter

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0.$$

Auf der linken Seite kann man dieselbe Transformation vornehmen, die im vorigen Paragraphen benutzt wurde, nämlich

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

und hier gelten fast wörtlich dieselben Schlüsse wie dort; man erhält beim Grenzübergange

3) $$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Zu demselben Resultate gelangt man unmittelbar, sobald man in Formel 6) des vorigen Parapraphen $z = 0$ setzt und die entstehende Gleichung durch dx dividirt; in der That ist es auch für die Untersuchungen des §. 9 vollkommen gleichgültig, ob man x, y, z etc. als

willkührlich oder als von einander abhängig betrachtet. Aus Nro. 3) folgt nun

4) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

oder, wie man häufig kürzer schreibt,

5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Die hiermit für $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ gewonnene Formel enthält zwar noch y, welches man im Allgemeinen nicht angeben, dessen Werth aber gefunden werden kann, sobald x einen speciellen Zahlwerth bekommt; dann wird nämlich die Gleichung $f(x, y) = 0$ zu einer numerischen Gleichung mit der einen Unbekannten y, und jede solche Gleichung kann mindestens durch Probiren aufgelöst werden.

Wäre z. B. die gegebene Bedingungsgleichung:

$$f(x, y) = y^5 x^3 - 2y^4 x^2 + 3y - 6x = 0,$$

die in Beziehung auf y nicht lösbar ist, so folgt:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3$$

und mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6}{5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3}.$$

Für $x = 1$ z. B. geht die obige Bedingungsgleichung in die numerische Gleichung über:

$$y^5 - 2y^4 + 3y - 6 = 0,$$

deren einzige reelle Wurzel $y = 2$ ist; dem Werthe $x = 1$ entspricht also $\varphi(1) = 2$ und

$$\varphi'(1) = -\frac{3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^4 - 6}{5 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 3} = -\frac{26}{19}.$$

Ebenso würde man für jeden anderen numerischen Werth von x die zugehörigen Zahlwerthe von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ aufsuchen können.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$4y^3 - 3y + \sin x = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 12y^2 - 3,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1-4y^2)}.$$

Der vorliegende Fall gestattet eine Probe. Die Wurzel der obigen Gleichung ist nämlich $y = \sin \frac{1}{3} x$, wie man mittelst der goniometrischen Formel:

$$4\sin^3 A - 3\sin A + \sin 3A = 0$$

leicht finden wird. Es müsste also

$$\frac{\cos x}{3(1 - 4\sin^2 \frac{1}{3} x)} = \frac{d(\sin \frac{1}{3} x)}{dx}$$

sein, und dies bestätigt sich, wenn man die bekannte Formel

$$\cos 3A = \cos A\,(1 - 4\sin^2 A)$$

für $A = \frac{1}{3} x$ anwendet und andererseits $\sin \frac{1}{3} x$ auf gewöhnliche Weise differenzirt.

II. Bei Functionen von drei und mehr Variabelen gestaltet sich die Sache ganz ähnlich. Besteht z. B. zwischen den drei Variabelen x, y, z die Bedingungsgleichung

6) $$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder kürzer} \quad F = 0,$$

so würde durch Reduction auf z ein Resultat von der Form

7) $$z = \psi(x, y)$$

zum Vorschein kommen, und dann hätte es keine Schwierigkeit, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ direct zu entwickeln. Ohne jene Reduction vorzunehmen, kann man aber auch folgendermaassen verfahren. Nach Nro. 9) des vorigen Paragraphen ist für $u = 0$

$$0 = F'_x \,.\, dx + F'_y \,.\, dy + F'_z \,.\, dz$$

oder

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz;$$

weil ferner z von x und y abhängt, so hat man auch nach Nro. 7) in §. 9

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

mithin, wenn dieser Werth in die vorige Gleichung substituirt und mit dx dividirt wird,

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx}.$$

Da x und y von einander unabhängig sind, so hängt auch dy nicht von dx ab, folglich ist $\frac{dy}{dx}$ ein Quotient, dessen Zähler und Nenner ganz beliebige (nur gegen die Null convergirende) Grössen sind, und der ebendesshalb jeden beliebigen Werth haben kann; in der That würde es frei stehen, $dy = q\,dx$ zu setzen, wo q irgend eine willkührliche Grösse bezeichnet. Unter diesen Umständen ist die vorige Gleichung so lange unmöglich, als nicht der Inhalt jeder Parenthese für sich $= 0$ ist; dies giebt

8) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man viel kürzer durch folgende Ueberlegung. Wenn $\frac{\partial z}{\partial x}$ gesucht wird, so gilt y als Constante und daher kann für diesen Zweck die Gleichung $F = 0$ so angesehen werden, als enthielte sie nur die unabhängige Variabele x und die abhängige Variabele z; es ist folglich

$$\frac{\partial F}{\partial x}\partial x + \frac{\partial F}{\partial z}\partial z = 0,$$

und hieraus erhält man die erste der Formeln in Nro. 8). Die zweite Formel findet sich durch die analoge Bemerkung, dass bei der Entwickelung von $\frac{\partial z}{\partial y}$ keine Rücksicht auf x zu nehmen ist.

Cap. II.

Mehrfache Differentiationen.

§. 11.

Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Da im Allgemeinen der Differentialquotient einer Function

$$y = f(x)$$

wiederum eine Function von x ist, so kann die Operation des Differenzirens auch auf diese neue Function angewendet werden und dann entsteht der Differentialquotient des Differentialquotienten, der sogen. zweite Differentialquotient. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zum dritten, vierten u. s. w. Differentialquotienten. So erhält man z. B. von $\frac{2}{3} x \sqrt{x}$ als ersten Differentialquotienten:

$$\frac{d\,(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}})}{d\,x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},$$

als zweiten:

$$\frac{d\,(x^{\frac{1}{2}})}{d\,x} = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

als dritten:

$$\frac{d\,(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}})}{d\,x} = -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\,x\sqrt{x}} \text{ u. s. w.}$$

Wie man sieht, hat eine solche successive Entwickelung der Differentialquotienten höherer Ordnungen nicht die mindeste Schwierigkeit, und es bedarf daher nur noch einiger Worte über die richtige Bezeichnung derselben.

Da schon früher der Differentialquotient oder die derivirte Function von $f(x)$ mit $f'(x)$ bezeichnet wurde, so liegt es nahe, für die

weiteren Differentialquotienten oder derivirten Functionen von $f(x)$ die Symbole $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. zu benutzen; hiernach ist

1) $$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)\,,\quad \frac{df'(x)}{dx} = f''(x)\,,\quad \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x) \text{ u. s. w.}$$

überhaupt allgemein, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

2) $$\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x),$$

wobei $f^{(0)}(x)$ für $f(x)$ zu rechnen ist.

Eine ganz ähnliche Bezeichnung wird auch in Beziehung auf y gebraucht; man setzt dann

3) $$\frac{dy}{dx} = y',\ \frac{dy'}{dx} = y'',\ \frac{dy''}{dx} = y''' \text{ u. s. w.}$$

mithin ist

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

das symbolisch ausgedrückte Resultat einer n maligen Differentiation der Gleichung 1).

Nicht selten bezeichnet man einen Differentialquotienten durch ein vorgesetztes D z. B.

$$D(x^3) = 3x^2, \qquad D\sin x = \cos x;$$

die successiven Differentialquotienten von y müssen dann folgendermaassen geschrieben werden:

$$Dy\,,\ DDy\,,\ DDDy \text{ u. s. w.}$$

Da jedoch ein vielmaliges Hinsetzen von D weder bequem noch übersichtlich ist, so hat man sogen. Wiederholungsindices eingeführt und schreibt

$$Dy,\ D^2y,\ D^3y \text{ u. s. w.,}$$

also allgemein

$$D^n y = D^n f(x).$$

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass hier n keinen Potenzexponenten von D, sondern nur die $n$malige Anwendung der Operation D (der Differentiation) bedeuten soll.

Die zwar umständlichste aber consequenteste Bezeichnung ergiebt sich, wenn man in Nr. 3) jede Gleichung in die nächstfolgende substituirt. So ist zuvörderst

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

doch lässt sich dies noch abkürzen. Unter der Voraussetzung nämlich, dass x die unabhängige Variabele ist, bedeutet dx einen gegen

die Null convergirenden, im Uebrigen aber willkührlichen Zuwachs des x, den man z. B. dadurch bilden kann, dass man $\Delta x = \frac{1}{\omega}$ setzt und ω das Gebiet der natürlichen Zahlen durchlaufen lässt. Ebendesswegen ist dx nicht von x abhängig, sondern constant in Beziehung auf x, wie es sich sonst auch ändern möge. Dagegen ist dy kein willkührlicher Zuwachs des y, sondern von x abhängig $[dy = f'(x) \,.\, dx]$, mithin besitzt der Bruch $\frac{dy}{dx}$ einen variabelen Zähler, aber einen im obigen Sinne constanten Nenner und folglich ist nun

$$y'' = \frac{d\,dy}{dx \,.\, dx}.$$

Im Zähler benutzt man zur Abkürzung den Wiederholungsindex, im Nenner ist $dx \,.\, dx$ das Quadrat von dx, wofür man $(dx)^2$ oder kürzer dx^2 zu schreiben pflegt; demnach hat man

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$y''' = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d\,d^2y}{dx \,.\, dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

Für den $n$ten Differentialquotienten von $y = f(x)$ gelten also folgende Bezeichnungen

$$\frac{d^ny}{dx^n} \quad = D^ny \quad = y^{(n)}$$

$$= \frac{d^nf(x)}{dx^n} = D^nf(x) = f^{(n)}(x),$$

wovon man in jedem einzelnen Falle die gerade bequemste wählt.

In dem Vorigen gilt der $n$te Differentialquotient immer als das Resultat von n nach einander ausgeführten Differentiationen, und dem entsprechend haben wir bis jetzt keine andere Definition desselben als

$$D^ny = D(D^{n-1}y) \text{ oder } f^{(n)}(x) = Lim\,\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x};$$

man kann aber fragen, nach welchem Gesetze $f^{(n)}(x)$ mit der ursprünglichen Function $f(x)$ zusammenhängt, oder welche Operationen mit $f(x)$ vorgenommen werden müssen, wenn man daraus sofort $f^{(n)}(x)$ herleiten will, ohne die zwischenliegenden Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(n-1)}(x)$ zu berechnen. Da $f'(x)$ der Grenz-

werth des ersten Differenzenquotienten ist, so lässt sich vermuthen, dass $f^{(n)}(x)$ der Grenzwerth des $n$ten Differenzenquotienten sein werde; dies wollen wir genauer untersuchen.

Bezeichnen wir Δx kurz mit h, so ist der erste Differenzenquotient von $f(x)$

$$4) \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

daraus erhalten wir den zweiten Differenzenquotienten, wenn wir rechter Hand x um h wachsen lassen, von dem so gebildeten Ausdrucke den ungeänderten Bruch abziehen und den Rest durch $\Delta x = h$ dividiren; es ist also

$$\frac{\Delta \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}$$

oder kürzer

$$5) \qquad \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Durch die nämlichen Operationen gelangt man zu dem dritten Differenzenquotienten

$$6) \qquad \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3},$$

und indem man auf diese Weise fortgeht, bemerkt man leicht, dass der $n$te Differenzenquotient unter folgender Form enthalten ist

$$7) \qquad \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$$

$$= \frac{f(x+nh) - C_1 f(x+\overline{n-1}h) + C_2 f(x+\overline{n-2}h) - \cdots \pm f(x)}{h^n},$$

worin C_1, C_2, C_3 etc. gewisse Zahlencoefficienten bedeuten. Diese hängen zwar von n, nicht aber von der speciellen Natur der Function $f(x)$ ab, sie lassen sich daher bestimmen, wenn man $f(x)$ so wählt, dass der $n$te Differenzenquotient von $f(x)$ unmittelbar, d. h. ohne Anwendung der Formel 7) entwickelt werden kann. Die passendste Wahl dieser Art ist $f(x) = a^x$; man hat dann

$$\frac{\Delta a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

$$\frac{\Delta^2 a^x}{\Delta x^2} = \frac{a^{x+h}\frac{a^h-1}{h} - a^x \frac{a^h-1}{h}}{h} = a^x \left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2$$

. . . . . .

$$\frac{\Delta^n a^x}{\Delta x^n} = a^x \left(\frac{a^h-1}{h}\right)^n$$

mithin aus Formel 7) nachdem man Δx^n gegen h^n, und beiderseits a^x gestrichen hat,

$$(a^h - 1)^n = a^{nh} - C_1 a^{(n-1)h} + C_2 a^{(n-2)h} - \cdots \pm 1.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Coefficienten C_1, C_2, C_3 etc. mit den Binomialcoefficienten $(n)_1$, $(n)_2$, $(n)_3$ etc. identisch sind; die allgemeine Formel 7) lautet daher

8) $$\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \frac{f(x+nh) - (n)_1 f(x+\overline{n-1}\,h) + (n)_2 f(x+\overline{n-2}\,h) - \cdots}{h^n}.$$

Um nun zu entscheiden, welchen Grenzen sich die in 5), 6) und 8) verzeichneten Ausdrücke nähern, falls $\Delta x = h$ gegen die Null convergirt, setzen wir für den Augenblick

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x)$$

und erhalten

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x) + \varrho,$$

wo ϱ gleichzeitig mit h die Null zur Grenze hat. Aus der vorhergehenden Gleichung ergiebt sich

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

mithin ist nun

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \varrho = \frac{\Delta f'(x)}{\Delta x} + \varrho$$

und durch Uebergang zur Grenze

9) $$Lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \frac{d f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Setzen wir ferner

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \psi(x),$$

so haben wir

$$\frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x) + \varrho$$
$$= \frac{f'(x+2h) - 2f'(x+h) + f'(x)}{h^2} + \varrho$$
$$= \frac{\Delta^2 f'(x)}{\Delta x^2} + \varrho;$$

durch Uebergang zur Grenze wird hieraus, wenn man von der Gleichung 9) in der Weise Gebrauch macht, dass man f' für f schreibt,

10) $$Lim \frac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3} = \frac{d f''(x)}{d x} = f'''(x).$$

Der weitere Fortgang dieser Schlüsse ist leicht zu übersehen und führt zu der allgemeinen Formel

11) $$Lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x),$$

womit die aufgestellte Vermuthung ihre Bestätigung findet.

Auch in diesen successiven Differentiationen kann, wenigstens bis zu gewisser Ordnung, ein geometrischer Sinn liegen. Denken wir uns z. B. $f(x)$ als die über der Abscisse x stehende Fläche einer ebenen Curve, so ist $f'(x)$ die zur Abscisse x gehörende Ordinate, und $f''(x)$ die trigonometrische Tangente des entsprechenden Berührungswinkels. Hiernach lässt sich das anfangs erwähnte Beispiel leicht interpretiren, und zwar gelten die erwähnten Beziehungen für eine Parabel, deren Parameter $= 1$ ist.

§. 12.

Höhere Differentialquotienten der einfachsten Functionen.

I. Durch fortgesetzte Anwendung der für die Potenz geltenden Differentiationsregel findet man sehr leicht

$$D(x^\mu) = \mu x^{\mu-1},$$
$$D^2(x^\mu) = \mu(\mu-1) x^{\mu-2},$$
$$D^3(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2) x^{\mu-3},$$

und überhaupt, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,

1) $$D^n(x^\mu) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1]) x^{\mu-n}.$$

Auf gleiche Weise kann die Differentiation der allgemeineren Potenz $(a + bx)^{\mu}$ ausgeführt werden; das Resultat lautet

2) $$D^n(a+bx)^{\mu}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])b^n(a+bx)^{\mu-n}.$$

Ist μ eine ganze positive Zahl, so wird der μte Differentialquotient constant, mithin haben alle folgenden Differentialquotienten den gemeinschaftlichen Werth Null.

Für $\mu = -1$ und für $\mu = -\frac{1}{2}$ ergeben sich aus Nr. 2) die häufig vorkommenden specielleren Formeln

3) $$D^n \frac{1}{a+bx} = \frac{(-1)^n\, 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n\,.\,b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

4) $$D^n \frac{1}{\sqrt{a+bx}} = \frac{(-1)^n 1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)b^n}{2^n\,(a+bx)^n\,\sqrt{a+bx}}.$$

II. Bezeichnet M den Modulus des Systems, worin $log\, x$ genommen wird, so hat man

$$D\, log\, x = \frac{M}{x},$$

mithin durch beiderseitige $(n-1)$malige Differentiation

$$D^n\, log\, x = M D^{n-1} \frac{1}{x}.$$

Der Werth des rechts stehenden Differentialquotienten lässt sich aus Nr. 3) ableiten, wenn man $a = 0$, $b = 1$ und $n - 1$ für n setzt; man erhält

5) $$D^n\, log\, x = M \frac{(-1)^{n-1}\, 1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}{x^n}.$$

Auf gleiche Weise gelangt man zu der allgemeineren Formel

6) $$D^n\, log\,(a+bx) = M \frac{(-1)^{n-1}\, 1\,.\,2\ldots(n-1)\,b^n}{(a+bx)^n}.$$

III. Sehr einfach gestaltet sich die successive Differentiation der Exponentialgrösse; es ist nämlich

$$Da^x = a^x\, la\,,\ D^2 a^x = a^x\,(la)^2\,,\ D^3\, a^x = a^x\,(la)^3, \ldots$$

daher allgemein

7) $$D^n\, a^x = a^x\,(la)^n.$$

Für $a = e^{\beta}$, woraus $la = \beta$ folgt, hat man

8) $$D^n\, e^{\beta x} = \beta^n\, e^{\beta x}.$$

IV. In Beziehung auf den Sinus gelten folgende unmittelbar verständliche Gleichungen

$$D \sin x = + \cos x = \sin (\tfrac{1}{2}\pi + x),$$
$$D^2 \sin x = - \sin x = \sin (\tfrac{2}{2}\pi + x),$$
$$D^3 \sin x = - \cos x = \sin (\tfrac{3}{2}\pi + x),$$
$$D^4 \sin x = + \sin x = \sin (\tfrac{4}{2}\pi + x),$$

u. s. w.

die allgemeine Formel lautet demgemäss

9) $$D^n \sin x = \sin \left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

V. Für den Cosinus gilt eine sehr ähnliche Rechnung, aus der man findet

10) $$D^n \cos x = \cos \left(\frac{n}{2}\pi + x\right).$$

Weit verwickelter gestalten sich die höheren Differentialquotienten von $\sec x$, $\tan x$, $\csc x$, $\cot x$, $\arcsin x$ und $\arctan x$; bevor wir etwas Genaueres darüber angeben können, müssen wir erst die Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen untersuchen.

§. 13.

Die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen.

I. Sind u und v Functionen der unabhängigen Variabelen x, ferner a und b constante Grössen, so hat man nach §. 6, Nr. 3)

$$D(au + bv) = a\,Du + b\,Dv;$$

hieraus folgt, wenn beiderseits weiter differenzirt wird,

$$D^2(au + bv) = a\,D^2u + b\,D^2v,$$
$$D^3(au + bv) = a\,D^3u + b\,D^3v,$$

und allgemein

1) $$D^n(au + bv) = a\,D^nu + b\,D^nv.$$

Nach dieser Regel ist z. B. der Ausdruck $\frac{1}{1 - x^2}$ sehr leicht zu differenziren, wenn man die identische Gleichung

$$\frac{1}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right\}$$

beachtet; mit Hülfe von Formel 3) des vorigen Paragraphen erhält man nämlich

$$D^n \frac{1}{1 - x^2} = 3 \cdot 4 \ldots n \left\{\frac{1}{(1 - x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1 + x)^{n+1}}\right\}.$$

II. Die Regel für die Differentiation eines Productes aus zwei veränderlichen Factoren liefert, mehrmals nach einander angewendet, folgende Gleichungen

$$D(uv) = u \,.\, Dv + Du \,.\, v$$
$$D^2(uv) = u \,.\, D^2v + 2\,Du \,.\, Dv + D^2u \,.\, v$$
$$D^3(uv) = u \,.\, D^3v + 3\,Du \,.\, D^2v + 3D^2u \,.\, Dv + D^3u \,.\, v.$$

Hieraus ersieht man, dass der $n$te Differentialquotient folgende Gestalt besitzen muss

2) $$D^n(uv) = A_0 u \,.\, D^n v + A_1\, Du \,.\, D^{n-1}v + A_2 D^2 u \,.\, D^{n-2}v + \cdots$$
$$\cdots\cdots + A_{n-1} D^{n-1} u \,.\, Dv + A_n D^n u \,.\, v,$$

worin A_0, A_1, A_2, $\ldots$ A_n gewisse noch unbekannte Zahlencoefficienten bedeuten, die nicht von der Natur der Functionen u und v, sondern nur von der Anzahl der ausgeführten Differentiationen, d. h. von n abhängen. Wählt man demnach u und v im speciellen Falle so, dass die beiderseits in Nro. 2) angedeuteten Differentiationen auf gewöhnlichem Wege ausführbar sind, so erhält man eine Bedingungsgleichung für jene Coefficienten. Diese Bemerkung dient zur Bestimmung von A_0, A_1, $\ldots$ A_n. Wir setzen nämlich

$$u = e^{\beta x}, \quad v = e^x, \quad \text{mithin } uv = e^{(1+\beta)x},$$

woraus für ganze positive p, q und n folgt

$$D^p u = \beta^p e^{\beta x}, \quad D^q v = e^x, \quad D^n(uv) = (1+\beta)^n e^{(1+\beta)x};$$

indem wir diese Werthe für die Gleichung 2) benutzen und am Ende den beiderseits gemeinschaftlichen Factor $e^{\beta x} e^x = e^{(1+\beta)x}$ weglassen, gelangen wir zu der Gleichung

$$(1+\beta)^n = A_0 + A_1\beta + A_2\beta^2 + \cdots\cdots + A_{n-1}\beta^{n-1} + A_n\beta^n.$$

Hieraus erkennt man sofort, dass die Coefficienten A_0, A_1, A_2 etc. die sogenannten Binomialcoefficienten des Exponenten n sind; demzufolge gilt für die n-malige Differentiation eines aus zwei variabelen Factoren bestehenden Productes die Formel

3) $$D^n(uv) = (n)_0\, u \,.\, D^n v + (n)_1\, Du \,.\, D^{n-1}v + (n)_2\, D^2u \,.\, D^{n-2}v + \cdots\cdots$$

Man kann dafür auch schreiben

4) $$D^n(uv) = (n)_0\, u^{(0)} v^{(n)} + (n)_1\, u' v^{(n-1)} + (n)_2\, u'' v^{(n-2)} + \cdots\cdots,$$

wobei $u^{(0)}$ für u zu rechnen ist. Die rechte Seite hat die Form des binomischen Satzes und man könnte daher symbolisch schreiben,

$$D^n(uv) = (u+v)^{(n)},$$

nur muss man sich in diesem Falle erinnern, dass nach geschehener

binomischer Entwickelung auf der rechten Seite jeder Potenzexponent durch einen gleichhohen Wiederholungsexponenten zu ersetzen ist.

Beispielweis sei $u = lx$, $v = \frac{1}{x}$; die Formel 3) giebt dann nach gehöriger Reduction

$$D^n\left(\frac{lx}{x}\right) = \frac{(-1)^n\, 1\,.\,2\,\ldots\,n}{x^{n+1}}\left[lx - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right].$$

§. 14.

Anwendungen der vorigen allgemeinen Formeln.

I. Bezeichnet man $sec\,x$ kurz mit v, so ist identisch

1) $$cos\,x\,.\,v = 1,$$

mithin durch n-malige Differentiation, wobei die Formel 4) für $u = cos\,x$ in Anspruch genommen wird,

$$(n)_0\, cos\,x\,.\,v^{(n)} - (n)_2\, cos\,x\,.\,v^{(n-2)} + (n)_4\, cos\,x\,.\,v^{(n-4)} - \cdots$$
$$- (n)_1\, sin\,x\,.\,v^{(n-1)} + (n)_3\, sin\,x\,.\,v^{(n-3)} - (n)_5\, sin\,x\,.\,v^{(n-5)} + \cdots$$
$$= 0;$$

hieraus folgt, indem man $v^{(n)}$ als Unbekannte ansieht,

2) $$v^{(n)} = [(n)_1\, v^{(n-1)} - (n)_3\, v^{(n-3)} + (n)_5\, v^{(n-5)} - \cdots]\, tan\,x$$
$$+ (n)_2\, v^{(n-2)} - (n)_4\, v^{(n-4)} + (n)_6\, v^{(n-6)} - \cdots.$$

Da man $v^{(o)} = sec\,x$ und $v' = sec\,x\,.\,tan\,x$ kennt, so dient diese Gleichung, wenn der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ etc. genommen wird, zur successiven Berechnung von v'', v''' etc. Doch würde es nicht leicht sein, auf diesem Wege das allgemeine Bildungsgesetz von $v^{(n)}$ zu entdecken.

II. Dasselbe Verfahren passt auf die Tangente. Aus $v = tan\,x$ folgt nämlich

3) $$cos\,x\,.\,v = sin\,x$$

und nach der obigen Methode

4) $$v^{(n)} = \frac{sin\,(\frac{1}{2}n\pi + x)}{cos\,x} + [(n)_1\, v^{(n-1)} - (n)_3\, v^{(n-3)} + \cdots]\, tan\,x$$
$$+ (n)_2\, v^{(n-2)} - (n)_4\, v^{(n-4)} + \cdots.$$

Die Cosecante und die Cotangente liefern ähnliche Formeln, deren Entwickelung dem Leser überlassen bleiben möge.

III. Setzt man

5) $$U = arcsin\,x,$$

so wird

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad U'' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}};$$

statt der letzten Gleichung kann man schreiben

$$(1 - x^2)\, U'' - x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

oder

$$(1 - x^2)\, U'' - x\, U' = 0.$$

Durch n-malige Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}(n)_0 (1 - x^2)\, U^{(n+2)} - (n)_1\, 2\, x\, U^{(n+1)} - (n)_2\, 2 \,.\, 1\, U^{(n)} \\ - (n)_0\, x\, U^{(n+1)} - (n)_1 \,.\, 1\, U^{(n)}\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder, wenn $U^{(n+2)}$ als Unbekannte angesehen wird,

6) $$U^{(n+2)} = \frac{(2n + 1)\, x\, U^{(n+1)} + n^2\, U^{(n)}}{1 - x^2}.$$

Von U' und U'' ausgehend, erhält man jetzt U''', U^{IV} etc., indem man der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ etc. setzt.

Uebrigens kann man irgend einen höheren Differentialquotienten von $U = \arcsin x$ auch direct vollständig entwickeln, nur ist dann die Formel weniger einfach. Man hat nämlich

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}};$$

Hier lässt sich, wenn beiderseits n-mal differenzirt wird, rechter Hand zuerst die Formel 4) in §. 13 anwenden und nachher jeder Differentialquotient von u oder v nach Formel 4) in §. 12 entwickeln. Nach einigen, von selbst sich darbietenden Reductionen gelangt man zu folgender Formel

7) $$D^{n+1} \arcsin x$$

$$= \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n - 1)}{2^n (1-x)^n \sqrt{1-x^2}} \left\{1 - \frac{1\,(n)_1}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1 \,.\, 3\,(n)_2}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5\,(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots\ldots \right\}$$

IV. Setzen wir

8) $$V = \arctan x,$$

so ist

$$V' = \frac{1}{1 + x^2} \text{ oder } (1 + x^2)\, V' = 0;$$

durch n-malige Differentiation der letzten Gleichung erhalten wir

$$(n)_0(1+x^2)\,V^{(n+1)} + (n)_1\,2x\,V^{(n)} + (n)_2\,2\,.\,1\,V^{(n-1)} = 0,$$

oder

$$9)\qquad V^{(n+1)} = -\frac{2nxV^{(n)} + n(n-1)V^{(n-1)}}{1+x^2}.$$

Für $n = 1, 2, 3$ etc. ergeben sich hieraus die successiven Differentialquotienten V'', V''' u. s. w.

Auch hier kann $V^{(n)} = D^n \arctan x$ noch auf andere Weise direct entwickelt werden. Da nämlich aus Nro. 8)

$$x = \tan V, \qquad \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 V$$

folgt, so lässt sich der erste Differentialquotient in der Form

$$10)\qquad DV = \cos^2 V$$

darstellen; der Differentialquotient hiervon ist

$$D^2V = 2\cos V\,.\,D\cos V = -2\cos V \sin V\,.\,DV$$

oder, wenn statt DV wieder sein voriger Werth gesetzt wird,

$$D^2V = -2\cos^3 V \sin V = -\cos^2 V \sin 2V.$$

Eine fernere Differentiation giebt

$$\begin{aligned} D^3V &= -2(\cos^2 V \cos 2V - \cos V \sin V \sin 2V)\,DV \\ &= -2\cos^3 V(\cos V \cos 2V - \sin V \sin 2V) \\ &= -2\cos^3 V \cos 3V; \end{aligned}$$

differenzirt man von Neuem, so folgt

$$\begin{aligned} D^4V &= +2\,.\,3(\cos^3 V \sin 3V + \cos^2 V \sin V \cos 3V)\,DV \\ &= +2\,.\,3\cos^4 V(\cos V \sin 3V + \sin V \cos 3V) \\ &= +2\,.\,3\cos^4 V \sin 4V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^5V &= +2\,.\,3\,.\,4(\cos^4 V \cos 4V - \cos^3 V \sin V \sin 4V)\,DV \\ &= +2\,.\,3\,.\,4\cos^5 V(\cos V \cos 4V - \sin V \sin 4V) \\ &= +2\,.\,3\,.\,4\cos^5 V \cos 5V. \end{aligned}$$

Den weiteren Gang dieser sehr einförmigen Rechnung übersieht man leicht; es ist daher

$$11)\qquad D^{2k}V = (-1)^k\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(2k-1)\cos^{2k} V \sin 2kV,$$

$$12)\qquad D^{2k+1}V = (-1)^k\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(2k)\cos^{2k+1} V \cos(2k+1)V.$$

Beide Formeln lassen sich in eine einzige zusammenziehen, und man vermeidet damit die Unbequemlichkeit, bei der Angabe von $D^n V$ die Fälle eines geraden und eines ungeraden n unterscheiden zu müssen. Setzt man nämlich

$$W = \arctan\frac{1}{x},$$

so ist $V = \frac{1}{2}\pi - W$, mithin

$$\sin 2k\,V = \sin(k\pi - 2k\,W) = (-1)^{k+1}\sin 2k\,W,$$

$$\cos(2k+1)\,V = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi - (2k+1)\,W\right) = (-1)^k \sin(2k+1)\,W,$$

und die Formeln 11) und 12) werden jetzt

$$D^{2k}V = -1 \cdot 2 \ldots (2k-1)\sin^{2k} W \sin 2k\,W,$$

$$D^{2k+1}V = +1 \cdot 2 \ldots (2k)\sin^{2k+1} W \sin(2k+1)\,W,$$

d. i. überhaupt

$$D^n V = (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\sin^n W \sin n W.$$

Setzt man endlich die Werthe von V und W wieder ein, indem man berücksichtigt, dass

$$\sin W = \cos V = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, so gelangt man zu folgender Formel

13) $$D^n \arctan x = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{\sqrt{(1+x^2)^n}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right).$$

Allgemeinere Untersuchungen über die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen und einige damit verwandte Probleme werden wir im zweiten Bande mittheilen.

§. 15.

Successive Differentiation der Functionen mehrerer Variabelen.

Die wiederholte Differentiation einer Function mehrerer unabhängiger Variabelen kann entweder partiell in Beziehung auf die eine oder andere Variabele geschehen, oder total in Beziehung auf alle Variabelen zugleich; die Untersuchung trennt sich daher wie früher (§. 9) in zwei Theile.

I. Wird eine Function

1) $$z = f(x, y)$$

zuerst partiell in Beziehung auf x, und der entstandene Differentialquotient partiell nach y differenzirt, so entsteht der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\partial y},$$

welchen man kürzer mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x}$$

oder auch mit

$$D_y D_x z = D_y D_x f(x, y)$$

bezeichnet; durch die Stellung von ∂y und ∂x oder von D_y und D_x giebt man gleichzeitig die Reihenfolge der Differentiationen zu erkennen, wobei immer von rechts nach links zu lesen ist. Dem entsprechend bedeutet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} \quad \text{oder} \quad D_x D_y z = D_x D_y f(x, y),$$

dass die Gleichung 1) zuerst partiell in Beziehung auf y, und das erhaltene Resultat partiell nach x differenzirt worden ist.

Zuerst entsteht nun die Frage, ob $D_y D_x z$ und $D_x D_y z$ von einander verschieden sind oder nicht; hierüber lässt sich auf folgende Weise entscheiden. Aus der Formel 2) in §. 8 oder

2) $$F(u + p) = F(u) + p F'(u + \vartheta p)$$

erhalten wir zunächst, wenn wir in $f(x, y)$ nur x um h ändern,

$$f(x + h, y) = f(x, y) + h f'_x(x + \vartheta h, y),$$

wobei der Differentialquotient partiell in Beziehung auf x genommen werden muss, weil y constant geblieben ist; aus demselben Grunde hängt ϑ nicht von y ab. Bezeichnen wir zur Abkürzung f'_x mit φ, so ist

$$\varphi(x + \vartheta h, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Daraus folgt weiter durch Aenderung des y um k

$$\frac{\varphi(x + \vartheta h, y + k) - \varphi(x + \vartheta h, y)}{k}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)}{h} - \dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}}{k}$$

$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{k h}$$

Linker Hand kann wieder die Formel 2) für $F = \varphi$, $u = y$, $p = k$ angewendet werden und es ist dann

$$= \frac{\varphi'_y(x + \vartheta h, y + \eta k)}{} = \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{k h}$$

Gehen wir nun zur Grenze für gleichzeitig verschwindende h und k über, so erhalten wir linker Hand den Ausdruck $\varphi'_y(x, y)$, und dieser ist identisch mit

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x};$$

rechter Hand schreiben wir Δx und Δy für h und k, und haben zusammen

3)
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x}$$
$$= Lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta y \, \Delta x}$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das gleichzeitige Verschwinden von Δx und Δy bezieht.

Andererseits ist, wenn in $f(x, y)$ zuerst y allein um k geändert wird, und λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet,

$$f(x, y + k) = f(x, y) + k f'_y(x, y + \lambda k);$$

zur Abkürzung setzen wir ψ für f'_y und haben

$$\psi(x, y + \lambda k) = \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Hieraus ziehen wir ferner durch Aenderung des x

$$\frac{\psi(x + h, y + \lambda k) - \psi(x, y + \lambda k)}{h}$$
$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)}{h k}$$

oder, unter μ einen positiven ächten Bruch verstanden,

$$\psi'_x(x + \mu h, y + \lambda k)$$
$$= \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)}{h k}$$

Beim Uebergange zur Grenze für verschwindende $h = \Delta x$ und $k = \Delta y$ erscheint linker Hand der Ausdruck

$$\psi'_x(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y},$$

mithin ist jetzt

4)
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$
$$= Lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)}{\Delta x \, \Delta y}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 3) und 4) unterscheiden sich nur durch die Anordnung der Summanden im Zähler und der Factoren im Nenner, sie sind daher von gleichem Werthe; daraus folgt die Gleichung

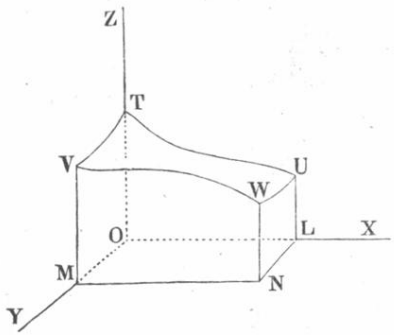
$$5) \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

welche sagt, dass es für das Endresultat gleichgültig ist, in welcher Ordnung die beiden partiellen Differentiationen nach x und y ausgeführt werden. Bei diesem Satze darf man aber nicht übersehen, dass die Formel 2), auf der hier Alles beruht, nur so lange richtig ist, als die Functionen F und F' innerhalb des Intervalles u bis $u + p$ keine Unterbrechung der Continuität erleiden; auf den vorliegenden Fall angewendet, heisst dies, die Variabelen dürfen keine solchen Werthe erhalten, wodurch eine der Functionen

$$f(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

discontinuirlich werden könnte.

Fig. 13.



Man kann diesem Theoreme eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man sich z als das Volumen denkt, welches unterhalb von einem beliebigen Rechtecke aus den Seiten $OL = x$ und $OM = y$ (Fig. 13), seitwärts von den vier auf OL, LN, NM, MO errichteten Verticalebenen, und oberhalb durch irgend eine Fläche begrenzt wird; es ist dann in der That z eine Function von x und y, und man hat nach §. 1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{Fläche } LNWU$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial (LNWU)}{\partial y} = NW,$$

andererseits

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{Fläche } MNWV$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial (MNWV)}{\partial x} = NW,$$

was mit dem Vorigen übereinstimmt.

Sind irgend wieviel Differentiationen in Beziehung auf irgend wieviele Variabele auszuführen, so lassen sich nach dem Vorigen immer je zwei Differentiationen vertauschen; auf diese Weise kann man jede beliebige Anordnung der Differentiationen herbeiführen, ohne dass das Resultat eine Aenderung erleidet.

II. Mittelst des Vorigen lassen sich die höheren totalen Differentiale einer Function leicht entwickeln; man hat nämlich zunächst bei zwei Variabelen

6) $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

und unter Anwendung desselben Satzes

$$d^2 z = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial y}\,dy,$$

dies ist soviel als

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 5)

7) $$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet sich

8) $$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3$$

und wenn man beachtet, dass die hier vorkommenden Zahlencoeffi-

cienten durch dieselbe successive Addition wie in §. 13, II. entstehen, so erkennt man als allgemeines Gesetz:

$$9)\quad d^n z = (n)_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + (n)_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + (n)_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 + \cdots$$

Kürzer schreibt man dafür in symbolischer Form

$$10)\quad d^n z = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy\right)^n \partial^n z.$$

Bei drei Variabelen, wenn z. B. u eine Function von x, y und z bedeutet, erhält man auf gleiche Weise:

$$11)\quad d^n u = \left(\frac{1}{\partial x} dx + \frac{1}{\partial y} dy + \frac{1}{\partial z} dz\right)^n \partial^n u,$$

und man übersieht auf der Stelle, wie sich die Sache bei mehreren Variabelen gestaltet.

§. 16.

Höhere Differentialquotienten unentwickelter Functionen.

Aus den Betrachtungen des §. 10 wissen wir, dass eine Gleichung von der Form

$$1)\quad f(x, y) = 0 \text{ oder } f = 0$$

durch Differentiation die folgende giebt:

$$2)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

wobei x die unabhängige Variabele bedeutet und y als unentwickelte Function von x angesehen wird. Um nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung 2) für den Augenblick mit $f_1(x, y)$ oder noch kürzer mit f_1; es ist dann unter Anwendung derselben Regel

$$3)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

andererseits hat man aber vermöge der Bedeutung von f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass y nur von x abhängt, dass also auch $\frac{dy}{dx}$ nur x enthält, mithin eine Function von x allein [nach der früheren Bezeichnung $\varphi'(x)$] und constant in Beziehung auf y ist; man hat daher

$$\frac{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} = 0$$

und wenn man die drei letzten Gleichungen in Nro. 3) einführt, so ergiebt sich die gesuchte Differentialgleichung zweiter Ordnung:

4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Nach demselben Verfahren kann die Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt werden; sie ist, wenn f_2 die linke Seite der vorigen Gleichung bezeichnet:

5) $$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bei wirklicher Entwickelung der angedeuteten partiellen Differentialquotienten findet sich:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Durch Substitution in Nro. 5) giebt dies bei Vereinigung aller gleichartigen Grössen:

6) $$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Man übersieht leicht, wie sich mittelst dieses Verfahrens, was

freilich immer längere Rechnungen erfordert, die höheren Differentialgleichungen der gegebenen Gleichung entwickeln lassen; aus ihnen lassen sich dann auch die Differentialquotienten der Function y von x herleiten; denn es folgt jetzt aus Nro. 2):

$$7) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wie schon bekannt ist; ferner aus Nro. 4):

$$8) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und hier kann man den vorhergefundenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ einsetzen; die Gleichung 6) führt dann weiter zur Kenntniss von $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f.

Auch bei Functionen mehrerer Variabelen bleibt das Verfahren ganz dasselbe, man unterlässt es jedoch, allgemeine Formeln aufzustellen, weil diese sehr verwickelt werden würden, und zieht es dagegen vor, in jedem gegebenen besonderen Falle die nöthige specielle Rechnung auszuführen.

§. 17.

Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

Bezeichnet x die unabhängige Variabele, in Beziehung auf welche ein- oder mehrmal differenzirt wird, so ist nach den Prinzipien der Differentialrechnung dx ein dem x willkürlich ertheilter und auf irgend eine Weise gegen die Null convergirender Zuwachs, und es ist mithin dx unabhängig von x; anders verhält es sich mit dem Differentiale dy der abhängigen Variabele y, denn für $y = f(x)$ ist $dy = f'(x) \,.\, dx$, und hier bildet dy eine Function von x, weil es aus zwei Factoren besteht, deren erster x enthält. Nach dieser Bemerkung folgt bei zweiter Differentiation, indem dx als constanter Factor gilt, $d^2y = df'(x) \,.\, dx = f''(x)\,dx \,.\, dx = f''(x)\,dx^2$ übereinstimmend mit den Früheren, und ebenso würden für die ferneren Differentiationen dx^2, dx^3 etc. als Constanten anzusehen sein. Es kann nun im Verlaufe einer analytischen Untersuchung nöthig werden, dem

x den Charakter der unabhängigen Veränderlichkeit abzunehmen und ihn auf eine andere, entweder bereits vorhandene oder erst neu einzuführende Variabele zu übertragen; so z. B. könnte es bei der Untersuchung einer Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten y heissen, erforderlich sein, nicht die Abscisse, sondern die Ordinate als unabhängige Variabele anzusehen, oder man könnte in den Fall kommen, die Coordinaten einer durch stetige Bewegung entstandenen Curve als Functionen der Zeit betrachten zu müssen, welche während der Bewegung verfliesst, wie dies namentlich in der Mechanik häufig geschieht. Schärfer aufgefasst ist jetzt die Frage, was man an die Stelle der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots .$$

zu setzen habe, wenn x nicht mehr als unabhängige Variabele, sondern als Function einer anderweiten unabhängigen Veränderlichen t angesehen wird, wodurch nun auch y in letzter Instanz eine Function von t geworden ist.

Beachtet man, dass y von x und x von t abhängt, also y eine zusammengesetzte Function bildet, so hat man nach den Lehren des §. 6.:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und man erhält hieraus

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Indem man beiderseits in Beziehung auf die unabhängige Variabele t differenzirt, wo nun dt constant ist, dx und dy dagegen von t abhängen, findet man links

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und rechter Hand nach der Regel für die Differentiation der Quotienten

$$\frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Stellt man beide Ausdrücke in eine Gleichung, so ergiebt sich durch Reduction auf $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Durch Wiederholung der Differentiation in Beziehung auf t findet man auf gleiche Weise

$$3) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} =$$

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\,\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 3\,\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

Wie man auf diese Weise weitergehen kann, ist unmittelbar klar; allgemeine Formeln würden wegen der grossen Complication der Ausdrücke von keinem Nutzen sein.

Nehmen wir beispielsweise $t = y$, womit gesagt ist, dass nunmehr y als unabhängige Variabele gelten oder die Gleichung $y = f(x)$ umgekehrt werden soll $[x = F(y)]$, so ist

$$4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

$$6) \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

u. s. w.

Dasselbe Verfahren passt auch auf den Fall, wenn mehrere unabhängige Variabelen vorhanden sind, nur werden die Formeln noch etwas verwickelter. Man zieht es daher vor, die Rechnung erst in den gerade vorkommenden speciellen Fällen auszuführen, wie man dies später sehen wird.

§. 18.

Zusammenhang zwischen einer Function und ihren successiven Differentialquotienten.

Sowie in §. 8 Gleichungen zwischen einer Function und ihrem ersten Differentialquotienten abgeleitet wurden, so lassen sich auch allgemeinere Formeln entwickeln, in denen ausser einer gegebenen Function noch beliebig viele ihrer Differentialquotienten vorkommen. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Analog der Gleichung

1) $f(b) = f(a) + (b - a) f'(a + \vartheta [b - a]), \quad 0 < \vartheta < 1,$

ist auch unter den gehörigen Bedingungen

$$f'(c) = f'(a) + (c - a) f''(a + \varepsilon [c - a]), \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

nimmt man $c = a + \vartheta (b - a)$, substituirt nachher den Werth von $f'(c)$ in die vorhergehende Gleichung und bezeichnet $\vartheta \varepsilon$ kurz mit ϑ_1 so erhält man die neue Formel

2) $f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \vartheta (b - a)^2 f''(a + \vartheta_1 [b - a]).$

Im letzten Summanden kommen zwei positive ächte Brüche ϑ und ϑ_1 vor, deren Werthe man nicht näher kennt; um diesen Uebelstand zu vermeiden, suchen wir den Betrag der Summe

$$f(a) + (b - a) f'(a)$$

auf anderem Wege zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sei

3) $$\varphi(x) = f(x) + (b - x) f'(x);$$

es ist dann einerseits

4) $$\varphi(a) = f(a) + (b - a) f'(a), \quad \varphi(b) = f(b),$$

andererseits durch Differentiation von Nro. 3)

5) $$\varphi'(x) = (b - x) f''(x).$$

Hier lässt sich die bekannte Formel (§. 8, Nro. 8)

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b - a}{p (1 - \theta)^{p-1}} \varphi'(a + \theta [b - a])$$

anwenden, indem man aus Nro. 4) die Werthe von $\varphi(b)$ und $\varphi(a)$ und nach Nro. 5)

$$\varphi'(a + \theta [b - a]) = (1 - \theta) (b - a) f''(a + \theta [b - a])$$

substituirt; man gelangt sofort zu der Gleichung

6) $$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{p (1 - \theta)^{p-2}} f''(a + \theta [b - a]),$$

welche genauer als die frühere (2) ist, insofern sie nur den einen positiven ächten Bruch θ enthält. Etwas einfacher wird die Formel 6) für $p = 2$, nämlich

7) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a + \theta[b-a])$.

Uebrigens gelten diese Resultate nur unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ stetig und endlich bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Das soeben benutzte Verfahren lässt sich wieder auf die Formel 7) anwenden; man hat nämlich

$$f''(c) = f''(a) + (c-a)f'''(a + \varepsilon[c-a]),$$

mithin wenn

$$c = a + \theta(b-a), \qquad \theta\varepsilon = \theta_1$$

genommen und substituirt wird,

8) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$+ \frac{1}{2}\theta(b-a)^3 f'''(a + \theta_1[b-a])$.

Auch hier kommen zwei unbekannte Brüche θ und θ_1 vor, und daher verbessern wir die Formel auf folgende Weise. Es sei

9) $\psi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(x)$,

so haben wir einerseits

10) $\psi(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$, $\psi(b) = f(b)$,

andererseits durch Differentiation von Nro. 9)

$$\psi'(x) = \tfrac{1}{2}(b-x)^2 f'''(x),$$
$$\psi'(a + \vartheta[b-a]) = \tfrac{1}{2}(1-\vartheta)^2(b-a)^2 f'''(a + \vartheta[b-a]).$$

Substituiren wir diese Werthe in die Formel

11) $\psi(b) = \psi(a) + \dfrac{b-a}{p(1-\vartheta)^{p-1}}\psi'(a + \vartheta[b-a])$,

so gelangen wir augenblicklich zu der Gleichung

12) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$+ \dfrac{(b-a)^3}{2p(1-\vartheta)^{p-3}} f'''(a + \vartheta[b-a])$,

die sich für $p = 3$ noch etwas vereinfacht, nämlich

13) $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)$
$+ \frac{1}{6}(b-a)^3 f'''(a + \vartheta[b-a])$.

Dabei müssen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$, mithin auch $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Um die bisherige Schlussweise ganz allgemein auszuführen, setzen wir

14) $$\psi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots \cdot$$
$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

worin $f(x)$ eine gegebene Function, $\psi(x)$ dagegen die unbekannte Summe der rechts stehenden Summanden bezeichnet. Einerseits ist

$$\psi(a) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a),$$
$$\psi(b) = f(b),$$

andererseits durch Differentiation von Nro. 14), wobei sich alle negativen Ausdrücke heben,

15) $$\psi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(x),$$

$$\psi'(a + \vartheta[b-a]) = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \vartheta[b-a]),$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung 11) einsetzt, so gelangt man zu der Formel

16) $$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a)$$
$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p}(b-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot p} f^{(n)}(a + \vartheta[b-a]).$$

Zur Gültigkeit der vorstehenden Gleichung gehört übrigens die Endlichkeit und Continuität der Functionen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$; dazu ist hier, wo $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ durch die Gleichungen 14) und 15) bestimmt werden, erforderlich, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = a$ bis $x = b$.

Für $b - a = h$ nimmt die Formel 16) folgende Gestalt an.

17) $$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n-1)}(a)$$
$$+ \frac{(1-\vartheta)^{n-p} h^n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot p} f^{(n)}(a + \vartheta h),$$

und dabei müssen $f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ endlich und continuirlich bleiben von $x = a$ bis $x = a + h$.

Als Specialisirungen der Zahl p empfehlen sich die Werthe $p = n$ und $p = 1$; im ersten Falle erhält man

$$18)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1\,.\,2\,\ldots\,n}f^{(n)}(a+\vartheta h),$$

dagegen im zweiten Falle

$$19)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\vartheta)^{n-1}h^n}{1\,.\,2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta h).$$

Hier bedeutet ϑ immer einen positiven ächten Bruch, dessen Werth nicht näher bekannt ist. Dieser kann übrigens in den drei letzten Formeln verschieden sein, denn man sieht an einzelnen Beispielen zu Formel 17) sehr leicht, dass ϑ gleichzeitig von a, h, n und p abhängt und daher bei verschiedenen p im Allgemeinen verschiedene Werthe erhält.

Eine sehr einfache Anwendung von Formel 18) gewährt die Specialisirung

$$f(x) = \log x,$$

wobei M den Modulus des logarithmischen Systems bezeichnen möge; es ist dann

$$20)\quad \log(a+h) = \log a + M\left[\frac{1}{1}\frac{h}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3 - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{h}{a+\vartheta h}\right)^n\right]$$

und zwar gilt diese Formel für alle positiven a und h. Setzt man für ϑ das eine Mal die Null, das andere Mal die Einheit, so wird der absolute Werth des letzten Summanden im ersten Falle zu gross, im zweiten zu klein, und man erhält daher zwei Zahlen, zwischen denen $\log(a+h)$ enthalten ist.

Auch für Functionen mehrerer Variabelen können ähnliche Gleichungen wie Nro. 17), 18) oder 19) entwickelt werden, doch unterlassen wir dies, da wir ohnehin auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Cap. III.

Untersuchungen über krumme Linien und Flächen.

§. 19.

Der Lauf ebener Curven.

I. Die erste Frage bei der Betrachtung einer ebenen krummen Linie wird sich immer auf deren Steigung oder Fall beziehen, weil schon hieraus die Gestalt der Curve mit einiger Sicherheit zu ersehen ist. Soll nun die Curve steigen, so muss die nächstfolgende Ordinate grösser als die vorhergehende sein, beim Herabsteigen dagegen entspricht der grösseren Abscisse eine kleinere Ordinate. Betrachten wir daher

$$x \text{ und } y = f(x),$$
$$x + \Delta x \text{ „ } y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

als Coordinaten zweier benachbarten Punkte, so steigt die Curve, wenn bei hinreichend kleinen Δx die Differenz

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

positiv ist und es bleibt, falls Δx noch weiter abnimmt und gegen die Null convergirt; dagegen fällt die Curve bei negativ bleibenden Δy. Zufolge der Voraussetzung eines positiven Δx kann man auch sagen, dass die Curve steigt oder fällt, je nachdem der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

das positive oder negative Vorzeichen behält. Wie in §. 8 nachgewiesen wurde, hat aber der Differenzenquotient bei hinreichend klei-

nen Δx dasselbe Vorzeichen wie der Differentialquotient; es gilt daher der Satz:

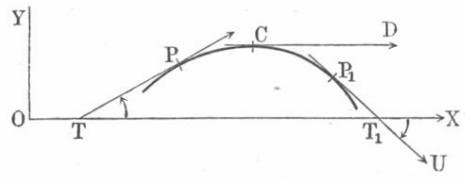
> Die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, steigt so lange als $f'(x)$ positiv bleibt, sie fällt dagegen so lange $f'(x)$ das negative Zeichen behält.

Man wird dies geometrisch sogleich bestätigt finden, wenn man sich an die Gleichung

$$y' = f'(x) = \tan\tau$$

erinnert. Bei positiven $f'(x)$ ist nämlich τ positiv und die Tangente TP (Fig. 14) bildet mit der positiven Seite der x-Achse den spitzen und zwar positiven Winkel XTP, wobei die Drehung von der Rechten zur Linken als die Drehung im positiven Sinne betrachtet wird; unter diesen Umständen steigt die Curve. Dem negativen $f'(x)$ entspricht ein negativer Winkel $\tau = \angle XT_1U$, welcher durch die entgegengesetzte Drehung entstanden ist; die Curve fällt dann.

Fig. 14.



Wenn die derivirte Function $f'(x)$ ihr Vorzeichen auf die Weise ändert, dass sie entweder vom Positiven durch Null hindurch in's Negative, oder umgekehrt aus dem Negativen durch Null hindurch in's Positive übergeht, so tritt an der Stelle, wo $f'(x) = 0$ wird, entweder der Uebergang von Steigen zu Fallen oder von Fallen zu Steigen ein. Derartige Punkte kann man passend Culminationspunkte nennen; im ersten Falle ist die Culmination eine obere, im zweiten eine untere. An jedem Culminationspunkte wird $\tau = 0$, mithin die Tangente parallel zur Abscissenachse, wie in Fig. 14 an dem oberen Culminationspunkte C.

Als Beispiel kann man die Ellipsengleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

benutzen; der Differentialquotient

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

hat für $x < a$ das positive, für $x > a$ das negative Vorzeichen und geht an der Stelle $x = a$ aus dem Positiven in's Negative über.

Die Curve besitzt daher an der Stelle $x = a, y = b$ einen oberen Culminationspunkt, wie auch geometrisch bekannt ist.

II. Hat man mittelst der angegebenen Regel gefunden, dass eine Curve innerhalb eines gewissen Intervalles steigt oder fällt, so bleibt noch die zweite Frage, wie jenes Steigen oder Fallen geschieht. Eine Curve kann nämlich beim Steigen entweder die erhabene oder die hohle Seite gegen die Abscissenachse kehren (s. Fig. 15 und 16). Dasselbe gilt auch, wenn die Curve fällt, und es bedarf daher eines Unterscheidungszeichens für diese verschiedenen Lagen. Ist nun der Bogen PP_2 convex gegen die Abscissenachse (Fig. 15), so heisst dies nichts Anderes, als dass er zwischen seiner Sehne und der x-Achse liegt; dagegen ist der Bogen PP_2 concav (Fig. 16), wenn umgekehrt die Sehne zwischen dem Bogen und der Abscissenachse durchgeht. Schalten wir auf der Mitte der Sehne noch den Punkt Q ein und bezeichnen mit P_1 denjenigen Curvenpunkt, welcher die nämliche Abscisse wie Q besitzt, so haben wir bei convexer Krümmung

Fig. 15.

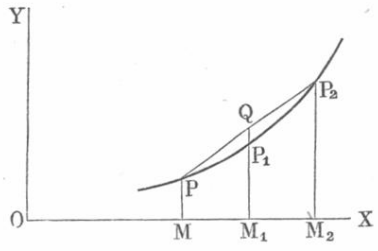
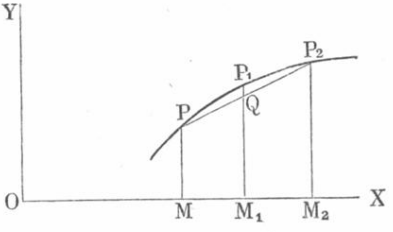


Fig. 16.



$$M_1 Q > M_1 P_1,$$

bei concaver Krümmung

$$M_1 Q < M_1 P_1,$$

und es ist also die Curve convex oder concav gegen die Abscissenachse, je nachdem $M_1 Q - M_1 P_1$ das positive oder negative Vorzeichen hat. Für $OM = x$, $MM_1 = M_1 M_2 = \Delta x$ und mit Rücksicht darauf, dass $M_1 Q$ das arithmetische Mittel zwischen MP und $M_2 P_2$ darstellt, findet sich

$$M_1 Q - M_1 P_1$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x)+f(x)}{2} - f(x+\Delta x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x)+f(x)}{2};$$

dieser Ausdruck hat immer dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$$

und letzterer ist wieder einerlei mit

$$f''(x) + \varrho,$$

wo ϱ eine gleichzeitig mit Δx gegen die Null convergirende Grösse bezeichnet. Hieraus folgt, dass bei hinreichend kleinen Δx der zweite Differenzenquotient dasselbe Vorzeichen wie der zweite Differentialquotient besitzt, dass mithin die Curve convex oder concav ist, je nachdem $f''(x)$ das positive oder negative Zeichen hat. Diese Bemerkungen sind leicht auf den Fall auszudehnen, wo die Curve unterhalb der Abscissenachse liegt, mithin $f(x), f(x + \Delta x), f(x + 2\Delta x)$ negativ sind; man findet, dass umgekehrt ein negatives $f''(x)$ die convexe, ein positives $f''(x)$ die concave Krümmung anzeigt. Mit dem Vorigen zusammen giebt dies den Satz, dass die Curve convex oder concav gegen die Abscissenachse gekrümmt ist, je nachdem $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Zu demselben Resultate führt auch eine andere Bemerkung. Bei einer convex steigenden Curve wachsen nämlich die Tangentenwinkel, bei einer concav steigenden nehmen sie ab, wie man unmittelbar aus Fig. 17 und 18 ersieht, worin PT und P_1T_1 die Tan-

Fig. 17.

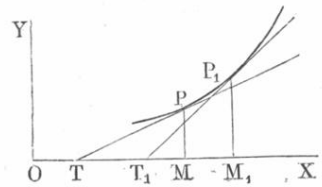
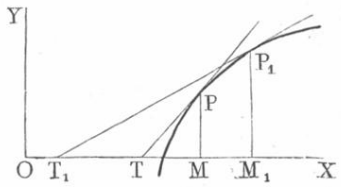


Fig. 18.



genten an zwei aufeinander folgenden Punkten sind. Die gleiche Bemerkung gilt auch für fallende Curven, und daher deutet jederzeit ein wachsendes τ auf convexe, ein abnehmendes τ auf concave Krümmung. Die Zunahme oder Abnahme von τ erkennt man an dem Vorzeichen des Differentialquotienten

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d \arctan y'}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2}\, y'',$$

dieses Vorzeichen hängt lediglich von y'' ab, und damit gelangt man wieder zu dem vorigen Satze. Um letzteren etwas einfacher und für Anwendungen bequemer aussprechen zu können, denken wir uns die Abscissenachse so weit abwärts parallel zu sich selbst versche-

ben, dass alle in Frage kommenden Ordinaten positiv ausfallen; mit anderen Worten, wir vergrössern alle innerhalb des betrachteten Intervalles liegenden Ordinaten um eine constante Strecke, welche mehr als die grösste Ordinate beträgt. Auf y' und y'' hat diese Operation keinen Einfluss; der vorige Satz aber lautet dann:

> Die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, kehrt die convexe oder die concave Seite nach unten, je nachdem $f''(x)$ positiv oder negativ ist.

Aendert $f''(x)$ sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch den Werth $f''(x) = 0$, so findet an dieser Stelle ein Krümmungswechsel statt; ein derartiger Punkt heisst ein Inflexionspunkt oder Wendepunkt.

III. Nach diesen Sätzen ist der Lauf einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve auf folgende Weise zu untersuchen. Man ermittelt zunächst die Intervalle, innerhalb deren y sein Vorzeichen behält, sowie die Stellen wo $y = 0$ wird; man erhält dadurch die Punkte, welche die Curve mit der Abscissenachse gemein hat, d. h. Durchschnitte oder Berührungspunkte mit der x-Achse. Nachher entscheidet man, wie weit y' positiv, wie weit es negativ ist und wo y' sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch Null wechselt; dies giebt die Culminationspunkte. Endlich untersucht man, innerhalb welcher Intervalle y'' positiv bleibt, innerhalb welcher anderen negativ, und an welchen Stellen y'' sein Vorzeichen mittelst Durchganges durch Null wechselt, d. h. wo Inflexionspunkte vorkommen. Diese sogenannten ausgezeichneten Punkte reichen hin, um die Gestalt der Curve kennen zu lernen.

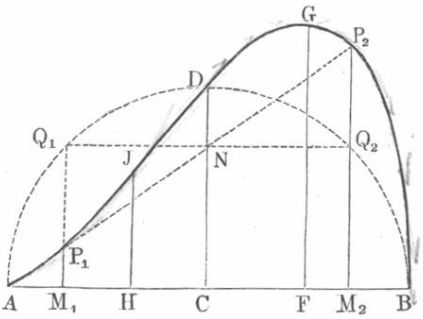
Als Beispiel diene eine Curve von folgender Entstehungsweise. In einem über dem Durchmesser $AB = 2a$, Fig. 19 (a. f. S.), construirten Kreise sind parallel zu AB Sehnen gezogen, von denen $Q_1 Q_2$ irgend eine darstellen möge; sie schneidet den zu AB senkrechten Durchmesser in einem Punkte N. Man legt ferner $M_1 Q_1 \parallel CD \parallel M_2 Q_2$ und zieht die Gerade AN; letztere trifft $M_1 Q_1$ in P_1, $M_2 Q_2$ in P_2, und nun sollen P_1, P_2 Punkte der neuen Curve sein. Bezeichnet man AM_1 oder AM_2 mit x, und die zugehörige Ordinate mit y, so erhält man als Gleichung der krummen Linie

$$y = \frac{x\sqrt{2ax - x^2}}{a},$$

und hieraus ergiebt sich, das Wurzelzeichen erst als positiv vorausgesetzt, dass zu jedem negativen x ein imaginäres y gehört, dass ferner für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, dass jedem zwischen 0 und $2a$

liegenden x ein positives y entspricht, dass für $x = 2a$ wieder $y = 0$, und für $x > 2a$ jedes y imaginär ist. Die Curve geht demnach von A aus über die x-Achse hinauf und steigt am Ende in B wieder zu

Fig. 19.



ihr herab. Nimmt man das Wurzelzeichen negativ, so erhält man gleich grosse und entgegengesetzte Ordinaten; demnach besteht die Curve aus zwei congruenten, über und unter der Abscissenachse liegenden Zweigen, die zusammen eine geschlossene Figur, ein sogenanntes Blatt bilden.

Man erhält weiter als ersten Differentialquotienten

$$y' = \frac{x(3a - 2x)}{a\sqrt{2ax - x^2}},$$

wobei das Wurzelzeichen positiv genommen werden kann, weil man nur einen der beiden congruenten Zweige zu untersuchen braucht. Für $x = 0$ wird $y' = 0$; so lange $x < \frac{3}{2}a$ bleibt, ist y' positiv, für $x = \frac{3}{2}a$ wird $y' = 0$, bei grösseren x wird y' negativ und zuletzt, d. h. für $x = 2a$, negativ unendlich gross. Demnach hat die Curve in A die Abscissenachse zur Tangente; von A aus steigt sie bis zu dem oberen Culminationspunkte G, dessen Coordinaten $AF = \frac{3}{2}a$, $FG = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$ sind, und fällt dann bis B, wo sie die Abscissenachse rechtwinklig schneidet.

Was ferner den zweiten Differentialquotienten

$$y'' = \frac{x(3a^2 - 6ax + 2x^2)}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \frac{2x[(x - \frac{3}{2}a)^2 - \frac{3}{4}a^2]}{a\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$$

anbetrifft, so übersieht man leicht, dass derselbe positiv bleibt von $x = 0$ bis zu dem kleineren der beiden Werthe, welche $(x - \frac{3}{2}a)^2 = \frac{3}{4}a^2$

machen, d. h. bis zu $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}a - a\cos 30^0$. Beim Ueberschreiten dieses Werthes geht y'' aus dem Positiven in's Negative über und bleibt negativ bis $x = 2a$. Es würde zwar später für $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a$ wieder ein Zeichenwechsel eintreten; dieser kommt aber nicht in Frage, weil $\frac{3+\sqrt{3}}{2}a > 2a$ ist und die zugehörigen y, y', y'' imaginär sind. Die Curve ist demnach convex gegen die Abscissenachse von A bis zu dem Inflexionspunkte I, dessen Coordinaten $AH = \frac{3}{2}a - a\cos 30^0$ und HI leicht construirt werden können; darüber hinaus bleibt die Linie concav.

§. 20.

Bogendifferential, Tangenten, Asymptoten und Normalen ebener Curven.

I. Die schon öfter benutzte Gleichung

1) $$\tan\tau = y' = \frac{dy}{dx}$$

bildet die Grundlage für alle Formeln und Constructionen, welche mit dem Probleme des Tangentenziehens in irgend einem Zusammenhange stehen. Zunächst bemerken wir, dass aus Nr. 1) die folgenden Gleichungen entspringen:

2) $$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

denen man auch die Gestalt geben kann:

3) $$\cos\tau = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \quad \sin\tau = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Hier besitzt der Nenner eine geometrische Bedeutung. Je kleiner nämlich dx und dy gedacht werden, desto eher ist es erlaubt, das zwischen den Punkten x, y und $x+dx, y+dy$ liegende Curvenstück mit seiner Sehne zu verwechseln oder das aus den Katheten dx, dy und dem zugehörigen Bogen, welcher ds heissen möge, gebildete Dreieck als geradliniges Dreieck anzusehen. Dass diese

Vorstellung richtig ist, beweist die daraus folgende Gleichung $\tan\tau = \frac{dy}{dx}$, welche mit Nr. 1) übereinstimmt. Dann darf man aber weiter schliessen, dass für das Bogendifferential ds die Gleichung

4) $$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

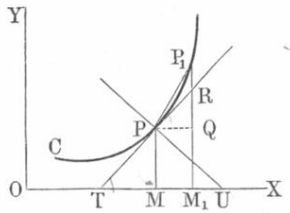
gelten muss. Dies kann auch direct auf folgende Weise gezeigt werden.

In Fig. 20 sei $OM = x$, $MP = y$, $MM_1 = PQ = \Delta x$, $P_1Q = \Delta y$, $\angle PTX = \tau$, der von einem festen Punkte C an gerechnete Bogen $CP = s$, mithin

$$Arc\ PP_1 = \Delta s,$$

endlich R der Punkt, in welchem die Tangente TP die Ordinate M_1P_1 schneidet; wählt man Δx so klein, dass der Bogen PP_1 keinen Inflexionspunkt enthält, also entweder nur convex oder nur concav ist, so hat man folgende Ungleichungen

Fig. 20.



$$Arc\,PP_1 > PP_1, \text{ d. h. } \Delta s > \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$Arc\,PP_1 < PR + RP_1, \text{ d. h. } \Delta s < \Delta x\ sec\tau + \Delta y - \Delta x\ tan\tau.$$

Durch beiderseitige Division mit Δx ergiebt sich

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} < \frac{\Delta s}{\Delta x} < sec\,\tau + \frac{\Delta y}{\Delta x} - tan\,\tau;$$

beim Uebergange zur Grenze für unendlich abnehmende Δx, Δy, Δs erhält man auf der linken Seite als Grenzwerth

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2},$$

und auf der rechten Seite

$$sec\,\tau + \frac{dy}{dx} - tan\,\tau = sec\,\tau = \sqrt{1 + tan^2\tau} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Beide Seiten convergiren also gegen eine und dieselbe Grenze, daraus folgt

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

was mit der Gleichung 4) übereinstimmt. Auch ist nun

5)
$$\begin{cases} \cos\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{dx}{ds}, \\ \sin\tau = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \dfrac{dy}{ds}. \end{cases}$$

Wenn die Gleichung der Curve nicht in der expliciten Gestalt $y = f(x)$, sondern implicite unter der Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, so hat man

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

zu setzen, wie in §. 10 gezeigt worden ist.

II. Um durch den Punkt P eine Tangente an die Curve zu legen, kann man entweder den Berührungswinkel τ aus der Formel 1) bestimmen und sein Complement MPT (Fig. 20) an die Ordinate MP antragen, oder eine der Geraden MT, PT berechnen und, wenn möglich, construiren. Die erste dieser Strecken heisst die Subtangente, die zweite die Tangente, und zwar ist

6)
$$Sbtg. = y\cot\tau = \frac{y}{\tan\tau} = \frac{y}{y'},$$

7)
$$Tang. = \frac{y}{\sin\tau} = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

Bezeichnen ξ und η die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, so gilt die Gleichung

$$\eta - y = (\xi - x)\tan\tau,$$

von deren Richtigkeit man sich durch wirkliche Construction der Differenzen $\xi - x$ und $\eta - y$ leicht überzeugt; demnach lautet die Gleichung der Tangente:

8)
$$\eta - y = y'(\xi - x).$$

Für den Fall, dass die Gleichung der Curve in der unentwickelten Form

$$F(x, y) = 0$$

gegeben ist, erhält die Gleichung der Tangente die symmetrische Gestalt

9)
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0.$$

III. An die Gleichung 8) oder

$$\eta = y'\xi + y - xy'$$

knüpft sich noch folgende Bemerkung. Wenn die Curve in's Unendliche geht, so kann es geschehen, dass bei unendlich wachsenden x die Ausdrücke

$$y' \text{ und } y - xy'$$

sich bestimmten Grenzen nähern; es giebt dann eine feste Grenzlage der Tangenten, der sie sich mehr und mehr nähern, je weiter der Punkt xy fortrückt, d. h. eine sogenannte Asymptote der Curve. Setzen wir

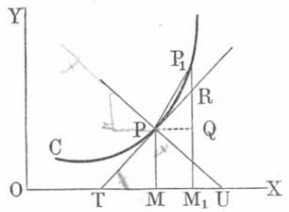
$$\left.\begin{aligned} Lim\, y' &= Lim\, f'(x) = A, \\ Lim\,(y - xy') &= Lim\,[f(x) - xf'(x)] = B, \end{aligned}\right\} (x = \infty)$$

so haben wir als Gleichung der Asymptote

10) $$\eta = A\xi + B.$$

Nur für den Fall, dass die Asymptote parallel zur y-Achse liegt, wird diese Gleichung unbrauchbar wegen $A = \infty$ und $B = \infty$; man hat aber dann die vorige Betrachtung nicht nöthig, weil sich eine derartige Asymptote von selbst dadurch bemerklich macht, dass einem endlichen x ein unendliches y entspricht.

Fig. 21.



IV. Errichtet man im Punkte P auf der Tangente eine Senkrechte, welche die Abscissenachse in U schneidet, so erhält man die sogenannte Normale der Curve; MU heisst die Subnormale (Fig. 21). Aus der Bemerkung, dass

$$\angle\, MPU = \angle\, MTP = \tau$$

ist, findet man leicht

11) $$Subnorm. = y \tan\tau = yy',$$

12) $$Norm. = \frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1 + y'^2};$$

ferner ist, wenn ξ und η die Coordinaten eines Punktes der Normale bezeichnen,

$$\eta - y = (x - \xi)\cot\tau,$$

mithin die Gleichung der Normale:

13) $$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x).$$

Der unentwickelten Form der Curvengleichung entspricht als Gleichung der Normale

14) $$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Anwendungen dieser allgemeinen Vorschriften giebt der nächste Paragraph.

§. 21.

Beispiele von Tangenten- und Normalenconstructionen.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man die Hauptachse eines Kegelschnittes zur x-Achse und einen ihrer Endpunkte zum Coordinatenanfang, so ist bekanntlich

1) $$y^2 = 2px + qx^2$$

die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, worin p den Halbparameter (die Ordinate im Brennpunkte) bedeutet. Man findet hieraus

2) $$yy' = p + qx, \quad y' = \frac{p + qx}{y},$$

mithin als Gleichung der Tangente

3) $$\eta - y = \frac{p + qx}{y}(\xi - x).$$

Für $\xi = 0$ ergiebt sich hieraus ein specielles η, das η_0 heissen möge, und zwar bedeutet es geometrisch die Strecke OT, welche die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet; man hat dafür

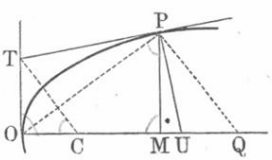
$$\eta_0 = y - \frac{p + qx}{y}x = \frac{y^2 - px - qx^2}{y}$$

oder, vermöge des Werthes von y^2,

4) $$\eta_0 = \frac{px}{y}.$$

Dies giebt folgende Tangentenconstruction (Fig. 22). Man nehme $OC = p$, fälle von dem festen Punkte C auf den Radiusvector OP eine Senkrechte, welche die Ordinatenachse in T schneidet, und ziehe die Gerade TP.

Fig. 22.



Man hat ferner durch Substitution des Werthes von y

$$y' = \frac{p + qx}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{\frac{p}{x} + q}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}},$$

$$y - xy' = \eta_0 = \frac{px}{\sqrt{2px + qx^2}} = \frac{p}{\sqrt{2\frac{p}{x} + q}};$$

bei unendlich wachsenden x wird hieraus

$$Lim\, y' = \frac{q}{\sqrt{q}} = \sqrt{q}, \qquad Lim\,(y - xy') = \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Diese Ausdrücke sind reell und von endlichem Werthe, wenn $q > 0$, d. h. der Kegelschnitt eine Hyperbel ist; letztere besitzt daher zwei Asymptoten, deren Gleichungen aus

5) $$\eta = \sqrt{q} \cdot \xi + \frac{p}{\sqrt{q}}$$

hervorgehen, wenn man $\sqrt{q}$ das eine Mal mit dem positiven, das andere Mal mit dem negativen Vorzeichen nimmt.

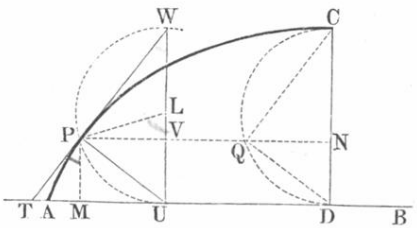
Was endlich die Normale betrifft, so bemerke man, dass die Gleichung 2) linker Hand den Ausdruck yy', d. h. die Subnormale, enthält und dass die Gleichung 2) mit folgender übereinkommt:

6) $$yy' = \frac{y^2}{x} - p.$$

Man kann daher die Normale unabhängig von der Tangente durch folgende Construction erhalten: Auf dem Radiusvector OP errichtet man in P eine Senkrechte, welche der Abscissenachse in Q begegnet, und nimmt $QU = p$; dann ist PU die Normale.

II. Die Cycloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortrollt, wobei sich die Peripherie des Kreises auf jener Geraden abwickelt. Nehmen wir die gegebene Gerade AB, die sogenannte Basis, zur x-Achse, den Anfangspunkt der Bewegung zum Coordinatenanfang und setzen (Fig. 23) $AM = x$, $MP = y$, $LP = LU = a$, $\angle PLU = \omega$, so gelten folgende Gleichungen

Fig. 23.



$$x = AU - MU = Arc\,UP - PV,$$

d. i.

7) $$x = a\omega - a\sin\omega;$$
$$y = UV = LU - LV,$$

d. i.

8) $$y = a - a\cos\omega.$$

Durch Elimination von ω aus 7) und 8) würde man zu einer Gleichung zwischen x und y gelangen, da aber dieselbe etwas complicirt ausfällt, so thut man besser, die obigen zwei Gleichungen beizubehalten und darin den Wälzungswinkel ω als unabhängige Variabele zu betrachten. Dann ist

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega, \qquad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

mithin

9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \cot\tfrac{1}{2}\omega$$

oder, zufolge der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten,

$$\tan\tau = \cot\tfrac{1}{2}\omega = \tan(90^0 - \tfrac{1}{2}\omega).$$

Da während der ersten halben Umwälzung $\omega < 180^0$, mithin $90^0 - \frac{1}{2}\omega$ ein spitzer Winkel und ebenso τ jedenfalls $< 90^0$ ist, so schliesst man aus der vorigen Gleichung

$$\tau = 90^0 - \tfrac{1}{2}\omega \text{ oder } 90^0 - \tau = \tfrac{1}{2}\omega,$$

d. h. $\angle\, MPT =$ dem Peripheriewinkel UWP; es ist folglich WPT die Tangente und die darauf senkrechte PU die Normale.

Nicht selten nimmt man den höchsten Punkt C der Cycloide zum Coordinatenanfang und den Pfeil CD zur Abscissenachse. Für $CN = x_1$, $NP = y_1$ ist dann

10) $$\begin{cases} x_1 = CD - DN = 2a - y = a(1 + \cos\omega) \\ y_1 = AD - AM = \pi a - x = a(\pi - \omega + \sin\omega) \end{cases}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dx}{dy} = \tan\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1 - \cos\omega}{1 + \cos\omega}},$$

oder wegen $\cos\omega = \frac{x_1}{a} - 1$,

11) $$\frac{dy_1}{dx_1} = \sqrt{\frac{2a - x_1}{x_1}} = \frac{\sqrt{2ax_1 - x_1^2}}{x_1}.$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorigen überein. Die linke Seite bedeutet nämlich geometrisch den Winkel τ_1, den die Tangente PT mit der neuen Abscissenachse einschliesst, es ist daher

$$tan\,\tau_1 = \frac{NQ}{NC} \text{ oder } tan\,MPT = \frac{NQ}{NC},$$

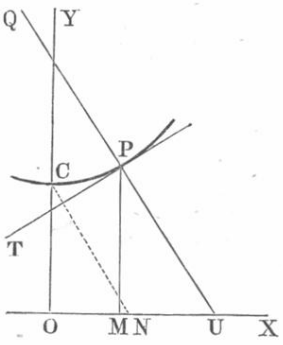
woraus wieder folgt, dass $PW \parallel CQ$ die Tangente sein muss.

III. Die Kettenlinie. Aus statischen Gründen bildet ein vollkommen biegsamer homogener Faden, frei aufgehangen und nur der Einwirkung seines Gewichtes unterworfen, eine krumme Linie von folgender Gleichung

12) $$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

wobei die Abscissenachse horizontal in der Entfernung k unter dem Scheitel der Curve liegt, und die Ordinatenachse vertical durch den Scheitel geht (Fig. 24). Aus Nr. 12) folgt

Fig. 24.



$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

und es ist vermöge der Werthe von y und y'

$$\left(\frac{y}{k}\right)^2 - y'^2 = 1,$$

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}$$

oder zufolge der geometrischen Bedeutung von y'

$$tan\,\tau = \frac{\sqrt{y^2 - k^2}}{k}.$$

Um hiernach die Tangente am Punkte P zu construiren, beschreibt man aus dem Scheitel C mit MP als Halbmesser einen Kreis, welcher die Abscissenachse in N schneidet, zieht die Gerade CN, die mit OC einen Winkel $= \tau$ bildet, und legt PT senkrecht zu CN; die Normale PU ist parallel zu CN.

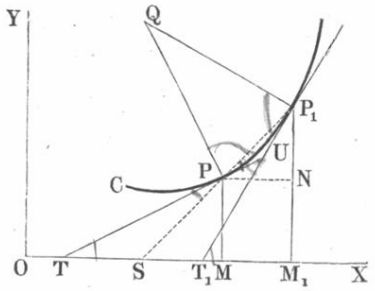
§. 22.

Krümmungskreis, Krümmungsmittelpunkt und Evolute.

1. An zwei Punkte P und P_1 einer Curve CPP_1 (Fig. 25) denken wir uns die Tangenten TP und T_1P_1 gelegt, die sich in U schneiden, und die zugehörigen Normalen construirt, deren Durchschnitt Q heissen möge; in dem Sehnenvierecke PQP_1U ist dann

$$\angle PQP_1 = \angle TUT_1 = \angle M_1T_1P_1 - \angle MTP = \tau_1 - \tau,$$

Fig. 25.



der Winkel PQP_1 giebt also den Zuwachs des Tangentenwinkels τ an und kann daher mit $\Delta\tau$ bezeichnet werden. Ziehen wir ferner die Secante P_1PS und setzen

$$\angle PSM = \sigma,$$

so haben wir im Dreiecke PP_1Q

$$\angle PQP_1 = \Delta\tau,$$
$$\angle P_1PQ = 90^0 - \angle P_1PU = 90^0 - \angle SPT = 90^0 - (\sigma - \tau),$$
$$\angle PP_1Q = 90^0 - \angle PP_1U = 90^0 - \angle SP_1T_1 = 90^0 - (\tau_1 - \sigma),$$
$$PP_1 = \sqrt{(\overline{PN}^2 + \overline{P_1N}^2)} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2};$$

vermöge der Proportionalität der Seiten und der Sinus der Gegenwinkel können wir hieraus die Strecken $PQ = r$ und $P_1Q = r_1$ berechnen und finden

$$r = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sin \Delta\tau} \sin PP_1Q$$

oder

$$r = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta x}} \cos(\tau + \Delta\tau - \sigma)$$

und dem entsprechend

$$r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\sin \Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta x}} \cos(\sigma - \tau).$$

Lassen wir jetzt den Punkt P_1 immer näher an P rücken, mithin Δx, $\Delta\tau$ und $\sigma - \tau$ gleichzeitig gegen die Null convergiren, so verändert der Durchschnitt Q seine Lage, geht aber nicht in's Unendliche hinaus; vielmehr nähern sich r und r_1 der gemeinschaftlichen Grenze

$$Lim\, r = Lim\, r_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d\tau}{dx}},$$

welche wir ϱ nennen wollen. Aus $tan\, \tau = y'$ folgt ferner, weil τ einen positiven oder negativen spitzen Winkel bedeutet,

$$\tau = arctan\, y', \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + y'^2}\, y'',$$

daher ist zusammengenommen

1) $$\varrho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}.$$

Das für den ersten Augenblick überraschende Resultat, dass der Durchschnitt zweier Normalen beim Zusammenfallen der letzteren nicht in's Unendliche, sondern nur bis zu einem bestimmten Grenzpunkte fortrückt, ist übrigens geometrisch leicht zu erklären. Je weniger nämlich die Entfernung der Punkte P und P_1 beträgt, um so kleiner ist auch die Differenz der Längen von PQ und $P_1 Q$, mithin lässt sich näherungsweis $PQ = P_1 Q$ als Halbmesser eines Kreises ansehen, welcher sowohl die Punkte P und P_1 als die zugehörigen Tangenten PT und $P_1 T_1$ mit der Curve gemein hat. Eben desswegen schliesst sich dieser Kreis genauer an die Curve an als jeder andere, dessen Mittelpunkt willkührlich auf der Normale PQ gewählt wäre und der nur die eine Tangente PT mit der Curve gemein hätte, oder kurz ausgedrückt, jener Kreis hat nahezu dieselbe Krümmung wie die Curve von P bis P_1. Diese Schlüsse erhalten ihre volle Gültigkeit beim Zusammenfallen der Punkte P und P_1; der Grenzpunkt des Normalendurchschnittes heisst dann der Krümmungsmittelpunkt, die Strecke ϱ, als Radius eines Kreises gedacht, der Krümmungshalbmesser, und der mit ϱ aus jenem Punkte beschriebene Kreis der Krümmungskreis; er schliesst sich der Curve genauer an als jeder andere in P sie berührende Kreis und hat durchweg dieselbe Krümmung, wie die Curve in P.

Diese Vorstellungsweise führt auch sehr rasch zur Formel 1). Setzt man nämlich $Arc\, CP = s$, so ist $Arc\, PP_1 = \Delta s$, ferner näherungsweis, indem man Δs wie einen mit dem Halbmesser $PQ = P_1 Q = r$ beschriebenen und zum Centriwinkel $PQP_1 = \Delta\tau$ gehörigen Kreisbogen berechnet,

$$\Delta s = r \,.\, \Delta\tau \text{ oder } r = \frac{\Delta s}{\Delta\tau}$$

folglich genau beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta \tau$

2) $$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Durch Einführung der Werthe

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,.\,dx, \qquad d\tau = \frac{1}{1 + y'^2}\,y''\,dx$$

geht die Formel 2) in die Formel 1) über.

Nimmt man das vorkommende Wurzelzeichen im absoluten Sinne, so hat ϱ immer dasselbe Vorzeichen wie y''; d. h. geometrisch, der Krümmungshalbmesser kann zwei verschiedene einander entgegengesetzte Lagen haben, je nachdem die Curve die convexe oder die concave Seite nach unten kehrt; im ersten Falle ist er positiv, im zweiten negativ.

Für die Construction des Krümmungshalbmessers ist in manchen Fällen die Bemerkung von Nutzen, dass

3) $$\varrho = \frac{u^3}{y^3 y''}$$

gesetzt werden kann, wo u die Normale im Punkte P bezeichnet.

Aus der Gleichung der Kegelschnitte

$$y = \sqrt{2px + qx^2}$$

erhält man z. B. durch zweimalige Differentiation

$$y'' = -\frac{p^2}{\sqrt{(2px + qx^2)^3}} = -\frac{p^2}{y^3}$$

und daher ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{u^3}{p^2} = -u\left(\frac{u}{p}\right)^2,$$

was sich ohne Schwierigkeit construiren lässt, wenn man z. B. $\frac{u}{p}$ als Tangente eines Winkels betrachtet. Die eleganteste Construction der Formel werden wir im §. 24 zeigen.

Für die Cycloide ist nach §. 21

$$dx = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\,d\omega, \qquad y' = \cot\tfrac{1}{2}\omega,$$

mithin

$$dy' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega}\,d\omega,$$

woraus durch Division mit dx und dessen Werthe folgt

$$y'' = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{1}{2}\omega}.$$

Dies giebt den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -4a \sin\tfrac{1}{2}\omega = -2PU$$

oder gleich dem Doppelten der Normale; der Krümmungsmittelpunkt wird demnach erhalten, wenn man die Normale PU um ihre eigene Grösse verlängert.

Für die Kettenlinie ist nach §. 21

$$y' = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right), \quad u = y \sec\tau = \frac{y^2}{k}$$

ferner

$$y'' = \frac{1}{2k}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) = \frac{y}{k^2}$$

mithin nach Nr. 3)

$$\varrho = \frac{y^2}{k} = u.$$

Die Kettenlinie hat also mit dem Kreise die Eigenschaft gemein, dass der Krümmungshalbmesser gleich der Normale ist; die Lagen sind aber einander entgegengesetzt.

II. Um die Coordinaten ξ und η des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen, braucht man nur zu berücksichtigen, dass der gesuchte Punkt auf der Normale um ϱ vom Punkte P entfernt liegt; daher ist aus einfachen geometrischen Gründen

$$x - \xi = \varrho \sin\tau, \quad \eta - y = \varrho \cos\tau$$

oder vermöge der Werthe von ϱ, $\sin\tau$ und $\cos\tau$

$$4) \qquad \xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Für die Parabel, deren Gleichung

$$y = \sqrt{2px}$$

ist, findet man hiernach

$$\xi = 3x + p, \quad \eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{p}}.$$

Wenn die Gleichung der Curve nicht in entwickelter Form gegeben ist, so müssen y' und y'' nach den Lehren des §. 16 berechnet werden.

III. Die Formeln 4) enthalten in letzter Instanz nur die drei Variabelen ξ, η und x, da man, wenigstens bei entwickelten Gleichungen von der Form $y = f(x)$, sowohl y als y' und y'' durch x ausdrücken kann. Denkt man sich aus den obigen Gleichungen x eliminirt, so bleibt nur eine Gleichung zwischen ξ und η übrig, d. h. die Gleichung derjenigen Curve, welche von den stetig aufeinanderfol-

genden Krümmungsmittelpunkten gebildet wird. Dieser geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte heisst die Evolute der gegebenen Curve, und zwar kommt diese Benennung daher, dass man sich die ursprügliche Curve durch Abwickelung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann.

Als Gleichung der Parabelevolute findet man mittelst der angegebenen Elimination

$$\eta^2 = \tfrac{8}{27}\,\frac{(\xi - p)^3}{p}$$

also eine Curve dritten Grades (die sogenannte semicubische Parabel).

Für die Ellipse, deren Gleichung unter der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

dargestellt wird, erhält man als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

Für die Hyperbel ist die Mittelpunktsgleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

daraus ergiebt sich als Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a^2 + b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Für die Cycloide gilt der bemerkenswerthe Satz, dass die Evolute eine mit ihr congruente Cycloide ist, die jedoch eine andere Lage besitzt.

§. 23.

Formeln für Polarcoordinaten.

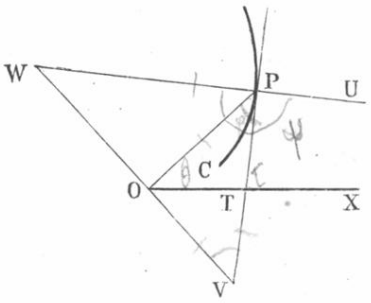
Bei dem Gebrauche von Polarcoordinaten wird meistentheils der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Abscissenachse als unabhängige Variabele betrachtet und jener Vector als abhängige Variabele; für $\angle\, XOP = \theta$ und $OP = r$ (Fig. 26 a. f. S.) ist demnach die entwickelte Gleichung der Curve von der Form

1) $$r = f(\theta),$$

woraus sich die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = f'(\theta), \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = r'' = f''(\theta) \text{ u. s. w.}$$

Fig. 26.



leicht ableiten lassen. Es fragt sich nun, welche neue Formeln an die Stelle der früheren treten, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführt.

Der Uebergang von dem einen zum anderen Coordinatensysteme geschieht bekanntlich mittelst der Formeln

2) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

eine Aenderung des θ hat nun gleichzeitige Aenderungen von r, x und y zur Folge, mithin ist

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta,$$

und durch Division unter Berücksichtigung der Formel $\frac{dy}{dx} = \tan\tau$,

$$\tan\tau = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\tan\theta + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\tan\theta}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dr}{d\theta} = r\,\frac{1 + \tan\tau\,\tan\theta}{\tan\tau - \tan\theta} = r\,\frac{1}{\tan(\tau - \theta)}$$

oder, wenn $\tau - \theta = \varphi$ gesetzt wird,

3) $$\cot\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{r}.$$

Diese Formel, die man auch durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung finden kann, löst das Problem des Tangentenziehens, denn es ist φ der Winkel zwischen der Tangente PT und dem Radiusvector OP.

Nennen wir ψ den Winkel OPU, welchen die Normale mit dem Radiusvector einschliesst, so ist $\psi = 90^0 + \varphi$, folglich

4) $$tan\,\psi = -\frac{r'}{r}.$$

Eine im Coordinatenanfange auf dem Vector errichtete Senkrechte wird von der Tangente in einem Punkte V, von der Normale in einem Punkte W geschnitten; die Strecke OV heisst dann die Polarsubtangente, OW die Polarsubnormale. Man findet $OV = r\,tan\,\varphi$ oder

5) $$Polarsubtg. = \frac{r^2}{r'},$$

6) $$Polarsubn. = r';$$

die letzte Gleichung lässt die geometrische Bedeutung von r' erkennen.

Die Formel für das Bogendifferential

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

verwandelt sich nach Substitution der Werthe von dx und dy in die folgende

7) $$ds^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2$$

oder

8) $$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = d\theta \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Zu demselben Resultate führt auch eine einfache geometrische Betrachtung.

Um endlich den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten auszudrücken, halten wir uns an die Formel

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau},$$

worin ds schon durch Nr. 8) bekannt und daher noch $d\tau$ zu berechnen ist. Die Formel 3) liefert

$$\tau - \theta = arccot\,\frac{r'}{r},$$

daher ist

$$d\tau - d\theta = -\frac{\frac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2}}{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = -\frac{r\,dr' - r'\,dr}{r^2 + r'^2}$$

$$= -\frac{r\frac{dr'}{d\theta} - r'\frac{dr}{d\theta}}{r^2 + r'^2}\,d\theta = -\frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2}\,d\theta$$

oder $$d\tau = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\, d\theta,$$

und nun ergiebt sich vermöge der Werthe von ds und $d\tau$

9) $$\varrho = \frac{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Für den Fall, dass die Gleichung der Curve unentwickelt in Polarcoordinaten gegeben ist, hat man r' und r'' nach §. 16 zu berechnen.

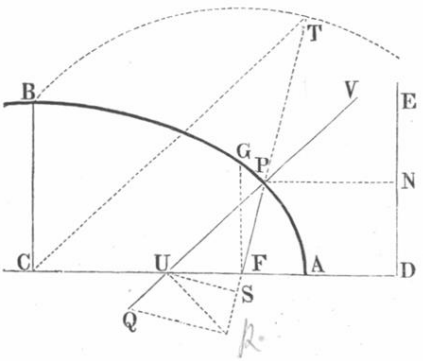
§. 24.

Beispiele zu den vorigen Formeln.

I. Die Kegelschnitte. Nimmt man den einen Brennpunkt des Kegelschnitts zum Pol, die Hauptachse zur Abscissenachse und rechnet den Winkel θ vom nächsten Scheitel aus, so ist bekanntlich die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

1) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

Fig. 27.



und in Beziehung auf Fig. 27, $FP = r$, $\angle AFP = \theta$; dabei bedeutet p den Halbparameter gleich der Brennpunktsordinate FG und ε die numerische Exentricität, d. h. das Verhältniss von r zum Abstande PN des Punktes P von der Directrix DE. Aus Nro. 1) erhält man für den Winkel $FPV = \psi$ zwischen Vector und Normale die Formel

$$\tan\psi = -\frac{\varepsilon \sin\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

und für dessen Supplement FPU, welches χ heissen möge,

$$\tan\chi = \frac{\varepsilon \sin\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

$$\cos\chi = \frac{1 + \varepsilon\cos\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}, \quad \sin\chi = \frac{\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}.$$

Hieraus kann der Winkel zwischen der Normale und der Hauptachse abgeleitet werden; es ist nämlich $\angle FUP = \theta - \chi$,

$$\sin FUP = \sin\theta\cos\chi - \cos\theta\sin\chi$$

und nach Substitution der Werthe von $\cos\chi$ und $\sin\chi$

$$\sin FUP = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}}.$$

In dem Dreiecke FPU kennt man jetzt eine Seite $FP = r$ und alle Winkel, woraus die übrigen Seiten FU und $PU = u$ leicht zu berechnen sind. Man hat zunächst

$$FU = \frac{r\sin\chi}{\sin FUP} = \varepsilon r$$

mithin

$$\frac{FU}{r} = \varepsilon = \frac{r}{PN}, \quad FU = \frac{r^2}{PN};$$

dies giebt eine neue Normalenconstruction entweder mit Hülfe der Directrix oder bequemer in der Weise, dass man auf dem Vector die Strecke FT gleich der grossen Halbachse des Kegelschnitts nimmt, T mit dem Mittelpunkte C verbindet und nachher die Normale $PU \parallel TC$ legt. Für die Normale u erhält man

$$u = \frac{r\sin\theta}{\sin FUP} = r\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}$$

mithin

$$u\cos\chi = r(1 + \varepsilon\cos\theta) = p;$$

hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Projection der Normale auf den Vector eine constante Grösse und zwar gleich dem Halbparameter ist. Nimmt man demgemäss auf dem Vector die Strecke $PS = FG$ und errichtet in S auf PS eine Senkrechte, so bestimmt letztere auf der Achse den Punkt U, durch welchen die Normale geht. Aus der obigen Gleichung ersieht man ferner die geometrische Bedeutung von $\frac{u}{p}$, und hierdurch wird die in §. 22 für den Krümmungshalbmesser entwickelte Formel zur folgenden

$$\varrho = -u\sec^2\chi,$$

deren Construction einfach darin besteht, dass man in U auf der Nor-

male eine Senkrechte errichtet, welche den Vector in R schneidet, und nachher durch R eine zu PR senkrechte Gerade legt, welche der Normalen im Krümmungsmittelpunkte Q begegnet.

II. Die Lemniscate. Auf einer Geraden sind zwei feste Punkte F und G im Abstande $FG = 2c$ gegeben, und es wird der geometrische Ort des beweglichen Punktes P für den Fall gesucht, dass das Rechteck $FP \,.\, GP$ von constantem Inhalte und zwar gleich dem Quadrate über $\frac{1}{2}FG = c$ ist. Auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen x-Achse die Gerade FG (Fig. 28) und dessen Anfang der Mittelpunkt von FG ist, lautet die Gleichung der Curve

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(c+x)^2+y^2} = c^2$$

und nach gehöriger Reduction

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Durch Einführung von Polarcoordinaten ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) wird die Gleichung einfacher

$$r^4 = 2c^2 r^2 \cos 2\theta$$

oder, wenn $c\sqrt{2} = a$ gesetzt wird,

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Hieraus ergiebt sich augenblicklich

$$\tan\psi = \tan 2\theta;$$

der spitze Winkel zwischen Vector und Normale beträgt also das Doppelte von θ, wonach die Normale sehr leicht zu construiren ist.

Fig. 28.

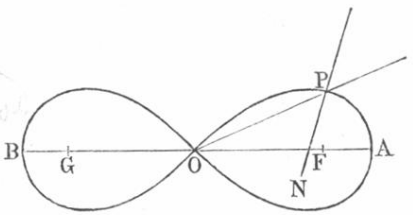
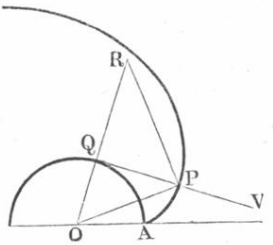


Fig. 29.



III. Die Kreisevolvente. Wenn eine Gerade ohne zu gleiten so um einen Kreis herumgedreht wird, dass sie denselben immer berührt, so beschreibt ein bestimmter Punkt der Geraden die genannte Curve. Bei der Anfangslage der Geraden sei A jener Punkt und zugleich Berührungspunkt, eine spätere Lage der Geraden sei QP, der Wälzungswinkel $AOQ = \omega$, $\angle AOP = \theta$, $AO = a$ (Fig. 29), es ist dann

$$QP = arc\, QA = a\omega,$$

mithin in dem Dreiecke OPQ

$$r = a\sqrt{1+\omega^2}, \quad tan(\omega - \theta) = \omega.$$

Durch Elimination von ω würde man aus diesen Gleichungen eine Gleichung zwischen r und θ ableiten können, doch ist es bequemer, die obigen Gleichungen ungeändert beizubehalten und ω als unabhängige Variabele zu betrachten. Man hat jetzt

$$dr = \frac{a\omega\, d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \frac{d\omega - d\theta}{cos^2(\omega-\theta)} = d\omega$$

und aus der zweiten Gleichung

$$d\theta = sin^2(\omega-\theta)\, d\omega = \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega,$$

mithin durch Division

$$r' = \frac{dr}{d\theta} = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}.$$

Setzt man wie früher $\angle\, OPV = \psi$, $\angle\, OPQ = \chi$, so ergiebt sich

$$tan\,\psi = -\frac{r'}{r} = -\frac{1}{\omega}, \quad tan\,\chi = \frac{1}{\omega} = cot(\omega-\theta),$$

es ist folglich $\chi = 90^0 - \angle\, POQ$ oder PQ die Normale, wie zu erwarten war.

Man hat ferner

$$dr' = d\left(\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}\right) = -\frac{a}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}}\, d\omega$$

und durch Division mit $d\theta$

$$r'' = -\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^4};$$

nach Formel 9) des vorigen Paragraphen ergiebt sich

$$\varrho = a\omega = PQ,$$

mithin ist Q der Krümmungsmittelpunkt, wie sich nach der Entstehungsweise der Curve erwarten liess.

§. 25.

Tangenten und Normalebenen an doppelt gekrümmten Linien.

I. Eine Curve doppelter Krümmung hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil sie als Durchschnitt zweier Flächen angesehen werden kann; sind die Gleichungen der letzteren gegeben, etwa in der Gestalt

1) $$f(x, y, z) = 0, \qquad F(x, y, z) = 0,$$

so kann man aus ihnen einmal z, einmal y eliminiren und erhält dann zwei neue Gleichungen von der Form

2) $$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x),$$

womit die Projectionen der Curve auf die xy- und auf die xz-Ebene bestimmt sind. Es mögen nun zwei Curvenpunkte P und P_1 betrachtet werden, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ heissen sollen. Die Länge der Sehne PP_1 ist

$$PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

und wenn wir die Winkel, welche PP_1 mit den Coordinatenachsen einschliesst, durch σ_x, σ_y, σ_z bezeichnen, so haben wir

$$\cos\sigma_x = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_y = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}},$$

$$\cos\sigma_z = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Bei unendlich abnehmenden Δx rücken die Punkte P und P_1 einander immer näher, die Secante dreht sich um den fest bleibenden Punkt P und geht schliesslich in die Tangente über, deren Richtung durch drei neue Winkel τ_x, τ_y, τ_z bestimmt wird; aus den vorigen Gleichungen erhalten wir jetzt die folgenden

$$3)\quad \begin{cases} \cos\tau_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \\ \cos\tau_y = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \\ \cos\tau_z = \dfrac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}. \end{cases}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der drei Brüche hat einen geometrischen Sinn. Bezeichnen wir nämlich den Bogen PP_1 mit Δs und die gleichnamige Sehne mit $\Delta\sigma$, so findet die Gleichung statt

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2};$$

bei verschwindenden Δx convergirt $\dfrac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ gegen die Grenze 1 und aus der vorigen Gleichung wird

$$4)\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

oder

$$5)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Durch Substitution von Nro. 4) in Nro. 3) erhalten wir für die Richtungswinkel der Tangente folgende Formeln:

$$6)\qquad \cos\tau_x = \frac{dx}{ds},\quad \cos\tau_y = \frac{dy}{ds},\quad \cos\tau_z = \frac{dz}{ds}.$$

Um die Gleichungen der Tangente im Punkte $x\,y\,z$ aufzustellen, nennen wir ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, r seinen Abstand vom Punkte $x\,y\,z$ und haben

$$\xi - x = r\cos\tau_x,\quad \eta - y = r\cos\tau_y,\quad \zeta - z = r\cos\tau_z$$

mithin

$$\frac{\xi-x}{\cos\tau_x} = \frac{\eta-y}{\cos\tau_y} = \frac{\zeta-z}{\cos\tau_z}$$

oder vermöge der drei angegebenen Cosinuswerthe

$$7)\qquad \frac{\xi-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta-z}{\frac{dz}{ds}}.$$

Denkt man sich die Tangente auf die Ebenen xy und xz projicirt, so gelten für die Projectionen die Gleichungen

$$8) \qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \qquad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x)$$

d. h. die Projectionen der Tangente sind die Tangenten an den gleichnamigen Projectionen der Curve, was geometrisch unmittelbar einleuchtet.

II. Eine Ebene, die senkrecht zur Tangente durch den Berührungspunkt der letzteren gelegt ist, heisst eine Normalebene der doppelt gekrümmten Curve; ihre Gleichung findet sich auf folgendem Wege. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normalebene, so muss die gesuchte Gleichung von der Form

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

sein, weil die fragliche Ebene den Punkt xyz enthalten muss. Da ferner die Normalebene senkrecht zur Tangente liegen soll, so müssen ihre Stellungswinkel identisch mit den Winkeln τ_x, τ_y, τ_z sein, woraus nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie folgt

$$A : B : C = \cos\tau_x : \cos\tau_y : \cos\tau_z .$$

Die Gleichung der Normalebene ist daher

$$\cos\tau_x(\xi - x) + \cos\tau_y(\eta - y) + \cos\tau_z(\zeta - z) = 0$$

d. h.

$$9) \qquad \frac{dx}{ds}(\xi - x) + \frac{dy}{ds}(\eta - y) + \frac{dz}{ds}(\zeta - z) = 0$$

oder auch

$$10) \qquad \xi - x + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0 .$$

Die in den vorigen Formeln auftretenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ kann man aus den Gleichungen 2) unmittelbar erhalten, wenn die Gleichungen der Curve in dieser Form gegeben sind; kennt man aber nur die beiden Flächen, als deren Durchschnitt die Linie angesehen wird, und lässt sich die im Anfange dieses Paragraphen angedeutete Elimination nicht ausführen, so muss man die Gleichungen 1) zur Entwickelung von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ benutzen. Die Differentiation derselben giebt unter Rücksicht auf den Umstand, dass eine unabhängige Variabele x und zwei abhängige Variabelen y, z vorhanden sind,

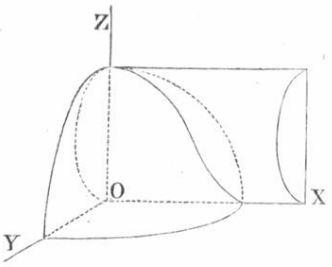
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

und hieraus findet sich durch Elimination

11)
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial z}}, \\ \dfrac{dz}{dx} = - \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial z}}. \end{cases}$$

Als Beispiel diene der Durchschnitt einer Kugelfläche mit einem Cylinder, dessen kreisförmiger Querschnitt den Kugelhalbmesser zum Durchmesser haben, und dessen Mantel durch den Kugelmittelpunkt gehen möge. Nennen wir $2a$ den Kugelhalbmesser und legen die x-Achse in die erzeugende Gerade, welche durch das Kugelcentrum geht (Fig. 30), so gelten für unsere Curve folgende Gleichungen

Fig. 30.



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0,$$
$$F(x, y, z) = y^2 - 2az + z^2 = 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - a)$$

und mittelst der Formeln in Nro. 11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(z-a)}{ay}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{a};$$

demnach sind die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = \frac{x(z-a)}{ay}(\xi - x), \quad \zeta - z = -\frac{x}{a}(\xi - x).$$

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\xi - x + \frac{x(z-a)}{ay}(\eta - y) - \frac{x}{a}(\xi - z) = 0$$

und bei gehöriger Reduction

$$\frac{a}{x}\xi + \frac{z-a}{y}\eta - \xi = 0;$$

man ersieht hieraus, dass die Normalebene immer durch den Coordinatenanfang (den Kugelmittelpunkt) geht, was bei einer sphärischen Curve zu erwarten war.

§. 26.

Die Krümmung räumlicher Curven.

I. So wie wir in §. 22 den Grenzpunkt aufsuchten, in welchen der Durchschnitt zweier benachbarter Normalen einer Plancurve überging, wenn die Normalen in einander fielen, so können wir auch bei doppelt gekrümmten Curven die Grenzlinie bestimmen, in welche der Durchschnitt zweier benachbarter Normalebenen beim Zusammenfallen dieser Ebenen fortrückt. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte P und P_1, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ heissen mögen, und legen durch jeden eine Normalebene; die Gleichungen dieser Ebenen sind

1) $$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x_1)\,dx_1 + (\eta - y_1)\,dy_1 + (\zeta - z_1)\,dz_1 = 0.$$

In Beziehung auf x, y, z betrachtet, ist die erste Gleichung unter der allgemeinen Form $f(x, y, z) = 0$ enthalten, die zweite unter der entsprechenden Form $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ oder $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0$; es gilt aber immer die Gleichung

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f(x, y, z) + \Delta f(x, y, z),$$

worin $\Delta f(x, y, z)$ die totale Differenz der Function f bedeutet, ferner ist $f(x, y, z) = 0$, mithin lässt sich die Gleichung der zweiten Normalebene durch

2) $$\Delta[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz] = 0$$

darstellen. Um noch auszudrücken, dass später die zweite Normalebene mit der ersten zusammenfallen soll, schreiben wir d statt Δ, und erhalten durch Ausführung der angedeuteten totalen Differentiation

$$\left.\begin{aligned}(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2\end{aligned}\right\} = 0$$

oder kürzer

3) $$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2.$$

Die Gleichungen des Durchschnittes beider Normalebenen würden sich jetzt dadurch finden, dass man einmal $\xi - z$, das andere Mal $\eta - y$ aus den Gleichungen 1) und 2) eliminirte; da es uns aber nur auf die Grenzlinie des Durchschnittes ankommt, so nehmen wir die Gleichung 3) statt Nro. 2), wobei der beabsichtigte Uebergang zur Grenze schon durch den Gebrauch von d statt Δ ausgesprochen ist. Indem wir die Abkürzungen

4) $$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,\quad Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

einführen, erhalten wir mittelst der angedeuteten Elimination

5) $$\begin{cases} \eta - y = \dfrac{Y}{X}(\xi - x) - \dfrac{ds^2\,dz}{X}, \\ \zeta - z = \dfrac{Z}{X}(\xi - x) + \dfrac{ds^2\,dy}{X}, \end{cases}$$

und dies sind nun die Gleichungen der Grenzlinie des Durchschnittes von zwei benachbarten Normalebenen. Die Winkel, welche die genannte Grenzlinie mit den Coordinatenachsen einschliesst, mögen ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z heissen; nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist dann

6) $$\frac{\cos\vartheta_x}{X} = \frac{\cos\vartheta_y}{Y} = \frac{\cos\vartheta_z}{Z} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Auf die hiermit bestimmte Grenzlinie fällen wir vom Punkte P eine Senkrechte PQ; den Fusspunkt Q nennen wir den zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkt, die Länge $PQ = \varrho$ den Krümmungshalbmesser. Sind nun ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z die Winkel, welche ϱ mit den Coordinatenachsen bildet, so gelten erstens die drei Gleichungen

7) $$\xi - x = \varrho\cos\varrho_x,\quad \eta - y = \varrho\cos\varrho_y,\quad \zeta - z = \varrho\cos\varrho_z,$$

ferner ist, weil die Grenzlinie und der Krümmungshalbmesser einen rechten Winkel einschliessen,

$$\cos\vartheta_x\cos\varrho_x + \cos\vartheta_y\cos\varrho_y + \cos\vartheta_z\cos\varrho_z = 0,$$

oder auch durch Substitution der sechs Cosinuswerthe aus 6) und 7)

8) $$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

Zur Bestimmung von ξ, η, ζ führt nun die Bemerkung, dass der Krümmungsmittelpunkt sowohl in der Grenzlinie 5) als auch in der Senkrechten PQ liegt, dass also ξ, η, ζ den Gleichungen 5), 7) und 8) genügen müssen; hieraus findet man

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} \xi - x &= \frac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\ \eta - y &= \frac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\ \zeta - z &= \frac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2. \end{aligned}\right.$$

Für die Grösse des Krümmungshalbmessers erhält man

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

und nach Substitution der vorigen Werthe

$$10)\quad \varrho = \frac{\sqrt{(Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (X\,dy - Y\,dx)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, entwickeln wir die unter dem Wurzelzeichen stehende Quadratsumme, geben ihr die neue Form

$$X^2(dy^2 + dz^2) + Y^2(dz^2 + dx^2) + Z^2(dx^2 + dy^2) - 2(XY\,dx\,dy + ZX\,dz\,dx + YZ\,dy\,dz)$$

und ersetzen die Coefficienten von X^2, Y^2, Z^2 durch die gleichgeltenden Werthe

$$ds^2 - dx^2, \quad ds^2 - dy^2, \quad ds^2 - dz^2;$$

die vorige Quadratsumme geht dann über in

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2 - (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)^2,$$

und hier verschwindet der Subtrahend vermöge der in Nro. 4) angegebenen Werthe von X, Y, Z. Damit verwandelt sich die Formel 10) in die folgende

$$11)\quad \varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Ferner überzeugt man sich durch gewöhnliche Ausrechnung von der Richtigkeit der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^2,$$

und kann daher statt der Formel 11) auch die folgende schreiben

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}};$$

diese ist wieder einerlei mit

$$12)\quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

wie man durch Ausführung der angedeuteten Differentiationen finden

wird. Endlich kann man die Formeln 9) durch die folgenden ersetzen

$$13)\quad \xi - x = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass man zu diesen Formeln auch auf einem anderen Wege gelangen kann, wobei der Krümmungshalbmesser als der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta \tau}$ angesehen wird, wenn $\Delta \tau$ den Winkel zwischen den Tangenten in den Punkten P und P_1 bedeutet. Wir wollen diese Betrachtung kurz durchführen, weil sie das stereometrische Seitenstück zu der auf S. 98. gegebenen Entwickelung ist. Die Tangente im Punkte P bildet mit den drei Coordinatenachsen die Winkel τ_x, τ_y, τ_z, deren Cosinus an die Gleichung

$$14)\qquad (\cos\tau_x)^2 + (\cos\tau_y)^2 + (\cos\tau_z)^2 = 1$$

gebunden sind; die Tangente im nächsten Punkte P_1 schliesst mit den Achsen drei neue Winkel ein, deren Cosinus von den vorigen Cosinus verschieden sind und durch

$$\cos\tau_x + \Delta\cos\tau_x,\ \cos\tau_y + \Delta\cos\tau_y,\ \cos\tau_z + \Delta\cos\tau_z$$

bezeichnet werden können; für dieselben gilt die entsprechende Gleichung

$$15)\quad (\cos\tau_x + \Delta\cos\tau_x)^2 + (\cos\tau_y + \Delta\cos\tau_y)^2 + (\cos\tau_z + \Delta\cos\tau_z)^2 = 1.$$

Beide Tangenten bilden mit einander den Winkel $\Delta\tau$, welcher bestimmt wird durch die Formel

$$\cos\Delta\tau = \cos\tau_x(\cos\tau_x + \Delta\cos\tau_x) + \cos\tau_y(\cos\tau_y + \Delta\cos\tau_y) + \cos\tau_z(\cos\tau_z + \Delta\cos\tau_z).$$

Subtrahirt man das Doppelte dieser Gleichung von der Summe der Gleichungen 14) und 15), so bleibt

$$2(1 - \cos\Delta\tau) = (\Delta\cos\tau_x)^2 + (\Delta\cos\tau_y)^2 + (\Delta\cos\tau_z)^2,$$

woraus folgt

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\cos\tau_x)^2 + (\Delta\cos\tau_y)^2 + (\Delta\cos\tau_z)^2}.$$

Ferner ist, wenn der Bogen PP_1 mit Δs bezeichnet wird,

$$\frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\frac{1}{2}\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta s}{2\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}$$

und nach dem Vorigen

$$\frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\frac{1}{2}\Delta\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\tau_x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\tau_y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\tau_z}{\Delta s}\right)^2}}.$$

Gehen wir nun zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta \tau$ über, so erhalten wir linker Hand

$$Lim \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{ds}{d\tau} = \varrho,$$

rechter Hand convergirt der erste Bruch gegen die Einheit, und damit gelangen wir zu der Formel

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\tau_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\tau_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\tau_z}{ds}\right)^2}},$$

welche nach Substitution der Werthe von $\cos\tau_x$, $\cos\tau_y$, $\cos\tau_z$ (Nro. 6 in §. 25) mit Formel 12) identisch wird.

Die obigen Formeln zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes sowie des Krümmungshalbmessers gelten völlig allgemein, welche auch die unabhängige Variabele sein möge; sie vereinfachen sich aber, wenn man eine der Grössen x, y, z, s als unabhängige Veränderliche betrachtet. Wird z. B. die Curve durch ihre Horizontal- und Verticalprojection bestimmt, so ist x die unabhängige Variabele, dx ein irgendwie beliebig gegen die Null convergirender und eben desshalb von x unabhängiger Zuwachs des x, folglich $d^2x = 0$; unter Benutzung der gewöhnlichen Zeichen

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi''(x) \text{ u. s. w.}$$

erhält man jetzt aus den Formeln 11) und 9)

17) $$\varrho = \sqrt{\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - y''z')^2 + y''^2 + z''^2}},$$

18) $$\begin{cases} \xi - x = -\varrho^2 \dfrac{y'y'' + z'z''}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}, \\ \eta - y = \varrho^2 \dfrac{y'' - (y'z'' - y''z')z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}, \\ \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{z'' + (y'z'' - y''z')y'}{(1 + y'^2 + z'^2)^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 18) enthalten nach Substitution der Werthe von y, y', y'', z, z', z'' und ϱ nur die vier Variabelen x, ξ, η, ζ; man kann daher durch Elimination von x zwei Gleichungen zwischen ξ, η, ζ bilden. Diese neuen Gleichungen bestimmen den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Besonders symmetrisch gestalten sich die Formeln, wenn man s als unabhängige Variabele, mithin x, y, z als Functionen von s ansieht; es ist dann $d^2s = 0$ und

19) $$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

20) $$\xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

II. Wir kehren wieder zu den Formeln 6) zurück, um eine weitere Bemerkung daran zu knüpfen. Legt man durch den Punkt P eine Ebene senkrecht zur Grenzlinie 6), so erhält man die Ebene des Krümmungskreises, die sogenannte Krümmungsebene; ihre Gleichung ist bereits in Nro. 8) gefunden worden, nämlich

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

Diese Ebene ändert ihre Lage von Punkt zu Punkt, und man kann daher den Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Krümmungsebenen bestimmen. Da der Winkel zwischen zwei Ebenen derselbe ist wie der Winkel zwischen zwei auf diesen Ebenen errichteten Perpendikeln, so brauchen wir nur den Winkel zu ermitteln, welchen zwei aufeinander folgende Grenzlinien einschliessen. Die Richtungswinkel ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z der ersten Grenzlinie befriedigen die Gleichung

$$(\cos\vartheta_x)^2 + (\cos\vartheta_y)^2 + (\cos\vartheta_z)^2 = 1;$$

die zweite Grenzlinie hat andere Richtungswinkel, deren Cosinus durch $\cos\vartheta_x + \Delta\cos\vartheta_x$, $\cos\vartheta_y + \Delta\cos\vartheta_y$, $\cos\vartheta_z + \Delta\cos\vartheta_z$ dargestellt werden können, und für welche die Gleichung gilt

$$(\cos\vartheta_x + \Delta\cos\vartheta_x)^2 + (\cos\vartheta_y + \Delta\cos\vartheta_y)^2 + (\cos\vartheta_z + \Delta\cos\vartheta_z)^2 = 1;$$

endlich bilden die beiden Grenzlinien mit einander einen Winkel $\Delta\omega$, dessen Cosinus durch folgende Formel bestimmt wird:

$$\cos\Delta\omega = \cos\vartheta_x(\cos\vartheta_x + \Delta\cos\vartheta_x) + \cos\vartheta_y(\cos\vartheta_y + \Delta\cos\vartheta_y) + \cos\vartheta_z(\cos\vartheta_z + \Delta\cos\vartheta_z).$$

Subtrahirt man das Doppelte dieser Gleichung von der Summe der beiden vorigen Gleichungen, so erhält man

$$2(1 - \cos\Delta\omega) = (\Delta\cos\vartheta_x)^2 + (\Delta\cos\vartheta_y)^2 + (\Delta\cos\vartheta_z)^2,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\omega = \sqrt{(\Delta\cos\vartheta_x)^2 + (\Delta\cos\vartheta_y)^2 + (\Delta\cos\vartheta_z)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{\Delta s}{\Delta\omega} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega}{\frac{1}{2}\Delta\omega} \cdot \frac{\Delta s}{2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\omega}{\frac{1}{2}\Delta\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\vartheta_x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\vartheta_y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\cos\vartheta_z}{\Delta s}\right)^2}};$$

beim Uebergange zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta \omega$ wird $Lim \frac{\Delta s}{\Delta \omega} = \frac{ds}{d\omega}$ und diese Grösse nennt man den Halbmesser der zweiten Krümmung oder den Torsionshalbmesser; er liegt senkrecht zum Krümmungshalbmesser und bestimmt sich durch die Formel

$$21) \qquad \varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\vartheta_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\vartheta_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\vartheta_z}{ds}\right)^2}}.$$

Differenzirt man $\cos\vartheta_x$, $\cos\vartheta_y$, $\cos\vartheta_z$, indem man ihre Werthe aus Nro. 6) nimmt und die Abkürzungen

$$22) \quad U = Y dZ - Z dY, \; V = Z dX - X dZ, \; W = X dY - Y dX,$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

einführt, so findet man leicht

$$d\cos\vartheta_x = \frac{VZ - WY}{R^3}, \; d\cos\vartheta_y = \frac{WX - UZ}{R^3}, \; d\cos\vartheta_z = \frac{UY - VX}{R^3},$$

$$(d\cos\vartheta_x)^2 + (d\cos\vartheta_y)^2 + (d\cos\vartheta_z)^2$$
$$= \frac{(U^2 + V^2 + W^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (UX + VY + WZ)^2}{R^6};$$

zufolge der Werthe von U, V, W ist aber $UX + VY + WZ = 0$, mithin

$$(d\cos\vartheta_x)^2 + (d\cos\vartheta_y)^2 + (d\cos\vartheta_z)^2 = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{R^4},$$

$$23) \qquad \varrho_1 = \frac{R^2 ds}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Um U, V, W weiter zu entwickeln, berechnen wir zuerst

$$dX = dy\, d^3z - dz\, d^3y, \; dY = dz\, d^3x - dx\, d^3z,$$
$$dZ = dx\, d^3y - dy\, d^3x,$$

und leiten hieraus U, V, W nach Nro. 22) ab, indem wir zur Abkürzung setzen

$$24) \quad S = (d^2x\, d^3y - d^2y\, d^3x)\, dz + (d^2z\, d^3x - d^2x\, d^3z)\, dy$$
$$+ (d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y)\, dx;$$

wir erhalten

$$U = S dx, \quad V = S dy, \quad W = S dz,$$
$$\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = S\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = S ds,$$

mithin nach Nro. 23)

$$25) \qquad \varrho_1 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{S}.$$

Wenn für alle Punkte einer Curve die Gleichung $S = 0$ besteht, so ist $\varrho_1 = \infty$, d. h. je zwei auf einander folgende Krümmungsebenen fallen zusammen. Die Gleichung $S = 0$ spricht also die allgemeine Bedingung aus, unter welcher eine im Raume liegende Curve eben ist.

§. 27.

Tangentialebenen und Normalen an Flächen.

Die Gleichung einer Fläche kann entweder in der unentwickelten Form

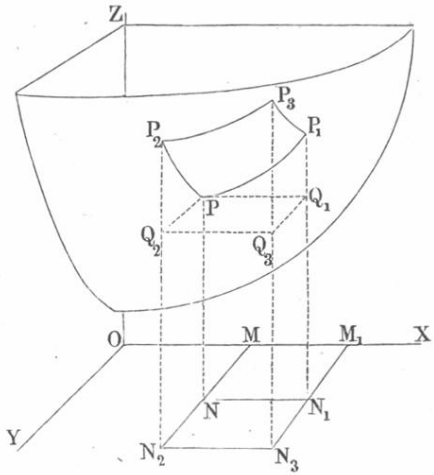
1) $$F(x, y, z) = 0$$

oder in der entwickelten Form

2) $$z = f(x, y)$$

gegeben sein, jedenfalls enthält sie zwei unabhängige Variabele, welche in Fig. 31 durch die Coordinaten $OM = x$ und $MN = y$ dargestellt sind, während die dritte Coordinate $NP = z$ von x und y abhängt. Einer partiellen Aenderung des x um $MM_1 = NN_1 = \Delta x$ entspricht eine partielle Aenderung des z, welche durch Δz_x bezeichnet werden möge; ebenso führt die partielle Aenderung des y, nämlich $NN_2 = \Delta y$, zu einer zweiten partiellen Aenderung des z, die Δz_y heissen möge. Durch die drei Punkte P, P_1, P_2, deren Coordinaten sind

Fig. 31.



$$x, y, z; \quad x + \Delta x, y, z + \Delta z_x; \quad x, y + \Delta y, z + \Delta z_y,$$

legen wir eine Ebene, und es sei die Gleichung der letzteren

3) $$\zeta = A\xi + B\eta + C;$$

die Coefficienten A, B, C müssen dann folgende Bedingungen erfüllen

4)
$$z = Ax + By + C,$$
$$z + \Delta z_x = A(x + \Delta x) + By + C,$$
$$z + \Delta z_y = Ax + B(y + \Delta y) + C.$$

Hieraus erhält man leicht

$$A = \frac{\Delta z_x}{\Delta x}, \quad B = \frac{\Delta z_y}{\Delta y}, \quad C = z - \frac{\Delta z_x}{\Delta x} x - \frac{\Delta z_y}{\Delta y} y,$$

mithin ist die Gleichung der Schnittebene $P P_1 P_2$

$$\xi - z = \frac{\Delta z_x}{\Delta x} (\xi - x) + \frac{\Delta z_y}{\Delta y} (\eta - y).$$

Bei verschwindenden Δx und Δy fallen die Punkte P, P_1, P_2 in einander, die von der Ebene abgeschnittene Kappe zieht sich auf einen Punkt zusammen, die Schnittebene wird zur Berührungsebene, die partiellen Differenzenquotienten $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ gehen in die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ über, und daher ergiebt sich

5)
$$\xi - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y} (\eta - y)$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Dass wirklich diese Ebene alle durch den Punkt xyz gehenden Tangenten der Fläche in sich enthält und daher mit Recht die Berührungsebene heisst, kann man auf folgende Weise sehen. Durch zwei Punkte der Fläche, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sein mögen, legen wir eine Gerade; ihre Gleichungen sind

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} (\xi - x), \quad \xi - z = \frac{\Delta z}{\Delta x} (\xi - x).$$

Halten wir den ersten Punkt fest und lassen Δx, Δy, Δz gegen die Null convergiren, so wird die Secante zur Tangente, und die Gleichungen der letzteren sind

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x), \quad \xi - z = \frac{dz}{dx} (\xi - x).$$

Der Uebergang von einem Flächenpunkte zum anderen geschieht nun im Allgemeinen auf die Weise, dass man sowohl Δx als Δy willkührlich wählt und die entsprechende totale Aenderung des z berechnet; es ist daher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mithin auch $\frac{dy}{dx}$ eine ganz beliebige Grösse q und zwar, geometrisch betrachtet, die trigonometrische Tan-

gente des Winkels zwischen der x-Achse und der Horizontalprojection der Tangente. Andererseits hat man

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,q,$$

folglich als Gleichungen irgend einer durch den Punkt xyz gelegten Tangente

$$\eta - y = q(\xi - x), \quad \zeta - z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}q\right)(\xi - x).$$

Lässt man den Winkel zwischen der x-Achse und der Horizontalprojection der Tangente von 0^0 bis 360^0 gehen, mithin q alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man rings um den Punkt xyz herum alle Tangenten der Fläche; die Gleichung des geometrischen Ortes jener Tangenten ergiebt sich durch Elimination von q aus den beiden vorigen Gleichungen, und sie ist identisch mit der Gleichung 5).

Die Winkel, welche irgend eine auf der Tangentialebene errichtete Senkrechte mit den Coordinatenachsen einschliesst (die sogenannten Stellungswinkel der Ebene), mögen ν_x, ν_y, ν_z heissen; nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie erhält man dafür aus Nr. 5)

6)
$$\begin{cases} \cos\nu_x = -\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \\ \cos\nu_y = -\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \\ \cos\nu_z = +\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \end{cases}$$

Eine im Berührungspunkte der Tangentialebene auf letzterer errichtete Senkrechte wird die Normale der Fläche genannt; ihre Richtungswinkel sind identisch mit ν_x, ν_y, ν_z und daher durch die Formeln 6) gegeben. Da ausserdem die Normale durch den Punkt xyz gehen muss, so sind ihre Gleichungen nach bekannten Regeln leicht aufzustellen; man findet

7) $$\xi - x = -\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z),$$

wobei man sich die Normale auf die Ebenen xz und yz projicirt zu denken hat.

Die in den Formeln 5), 6) und 7) vorkommenden partiellen Differentialquotienten berechnet man entweder direct aus Nro. 2) oder aus Nro. 1) nach den Formeln

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Im letzteren Falle nimmt die Gleichung der Berührungsebene folgende symmetrische Gestalt an

8) $$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

9) $$N = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

so erhält man aus Nro. 6)

10) $$\cos \nu_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{N}, \quad \cos \nu_y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{N}, \quad \cos \nu_z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{N},$$

und als Gleichungen der Normale:

11) $$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Passende Beispiele für alle diese Formeln bieten die Flächen zweiten Grades; bei den Flächen ohne Mittelpunkt, deren Gleichungen von der Form $z = Ax^2 + By^2$ sind, wird man sich der Formeln 5), 6) und 7) bedienen; bei den centralen Flächen, deren Gleichungen in dem Schema $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ enthalten sind, ist die Anwendung der Formeln 8) bis 11) bequemer, weil man damit Wurzelzeichen vermeidet. Für das dreiachsige Ellipsoid z. B., dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist, findet man als Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1,$$

woraus folgt, dass die Strecken, welche die Berührungsebene von den Coordinatenachsen abschneidet, der Reihe nach $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$ und $\frac{c^2}{z}$ sind.

§. 28.

Die Krümmung der Flächen.

Um die in einem bestimmten Punkte stattfindende Krümmung einer Fläche kennen zu lernen, ist es das Natürlichste, durch jenen Punkt eine Normale auf die Fläche, durch diese Normale eine Reihe von sonst beliebigen Ebenen zu legen und die Krümmungen zu untersuchen, welche die Durchschnitte dieser Ebenen und der Fläche besitzen. Dieser Gedanke lässt sich auf folgende Weise ausführen. Die Gleichungen der Normale im Punkte xyz mögen sein

1) $\xi - x + p(\zeta - z) = 0$ und $\eta - y + q(\zeta - z) = 0$,

wobei wir zur Abkürzung

2) $$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt haben; die Gleichung einer beliebigen Ebene sei

3) $$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1;$$

soll diese Ebene die Normale in sich enthalten, so muss die Gleichung 3) auch dann noch bestehen, wenn man statt ξ und η die aus Nro. 1) entnommenen Werthe einsetzt; dies giebt

$$(\gamma - \alpha p - \beta q)\,\zeta + \alpha x + \beta y + (\alpha p + \beta q)\,z = 1,$$

und diese Gleichung kann für jedes ζ nur dann erfüllt sein, wenn gleichzeitig die Beziehungen

4) $$\gamma = \alpha p + \beta q,$$

5) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

stattfinden. Die so bestimmte durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittslinie, die wir einen Normalschnitt nennen wollen; die Gleichungen desselben würde man dadurch finden, dass man erstlich in Nro. 3) x, y, z für ξ, η, ζ setzte, wodurch man auf die Gleichung 5) kommt, und dann aus dieser und der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ einmal z, das andere Mal y eliminirte. Für die Krümmung des Schnittes hat man, x als unabhängige Variabele angesehen,

6) $$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3};$$

ferner durch Differentiation der Gleichungen der Fläche und der Ebene:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = p\,dx + q\,dy,$$

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0,$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y,$$

$$\beta\,d^2y + \gamma\,d^2z = 0,$$

wobei von folgenden Abkürzungen Gebrauch gemacht worden ist:

7) $$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man durch gewöhnliche Elimination:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta + q\gamma}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

8) $$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = M,$$

so findet sich für die zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M\gamma}{\beta + q\gamma},\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M\beta}{\beta + q\gamma}.$$

Bevor wir diese Werthe in die Formel 6) einsetzen, bemerken wir noch folgende Transformationen:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + q\gamma)^2 + (\alpha + p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2}{(\beta + q\gamma)^2}$$

wobei sich der Zähler mit Rücksicht auf $\gamma = p\alpha + q\beta$ in die Form bringen lässt:

$$\alpha^2(1+q^2) + \beta^2(1+p^2) + 2(\alpha p + \beta q)\gamma + (p^2+q^2)\gamma^2 - 2\alpha\beta pq$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) - \alpha^2p^2 - \beta^2q^2 - 2\alpha\beta pq + \gamma^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2);$$

demnach ist also

9) $$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)N^2}{(\beta + \gamma q)^2},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

10) $$N^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Man hat nun weiter

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx^3} = \frac{-\beta(\alpha+\gamma p)+\gamma(p\beta-q\alpha)}{(\beta+\gamma q)^2}M = -\frac{\alpha M}{\beta+\gamma q}$$

und zufolge der oben bestimmten zweiten Differentialquotienten von y und x:

$$\left(\frac{dy\,d^2x - dz\,d^2y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)M^2}{(\beta+\gamma q)^2}.$$

Mittelst dieses Werthes und der in Nro. 9) bemerkten Substitution erhält man für die Krümmung des Normalschnittes:

11) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M(\beta+\gamma q)^2}{N^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

oder auch durch Elimination von $\beta + \gamma q$ aus 9) und 11):

12) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M dx^2}{N(dx^2+dy^2+dz^2)}$$

Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y', setzt für dz seinen Werth $p\,dx + q\,dy = (p + qy')\,dx$, und für M den ursprünglichen Ausdruck $r + 2sy' + ty'^2$, so hat man noch

13) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{N[1+y'^2+(p+qy')^2]}.$$

In diesem Ausdrucke für die Krümmung eines Normalschnittes sind die partiellen Differentialquotienten p, q, r, s, t von der Natur der Fläche einzig und allein abhängig, unabhängig dagegen von α, β, γ, d. h. von der Lage des Schnittes gegen die Normale oder gegen die Tangentialebene, nur y' enthält α, β, γ; denn es ist

$$y' = -\frac{\alpha+\gamma p}{\beta+\gamma q} = -\frac{\alpha+(\alpha p+\beta q)p}{\beta+(\alpha p+\beta q)q} = -\frac{1+p+\frac{\beta}{\alpha}pq}{\frac{\beta}{\alpha}(1+q^2)+pq}$$

und es hängt demnach y', mithin auch die Krümmung des Normalschnittes, von dem Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ ab. Aendert man dieses fortwährend, so dreht sich die Ebene des Normalschnittes um die Normale, zugleich erhalten y' und $\frac{1}{\varrho}$ andere Werthe und man kann demnach die Krümmung als Function von y' ansehen. Nach dem Theoreme in §. 8, I. nimmt dieselbe zu, so lange der Differentialquotient $d\left(\frac{1}{\varrho}\right) : dy'$ positiv bleibt, und sie nimmt ab, so lange

er negativ ist; ein Wechsel der Krümmung findet also in dem Falle statt, wo

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dy'} = 0$$

wird; durch Ausführung dieser Differentiation erhält man als Bedingung dafür

14) $$\varrho\,(s + ty') = N[y' + (p + qy')\,q].$$

Eliminirt man ϱ aus dieser und der Krümmungsgleichung, so folgt

$$\frac{r + 2sy' + ty'^2}{s + ty'} = \frac{1 + y'^2 + (p + qy')^2}{pq + (1 + q^2)\,y'}$$

und durch Entwickelung nach Potenzen von y':

15) $$[(1 + q^2)s - pqt]y'^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\,y' + pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt nun diejenigen Werthe von y', mithin auch die Werthe des Verhältnisses $\frac{\beta}{\alpha}$, für welche ein Wechsel der Krümmung, also eine grösste oder kleinste Krümmung stattfindet. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass die Differentialquotienten p, q, r, s, t in dem Punkte xyz endliche bestimmte Werthe haben, dass also xyz keinen ausgezeichneten Punkt (wie z. B. eine Spitze) bedeutet. Die Gleichung 15) zeigt nun die Existenz von zwei Hauptnormalschnitten, deren gegenseitige Lage man dadurch erfahren kann, dass man die Gleichung vereinfacht, indem man den Punkt xyz zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Tangentialebene im Punkte xyz zur Ebene xy nimmt. Es ist in diesem Falle $x = y = z = 0$, ferner constant $\zeta = 0$; die Gleichung der Tangentialebene wird $p\xi + q\eta = 0$ und diese kann für alle η und ξ nur bestehen, wenn $p = q = 0$ ist. Die Gleichung 15) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$y'^2 + \frac{r - t}{s}\,y' - 1 = 0,$$

welche immer zwei reelle Wurzeln besitzt. Ist nun weiter $y = x \tan\omega$ die Gleichung der Spur, welche ein Hauptnormalschnitt mit der Coordinatenebene xy (der Tangentialebene) bildet, so hat man

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\omega,$$

mithin statt der vorigen Gleichung die folgende:

$$tan^2\omega + \frac{r-t}{s} tan\,\omega - 1 = 0,$$

deren Wurzeln $tan\,\omega_1$ und $tan\,\omega_2$ heissen mögen; für diese gelten die beiden Beziehungen

$$tan\,\omega_1 + tan\,\omega_2 = \frac{t-r}{s}, \quad tan\,\omega_1\, tan\,\omega_2 = -1,$$

deren letztere identisch mit der Gleichung $cos(\omega_1 - \omega_2) = 0$ ist. Daraus folgt $\omega_1 - \omega_2 = \pm\frac{1}{2}\pi$, oder mit anderen Worten, dass die Hauptnormalschnitte auf einander s e n k r e c h t stehen.

Statt der Gleichung 15) kann man auch eine quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser selbst sind; sie ergiebt sich, wenn man aus den Gleichungen 13) und 14) nicht ϱ, sondern y' eliminirt, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{N} = \lambda$$

gesetzt werden möge. Die fraglichen Gleichungen sind dann

$$\lambda(r + 2sy' + ty'^2) = 1 + y'^2 + (p + qy')^2$$
$$\lambda(s + ty') = pq + (1 + q^2)y',$$

und wenn man y' aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt, so erhält man zunächst:

$$\lambda[r(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2s(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq) + t(\lambda s - pq)^2]$$
$$= (1 + p^2)(1 + q^2 - \lambda t)^2 + 2pq(1 + q^2 - \lambda t)(\lambda s - pq)$$
$$+ (1 + q^2)(\lambda s - pq)^2,$$

oder durch Reduction auf Null:

$$(1 + q^2 - \lambda t)[(1 + p^2 - \lambda r)(1 + q^2 - \lambda t) - (pq - \lambda s)^2] = 0.$$

Hier kann nun der erste Factor nicht $= 0$ sein, weil sonst der vorhin substituirte Werth von y', nämlich

$$y' = \frac{\lambda s - pq}{1 + q^2 - \lambda t}$$

unendlich oder unbestimmt (wenn zugleich der Zähler verschwände) werden würde, was Beides im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es muss daher der zweite Factor $= 0$ gesetzt werden und dies giebt bei Entwickelung der Potenzen von λ:

$$(rt - s^2)\lambda^2 - [r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)]\lambda + 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

und vermöge des Werthes von λ und der Bedeutung von N:

16) $$(rt - s^2)\varrho^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]N\varrho + N^4 = 0.$$

Nennen wir ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so finden zwischen dem grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser im Punkte xyz die Beziehungen statt:

$$17) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2} N,$$

$$18) \qquad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{N^4}{rt - s^2}.$$

Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte standen sowohl aufeinander als auch auf der Tangentialebene senkrecht; es liegt daher nahe, diese drei Ebenen zu Coordinatenebenen zu wählen, so dass nunmehr die vorhin betrachteten Winkel ω_1 und ω_2 die Werthe $\omega_1 = 0$ und $\omega_2 = \frac{1}{2}\pi$ erhalten müssen. Die Gleichung

$$tan\,\omega_1 + tan\,\omega_2 = \frac{r-t}{s}$$

wird jetzt $\infty = \frac{r-t}{s}$ und zeigt, dass für diesen Fall $s = 0$ sein muss, weil im Allgemeinen r und t endliche Werthe besitzen. Die Formel 13) wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r + t y'^2}{1 + y'^2},$$

oder wenn $y' = tan\,v$ gesetzt wird, wo v die Neigung der Ebene irgend eines Normalschnittes gegen die Ebene des ersten Hauptschnittes (ϱ_1) bezeichnet:

$$\frac{1}{\varrho} = r\,cos^2 v + t\,sin^2 v.$$

Für die Hauptschnitte ist $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}\pi$, also

$$\frac{1}{\varrho_1} = r, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = t,$$

mithin durch Substitution in die vorhergehende Gleichung:

$$19) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{cos^2 v}{\varrho_1} + \frac{sin^2 v}{\varrho_2}.$$

Die Gleichungen 17), 18) und 19) bestimmen vollständig die Krümmungen der verschiedenen durch einen Punkt xyz gelegten Normalschnitte; aus 17) und 18) erhält man die Krümmungen der Hauptschnitte, aus 19) die Krümmung eines beliebigen anderen Normalschnittes, welcher mit dem ersten Hauptschnitte den Winkel v bildet.

Bemerkenswerth ist noch der specielle Fall, in welchem man den x, y, z solche Werthe ertheilt, dass

20) $$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

wird; es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{rt} = \frac{p^2q^2}{s^2}, \quad \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{p^2q^2} = \frac{rt}{s^2},$$

woraus man leicht findet:

$$1 + p^2 + q^2 = N^2 = p^2q^2\,\frac{rt-s^2}{s^2}.$$

Die Gleichung 16) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$\varrho^2 - \frac{2pqN}{s}\,\varrho + \frac{p^2q^2N^2}{s^2} = 0,$$

welche die gleichen Wurzeln

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{pq}{s}\,N$$

besitzt. Aus Nro. 19) erkennt man weiter, dass jeder Normalschnitt durch diesen Punkt dieselbe Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}$ besitzt; der fragliche Punkt heisst dann ein Kreispunkt der Fläche. Durch Verbindung der zwei in Nro. 20) aufgestellten Gleichungen mit der Gleichung der Fläche erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z.

Besitzen die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ der beiden Hauptschnitte dasselbe Vorzeichen, so kommt dieses auch der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ jedes anderen durch denselben Punkt gelegten Normalschnittes zu, wie man aus Nro. 19) augenblicklich ersieht. Dann kehren sämmtliche Normalschnitte des Punktes ihre convexen Seiten derselben Gegend des Raumes zu und die Berührungsebene liegt gänzlich auf der einen Seite der Fläche. Wenn dagegen ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist (nach derselben Gegend des Raumes hin) der eine Hauptschnitt convex, der andere concav, und die Krümmung wechselt zwischen beiden Schnitten ihr Zeichen; die Tangentialebene liegt in diesem Falle nicht auf einer Seite der Fläche, sondern schneidet dieselbe in ihrem späteren Verlaufe. Eine derartige Fläche entsteht z. B. durch Umdrehung einer ebenen Curve, die der Drehungsachse ihre convexe Seite zuwendet.

Ausser den obigen zwei Gattungen von Flächen, welche die Namen der concav-concaven und der convex-concaven Flächen führen,

giebt es noch eine dritte Art, welche den Uebergang von der einen zur anderen Gattung bildet; es sind dies die Flächen, an denen der eine Hauptschnitt in jedem Punkte die Krümmung Null besitzt, d. h. eine gerade Linie ist. Da in jedem Falle die Tangentialebene die Tangenten der Normalschnitte, also auch die Tangente des geradlinigen Normalschnittes enthält, so ist unmittelbar klar, dass den genannten Flächen die Eigenschaft zukommt, von einer Ebene nicht nur in einem Punkte, sondern in einer Geraden berührt zu werden. Nennen wir $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ die Krümmung einer Fläche, so ist für diese Flächen die Krümmung gleich Null, als analytisches Kennzeichen dafür ergiebt sich aus Nr. 18) $rt - s^2 = 0$, oder:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = 0.$$

Die durch diese Gleichung charakterisirten Flächen sind übrigens sämmtlich abwickelbar, und darin unterscheiden sie sich geometrisch von den vorigen Flächenarten. Weitere Auseinandersetzungen hierüber gehören in die höhere Geometrie.

§. 29.

Einhüllende Curven.

In der Gleichung einer ebenen krummen Linie kommen ausser den Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes gewöhnlich noch constante Grössen (sogenannte Parameter) vor, wodurch sich die Dimensionen, Gestalt oder Lage der Linie bestimmen; eine solche Constante sei h und

1) $$F(x, y, h) = 0$$

die Gleichung der betreffenden Curve. Giebt man dem h verschiedene Werthe δ, 2δ, 3δ, 4δ etc., so erhält man eine Reihenfolge von Curven derselben Art, die sich aber in ihren Dimensionen, Gestalten oder Lagen von einander unterscheiden. Hierbei kann es geschehen, dass jede solche Curve die nächste schneidet, und in diesem Falle entsteht die Frage nach dem geometrischen Orte der Durchschnittspunkte. Nennen wir k irgend einen individuellen Werth des h, und $k + \delta$ den nächsten Werth von h, so gelten für den Durchschnitt der beiden entsprechenden Curven gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$F(x, y, k) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, k + \delta) = 0$$

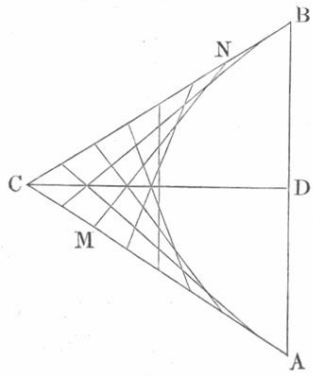
oder auch

$$2) \qquad F(x, y, k) = 0 \text{ und } \frac{F(x, y, k + \delta) - F(x, y, k)}{\delta} = 0;$$

die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes findet sich nun durch Elimination von k aus diesen beiden Gleichungen und würde von der Form $f(x, y, \delta) = 0$ sein. Lassen wir δ gegen die Null convergiren, so folgen die anfangs genannten Curven stetig aufeinander und die Grenzgleichung $f(x, y) = 0$ bestimmt den geometrischen Ort ihrer gleichfalls continuirlich aufeinander folgenden Durchschnittspunkte. Dieser geometrische Ort heisst die einhüllende Curve jener Schaar von Linien; ihre Gleichung ergiebt sich durch Elimination von k aus den beiden Gleichungen

$$3) \qquad F(x, y, k) = 0 \text{ und } \frac{\partial F(x, y, k)}{\partial k} = 0.$$

Fig. 32.



I. Das erste Beispiel hierzu mag etwas ausführlicher betrachtet werden. In einem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Figur 32), dessen Schenkel $AC = BC = c$ sein mögen, zieht man die Geraden MN so, dass immer $CM = BN$ ist; man sucht die Einhüllende aller dieser Geraden. Nehmen wir AC als Abscissen-, BC als Ordinatenachse und setzen

$$CM = BN = k,$$

so sind die Gleichungen zweier solchen Geraden

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c - k} = 1, \qquad \frac{x}{k + \delta} + \frac{y}{c - (k + \delta)} = 1,$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft, die zweite Gleichung von der ersten abzieht und mit δ dividirt,

$$(c - k)\, x + k y = k\,(c - k),$$
$$2k - c - x + y + \delta = 0.$$

Der zweiten Gleichung kann man den Werth von k entnehmen und in die erste substituiren; die Gleichung des gesuchten Ortes lautet dann

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 - \delta^2 = 0,$$

und bestimmt eine Parabel, auf welcher die Durchschnitte aller Geraden liegen, welche dadurch entstehen, dass M und N jedesmal um δ fortrücken. Für stetig nach einander folgende Gerade hat man daher als Gleichung der einhüllenden Curve

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = 0$$

oder

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

Dasselbe findet man unmittelbar, wenn man k aus den Gleichungen

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{c-k} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{k^2} + \frac{y}{(c-k)^2} = 0$$

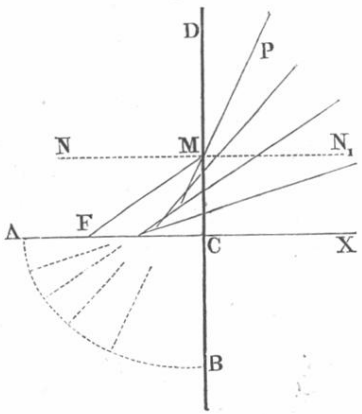
eliminirt*). Beiläufig werde noch bemerkt, dass der Scheitel dieser Parabel in der Mitte der Dreieckshöhe CD liegt, dass sie von AC und BC berührt wird, und dass ihr Halbparameter $= \frac{\overline{BD}^2}{CD}$ ist.

II. In Fig. 33 sei F ein leuchtender Punkt, CD die Trennungslinie zweier durchsichtigen Media von verschiedener Brechbarkeit, FM ein Lichtstrahl, welcher bei M jene Trennungslinie trifft und nach dem bekannten Gesetze

$$\frac{\sin N_1 MP}{\sin N MF} = m$$

gebrochen wird; man sucht die einhüllende Curve aller gebrochenen Strahlen.

Fig. 33.



Nimmt man C zum Coordinatenanfang, den ungebrochenen Strahl CX zur x-Achse, CD zur y-Achse und setzt $FC = c$, $CM = k$, $1 - m^2 = n^2$, so ist die Gleichung irgend eines gebrochenen Strahles MP

*) Man ersieht hieraus sehr klar die Bedeutung des Differentiales. Denkt man sich nämlich die verschiedenen Punkte M in gleichen Abständen, so ist δ ein aliquoter Theil von c, etwa $\delta = \frac{c}{n}$; andererseits muss δ, insofern es einen Zuwachs von k darstellt, mit Δk bezeichnet

$$y = \frac{mk}{\sqrt{c^2 + n^2 k^2}} x + k$$

oder

4) $$m^2 k^2 x^2 - (c^2 + n^2 k^2)(y - k)^2 = 0.$$

Partiell in Beziehung auf k differenzirt giebt dies

5) $$m^2 k x^2 + (c^2 + n^2 k^2)(y - k) - n^2 k (y - k)^2 = 0;$$

multiplicirt man dies mit k und subtrahirt von dem Producte die Gleichung 4), so lässt sich der Rest mit $y - k$ dividiren und bleibt

$$c^2 y + n^2 k^3 = 0 \quad \text{oder} \quad k = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}};$$

multiplicirt man dagegen Nr. 5) mit $y - k$ und addirt Nr. 4), so kommt

$$m^2 x^2 y - n^2 (y - k)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad y - k = \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}.$$

Indem man hierzu den vorigen Werth von k addirt, erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve

$$y = -\sqrt[3]{\frac{c^2 y}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{m^2 x^2 y}{n^2}}$$

oder

6) $$\left(\frac{mx}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Für $m > 1$ charakterisirt diese Gleichung die Evolute einer Ellipse, für $m < 1$ eine Hyperbelevolute; die gebrochenen Strahlen stehen also im ersten Falle auf einer Ellipse, im zweiten Falle auf einer Hyperbel senkrecht. In jedem Falle ist F ein Brennpunkt des Kegelschnitts und seine Haupthalbachse $= mc$ oder $= \frac{c}{\mu}$, wenn μ den sogenannten Brechungsexponenten bezeichnet.

III. Man sucht die einhüllende Curve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer gegebenen Ellipse liegen und deren Peripherien durch den Mittelpunkt derselben Ellipse gehen. Nimmt man die Achsen der Ellipse $CA = a$, $CB = b$ (Fig. 34 a. f. S.) zu Coordinatenachsen und bezeichnet die Coordinaten eines Ellipsenpunktes mit p und q, sowie mit r den Radius eines Kreises, welcher pq zum Mittelpunkte hat und durch C geht, so gelten, den angegebenen Bedingungen gemäss, folgende Gleichungen:

---

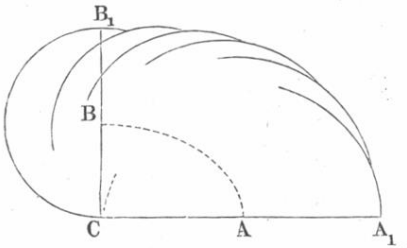
werden, und es ist daher $\Delta k = \frac{c}{n}$. Bei unendlich wachsenden n, d. h. bei stetiger Aufeinanderfolge der Punkte M, convergirt Δk gegen den asymptotischen Werth Null und in diesem Falle tritt dk an die Stelle von Δk.

7) $$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1,$$
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2;$$
$$p^2 + q^2 = r^2.$$

aus den beiden letzten folgt

8) $$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Fig. 34.



Der veränderliche Parameter ist hier p, und für q wäre sein Werth aus Nro. 7) zu substituiren, doch bleibt die Rechnung symmetrischer, wenn man die zwei Gleichungen 7) und 8) mit p und q beibehält. Durch partielle Differentiation derselben erhält man

$$\frac{p}{a^2} + \frac{q}{b^2}\frac{\partial q}{\partial p} = 0, \qquad x + y\frac{\partial q}{\partial p} = 0,$$

und nach Elimination von $\frac{\partial q}{\partial p}$

9) $$\frac{py}{a^2} - \frac{qx}{b^2} = 0.$$

Aus den Gleichungen 7) und 9) finden sich p und q, und wenn man deren Werthe in Nro. 8) substituirt, so ergiebt sich

10) $$(x^2+y^2)^2 = (2a)^2x^2 + (2b)^2y^2$$

als Gleichung der gesuchten Curve; letztere ist die Fusspunktlinie einer aus den Halbachsen $2a$ und $2b$ construirten Ellipse.

IV. Die Modification des allgemeinen Verfahrens, welche im letzten Beispiele benutzt wurde, kann allgemein auf folgende Weise dargestellt werden. Die Gleichung der veränderlichen Curve sei

11) $$F(x, y, \varkappa, \lambda) = 0$$

und enthalte zwei veränderliche Parameter $\varkappa$ und λ, welche aber nicht von einander unabhängig, sondern durch die Bedingungsgleichung

12) $$\varphi(\varkappa, \lambda) = 0$$

verbunden sein mögen. Das Nächstliegende wäre nun, erst λ aus 11) und 12) zu eliminiren und dann partiell in Beziehung auf $\varkappa$ zu differenziren; man kann aber auch den umgekehrten Weg gehen,

wenn man die Aenderung beachtet, welche λ in Folge der Aenderung von $\varkappa$ erleidet. Aus Nro. 11) folgt nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} = 0,$$

andererseits ist nach Nro. 12)

$$\frac{d\lambda}{d\varkappa} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung substituirt, so erhält man

13) $$\frac{\frac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und λ aus den drei Gleichungen 11), 12) und 13) gelangt man wieder zur Gleichung der einhüllenden Curve.

§. 30.

Einhüllende Flächen.

I. Die im Eingange von §. 29 angestellten Betrachtungen sind fast wörtlich auf den Fall ausdehnbar, wo die einhüllende Fläche einer Schaar von Flächen gesucht wird, welche dadurch entstehen, dass man in der Flächengleichung

$$F(x, y, z, \varkappa) = 0$$

der Constanten $\varkappa$ stetig aufeinander folgende verschiedene Werthe beilegt; die Gleichung der einhüllenden Fläche ergiebt sich nämlich, indem man aus den Gleichungen

1) $$F(x, y, z, \varkappa) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, z, \varkappa)}{\partial \varkappa} = 0$$

die Grösse $\varkappa$ eliminirt.

Lässt man z. B. den Mittelpunkt einer Kugelfläche auf der z-Achse fortrücken und gleichzeitig den Radius proportional dem Abstande des Centrums vom Coordinatenanfange wachsen, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + (z - \varkappa)^2 = (q\varkappa)^2;$$

partiell in Beziehung auf $\varkappa$ differenzirt giebt dies

$$-(z-\varkappa) = q^2\varkappa$$

und durch Elimination von $\varkappa$ findet sich

$$x^2 + y^2 = \frac{q^2}{1-q^2} z^2$$

als Gleichung der einhüllenden Fläche. Für $q^2 < 1$ ist letztere ein Rotationskegel, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt, und dessen Seite mit der Achse den Winkel *arcsin q* einschliesst.

Auch in dem Falle, wo die Gleichung der gegebenen Fläche zwei Parameter enthält und letztere einer bestimmten Bedingung genügen müssen, kommt man wieder auf ähnliche Erörterungen, wie in Nro. IV. des vorigen Paragraphen; aus den gegebenen Gleichungen

2) $$F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\varkappa, \lambda) = 0$$

folgt nämlich durch Differentiation

3) $$\frac{\frac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}},$$

und nachher sind $\varkappa$ und λ aus allen drei Gleichungen zu eliminiren.

Endlich kann es auch vorkommen, dass die gegebene Flächengleichung drei veränderliche Parameter enthält, welche an zwei Bedingungen gebunden sind, dass also folgende drei Gleichungen vorliegen

4) $$\begin{cases} F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \\ \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0, \quad \psi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0. \end{cases}$$

In diesem Falle sind λ und μ implicite Functionen von $\varkappa$ und daher führt die Aenderung von $\varkappa$ zu den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varkappa} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\varkappa} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen bestimmen $\frac{\partial \lambda}{\partial \varkappa}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$; setzt man deren Werthe in die erste Differentialgleichung ein, so geht diese über in

$$5)\quad \frac{\partial F}{\partial \varkappa}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \mu}-\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\right)+\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa}-\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}-\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial \varkappa}\right)=0,$$

und die Gleichung der einhüllenden Fläche ergiebt sich nun durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus den vier Gleichungen 4) und 5).

II. Bei den vorigen Untersuchungen wurde immer nur ein Parameter ($\varkappa$) als willkührlich betrachtet, denn in den Fällen, wo mehre Parameter vorkamen, waren auch soviel Bedingungsgleichungen vorhanden, dass die übrigen Parameter als implicite Functionen von $\varkappa$ gelten mussten. Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Gleichung der Fläche zwei von einander unabhängige Parameter enthält, die sich gleichzeitig ändern.

Die gegebene Gleichung sei

$$6)\quad F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0,$$

und es werde zunächst $\varkappa$ allein um δ geändert; die neue Gleichung

$$F(x, y, z, \varkappa+\delta, \lambda) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$7)\quad \frac{F(x, y, z, \varkappa+\delta, \lambda) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\delta} = 0,$$

charakterisirt dann eine zweite Fläche derselben Art, nur von anderer Lage und von anderen Dimensionen. Dasselbe gilt für den Fall, dass λ allein um ε geändert wird, wodurch die Gleichung entsteht

$$8)\quad \frac{F(x, y, z, \varkappa, \lambda+\varepsilon) - F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\varepsilon} = 0.$$

Im Allgemeinen schneiden sich die drei Flächen, welche den Gleichungen 6), 7), 8) correspondiren, in einem Punkte xyz, und wenn man aus jenen Gleichungen die beiden Grössen $\varkappa$ und λ eliminirt, so gelangt man zur Gleichung des geometrischen Ortes aller Durchschnittspunkte, vorausgesetzt, dass sich $\varkappa$ jedesmal um $\Delta\varkappa = \delta$, und λ immer um $\Delta\lambda = \varepsilon$ ändert. Bei gleichzeitig gegen die Null convergirenden δ und ε folgen die erwähnten Durchschnittspunkte stetig aufeinander und erzeugen die einhüllende Fläche. Die Gleichung der letzteren wird demnach gefunden, wenn man aus den Gleichungen

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l} F(x, y, z, \varkappa, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\partial \varkappa} = 0, \qquad \dfrac{\partial F(x, y, z, \varkappa, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{array}\right.$$

die beiden veränderlichen Parameter $\varkappa$ und λ eliminirt.

Beispielweis suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem elliptischen Paraboloid liegen, und deren Oberflächen durch den Scheitel des Paraboloides gehen. Nennen wir a, b die Halbparameter des Paraboloides, und $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten des Mittelpunktes irgend einer jener Kugeln, so haben wir als Gleichung der beweglichen Fläche

$$(x-\varkappa)^2 + (y-\lambda)^2 + (z-\mu)^2 = \varrho^2,$$

wobei noch die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$\mu = \frac{\varkappa^2}{2a} + \frac{\lambda^2}{2b} \qquad \varrho^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2.$$

Setzt man die Werthe von ϱ^2 und μ in die erste Gleichung ein, so wird letztere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - \left(\frac{\varkappa^2}{a} + \frac{\lambda^2}{b}\right) z = 0;$$

durch partielle Differentiationen in Beziehung auf $\varkappa$ und λ ergiebt sich

$$x + \frac{\varkappa}{a} z = 0, \qquad y + \frac{\lambda}{b} z = 0,$$

und durch Elimination von $\varkappa$ und λ

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, z + a x^2 + b y^2 = 0.$$

Die einhüllende Fläche ist hier dieselbe wie die Fusspunktfläche eines elliptischen Paraboloides mit doppelten Parametern *). Für das hyperbolische Paraboloid gilt ein analoger Satz.

Wir wollen noch den Fall betrachten, wo die Gleichung der gegebenen Fläche drei Parameter $\varkappa$, λ, μ enthält, welche an eine bestimmte Bedingung gebunden sind. Man hat jetzt zwei Gleichungen

10) $$F(x, y, z, \varkappa, \lambda, \mu) = 0, \qquad \varphi(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$$

und könnte hieraus (wie im vorigen Beispiele) μ eliminiren, um nur zwei von einander unabhängige Parameter übrig zu behalten. Dagegen wird die Rechnung eleganter, wenn man diese Elimination bis zuletzt aufspart und berücksichtigt, dass μ eine implicite Function von $\varkappa$ und λ ist. Durch partielle Aenderung von $\varkappa$ erhält man nämlich

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa} = 0$$

mithin, wenn man den Werth von $\frac{\partial \mu}{\partial \varkappa}$ aus der zweiten Gleichung

*) Siehe des Verfassers Analytische Geometrie des Raumes, S. 239.

in die erste einsetzt,

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa} = 0.$$

Die partielle Aenderung von λ führt zu der analogen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0;$$

beide Differentialgleichungen können in der Form

11) $$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varkappa}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}}$$

zusammengefasst werden, und man findet nun die Gleichung der einhüllenden Fläche durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus Nro. 10) und 11).

Beispielweis suchen wir die einhüllende Fläche aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem dreiachsigen Ellipsoide liegen, und deren Oberflächen durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehen. Sind a, b, c die Halbachsen des Ellipsoides, $\varkappa$, λ, μ die Coordinaten eines Kugelcentrums, so hat man als Gleichung der beweglichen Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\varkappa x - 2\lambda y - 2\mu z = 0,$$

wobei $\varkappa$, λ, μ der Bedingung

$$\frac{\varkappa^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{\mu^2}{c^2} - 1 = 0$$

genügen müssen. Die Gleichungen 11) sind hier

$$\frac{a^2 x}{\varkappa} = \frac{b^2 y}{\lambda} = \frac{c^2 z}{\mu}$$

und durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ ergiebt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2).$$

Die einhüllende Fläche ist demnach die Fusspunktfläche für ein aus den doppelten Achsen construirtes Ellipsoid. Für die übrigen centralen Flächen zweiten Grades gelten analoge Sätze.

Cap. IV.

Die vieldeutigen Symbole.

§. 31.

Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\infty - \infty$.

I. Wenn die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen speciellen Werth von x, etwa für $x = a$, gleichzeitig Null werden, so nimmt der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in diesem besonderen Falle die Form $\frac{0}{0}$ an, die bekanntlich vieldeutig ist. Um den wahren Werth dieses Bruches zu finden, betrachten wir den Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ als die Grenze, welcher sich $\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)}$ bei verschwindenden δ nähert. Wegen der Voraussetzung $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist nun

$$\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)} = \frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)} = \frac{\frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\delta}}{\frac{\psi(a+\delta) - \psi(a)}{\delta}},$$

und hieraus folgt durch Uebergang zur Grenze für verschwindende δ

$$1) \qquad \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

d. h. in dem besonderen Falle $x = a$, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich annulliren, werden die sonst sehr verschiedenen Quotienten $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ und $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ einander gleich. Kann man also

den Werth des zweiten Quotienten ermitteln, so hat man auch den des ersten. Einige Beispiele werden dies zeigen.

Der Quotient

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an; hier ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

und da dieser Bruch für $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{6}}$ erhält, so ist auch

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{2}{3}a^{-\frac{1}{6}}.$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird der Bruch

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi - x}$$

unbestimmt $= \frac{0}{0}$, dagegen erhält

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\sin x}{1}$$

in demselben Falle den bestimmten Werth 1, der nun auch dem ersten Bruche zukommt.

Nicht selten trifft es sich, dass der neue Quotient $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x = a$ gleichfalls verschwindet; dann muss man auf ihn wieder dasselbe Verfahren anwenden. Nehmen wir z. B.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \sin x}{x^3},$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{\sin x}{6x} \quad \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{\cos x}{6};$$

für $x = 0$ verschwinden $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ sowie $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, und daher giebt erst der letzte Quotient den wahren Werth des ursprünglichen Bruches $= \frac{1}{6}$.

II. Wenn die Functionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so erhält die Differenz $F(x) - f(x)$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$; ihr wahrer Werth findet sich dann auf folgende Weise. Man setze

$$\frac{1}{F(x)} = F_1(x), \qquad \frac{1}{f(x)} = f_1(x),$$

so ist identisch

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{F_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - F_1(x)}{F_1(x) f_1(x)};$$

für $x = a$ verschwinden $F_1(x)$ und $f_1(x)$, mithin geht der letzte Bruch in $\frac{0}{0}$ über und kann nach der vorigen Regel untersucht werden.

So ist z. B.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)},$$

wobei die linke Seite für $x = 0$ die Form $\infty - \infty$ annimmt, und die rechte Seite $= \frac{0}{0}$ wird. Setzen wir

$$\varphi(x) = e^x - 1 - x, \quad \psi(x) = x(e^x - 1)$$

so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{1}{x + 2},$$

und hier liefert der letzte Bruch den wahren Werth $= \frac{1}{2}$.

§. 32.

Die Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = a$ gleichzeitig unendlich werden, so stellt sich in diesem Falle der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahrer Werth q auf folgende Weise ermittelt werden kann. Es sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

der neue Quotient erhält für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ und kann daher nach der Regel des vorigen Paragraphen behandelt werden. Dies giebt

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2$$

und für $x = a$, wo $\frac{f(a)}{F(a)}$ den Werth q annimmt,

$$q = \frac{F'(a)}{f'(a)} q^2 \text{ oder } q = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Die Regel zur Bestimmung des wahren Werthes eines vieldeutigen Bruches bleibt also bei der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe wie bei der Form $\frac{0}{0}$.

So wird z. B. der Quotient

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{log\, x}{cot\, x}$$

für $x = 0$ unbestimmt $= \frac{\infty}{\infty}$; sein wahrer Werth ist dann einerlei mit dem Werthe von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{M}{x}}{-\frac{1}{sin^2 x}} = -M \frac{sin\, x}{x} sin\, x,$$

welcher in jenem Falle $= -M \,.\, 1 \,.\, 0 = 0$ ist.

Nach derselben Regel findet man auch, dass der Bruch

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{l\, sin\, x}{l\, x}$$

für $x = 0$ denselben Werth erlangt wie

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{cot\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{cos\, x}{\frac{sin\, x}{x}},$$

und zwar ist dieser Werth $= 1$.

II. Sind zwei Functionen vorhanden, von denen die eine $\varphi(x)$ für $x = a$ verschwindet, während die andere $f(x)$ für $x = a$ unendlich wird, so nimmt das Product $\varphi(x) \,.\, f(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; den wahren Betrag desselben kann man auf zweierlei Weise finden. Entweder setzt man

$$\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$$

und hat dann

$$\varphi(x) \,.\, f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

für $x = a$ wird der Quotient $= \frac{0}{0}$ und gestattet die in §. 31 angegebene Behandlung. Oder man setzt

$$\frac{1}{\varphi(x)} = F(x)$$

mithin $$\varphi(x) \cdot f(x) = \frac{f(x)}{F(x)};$$

der Quotient stellt sich dann unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ und ist nach I. zu beurtheilen. Von beiden Methoden wählt man im concreten Falle diejenige, welche die wenigste Rechnung verursacht.

So wird man z. B. an die Stelle des Productes

$$l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot tan \frac{\pi x}{2a},$$

welches für $x = a$ in $0 \cdot \infty$ übergeht, den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{l\left(2 - \frac{x}{a}\right)}{cot \frac{\pi x}{2a}}$$

treten lassen, weil der Differentialquotient des Logarithmus eine einfache algebraische Function ist; man erhält

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{1}{2a - x}}{-\frac{\pi}{2a} \cdot csc^2 \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{sin^2 \frac{\pi x}{2a}}{2a - x},$$

und für $x = a$ den wahren Werth $\frac{2}{\pi}$.

Bei dem Producte

$$tan x \cdot log x \text{ , für } x = 0,$$

ist es von Vortheil, die Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{log x}{cot x}$$

zu wählen, deren wahrer Werth bereits in Nro. I. bestimmt und $= 0$ gefunden wurde; demnach verschwindet jenes Product gleichzeitig mit x.

III. Wenn ein Ausdruck von der Form $[f(x)]^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der vieldeutigen Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so beachte man zunächst die identische Gleichung

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{lf(x) \cdot \varphi(x)}$$

und untersuche das Product $lf(x) \cdot \varphi(x)$; ist w der wahre Werth desselben, so geht die gegebene Function in e^w über.

So erhält z. B. der Ausdruck

$$(sin x)^{\frac{1}{lx}}$$

für $x = 0$ die Form 0^0; schreibt man aber statt desselben die gleichgeltende Exponentialgrösse

$$(e^{l \sin x})^{\frac{1}{lx}} = e^{\frac{l \sin x}{lx}},$$

so hat man im Exponenten den nämlichen Bruch, dessen Werth in Nro. I. untersucht und $= 1$ gefunden wurde; der Werth der ursprünglichen Potenz ist also $= e^1 = e$.

Für $x = 0$ wird ferner

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \infty^0;$$

beachtet man aber die identische Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{-lx \,.\, \tan x}$$

und erinnert sich, dass $lx \,.\, \tan x$ für $x = 0$ verschwindet (s. II.), so erhält man $e^0 = 1$ als wahren Werth der in Rede stehenden Potenz.

Für $x = a$ verwandelt sich der Ausdruck

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

in 1^∞; andererseits ist die gegebene Function gleich

$$e^{l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \,.\, \tan \frac{\pi x}{2a}},$$

wobei der Exponent für $x = a$ den Werth $\frac{2}{\pi}$ annimmt (s. II.); demnach ergiebt sich $e^{\frac{2}{\pi}}$ als wahrer Werth des ursprünglichen Ausdrucks.

Cap. V.

Maxima und Minima.

§. 33.

Maxima und Minima der Functionen einer Variabelen.

Wenn eine stetige Function $f(x)$ abwechselnd steigt und fällt, so giebt es in ihrem Verlaufe Stellen, wo die Uebergänge von Wachsthum zu Abnahme oder umgekehrt von Abnahme zu Wachsthum statt finden. Bei einem Uebergange der ersten Art, welcher etwa für $x = a$ eintreten möge, ist der entsprechende Functionswerth $f(a)$ grösser als die Nachbarwerthe $f(a - h)$ und $f(a + h)$, sobald nur h hinreichend klein genommen wird; dann heisst $f(a)$ ein Maximum der Function $f(x)$. Erfolgt dagegen an der Stelle $x = a$ ein Uebergang von Abnahme zu Wachsthum, so ist $f(a)$ kleiner als seine Nachbarwerthe $f(a - h)$ und $f(a + h)$, und dann heisst $f(a)$ ein Minimum von $f(x)$. Nach dieser Erklärung versteht es sich von selbst, dass derartige Maxima und Minima nur relativ sind und nicht immer den absolut grössten oder absolut kleinsten Werth der Function darstellen.

Für welche Werthe von x dergleichen Maxima und Minima eintreten, das entscheidet sich durch ein früheres Theorem (§. 8, I.), demzufolge die Function $f(x)$ wächst oder abnimmt je nachdem ihre Derivirte $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Aendert sich nun $f'(x)$ continuirlich, so kann der Uebergang von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werthen der Derivirten $f'(x)$ nur mittelst Durchganges durch Null geschehen; die Werthe von x, welche $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind also Wur-

zeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Dies bedeutet geometrisch, dass die Tangente an jedem Culminationspunkte einer Curve parallel zur Abscissenachse liegt.

Hat man die Gleichung $f'(x) = 0$ aufgelöst, so bedarf es noch der Entscheidung, ob die gefundenen Werthe von x Maxima oder Minima der Function liefern. Zu diesem Zwecke erinnern wir an die in §. 18 bewiesene Gleichung

$$\frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a + \vartheta h),$$

woraus bei verschwindenden h folgt

$$Lim \frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a).$$

Im vorliegenden Falle ist a eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, mithin $f'(a) = 0$ und

$$Lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a)$$

ebenso, wenn man $-h$ an die Stelle von h treten lässt,

$$Lim \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a).$$

Ist nun $f''(a)$ positiv, so müssen bei hinreichend kleinen h die beiden Quotienten

1) $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} \quad , \quad \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2}$$

positiv sein und es bleiben, wenn h gegen die Null convergirt, weil ausserdem der gemeinschaftliche Grenzwerth jener Quotienten nicht positiv werden könnte; hieraus folgt

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h),$$

mithin ist $f(a)$ ein Minimum. Wenn dagegen $f''(a)$ einen negativen Werth hat, so müssen bei hinreichend kleinen h die unter Nro. 1) angegebenen Quotienten negativ sein und bleiben; daraus folgt

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h)$$

d. h. $f(a)$ ist ein Maximum. Die Entscheidung besteht also darin, dass $f(a)$ ein Minimum oder Maximum ist je nachdem $f''(a)$ positiv oder negativ ausfällt. Geometrisch heisst dies: ein unterer Culminationspunkt kann nur auf einem convexen Bogen, ein oberer nur auf einem concaven Bogen vorkommen.

Das angegebene Criterium verliert seine Anwendbarkeit, wenn $f''(a)$ selber $= 0$ ist (wie z. B. wenn die Tangente an einem Inflexionspunkte parallel zur Abscissenachse liegt); man muss in diesem

Falle die höheren Differentialquotienten von $f(x)$ zu Rathe ziehen, indem man den in §. 18 bewiesenen Satz

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{1.2}f''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2.3\ldots n}$$

anwendet. Unter der Voraussetzung, dass nicht nur $f'(a) = 0$ ist, sondern auch $f''(a), f'''(a), \ldots f^{(n-1)}(a)$ verschwinden, mithin $f^{(n)}(a)$ der erste nicht verschwindende Differentialquotient ist, vereinfacht sich die vorige Gleichung und giebt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2\ldots n},$$

woraus folgt, wenn h gegen die Null convergirt,

$$Lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}.$$

Hier unterscheiden wir die beiden Fälle eines ungeraden und eines geraden n. Bei ungeraden n ist

$$Lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = +\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

$$Lim\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n} = -\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

mithin für ein positives $f^{(n)}(a)$ und hinreichend kleine h

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h),$$

dagegen bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h) > f(a) > f(a+h).$$

Beide Ungleichungen stimmen darin überein, dass $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Wenn dagegen n eine gerade Zahl bedeutet, so gelten die Gleichungen

$$Lim\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = +\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n},$$

$$Lim\frac{f(a-h)-f(a)}{h^n} = +\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n};$$

mithin ist bei positivem $f^{(n)}(a)$ und für hinreichend kleine h

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h),$$

d. h. $f(a)$ ein Minimum; ferner erhält man bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h),$$

wodurch ein Maximum angezeigt wird. Alles zusammen giebt folgenden Satz:

> Ein aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmter Werth von x macht $f(x)$ nur dann zu einem Maximum oder Minimum, wenn in der Reihe der Differentialquotienten $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. der erste für jenen Werth nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, und zwar findet ein Minimum oder Maximum statt, je nachdem der genannte Differentialquotient für jenen Werth von x positiv oder negativ ausfällt.

Den Mechanismus der Rechnung werden die folgenden Beispiele zeigen.

1. Handelt es sich um das Maximum oder Minimum der Function

$$f(x) = x^a\, e^{-x},$$

so entwickelt man erst die Differentialquotienten

$$f'(x) = (a - x)\, x^{a-1}\, e^{-x},$$
$$f''(x) = [a(a-1) - 2ax + x^2]\, x^{a-2}\, e^{-x}$$

u. s. w.

Nun wird $f'(x) = 0$ für $x = a$; dieser Werth giebt $f''(a) = -a^a\, e^{-a}$ also ein negatives Resultat, mithin ist

$$f(a) = a^a\, e^{-a} = \left(\frac{a}{e}\right)^a$$

das Maximum der Function $x^a\, e^{-x}$.

2. Es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ gegebene Zahlen sein und es soll x so bestimmt werden, dass die Quadratsumme

$$f(x) = (x - k_1)^2 + (x - k_2)^2 + \cdots + (x - k_n)^2$$

zu einem Maximum oder Minimum wird. Man hat in diesem Falle

$$f'(x) = 2\,[nx - (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)],$$
$$f''(x) = 2n;$$

$f'(x)$ verschwindet, wenn

$$x = \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus den gegebenen Zahlen ist, $f''(x)$ bleibt immer positiv, mithin wird $f(x)$ bei dem angegebenen Werthe zu einem Minimum. Dies war übrigens vorauszusehen, da jene Summe von Quadraten zwar beliebig gross aber nicht beliebig klein gemacht werden kann.

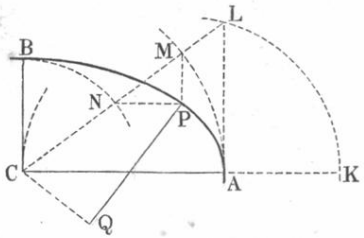
3. Auf dem ersten Quadranten einer Ellipse soll man denjenigen Punkt bestimmen, dessen Normale am weitesten vom Centrum entfernt ist. Geht überhaupt durch den Punkt xy einer Curve eine Normale, so hat letztere vom Coordinatenanfange die Entfernung

$$p = \frac{x + yy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, mithin

$$p = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2}}.$$

Fig. 35.



Dieser Ausdruck vereinfacht sich durch Einführung des Winkels $ACM = \omega$, welcher unter dem Namen der excentrischen Anomalie bekannt ist (Fig. 35); man hat nämlich $x = a\cos\omega$, mithin

$$p = \frac{(a^2 - b^2)\sin\omega}{\sqrt{a^2\tan^2\omega + b^2}}$$

oder, wenn $\tan\omega$ kurz mit t bezeichnet wird,

$$p = \frac{(a^2 - b^2)\,t}{\sqrt{(1+t^2)\,(a^2t^2 + b^2)}}.$$

Wir betrachten nun t als unabhängige Variabele und erhalten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(a^2 - b^2)\,(b^2 - a^2t^4)}{\sqrt{[b^2 + (a^2+b^2)\,t^2 + a^2t^4]^3}},$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{(a^2-b^2)\,t\,[3(a^2+b^2)\,b^2 + 10\,a^2b^2t^2 + a^2(a^2+b^2)\,t^4 - 2a^4t^6]}{\sqrt{[b^2 + (a^2+b^2)\,t^2 + a^2t^4]^5}};$$

der erste Differentialquotient verschwindet für

$$t = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \tan\omega = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a},$$

und der zweite Differentialquotient erhält dadurch den negativen Werth

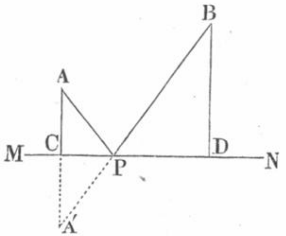
$$-\frac{4a^2(a-b)}{(a+b)^2},$$

mithin entspricht der obige Werth von t dem Maximum von p. Uebrigens konnte man sich die Entwickelung des zweiten Differen-

tialquotienten ersparen; da nämlich für $\omega = 0$ und für $\omega = 90^0$ jedesmal p den Minimalwerth $p = 0$ erreicht, so muss der gefundene Werth ein Maximum liefern.

Behufs der Construction nimmt man $AK = BC = b$, sucht zwischen $AC = a$ und AK die mittlere Proportionale AL, zieht CL, welche den umschriebenen Kreis in M, den eingeschriebenen in N schneidet, legt durch M eine Parallele zu BC, durch N eine Parallele zu AC und erhält dann den gesuchten Ellipsenpunkt P als Durchschnitt der genannten Parallelen. Construirt man die Normale PU, so ist deren Abstand von C das Maximum von p, und zwar $CQ = a - b$; gleichzeitig ist Q der Krümmungsmittelpunkt für P, PQ der Krümmungshalbmesser, mithin die Fläche des Krümmungskreises gleich der Ellipsenfläche.

Fig. 36.



4. Ueber einer Geraden MN (Fig. 36) sind zwei Punkte A und B gegeben, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie APB verbunden werden sollen; man fragt nach dem Minimum des Weges $AP + BP$. Für $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$, $CP = x$, $AP + BP = s$ ist

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

$$s' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$s'' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{[b^2 + (c - x)^2]^3}}.$$

Aus $s' = 0$ ergiebt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

der aus ihr folgende Werth gehört zu einem Minimum, weil s'' immer positiv bleibt. Geometrisch bedeutet die vorige Gleichung

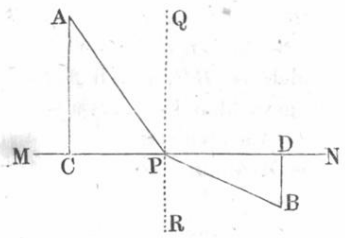
$$\cos MPA = \cos NPB \text{ d. i. } \angle MPA = \angle NPB,$$

und hiernach ist die Construction leicht, indem man $CA' = CA$ nimmt und die Gerade $A'B$ zieht, welche MN in P schneidet (Spiegelungsgesetz).

5. Auf entgegengesetzten Seiten der Geraden MN (Fig. 37 a. f. S.) befinden sich die gegebenen Punkte A und B, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie APB verbunden

sind; ein Körper bewegt sich auf dieser von A nach B so, dass er längs der Geraden AP die constante Geschwindigkeit g, längs PB die constante Geschwindigkeit h besitzt. Es soll der Punkt P so bestimmt werden, dass der Körper in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt. Zum Durchlaufen von AP braucht der Körper die Zeit $\frac{AP}{g}$, zum Durchlaufen von PB die Zeit $\frac{PB}{h}$,

Fig. 37.



mithin ist bei gleicher Bezeichnung wie in Nro. 4, der Ausdruck

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{g} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{h}$$

zu einem Minimum zu machen. Als Bedingungsgleichung für x findet man sehr leicht

$$\frac{x}{g\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{h\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

oder geometrisch

$$\frac{\cos MPA}{g} = \frac{\cos NPB}{h},$$

wofür man auch setzen kann

$$\frac{\sin APQ}{\sin BPR} = \frac{g}{h}.$$

Dieser Gleichung entspricht ein Minimum von s, weil s'' immer positiv bleibt. (Brechungsgesetz, wobei die Lage des gebrochenen Strahles durch die zwei Bedingungen bestimmt ist, dass er durch B gehen und normal zu einem gewissen Kegelschnitte sein muss. Vergl. §. 29, II.)

6. Besondere Aufmerksamkeit verdient bei allen Untersuchungen über Maxima und Minima noch der Ausnahmefall, wenn $f'(x)$ sein Vorzeichen nicht stetig mittelst Durchganges durch Null, sondern sprungweis ändert; denn auch derartige Zeichenwechsel können Maxima oder Minima liefern, die man nach der vorigen Methode nicht finden würde. Ist z. B.

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{(1 - x)^2}$$

mithin

$$y' = f'(x) = \tfrac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x}},$$

so bleibt $f'(x)$ positiv für alle $x < 1$, und negativ für alle $x > 1$; der Zeichenwechsel geschieht hier aber sprungweise, denn man hat

$$f'(1-0) = +\infty, f'(1+0) = -\infty$$

und mithin erleidet $f'(x)$ eine Unterbrechung der Continuität an der Stelle $x = 1$. Abgesehen davon geht aber aus den Vorzeichen von $f'(x)$ mit Sicherheit hervor, dass $f(x)$ wächst von $x = -\infty$ bis $x = 1$ und abnimmt von $x = 1$ bis $x = +\infty$, dass also $f(x)$ für $x = 1$ sein Maximum $f(1) = 1$ erhalten muss. Man wird dies geometrisch leicht bestätigt finden, indem man die Aufmerksamkeit auf den Berührungswinkel τ richtet, welcher durch die Gleichung $\tan\tau = f'(x)$ bestimmt wird. Derselbe ist spitz für $x < 1$, wächst mit x gleichzeitig, wird $= \frac{1}{2}\pi$ für $x = 1$ und nachher stumpf für $x > \frac{1}{2}\pi$; an der Stelle $x = 1$ besitzt daher die Curve eine Spitze, von welcher beide Theile convex gegen die Abscissenachse gekrümmt sind. — Aehnliche Betrachtungen gelten für alle derartigen Ausnahmefälle, und zwar entscheidet sich die Beschaffenheit einer Function an einer solchen besonderen Stelle immer sehr leicht dadurch, dass man den Lauf der Function in der Nachbarschaft jener Stellen vorzugsweis genauer berücksichtigt.

§. 34.

Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen.

Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine Function der unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$, so kann es ein zusammengehörendes System specieller Werthe dieser Variabelen geben, etwa $x = a$, $y = b$, $z = c$ u. s. w., wodurch $F(a, b, c, \ldots)$ grösser oder kleiner wird als alle Nachbarwerthe der Function, d. h. als alle die Werthe, welche entstehen, wenn man für x irgend einen Werth aus dem Intervalle $a - h$ bis $a + h$, für y einen Werth aus dem Intervalle $b - k$ bis $b + k$ u. s. w. nimmt, wobei h, k etc. beliebig kleine Grössen bezeichnen. Ein solcher besonderer Werth $F(a, b, c, \ldots)$ der Function $F(x, y, z, \ldots)$, heisst ein Maximum oder Minimum, je nachdem er grösser oder kleiner als seine Nachbarn ist. Die Aufgabe ist nun, das System der speciellen Werthe $x = a$, $y = b$, etc. aufzufinden.

Wenn überhaupt beliebige unabhängige Variabelen $x, y, z, \ldots$ vorhanden sind, so darf man sich dieselben als ebensoviel willkührliche Functionen einer neuen unabhängigen Variabelen t denken, denn

man übersieht auf der Stelle, dass x, y, z etc. alle möglichen Werthe erhalten können, wenn man

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \ldots$$

setzt und t sowie die Natur der Functionen φ, ψ, χ etc. danach wählt; so würde z. B. schon die einfache Annahme $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t, \ldots$ wo α, β, γ völlig willkührliche Factoren sind, zu dem genannten Zwecke hinreichen. Durch diese Bemerkung reducirt sich die Aufgabe, $F(x, y, z, \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, auf die einfachere, für eine Function von nur einer unabhängigen Variabelen die grössten und kleinsten Werthe aufzusuchen. Soll nun

$$F(x, y, z, \ldots) = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \ldots]$$

oder kurz F seinen Maximal- oder Minimalwerth erhalten, so muss

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

sein; diese Gleichung wird in unserem Falle, wo x, y, z, .. als abhängig von t erscheinen,

$$1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \cdots = 0.$$

Bei der gänzlichen Willkührlichkeit der Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, also auch ihrer Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t),\ \frac{dz}{dt} = \chi'(t) \ldots$$

(wie z. B. im obigen speciellen Falle der Factoren α, β, γ . .) kann aber die Gleichung 1) nur bestehen, wenn die Coefficienten der unbestimmten Grössen für sich Null sind, wenn also die Gleichungen stattfinden:

$$2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots .$$

deren Anzahl mit der Anzahl der unabhängigen Variabelen übereinkommt, so dass es also immer möglich ist, die obigen Gleichungen nach x, y, z, . . . aufzulösen und so die Werthsysteme $x = a$, $y = b$, $z = c$ etc. zu bestimmen. Ist dies geschehen, so bedarf es noch einer Discussion, ob das gefundene System ein Maximum oder Minimum von F bildet. Diese Entscheidung wird dadurch herbeigeführt, dass man den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2F}{dt^2}$ entwickelt

und nachsieht, ob er durch Substitution der für x, y, z, ... gefundenen Werthe positiv oder negativ ausfällt. Wir wollen diese Untersuchung unter der Voraussetzung, dass F eine Function von nur zwei unabhängigen Variabelen x und y ist, näher ausführen.

Man hat zunächst mit Rücksicht auf die Gleichungen 2)

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

oder wenn der Quotient $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}$ mit q bezeichnet wird:

$$3) \qquad \frac{d^2F}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Soll dieser zweite Differentialquotient zu einer Entscheidung führen, so darf er nicht verschwinden, also darf nicht zugleich

$$4) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

sein; ist diese Vorbedingung erfüllt, so muss der in 3) verzeichnete Ausdruck, worin noch die unbestimmten Grössen q und $\frac{dy}{dt}$ vorkommen, immer gleiches Vorzeichen behalten, von welchem nachher zu entscheiden ist, ob es das Plus- oder Minuszeichen ist. Das Vorzeichen von $\frac{d^2F}{dt^2}$ hängt nun einzig allein von dem Ausdrucke

$$5) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ab, welcher unter der Form $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ enthalten ist. Hätte ferner die quadratische Gleichung $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0$ eine reelle Wurzel q_1, so würde der Ausdruck $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ sein Vorzeichen wechseln, wenn man q das Intervall $q_1 - \delta$ bis $q_1 + \delta$ durchlaufen liesse, wo δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Damit also der fragliche Ausdruck sein Vorzeichen nicht wechsele, ist es nothwendig und hinreichend, dass jene quadratische Gleichung imaginäre Wurzeln besitze, folglich $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ sei. Die Bedingung für die Unveränderlichkeit des Vorzeichens in Nro. 5) besteht also in der Ungleichung

$$6) \qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0,$$

sie vertritt zugleich die in Nro. 4) angegebene Determination, denn

wenn sie erfüllt ist, können die Gleichungen 4) nicht sämmtlich stattfinden. Aus der Bedingung 6) ersieht man ferner, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

(nach Substitution der für x und y gefundenen Werthe) gleiche Vorzeichen besitzen müssen, weil ausserdem die Ungleichung 6) die Summe zweier positiven Grössen als negativ angeben würde. Da ferner nach den bisherigen Bestimmungen der Ausdruck in 5) sein Vorzeichen nicht wechselt, so darf man auch $q = 0$ setzen, ohne einen solchen Wechsel befürchten zu müssen, und man ersieht daraus, dass jener Ausdruck dasselbe Vorzeichen besitzt wie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; nunmehr lautet die Entscheidung:

Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Function $F(x, y)$, je nachdem sie die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Finden die Gleichungen 4) zusammen statt, verschwindet also $\frac{d^2 F}{dt^2}$ für die gefundenen Werthe von x und y, so giebt der zweite Differentialquotient keine Entscheidung und man muss sich dann an die höheren Differentialquotienten wenden, was jedoch umständliche Rechnungen erfordert. Ebenso wird die Sache etwas verwickelt, wenn es sich um eine Function von drei oder mehr Variabelen handelt. Man wird in allen solchen Fällen besser thun, aus der Natur der gestellten speciellen Aufgabe zu entscheiden, ob überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfindet.

1. Als erstes Beispiel diene die Aufgabe, das Minimum der Quadratsumme

$$F(x, y) = (a_1 x + b_1 y - k_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - k_2)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_n x + b_n y - k_n)^2$$

zu bestimmen, wobei alle a, b und k als gegebene Constanten vorausgesetzt werden. Führen wir zur Abkürzung die folgende Bezeichnung ein

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= S_{ab}, \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &= S_{aa}, \\ b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 &= S_{bb}, \end{aligned}$$

u. s. w.

so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(S_{aa} x + S_{ab} y - S_{ak}),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(S_{ba} x + S_{bb} y - S_{bk}),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 S_{aa}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 S_{bb},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2 S_{ab}.$$

Die letzten drei Ausdrücke genügen den Bedingungen des Minimums; letzteres tritt daher ein, sobald die Gleichungen

$$S_{aa} x + S_{ab} y = S_{ak},$$
$$S_{ba} x + S_{b_b} y = S_{bk}$$

erfüllt sind, wozu die Werthe gehören

$$x = \frac{S_{bb} \cdot S_{ak} - S_{ab} \cdot S_{bk}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2},$$

$$y = \frac{S_{aa} \cdot S_{bk} - S_{ab} \cdot S_{ak}}{S_{aa} \cdot S_{bb} - (S_{ab})^2}.$$

Man kann diese Aufgabe dahin verallgemeinern, dass man eine beliebige Anzahl von Variabelen x, y, z, etc. voraussetzt und das Minimum von

$$F(x, y, z, \ldots.)$$
$$= (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - k_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - k_2)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_n x + b_n y + c_n z + \cdots - k_n)^2$$

verlangt. Man findet leicht, dass die hierzu nöthigen Werthe aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$S_{aa}x + S_{ab}y + S_{ac}z + \cdots = S_{ak},$$
$$S_{ba}x + S_{bb}y + S_{bc}z + \cdots = S_{bk},$$
$$S_{ca}x + S_{cb}y + S_{cc}z + \cdots = S_{ck},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren Anzahl ebenso gross ist als die Anzahl der Variabelen x, y, z etc. Einer besonderen Untersuchung darüber, ob die gefundenen Werthe von x, y, z etc. das Maximum oder Minimum der Function F geben, bedarf es übrigens nicht, denn es ist unmittelbar einleuchtend, dass eine Summe von Quadraten (d. h. von positiven Grössen) wohl in's Unendliche wachsen aber nicht beliebig klein werden kann und dass sie folglich ein Minimum haben muss *).

---

*) Die obige Aufgabe, welche die Verallgemeinerung des zweiten Beispiels in §. 33 enthält, ist für die Praxis von besonderem Werthe. Hat man nämlich eine Grösse x durch directe Messung oder Beobachtung zu bestimmen (wie z. B. die Entfernung zweier Punkte durch Messung mit Kette oder Maassstäben), so nimmt man der Sicherheit wegen diese Operation mehrmals vor, aber man findet dann, zufolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei jeder Messung einen etwas anderen Werth, und es mögen $k_1, k_2, \ldots k_n$ die verschiedenen Werthe bezeichnen, welche bei n Beobachtungen für x erhalten wurden. Unter der Voraussetzung, dass alle Messungen mit gleicher Sorgfalt angestellt, mithin von gleichem Gewichte sind, betrachtet man das arithmetische Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ als den wahrscheinlichsten Werth von x, ohne sich des Grundes dieser Annahme genauer bewusst zu sein. Dagegen beweist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass der wahrscheinlichste Werth von x derjenige ist, bei welchem die Summe der Fehlerquadrate ihr Minimum erreicht. Nun sind $x-k_1$, $x-k_2$, $\ldots$ $x-k_n$ die begangenen Fehler, und nach Beispiel 2) in §. 33 wird die Summe der Quadrate dieser Fehler ein Minimum, wenn x dem arithmetischen Mittel aus $k_1, k_2, \ldots k_n$ gleichkommt; es rechtfertigt sich also jene Annahme. Das genannte Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet aber noch eine weitere Anwendung. Sind nämlich zwei nicht direct beobachtbare Grössen x und y mit beobachtbaren Grössen a, b, k durch eine Gleichung von der Form $ax+by=k$ verbunden, so erhält man durch n Beobachtungen n Gleichungen folgender Art

$$a_1x+b_1y=k_1,\ a_2x+b_2y=k_2,\ \ldots\ a_nx+b_ny=k_n.$$

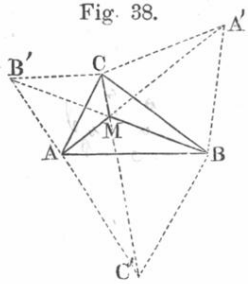
Die Anzahl dieser Gleichungen beträgt mehr als 2 und daher würden sie, als vollkommen genau betrachtet, einander widersprechen. Dagegen ist zu berücksichtigen, dass jene Gleichungen in Folge der Beobachtungsfehler nur angenähert richtig sind; die Grössen

$$a_1x+b_1y-k_1,\ a_2x+b_2y-k_2,\ldots a_nx+b_ny-k_n$$

differiren daher von der Null und repräsentiren die Fehler. Die wahrscheinlichsten Werthe von x und y ergeben sich nun wieder, indem man die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht, und vermöge dieser Bedingung erhält man, wie oben gezeigt wurde, immer soviel Gleichungen als Unbekannte zu bestimmen sind.

2. In der Ebene eines Dreiecks ABC (Fig. 38) soll der Punkt M so bestimmt werden, dass die Summe der Entfernungen $AM = u$, $BM = v$, $CM = w$ ein Minimum werde. Bezeichnen wir die Seiten BC, CA, AB der Reihe nach mit a, b, c und die Gegenwinkel mit α, β, γ, so haben wir als Summe der genannten Entfernungen

Fig. 38.



$$s = u + v + w$$

oder, wenn $\angle BAM = \theta$ gesetzt wird,

$$s = u + \sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta} + \sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}$$

und hierbei sind u, θ die beiden unabhängigen Variabelen. Es ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{\partial s}{\partial u} = 1 + \frac{u - c\cos\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} + \frac{u - b\cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{cu\sin\theta}{\sqrt{c^2 + u^2 - 2cu\cos\theta}} - \frac{bu\sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{b^2 + u^2 - 2bu\cos(\alpha - \theta)}},$$

mithin sind die Bedingungen für den Eintritt des Maximums oder Minimums

$$\frac{c\cos\theta - u}{v} + \frac{b\cos(\alpha - \theta) - u}{w} = 1,$$

$$\frac{c\sin\theta}{v} - \frac{b\sin(\alpha - \theta)}{w} = 0.$$

Geometrisch bedeuten dieselben soviel wie

$$\cos BMA' + \cos CMA' = 1, \quad \sin BMA' - \sin CMA' = 0;$$

aus der zweiten Gleichung folgt $\angle BMA' = \angle CMA'$, nachher aus der ersten

$$\cos BMA' = \cos CMA' = \tfrac{1}{2}, \quad \angle BMA' = \angle CMA' = 60^0,$$
$$\angle BMC = 120^0.$$

Zu einer ähnlichen Rechnung würde man gelangen, wenn man $BM = v$ und $\angle CBM = \eta$ als unabhängige Variabele wählte und demgemäss u und w durch v und η ausdrückte; das Resultat wäre dann $\angle CMA = 120^0$. Der gesuchte Punkt M liegt demnach so, dass die Winkel AMB, BMC, CMA gleich sind; er ist folglich der Durchschnitt von Kreisbögen, welche über den Dreiecksseiten als Sehnen mit dem gemeinschaftlichen Peripheriewinkel von 120^0 beschrieben werden können. Eine andere Construction von M besteht darin, dass man über den Dreiecksseiten die gleichseitigen Dreiecke

ABC', BCA', CAB' mit den Spitzen nach Aussen beschreibt und nachher die Geraden AA', BB', CC' zieht; letztere schneiden sich im Punkte M.

Der Natur der Sache nach kann die Summe $u + v + w$ beliebig gross gemacht werden, wenn man den Punkt M weit genug von den Spitzen des Dreiecks ABC entfernt, während dagegen s nicht beliebig klein werden kann. Der gefundene Punkt M muss folglich dem Minimum von s entsprechen.

Eine völlig gleiche Behandlung gestattet die allgemeinere Aufgabe, $u^n + v^n + w^n$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen. In dem speciellen Falle $n = 2$ findet man, dass M der Schwerpunkt des Dreieckes ABC und $u^2 + v^2 + w^2$ ein Minimum ist.

3. Es soll die kürzeste Entfernung zweier Geraden ermittelt werden, deren Gleichungen sind

$$7) \qquad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2. \end{cases}$$

Nehmen wir auf der ersten Geraden einen Punkt $x_1\ y_1\ z_1$, auf der zweiten einen Punkt $x_2\ y_2\ z_2$ einstweilen beliebig an, so ist die Länge der verbindenden Geraden

$$8) \qquad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2};$$

diese wird ein Maximum oder Minimum je nachdem ihr Quadrat seinen kleinsten oder grössten Werth erreicht, mithin haben wir uns nur mit dem Ausdrucke

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

zu beschäftigen, welcher vermöge der Gleichungen 7) die Form

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (B_1 x_1 - B_2 x_2 + b_1 - b_2)^2 + (C_1 x_1 - C_2 x_2 + c_1 - c_2)^2$$

annimmt und eine Function der beiden unabhängigen Variabelen x_1 und x_2 darstellt. Man hat nun

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= (1 + B_1^2 + C_1^2)\, x_1 - (1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_2 \\
&\qquad + (b_1 - b_2)\, B_1 + (c_1 - c_2)\, C_1 \\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= -(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)\, x_1 + (1 + B_2^2 + C_2^2)\, x_2 \\
&\qquad - (b_1 - b_2)\, B_2 - (c_1 - c_2)\, C_2 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= 2\,(1 + B_1^2 + C_1^2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\, \partial x_2} &= -2\,(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= 2\,(1 + B_2^2 + C_2^2).
\end{aligned}$$

Setzt man die ersten Differentialquotienten der Null gleich, so erhält man zwei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung von x_1 und x_2; die so bestimmten Werthe entsprechen einem Minimum, weil

$$4(1 + B_1 B_2 + C_1 C_2)^2 - (1 + B_1^2 + C_1^2)(1 + B_2^2 + C_2^2) < 0$$

und $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ sowie $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ positiv ist. Aus x_1 und x_2 erhält man mittelst der Gleichungen der Geraden die Werthe von y_1, z_1 und y_2, z_2; nach Substitution der Werthe von x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 giebt nun der unter Nro. 8) verzeichnete Ausdruck die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Uebrigens liegt es hier in der Natur der Aufgabe, dass nur ein Minimum stattfindet, und man hätte sich daher die Entwickelung der zweiten Differentialquotienten von F nebst den angeknüpften Bemerkungen ersparen können.

§. 35.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Die Werthe, durch welche eine gegebene Function mehrerer Variabelen zu einem Maximum oder Minimum werden soll, sind häufig noch an eine oder mehrere Bedingungen gebunden, welche in Gleichungen ausgedrückt werden. Sucht man z. B. die kürzeste Entfernung eines Punktes $\alpha\,\beta\,\gamma$ von einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein möge, so ist der Ausdruck

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

welcher den Abstand der Punkte $\alpha\,\beta\,\gamma$ und $x\,y\,z$ angiebt, zu einem Minimum zu machen, jedoch mit der besonderen Rücksicht, dass die Werthe von x, y und z der Gleichung der Ebene genügen müssen. Das natürlichste Verfahren wäre nun die Herausschaffung der abhängigen Variabelen; ist z. B. nur eine Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man sie nach z auflösen und den so gefundenen Werth von z in die Function $F(x, y, z)$, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, substituiren; an die Stelle einer Function von drei Variabelen tritt nunmehr eine Function zweier unabhängiger Variabelen, und für diese gelten die Regeln des vorigen Paragraphen. Sind zwischen drei Variabelen zwei Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man mittelst derselben y und z durch x ausdrücken und wenn man diese

Werthe substituirt, so enthält jetzt die Function $F(x, y, z)$ nur noch eine unabhängige Variabele. Diese Eliminationen sind aber nicht selten sehr umständlich oder unmöglich und man muss in solchen Fällen einen anderen Weg einschlagen, welcher darin besteht, dass man nicht die abhängigen Variabelen selbst aus den Bedingungsgleichungen, sondern die Differentialquotienten der abhängigen Variabelen aus den Differentialgleichungen der gegebenen Bedingungen eliminirt. Die Ausführung dieses Gedankens ist folgende.

Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt sein soll, so ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden und es muss daher $\frac{dF}{dx} = 0$ sein; dies giebt in unserem Falle, wo F ausser x noch die abhängige Variabele y enthält,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Differenzirt man auch die Bedingungsgleichung in Beziehung auf x als unabhängige Variabele, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus beiden Differentialgleichungen giebt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und wenn man diese Gleichung mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ verbindet, so hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y.

Bei drei Variabelen x, y, z und zwei Bedingungsgleichungen, also wenn das Maximum oder Minimum von $F(x, y, z)$ gesucht wird, während zugleich

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ und } \psi(x, y, z) = 0$$

sein soll, ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden, von welcher y und z abhängen. Die Gleichung $\frac{dF}{dx} = 0$ lautet dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

und die Differentialgleichungen der Bedingungen sind:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ eliminiren, es bleibt dann eine Gleichung übrig, welche in Verbindung mit den beiden Bedingungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ zur Bestimmung von x, y, z hinreicht.

Sind drei Variabele vorhanden mit nur einer Bedingungsgleichung, so kann man x und y als unabhängige Variabele, z als abhängige Veränderliche ansehen; es muss dann sein

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

oder wenn man beachtet, dass in F auch z als Function von x und y vorkommt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Andererseits ist durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

durch Elimination von $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus der ersten und dritten, so wie von $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus der zweiten und vierten Gleichung folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

welche Gleichungen, verbunden mit $\varphi(x, y, z) = 0$, die Unbekannten x, y, z bestimmen. — Dieses Verfahren bleibt immer anwendbar, weil es stets nur Eliminationen aus Gleichungen des ersten Grades erfordert. Wir geben einige Beispiele dazu.

1. Aus den vier Seiten α, β, γ, δ soll das Viereck von grösstmöglichem Inhalte construirt werden. Nennen wir x den von α und β, y den von γ und δ eingeschlossenen Winkel, so ist die Fläche des Vierecks

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha\beta\,\sin x + \tfrac{1}{2}\,\gamma\delta\,\sin y$$

und wenn diese, also auch das Doppelte von ihr, ein Maximum werden soll, so ist

$$F = \alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner die Diagonale, welche den Winkeln x und y gegenüberliegt, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\,\cos x = \gamma^2 + \delta^2 - 2\,\gamma\delta\,\cos y;$$

mithin als Bedingungsgleichung

$$\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\,\alpha\beta\,\cos x + 2\,\gamma\delta\,\cos y = 0.$$

Die Differentialgleichungen werden nun

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta\,\cos x + \gamma\delta\,\cos y \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\,\alpha\beta\,\sin x - 2\,\gamma\delta\,\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man $\frac{dF}{dx} = 0$ und eliminirt $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$2\,\alpha\beta\gamma\delta\,(\cos x\,\sin y + \sin x\,\cos y) = 0,$$

d. h. $\sin(x + y) = 0$, $x + y = 0^0$ oder $= 180^0$, 360^0 u. s. w. Da aber x und y Winkel eines Vierecks sind, so kann nur $x + y = 180^0$ oder $y = 180^0 - x$ sein.

Hieraus folgt weiter $\frac{dy}{dx} = -1$, mithin

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta\,\cos x - \gamma\delta\,\cos y,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -\alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y\,\frac{dy}{dx}$$

$$= -(\alpha\beta\,\sin x + \gamma\delta\,\sin y),$$

und da dieser Ausdruck jedenfalls negativ bleibt (wegen $x < 180^0$ und $y < 180^0$), so entspricht die Bedingung $x + y = 180^0$ einem Maximum. Zugleich ergiebt sich, dass das gesuchte Viereck ein Sehnenviereck ist.

2. Um auch die im Eingange erwähnte Aufgabe zu lösen, nehmen wir

$$F = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$
$$\varphi = Ax + By + Cz + D = 0,$$

und es sind dann zwei unabhängige Variabele x und y vorhanden, während z eine Function von x und y ist. Setzt man die beiden partiellen Differentialquotienten von F der Null gleich, so hat man zunächst

$$x - \alpha + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$y - \beta + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ferner ergiebt sich durch partielle Differentiation der Gleichung $\varphi = 0$:

$$A + C\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad B + C\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

und durch Elimination der partiellen Differentialquotienten:

$$A(z-\gamma) - C(x-\alpha) = 0,$$
$$B(z-\gamma) - C(y-\beta) = 0.$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen mit der dritten $Ax + By + Cz + D = 0$, so findet man der Reihe nach z, y und x, nämlich

$$x = \alpha - AK, \quad y = \beta - BK, \quad z = \gamma - CK,$$

wobei zur Abkürzung

$$K = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

gesetzt worden ist. Dass diese Werthe nur einem Minimum von F entsprechen können, folgt aus der geometrischen Bedeutung unserer Aufgabe von selbst; auch sind die Werthe für x, y, z identisch mit den aus der analytischen Geometrie bekannten Coordinaten des Fusspunktes der vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ herabgelassenen Senkrechten.

3. Um kurz sein zu können, wollen wir im Folgenden unter Stellung einer Ebene die drei Winkel verstehen, welche eine auf der Ebene errichtete Senkrechte mit drei rechtwinkligen Coordinatenachsen bildet. Ist nun s die Fläche eines ebenen Polygones, welches die Stellung $\alpha\beta\gamma$ besitzt, so sind die drei Projectionen von s auf die Coordinatenebenen xy, xz, yz der Reihe nach

$$c = s \cdot \cos\gamma, \; b = s \cdot \cos\beta, \; a = s \cdot \cos\alpha.$$

Dabei werden die Projectionen a, b, c, ebenso wie die Projectionen einer begrenzten Geraden, als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf sind. Denken wir uns eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Winkel ϑ bildet, so ist die Projection von s auf die neue Ebene

$$p = s \,.\, \cos\vartheta$$

oder wenn $u\,v\,w$ die Stellung der vierten Ebene bezeichnet:

$$p = s(\cos\alpha\,\cos u + \cos\beta\,\cos v + \cos\gamma\,\cos w)$$

d. i.

$$p = a\cos u + b\cos v + c\cos w.$$

Diese Formel giebt also die Projection p von s auf eine beliebige Ebene, wenn man erst die Projectionen von s auf die Coordinatenebenen und die Stellung der neuen Ebene kennt. Für mehrere beliebig liegende Figuren s_1, s_2 etc. hat man entsprechend

$$P = A\cos u + B\cos v + C\cos w,$$

wo P die Projectionssumme $p_1 + p_2 +$ etc. bedeutet, und ebenso A, B, C die Summen der auf den Coordinatenebenen construirten Projectionen sind. Wir suchen nun die Ebene, für welche P sein Maximum erreicht. Dann sind wegen der immer stattfindenden Bedingung

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 1 = 0$$

zwei unabhängige Variabele u und v vorhanden, während w eine Function von u und v ist. Durch partielle Differentiation von P hat man, die Differentialquotienten gleich Null gesetzt,

$$A\sin u + C\sin w\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$B\sin v + C\sin w\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Die partiellen Differentialquotienten der Bedingungsgleichung sind

$$\cos u\,\sin u + \cos w\,\sin w\,\frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

$$\cos v\,\sin v + \cos w\,\sin w\,\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Durch Elimination der partiellen Differentialquotienten von w ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A\cos w = C\cos u,\; B\cos w = C\cos v,$$

welche in Verbindung mit der Bedingungsgleichung zur Bestimmung von u, v, w führen; man erhält nämlich

$$\frac{\cos u}{A} = \frac{\cos v}{B} = \frac{\cos w}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und hierdurch erfährt man die Stellung derjenigen Ebene, für welche die Summe der Projectionen von allen Polygonen ihren grössten Werth erreicht.

Projicirt man s_1, s_2 etc. auf eine Ebene, welche senkrecht zur Ebene der grössten Projectionssumme steht, so erhält man eine Projectionssumme gleich Null, wie aus den Formeln für u, v, w leicht zu ersehen ist.

Cap. VI.

Die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§. 36.

Grundbegriffe von endlichen und unendlichen Reihen.

Bezeichnet $\varphi(m)$ eine bekannte Function der willkührlichen ganzen positiven Zahl m, so bilden die einzelnen Functionswerthe

$$\varphi(0),\quad \varphi(1),\quad \varphi(2),\ \ldots\ \varphi(n-1)$$

eine sogenannte endliche Reihe, welche im vorliegenden Falle aus n Gliedern (Termen) besteht; ihre Summe ist selbstverständlich eine gewisse Function von n und mag mit S_n bezeichnet werden. Lassen wir in der Gleichung

$$S_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n-1)$$

n unendlich wachsen, so wird die endliche Reihe zu einer unendlichen und gleichzeitig entsteht die Frage nach dem Grenzwerthe, welchem sich S_n für unendlich wachsende n nähert. Dabei sind nur zwei Fälle möglich; entweder ist $Lim\, S_n$ eine bestimmte endliche Grösse S oder es ist keine solche Grösse. Im ersten Falle heisst die Reihe $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) +$ etc. convergent und S ihre Summe, im zweiten Falle bezeichnet man die Reihe als divergent und sie hat dann keine Summe.

Diese Methode zur Summirung unendlicher Reihen wollen wir durch zwei Beispiele erläutern, welche nachher von Nutzen sein werden.

a. Zufolge der bekannten Summenformel für die geometrische Progression gilt, wenn $\varphi(m) = \beta^m$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{1-\beta^n}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{n-1};$$

ist nun β ein positiver oder negativer ächter Bruch, so wird $Lim\, \beta^n = 0$ *), mithin

1) $$\frac{1}{1-\beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots$$
$$-1 < \beta < +1.$$

Für $\beta = +1$ ist $S_n = n$, folglich $Lim\, S_n = \infty$; für $\beta > +1$ wird um so mehr $Lim\, S_n = \infty$; für $\beta = -1$ ist $S_n = 0$ oder $= +1$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; für $\beta < -1$ wachsen die Werthe von S_n in's Unendliche und wechseln fortwährend ihre Zeichen. Demnach ist $Lim\, S_n$ nur unter der Bedingung $-1 < \beta < +1$ eine bestimmte endliche Grösse, d. h. die Reihe $1 + \beta + \beta^2 + \cdots$ convergirt für ächt gebrochene β und divergirt in jedem anderen Falle.

b. Aus der leicht beweisbaren identischen Gleichung

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+m)}$$

folgt, indem man $m = 1, 2, 3, \ldots n-1$ setzt und Alles addirt,

1) $$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
$$= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \cdots + \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}\right],$$

wobei die eingeklammerte Reihe aus $n-1$ Gliedern besteht. Bei unendlich wachsenden n kommt es linker Hand auf den Grenzwerth von

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$

---

*) Ein positives ächt gebrochenes β kann unter der Form $\frac{1}{1+\alpha}$ dargestellt werden, wo α irgend eine positive Grösse bezeichnet; wegen $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ ist dann

$$0 < \beta^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha},$$

woraus die obige Behauptung sogleich folgt. Bei negativen β können sich β^n und $(-\beta)^n$ höchstens im Vorzeichen unterscheiden, im Uebrigen bleibt die Schlussweise dieselbe.

an, und da man augenblicklich übersieht, dass für $\alpha = \beta$ der vorliegende Bruch constant $= 1$ bleibt, so sind noch die Fälle $\alpha > \beta$ und $\alpha < \beta$ zu untersuchen.

Nun ist für ganze positive h und k, sowie für ein beliebiges positives x

$$\left(1 + \frac{x}{h}\right)^h > 1 + x, \quad (1+x)^k > 1 + kx$$

mithin, wenn man in der zweiten Ungleichung die $k$te Wurzel zieht und die reciproken Werthe nimmt

$$\left(\frac{1}{1+\frac{x}{h}}\right)^h < \frac{1}{1+x} < \left(\frac{1}{1+kx}\right)^{\frac{1}{k}};$$

hieraus folgt für $x = \frac{\alpha - \beta}{\beta + m}$, wobei $\alpha - \beta$ und $\beta + m$ als positiv angenommen werden,

$$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+\frac{\alpha-\beta}{h}}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Wählt man die Zahlen h und k so, dass gleichzeitig

$$h \geqq \alpha - \beta, \quad k \geqq \frac{1}{\alpha - \beta},$$

so kann man die vorige Ungleichung verstärken, indem man statt des ächt gebrochenen $\frac{\alpha - \beta}{h}$ die Einheit, und für das die Einheit übersteigende $k(\alpha - \beta)$ gleichfalls die Einheit setzt. In der nunmehrigen Ungleichung

$$\left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^h < \frac{\beta+m}{\alpha+m} < \left(\frac{\beta+m}{\beta+m+1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

nehmen wir $m = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und multipliciren alle entstehenden Ungleichungen; dies giebt

$$\left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^h < \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} < \left(\frac{\beta}{\beta+n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Bei unendlich wachsenden n ändern sich h und k nicht, dagegen wird $Lim \frac{\beta}{\beta+n} = 0$, mithin

$$2) \qquad Lim \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)} = 0,$$

wobei aber die Bedingung $\alpha > \beta$ festzuhalten ist. Aus Nro. 1) erhält man nun die Reihensummirung

$$\frac{\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots$$

oder auch, wenn man beiderseits die Einheit hinzufügt,

$$3)\quad \left\{\begin{array}{c} \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = 1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots \\ \alpha > \beta > 0. \end{array}\right.$$

Der zweite Fall $\alpha < \beta$ kann sehr leicht auf den ersten zurückgeführt werden, indem man

$$\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} = \frac{1}{\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}}$$

setzt; rechter Hand nähert sich der im Nenner stehende Bruch der Grenze Null, der Bruch linker Hand wächt also in's Unendliche und daher ergiebt sich aus Nro. 1)

$$4)\quad \left\{\begin{array}{c} \infty = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots \\ \beta > \alpha > 0. \end{array}\right.$$

Im letzten Falle $\beta = \alpha$ wird die betrachtete Reihe zur folgenden

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+3} + \cdots\cdots,$$

und ihre Summe erscheint, aus Nro. 1) abgeleitet, unter der Form $\frac{0}{0}$; wir bestimmen sie daher auf einem anderen Wege. Die bekannten Ungleichungen (s. §. 8, Nro. 4 und 5)

$$\frac{1}{a+1} < l(a+1) - la,$$

$$\frac{1}{a} > l(a+1) - la$$

ziehen wir vorerst in die folgenden zusammen

$$l(z+1) - lz < \frac{1}{z} < lz - l(z-1),$$

setzen dann $z = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \alpha + n$ und addiren Alles; dies giebt

$$5)\quad \left\{\begin{array}{c} l(\alpha+n+1) - l(\alpha+1) \\ < \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3} + \cdots + \frac{1}{\alpha+n} < \\ l(\alpha+n) - l\alpha. \end{array}\right.$$

Hieraus geht augenblicklich hervor, dass die Summe der zwischenliegenden Reihe gleichzeitig mit n in's Unendliche wächst.

Die Reihe

$$6)\quad 1 + \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \cdots$$

convergirt daher für $\alpha > \beta > 0$ und divergirt in jedem anderen Falle, wobei α und β immer als positiv vorausgesetzt werden.

Wie man sieht, ist die Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe leicht zu entscheiden, sobald man die Summe ihrer n ersten Glieder finden kann; dies gelingt aber nur selten, und man muss sich daher nach anderen Kennzeichen der Convergenz oder Divergenz umsehen. Setzen wir zunächst alle Reihenglieder als positiv voraus und bezeichnen wir sie einfach mit u_0, u_1, u_2 etc., so leuchtet augenblicklich ein, dass dieselben fortwährend und in's Unendliche abnehmen müssen, d. h. dass $Lim\, u_n = 0$ werden muss (für $n = \infty$), wenn die Reihe convergiren soll; denn betrüge jeder Term mehr als irgend eine Zahl ε, so würde die Summe der unendlichen Reihe mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \cdots$ in inf. ausmachen, d. h. unendlich gross sein. Dieses Criterium reicht aber nicht aus, wie man schon an der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ sehen kann, welche (nach Nro. 5) divergirt, obschon ihre Glieder in's Unendliche abnehmen. Die Sache bedarf daher einer genaueren Untersuchung, welche im Allgemeinen auf dem Principe beruht, eine gegebene Reihe mit einer anderen zu vergleichen, deren Convergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

§. 37.

Reihen mit positiven Gliedern.

I. Die gegebene Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

und zugleich werde vorausgesetzt, dass der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten Grenze λ nähere; diese ist jedenfalls positiv, kann aber < 1, $= 1$ oder > 1 sein.

Wenn λ weniger als die Einheit beträgt, so muss der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von einer gewissen Stelle $n = k$ an kleiner als ein zwischen λ und 1 eingeschalteter ächter Bruch β bleiben, denn wenn dies

nicht der Fall wäre, so könnte sich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht einer Grenze nähern, welche vorausgesetztermaassen unter β liegt. Man hat dann von $n = k$ an

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} < \beta, \quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < \beta, \quad \frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < \beta, \ldots .$$

und erhält daraus sehr leicht

$$u_{k+1} < u_k \beta, \quad u_{k+2} < u_k \beta^2, \quad u_{k+3} < u_k \beta^3, \ldots$$

und durch Addition

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots . < u_k (1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots .).$$

Die Summen, welche entstehen, wenn man immer mehr Glieder der Reihe u_k, u_{k+1}, u_{k+2} etc. vereinigt, wachsen fortwährend, sie bleiben aber, wie die vorige Ungleichung zeigt, kleiner als

$$u_k (1 + \beta + \beta^2 + \cdots) = u_k \frac{1}{1-\beta},$$

und da dieser Ausdruck einen endlichen Werth hat, so muss die Summe der unendlichen Reihe $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} +$ etc. eine endliche Grösse sein. Durch Hinzufügung der endlichen Summe $u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ erhält man wieder eine endliche Grösse, d. h. die Reihe $u_0 + u_1 + \cdots$ in inf. convergirt.

Wenn zweitens $\lambda > 1$ ist, so denke man sich zwischen 1 und λ den unächten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so gross, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \gamma$ bleibt, was von einer gewissen Stelle $n = k$ an der Fall sein muss, weil sich ausserdem $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht einer über γ liegenden Grenze nähern könnte. Man erhält durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots > u_k (1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \cdots .);$$

die rechter Hand stehende Reihe divergirt wegen $\gamma > 1$, mithin ist die Summe der Reihe links unendlich gross; dasselbe gilt dann von der Summe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. Nach diesen Erörterungen haben wir den Satz:

Die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt.

Als Beispiel diene die Reihe

$$1) \quad \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots;$$

hier ist $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$ u. s. w.

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n(2n+1)} = Lim \frac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 x^2}{1 + \frac{1}{2n}} = x^2,$$

mithin convergirt die Reihe für $x < 1$ und divergirt für $x > 1$.

Ebenso leicht ergiebt sich, dass die Reihe

$$2) \quad \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \frac{x^4}{4^p} + \cdots$$

für $x < 1$ convergirt und für $x > 1$ divergirt.

Wendet man überhaupt das obige Theorem auf eine sogenannte Potenzenreihe an, nämlich

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

worin x und alle a als positiv vorausgesetzt werden, so findet man leicht, dass dieselbe convergirt oder divergirt, je nachdem x weniger oder mehr als $Lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$ beträgt.

Das soeben bewiesene Criterium verliert seine Anwendbarkeit in dem Falle $\lambda = 1$, weil die Herleitung desselben auf der Voraussetzung beruht, dass zwischen 1 und λ eine Zahl eingeschaltet werden könne; der genannte Ausnahmefall bedarf daher einer weiteren Untersuchung.

II. Wenn das Product

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

bei unendlich wachsenden n sich einer bestimmten endlichen Grenze μ nähert, so kann letztere (wegen $u_{n+1} < u_n$) nur eine positive Grösse sein, rücksichtlich deren wir die drei Fälle $\mu > 1$, $\mu = 1$ und $\mu < 1$ unterscheiden.

Im Falle $\mu > 1$ denken wir uns zwischen μ und 1 den unächten Bruch γ eingeschaltet und n so gross genommen, dass das oben erwähnte Product grösser als γ bleibt, was jedenfalls einmal geschehen wird. Von einer bestimmten Stelle $n = k$ an haben wir dann

$$k\left(1-\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)>\gamma,\ (k+1)\left(1-\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}\right)>\gamma,\ (k+2)\left(1-\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}}\right)>\gamma,$$

u. s. w.

und erhalten hieraus

$$u_{k+1}<\frac{k-\gamma}{k}u_k,\ u_{k+2}<\frac{k+1-\gamma}{k+1}u_{k+1}<\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}u_k,$$

$$u_{k+3}<\frac{k+2-\gamma}{k+2}u_{k+2}<\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}u_k,\cdots$$

mithin durch Addition

$$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$$
$$<u_k\left\{1+\frac{k-\gamma}{k}+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)(k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}+\cdots\right\}.$$

Die rechts stehende Reihe ist ein specieller Fall der Reihe Nro. 3) in §. 36 und zwar $\alpha=k-1$, $\beta=k-\gamma$, wobei immer $k>\gamma>1$ gewählt werden kann; auch convergirt unsere Reihe, weil $\gamma>1$, mithin $\alpha>\beta$ ist. Daraus folgt die Convergenz der Reihe linker Hand, sowie die Convergenz der Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc.

Wenn $\mu<1$ ist, so denke man sich zwischen μ und 1 den ächten Bruch γ eingeschaltet und nehme n so gross, dass das Product $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ von einer bestimmten Stelle $n=k$ ab kleiner als γ bleibt. Durch ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin gelangt man jetzt zu der Ungleichung

$$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$$
$$>u_k\left\{1+\frac{k-\gamma}{k}+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)}{k(k+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(k-\gamma)(k-\gamma+1)k-\gamma+2)}{k(k+1)(k+2)}+\cdots\right\}.$$

Wegen $\gamma<1$ divergirt die eingeklammerte Reihe, um so mehr divergirt auch die Reihe linker Hand, sowie die Reihe $u_0+u_1+u_2$ etc. Alles zusammen giebt den Satz

Die unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth des Productes

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Dieses Kennzeichen erledigt meistentheils die Fälle, wo das vorige keine Entscheidung giebt. So erhalten wir z. B. aus Nro. 1) für $x = 1$

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\,\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}}{1+\frac{1}{2n}} = \frac{3}{2} > 1$$

mithin convergirt die Reihe 1) auch für $x = 1$.

Für die Reihe 2) ist im Falle $x = 1$

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\left[n\left\{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right\}\right]$$

oder, wenn $\frac{1}{n} = \delta$ gesetzt wird,

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\left[\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}\cdot\frac{1}{(1+\delta)^p}\right] = p;$$

mithin convergirt oder divergirt die Reihe

3) $$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdot$$

je nachdem $p > 1$ oder $p < 1$ ist.

Da sie für $p = 1$ divergirt, wie wir schon aus §. 36 wissen, so sind jetzt alle möglichen Fälle erledigt.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel bietet die Reihe

4) $$-l\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)-l\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)-l\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)-\cdots$$
$$= l\left(1+\frac{x^2}{1^2-x^2}\right)+l\left(1+\frac{x^2}{2^2-x^2}\right)+l\left(1+\frac{x^2}{3^2-x^2}\right)+\cdots,$$

worin x einen ächten Bruch bezeichnen möge. Hier liesse sich zwar das gegebene Criterium direct anwenden, würde aber zu einer etwas complicirten Rechnung führen. Kürzer gelangt man durch die Bemerkung zum Ziele, dass nach §. 8, Formel 5) jederzeit $l(1+h) < h$ ist und dass folglich die Summe der obigen Reihe weniger beträgt als

5) $$\frac{x^2}{1^2-x^2}+\frac{x^2}{2^2-x^2}+\frac{x^2}{3^2-x^2}+\cdots\cdot$$

Bezeichnet man die vorstehenden Summanden mit u_1, u_2, u_3 etc., so erhält man

$$Lim\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = Lim\,\frac{2n^2+n}{(n+1)^2-x^2}$$

$$= Lim\,\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{x}{n}\right)^2} = 2 > 1;$$

demnach convergirt die Reihe 5) und um so mehr die Reihe 4).

Es kann sich treffen, dass der mit μ bezeichnete Grenzwerth gerade $= 1$ wird; dann verliert das vorige Kennzeichen seine Anwendbarkeit und macht wieder eine neue Untersuchung nothwendig. Diese Fälle sind indessen so selten, dass wir die Aufstellung weiterer Convergenzregeln unterlassen können*).

§. 38.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Aus einer Reihe, welche Glieder mit verschiedenen Vorzeichen enthält, kann man eine neue Reihe dadurch bilden, dass man allen Gliedern das nämliche Vorzeichen giebt; wenn nun die letztere Reihe convergirt, so ist zu erwarten, dass auch die erste convergiren werde. In der That kann man sich hiervon durch sehr einfache Schlüsse überzeugen, die wir nur an dem Falle zu erörtern brauchen, wo die Vorzeichen alterniren. Die ursprüngliche Reihe ist dann

1) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$$

und die abgeleitete

2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

Wenn nun die letztere convergirt, so nähert sich jede der beiden Summen

$$\varphi(n) = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n-2}$$
$$\psi(n) = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

einer endlichen Grenze [im entgegengesetzten Falle wäre der Grenzwerth von $\varphi(n) + \psi(n)$ unendlich, was der Convergenz von Nro. 2) widerspräche], mithin ist auch der Grenzwerth von

$$\varphi(n) - \psi(n)$$
$$= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2n-2} - u_{2n-1}$$

*) Vergl. d. Verf. Handbuch der algebraischen Analysis; 4. Aufl. Jena 1868.

eine endliche Grösse; die Reihe 1) convergirt daher und hat eine kleinere Summe als die Reihe 2). Aehnliche Schlüsse gelten in jedem anderen Falle.

Bei den häufig vorkommenden Reihen mit alternirenden Vorzeichen kann man die Convergenz noch auf einem anderen und viel einfacheren Wege erkennen, sobald von einer bestimmten Stelle $n = k$ an jeder Term grösser als der nächstfolgende ist, also

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und ausserdem wie früher $Lim\ u_n = 0$. Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} R_1 &= u_k, \\ R_3 &= u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}), \\ R_5 &= u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4}), \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

und beachten, dass alle eingeklammerten Differenzen positiv sind, so haben wir

3) $$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Andererseits gilt für die Grössen

$$\begin{aligned} R_2 &= (u_k - u_{k+1}), \\ R_4 &= (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}), \\ R_6 &= (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5}), \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

die Beziehung

4) $$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Endlich ist bei unausgesetzt wachsenden m

$$Lim\,(R_{2m-1} - R_{2m}) = Lim\ u_{k+2m-1} = 0;$$

hieraus folgt, dass sich R_{2m-1} und R_{2m} einer und derselben Grenze R nähern, und zwar R_{2m-1} durch Abnahme, R_{2m} durch Zunahme. Dieses R muss aber eine endliche Grösse sein, weil es nach Nro. 4) positiv und nach Nro. 3) kleiner als jede der Zahlen R_1, R_3, R_5 etc. ist. Zufolge der Gleichung $R = Lim\ R_{2m-1} = Lim\ R_{2m}$ hat man

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

mithin convergirt die vorliegende Reihe und daher auch die Reihe $u_0 - u_1 + u_2$ etc. Dies giebt den Satz:

> Eine Reihe mit alternirenden Vorzeichen convergirt immer, sobald ihre Glieder von einer bestimmten Stelle an fortwährend und in's Unendliche abnehmen.

Hieraus folgt z. B., dass die Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

convergirt und dass ihre Summe zwischen

$$\frac{1}{1} \text{ und } \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ und } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

u. s. w.

enthalten ist; dagegen würde eine divergente Reihe entstehen, wenn man alle Glieder auf ihre absoluten Werthe reduciren wollte. Der obige Satz entscheidet daher auch in solchen Fällen, wo das vorige Kennzeichen zu keinem Resultate führen würde.

Wir wollen hier eine Eigenthümlichkeit erwähnen, die bei den divergenten Reihen mit alternirenden Vorzeichen stattfinden kann. Wenn nämlich $Lim\ u_n$ eine endliche, von Null verschiedene Grösse ϱ ist, so nähert sich $u_n - u_{n+1}$ der Grenze Null, und es kann sich treffen, dass die Reihen

$$S_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1})$$
$$S_{2m+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots - (u_{2m-1} - u_{2m})$$

convergiren, indem man jede eingeklammerte Differenz als ein Reihenglied betrachtet. Unter diesen Umständen sind $Lim\ S_{2m}$ und $Lim\ S_{2m+1}$ endliche Grössen, und als Grenzwerth ihrer Differenz erhält man

$$Lim\ (S_{2m+1} - S_{2m}) = Lim\ u_{2m} = \varrho,$$

d. h die Summen der Reihenglieder

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$$

nähern sich zwei endlichen, um ϱ von einander verschiedenen Grenzen, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Zahl von Gliedern zusammenrechnet. Divergente Reihen dieser besonderen Gattung hat man oscillirende Reihen genannt.

Das einfachste Beispiel hierzu bietet die Reihe

$$a - a + a - a + \cdots$$

deren Summe bei gerader Gliederzahl $= 0$, bei ungerader Gliederzahl $= a$ ist.

Als zweites Beispiel kann die Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$$

dienen. Hier ist

$$S_{2m} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2m},$$

$$S_{2m+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2m} + \frac{2m+2}{2m+1};$$

bezeichnen wir mit σ die Summe der unendlichen convergirenden Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

so erhalten wir

$$Lim\, S_{2m} = \sigma, \quad Lim\, S_{2m+1} = \sigma + 1,$$

mithin oscillirt die obige Reihe zwischen σ und $\sigma + 1$.

§. 39.

Bedingte und unbedingte Convergenz.

Die in §. 36 gezeigte Entstehungsweise der unendlichen Reihen beweist unmittelbar, dass durch die gegebene Function $\varphi(m)$ nicht nur die Grösse der einzelnen Reihenglieder $u_0 = \varphi(0)$, $u_1 = \varphi(1)$, $u_2 = \varphi(2)$ etc., sondern auch die Stelle eines jeden derselben bestimmt wird; die Anordnung der Glieder ändern, heisst demnach, die Function φ durch eine andere ersetzen, wobei sich nicht im Voraus absehen lässt, ob die Summe der Reihe ungestört bleiben wird oder nicht. In der That wird das folgende Beispiel zeigen, dass eine andere Anordnung der Reihenglieder zu einer anderen Reihensumme führen kann.

Wir betrachten die folgenden zwei convergirenden Reihen

$$\sigma = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \cdots,$$
$$s = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

deren zweite so aus der ersten gebildet ist, dass auf zwei positive Glieder ein negatives folgt; es darf dann σ als der Grenzwerth von

$$\sigma_n = (\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

angesehen werden, ebenso s als Grenzwerth von

$$s_n = (\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz beider Gleichungen giebt

$$s_n - \sigma_n = \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]$$

und hieraus folgt für $n = \infty$

$$s - \sigma = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots] = \tfrac{1}{2}\sigma$$

d. h. $$s = \tfrac{3}{2}\sigma,$$

womit die Verschiedenheit von σ und s dargethan ist.

Man erkennt demnach die Nothwendigkeit, zweierlei convergirende Reihen zu unterscheiden; ist die Summe der Reihe abhängig von der Anordnung der Glieder, wie im vorigen Beispiele, so heisst die Reihe bedingt-convergent, im Gegenfalle unbedingt-convergent. Daran knüpft sich gleichzeitig die Aufgabe, die Kennzeichen der unbedingten Convergenz aufzusuchen.

Wir bezeichnen mit U_n die Summe einer Reihe von n Gliedern, nämlich

1) $$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

und setzen voraus, dass (für $n = \infty$) $Lim\ U_n$ gleich einer bestimmten endlichen Grösse U sei, mithin

2) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad ;$$

die vorliegende Reihe ist dann convergent. Ferner bedeute

3) $$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$$

eine Reihe, welche aus Nro. 2) durch andere Anordnung der Glieder gebildet ist; es fragt sich dann, unter welchen Umständen die neue Reihe gleichfalls U zur Summe haben wird. Setzen wir vorläufig

4) $$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-1},$$

so können wir p so gross wählen, dass die vorliegende Reihe alle in Nro. 1) vorkommenden Glieder enthält und ausserdem noch $p - n$ anderweite Glieder, deren Indices grösser als $n - 1$ sind, und die wir in der Form

$$u_q + u_r + u_s + \cdots$$

zusammenfassen. Demnach ist

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \cdots$$

mithin bei unendlich wachsenden p und n

$$Lim\ V_p - U = Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots);$$

soll nun die Reihe 3) gleichfalls U zur Summe haben, so muss $Lim\ V_p = U$ oder

5) $$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0$$

sein, und dies ist das Kennzeichen der unbedingten Convergenz der Reihe 2). Um aber den Gegenstand weiter zu verfolgen, wollen wir voraussetzen, dass die Reihe 2) von einer bestimmten Stelle an nur positive Glieder enthalte. Bei hinreichend grossen n sind dann alle in der Gleichung

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$$

vorkommenden Glieder positiv, und die Summe $u_n + u_{n+1} +$ etc., der sogenannte Rest der Reihe, hat die Null zur Grenze, weil bei unendlich wachsenden n die linke Seite in $U - Lim\, U_n = 0$ übergeht. Nun besteht die Summe $u_q + u_r + u_s +$ etc. aus $p - n$ Gliedern, deren Indices $> n - 1$ sind; diese Glieder sind positiv und man hat desshalb

$$0 < u_q + u_r + u_s + \cdots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

mithin

$$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung convergirt also die Reihe unbedingt.

Diese Schlussweise ist nicht mehr anwendbar, wenn die ursprüngliche Reihe theils positive, theils negative Glieder enthält; derartige Reihen können daher möglicherweise zu den bedingt-convergirenden gehören. Nur in dem speciellen Falle, wo die Reihe auch dann convergent bleibt, wenn man statt jedes einzelnen Gliedes dessen absoluten Werth setzt, lässt sich die Sache folgendermaassen erledigen. Der absolute Werth irgend eines Gliedes u_m werde mit $[u_m]$ bezeichnet, dann ist zufolge der Voraussetzung

$$[u_0] + [u_1] + [u_2] + [u_3] + \cdots$$

eine convergente Reihe, mithin nach dem Vorigen

$$Lim\,\{[u_q] + [u_r] + [u_s] + \cdots\} = 0,$$

d. h. der absolute Werth von $u_q + u_r + u_s +$ etc. kann der Null beliebig nahe gebracht werden. Daraus folgt sehr leicht, dass

$$Lim\,(u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0$$

sein, mithin die Reihe unbedingt convergiren muss. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

> Eine unendliche Reihe convergirt unbedingt, wenn sie ihre Convergenz auch in dem Falle behält, wo alle Glieder auf ihre absoluten Werthe reducirt werden.

Die anfangs erwähnte Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

genügt dieser Bedingung nicht, und es wird daher nicht überraschen, dass sie nur bedingt convergirt.

§. 40.

Convergenzbedingungen für periodische Reihen.

Wegen späterer Anwendungen betrachten wir noch Reihen von den Formen

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$
$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots,$$

worin die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc., b_1, b_2 etc. als positiv vorausgesetzt werden mögen. Wir unterscheiden dabei drei Hauptfälle; die Coefficienten können nämlich gleich sein, sie können zweitens eine steigende, oder drittens eine fallende Reihe bilden.

Für $a_0 = a_1 = a_2 \ldots$ ist nach einer bekannten Formel die Summe der n ersten Glieder

$$a_0 \left[\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos(n-1)x\right] = a_0 \frac{\sin(n-\tfrac{1}{2})x}{2\sin\tfrac{1}{2}x}.$$

Bei unendlich wachsenden n oscillirt $\sin(n-\frac{1}{2})x$ zwischen -1 und $+1$ hin und her, ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern; die Reihe hat also, in's Unendliche fortgesetzt, keine angebbare Summe, d. h. sie divergirt. Zufolge der Gleichung

$$b_1 \left[\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin(n-1)x\right] = b_1 \left[\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}x - \frac{\cos(n-\tfrac{1}{2})x}{2\sin\tfrac{1}{2}x}\right]$$

gelten ganz ähnliche Schlüsse für die zweite Reihe; letztere divergirt daher gleichfalls für $b_1 = b_2 = b_3$ etc.

Bilden a_0, a_1, a_2 etc. und ebenso b_1, b_2 etc. eine steigende Reihe, so findet offenbar die Divergenz um so mehr statt; demnach bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, wo jene Coefficienten eine abnehmende Reihe ausmachen.

Die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder der ersten Reihe heisse S_{n+1}; multipliciren wir die Gleichung

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

mit $2\sin\frac{1}{2}x$ und zerlegen rechter Hand jedes doppelte Product in die Differenz zweier Sinus, so erhalten wir

$$2\,S_{n+1}\sin\tfrac{1}{2}x$$
$$= a_0 \sin\tfrac{1}{2}x + a_1(\sin\tfrac{3}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x) + a_2(\sin\tfrac{5}{2}x - \sin\tfrac{3}{2}x) + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}\left(\sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x\right) + a_n\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

und bei anderer Anordnung

$$2 \sin \tfrac{1}{2} x \,.\, S_{n+1} - a_n \sin \frac{2n+1}{2} x$$
$$= (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n-1} - a_n) \sin \frac{2n-1}{2} x.$$

Unter der Voraussetzung, dass

1) $\quad a_0 > a_1 > a_2 > a_3 \ldots$, und $Lim\, a_n = 0$

ist, lassen wir n in's Unendliche wachsen und haben

2) $\quad Lim\, S_{n+1} = \dfrac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \Big\{ (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x$
$$+ (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \cdots \Big\}.$$

Hinsichtlich der Reihe

3) $\quad (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots,$

als deren Glieder die eingeklammerten Differenzen gelten mögen, ist nun klar, dass sie aus lauter positiven Gliedern besteht (wegen $a_0 > a_1 > a_2$ etc.) und dass die Summe ihrer n ersten Glieder $= a_0 - a_n$, mithin ihre volle Summe $= a_0 - Lim\, a_n = a_0$ ist; die Reihe 3) convergirt also. Um so mehr muss auch die Reihe

4) $\quad (a_0 - a_1) \sin \tfrac{1}{2} x + (a_1 - a_2) \sin \tfrac{3}{2} x + (a_2 - a_3) \sin \tfrac{5}{2} x + \cdots$

convergiren, denn ihre Glieder sind, den absoluten Werthen nach, kleiner als die gleichstelligen Glieder der Reihe 3), und ausserdem besitzt die Reihe 4) theils positive, theils negative Glieder. Bezeichnen wir die jedenfalls endliche Summe der Reihe 4) mit $\varphi(x)$, so folgt aus Nro. 2)

$$Lim\, S_{n+1} = \frac{\varphi(x)}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

und hier ist die rechte Seite eine endliche Grösse, so lange x nicht einen der speciellen Werthe $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc. erhält; d. h.

> Wenn die positiven Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so convergirt die periodische Reihe
>
> $$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
>
> für alle x, die nicht von der Form $\pm 2k\pi$ sind.

Indem man $\pi + x$ an die Stelle von x treten lässt, gelangt man zu dem zweiten Satze:

Unter den obigen Bedingungen convergirt auch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos 2x - a_3 \cos 3x + \cdots$$

für alle x, die nicht von der Form $\pm (2k-1)\pi$ sind.

Um die entsprechenden Theoreme für die periodische Reihe der Sinus zu erhalten, multipliciren wir die Gleichung

$$S_n = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx$$

mit $2 \sin \frac{1}{2}x$ und zerlegen jedes Product zweier Sinus in eine Cosinusdifferenz; bei etwas anderer Anordnung ergiebt sich

$$2 \sin \tfrac{1}{2}x \,.\, S_n + b_n \cos \frac{2n+1}{2} x$$
$$= b_1 \cos \tfrac{1}{2}x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x - \cdots -$$
$$\cdots - (b_{n-1} - b_n) \cos \frac{2n-1}{2} x.$$

Vorausgesetzt, dass

$$b_1 > b_2 > b_3 \cdots, \quad \text{und} \quad Lim\, b_n = 0$$

ist, wird aus der vorigen Gleichung die folgende

$$Lim\, S_n = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \left\{ b_1 \cos \tfrac{1}{2}x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x - \cdots \right\}.$$

Die Reihe

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots$$

enthält lauter positive Glieder (jede eingeklammerte Differenz als ein Glied gerechnet) und ihre Summe ist $= b_1$; daher convergirt um so stärker die Reihe

$$(b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x + (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x + (b_3 - b_4) \cos \tfrac{7}{2}x + \cdots$$

und folglich hat auch die Reihe

$$b_1 \cos \tfrac{1}{2}x - (b_1 - b_2) \cos \tfrac{3}{2}x - (b_2 - b_3) \cos \tfrac{5}{2}x - \cdots$$

eine endliche Summe, die $\psi(x)$ heissen möge. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$Lim\, S_n = \frac{\psi(x)}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

geht hervor, dass die betrachtete Reihe convergirt, wenn x keinen der Werthe $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi$ etc. erhält. Im letzteren Falle würde aber die Summe der Reihe verschwinden, und man kann daher sagen:

Wenn die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. eine unendlich abnehmende Reihe bilden, so ist die periodische Reihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

convergent für jedes beliebige x.

Indem man $\pi + x$ an die Stelle von x treten lässt, gelangt man noch zu dem Satze:

Unter der obigen Voraussetzung ist auch

$$b_1 \sin x - b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x - \cdots$$

eine stets convergirende Reihe.

§. 41.

Addition und Multiplication unendlicher Reihen.

I. Es sei

1) $$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

2) $$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n,$$

so ist auch, wenn a und b irgendwelche von n unabhängige Factoren bedeuten,

3) $$a u_0 + b v_0 + a u_1 + b v_1 + \cdots + a u_n + b v_n = a P_n + b Q_n.$$

Unter der Voraussetzung, dass $Lim\, P_n = P$ und $Lim\, Q_n = Q$ endliche Grössen sind, convergiren die Reihen 1) und 2), und zwar hat die erste, in's Unendliche fortgesetzt, P zur Summe, die zweite Q; ferner wird aus Nro. 3)

$$a u_0 + b v_0 + a u_1 + b v_1 + a u_2 + b v_2 + \cdots = Lim\,(a P_n + b Q_n) = a P + b Q.$$

Man kann dieses Ergebniss folgendermaassen aussprechen:

Das Aggregat zweier convergenten Reihen ist wieder eine convergirende Reihe und die Summe der letzteren gleich dem Aggregate von den Summen der ursprünglichen Reihen.

Dieser Satz gilt auch allgemeiner für jede endliche Anzahl gegebener convergirender Reihen.

II. Um den entsprechenden Satz für das Product zweier Reihen zu erhalten, lassen wir letztere nach Potenzen einer Variabelen x fortschreiten, wodurch die Uebersicht über die entsprechenden Partialproducte erleichtert wird. Es sei nämlich

$$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n},$$

$$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n},$$

mithin $P_{2n}\,Q_{2n} = a_0\,b_0 + (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,x$
$+ (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,x^2$
$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
$+ (a_0\,b_{2n} + a_1\,b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}\,b_1 + a_{2n}\,b_0)\,x^{2n}$
$+ (a_1\,b_{2n} + a_2\,b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}\,b_2 + a_{2n}\,b_1)\,x^{2n+1}$
$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
$+ (a_{2n-1}\,b_{2n} + a_{2n}\,b_{2n-1})\,x^{4n-1}$
$+ a_{2n}\,b_{2n}\,x^{4n}$;

vergleicht man diesen Ausdruck mit dem folgenden

4) $S_{2n} = a_0\,b_0 + (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,x + (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,x^2 + \cdots$
$\cdots + (a_0\,b_{2n} + a_1\,b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}\,b_1 + a_{2n}\,b_0)\,x^{2n}$,

indem man x sowie alle a und b als positiv voraussetzt, so erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichung

$$S_{2n} < P_{2n}\,Q_{2n}.$$

Es sei ferner

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$
$$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

mithin

$P_n\,Q_n = a_0\,b_0 + (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,x$
$+ (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,x^2$
$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$
$+ (a_{n-1}\,b_n + a_n\,b_{n-1})\,x^{2n-1}$
$+ a_n\,b_n\,x^{2n}$,

so hat man durch Vergleichung mit S_{2n}

$$S_{2n} > P_n\,Q_n$$

und mit dem Vorigen zusammen

5) $$P_{2n}\,Q_{2n} > S_{2n} > P_n\,Q_n.$$

Bei unendlich wachsenden n werden die für P_{2n}, Q_{2n}, P_n, Q_n angegebenen Reihen gleichzeitig unendlich und im Falle der Convergenz sind

$$Lim\ P_{2n} = Lim\ P_n = P,$$
$$Lim\ Q_{2n} = Lim\ Q_n = Q$$

endliche Grössen; unter dieser Voraussetzung ergiebt sich aus Nro. 5) die Gleichung

6) $$Lim\ S_{2n} = P\,Q,$$

welche sagt, dass die Reihe 4), in's Unendliche fortgesetzt, convergirt und $P\,Q$ zur Summe hat.

Wenn die ursprünglichen zwei Reihen mit Gliedern von ungerader Stelle aufhören, d. h. von folgenden Formen sind

$$P_{2n+1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1},$$
$$Q_{2n+1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1},$$

so erleidet die vorige Betrachtung nur die kleine Modification, dass in Nro. 5)

$$P_{2n} = P_{2n+1} - a_{2n+1} x^{2n+1}, \quad Q_{2n} = Q_{2n+1} - b_{2n+1} x^{2n+1}$$

zu setzen ist. Zufolge der angenommenen Convergenz der Reihen wird dann

$$Lim(a_{2n+1} x^{2n+1}) = 0, \quad Lim\,(b_{2n+1} x^{2n+1}) = 0,$$
$$Lim\, P_{2n+1} = P, \quad Lim\, Q_{2n+1} = Q,$$

und damit kommt man wieder auf die Gleichung 6); d. h.:

Wenn die unendlichen und convergirenden Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Product eine gleichfalls convergente Reihe, nämlich

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots,$$

und die Summe der letzteren ist das Product aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Die Schlüsse, mittelst deren die Ungleichung 5) hergeleitet wurde, verlieren ihre Anwendbarkeit in dem Falle, wo die ursprünglichen Reihen negative Glieder enthalten; denn es könnten z. B. die Glieder, um welche $P_{2n} Q_{2n}$ reicher als S_{2n} ist, zusammen so viel Negatives geben, dass $P_{2n} Q_{2n}$ weniger als S_{2n} betrüge. Unter diesen Umständen wäre es also möglich, dass die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

divergirte, und dann würde ihre Summe nicht angebbar, mithin auch nicht $= P Q$ sein. Das wirkliche Vorkommen dieses Ausnahmefalles mag folgendes Beispiel zeigen.

Nimmt man

$$x = 1, \quad a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$$

und multiplicirt die convergente Reihe

$$7) \qquad P = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots$$

mit sich selbst, indem man die Glieder auf die obige Weise ordnet, so ergiebt sich eine neue Reihe

$$S = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \cdots,$$

deren $n$tes Glied ist:

$$t_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)\,2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)\,3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{2\,(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

Nach dem bekannten Satze, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen kleiner als deren arithmetisches Mittel ist, hat man

$$\sqrt{(n-k)(k+1)} < \frac{n+1}{2},$$

mithin

$$\sqrt[4]{(n-k)(k+1)} < \sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{(n-k)(k+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}};$$

nimmt man in der letzten Ungleichung $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und addirt alle entstehenden Ungleichungen, so erhält man

$$t_n > n\sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \text{oder} \quad t_n > \sqrt{\frac{2n^2}{n+1}} > \sqrt{2\,(n-1)}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass t_n gleichzeitig mit n in's Unendliche wächst, dass also die Reihe S divergirt, mithin S nicht $= P^2$ sein kann.

Hiernach bedarf der Fall, wo die zu multiplicirenden Reihen negative Glieder enthalten, einer besonderen Untersuchung. Die Reihen mögen aus Gliedern mit alternirenden Vorzeichen bestehen, etwa

$$P = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots,$$
$$Q = b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots,$$

und convergiren. Fassen wir alle positiven und ebenso alle negativen Glieder jeder Reihe zusammen, indem wir setzen

$$U_0 = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots,$$
$$U_1 = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots,$$
$$V_0 = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \cdots,$$
$$V_1 = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots,$$

so sind zwei Fälle möglich; es können nämlich die vorstehenden vier Reihen ebensowohl convergiren als divergiren *), und es sind

*) So convergirt z. B. die Reihe

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots,$$

aber die positiven Glieder, für sich genommen, liefern die divergente Reihe:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots > \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots),$$

und ebenso divergirt die Reihe der negativen Glieder:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdots = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots).$$

U_0, U_1, V_0, V_1 im ersten Falle endliche Grössen, im zweiten Falle unendlich gross. Beschränken wir uns auf den ersten Fall, so ist nach dem in Nro. I. bewiesenen Satze

$$P = U_0 - U_1, \qquad Q = V_0 - V_1;$$

ferner haben wir nach der Regel für die Multiplication solcher convergirender Reihen, die nur positive Glieder enthalten,

$$\begin{aligned}
U_0 V_0 &= a_0 b_0 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\
U_0 V_1 &= a_0 b_1 x + (a_0 b_3 + a_2 b_1) x^3 + \cdots \\
U_1 V_0 &= a_1 b_0 x + (a_1 b_2 + a_3 b_0) x^3 + \cdots \\
U_1 V_1 &= a_1 b_1 x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}
&U_0 V_0 - U_0 V_1 - U_1 V_0 + U_1 V_1 \\
&= a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\
&\qquad - (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine endliche Grösse und identisch mit

$$(U_0 - U_1)(V_0 - V_1) = PQ,$$

mithin convergirt die erhaltene Reihe und hat PQ zur Summe. Wie man sieht, bleibt die frühere Multiplicationsregel ungestört bei endlichen U_0, U_1, V_0, V_1. Diese Bedingung ist aber erfüllt, wenn die Reihen P und Q ihre Convergenz auch in dem Falle beibehalten, wo man die negativen Glieder durch gleichgrosse positive ersetzt, denn sobald die Summe zweier positiven Grössen U_0 und U_1 oder V_0 und V_1 eine endliche Grösse ist, muss jeder Summand für sich von endlicher Grösse sein. Wir haben daher den Satz:

Wenn die unendlichen convergenten Reihen

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots$$
$$b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots$$

ihre Convergenz auch in dem Falle behalten, wo alle Glieder mit gleichen Vorzeichen genommen werden, so ist ihr Product eine gleichfalls convergirende Reihe:

$$a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 - \cdots$$

und die Summe der letzteren ist das Product aus den Summen der beiden ersten Reihen.

Die Reihe 7) genügt der ausgesprochenen Bedingung nicht und daraus erklärt sich, dass ihr Quadrat, auf gewöhnliche Weise angeordnet, eine divergente Reihe liefert.

§. 42.

Die Differentiation unendlicher Reihen.

Schon in §. 5 wurde bemerkt, dass im Allgemeinen der Differentialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe nicht nothwendigerweise gleich der Summe von den Differentialquotienten der einzelnen Glieder sein müsse, dass man also aus der Gleichung

1) $$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

nicht ohne Weiteres auf die Richtigkeit von

2) $$\frac{dS}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots \text{ in inf.}$$

schliessen dürfe. Wir wollen dies jetzt näher untersuchen.

Da u_n und $\frac{du_n}{dx}$ ganz verschiedene Functionen von x sind, so kann es geschehen, dass die erste Reihe convergirt und gleichzeitig die zweite Reihe divergirt; dann ist aber die Summe der letzteren nicht angebbar und kann folglich auch der bestimmten Function $\frac{dS}{dx}$ nicht gleich sein, d. h. die Gleichung 2) besteht dann nicht. Dass derartige Fälle vorkommen, zeigt das Beispiel

$$S = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots$$

Hier convergirt die Reihe für alle zwischen 0 und π enthaltenen x und daher ist S eine bestimmte Function von x; dagegen divergirt die Reihe der Differentialquotienten

$$-\sin x - \sin 2x - \sin 3x - \cdots$$

und folglich kann ihre Summe nicht $= \frac{dS}{dx}$ sein. Das Befremdliche, was für den ersten Anblick hierin liegen mag, verliert sich übrigens durch die Bemerkung, dass es bei der Differentiation unendlicher Reihen eigentlich auf die Umkehrung der Aufeinanderfolge zweier ganz verschiedenen Operationen ankommt. Bezeichnen wir nämlich den Differentialquotienten einer Function durch das Vorsetzen von D und die Summe von $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. kurz mit Σu, so ist in unserem Beispiele

$$S = \Sigma \frac{\cos nx}{n}, \quad (\text{für } n = 1, 2, 3 \ldots)$$

und daher auch

$$DS = D\Sigma \frac{\cos nx}{n};$$

dagegen ist nicht

$$DS = \Sigma D \frac{\cos nx}{n} = \Sigma (-\sin nx),$$

d. h. man darf die mit Σ und D bezeichneten Operationen nicht in umgekehrter Ordnung vornehmen.

Wie man aus dem Vorigen sieht, hört die Untersuchung darüber, ob überhaupt $D\Sigma u = \Sigma D u$ ist, sogleich auf, wenn die Reihe der Differentialquotienten divergirt, und die Frage kann daher nur noch sein, wie sich die Sache in dem Falle gestaltet, wo die Reihe der Differentialquotienten convergirt. Wir wollen die wichtigsten hierauf bezüglichen Sätze entwickeln.

I. Die Reihe 1) sei eine Potenzenreihe und $f(x)$ ihre Summe etwa

3) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Diese Reihe convergirt, wenn der absolute Werth von

$$Lim \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = Lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x\right)$$

weniger als die Einheit beträgt; setzen wir den absoluten Werth von

$$Lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$$

so können wir die ebenerwähnte Convergenzbedingung durch $-\lambda < x < +\lambda$ ausdrücken. Für alle derartigen x convergirt ferner die Reihe

$$1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \cdots$$

weil hier der absolute Werth von

$$Lim \frac{(n+1)\, a_{n+1} x^n}{n a_n x^{n-1}} = Lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) x}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{x}{\lambda} < 1$$

ist, mithin besitzt die zweite Reihe eine bestimmte Summe, die $\varphi(x)$ heissen möge, d. i.

4) $$\varphi(x) = 1 a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots$$

Da in den Gleichungen 3) und 4) x zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegt, so lässt sich immer eine willkührliche Zahl h von der Beschaffenheit finden, dass auch $x + h$ zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ enthalten ist, und dann gelten die Gleichungen

5) $f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \cdots$

6) $\varphi(x+h) = 1\,a_1 + 2\,a_2(x+h) + 3\,a_3(x+h)^2 + \cdots$

Von den Gleichungen 5) und 3) nehmen wir die Differenz, dividiren mit h und benutzen rechter Hand den Satz

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x+\vartheta h) \quad , \quad 0 < \vartheta < 1$$

oder specieller

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = m(x+\vartheta_m h)^{m-1}, \quad 0 < \vartheta_m < 1;$$

wir erhalten

7) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= 1\,a_1 + 2\,a_2(x+\vartheta_2 h) + 3\,a_3(x+\vartheta_3 h)^2 + 4\,a_4(x+\vartheta_4 h)^3 + \cdots$$

Um vorerst den einfachsten Fall zu erledigen, wollen wir annehmen, dass alle Coefficienten a_1, a_2 etc. positiv seien und dass x gleichfalls nur positive Werthe erhalte ($0 \leqq x < +\lambda$); die Summe der rechts stehenden Reihe ist dann, h als positiv vorausgesetzt, grösser als

$$1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots = \varphi(x)$$

und kleiner als

$$1\,a_1 + 2\,a_2(x+h) + 3\,a_3(x+h)^2 + \cdots = \varphi(x+h),$$

wir haben also zusammen

$$\varphi(x) < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \varphi(x+h).$$

Bei negativen h ist dagegen

$$\varphi(x) > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \varphi(x+h).$$

Aus beiden Ungleichungen folgt durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h

$$\varphi(x) = f'(x);$$

unter den gemachten Voraussetzungen ist also die Summe der Reihe $1\,a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 +$ etc. gleich dem Differentialquotienten von der Summe der Reihe $a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 +$ etc.

Es kann sich in speciellen Fällen treffen, dass beide Reihen noch für $x = +\lambda$ convergiren; die vorige Betrachtung bleibt dann wörtlich dieselbe, nur muss man h negativ und seinen absoluten Werth $< \lambda$ wählen, um das Convergenzintervall nicht zu überschreiten.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo die Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \cdots$$

positive und negative Glieder besitzt, wobei wir uns x immer als positiv vorstellen können, indem wir die verschiedenen Vorzeichen auf Rechnung der Coefficienten schreiben. Denken wir uns alle positiven Glieder zu einer Reihe zusammengefasst und ebenso alle negativen Glieder, so erscheint $f(x)$ als Differenz zweier Reihen, deren jede für sich nur positive Glieder besitzt. Diese Reihen convergiren zufolge der anfänglichen Voraussetzung, und daher sind ihre Summen bestimmte endliche Functionen von x, die wir mit $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezeichnen wollen, so dass

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Für die Reihe 4) gilt Dasselbe und es sei $\varphi_1(x)$ die Summe aller positiven, $\varphi_2(x)$ die Summe aller negativen Glieder, mithin

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Aus dem vorigen Satze folgt nun

$$\varphi_1(x) = f_1'(x) \ , \ \varphi_2(x) = f_2'(x),$$

mithin

$$\varphi(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = \frac{d[f_1(x) - f_2(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx};$$

also ist auch hier

$$\varphi(x) = f'(x).$$

Wir haben jetzt folgendes Theorem:

Wenn die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

für alle zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ enthaltenen x gilt, so ist unter derselben Bedingung

$$f'(x) = 1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots;$$

diese Gleichung besteht auch noch an den Grenzen der Convergenz (für $x = \pm\lambda$), wenn in diesen Fällen beide Reihen convergiren.

II. Die vorigen Betrachtungen sind leicht auf den allgemeinen Fall auszudehnen, wo die einzelnen Glieder der ursprünglichen Reihe irgend welche Functionen von x bilden.

Es sei nämlich die ursprüngliche Reihe

8) $$f(x) = \psi(x, 0) + \psi(x, 1) + \psi(x, 2) + \cdots\cdots$$

convergent innerhalb eines gewissen Intervalles und jedes ihrer Glieder eine stetige Function von x; ferner convergire auch die Reihe der Differentialquotienten

9) $$\varphi(x) = \psi'(x, 0) + \psi'(x, 1) + \psi'(x, 2) + \cdots$$

von denen jeder einzelne gleichfalls continuirlich bleiben möge,

wenigstens innerhalb des Convergenzintervalles. Wählt man jetzt h so klein, dass $x + h$ die Grenzen der Convergenz nicht überschreitet, so erhält man

10)
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \psi'(x + \vartheta_0 h,\ 0) + \psi'(x + \vartheta_1 h,\ 1) + \psi'(x + \vartheta_2 h,\ 2) + \cdots$$

und hier mag zunächst der Fall betrachtet werden, wo alle Glieder gleiche Vorzeichen besitzen.

Ist nun irgend eine einzelne Function $\Psi(z)$ und ein individueller Werth von z, etwa $z = x$, gegeben, so lässt sich h immer so klein wählen, dass die Function $\Psi(z)$ innerhalb des Intervalles $z = x$ bis $z = x + h$ entweder nur wächst oder nur abnimmt; man wird daher in den meisten Fällen*) h so klein nehmen können, dass jede der Functionen

$$\psi'(x,\ 0)\ ,\quad \psi'(x,\ 1)\ ,\quad \psi'(x,\ 2), \cdots$$

von x bis $x + h$ nur wächst oder nur abnimmt. Dies vorausgesetzt, ist unmittelbar einleuchtend, dass die Summe der in Nro. 10) vorkommenden Reihe zwischen

$$\psi'(x,\ 0) + \psi'(x,\ 1) + \psi'(x,\ 2) + \cdots = \varphi(x)$$

und

$$\psi'(x + h,\ 0) + \psi'(x + h,\ 1) + \psi'(x + h,\ 2) + \cdots = \varphi(x + h)$$

enthalten sein muss; es gilt folglich die Ungleichung

$$\varphi(x) \lessgtr \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lessgtr \varphi(x + h),$$

worin sich die oberen Zeichen auf wachsende, die unteren auf abnehmende ψ beziehen. Durch Uebergang zur Grenze für verschwindende h wird die vorige Ungleichung zur Gleichung

$$\varphi(x) = f'(x);$$

in diesem Falle ist also die Differentiation der Gleichung 8) erlaubt. Dasselbe gilt, wenn h so klein gewählt werden kann, dass von einer bestimmten unveränderlichen Stelle ab die Functionen

$$\psi'(x,\ m)\ ,\quad \psi'(x,\ m+1)\ ,\quad \psi'(x,\ m+2), \cdots$$

entweder nur wachsen oder abnehmen; denn man würde dann die Reihe 10) zerlegen in

$$\psi'(x + \vartheta_0 h, 0) + \psi'(x + \vartheta_1 h, 1) + \cdots + \psi'(x + \vartheta_{m-1} h, m - 1)$$
$$+ \psi'(x + \vartheta_m h, m) + \psi'(x + \vartheta_{m+1} h, m + 1) + \cdots$$

und jeden Theil besonders behandeln.

*) Ausnahmefälle sind in der That möglich, wie nachher gezeigt werden soll.

Durch ähnliche Betrachtungen wie im Abschnitte I. lässt sich der gefundene Satz auch auf den Fall ausdehnen, wo die Reihe 10) positive und negative Glieder besitzt; die Aufstellung eines allgemeinen Theorems mag aber unterbleiben, weil dieses an so viele Bedingungen geknüpft ist, dass es eine unförmliche und unbequeme Gestalt erhalten würde.

Noch wollen wir mit wenigen Worten des Ausnahmefalles gedenken. Ist z. B. $x \leqq 1$ und

$$\psi(x, n) = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{x}{2n+2}\right) x^{2n+1},$$
$$\psi'(x, n) = (1-x)\, x^{2n},$$

so kann man zwar für $x < 1$ dem h einen solchen Werth geben dass $\psi'(x, m)$, $\psi'(x, m+1)$ etc. zwischen x und $x + h$ nur wachsen oder nur abnehmen, für $x = 1$ und ein negatives $h = -\delta$ ist dies aber nicht mehr möglich. Die Function $\psi'(x, n)$ erreicht nämlich für $x = \frac{2n}{2n+1}$ ihr Maximum; man mag nun δ so klein wählen wie man will, so würde es doch immer Reihenglieder geben, für welche

$$1 - \delta < \frac{2n}{2n+1} < 1$$

ist oder deren Maxima zwischen $1 - \delta$ und 1 eintreten, die also innerhalb dieses Intervalles zu- und abnehmen. Die Reihe der Differentialquotienten ist daher bei diesem Beispiele zwar für $x < 1$, aber nicht für $x = 1$ giltig.

III. Das bequemste Verfahren, um über die Anwendbarkeit der gewöhnlichen Differentiationsregel zu entscheiden, besteht darin, dass man noch die zweiten Differentialquotienten der Reihenglieder berücksichtigt, indem man von dem Satze*)

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \psi'(x) + \tfrac{1}{2} h\, \psi''(x + \vartheta h)$$

Gebrauch macht. Lässt man nämlich in der Gleichung

11) $$f(x) = \psi(x, 0) + \psi(x, 1) + \psi(x, 2) + \cdots$$

x um h wachsen, ohne das Convergenzintervall zu überschreiten, so erhält man nach dem erwähnten Satze

---

*) Dieser ist ein specieller Fall der Formel 18) in §. 18 und folgt aus letzterer für $f = \psi$, $a = x$, $n = 2$.

12) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \psi'(x,0) + \psi'(x,1) + \psi'(x,2) + \psi'(x,3) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}h\,[\psi''(x+\vartheta_0 h, 0) + \psi''(x+\vartheta_1 h, 1) + \psi''(x+\vartheta_2 h, 2) + \cdots]$$

Hier ist einfach zu untersuchen, in wie weit die Reihe

$$\psi''(x+\vartheta_0 h, 0) + \psi''(x+\vartheta_1 h, 1) + \psi''(x+\vartheta_2 h, 2) + \cdots$$

convergirt; so lange sie diese Eigenschaft besitzt, so lange ist ihre Summe eine endliche Grösse, etwa $\Psi(x, h)$, und wenn sie dies auch für $h = 0$ bleibt, so wird

$$Lim\,[h\,\Psi(x,h)] = 0,$$

mithin nach Nro. 12)

13) $$f'(x) = \psi'(x,0) + \psi'(x,1) + \psi'(x,2) + \cdots$$

Als Beispiel diene folgender Fall. Es sei x ein ächter Bruch $\psi(x, 0) = 0$ und

$$\psi(x,n) = -\,l\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = u_n;$$

nach §. 37 (Formel 4) convergirt dann die Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. Setzen wir daher

14) $$f(x) = -\,l\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) - l\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) - l\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right) - \cdots$$

so folgt

15) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{2x}{1^2-x^2} + \frac{2x}{2^2-x^2} + \frac{2x}{3^2-x^2} + \cdots$$
$$+ h\left\{\frac{1^2+(x+\vartheta_1 h)^2}{[1^2-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + \frac{2^2+(x+\vartheta_2 h)^2}{[2^2-(x+\vartheta_2 h)^2]^2} + \cdots\right\}$$

wobei h so klein gewählt werden muss, dass auch $x + h$ ein ächter Bruch ist. Die Summe der letzten Reihe wird zu gross, wenn man statt $x + \vartheta_2 h$, $x + \vartheta_3 h$ etc. die grössere Einheit setzt, es ist daher

$$0 < \Psi(x,h) < \frac{1+(x+\vartheta_1 h)^2}{[1-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + \frac{2^2+1}{(2^2-1)^2} + \frac{3^2+1}{(3^2-1)^2} + \cdots;$$

hier convergirt die von x unabhängige Reihe und hat eine numerische Summe S, mithin ist

$$0 < h\,\Psi(x,h) < \frac{h\,[1+(x+\vartheta_1 h)^2]}{[1-(x+\vartheta_1 h)^2]^2} + h\,S$$

und

$$Lim\,[h\,\Psi(x,h)] = 0.$$

Die Gleichung 15) liefert nun

$$f'(x) = \frac{2x}{1^2 - x^2} + \frac{2x}{2^2 - x^2} + \frac{2x}{3^2 - x^2} + \cdots\cdots$$

und daraus erhellt, dass im vorliegenden Falle die Differentiation der Gleichung 14) erlaubt ist.

§. 43.

Die unendlichen Doppelreihen.

Unter einer Doppelreihe oder einer Reihe mit doppeltem Eingange versteht man ein Aggregat von folgender Form:

1)
$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots \\ & + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + u_3^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots \\ & + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + u_3^{\mathrm{II}} + \cdots\cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

das allgemeine Glied derselben wird durch $u_n^{(m)}$ dargestellt, wo m und n ganze positive Zahlen bedeuten. Man kann sich die obige unendliche Doppelreihe dadurch entstanden denken, dass man in der endlichen, aus mn Gliedern bestehenden Doppelreihe

2)
$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \\ & + u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \cdots + u_{n-1}^{\mathrm{I}} \\ & + u_0^{\mathrm{II}} + u_1^{\mathrm{II}} + u_2^{\mathrm{II}} + \cdots + u_{n-1}^{\mathrm{II}} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_0^{(m-1)} + u_1^{(m-1)} + u_2^{(m-1)} + \cdots + u_{n-1}^{(m-1)} \end{aligned}$$

die Zahlen m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen lässt; bezeichnet daher $S_n^{(m)}$ die Summe der endlichen Doppelreihe 2), so muss man unter der Summe der unendlichen Doppelreihe 1) den Grenzwerth verstehen, welchem sich $S_n^{(m)}$ bei gleichzeitig unendlich werdenden m und n nähert. Im Fall dieser Grenzwerth existirt und von endlicher Grösse ist, heisst die unendliche Doppelreihe convergent, ausserdem divergent.

I. Setzen wir zunächst voraus, dass die unendliche Doppelreihe nur positive Glieder besitze und S zur Summe habe, so ist

3)
$$
\begin{aligned}
S - S_n^{(m)} = {} & u_n + u_{n+1} + \cdots \\
& + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + \cdots \\
+ u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + \cdots + u_n^{(m)} & + u_{n+1}^{(m)} + \cdots \\
+ u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \cdots + u_n^{(m+1)} & + u_{n+1}^{(m+1)} + \cdots \\
+ \cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und da, der Voraussetzung zufolge, $S_n^{(m)}$ bei gleichzeitig in's Unendliche wachsenden m und n der Grenze S zustrebt, so kann die linke Seite der vorstehenden Gleichung, mithin auch die Summe aller rechts verzeichneten Grössen kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden, wenn man m und n gross genug wählt. Wegen des positiven Vorzeichens aller Glieder kommt dieselbe Eigenschaft auch folgenden Grössen zu:

$$
\begin{aligned}
\varrho_n = {} & u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \\
& + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + u_{n+2}^{\mathrm{I}} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + u_{n+2}^{(m-1)} + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varrho^{(m)} = {} & u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + \cdots + u_{n-1}^{(m)} \\
& + u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \cdots + u_{n-1}^{(m+1)} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{(m)} = {} & u_n^{(m)} + u_{n+1}^{(m)} + \cdots \\
& + u_n^{(m+1)} + u_{n+1}^{(m+1)} + \cdots \\
& + \cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

denn es besteht jede dieser Summen aus weniger Gliedern, als auf

der rechten Seite von Nro. 3) verzeichnet sind*). Die nunmehrige Gleichung

4) $$S - S_n^{(m)} = \varrho_n + \varrho^{(m)} + \sigma_n^{(m)}$$

gestattet eine doppelte Schreibweise; man kann erstens dafür setzen

5) $$S - \varrho^{(m)} - \sigma_n^{(m)} = S_n^{(m)} + \varrho_n,$$

und hier steht auf der rechten Seite die Summe der m ersten Horizontalreihen aus Nro. 1). Bezeichnen wir nämlich, wie folgt,

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots \text{ in inf.}$$

$$s^{\mathrm{I}} = u_0^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{I}} + u_2^{\mathrm{I}} + \cdots\cdots\cdots$$

u. s. w.

wo s, s^{I}, s^{II} etc. selbstverständlich endliche Grössen sind, so hat man statt der Gleichung 5)

$$S - \varrho^{(m)} - \sigma_n^{(m)} = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + \cdots + s^{(m-1)}.$$

Bei unendlich wachsenden m und n wird hieraus, weil dann $\varrho^{(m)}$ und $\sigma_n^{(m)}$ gegen die Null convergiren,

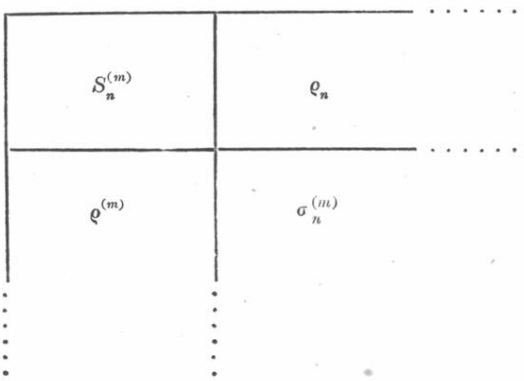
6) $$S = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots\cdots$$

Ferner kann man statt der Gleichung 4) schreiben

$$S - \varrho_n - \sigma_n^{(m)} = S_n^{(m)} + \varrho^{(m)}$$

---

*) Die Bedeutung von ϱ_n, $\varrho^{(m)}$ und $\sigma_n^{(m)}$ wird durch folgendes Schema vollkommen anschaulich:



und hier enthält die rechte Seite die n ersten Verticalcolonnen aus Nro. 1). Für

$$s_0 = u_0 + u_0^{\mathrm{I}} + u_0^{\mathrm{II}} + \cdots \text{ in inf.}$$
$$s_1 = u_1 + u_1^{\mathrm{I}} + u_1^{\mathrm{II}} + \cdots\cdots$$
u. s. w.

ist nämlich

$$S - \varrho_n - \sigma_n^{(m)} = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$$

und hieraus wird bei unendlich wachsenden m und n

7) $$S = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots .$$

Die Gleichungen 6) und 7) geben zusammengenommen folgenden Satz:

> Wenn eine nur positive Glieder enthaltende Doppelreihe convergirt, so kann man sie sich ebensowohl aus einzelnen Horizontalreihen als aus Verticalcolonnen zusammengesetzt denken; die so gebildeten Reihen convergiren und haben dieselbe Summe.

II. Bei der vorigen Betrachtung wurde angenommen, dass die Convergenz der Doppelreihe bekannt sei, und hieraus die Convergenz der einfachen Reihen hergeleitet, welche entstehen, wenn man die Summen der Horizontalreihen oder der Verticalreihen als Glieder neuer Reihen (6 und 7) betrachtet; es fragt sich nun, ob diese Schlüsse umgekehrt gelten.

Die Glieder der gegebenen Doppelreihe denken wir uns zunächst auf ihre absoluten Werthe reducirt und bezeichnen letztere wieder mit u_0, u_1 etc. u_0^{I}, u_1^{I} etc. Ferner setzen wir voraus, dass die Reihe der Horizontalsummen s, s^{I}, s^{II} etc. convergire und S zur Summe habe; es ist dann

$$S = s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots .$$

Zieht man hiervon die Summe der m ersten Glieder ab, die mit $S^{(m)}$ bezeichnet werden möge, so bleibt

$$S - S^{(m)} = s^{(m)} + s^{(m+1)} + s^{(m+2)} + \cdots .$$

Für hinreichend grosse m kann die linke Seite kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden (wegen $S = Lim\, S^{(m)}$); von der rechten Seite gilt dasselbe, und wenn daher ε irgend eine willkührliche Zahl bezeichnet, so kann m immer so gross gewählt werden, dass

8)
$$\begin{aligned} & s^{(m)} + s^{(m+1)} + s^{(m+2)} + \cdots \\ = & u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \cdots \\ & + u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + u_2^{(m+1)} + \cdots \\ & + u_0^{(m+2)} + u_1^{(m+2)} + u_2^{(m+2)} + \cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

weniger als $\frac{1}{2}\varepsilon$ beträgt. Andererseits sind s, s^{I}, s^{II} etc., der Voraussetzung nach, endliche Grössen, mithin convergiren die gleichgeltenden Horizontalreihen, z. B.

$$s^{(m)} = u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + \cdots$$

Zieht man hiervon die Summe der n ersten Glieder ab, so bleibt

$$u_n^{(m)} + u_{n+1}^{(m)} + u_{n+2}^{(m)} + \cdots$$

und durch ähnliche Schlüsse wie vorhin überzeugt man sich leicht, dass diese Summe kleiner als jede angebbare Zahl, also auch $< \frac{1}{2m}\varepsilon$ gemacht werden kann, wenn n wächst. Die Summe der m Reihen

$$\begin{aligned} & u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \\ & + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + u_{n+2}^{\mathrm{I}} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + u_{n+2}^{(m-1)} + \cdots \end{aligned}$$

lässt sich daher unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ herabbringen. Vereinigen wir diese m Reihen mit denen in Nro. 8), so gelangen wir zu dem Resultate, dass die Summe der Glieder

$$\begin{aligned} & u_n + u_{n+1} + \cdots \\ & + u_n^{\mathrm{I}} + u_{n+1}^{\mathrm{I}} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_n^{(m-1)} + u_{n+1}^{(m-1)} + \cdots \\ & + u_0^{(m)} + u_1^{(m)} + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_0^{(m+1)} + u_1^{(m+1)} + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

kleiner als ε gemacht werden kann, also jedenfalls eine endliche Grösse ist. Durch Hinzufügung der in $S_n^{(m)}$ enthaltenen Glieder entsteht jetzt eine Doppelreihe mit gleichfalls endlicher Summe. Unter Rücksicht auf Nro. I. giebt dies folgenden Satz:

Wenn die absoluten Werthe der Glieder einer unendlichen Doppelreihe, in Horizontalreihen gruppirt, lauter convergente Reihen geben und wenn die Reihe der Horizontalsummen wiederum convergirt, so ist auch die Doppelreihe convergent und es bleibt dann gleichgiltig, ob man die Glieder in horizontaler oder in verticaler Richtung vereinigt.

Dass dieser Satz zu gelten aufhört, wenn die absoluten Werthe der Reihenglieder nicht mehr convergente Reihen liefern, mag folgendes lehrreiche Beispiel zeigen. Die unendliche Doppelreihe sei

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) - \cdots\cdot\\
&+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 - \cdots\cdot\\
&+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 - \cdots\cdot\\
&+ \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot
\end{aligned}$$

worin je zwei in derselben Horizontalreihe stehende Glieder sich aufheben; die Reihe der Horizontalsummen ist hier

$$\begin{aligned}
&s + s^{\mathrm{I}} + s^{\mathrm{II}} + s^{\mathrm{III}} + \cdots\cdot\\
&= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 + \cdots\cdot\cdot\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = +\tfrac{1}{2}\cdot
\end{aligned}$$

Für die Reihe der Verticalsummen findet man

$$\begin{aligned}
&s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdot\\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{5} - \cdots\cdot;
\end{aligned}$$

hier ist bei Addition einer ungeraden $(2k-1)$ Anzahl von Gliedern

$$S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Lim\, S_{2k-1} = +\tfrac{1}{2},$$

dagegen bei Zusammenfassung von $2k-2$ Gliedern

$$S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - \frac{k}{k+1}, \quad Lim\, S_{2k-2} = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2},$$

woraus erhellt, dass die Reihe der Verticalsummen nicht convergirt, sondern zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ hin und her oscillirt.

Das für den ersten Augenblick befremdliche Resultat, dass die betrachtete Doppelreihe bei der einen Anordnung eine bestimmte Summe liefert und bei der anderen unbestimmt wird, erklärt sich sehr einfach, wenn man erst die Summe $S_n^{(m)}$ aufsucht. Man findet

$$S_n^{(m)} = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{m+1} - \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

und um hieraus die Summe der unendlichen Doppelreihe abzuleiten

muss man m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen lassen; dies giebt

$$S = \tfrac{1}{2} - 1 + Lim\, Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right].$$

Denkt man sich in dem letzten Ausdrucke erst m als constant und vergrössert n in's Unendliche, so hat man

$$Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1, \text{ mithin } Lim\, Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 1,$$

$$\text{und } S = +\tfrac{1}{2}.$$

Lässt man dagegen zuerst n constant und m in's Unendliche wachsen, so ergiebt sich

$$Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0, \text{ mithin } Lim\, Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = 0$$

$$\text{und } S = -\tfrac{1}{2}.$$

Man könnte aber auch m und n gleichzeitig, in irgend einem Verhältnisse zu einander, unendlich vermehren; setzt man z. B. $m + 1 = hn$, wo h eine constante positive ganze Zahl bedeutet, so wird

$$Lim\, Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}\right] = Lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{hn}\right] = e^{-h},$$

$$S = -\tfrac{1}{2} + e^{-h},$$

Man sieht aus diesen Erörterungen, dass $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ bei gleichzeitig unendlich wachsenden m und n sich keiner bestimmten Grenze nähert; dasselbe gilt von $S_n^{(m)}$ und daher ist die betrachtete Doppelreihe divergent, obschon sowohl die Horizontalreihen als auch die Reihe der Horizontalsummen convergiren. Dagegen würden die absoluten Werthe der Reihenglieder keine convergirenden Reihen liefern (es wäre schon $s = \infty$) und eben desshalb besteht das vorhin ausgesprochene Theorem nicht mehr.

III. Es seien P und Q die Summen der beiden convergirenden Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots,$$

von denen wir voraussetzen, dass sie ihre Convergenz beibehalten, wenn die Reihenglieder auf ihre absoluten Werthe reducirt werden; in der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} u_0 v_0 + u_1 v_0 + u_2 v_0 + u_3 v_0 + \cdots \\ \quad + u_0 v_1 + u_1 v_1 + u_2 v_1 + \cdots \\ \quad\quad + u_0 v_2 + u_1 v_2 + \cdots \\ \quad\quad\quad + u_0 v_3 + \cdots \\ \quad\quad\quad\quad + \cdots\cdots \end{array}$$

convergiren nun die Horizontalreihen und haben die Summen

$$Pv_0\ ,\quad Pv_1\ ,\quad Pv_2\quad Pv_3\ , \cdots,$$

auch convergirt die Reihe der Horizontalsummen

$$\begin{aligned} & Pv_0 + Pv_1 + Pv_2 + Pv_3 + \cdots \\ & = P(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = PQ. \end{aligned}$$

Zufolge des in II. ausgesprochenen Theoremes convergirt jetzt die vorige Doppelreihe und darf nach Verticalcolonnen geordnet werden, d. h. die neue Reihe

$$\begin{array}{l} u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) \\ \quad + (u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0) + \cdots \end{array}$$

ist convergent und hat PQ zur Summe. Die Betrachtung der Doppelreihen führt demnach auf den in §. 41, II. entwickelten Satz zurück.

Cap. VII.

Die Potenzenreihen.

§. 44.

Die Theoreme von Taylor und Mac Laurin.

Um vorerst zu einer Verallgemeinerung des in §. 18 unter Nro. 17) verzeichneten Theoremes zu gelangen, setzen wir ähnlich wie dort

$$1) \qquad \varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1.2} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(1n-)}(x)$$

und verstehen unter $\varphi(x)$ die unbekannte Summe der rechts stehenden Reihe; gleichzeitig nehmen wir an, dass die gegebene Function $f(x)$ nebst ihren n ersten Differentialquotienten endlich und stetig bleibe innerhalb eines gewissen Intervalles $x = a$ bis $x = b$. Durch Differentiation ergiebt sich

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x),$$

und da unter den gemachten Vorausetzungen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ endlich und stetig bleiben, so kann die Formel 6) in §. 8 oder die mit ihr identische

$$\varphi(a) = \varphi(b) - \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\psi'(a + \vartheta[b-a])} \varphi'(a + \vartheta[b-a]), \quad 0 < \vartheta < 1$$

angewendet werden, in welcher $\psi(x)$ eine willkürliche, von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleibende Function bedeutet, deren Differentialquotient $\psi'(x)$ gleichfalls endlich und stetig bleiben muss und überdies zwischen a und b keinen Vorzeichenwechsel erleiden darf. Nach Nro. 1) ist $\varphi(b)=f(b)$, ferner lässt sich aus der Formel für $\varphi'(x)$ der Werth von $\varphi'(a+\vartheta[b-a])$ ableiten, und so erhält man aus der letzten Gleichung den Werth von $\varphi(a)$. Setzt man auch in Nro. 1) $x=a$ und vergleicht die beiden Ausdrücke von $\varphi(a)$, so hat man das Resultat

$$f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1.2}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$=f(b)-\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta[b-a])}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta[b-a]).$$

Für $b-a=h$ oder $b=a+h$ folgt hieraus der sogenannte Taylor'sche Satz

$$2)\quad f(a+h)-R_n=f(a)+\frac{f'(a)}{1}h+\frac{f''(a)}{1.2}h^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}h^{n-1},$$

wobei zur Abkürzung

$$3)\qquad R_n=\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{\psi'(a+\vartheta h)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(a+\vartheta h)}{1.2\ldots(n-1)}h^{n-1}$$

gesetzt worden ist. Zur Gültigkeit dieses Satzes gehört, dass $f(z)$ $f'(z), f''(z), \ldots f^{(n)}(z)$, $\psi(z)$ und $\psi'(z)$ von $z=a$ bis $z=a+h$ stetig und endlich bleiben und dass $\psi'(z)$ innerhalb dieses Intervalles sein Vorzeichen nicht wechselt.

Für $a=0$ und $h=x$ ergiebt sich das Theorem von Mac Laurin, nämlich

$$4)\qquad f(x)-R_n=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

$$5)\qquad R_n=\frac{\psi(x)-\psi(0)}{\psi'(\vartheta x)}\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-1}f^{(n)}(\vartheta x)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

welches aber nur gilt, wenn $f(z), f'(z), f''(z) \ldots f^{(n)}(z)$, $\psi(z)$ und

$\psi'(z)$ von $z=0$ bis $z=x$ stetig und endlich bleiben und wenn $\psi'(z)$ innerhalb dieses Intervalles keinen Vorzeichenwechsel erleidet.

Da der genaue Werth des positiven echten Bruches ϑ unbekannt ist, so lässt sich auch der genaue Werth des sogenannten Restes R_n nicht genau angeben, sondern nur sein Maximum und Minimum. Sehr häufig aber ist bei unendlich wachsenden n

6) $$Lim\ R_n = 0$$

und dann hat man aus Nro. 5)

7) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{1.2}\,x^2 + \cdots$$

d. h. die Function $f(x)$ lässt sich unter allen genannten Bedingungen in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln. Dass letztere convergirt, versteht sich von selbst. Ob und unter welchen Umständen $Lim\ R_n = 0$ ist, bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung. Diese kann man sich einerseits durch passende Wahl der beliebigen Function $\psi(z)$ erleichtern, andererseits kann man hierzu folgenden Satz benutzen: wenn u_n einen von n abhängigen Ausdruck bedeutet, und wenn ferner bei unendlich wachsenden n

$$-1 < Lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < +1$$

ist, so ist $Lim\ u_n = 0$. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt augenblicklich aus der Bemerkung, dass unter der gemachten Voraussetzung die unendliche Reihe $u_1 + u_2 + u_3 +$ etc. convergiren, mithin auch $Lim\ u_n = 0$ sein muss.

Die Formel 7) zeigt, wie man eine Function $f(x)$ unter gewissen Bedingungen in eine nach Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe verwandeln kann, und es lässt sich erwarten, dass diese Umwandlung nur auf eine einzige Art möglich sein wird. Die letztere Bemerkung bedarf indessen einer genaueren Untersuchung; wir wollen daher eine Gleichung von der Form

8) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

als bestehend voraussetzen und umgekehrt fragen, welche Werthe dann die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. haben müssen.

Zum Bestehen der Gleichung 8) gehört vor Allem die Convergenz der vorkommenden Reihe; der absolute Werth von

$$Lim\ \frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n} = x\,Lim\ \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

darf mithin die Einheit nicht übersteigen, folglich muss $Lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eine endliche Grösse sein, welche α heissen möge; die Convergenz der Reihe findet dann sicher statt, wenn der absolute Werth von αx ein echter Bruch ist oder

$$-\frac{1}{\alpha} < x < +\frac{1}{\alpha}.$$

Bezeichnen wir den absoluten Werth einer Zahl z wieder mit $[z]$, so haben wir nach der gemachten Voraussetzung

$$Lim\left[\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right] = [\alpha x] < 1,$$

bei hinreichend grossen n muss folglich der genannte Quotient kleiner bleiben als ein zwischen $[\alpha x]$ und 1 eingeschalteter echter Bruch ε. Derartige Werthe von n mögen k, $k+1$, $k+2$ etc. sein; nach einer oft gebrauchten Schlussweise findet sich dann

$$[a_{k+1}\,x^{k+1}] < [a_k\,x^k]\,\varepsilon, \quad [a_{k+2}\,x^{k+2}] < [a_k\,x^k]\,\varepsilon^2, \ldots.$$

mithin

$$[a_k\,x^k] + [a_{k+1}\,x^{k+1}] + [a_{k+2}\,x^{k+2}] + \cdots < [a_k\,x^k]\,\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Zerlegen wir nun die Reihe 8) wie folgt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1}\,x^{k-1} + a_k\,x^k + a_{k+1}\,x^{k+1} + a_{k+2}\,x^{k+2} + \cdots,$$

so beträgt der absolute Werth des zweiten Theiles rechter Hand weniger als der vorhin gefundene Ausdruck, und daher lässt sich die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen

$$9) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1}\,x^{k-1} + \frac{\varrho\,a_k\,x^k}{1-\varepsilon},$$

worin ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet. Für $x = 0$ folgt hieraus

$$10) \qquad f(0) = a_0,$$

womit der Werth von a_0 bestimmt ist. Subtrahirt man die Gleichung 10) von der Gleichung 9) und dividirt mit x, so hat man weiter

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-2} + \frac{\varrho a_k x^{k-1}}{1-\varepsilon};$$

beim Uebergange zur Grenze für verschwindende x nimmt der Quotient linker Hand die Form $\frac{0}{0}$ an, man findet aber nach der Regel des §. 31

11) $$\frac{f'(0)}{1} = a_1.$$

Vermöge der Werthe von a_0 und a_1 hat man weiter aus Nro. 9)

$$\frac{f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1} x}{x^2}$$

$$= a_2 + a_3 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-3} + \frac{\varrho a_k x^{k-2}}{1-\varepsilon}$$

und als Grenzwerth für verschwindende x

12) $$\frac{f''(0)}{1.2} = a_2.$$

Auf gleiche Weise fortgehend, erhält man für irgend einen Coefficienten a_m, wenn $k > m$ genommen wird,

$$a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{1.2.3 \ldots m}.$$

Demnach lässt sich eine gegebene Function $f(x)$ nur auf eine Weise in eine unendliche unbedingt convergirende Potenzenreihe verwandeln.

Eine Folge dieses Satzes ist, dass eine Gleichung zwischen zwei convergirenden Potenzenreihen, also eine Gleichung von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$
$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

nur bestehen kann, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von x identisch sind, nämlich $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ u. s. w.

§. 45.

Der binomische Satz.

Da wir die Entwickelung von $(1+x)^\mu$ für den Fall eines ganzen positiven μ bereits in §. 7 erledigt haben, so setzen wir im Folgenden immer voraus, dass μ keine ganze positive Zahl sei. Behufs der Anwendung des Theoremes von Mac Laurin nehmen wir ferner

$$f(x) = (1+x)^\mu$$

und haben

$$f^{(k)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[k-1])\,(1+x)^{\mu-k}$$
$$= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[k-1])}{(1+x)^{k-\mu}},$$

wobei die zweite Form für $k > \mu$ dient, welcher Fall früher oder später eintritt. Sollen nun $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben, so darf der Nenner $(1+x)^{k-\mu}$ nicht verschwinden, mithin ist, wenn man von $x=0$ ausgeht, x auf das Intervall -1 bis $+\infty$ zu beschränken, so dass

$$-1 < x < +\infty$$

die erste Bedingung der Entwickelung ist. Nach Nro. 4) und 5) in §. 44 und für $\psi(z) = x^p - (x-z)^p$ wird, $p > 0$ vorausgesetzt,

1)
$$(1+x)^\mu - R_n$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-2])}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

2)
$$R_n = \frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots\,(\mu-[n-1])}{1.2\ldots.(n-1).p} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\,x^n}{(1+\vartheta x)^{n-\mu}}.$$

Um zu erfahren, unter welchen Umständen der Rest bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergirt, nehmen wir zuerst die beliebige positive Zahl $p=1$ und ertheilen dem R_n die Form

$$R_n = (-1)^{n-1}\mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\left(1-\frac{\mu}{1}\right)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}.$$

Da x zwischen -1 und $+\infty$ liegt, so ist $1+\vartheta x$ jedenfalls

positiv, mithin $\mu x(1+\vartheta x)^{\mu-1}$ eine endliche Grösse; daher fragt sich nur noch, ob alle übrigen Factoren zusammen ein Product geben, welches bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zustrebt. Nennen wir ξ den absoluten Werth von x, so ist für positive x, d. h. für $x = \xi$,

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{\xi-\vartheta\xi}{1+\vartheta\xi} < \xi,$$

und bei negativen x, d. h. für $x = -\xi$, wobei ξ ein echter Bruch sein muss,

$$\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x} = \frac{-\xi+\vartheta\xi}{1-\vartheta\xi} = -\frac{\xi-\vartheta\xi}{1-\vartheta\xi};$$

der absolute Werth des letzten Bruches beträgt weniger als ξ, mithin ist in jedem Falle

$$\left[\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right] < \xi,$$

wofern nur x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Aus den bisherigen Schlüssen geht hervor, dass $Lim\, R_n = 0$ wird, sobald der Ausdruck

$$u_n = \left(1-\frac{\mu}{1}\right)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu}{n-1}\right)\xi^{n-1}$$

bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat. Da nun

$$Lim\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\left[\left(1-\frac{\mu}{n}\right)\xi\right] = \xi$$

ist, so findet die letztere Bedingung in dem Falle $\xi < 1$ sicher statt, während dagegen für $\xi > 1$ sowohl $Lim\, u_n$ als $Lim\, R_n$ unendlich werden würden. Aus der Gleichung 1) folgt jetzt durch Uebergang zur Grenze für $n = \infty$

$$3)\quad (1+x)^{\mu} = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Die beiden extremen Fälle $x = +1$ und $x = -1$ bedürfen noch einer speciellen Untersuchung. Für $x = +1$ haben wir aus Nro. 2), indem wir die beliebige Zahl p durch n ersetzen,

$$4)\quad R_n = (1+\vartheta)^{-\mu}\,\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n}\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^n.$$

Der erste Factor ist immer von endlicher Grösse; der letzte Factor liegt zwischen 0 und 1, doch darf man hieraus nicht schliessen, dass

$$Lim\left[\left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)^n\right]=0$$

sein müsse, weil ϑ auf unbekannte Weise von n abhängt*); das Verschwinden von R_n findet daher nur in dem Falle sicher statt, wo der zweite Factor gegen die Null convergirt. Um hierüber urtheilen zu können, unterscheiden wir die Fälle eines positiven und eines negativen μ. Bei positiven μ giebt es immer zwei aufeinander folgende ganze positive Zahlen $k-1$ und k, zwischen denen μ enthalten ist; dem entsprechend kann folgende Zerlegung vorgenommen werden

$$\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n}=$$

$$(-1)^{n-k}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-[k-1])}{1\,.\,2\ldots k}\cdot\frac{(k-\mu)(k-\mu+1)\ldots(k-\mu+n-k-1)}{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n-k)}.$$

Der erste Bruch rechter Hand besitzt einen unveränderlichen Werth; der zweite Bruch ist von der Form

$$\frac{\beta(\beta+1)\,(\beta+2)\,\ldots\,(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\ldots\,(\alpha+m-1)},$$

$$\alpha=k+1,\quad \beta=k-\mu,\quad m=n-k$$

und hat nach §. 36 die Null zur Grenze, weil hier $\alpha>\beta$ ist. Für jedes endliche positive μ gilt daher die Gleichung

5) $$Lim\,\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n}=0.$$

Wenn zweitens μ negativ etwa $\mu=-\lambda$ ist, so wird

$$\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,n}$$

$$=(-1)^n\,\frac{\lambda(\lambda+1)\,(\lambda+2)\,\ldots\,(\lambda+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,.\,n},$$

und nach dem vorhin erwähnten Satze convergirt der Bruch rechter Hand gegen die Null, wenn $1>\lambda$, d. h. $-1<-\lambda$ oder $-1<\mu$ ist. Die Formel 5) gilt daher unter der Bedingung $-1<\mu<+\infty$, und dann hat man auch $Lim\,R_n=0$.

Im zweiten Hauptfalle $x=-1$ giebt die Formel 2)

6) $$R_n=(-1)^n\frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\,\ldots\,(\mu-[n-1])}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,(n-1)\,.\,p}(1-\vartheta)^{\mu-p}.$$

*) So würde z. B. für $\vartheta=\frac{1}{n}$ der obige Grenzwerth nicht $=0$ sondern $=\frac{1}{e}$ werden.

Wir betrachten hier zuerst den Fall, wo μ negativ $= -\lambda$ ist und nehmen dann $p = 1$; die rechte Seite der Gleichung

$$R_n = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)} \cdot \frac{\lambda}{(1-\vartheta)^{\lambda+1}}$$

besteht jetzt aus zwei Factoren, von denen der erste in's Unendliche wächst, während der zweite jedenfalls mehr als λ beträgt; demnach wird $Lim\, R_n = \infty$. Ist dagegen μ positiv, so kann man $p = \mu$ nehmen und erhält aus Nro. 6)

$$7) \qquad R_n = (-1)^n \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)},$$

mithin nach Nro. 1)

$$(-1)^{n-1} \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-[n-1])}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)}$$
$$= 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-[n-2])}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)}.$$

Dieses Resultat bestätigt sich auch durch die identische Gleichung (§. 36)

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots\ldots(\beta+m-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m-1)}$$
$$= 1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(\beta-\alpha)\beta(\beta+1)\ldots\ldots(\beta+m-2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots\ldots(\alpha+m-1)},$$

welche für $\alpha = 1$, $\beta = 1-\mu$, $m = n-1$ Dasselbe giebt. Durch die Schlüsse, womit die Gleichung 5) erreicht wurde, überzeugt man sich ohne Mühe, dass auch hier

$$Lim \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-[n-1])}{1\cdot 2\ldots\ldots(n-1)} = 0$$

mithin $Lim\, R_n = 0$ ist. Alles Bisherige führt zusammengenommen zu folgendem Theoreme:

Die binomische Entwickelung

$$(1+x)^\mu$$
$$= 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

gilt für jedes endliche μ, wenn der absolute Werth von x ein echter Bruch ist; im Falle $x = +1$, muss

dagegen μ zwischen -1 und $+\infty$ liegen, und im Falle $x = -1$ darf μ nur positiv sein.

Häufig vorkommende specielle Fälle dieses allgemeinen Binomialtheorems sind:

8) $$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1;$$

9) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1;$$

10) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

aus der letzten Gleichung erhält man noch durch Anwendung einer bekannten Formel

11) $$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^5}{10} + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Handelt es sich um die Entwickelung der μten Potenz einer zweitheiligen Grösse, so nenne man a denjenigen Theil, dessen absoluter Werth der grössere ist, und b den übrigen Theil; es ist dann

12) $$(a+b)^\mu = a^\mu\left(1 + \frac{b}{a}\right)^\mu$$
$$= a^\mu\left[1 + \frac{\mu}{1}\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots\right],$$
$$-1 < \frac{b}{a} < +1.$$

Diese Formel lässt sich u. A. zur Ausziehung der Wurzeln beliebig hoher Grade anwenden; so ist z. B.

$$\sqrt[3]{132} = \sqrt[3]{125+7} = \sqrt[3]{125\left(1 + \frac{7}{125}\right)}$$
$$= 5\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{125} - \frac{1.2}{3.6}\left(\frac{7}{125}\right)^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}\left(\frac{7}{125}\right)^3 - \cdots\right\},$$

$$\sqrt[4]{76} = \sqrt[4]{81-5} = \sqrt[4]{81\left(1-\frac{5}{81}\right)}$$

$$= 3\left\{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{81} - \frac{1.3}{4.8}\left(\frac{5}{81}\right)^2 - \frac{1.3.7}{4.8.12}\left(\frac{5}{81}\right)^3 - \cdots\right\}.$$

Das hierbei befolgte Princip wird man leicht erkennen.

§. 46.

Die logarithmischen Reihen und die Exponentialreihen.

I. Die Annahme

$$f(x) = l(1+x)$$

giebt zunächst

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\,1.2.3\ldots(k-1)}{(1+x)^k},$$

woraus ersichtlich ist, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben so lange x zwischen -1 und $+\infty$ liegt. Unter dieser Voraussetzung und für $\psi(z) = x^p - (x-z)^p$ führt das Theorem von Mac Laurin zu folgender Gleichung

1)
$$l(1+x) - R_n = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1},$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}\,x^n}{p(1+\vartheta x)^n}.$$

Für $p = 1$ erhält der Rest die einfachere Form

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{x}{1+\vartheta x}\left(\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}\right)^{n-1};$$

wegen $-1 < x < +\infty$ ist $1+\vartheta x$ positiv, mithin der erste Bruch jederzeit von endlicher Grösse; ferner gilt wie im vorigen Paragraphen die Bemerkung, dass der absolute Werth von $\frac{x-\vartheta x}{1+\vartheta x}$ weniger beträgt als der absolute Werth von x. Der Rest convergirt daher gegen die Null, wenn der absolute Werth von x ein echter Bruch ist; bei dieser Voraussetzung folgt aus Nro. 1)

2)
$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Die extremen Fälle $x = +1$ und $x = -1$ verlangen eine besondere Untersuchung. Für $x = +1$ ergiebt sich, wenn $p = n$ genommen wird,

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\vartheta)^n}$$

mithin bei unendlich wachsenden n

$$Lim\, R_n = 0.$$

Für $x = -1$ wird

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-\vartheta)^n};$$

hier wächst zwar der erste Factor des Nenners in's Unendliche, dagegen könnte ϑ die Einheit zur Grenze haben und folglich der Nenner die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$ erhalten; man darf daher nicht behaupten, dass $Lim\, R_n = 0$ sei. Nach diesen Bemerkungen haben wir

3) $$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$-1 < x \leqq +1.$$

Lässt man $-x$ an die Stelle von x treten, so folgt

4) $$l(1-x) = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots,$$
$$-1 \leqq x < +1;$$

die Differenz der Gleichungen 3) und 4) ist

5) $$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\right),$$
$$-1 < x < +1.$$

Für $x = \dfrac{z-1}{z+1}$, wo z jede positive Zahl sein darf, folgt weiter

6) $$lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right],$$

und damit ist, wenigstens theoretisch, die Aufgabe gelöst, zu jeder positiven Zahl den natürlichen Logarithmus zu finden. Bei kleinen Werthen von z, wie z. B. für $z = 2$ und $z = 3$, ist die Formel 6) zur numerischen Berechnung vollkommen brauchbar; bei grösseren z, z. B. schon für $z = 10$, convergirt dagegen die Reihe so langsam, dass sie praktisch nicht mehr benutzt werden kann.

Aus der Bemerkung, dass $l(a+b) = la + l\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$ ist, erhält man leicht unter Anwendung von Nro. 3)

7) $$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \cdots,$$
$$-1 < \frac{b}{a} \leqq +1;$$

diese Formel, welche auch mittelst des Taylor'schen Satzes entwickelt werden kann, dient zur Berechnung von $l(a+b)$, wenn la bekannt ist. Eine zu demselben Zwecke noch bequemere Formel ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$l(a+b) = la + l\left(\frac{1+\frac{b}{2a+b}}{1-\frac{b}{2a+b}}\right)$$

wenn der zweite Logarithmus rechter Hand nach Nro. 5) entwickelt wird, nämlich

$$8)\quad l(a+b) = la + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right].$$

Diese Formel gilt für alle positiven a und b, weil dann $\frac{b}{2a+b}$ immer ein echter Bruch ist. Hat man aus Nro. 6) den Betrag von $l2$ gefunden, so kann man jetzt $l3$, $l4$, $l5$ etc. berechnen, indem man $b = 1$ und $a = 2, 3, 4$ etc. setzt; selbstverständlich braucht man nur die Logarithmen der Primzahlen mittelst unendlicher Reihen zu berechnen.

Die künstlichen Logarithmen der Zahlen lassen sich aus deren natürlichen Logarithen auf folgende Weise herleiten. Es ist gleichzeitig

$$z = e^{lz} \text{ und } z = b^{{}^b\log z},$$

mithin, wenn man von beiden rechten Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt und vergleicht,

$$lz \,.\, le = {}^b\log z \,.\, lb \text{ oder } lz = {}^b\log z \,.\, lb,$$

und umgekehrt

$${}^b\log z = \frac{1}{lb}\, lz = M_b lz,$$

wo M_b den sogenannten Modulus des aus der Basis b construirten Logarithmensystems bezeichnet. Für das Brigg'sche System ist $b = 10$ und nach den vorigen Formeln

$$l10 = 2{,}30258509, \quad M_{10} = 0{,}43429448.$$

II. Nehmen wir $f(x) = e^x$, so ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und es bleiben daher $f(x), f'(x), f''(x)$ etc. durchaus endlich und stetig; der Mac Laurin'sche Satz giebt dann

$$e^x - R_n = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1},$$

und zwar ist, wenn $\psi(z) = x^n - (x-z)^n$ gesetzt wird,

$$R_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} e^{\vartheta x}.$$

Man übersieht augenblicklich, dass $Lim\, R_n = 0$ wird, sobald x eine endliche Grösse ist, und wenn der Ausdruck

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

gegen die Null convergirt; wegen

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \frac{x}{n+1} = 0$$

findet die letztere Eigenschaft bei jedem endlichen x statt, mithin ist $Lim\, R_n = 0$ und

9) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Für $x = 1$ erhält man ein Resultat, welches im Wesentlichen mit dem übereinstimmt, was in §. 7 gefunden wurde.

Lässt man $-x$ an die Stelle von x treten, so ergiebt sich aus Nro. 9) die Gleichung

10) $$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

welche mit der vorigen durch Addition oder Subtraction verbunden werden kann; man erhält

11) $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

12) $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \cdots$$

Die Formel 9) führt auch zur Entwickelung einer beliebigen Exponentialgrösse a^x, wenn nur deren Basis a positiv ist; man hat nämlich

13) $$a^x = (e^{la})^x = e^{xla}$$
$$= 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Setzt man in Nro. 9) $e^x = z$ und nimmt beiderseits die Logarithmen irgend eines Systemes, so folgt $x = \frac{log\, z}{log\, e}$, mithin

14) $$z = 1 + \frac{1}{1}\frac{log\, z}{log\, e} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{log\, z}{log\, e}\right)^2 + \cdots$$

Hierin liegt die Lösung der Aufgabe, aus dem Logarithmus einer

Zahl die letztere herzuleiten. Am einfachsten wird die Formel bei natürlichen Logarithmen.

§. 47.

Goniometrische und cyclometrische Reihen.

I. Da die Differentialquotienten des Cosinus abwechselnd Sinus und Cosinus, mithin jederzeit endlich und stetig sind, so lässt sich der Mac Laurin'sche Satz auf den Fall $f(x) = \cos x$ anwenden und giebt, wenn im Reste $\psi(z) = x^n - (x-z)^n$ genommen wird,

$$1) \qquad \cos x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}.$$

Aus Abschnitt II. des vorigen Paragraphen weiss man ferner, dass bei unendlich wachsenden n

$$Lim\ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ist; verbindet man hiermit die Bemerkung, dass $\cos\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x\right)$ nicht über das Intervall -1 bis $+1$ hinausgeht, so gelangt man zu der Formel

$$2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \cdots,$$

welche für jedes endliche x gilt.

II. Auf ganz ähnlichem Wege findet man

$$3) \qquad \sin x - \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + \vartheta x\right)$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}$$

und bei unendlich werdenden n

$$4) \qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \cdots.$$

Da sich aus $\sin x$ und $\cos x$ die übrigen goniometrischen Functionen des Bogens x herleiten lassen, so ist hiermit das Problem der Berechnung aller goniometrischen Functionen gelöst. Uebrigens werden wir später noch besondere Reihen für $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ und $\csc x$ entwickeln.

III. Um das Theorem von Mac Laurin auf den Fall $f(x) = arcsin\, x$ anzuwenden, lassen wir zunächst $n + 1$ an die Stelle von n treten und schreiben demgemäss

$$f(x) - R_{n+1}$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2 \ldots n} x^n.$$

Aus der in §. 14, Nro. 7) entwickelten Formel

$$f^{(k+1)}(x) = D^{k+1} arcsin\, x =$$
$$\frac{1.3.5 \ldots (2k-1)}{2^k (1-x)^k \sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 - \frac{1\,(k)_1}{2k-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1.3\,(k)_2}{(2k-1)(2k-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots \right\}$$

geht nun zunächst hervor, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben so lange x^2 die Einheit nicht erreicht; wir müssen daher $-1 < x < +1$ voraussetzen. Die genannte Formel liefert auch die Werthe von $f'(0)$, $f''(0)$ etc., doch kann man dieselben kürzer aus der Relation

$$f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\, x\, f^{(k+1)}(x) + k^2 f^{(k)}(x)}{1 - x^2}$$

herleiten (§. 14, Nro. 6); es folgt nämlich

$$f^{(k+2)}(0) = k^2 f^{(k)}(0)$$

mithin, weil $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist,

$$f''(0) = 0\,, \quad f^{IV}(0) = 0 \quad, \quad f^{VI}(0) = 0 \quad, \ldots.$$
$$f'''(0) = 1^2, \quad f^{V}(0) = 1^2.3^2, \quad f^{VII}(0) = 1^2.3^2.5^2, \ldots.$$

Denken wir uns n als ungerade Zahl, so haben wir bis jetzt folgendes Resultat

5) $$arcsin\, x - R_{n+1}$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3 \ldots (n-2)}{2.4 \ldots (n-1)} \frac{x^n}{n},$$

welches noch durch eine Discussion des Restes zu vervollständigen ist. Wollte man letztere auf die bisherige Weise ausführen, so würde man eine etwas complicirte Untersuchung anstellen müssen; wir benutzen daher ein anderes Verfahren. Dieses beruht auf der Bemerkung, dass der Differentialquotient von $arcsin\, x$ eine algebraische Function, nämlich gleich der Potenz $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist und dass folglich der Differentialquotient der Gleichung 5) mit einer nach dem binomischen Satze vorgenommenen Entwickelung übereinstimmen muss. Um diesen Gedanken auszuführen, bezeichnen wir den Rest R_{n+1}, der jedenfalls von x abhängt, mit $\varphi(x)$, und setzen $n = 2m - 1$; es ist dann

6) $$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + \varphi(x)$$

und durch Differentiation

7) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2} + \varphi'(x).$$

Andererseits ist, wenn man in Formel 9) des §. 45 $-x^2$ für x setzt,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)}x^{2m-2}$$
$$+ \frac{1.3..(2m-1)}{2.4....(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\}$$

und nun giebt die Vergleichung beider Resultate

$$\varphi'(x) =$$
$$\frac{1.3..(2m-1)}{2.4....(2m)}x^{2m}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}x^2 + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}x^4 + \cdots\right\}.$$

Aus den Gleichungen 6) und 7) geht ferner hervor, dass $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben; zur Ermittelung von $\varphi(x)$ lässt sich daher das Theorem

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(\vartheta x)$$

benutzen, und zwar giebt dies, weil $\varphi(0) = 0$ ist.

$$\varphi(x) = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4.....(2m)}\vartheta^{2m}x^{2m+1}\left\{1 + \frac{2m+1}{2m+2}\vartheta^2x^2\right.$$
$$\left. + \frac{(2m+1)(2m+3)}{(2m+2)(2m+4)}\vartheta^4x^4 + \cdots\right\}.$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe liegt zwischen Null und

$$1 + \vartheta^2x^2 + \vartheta^4x^4 + \cdots = \frac{1}{1-\vartheta^2x^2},$$

sie kann daher mit

$$\frac{\varepsilon}{1-\vartheta^2 x^2}$$

bezeichnet werden, wo ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch vorstellt. Zufolge des hiermit gefundenen Werthes von $\varphi(x)$ ist nun nach Nro. 7)

8) $$arcsin\, x - \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots..(2m)} \frac{\varepsilon \vartheta^{2m} x^{2m+1}}{1-\vartheta^2 x^2}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2m-3)}{2.4\ldots(2m-2)}\frac{x^{2m-1}}{2m-1}.$$

Die hier vorkommende Reihe zählt m Glieder und wird unendlich für $m = \infty$; wegen $x^2 < 1$ ist in diesem Falle $Lim\, x^{2m} = 0$, während $1 - \vartheta^2 x^2$ immer von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt sehr leicht, dass sich der Rest der Grenze Null nähert und dass mithin die Gleichung besteht:

9) $$arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

$$-1 < x < +1.$$

Für $x = \pm 1$ verliert diese Schlussweise ihre Gültigkeit; der Rest erhält nämlich die Form

$$\pm \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots..(2m)} \cdot \frac{\varepsilon \vartheta^{2m}}{1-\vartheta^2}$$

und besteht aus zwei Factoren, deren erster zwar gegen die Null convergirt, von denen aber der zweite unendlich wird, falls ϑ die Einheit zur Grenze hat, was man nicht wissen kann. Wir stellen daher noch folgende Betrachtung an.

Bezeichnet u einen Bogen des ersten Quadranten, so gilt die Gleichung

$$sin\, \tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-cos\, u}{2}} \text{ oder } \tfrac{1}{2}u = arcsin \sqrt{\frac{1-cos\, u}{2}},$$

worin das Wurzelzeichen im absoluten Sinne zu nehmen ist; für $sin\, u = x$ wird $cos\, u = \sqrt{1-x^2}$, $u = arcsin\, x$, mithin

10) $$\tfrac{1}{2}\, arcsin\, x = arcsin \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = arcsin\, y,$$

wobei y eine von selbst verständliche Abkürzung vorstellt. Wäre nun die Gleichung 9) auch nur für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ bewiesen, so könnte man doch die rechte Seite von Nro. 10)

entwickeln, da hier y das Intervall 0 bis $\sqrt{\frac{1}{2}}$ durchläuft, wenn x von 0 bis 1 geht; demgemäss ist

$$\tfrac{1}{2}\,arcsin\,x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} + \tfrac{1}{6}\left[\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}\right]^3 + \cdots.$$

Das erste Glied lässt sich für alle, die Einheit nicht übersteigenden Werthe von x^2 in eine Potenzenreihe verwandeln, wie Formel 11) in §. 45 zeigt; dasselbe gilt von den übrigen Gliedern, wenn man beide Seiten der erwähnten Formel der Reihe nach auf die 3te, 5te etc. Potenz erhebt; man hat daher

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,arcsin\,x = {} & \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{7}{256}x^5 + \cdots \\ & + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{64}x^5 + \cdots) \\ & + \tfrac{3}{40}(\tfrac{1}{32}x^5 + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\end{aligned}$$

Diese Doppelreihe erfüllt alle Bedingungen, welche nach §. 41 nöthig sind, um die Reihenglieder in Verticalcolonnen summiren zu dürfen; vereinigt man daher die unter einander stehenden Glieder und multiplicirt nachher mit 2, so gelangt man zu der Gleichung

11) $$arcsin\,x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \cdots,$$

und zwar gilt dieselbe von $x = 0$ bis $x = 1$ oder auch von $x = -1$ bis $x = +1$, da beide Seiten immer gleiche Vorzeichen besitzen. Zufolge des in §. 44 bewiesenen Satzes muss die jetzige Entwickelung 11) mit der früheren 9) identisch sein; formell gelangt man also zu keinem neuen Resultate, wohl aber erfährt man, dass die Gleichung 9) auf das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$ ausgedehnt werden darf, wenn sie früher auch nur von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gegolten hätte.

Giebt man dem x einen solchen Zahlwerth, dass $arcsin\,x$ einen bekannten aliquoten Theil der Kreisperipherie ausmacht, so erhält man in jedem Falle eine Reihe zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl; so ist z. B. für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5\,.\,2^5} + \cdots.$$

Die Specialisirungen $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x = 1$ liefern ähnliche Reihen, jedoch convergiren letztere zu langsam für die numerische Berechnung.

Aus Formel 9) lässt sich endlich noch eine Reihe für $arccos\, x$ ableiten, wenn man von der Beziehung

$$arccos\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arcsin\, x$$

Gebrauch macht.

IV. Die in §. 14, IV. entwickelten Formeln zeigen, dass die Differentialquotienten von

$$f(x) = arctan\, x$$

für jedes endliche x continuirlich und endlich bleiben; ferner ist

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\, 1.2.3 \ldots (2k),$$

mithin nach Mac Laurin für $\psi(z) = x^n - (x-z)^n$

$$arctan\, x - \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n\sqrt{(1+\vartheta^2 x^2)^n}}\, sin\left(n\, arctan\, \frac{1}{\vartheta x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{sin\, \frac{1}{2}(n-1)\pi}{n-1} x^{n-1}.$$

Der absolute Werth von $\dfrac{x}{\sqrt{1+\vartheta^2 x^2}}$ beträgt weniger als der absolute Werth von x; der Ausdruck

$$\frac{x^n}{n\sqrt{(1+\vartheta^2 x^2)^n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\vartheta^2 x^2}}\right)^n$$

convergirt also bei unendlich wachsenden n gegen die Null, wenn $Lim\left(\dfrac{1}{n}x^n\right) = 0$ ist, und Letzteres findet so lange statt als der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigt. Da ferner $sin\left(n\, arctan\, \dfrac{1}{\vartheta x}\right)$ das Intervall -1 bis $+1$ keinenfalls überschreitet, so hat der Rest unter den vorigen Bedingungen die Null zur Grenze, und mithin ist

12) $$arctan\, x = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots\cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Im Fall der absolute Werth von x mehr als die Einheit beträgt, kann man die Gleichung

13) $$arctan\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arccot\, x = \tfrac{1}{2}\pi - arctan\, \frac{1}{x}$$

benutzen und $arctan\, \dfrac{1}{x}$ nach der obigen Formel entwickeln; dies giebt, x als positiv vorausgesetzt,

$$arctan\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots$$
$$x > 1.$$

Bei negativen x sind beiderseits die Vorzeichen umzukehren. Durch die Formel 13) erledigt sich auch die Entwickelung von $arccot\, x$.

In dem speciellen Falle $x = 1$ geht die Gleichung 12) über in

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots\cdots;$$

dieses Resultat ist indessen nur formell merkwürdig und eignet sich wegen der ausserordentlich langsamen Convergenz der Reihe nicht zur numerischen Berechnung von π. Bequemere Formeln erhält man dadurch, dass man $\frac{1}{4}\pi$ in zwei oder mehrere kleinere Bögen zerlegt und diese einzeln berechnet. So findet man z. B. nach Formel 10) in Abschnitt II. der Einleitung

$$\tfrac{1}{4}\pi = arctan\, \tfrac{1}{2} + arctan\, \tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{1}{4}\pi = arctan\, \tfrac{1}{2} + arctan\, \tfrac{1}{5} + arctan\, \tfrac{1}{8},$$

und hier kann man die einzelnen Bögen leicht nach Formel 12) in rasch convergirende Reihen verwandeln.

§. 48.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten.

Bei Functionen, die irgendwie aus sogenannten einfachen Functionen zusammengesetzt sind, gelingt es nicht selten, direct das Intervall zu bestimmen, innerhalb dessen eine Reihenentwickelung für die zusammengesetzte Function existiren muss; in solchen Fällen wird die Restuntersuchung unnöthig und sind nur noch die Coefficienten der Reihe zu ermitteln. Hierzu benutzt man oft mit Vortheil ein vom Mac-Laurin'schen Satze unabhängiges Verfahren, das im Wesentlichen darauf hinauskommt, die Coefficienten vorläufig unbestimmt zu lassen und sie durch irgend eine Eigenschaft der gegebenen Functionen erst später zu bestimmen, wie dies schon in §. 7 geschehen ist; gewöhnlich leisten hierbei Differentiationen gute Dienste. Das Detail des Verfahrens wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

I. Multiplicirt man die Gleichung 11) des vorigen Paragraphen mit sich selbst, was nach §. 41 ohne Weiteres erlaubt ist, so gelangt man zu dem Resultate

$$(arcsin\, x)^2 = x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \cdots\cdots,$$

welches für alle, das Intervall -1 bis $+1$ nicht überschreitende x gilt. Das Bildungsgesetz der Coefficienten tritt aber bei jener Multiplication nicht klar zu Tage und würde auch nach dem Mac-Lau-

rin'schen Satze schwer zu finden sein, weil hier $f^{(n)}(x)$ ein äusserst complicirter Ausdruck ist; wir setzen daher vorläufig

$$1) \qquad (arcsin\, x)^2 = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots\cdots, \qquad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man die Reihe für $arcsin\, x$ mit der Reihe für $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ multiplicirt, wobei nicht zu übersehen ist, dass die letztere nur unter der Bedingung $-1 < x < +1$ convergirt; man erhält dann eine Gleichung von der Form

$$2) \qquad \frac{arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots\cdots, \qquad -1 < x < +1,$$

und auch hier ist das Bildungsgesetz der Coefficienten nicht näher bekannt.

Um nun alle a und b zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung 1) und erhalten

$$3) \qquad \frac{2\, arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = 2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdots\cdots;$$

diese Differentiation ist erlaubt, weil sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe, welche letztere mit Nro. 2) übereinstimmen muss, innerhalb des Intervalles -1 bis $+1$ convergirt. Multiplicirt man die Gleichung 3) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenzirt noch einmal, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = (1.2a_2 + 3.4a_4 x^2 + 5.6a_6 x^4 + \cdots)\sqrt{1-x^2} - (2a_2 x + 4a_4 x^3 + 6a_6 x^5 + \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

nach Multiplication mit $\sqrt{1-x^2}$ verschwinden die Radicale und es lassen sich dann alle negativen Grössen auf die linke Seite schaffen, wodurch bei gehöriger Zusammenziehung folgende Gleichung entsteht:

$$1.2a_2 + 3.4a_4 x^2 + 5.6a_6 x^4 + \cdots\cdots = 2 + 2^2 a_2 x^2 + 4^2 a_4 x^4 + \cdots\cdots$$

Die Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x giebt nun

$$a_2 = 1, \quad a_4 = a_2 \frac{2^2}{3.4} = \frac{2^2}{3.4}, \quad a_6 = a_4 \frac{4^2}{5.6} = \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}, \text{ u. s. w.}$$

überhaupt für jedes ganze positive k

$$a_{2k} = \frac{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots (2k-2)^2}{3 . 4 . 5 . 6 \ldots (2k)} = \frac{2 . 4 . 6 \ldots (2k-2)}{3 . 5 . 7 \ldots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k},$$

und demgemäss haben wir nach Nro. 1)

$$4) \qquad (arcsin\, x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\frac{x^6}{3} + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Man übersieht augenblicklich, dass sich auf ähnlichem Wege auch die höheren Potenzen von $arcsin\, x$ entwickeln lassen; die Coefficienten werden aber weniger einfach.

Substituirt man die Werthe von a_2, a_4, a_6 etc. auch in die Gleichung 3), so erhält man noch

$$5) \qquad \frac{arcsin\, x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2 . 4}{3 . 5}x^5 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Dieses Resultat gewinnt eine bemerkenswerthe Form, wenn man

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{mithin} \quad arcsin\, x = arctan\, z$$

setzt; es wird nämlich

$$6) \qquad arctan\, z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Mit Hülfe der schon in §. 47 benutzten Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\pi = arctan\, \tfrac{1}{2} + arctan\, \tfrac{1}{3}$$

findet man z. B. aus Nro. 6)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2 . 4}{3 . 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2 . 4 . 6}{3 . 5 . 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right],$$

wonach die Berechnung von π sehr leicht ist.

II. Zufolge der in §. 47 für den Cosinus eines beliebigen Bogens gefundenen Reihe hat man

$$cos\,(\mu\, arcsin\, x) = 1 - \frac{\mu^2 (arcsin\, x)^2}{1 . 2} + \frac{\mu^4 (arcsin\, x)^4}{1 . 2 . 3 . 4} - \cdots$$

oder auch, wenn man die Potenzen von $arcsin\, x$ entwickelt,

$$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{2}(x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \cdots)$$
$$+ \frac{\mu^4}{24}(x^4 + \tfrac{2}{3}x^6 + \cdots)$$
$$- \frac{\mu^6}{720}(x^6 + \cdots)$$
$$+ \cdots\cdots$$

Alle hier vorkommenden Horizontalreihen convergiren von $x = -1$ bis $x = +1$, ferner convergirt die Reihe der Horizontalsummen (die vorige Reihe) und sie behält ihre Convergenz auch in dem Falle, wo man den Gliedern gleiche Vorzeichen giebt; es sind also die Bedingungen erfüllt, unter denen die Doppelreihe nach Verticalcolonnen geordnet werden darf und folglich ist

$$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{2}x^2 + \frac{\mu^4 - 4\mu^2}{24}x^4$$
$$- \frac{\mu^6 - 20\mu^4 + 64\mu^2}{720}x^6 + \cdots$$

oder mit anderen Worten, es existirt eine Reihenentwickelung von der Form

7) $$\cos(\mu \arcsin x) = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - A_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Durch Multiplication mit der Entwickelung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ erhält man noch

8) $$\frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - B_2 x^2 + B_2 x^4 - B_6 x^6 + \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen knüpfen sich an die Function $\sin(\mu \arcsin x)$; diese kann zunächst in die einfache Reihe

$$\frac{\mu \arcsin x}{1} - \frac{\mu^3(\arcsin x)^3}{1.2.3} + \frac{\mu^5(\arcsin x)^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

verwandelt werden, welche nach Entwickelung der Potenzen von $\arcsin x$ in eine Doppelreihe übergeht. Letztere genügt den Bedingungen, unter denen die Anordnung nach Verticalcolonnen erlaubt ist, und so ergiebt sich ein Resultat von der Form

9) $$\sin(\mu \arcsin x) = \mu x - A_3 x^3 + A_5 x^5 - \cdots\cdots$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

durch Multiplication mit der Entwickelung von $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ folgt noch

$$10) \qquad \frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu x - B_3 x^3 + B_5 x^5 - \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Um nun die Coefficienten zu bestimmen, differenziren wir die Gleichung 7) und erhalten

$$11) \qquad \frac{\mu \sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2A_2 x - 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 - \cdots;$$

die Befugniss zu dieser Differentiation liegt darin, dass sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe 11), welche letztere mit Nro. 10) übereinstimmen muss, zwischen -1 und $+1$ convergirt. Wir multipliciren ferner die Gleichung 11) mit $\sqrt{1-x^2}$ und differenziren noch einmal; das Ergebniss ist

$$\frac{\mu^2 \cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= (1.2A_2 - 3.4A_4 x^2 + 5.6A_6 x^4 - \cdots)\sqrt{1-x^2}$$
$$- (2A_2 x - 4A_4 x^3 + 6A_6 x^5 - \cdots)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder nach beiderseitiger Multiplication mit $\sqrt{1-x^2}$ und gehöriger Zusammenziehung

$$12) \qquad \mu^2 \cos(\mu \arcsin x)$$
$$= 1.2A_2 - 3.4A_4 x^2 + 5.6A_6 x^4 - 7.8A_8 x^6 + \cdots$$
$$- 2^2 A_2 x^2 + 4^2 A_4 x^4 - 6^2 A_6 x^6 + \cdots$$

Diese Entwickelung kann nicht verschieden von Nro. 7) sein; substituirt man in Nro. 12) für $\cos(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe und schafft die zweite Reihe rechter Hand auf die linke Seite, so hat man

$$\mu^2 - (\mu^2 - 2^2)A_2 x^2 + (\mu^2 - 4^2)A_4 x^4 - (\mu^2 - 6^2)A_6 x^6 + \cdots$$
$$= 1.2A_2 - 3.4A_4 x^2 + 5.6A_6 x^4 - 7.8A_8 x^6 + \cdots$$

mithin durch Vergleichung der Coefficienten

$$A_2 = \frac{\mu^2}{1.2}, \quad A_4 = A_2 \frac{\mu^2 - 2^2}{3.4} = \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4},$$
$$A_6 = A_4 \frac{\mu^2 - 4^2}{5.6} = \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc.}$$

Zufolge dieser Werthe ist nach Nro. 7)

$$13) \qquad \cos(\mu \arcsin x)$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4}x^4 - \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{1.2 \ldots 6}x^6 + \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

und nach Nro. 11)

14)
$$\frac{\sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2\ldots5}x^5 - \cdots,$$
$$-1 < x < +1.$$

Die Coefficienten der beiden übrigen Reihen 8) und 9) bestimmen sich durch eine sehr ähnliche Rechnung. Man differenzirt zunächst die Gleichung 9) und erhält

15)
$$\frac{\mu \cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mu - 3A_3x^2 + 5A_5x^4 - \cdots,$$

was mit Nro. 8) übereinstimmen muss; man multiplicirt ferner mit $\sqrt{1-x^2}$, differenzirt und multiplicirt wieder mit $\sqrt{1-x^2}$; dies giebt

$$\mu^2 \sin(\mu \arcsin x)$$
$$= 2.3A_3x - 4.5A_5x^3 + 6.7A_7x^5 - \cdots$$
$$+ \mu x - 3^2A_3x^3 + 5^2A_5x^5 - \cdots$$

Substituirt man für $\sin(\mu \arcsin x)$ die ursprüngliche Reihe 9) und vergleicht dann die beiderseitigen Coefficienten, so gelangt man zur Kenntniss von A_3, A_5 etc. und überhaupt zu folgendem Resultate

16)
$$\sin(\mu \arcsin x)$$
$$= \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}x^5 - \cdots,$$
$$-1 \leqq x \leqq +1;$$

endlich giebt die Gleichung 15)

17)
$$\frac{\cos(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}x^2 + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}x^4 - \cdots$$
$$-1 < x < +1.$$

Nicht selten ertheilt man den Gleichungen 13) und 14), 16) und 17) eine goniometrische Form, indem man $\arcsin x = u$, mithin $x = \sin u$ setzt; dem Intervalle $x = -1$ bis $x = +1$ entspricht dann das Intervall $u = -\frac{1}{2}\pi$ bis $u = +\frac{1}{2}\pi$, und unter der gemeinschaftlichen Bedingung

$$-\tfrac{1}{2}\pi < u < +\tfrac{1}{2}\pi$$

gelten bei jedem μ folgende vier Gleichungen:

$$18)\quad \cos\mu u = 1 - \frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)\,(\mu^2-4^2)}{1.2....6}\sin^6 u + \cdots,$$

$$19)\quad \frac{\sin\mu u}{\cos u} = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-2^2)\,(\mu^2-4^2)}{1.2...5}\sin^5 u - \cdots,$$

$$20)\quad \sin\mu u = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)\,(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \cdots,$$

$$21)\quad \frac{\cos\mu u}{\cos u} = 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{(\mu^2-1^2)\,(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \cdots$$

Dabei ist nur zu merken, dass die Formeln 18) und 20) auch für $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ richtig bleiben, während dann die beiden übrigen ihre Gültigkeit verlieren.

Nimmt man für μ eine gerade Zahl, so brechen die in 18) und 19) vorkommenden Reihen ab, d. h. sie werden zu endlichen Reihen, deren erste aus $\frac{1}{2}\mu + 1$, und deren zweite aus $\frac{1}{2}\mu$ Gliedern besteht. Man kann sich in diesem Falle leicht überzeugen, dass jene Gleichungen für alle u bestehen. Ist nämlich k irgend eine ganze Zahl, v ein Bogen des ersten Quadranten, und bezeichnet $\varphi(u)$ die Summe der Reihe, so hat man, weil $\sin(k\pi - v) = \pm\sin v$,

$$\varphi(k\pi - v) = \varphi(v) = \cos\mu v = \cos\mu(k\pi - v)$$

oder $\varphi(w) = \cos\mu w$, wo $w = k\pi - v$ jeden beliebigen Bogen vorstellen kann. Eine ähnliche Schlussweise gilt für die Formel 19). Nicht minder leicht ist einzusehen, dass bei ungeraden μ die Gleichungen 20) und 21) allgemein richtig bleiben. Damit kommt man auf dieselben Resultate, welche bereits am Ende von §. 7 angedeutet wurden.

§. 49.

Die unendlichen Producte für Sinus und Cosinus.

Wenn die ganze rationale algebraische Function $n$ten Grades

$$1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

für n specielle Werthe von x, nämlich für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ ver-

schwindet, so lässt sich dieselbe auch in die Form des Productes

2) $$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

bringen, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist.

Dieser allgemeine Satz kann auf die Formeln des vorigen Paragraphen angewendet werden und führt dann zu vier neuen Formeln, von denen wir wenigstens eine entwickeln wollen. Unter der Voraussetzung eines ungeraden μ und für $\sin u = x$ ist nach Nro. 20)

3) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = 1 - A_3 x^2 + A_5 x^4 - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu x^{\mu-1},$$

und da rechter Hand eine ganze Function $(\mu - 1)$ten Grades vorkommt, so hat man auch

4) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{\mu-1}),$$

wobei $x_1, x_2, \ldots x_{\mu-1}$ diejenigen $\mu - 1$ speciellen Werthe von x bezeichnen, für welche die rechte Seite der Gleichung 3) verschwindet. Setzt man $u = 0$, so wird auch $x = 0$ und die Gleichung 4) geht über in

$$1 = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} A_\mu (-x_1)(-x_2) \ldots (-x_{\mu-1});$$

damit dividiren wir in Nro. 4) und erhalten

$$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_{\mu-1}}\right).$$

Sowie nun x den Sinus von u bedeutete, so lassen sich auch $x_1, x_2, \ldots x_{\mu-1}$ als die Sinus gewisser Bögen $u_1, u_2, \ldots u_{\mu-1}$ ansehen, und daher ist

5) $$\frac{\sin \mu u}{\mu \sin u} = \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_1}\right)\left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin u}{\sin u_{\mu-1}}\right).$$

Hier sind $u_1, u_2, \ldots u_{\mu-1}$ diejenigen Specialwerthe von u, für welche die rechte Seite der Gleichung 3) und folglich auch deren linke Seite verschwindet; die letztere Bemerkung führt augenblicklich zur Kenntniss jener Bögen, denn die linke Seite verschwindet, wenn $\sin \mu u = 0$ wird, d. h. wenn u einen der folgenden $\mu - 1$ Werthe erhält:

$$+\frac{\pi}{\mu},\ +\frac{2\pi}{\mu},\ +\frac{3\pi}{\mu},\ \cdots +\frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu},$$
$$-\frac{\pi}{\mu},\ -\frac{2\pi}{\mu},\ -\frac{3\pi}{\mu},\ \cdots -\frac{\frac{1}{2}(\mu-1)\pi}{\mu}.$$

Nach Substitution derselben kann man in Nro. 5) je zwei Factoren zusammenziehen und zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(\mu-1)=m$$

setzen; dies giebt

$$\frac{\sin\mu u}{\mu\sin u}=\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{2\pi}{\mu}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin u}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right]$$

oder auch, wenn $\mu u=z$ und folglich $u=\frac{z}{\mu}$ genommen wird,

6)
$$\frac{\sin z}{\mu\sin\frac{z}{\mu}}=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{2\pi}{\mu}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right].$$

Lässt man die ungerade Zahl μ in's Unendliche wachsen, so convergirt die linke Seite dieser Gleichung gegen die Grenze $\frac{\sin z}{z}$, während das rechts verzeichnete, aus $m=\frac{1}{2}(\mu-1)$ Factoren bestehende Product zu einem unendlichen Producte wird. Man ersieht hieraus die Möglichkeit, $\sin z$ in Form eines unendlichen Productes darzustellen; die Ausführung dieses Gedankens bedarf aber einer genaueren Discussion des Productes in Nro. 6).

Wir bezeichnen mit k eine beliebige ganze positive Zahl $<m$ und zerlegen das genannte Product in zwei Theile, nämlich

7)
$$\sin z=\mu\sin\frac{z}{\mu}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{k\pi}{\mu}}\right)^2\right]P,$$

8)
$$P=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{\mu}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{m\pi}{\mu}}\right)^2\right];$$

dabei richten wir die Aufmerksamkeit zunächst auf das aus $m - k$ Factoren bestehende Ergänzungsproduct P, welches unter der kurzen, von selbst verständlichen Form

9) $$P = (1 - Q_1)(1 - Q_2) \ldots (1 - Q_{m-k})$$

dargestellt werden möge.

In den Nennern der mit Q_1, Q_2 etc. bezeichneten Brüche kommen der Reihe nach die Bögen vor

$$\frac{(k+1)\pi}{\mu}, \quad \frac{(k+2)\pi}{\mu}, \ldots \frac{m\pi}{\mu} = \frac{m\pi}{2m+1},$$

die sämmtlich kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind; in den Zählern findet sich immer der Bogen $\frac{\varepsilon}{\mu}$, welcher kleiner als die eben genannten Bögen ist, sobald $\varepsilon < (k+1)\pi$ vorausgesetzt wird. Da im ersten Quadranten dem grösseren Bogen der grössere Sinus entspricht, so sind unter der gemachten Voraussetzung Q_1, Q_2 etc. positive echte Brüche, mithin ist auch

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2) \ldots (1 - Q_{m-k}) < 1$$

d. h.

10) $$P < 1.$$

Um einen Ausdruck zu erhalten, der kleiner als P ist, benutzen wir den leicht erweisbaren Satz, dass jedes Product von der Form $(1 - Q_1)(1 - Q_2) \ldots$ mehr als die Differenz $1 - (Q_1 + Q_2 + \cdots)$ beträgt, sobald Q_1, Q_2 etc. positive echte Brüche sind*); es ist daher

11) $$P > 1 - (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k}).$$

Diese Ungleichung wird einfacher, wenn man die Bemerkung hinzubringt, dass die Function $\frac{\sin\xi}{\xi}$ innerhalb des Intervalles $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{1}{2}\pi$ fortwährend abnimmt, wie man aus dem negativen Vorzeichen des Differentialquotienten leicht ersieht. Man hat demgemäss für jeden im ersten Quadranten liegenden Bogen ξ

$$\frac{\sin\xi}{\xi} > \frac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} \text{ oder } \frac{1}{\sin\xi} < \frac{\pi}{2\xi},$$

mithin, wenn $\xi = \frac{h\pi}{\mu}$ gesetzt und quadrirt wird,

---

*) Es ist nämlich bei positiven echt gebrochenen Q_1, Q_2, Q_3 etc.
$(1 - Q_1)(1 - Q_2) = 1 - (Q_1 + Q_2) + Q_1 Q_2 > 1 - (Q_1 + Q_2)$;
daraus folgt durch Multiplication mit $1 - Q_3$

$$(1 - Q_1)(1 - Q_2)(1 - Q_3)$$
$$> 1 - (Q_1 + Q_2 + Q_3) + (Q_1 + Q_2) Q_3 > 1 - (Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

u. s. w.

$$\frac{1}{\left(\sin\frac{h\pi}{\mu}\right)^2} < \frac{\mu^2}{4h^2} < \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right).$$

Diese Ungleichung multipliciren wir mit der folgenden

$$\left(\sin\frac{z}{\mu}\right)^2 < \frac{z^2}{\mu^2}$$

und erhalten

$$\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{h\pi}{\mu}}\right)^2 < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{h-1} - \frac{1}{h}\right).$$

Setzen wir $h = k+1,\ k+2,\ \ldots\ m$, so kommen linker Hand die mit $Q_1,\ Q_2,\ \ldots\ Q_{m-k}$ bezeichneten Quotienten zum Vorschein, und durch Addition aller Ungleichungen ergiebt sich

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k} < \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right) < \frac{z^2}{4k};$$

hieraus folgt noch

$$1 - (Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{m-k}) > 1 - \frac{z^2}{4k}$$

und um so mehr nach Nro. 11)

12) $$P > 1 - \frac{z^2}{4k}.$$

Die Zusammenstellung der Ungleichungen 10) und 12) zeigt, dass

$$P = 1 - \frac{\varrho z^2}{4k}$$

gesetzt werden darf, wo ϱ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch vorstellt; die Gleichung 7) wird daher zur folgenden

13) $$\sin z = \mu \sin\frac{z}{\mu}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\pi}{\mu}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{k\pi}{\mu}}\right)^2\right]\left(1-\frac{\varrho z^2}{4k}\right).$$

Der Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende μ bietet nun keine Schwierigkeit mehr, wenn man sich dabei k als constante Zahl denkt; unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$Lim\left(\mu \sin\frac{z}{\mu}\right) = z, \qquad Lim\frac{\sin\frac{z}{\mu}}{\sin\frac{\alpha}{\mu}} = \frac{z}{\alpha}$$

erhält man nämlich aus Nro. 13) die Formel

$$14)\quad \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varrho z^2}{4k}\right),$$

welche nur an die Bedingung

$$-(k+1)\pi < z < +(k+1)\pi$$

gebunden ist. Statt der Gleichung 14) kann man schreiben

$$15)\quad \frac{\sin z}{1-\frac{\varrho z^2}{4k}} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

und wenn nun auch die beliebige ganze positive Zahl k als unendlich wachsend gedacht wird, so convergirt linker Hand der Nenner gegen die Einheit, wofern z irgend einen endlichen Werth behält; das endliche Product wird zu einem unendlichen, und so ergiebt sich die für jedes endliche z gültige Formel

$$16)\quad \sin z = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

In dem speciellen Falle $z = \frac{1}{2}\pi$ erhält man hieraus

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\cdots\cdot$$

oder umgekehrt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot$$

Ganz ähnliche Umwandlungen können mit der Gleichung 18) in §. 48 vorgenommen werden, doch gelangt man zum Endresultate kürzer auf folgendem Wege. In Nro. 15) ersetzen wir einmal k durch die gerade Zahl $2k$, das andere Mal z durch $\frac{1}{2}z$ und haben dann die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin z}{1-\frac{\varrho_1 z^2}{8k}} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}z}{1-\frac{\varrho_2 z^2}{16k}} = \frac{1}{2}z\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2\pi^2}\right),$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 positive echte Brüche sind. Die erste Gleichung dividiren wir durch das Doppelte der zweiten und erhalten

$$17) \quad \left(\frac{1-\frac{\varrho_2 z^2}{16k}}{1-\frac{\varrho_1 z^2}{8k}}\right) \cos\tfrac{1}{2}z = \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$

welche Formel das Correlat zu Nro. 15) bildet. Für unendlich werdende k geht diese Gleichung über in

$$18) \quad \cos\tfrac{1}{2}z = \left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot;$$

auch ist noch, wenn z durch $2z$ ersetzt wird,

$$19) \quad \cos z = \left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

wobei z jeden beliebigen Bogen von endlicher Grösse bedeuten darf.

Aus den Gleichungen 16) und 19) geht unmittelbar hervor, dass überhaupt alle sechs goniometrischen Functionen in Form von unendlichen Producten dargestellt werden können.

§. 50.

Die Reihen für Tangente, Cotangente etc.

Es liegt sehr nahe, von den unendlichen Producten des vorigen Paragraphen die Logarithmen zu nehmen, um wieder auf unendliche Reihen zu kommen; die etwa vorhandenen negativen Factoren lassen sich hierbei vermeiden, wenn man die Gleichungen erst quadrirt, bevor man zu den Logarithmen übergeht. Dies giebt folgende Resultate

$$1) \quad l(\sin^2 z) = l(z^2) + l\left[\left(1-\frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right] + l\left[\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)^2\right] + \cdots,$$

$$2) \quad l(\cos^2 z) = l\left[\left(1-\frac{4z^2}{1^2\pi^2}\right)^2\right] + l\left[\left(1-\frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)^2\right] + \cdot\cdot\cdot\cdot;$$

daraus erhält man ferner durch Differentiation, welche nach §. 42 erlaubt ist,

$$3) \quad \cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{(1\pi)^2 - z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} - \frac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \cdots,$$

4) $$\tan z = \frac{2z}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} + \cdots,$$

oder auch, wenn $\frac{1}{2}z$ für z gesetzt wird,

5) $$\tan \tfrac{1}{2}z = \frac{4z}{(1\pi)^2 - z^2} + \frac{4z}{(3\pi)^2 - z^2} + \frac{4z}{(5\pi)^2 - z^2} + \cdots$$

Addirt man die Gleichungen 3) und 5), indem man linker Hand die Formel $\cot z + \tan \frac{1}{2}z = \csc z$ benutzt, so findet sich

6) $$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{(1\pi)^2 - z^2} - \frac{2z}{(2\pi)^2 - z^2} + \frac{2z}{(3\pi)^2 - z^2} - \cdots.$$

Um noch eine Reihe für $\sec z$ zu erhalten, bringen wir die Gleichung 6) auf die Form

$$\csc z = \frac{1}{z} + \left\{\frac{1}{\pi - z} - \frac{1}{\pi + z}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - z} - \frac{1}{2\pi + z}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi - z} - \frac{1}{3\pi + z}\right\} - \cdots$$

und lassen $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten; durch Vereinigung der einander entsprechenden Brüche folgt dann

7) $$\sec z = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - z^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - z^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - z^2} - \cdots.$$

Die unendlichen Reihen, welche in den bisherigen Gleichungen vorkommen, gestatten weitere Umwandlungen, wodurch sie wieder zu Potenzenreihen werden. Beschränkt man nämlich in Formel 1) die Variabele z auf das Intervall $-\pi$ bis $+\pi$, so sind $\frac{z}{\pi}$, $\frac{z}{2\pi}$, $\frac{z}{3\pi}$ etc. echte Brüche; dann ist ferner

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = l\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots$$

und hier lassen sich rechter Hand alle Logarithmen mittelst der Formel

$$l(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots, \qquad -1 < x < +1$$

entwickeln; dies giebt

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{z^2}{1^2\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{z^4}{1^4\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{z^6}{1^6\pi^6} - \cdots$$
$$- \frac{z^2}{2^2\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{z^4}{2^4\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{z^6}{2^6\pi^6} - \cdots$$
$$- \frac{z^2}{3^2\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{z^4}{3^4\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{z^6}{3^6\pi^6} - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die vorstehende Doppelreihe genügt den Bedingungen, unter welchen die Anordnung nach Verticalcolonnen erlaubt ist, folglich hat man auch

$$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\frac{z^2}{\pi^2}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)\frac{z^4}{\pi^4}$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\frac{z^6}{\pi^6}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bezeichnet man die Summen der eingeklammerten Horizontalreihen mit S_2, S_4, S_6 etc., so dass überhaupt

8) $$S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots\cdots$$

ist, so geht die vorige Gleichung über in

9) $$l\left(\frac{\sin z}{z}\right) = -\tfrac{1}{1}\frac{S_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{S_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{S_6 z^6}{\pi^6} - \cdots,$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Eine ganz ähnliche Transformation kann mit der Gleichung 2) vorgenommen werden, sobald z innerhalb des Intervalles $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ liegt; mit Hülfe der Abkürzung

10) $$T_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots\cdots$$

erhält man

11) $$l\cos z = -\tfrac{1}{1}\frac{2^2 T_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{2^4 T_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{2^6 T_6 z^6}{\pi^6} - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die hier vorkommenden Summen T_2, T_4, T_6 etc. lassen sich wieder durch S_2, S_4, S_6 etc. ausdrücken; nach Formel 8) ist nämlich

$$\frac{1}{2^m}S_m = \frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\cdots\cdots,$$

und wenn man dies von Nro. 8) abzieht, so bleibt

$$\frac{2^m-1}{2^m}S_m = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\cdots = T_m.$$

Demnach wird aus der Gleichung 11) die folgende

12) $$l\cos z$$
$$= -\tfrac{1}{1}\frac{(2^2-1)S_2 z^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{(2^4-1)S_4 z^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{(2^6-1)S_6 z^6}{\pi^6} - \cdots\cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Formeln 3) und 4) lassen sich analog behandeln, wobei man die für $-k\pi < z < +k\pi$ geltende Reihenentwickelung

$$\frac{z}{(k\pi)^2 - z^2} = \frac{z}{(k\pi)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{k\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{z}{(k\pi)^2} + \frac{z^3}{(k\pi)^4} + \frac{z^5}{(k\pi)^6} + \cdots$$

zu benutzen hat; das Endresultat findet sich aber rascher durch Differentiation der Gleichungen 9) und 12), nämlich

13) $$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2S_2 z}{\pi^2} - \frac{2S_4 z^3}{\pi^4} - \frac{2S_6 z^5}{\pi^6} - \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi;$$

14) $$\tan z = \frac{2(2^2-1)S_2 z}{\pi^2} + \frac{2(2^4-1)S_4 z^3}{\pi^4} + \frac{2(2^6-1)S_6 z^5}{\pi^6} + \cdots$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung z durch $\frac{1}{2}z$ und addirt die entstehende Gleichung zur vorhergehenden, so erhält man noch

15) $$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{(2^1-1)S_2 z}{\pi^2} + \frac{(2^3-1)S_4 z^3}{2^2\pi^4} + \frac{(2^5-1)S_6 z^5}{2^4\pi^6} + \cdots,$$

$$-\pi < z < +\pi,$$

wie sich auch durch Transformation von Nro. 6) finden würde.

Um endlich eine Potenzreihe für $\sec z$ zu gewinnen, beschränken wir in Nro. 7) die Variabele z auf das Intervall $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ und entwickeln die einzelnen Glieder nach der Formel

$$\frac{n\pi}{(\frac{1}{2}n\pi)^2 - z^2} = \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left\{1 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{2z}{n\pi}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Indem wir zur Abkürzung

16) $$U_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \cdots$$

setzen, gelangen wir zu folgendem Ergebnisse

17) $$sec\, z = \frac{2^2 U_1}{\pi} + \frac{2^4 U_3 z^2}{\pi^3} + \frac{2^6 U_5 z^4}{\pi^5} + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi.$$

An die Gleichungen 14) und 17) knüpft sich noch eine werthvolle Bemerkung. Die Tangentenreihe muss nämlich gleichfalls zum Vorschein kommen, wenn man das Theorem von Mac-Laurin unmittelbar auf die Function $f(z) = tan\, z$ anwendet; es ist daher innerhalb der schon bekannten Grenzen

$$tan\, z = \frac{(D\, tan\, z)_0}{1} z + \frac{(D^2 tan\, z)_0}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots\cdots$$

und zwar bezeichnet hier $(D^k tan\, z)_0$ den speciellen Zahlwerth, welchen der $k$te Differentialquotient von $tan\, z$ für $z = 0$ erlangt. Der Vergleich mit Nro. 14) zeigt erstens, dass bei geraden k jederzeit $(D^k tan\, z)_0 = 0$ ist, wie man auch auf anderem Wege leicht findet, und zweitens, dass für ungerade k die Relation

18) $$\frac{(D^k tan\, z)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{2\,(2^{k+1} - 1)\, S_{k+1}}{\pi^{k+1}}$$

besteht. Um den Zähler linker Hand zu ermitteln, benutzen wir die Formel 4) in §. 14 für $x = 0$ und setzen zur Abkürzung

$$(D^k tan\, z)_0 = \tau_k, \qquad (k \text{ ungerade});$$

wir haben dann bei ungeraden n

19) $$\tau_n - (n)_2 \tau_{n-2} + (n)_4 \tau_{n-4} - \cdots = sin\, \tfrac{1}{2} n \pi,$$

und hieraus ergeben sich der Reihe nach τ_1, τ_3, τ_5 etc., wenn successiv $n = 1, 3, 5$ etc. genommen wird. Man hat nun einerseits

20) $$tan\, z = \frac{\tau_1}{1} z + \frac{\tau_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{\tau_5}{1 \cdot 2 \ldots 5} z^5 + \cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi$$

ferner nach Nro. 18), wobei zu grösserer Deutlichkeit $k = 2p - 1$ sein möge,

21) $$S_{2p} = \frac{\tau_{2p-1}\, \pi^{2p}}{2\,(2^{2p} - 1) \cdot 1 \cdot 2 \ldots (2p-1)}.$$

Aus der Formel 19) geht hervor, dass τ_1, τ_3, τ_5 etc. ganze rationale Zahlen sind, und zwar

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_3 = 2, \quad \tau_5 = 16 \text{ etc.};$$

betrachtet man sie als bekannt, so zeigt die Formel 21), wie mit ihrer Hülfe die Summen S_2, S_4, S_6 etc. gefunden werden können, z. B.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945},$$

u. s. w.

Was zweitens die Gleichung 17) anbelangt, so ist zunächst klar, dass dieselbe innerhalb des angegebenen Intervalles mit der Entwickelung

$$sec\, z = 1 + \frac{(D\, sec\, z)_0}{1} z + \frac{(D^2 sec\, z)_0}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots$$

übereinstimmen muss; demnach hat man für ungerade k

$$(D^k sec\, z)_0 = 0$$

und für gerade k

22) $$\frac{(D^k sec\, z)_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \frac{2^{k+2} U_{k+1}}{\pi^{k+1}}.$$

Zur Abkürzung sei

$$(D^k sec\, z)_0 = \tau_k, \qquad (k \text{ gerade});$$

die Formel 2) in §. 14 liefert dann für $x = 0$ und bei geraden n

23) $$\tau_n - (n)_2 \tau_{n-2} + (n)_4 \tau_{n-4} - \cdots = 0,$$

woraus man τ_2, τ_4, τ_6 etc. erhält, wenn man der Reihe nach $n = 2$, 4, 6 etc. nimmt. Es ist nun einerseits

24) $$sec\, z = 1 + \frac{\tau_2}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\tau_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \cdots,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

andererseits nach Formel 22) für $k = 2p$

25) $$U_{2p+1} = \frac{\tau_{2p}\, \pi^{2p+1}}{2^{2p+2} 1 \cdot 2 \ldots (2p)},$$

mithin können die rationalen ganzen Zahlen

$$\tau_2 = 1, \quad \tau_4 = 5, \quad \tau_6 = 61 \text{ etc.}$$

zur Bestimmung der Summen U_1, U_3, U_5 etc. dienen; so ist z. B.

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

u. s. w.

Schreibt man in Formel 23) rechter Hand $sin \frac{1}{2} n \pi$ statt 0, was bei geraden n richtig ist, so erhält man dieselbe Gleichung, welche

in Nro. 19) für ungerade n verzeichnet ist; demnach sind die Tangentencoefficienten nach derselben Regel gebildet wie die Secantencoefficienten. Aus der Bemerkung, dass

$$sec\, z + tan\, z = tan\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}z)$$

ist, folgt noch die Formel

$$26)\quad tan\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}z) = 1 + \frac{\tau_1}{1}z + \frac{\tau_2}{1\,.\,2}z^2 + \frac{\tau_3}{1\,.\,2\,.\,3}z^3 + \cdots$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

worin alle mit τ bezeichneten Coefficienten vorkommen.

Die Reihen für Cotangente, Tangente und Cosecante stellt man häufig unter einer etwas anderen Form dar, mit deren Angabe wir diese Untersuchungen beschliessen wollen. Nach Formel 13) ist nämlich

$$\tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{S_2 x^2}{2^1\pi^2} - \frac{S_4 x^4}{2^3\pi^4} - \cdots\cdots;$$

dagegen würde das Theorem von Mac-Laurin liefern

$$27)\quad \tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x = 1 - \frac{B_1 x^2}{1\,.\,2} - \frac{B_3 x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots\cdots,$$
$$-2\pi < x < +2\pi,$$

wobei

$$B_{2p-1} = -\,[D^{2p}(\tfrac{1}{2}x\, cot\tfrac{1}{2}x)]_0$$

gesetzt wurde. Aus Gründen, die sich später ergeben werden, hat man die Form 27) vorgezogen und die Coefficienten B_1, B_3, B_5 etc. mit dem Namen der Bernoulli'schen Zahlen belegt; es ist daher

$$\frac{S_{2p}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} = \frac{B_{2p-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2p)}$$

oder

$$28)\qquad S_{2p} = \frac{2^{2p-1}B_{2p-1}\pi^{2p}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2p)},$$

und nach den Formeln 13), 14), 15)

$$29)\quad cot\, z = \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{1\cdot 2}z - \frac{2^4 B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^3$$
$$-\frac{2^6 B_5}{1\,.\,2\,\ldots\,6}z^5 - \cdots,$$
$$-\pi < z < +\pi;$$

30) $$\tan z = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1\,.\,2}z + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1\,.\,2\,\ldots\,6}z^5 + \ldots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < z < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

31) $$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{2(2^1-1)B_1}{1\,.\,2}z + \frac{2(2^3-1)B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}z^3 + \frac{2(2^5-1)B_5}{1\,.\,2\,\ldots\,6}z^5 + \ldots,$$
$$-\pi < z < +\pi.$$

Ein Mittel zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen erhält man durch Vergleichung der Formeln 21) und 28); es folgt nämlich

32) $$B_{2p-1} = \frac{p\tau_{2p-1}}{2^{2p-1}(2^{2p}-1)},$$

mithin können die Bernoulli'schen Zahlen aus den Tangentencoefficienten hergeleitet werden, z. B.

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_3 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{1}{42},\quad B_7 = \frac{1}{30},\quad B_9 = \frac{5}{66},$$

$$B_{11} = \frac{691}{2730},\quad B_{13} = \frac{7}{6},\quad B_{15} = \frac{3617}{510},\quad B_{17} = \frac{43867}{798},\ \text{etc.}$$

Anfangs fallen diese Werthe, von B_5 an steigen sie wieder, und da nach Nro. 28 bei unendlich wachsenden p

$$Lim\,\frac{B_{2p+1}}{B_{2p-1}} = Lim\left\{\frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2}\cdot\frac{S_{2p+2}}{S_{2p}}\right\} = \infty\ .\ 1$$

ist, so nehmen die Bernoulli'schen Zahlen schliesslich rascher zu als irgend eine geometrische Progression.

§. 51.

Reihenentwickelungen für Functionen mehrerer Variabelen.

Da nach dem Taylor'schen Satze $f(x+h)$ in eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe verwandelbar ist, so lässt sich der Analogie nach erwarten, dass bei zwei Variabelen x und y die geänderte Function $F(x+h,\ y+k)$ nach Potenzen von h und k entwickelbar sein werde. In der That macht sich dies leicht mittelst folgenden Kunstgriffs. Die zu entwickelnde Function kann als der specielle Werth angesehen werden, welchen der Ausdruck

1) $$f(t) = F(x + ht,\ y + kt)$$

für $t = 1$ annimmt; als Function von t betrachtet, lässt sich $f(t)$ nach der Mac-Laurin'schen Formel

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}t + \frac{f''(0)}{1\,.\,2}t^2 + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}t^{n-1} + R_n$$

in eine Reihe umsetzen und hieraus muss für $t = 1$ die gesuchte Entwickelung von $F(x + h,\ y + k)$ hervorgehen. Durch successive Differentiation der Gleichung 1) erhält man die Formeln

$$f'(t) = \frac{\partial F}{\partial(x + ht)}h + \frac{\partial F}{\partial(y + kt)}k,$$

$$f''(t) = \frac{\partial^2 F}{[\partial(x + ht)]^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial(x+ht)\,.\,\partial(y+kt)}hk + \frac{\partial^2 F}{[\partial(y+kt)]^2}k^2,$$

u. s. w.

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt, wenn man F zuerst als Function zweier Variabelen ξ und η behandelt, welche mit t durch die Gleichungen $\xi = x + ht$ und $\eta = y + kt$ verbunden sind. Für $t = 0$ wird

$$f(0) = F(x,\ y),$$

$$f'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k,$$

$$f''(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2,$$

u. s. w.,

überhaupt stimmt $f^{(m)}(0)$ mit dem vollständigen $m$ten Differential von $F(x,\ y)$ überein, wenn man sich in demselben ∂x durch h, und ∂y durch k ersetzt denkt; in kurzer symbolischer Form geschrieben ist also

$$f^{(m)}(0) = \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^m \partial^m F.$$

Dies giebt folgende Reihenentwickelung

2) $$F(x + ht, y + kt) = F(x, y) + \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)\frac{\partial F}{1}t$$
$$+ \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^2\frac{\partial^2 F}{1\,.\,2}t^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{\partial x}h + \frac{1}{\partial y}k\right)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{1\,.\,2\,.\ldots.\,(n-1)}t^{n-1}$$
$$+ R_n,$$

wobei noch der Rest, wofür wir die Form wählen

$$R_n = \frac{t^n}{1.2.3....n} f^{(n)}(\vartheta t), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

durch F auszudrücken ist. Die Vergleichung von $f'(t)$ und $f'(0)$, $f''(t)$ und $f''(0)$ etc. lehrt nun, dass $f^{(n)}(t)$ als Dasjenige betrachtet werden kann, was aus $f^{(n)}(0)$ wird, wenn $x + ht$ für x, und $y + kt$ für y eintreten; bezeichnet man daher wie folgt

3) $$F_n(x, y, h, k) = \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^n \partial^n F,$$

so ist

$$f^{(n)}(t) = F_n(x + ht, y + kt, h, k),$$

mithin, wenn ϑt an die Stelle von t gesetzt wird,

4) $$R_n = \frac{t^n F_n(x + \vartheta ht, y + \vartheta kt, h, k)}{1.2.3.....n}.$$

Für $t = 1$ hat man schliesslich folgende Entwickelung

5) $$F(x + h, y + k) = F(x, y) + \frac{F_1(x, y, h, k)}{1} + \frac{F_2(x, y, h, k)}{1.2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{F_{n-1}(x, y, h, k)}{1.2.3 \ldots (n-1)}$$
$$+ \frac{F_n(x + \vartheta h, y + \vartheta k, h, k)}{1.2.3 \ldots n};$$

diese gilt aber nur unter der Bedingung, dass die Functionen F, F_1 F_2, . . . F_n stetig und endlich bleiben, während x bis $x + h$ und y bis $y + k$ zunimmt.

Setzt man nach Ausführung der in Nro. 3) angedeuteten Differentiationen $x = 0$, $y = 0$ und schreibt dann x und y für h und k, so erhält man die Entwickelung von $F(x, y)$ nach Potenzen von x und y.

Aehnliche Formeln gelten für Functionen mehrerer Variabelen und sind mittelst des anfangs erwähnten Kunstgriffs so leicht herzuleiten, dass eine nähere Auseinandersetzung unterbleiben kann.

§. 52.

Das Unendlichkleine.

In allen Untersuchungen dieses Capitels kam es darauf an, mittelst der Differentialquotienten einer Function für letztere eine Reihe zu finden; es kann aber auch umgekehrt die Reihenentwickelung,

wenn sie schon bekannt ist, zur Ableitung der Differentialquotienten dienen. Gesetzt z. B., man habe durch irgend welche Mittel für $f(x+h)$ folgende Reihe gefunden

1) $f(x+h) = \chi_0 + \chi_1 h + \chi_2 h^2 + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-1} + \varrho_n h^n$,

wo $\chi_0, \chi_1, \cdots \chi_{n-1}$ bekannte Functionen von x und $\varrho_n h^n$ den gleichfalls bekannten Rest bedeuten, so ist erstens für $h = 0$

2) $$f(x) = \chi_0.$$

Diese Gleichung werde von Nro. 1) abgezogen und der Unterschied mit h dividirt; dies giebt

3) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \chi_1 + \chi_2 h + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-2} + \varrho_n h^{n-1}$$

und beim Uebergange zur Grenze für verschwindende h

4) $$f'(x) = \chi_1.$$

Setzt man ferner in Nro. 1) $f(x)$ für χ_0 und $f'(x)$ für χ_1, so folgt

5) $$\frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x)}{h^2} = \chi_2 + \chi_3 h + \cdots + \chi_{n-1} h^{n-3} + \varrho_n h^{n-2}$$

und bei verschwindenden h

6) $$\frac{f''(x)}{1 \,.\, 2} = \chi_2 \quad \text{oder} \quad f''(x) = 1 \,.\, 2\, \chi_2.$$

Den weiteren Fortgang dieser Schlüsse übersieht man leicht und findet bei jedem ganzen positiven m, wenn $n > m$ genommen wird,

$$f^{(m)}(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, m \chi_m.$$

Hiermit rechtfertigt sich die anfangs ausgesprochene Behauptung und zugleich ist ersichtlich, dass die vorausgesetzte Entwickelung 1) mit der Taylor'schen Reihe übereinstimmen muss.

An diese Ableitung knüpft sich noch eine wichtige allgemeine Bemerkung. Der Vergleich von Nro. 3) und Nro. 4) zeigt nämlich, dass in Nro. 3) das Hinschreiben der Glieder $\chi_2 h$, $\chi_3 h^2$ etc. überflüssig war, da letztere gleichzeitig mit h verschwinden; aus demselben Grunde hätte man sich in Nro. 5) das Hinsetzen der Glieder $\chi_3 h$, $\chi_4 h^2$ etc. ersparen können. Beachtet man, dass h der Zuwachs von x, also $= \Delta x$ ist, so ergiebt sich aus dem Vorigen die praktische Regel:

> In allen Fällen, wo es auf die Ableitung eines Differentialquotienten oder einer Differentialgleichung ankommt, darf man die Glieder weglassen, welche hö-

here Potenzen von Δx enthalten, als die Ordnung der Differentialgleichung beträgt.

Will man z. B. den binomischen Satz für ganze positive Exponenten, der in der That auch ohne Differentialrechnung beweisbar ist, zur Bestimmung von $d(x^m)$ benutzen, so verfährt man der obigen Regel gemäss folgendermaassen; es ist

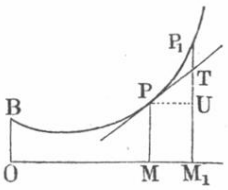
$$\Delta(x^m) = (x + \Delta x)^m - x^m = m x^{m-1} \Delta x + \text{etc.},$$

mithin bei Weglassung aller mit „etc.“ bezeichneten Glieder

$$d(x^m) = m x^{m-1} dx.$$

Vielleicht ist ein geometrisches Beispiel nicht überflüssig. Bedeutet $\varphi(x)$ die über der Abscisse $OM = x$ stehende Fläche $BOMP$, Δx die Abscissenzunahme $MM_1 = PU$, y die Ordinate MP, τ den Berührungswinkel UPT (Fig. 39), so hat man

Fig. 39.



Fläche BOM_1P_1 = Fläche $BOMP$
+ Rechteck MM_1UP
+ Dreieck PUT
+ Abschnitt PTP_1

oder in den obigen Zeichen und mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Abschnitt PTP_1 einen Bruchtheil des Dreiecks PP_1U ausmacht,

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + y\,\Delta x + \tfrac{1}{2} \tan\tau \,.\, \Delta x^2 + \tfrac{1}{2} \varrho\, \Delta x\, \Delta y,$$
$$-1 < \varrho < 1;$$

daraus folgt

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = y + \tfrac{1}{2}(\tan\tau \,.\, \Delta x + \Delta y)$$

und durch Uebergang zur Grenze für verschwindende Δx

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = y \quad \text{oder} \quad d\varphi(x) = y\,dx.$$

Hier übersieht man augenblicklich, dass die Genauigkeit, welche das Dreieck PUT und den Abschnitt PTP_1 in Rechnung zog, am unrechten Platze angebracht war; man hätte kürzer sagen können, „je kleiner Δx ist, um so genauer kommt der Flächenzuwachs $\Delta\varphi(x)$ mit dem Rechtecke $y\Delta x$ überein“ und indem man die Worte „je kleiner, um so genauer“ durch den Gebrauch von d statt Δ in die Sprache der Analysis einführt, gelangt man sofort zu der Gleichung $d\varphi(x) = y\,dx$.

Dieselben Bemerkungen wiederholen sich bei mehreren Variabelen; so hat man z. B. bei der Entwickelung von $d^2 f(x, y)$ alle

Grössen wegzulassen, die von höherer Dimension als von der zweiten sind, nämlich $\Delta x^2 \Delta y$, $\Delta x \Delta y^2$, Δx^3 etc.

Nicht selten nennt man Grössen, welche die Null zur Grenze haben, unendlich klein werdende oder kurz unendlich kleine Grössen; in diesem Sinne sind die Differentiale dx, dy etc. unendlich kleine Grössen, und zwar der ersten Ordnung; Producte von zwei Differentialen, wie z. B. dx^2, $dx\,dy$, dy^2, heissen entsprechend Unendlichkleine zweiter Ordnung, ebenso sind

$$dx^m, \quad dx^{m-1}dy, \quad dx^{m-2}dy^2, \quad dx^{m-2}dy\,dz, \text{ etc.}$$

Unendlichkleine von der Ordnung m. Als Regel gilt dann:

> Bei der Bildung einer Differentialgleichung sind alle unendlichkleinen Grössen wegzulassen, deren Ordnungen die Ordnung der gesuchten Differentialgleichung übersteigen;

eine Ungenauigkeit ist hierbei nie zu fürchten, weil es sich immer nur um Grenzwerthe handelt, und weil bei jedem solchen Grenzübergange alle jene Grössen, welche der Einfachheit wegen im Voraus weggelassen worden sind, in der That gegen die Null convergiren und deshalb auf das Endresultat keinen Einfluss ausüben.

Cap. VIII.

Die Functionen complexer Variabelen.

§. 53.

Die algebraischen Functionen complexer Zahlen.

Sowie man sich jede negative Zahl $-y$ dadurch entstanden denken kann, dass eine absolute Zahl y mit der negativen Einheit multiplicirt worden ist $[-y=(-1)y]$, so kann man auch imaginäre Zahlen bilden, indem man y mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ multiplicirt; dabei wird die Wurzel im absoluten Sinne genommen und gewöhnlich zur Abkürzung $\sqrt{-1}=i$ gesetzt, so dass die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} i^2=-1, & i^4=+1, & i^6=-1, & i^8=+1, \ldots. \\ i^3=-i, & i^5=+i, & i^7=-i, & i^9=+i, \ldots \end{cases}$$

statt finden. Aus einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl iy lässt sich ferner ein Complex $x+iy$ bilden; dieser heisst eine complexe Zahl, x ihr reeller, y ihr imaginärer Theil. Während wir nun bisher immer voraussetzten, dass die unabhängige Variabele z einer Function $f(z)$ auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt sei, wollen wir jetzt allgemeiner z als eine complexe Variabele betrachten und untersuchen, welchen complexen Werth die Function in diesem Falle erhält. Hierzu wird es aber nöthig sein, auf die ersten Elemente der Buchstabenrechnung zurückzugehen, da alle bisherigen Rechnungsregeln nur für reelle Zahlen bewiesen sind.

Zwei complexe Zahlen heissen gleich, wenn ihre reellen und gleichzeitig auch ihre imaginären Theile gleich sind. Für $x=\xi$, $y=\eta$ ist hiernach $x+iy=\xi+i\eta$ und umgekehrt.

Addition und Subtraction. Unter der Summe zweier complexen Zahlen $x + iy$ und $\xi + i\eta$ verstehen wir den Ausdruck $(x + \xi) + i(y + \eta)$; die Addition complexer Zahlen geschieht demnach eben so, als wenn i ein reeller Factor wäre. Für die Subtraction behalten wir die gewöhnliche Erklärung bei, dass der gesuchte Rest, mit dem Subtrahenden vereinigt, wieder den Minuenden geben muss. Hiernach findet man sehr leicht $(X + iY) - (x + iy) = (X - x) + i(Y - y)$ ganz wie bei reellen Zahlen.

Multiplication und Division. Unter dem Producte zweier complexen Zahlen versteht man den Ausdruck, der ebenso gebildet ist, als hätte man jene Zahlen wie reelle multiplicirt und dabei $i^2 = -1$ gesetzt, nämlich

2) $$(x + iy)(\xi + i\eta) = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Bei der Division behalten wir die gewöhnliche Definition bei und bestimmen in der Gleichung

$$\frac{x + iy}{X + iY} = u + iv$$

die Unbekannten u und v aus der Bedingung

$$x + iy = (X + iY)(u + iv) = (Xu - Yv) + i(Xv + Yu).$$

Diese liefert die Gleichungen

$$x = Xu - Yv\,, \quad y = Xv + Yu,$$

und wenn man die hieraus gezogenen Werthe von u und v in die obige Gleichung substituirt, so erhält man

3) $$\frac{x + iy}{X + iY} = \frac{Xx + Yy}{X^2 + Y^2} + i\,\frac{Xy - Yx}{X^2 + Y^2}\,.$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man auch dadurch, dass man linker Hand Zähler und Nenner mit $X - iY$ multiplicirt und die Gleichung $(X + iY)(X - iY) = X^2 + Y^2$ beachtet.

Eine andere Methode zur Ausführung der Multiplication und Division complexer Zahlen beruht auf der Bemerkung, dass jede complexe Zahl $x + iy$ unter der Form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dargestellt werden kann. Aus

4) $$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

folgen nämlich die Gleichungen

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$$

und diese geben, wenn r und θ als Unbekannte angesehen werden,

5) $$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

6) $$\frac{y}{x} = \tan\theta\,, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

worin k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Man nennt hier r den Modulus der complexen Zahl $x + iy$ und nimmt ihn stets im absoluten Sinne; das Quadrat des Modulus, also den Ausdruck $x^2 + y^2$, nennt man die Norm, θ das Argument oder die Amplitude.

Nach dieser Umwandlung von $x + iy$ in $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ist es nicht mehr nöthig, complexe Zahlen der ersten Form zu betrachten.

Man hat nun bei gewöhnlicher Multiplication

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$= rr_1[\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 + \cos\theta\sin\theta_1)]$$
$$= rr_1[\cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1)],$$

der neue Modulus ist also das Product des früheren Moduli, das neue Argument die Summe der gegebenen Argumente.

Durch mehrmalige Anwendung dieser Regel gelangt man zu der allgemeineren Formel

7) $$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \ldots r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_m[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m)].$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Division. Multiplicirt man nämlich Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}$$

mit $\frac{1}{r}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$, so wird der Nenner $= 1$ und folglich ist der gesuchte Quotient

$$\frac{r}{r_1}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$$
$$= \frac{r}{r_1}[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 + i(\sin\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\sin\theta_1)$$

oder zusammen

8) $$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\theta - \theta_1) + i\sin(\theta - \theta_1)].$$

Potenzirung und Radicirung. So wie man bei ganzem positiven m unter z^m das Product versteht, welches aus dem Producte $z_1 z_2 \ldots z_m$ für gleiche z entsteht, so möge $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m$ Dasjenige bezeichnen, was aus dem Producte in Nro. 7) wird, sobald alle r und θ gleich sind; man hat dann die Formel

9) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta),$$

welche den Namen des Moivre'schen Satzes führt.

Unter $z^{\frac{m}{n}}$ verstehen wir, sowohl bei reellen als bei complexen z diejenige Zahl, deren $n$te Potenz gleich z^m ist; setzen wir daher

10) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = \varrho(\cos\eta + i\sin\eta),$$

wo ϱ und η nicht bekannt sind, so muss umgekehrt

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = [\varrho(\cos\eta + i\sin\eta)]^n$$

sein. Bei ganzen positiven m und n giebt dies, dem Moivre'schen Satze zufolge,

$$r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta) = \varrho^n(\cos n\eta + i\sin n\eta)$$

und durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile,

$$\varrho^n\cos n\eta = r^m\cos m\theta\,, \quad \varrho^n\sin n\eta = r^m\sin m\theta.$$

Hieraus erhält man zunächst

$$\varrho = r^{\frac{m}{n}},$$

wobei ϱ und r im absoluten Sinne zu nehmen sind. Durch Substitution dieses Werthes von ϱ gehen ferner die vorigen Gleichungen in die folgenden über

$$\cos n\eta = \cos m\theta\,, \quad \sin n\eta = \sin m\theta,$$

welche nur dann zusammen bestehen können, wenn die Differenz zwischen $n\eta$ und $m\theta$ ein gerades Vielfaches von π beträgt. Wir haben daher, wenn k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl bezeichnet,

$$n\eta = m\theta + 2k\pi \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{m\theta + 2k\pi}{n},$$

und nach Substitution der Werthe von ϱ und η in Nro. 10)

11) $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\theta + 2k\pi}{n}\right\}.$$

Da k das Gebiet der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen kann, so scheint die rechte Seite der vorstehenden Gleichung unendlich viel verschiedene Werthe zu haben, doch ist dies nicht der Fall. Giebt man nämlich dem k das eine Mal den individuellen Werth h, das andere Mal den Werth $n + h$, so ändert sich der Bogen $\frac{m\theta + 2k\pi}{n}$ um 2π und hat dann wieder denselben Cosinus und Sinus wie vorher; bei positiven k braucht man also nur $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ zu nehmen. Ferner bleibt die rechte Seite der obigen Gleichung dieselbe für $k = -h$ und für $k = n - h$. Die negativen k liefern also keine neuen Werthe. Demnach hat der Aus-

druck $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}}$ nur n von einander verschiedene Werthe, welche aus Nro. 11) für $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ hervorgehen.

Setzt man in der allgemeinen Formel 11) k gleich einem Vielfachen von m, etwa $k = hm$, und lässt in der neuen Gleichung

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m(\theta+2h\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\theta+2h\pi)}{n}\right\}$$

m und n gleichzeitig in's Unendliche wachsen und zwar so, dass $\frac{m}{n}$ sich einer irrationalen Zahl μ nähert, so gelangt man zu der neuen Gleichung

12) $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\mu} = r^{\mu}\{\cos\mu(\theta + 2h\pi) + i\sin\mu(\theta + 2h\pi)\}$.

Hier ist h eine willkührliche ganze Zahl, und die rechte Seite hat unendlich viele verschiedene Werthe.

Wie bei Potenzen mit reeller Variabelen z, so verstehen wir auch bei einem complexen z unter z^{-p} den reciproken Werth von z^p; hiernach ist z. B. für ganze positive m

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)}$$
$$= r^{-m}(\cos m\theta - i\sin m\theta)$$

und ähnlich in jedem anderen Falle.

§. 54.

Anwendungen der vorigen Sätze.

I. Dem Moivre'schen Theoreme zufolge gilt die Gleichung

$$\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m;$$

die rechte Seite ist, m als ganz und positiv vorausgesetzt, ein Product aus m gleichen Factoren, zu dessen Ausrechnung der binomische Satz benutzt werden kann, weil die Multiplication bei reellen und bei imaginären Factoren auf völlig gleiche Weise geschieht. Nach beiderseitiger Vergleichung der reellen und der imaginären Theile gelangt man zu folgenden brauchbaren goniometrischen Formeln

1) $\cos m\theta = (m)_0 \cos^m\theta - (m)_2 \cos^{m-2}\theta \sin^2\theta$
$+ (m)_4 \cos^{m-4}\theta \sin^4\theta - \ldots$

2) $\sin m\theta = (m)_1 \cos^{m-1}\theta \sin\theta - (m)_3 \cos^{m-3}\theta \sin^3\theta$
$+ (m)_5 \cos^{m-5}\theta \sin^5\theta - \ldots$

oder

3) $$\frac{\cos m\theta}{\cos^m\theta} = (m)_0 - (m)_2 \tan^2\theta + (m)_4 \tan^4\theta - (m)_6 \tan^6\theta + \cdots$$

4) $$\frac{\sin m\theta}{\cos^m\theta} = (m)_1 \tan\theta - (m)_3 \tan^3\theta + (m)_5 \tan^5\theta - \cdots$$

II. Die Auflösung der Gleichung $x^n = +1$. Aus der vorstehenden Gleichung folgt $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$; die gesuchten Werthe von x können folglich nach Nro. 11) berechnet werden, wenn man $r = 1$, $\theta = 0$, $m = 1$, $k = 0, 1, \ldots (n-1)$ setzt, und sie sind in der allgemeinen Form

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

enthalten. Man kann hierbei gerade und ungerade n unterscheiden; im ersten Falle nimmt man der Reihe nach

$$k = 0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1,$$

$$\frac{n}{2}, n-1, n-2, \ldots \frac{n}{2} + 1,$$

im zweiten Falle

$$k = 0, 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2},$$

$$n-1, n-2, \ldots \frac{n+1}{2}.$$

Für ein gerades n sind hiernach die Werthe von x

$+1$,	-1
$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,	$\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$,	$\cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}$,
$\cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}$	$\cos\frac{6\pi}{n} - i\sin\frac{6\pi}{n}$,
. . . . .	. . . . .
$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$,	$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$,

dagegen für ein ungerades n:

$$+1,$$

$$\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}, \qquad \cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}, \qquad \cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n},$$

$$\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}, \qquad \cos\frac{6\pi}{n}-i\sin\frac{6\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

So hat z. B. die Gleichung

$$x^6=+1$$

folgende 6 Wurzeln

$$+1, \qquad -1,$$

$$\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\tfrac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

III. Die Auflösung der Gleichung $x^n=-1$. Für $r=1$, $\theta=\pi$, $m=1$ erhält man aus Nro. 11) als allgemeine Form der Wurzeln

$$x=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n};$$

bei geraden n hat demnach x folgende Werthe:

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

dagegen bei ungeraden n:

$$-1,$$

$$\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}, \qquad \cos\frac{3\pi}{n}-i\sin\frac{3\pi}{n},$$

$$\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}, \qquad \cos\frac{5\pi}{n}-i\sin\frac{5\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \cos\frac{(n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

§. 55.

Die Exponentialgrössen mit complexen Variabelen.

Unter der Zahl e wurde der Grenzwerth des Ausdrucks $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ für unendlich wachsende ω verstanden; demgemäss ist

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega z}\right]$$

oder, wenn $\omega z = m$, mithin $\frac{1}{\omega} = \frac{z}{m}$ gesetzt wird,

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}\right], \qquad (\text{für } m=\infty).$$

Diese Gleichung hat den Sinn, dass die Exponentialgrösse als Grenzwerth einer gewissen Potenz angesehen werden kann; sie eignet sich daher sehr gut zur allgemeinen Definition der Exponentialgrösse, weil man nach den vorigen Untersuchungen für jeden Fall die Bedeutung der Potenz kennt. Wir definiren demnach e^{x+iy} durch die Gleichung

1) $$e^{x+iy} = Lim\left[\left(1+\frac{x+iy}{m}\right)^{m}\right], \qquad (\text{für } m=\infty)$$

und setzen der Einfachheit wegen m als ganze und positive Zahl voraus.

Um den angedeuteten Grenzenübergang auszuführen, bringen wir zunächst die Basis der Potenz auf die Normalform, nämlich

2) $$1+\frac{x+iy}{m} = r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

woraus sich ergiebt

$$r = \left[1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad tang\,\theta = \frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}};$$

setzen wir ferner

$$arctan \frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}} = \vartheta,$$

so folgt aus der, für $tang\,\theta$ angegebenen Gleichung

$$\theta = \vartheta + k\pi,$$

wo k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Gleichung 2) lautet jetzt

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r[cos(\vartheta + k\pi) + i\,sin(\vartheta + k\pi)];$$

für $x = 0$ und $y = 0$ wird $r = 1$, $\vartheta = 0$, mithin

$$1 = cos\,k\pi + i\,sin\,k\pi = cos\,k\pi,$$

woraus hervorgeht, dass k eine gerade Zahl sein muss. Man hat desswegen einfacher

$$1 + \frac{x + iy}{m} = r(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$$

und nach dem Moivre'schen Satze

3) $$e^{x+iy} = Lim\left\{r^m(cos\,m\vartheta + i\,sin\,m\vartheta)\right\}.$$

Darin ist

$$r^m = \left(1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m},$$

und, wenn

$$\frac{2x}{m} + \frac{x^2 + y^2}{m^2} = \frac{1}{\mu}$$

gesetzt wird, so stellt sich r^m unter folgende Form:

$$r^m = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\mu}}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{x + \frac{x^2 + y^2}{2m}}.$$

Bei unendlich wachsenden m convergirt $\frac{1}{\mu}$ gegen die Null, mit

hin wird μ unendlich gross, und die vorstehende Gleichung zeigt dann, dass r^m den Ausdruck e^x zur Grenze hat.

Was ferner $m\vartheta$ anbelangt, so ist identisch

$$m\vartheta = \frac{\vartheta}{tang\,\vartheta} \cdot m\,tang\,\vartheta = \frac{cos\,\vartheta}{\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}} \cdot \frac{y}{1+\frac{x}{m}};$$

bei unendlich wachsenden m convergirt ϑ gegen die Null, $\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}$ gegen die Einheit, folglich $m\vartheta$ gegen den Werth y. Nach diesen Bemerkungen zusammen wird die Gleichung 3) zu

4) $$e^{x+iy} = e^x(cos\,y + i\,sin\,y).$$

Fast genau dieselben Schlüsse sind auf die etwas allgemeinere Exponentialgrösse a^z anwendbar. Bei reellen z ist

$$a^z = e^{z\,la} = Lim\left[\left(1+\frac{z\,la}{m}\right)^m\right],$$

und wenn man diese Gleichung als Definition für den Fall $z = x + iy$ beibehält, so findet man ohne Mühe

5) $$a^{x+iy} = a^x[cos(y\,la) + i\,sin(y\,la)].$$

Um zu entscheiden, ob die Fundamentaleigenschaft der Exponentialgrösse, nämlich die Gleichung $a^z \cdot a^\zeta = a^{z+\zeta}$, auch bei complexen z und ζ richtig bleibt, multipliciren wir die Gleichung 5) mit

$$a^{\xi+i\eta} = a^\xi[cos(\eta\,la) + i\,sin(\eta\,la)]$$

und benutzen rechter Hand den Satz

$$r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta).r_1(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1) = r\,r_1[cos(\theta+\theta_1) + i\,sin(\theta+\theta_1)];$$

das Resultat ist

$$a^{x+iy} \cdot a^{\xi+i\eta} = a^{x+\xi}\{cos[(y+\eta)\,la] + i\,sin[(y+\eta)\,la]\}$$
$$= a^{(x+\xi)+i(y+\eta)}$$

und es erhellt hieraus, dass jene Eigenschaft in der That für complexe Exponenten gilt. Alle übrigen Eigenschaften der Exponentialgrösse, wie z. B. $(a^z)^k = a^{kz}$, sind Folgerungen der erwähnten Eigenschaft und bleiben daher gleichfalls ungestört.

Eine brauchbare Anwendung der obigen Theoreme ist folgende. In Formel 4) setzen wir $x = 0$, das eine Mal $y = u$, das andere Mal $y = -u$, und haben dann

$$e^{iu} = cos\,u + i\,sin\,u\,, \quad e^{-iu} = cos\,u - i\,sin\,u,$$

mithin durch Addition und Subtraction

6) $$2\,cos\,u = e^{iu} + e^{-iu}, \quad 2\,i\,sin\,u = e^{iu} - e^{-iu}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn man beiderseits auf

die $m$te Potenz erhebt und rechter Hand den binomischen Satz für ganze positive m anwendet,

7) $$2^m \cos^m u = (m)_0 e^{imu} + (m)_1 e^{i(m-2)u} + (m)_2 e^{i(m-4)u} + \cdots$$

8) $$2^m i^m \sin^m u = (m)_0 e^{imu} - (m)_1 e^{i(m-2)u} + (m)_2 e^{i(m-4)u} - \cdots$$

Hier kann man jede Exponentialgrösse wieder in Cosinus und Sinus umsetzen und nachher die reellen und imaginären Theile auf beiden Seiten vergleichen. Aus Nro. 7) erhält man so

$$2^m \cos^m u = (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots$$

Nicht überflüssig ist es, die Fälle eines geraden und eines ungeraden m zu unterscheiden. Bei geraden m giebt es einen mittelsten Binomialcoefficienten $(m)_{\frac{1}{2}m}$ und jeder andere Coefficient kommt zweimal vor; daher lassen sich die mit gleichen Coefficienten versehenen Summanden vereinigen, was nach beiderseitiger Division mit 2 zu folgender Gleichung führt:

9) $$2^{m-1} \cos^m u = (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots + (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + \tfrac{1}{2}(m)_{\frac{1}{2}m}.$$

Dagegen ergiebt sich für ungerade m:

10) $$2^{m-1} \cos^m u = (m)_0 \cos mu + (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u + \cdots + (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \cos 3u + (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \cos u.$$

Die Gleichung 8) gestattet eine ganz ähnliche Behandlung, und zwar findet man bei geraden m:

11) $$(-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} \sin^m u = (m)_0 \cos mu - (m)_1 \cos(m-2)u + (m)_2 \cos(m-4)u - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} (m)_{\frac{1}{2}m-1} \cos 2u + (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}(m)_{\frac{1}{2}m},$$

dagegen bei ungeraden m:

12) $$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} 2^{m-1} \sin^m u = (m)_0 \sin mu - (m)_1 \sin(m-2)u + (m)_2 \sin(m-4)u - \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)} (m)_{\frac{1}{2}(m-3)} \sin 3u + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} (m)_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin u.$$

Die hier entwickelten vier Gleichungen bilden gewissermaassen die Umkehrungen der beiden Gleichungen 1) und 2) in §. 54.

§. 56.

Die Logarithmen complexer Zahlen.

Unter dem allgemeinen Logarithmus einer Zahl ξ verstehen wir jede reelle oder complexe Grösse z, welcher die Eigenschaft $e^z = \xi$ zukommt. Bezeichnen wir diesen allgemeinen Logarithmus von ξ mit $L\xi$ und setzen

1) $$L(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig noch unbekannt sind, so muss umgekehrt

$$e^{x+iy} = \xi + i\eta$$

oder

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \xi + i\eta$$

sein. Die beiden hieraus folgenden Gleichungen

2) $$e^x \cos y = \xi, \qquad e^x \sin y = \eta$$

liefern erstens

3) $$e^x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad x = \tfrac{1}{2} l(x^2 + y^2),$$

und zwar nehmen wir das Wurzelzeichen im absoluten Sinne, weil e^x bei reellen x nicht negativ sein kann. Die Gleichungen 2) werden durch Substitution des Betrages von e^x zu den folgenden

4) $$\cos y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad \sin y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

5) $$\tan y = \frac{\eta}{\xi}, \qquad y = \arctan \frac{\eta}{\xi} \pm m\pi,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die sich etwas näher bestimmen lässt, wenn man die Fälle eines positiven und eines negativen ξ unterscheidet. Für $\eta = 0$ wird nämlich $y = \pm m\pi$ und nach Nro. 4) $\cos y = +1$ oder $\cos y = -1$, je nachdem ξ positiv oder negativ ist; hieraus geht hervor, dass im ersten Falle m eine gerade, im zweiten Falle eine ungerade Zahl sein muss. Bezeichnet k irgend eine positive ganze Zahl, so haben wir vermöge der Werthe von x und y folgende Formeln: für ein positives ξ:

6) $$L(\xi + i\eta) = \tfrac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[\arctan \frac{\eta}{\xi} \pm 2k\pi\right],$$

dagegen für ein negatives ξ:

7) $L(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\left[arctan\frac{\eta}{\xi} \pm (2k+1)\pi\right]$.

In dem sehr einfachen Falle $\xi = \pm 1$ und $\eta = 0$ erhält man hieraus

8) $L(+1) = \pm 2k\pi i, \qquad L(-1) = \pm (2k+1)\pi i,$

mithin kann bei positiven ξ

9) $L(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\,arctan\frac{\eta}{\xi} + L(+1),$

und bei negativen

10) $L(\xi + i\eta) = \frac{1}{2} l(\xi^2 + \eta^2) + i\,arctan\frac{\eta}{\xi} + L(-1)$

gesetzt werden. Die unendliche Vieldeutigkeit der Logarithmen wird übrigens nicht überraschen, wenn man sich erinnert, dass

$$l\zeta = Lim\left[n\left(\sqrt[n]{\zeta} - 1\right)\right], \qquad (\text{für } n = \infty)$$

ist und dass $\sqrt[n]{\zeta}$, den Untersuchungen des §. 54 zufolge, n verschiedene Werthe besitzt.

Aus der Gleichung

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

ergiebt sich bekanntlich die Haupteigenschaft der Logarithmen

$$L(\zeta_1 \zeta_2) = L\zeta_1 + L\zeta_2;$$

jene Relation besteht, wie in §. 55 gezeigt wurde, auch bei complexen z_1 und z_2, mithin gilt die letztere Eigenschaft gleichfalls bei complexen ζ_1 und ζ_2. Eine Anwendung des Satzes besteht darin, dass man die Werthe von $L(\xi + i\eta)$ und $L(\xi - i\eta)$ nach Formel 7) oder nach Formel 8) entwickelt und die beiden erhaltenen Gleichungen von einander abzieht; man findet so

11) $L\left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right) = 2i\left\{arctan\frac{\eta}{\xi} \pm 2h\pi\right\},$

wo h eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

§. 57.

Die goniometrischen und cyclometrischen Functionen mit complexen Variabelen.

I. Die in §. 55 Nro. 6) entwickelten Gleichungen

$$cos\,u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \qquad sin\,u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

wollen wir als die allgemeinen analytischen Definitionen von $\cos u$ und $\sin u$ beibehalten; es ist dann

$$\cos(iv) = \frac{e^{-v} + e^{+v}}{2} = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2},$$

$$\sin(iv) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = i\frac{e^{v} - e^{-v}}{2},$$

und überhaupt bei complexen $u = x + iy$

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{+y-ix}}{2},$$

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{+y-ix}}{2i}$$

oder, wenn man e^{+ix} sowie e^{-ix} durch $\cos x$ und $\sin x$ ausdrückt,

1) $$\cos(x+iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sin x,$$

2) $$\sin(x+iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\cos x.$$

Vermöge der Werthe von $\cos(iy)$ und $\sin(iy)$ kann man dafür schreiben

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy),$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy),$$

woraus hervorgeht, dass die bekannten Formeln für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ auch bei imaginären β richtig bleiben. Die Gleichungen 1) und 2) liefern ferner

$$\cos^2(x+iy) + \sin^2(x+iy)$$
$$= \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 = 1;$$

die Relation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ besteht daher auch bei complexen z.

Für die übrigen goniometrischen Functionen behalten wir die gewöhnlichen Definitionen

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ u. s. w.}$$

ungeändert bei. Hiernach ist z. B.

$$\tan(x+iy) = \frac{(e^{y} + e^{-y})\sin x + i(e^{y} - e^{-y})\cos x}{(e^{y} + e^{-y})\cos x - i(e^{y} - e^{-y})\sin x},$$

oder, wenn man den Nenner durch Multiplication mit

$$(e^{y} + e^{-y})\cos x + i(e^{y} - e^{-y})\sin x$$

reell macht,

3) $$tan(x+iy) = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + 2\cos 2x + e^{-2y}}.$$

Auf gleiche Weise lassen sich alle übrigen goniometrischen Functionen des complexen Bogens $x + iy$ auf die Form $\varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ bringen.

II. a. Unter dem Symbole $Arcsin\,\xi$ verstehen wir im Folgenden jede reelle oder complexe Grösse z, welcher die Eigenschaft $sin\,z = \xi$ zukommt. Hiernach gilt für ein reelles ξ, dessen absoluter Werth die Einheit nicht übersteigt, die Formel

4) $$Arcsin\,\xi = m\pi \pm arcsin\,\xi, \quad (\xi^2 \leqq 1);$$

dabei ist m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, und es entspricht das obere Vorzeichen einem geraden, das untere einem ungeraden m.

Setzt man allgemeiner

5) $$Arcsin\,(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo x und y vorläufig unbekannt sind, so folgt umgekehrt

$$sin\,(x + iy) = \xi + i\eta,$$

d. i. nach Nro. 2)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x = \xi + i\eta,$$

mithin dienen zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x = \xi, \qquad \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x = \eta.$$

Die Auflösung derselben geschieht am besten auf die Weise, dass man die Quotienten

6) $$\frac{\xi}{\sin x} = u, \qquad \frac{\eta}{\cos x} = v$$

als neue Unbekannte betrachtet, wodurch die drei Gleichungen entstehen

7) $$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = u, \qquad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = v,$$

8) $$\left(\frac{\xi}{u}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{v}\right)^2 = 1.$$

Aus Nro. 7) erhält man

9) $$e^y = u + v, \qquad e^{-y} = u - v,$$
$$1 = u^2 - v^2,$$

und durch Combination der letzten Gleichung mit Nro. 8)

$$u^2 = \tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 + 1 \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\,\xi^2}\right],$$
$$v^2 = \tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 - 1 \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\,\eta^2}\right],$$

wobei gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind. Da v reell, mithin v^2 positiv sein muss, so können die unteren Zeichen nicht gebraucht werden. Zur Abkürzung sei noch, alle Wurzelgrössen im absoluten Sinne verstanden,

10) $$\Xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 + 1 + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\,\xi^2}\right]},$$

11) $$\Upsilon = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\xi^2 + \eta^2 - 1 + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\,\eta^2}\right]};$$

die Werthe von u und v sind dann

$$u = \pm\,\Xi, \qquad v = \pm\,\Upsilon.$$

Beachtet man noch, dass zufolge von Nro. 7) nur positive Werthe von u existiren können, so bleibt für u nur der Werth $u = \Xi$ zulässig. Nach Nro. 6) ist nun

$$\sin x = \frac{\xi}{\Xi}, \quad \text{mithin} \quad x = Arcsin\,\frac{\xi}{\Xi}$$

oder

$$x = m\,\pi \pm arcsin\,\frac{\xi}{\Xi}.$$

Ferner hat man nach Nro. 9)

$$y = l\,(\Xi \pm \Upsilon),$$

mithin als imaginären Theil

$$iy = il\,(\Xi \pm \Upsilon).$$

Da $\Xi^2 - \Upsilon^2 = u^2 - v^2 = 1$ ist, so wird

$$il\,(\Xi - \Upsilon) = il\left(\frac{1}{\Xi + \Upsilon}\right) = -\,il\,(\Xi + \Upsilon);$$

eine Aenderung des Vorzeichens von Υ läuft demnach auf eine Vertauschung von $+\,i$ mit $-\,i$ hinaus, und da letztere ohnehin erlaubt ist, so braucht man das negative Vorzeichen von Υ nicht zu beachten. Demnach gilt folgende Formel

12) $$Arcsin\,(\xi + i\,\eta) = m\,\pi \pm arcsin\,\frac{\xi}{\Xi} + il\,(\Xi + \Upsilon),$$

worin das obere Vorzeichen einem geraden, das untern einem ungeraden m entspricht, und rechter Hand i sowohl positiv als negativ genommen werden darf.

In dem speciellen Falle $\eta = 0$ muss unterschieden werden, ob $\xi^2 \leqq 1$ oder $\xi^2 > 1$ ist. Für $\xi^2 \leqq 1$ hat man

$$\sqrt{\xi^4 - 2\,\xi^2 + 1} = 1 - \xi^2,$$

mithin $\Xi = 1$, $\Upsilon = 0$,

$$Arcsin\ \xi = m\pi \pm arcsin\ \xi, \qquad \xi^2 \leqq 1,$$

was mit Nro. 4) übereinstimmt. Für $\xi^2 > 1$ wird

$$\sqrt{\xi^4 - 2\xi^2 + 1} = \xi^2 - 1,$$

mithin $\Xi = \sqrt{\xi^2}$, $\Upsilon = \sqrt{\xi^2 - 1}$ und

13) $$Arcsin\ \xi = m\pi \pm arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}} + il\,(\sqrt{\xi^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}), \quad \xi^2 > 1,$$

wobei $\sqrt{\xi^2}$ im absoluten Sinne zu nehmen ist. Die Gleichung 13) wird nicht überraschen, wenn man beachtet, dass einem die Einheit übersteigenden Sinus kein reeller Bogen entsprechen kann.

Es sei zweitens $\xi = 0$; man findet in diesem Falle

14) $$Arcsin\ (i\eta) = m\pi + il\,(\sqrt{\eta^2} + \sqrt{\eta^2 + 1}),$$

wobei $\sqrt{\eta^2}$ im absoluten Sinne zu nehmen ist.

Bezeichnet $arcsin\ (\xi + i\eta)$ denjenigen Werth von $Arcsin\ (\xi + i\eta)$, welcher dem einfachsten Falle $m = 0$ entspricht, so ist

$$arcsin\ (\xi + i\eta) = arcsin \frac{\xi}{\Xi} + il\,(\Xi + \Upsilon),$$

mithin durch Vergleichung mit Nro. 12) und unter Beachtung des willkürlichen Vorzeichens von i

$$Arcsin\ (\xi + i\eta) = m\pi \pm arcsin\ (\xi + i\eta);$$

man ersieht hieraus, dass die Formel 4) auch dann richtig bleibt, wenn an die Stelle der dortigen reellen Variabelen eine complexe Veränderliche gesetzt wird.

b. Versteht man unter $Arccos\ \xi$ jede reelle oder complexe Zahl z, welche die Eigenschaft $cos\ z = \xi$ besitzt, so kann man die Werthe von $Arccos\ (\xi + i\eta)$ nach der in a. benutzten Methode leicht entwickeln. Die specielle Ausführung mag unterbleiben, da sie keinerlei Besonderheiten darbietet.

c. Dem Bisherigen analog bezeichne $Arctan\ \xi$ jede reelle oder complexe Zahl z, welcher die Eigenschaft $tan\ z = \xi$ zukommt. Hiernach gilt für ein reelles ξ die Formel

15) $$Arctan\ \xi = m\pi + arctan\ \xi,$$

worin m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Setzt man allgemeiner

16) $$Arctan\ (\xi + i\eta) = x + iy,$$

so folgt umgekehrt

$$tan\ (x + iy) = \xi + i\eta,$$

oder vermöge der Werthe von $sin\,(x + iy)$ und $cos\,(x + iy)$

$$\frac{(e^y + e^{-y})\,sin\,x + i\,(e^y - e^{-y})\,cos\,x}{(e^y + e^{-y})\,cos\,x - i\,(e^y - e^{-y})\,sin\,x} = \xi + i\eta.$$

Zur Abkürzung sei hier

17) $$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = Q,$$

statt der vorigen Gleichung lässt sich dann die folgende schreiben

$$\frac{tan\,x + iQ}{1 - iQ\,tan\,x} = \xi + i\eta,$$

und wenn man nach Wegschaffung des Bruches die beiderseitigen reellen und imaginären Theile vergleicht, so erhält man die beiden Gleichungen

$$tan\,x = \xi + \eta\,Q\,tan\,x, \qquad Q = \eta - \xi\,Q\,tan\,x.$$

Die erste Gleichung liefert

18) $$tan\,x = \frac{\xi}{1 - \eta\,Q};$$

durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich die zweite Gleichung in

$$\eta\,Q^2 - (\xi^2 + \eta^2 + 1)\,Q = -\eta,$$

woraus folgt

$$Q = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1 \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2}}{2\eta}.$$

Wegen der Realität des y muss nach Nro. 17) der absolute Werth von Q ein echter Bruch sein, es kann deshalb nur

$$Q = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1 - \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2}}{2\eta}$$

genommen werden. Die Formeln 18) und 17) liefern ferner

$$x = Arctan\,\frac{\xi}{1 - \eta\,Q} = m\pi + arctan\,\frac{\xi}{1 - \eta\,Q},$$

$$y = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1 + Q}{1 - Q}\right),$$

mithin ist zusammen

$$Arctan\,(\xi + i\eta) = m\pi + arctan\,\frac{\xi}{1 - \eta\,Q} + \frac{i}{2}\,l\left(\frac{1 + Q}{1 - Q}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

19) $$\Omega = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 + 4\xi^2} - (\xi^2 + \eta^2 - 1)\right\},$$

so wird

$$Q = \frac{1 - \Omega}{\eta},$$

und man erhält

20) $$Arctan\,(\xi + i\eta) = m\pi + arctan\,\frac{\xi}{\Omega} + \frac{i}{2}\,l\left(\frac{\eta + 1 - \Omega}{\eta - 1 + \Omega}\right).$$

In dem speciellen Falle $\xi = 0$ wird $\Omega = 1 - \eta^2$ oder $\Omega = 0$, je nachdem η^2 weniger oder mehr als die Einheit beträgt; daher ist

$$Arctan\,(i\eta) = m\pi + \frac{i}{2}\,l\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta}\right), \qquad \eta^2 < 1,$$

$$Arctan\,(i\eta) = m\pi + \frac{i}{2}\,l\left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1}\right), \qquad \eta^2 > 1,$$

und für $\eta = 1$

$$Arctan\,i = m\pi + i\infty.$$

Versteht man unter $arctan\,(\xi + i\eta)$ den besonderen Werth, welchen $Arctan\,(\xi + i\eta)$ in dem einfachsten Falle $m = 0$ annimmt, so hat man

$$arctan\,(\xi + i\eta) = arctan\,\frac{\xi}{\Omega} + \frac{i}{2}\,l\left(\frac{\eta + 1 - \Omega}{\eta - 1 + \Omega}\right),$$

mithin $$Arctan\,(\xi + i\eta) = m\pi + arctan\,(\xi + i\eta).$$

Die Formel 15) gilt demnach für complexe Variabele ebenso wie für reelle Variabele.

§. 58.

Differentiation complexer Ausdrücke.

Den vorigen Untersuchungen zufolge kann eine Function, welche ausser der Variabelen z noch die imaginäre Einheit i enthält, auf die Normalform

1) $$f(z, i) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

gebracht werden, dann lässt sich aber auch eine bündige Erklärung über den Differentialquotienten von $f(z, i)$ geben. Unter $f'(z, i)$ versteht man nämlich den Ausdruck $\varphi'(z) + i\psi'(z)$ und es ist daher

2) $$\frac{df(z, i)}{dz} = \frac{d\varphi(z)}{dz} + i\frac{d\psi(z)}{dz}.$$

Dieser Definition folgend wollen wir die Differentialquotienten der einfachen Functionen complexer Variabelen aufsuchen.

Die Potenz. Setzen wir nach §. 53

$$(x + iy)^\mu = [r\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^\mu = r^\mu \cos\mu\theta + ir^\mu \sin\mu\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tan\,\theta = \frac{y}{x},$$

so erhalten wir durch Differentiation in Beziehung auf x

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = -\mu r^\mu \sin\mu\theta \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\cos\mu\theta\frac{\partial r}{\partial x} + i\left[\mu r^\mu\cos\mu\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu r^{\mu-1}\sin\mu\theta\frac{\partial r}{\partial x}\right];$$

es ist aber

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = +\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\cos\theta,$$

mithin nach Substitution dieser Werthe und gehöriger Zusammenziehung

$$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu r^{\mu-1}\cos(\mu-1)\theta + i\mu r^{\mu-1}\sin(\mu-1)\theta = \mu r^{\mu-1}[\cos(\mu-1)\theta + i\sin(\mu-1)\theta]$$

d. h.

3) $$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial x} = \mu(x+iy)^{\mu-1}.$$

Durch eine gleich einfache Rechnung findet man

4) $$\frac{\partial[(x+iy)^\mu]}{\partial y} = i\mu(x+iy)^{\mu-1},$$

und nun folgt aus den Formeln 3) und 4), dass die Differentiation einer Potenz mit complexer Basis ebenso auszuführen ist, als wenn i ein reeller Coefficient wäre.

Die Exponentialgrösse. Durch Differentiation der Gleichung

$$e^{x+iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y$$

erhält man augenblicklich

5) $$\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^{x+iy},$$

6) $$\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial y} = -e^x\sin y + ie^x\cos y = ie^{x+iy};$$

wie man sieht, bleibt auch hier die Differentiationsregel ungestört.

Der Logarithmus. Die Formeln 6) und 7) in §. 56 können in die folgende zusammengezogen werden

$$L(\xi+i\eta) = \tfrac{1}{2}l(\xi^2+\eta^2) + i\left(\arctan\frac{\eta}{\xi} + c\right),$$

wo c eine von ξ und η unabhängige Grösse bezeichnet; daher ist

7) $$\frac{\partial L(\xi+i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2}$$
$$= \frac{1}{\xi+i\eta},$$

8) $$\frac{\partial L(\xi+i\eta)}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} + i\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} = i\frac{\xi - i\eta}{\xi^2+\eta^2}$$
$$= i\frac{1}{\xi+i\eta}.$$

Auch hier geschieht die Differentiation ebenso, als wenn i reell wäre.

Die trigonometrischen Functionen. Aus der Gleichung

$$sin(x+iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2} sin\, x + i\frac{e^y-e^{-y}}{2} cos\, x$$

erhält man

9) $$\frac{\partial sin(x+iy)}{\partial x} = \frac{e^y+e^{-y}}{2} cos\, x - i\frac{e^y-e^{-y}}{2} sin\, x$$
$$= cos(x+iy),$$

10) $$\frac{\partial sin(x+iy)}{\partial y} = \frac{e^y-e^{-y}}{2} sin\, x + i\frac{e^y+e^{-y}}{2} cos\, x$$
$$= i\, cos(x+iy).$$

Für die übrigen trigonometrischen Functionen ist ebenso leicht nachzuweisen, dass die gewöhnlichen Differentiationsregeln ungeändert bleiben.

Die cyclometrischen Functionen. Setzen wir, wie in §. 57, Nro. 4)

$$Arcsin(\xi+i\eta) = x+iy,$$

wobei zwischen x und y die Gleichungen

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} sin\, x = \xi, \quad \frac{e^y-e^{-y}}{2} cos\, x = \eta$$

stattfinden, so haben wir durch Differentiation in Beziehung auf ξ folgende drei Gleichungen

11) $$\frac{\partial Arcsin(\xi+i\eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} cos\, x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{e^y-e^{-y}}{2} sin\, x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 1,$$

$$-\frac{e^y-e^{-y}}{2} sin\, x \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{e^y+e^{-y}}{2} cos\, x \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x}{[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x]^2 + [\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x]^2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x}{[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x]^2 + [\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x]^2};$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichung 11) und berücksichtigt die Relation

$$\frac{p + iq}{p^2 + q^2} = \frac{1}{p - iq},$$

so gelangt man zu der Formel

$$\frac{\partial \mathit{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - i\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos(x + iy)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x + iy)}}$$

oder

12) $$\frac{\partial \mathit{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\xi + i\eta)^2}}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet sich

13) $$\frac{\partial \mathit{Arcsin}(\xi + i\eta)}{\partial \eta} = i\frac{1}{\sqrt{1 - (\xi + i\eta)^2}};$$

es gilt daher die gewöhnliche Regel zur Differentiation des *arcus sinus* auch bei complexen Variabelen. Für die übrigen cyclometrischen Functionen gestaltet sich die Sache ebenso.

Durch die Zulassung der Differentialquotienten complexer Ausdrücke erreicht man häufig den Vortheil, verschiedene Differentialquotienten unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu bringen. So sind z. B. die Gleichungen

$$d\left[\tfrac{1}{2} l\left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right)\right] = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} dx,$$

$$d \arctan \frac{\beta x}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} dx$$

nicht wesentlich von einander verschieden; setzt man nämlich in der ersten $i\beta$ für β, so wird

$$d\left[\tfrac{1}{2} l\left(\frac{\alpha + i\beta x}{\alpha - i\beta x}\right)\right] = i\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} dx$$

d. i. nach Formel 11) in §. 56

$$i\,d\left(arctan\frac{\beta x}{\alpha}\pm 2h\pi\right)=i\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2x^2}dx,$$

was mit der zweiten Gleichung übereinkommt.

Dass der Gebrauch complexer Zahlen auch bei der Entwickelung höherer Differentialquotienten von wesentlichem Nutzen sein kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x-i\alpha}-\frac{1}{\beta x+i\alpha}\right)$$

erhält man durch m-malige Differentiation in Beziehung auf x

$$D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)=\frac{(-1)^m1.2...m\beta^m}{2i\alpha}\left\{\frac{1}{(\beta x-i\alpha)^{m+1}}-\frac{1}{(\beta x+i\alpha)^{m+1}}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^m1.2...m\beta^m}{2i}\cdot\frac{(\beta x+i\alpha)^{m+1}-(\beta x-i\alpha)^{m+1}}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{m+1}}.$$

Um die imaginären Ausdrücke wieder wegzuschaffen, setzen wir

$$\beta x\pm i\alpha=r(cos\,\theta\pm i\,sin\,\theta)$$

$$r=\sqrt{\beta^2x^2+\alpha^2},\qquad \theta=arctan\frac{\alpha}{\beta x};$$

es wird dann

$$(\beta x+i\alpha)^{m+1}-(\beta x-i\alpha)^{m+1}$$

$$=r^{m+1}[cos(m+1)\theta+i\,sin(m+1)\theta]$$

$$-r^{m+1}[cos(m+1)\theta-i\,sin(m+1)\theta]$$

$$=2ir^{m+1}sin(m+1)\theta=2i(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}sin\left[(m+1)arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right]$$

mithin

$$14)\quad D^m\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)=(-1)^m1.2.3...m\beta^m\frac{sin\left[(m+1)\,arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta x-i\alpha}+\frac{1}{\beta x+i\alpha}\right)$$

erhält man nach derselben Methode

$$15)\quad D^m\left(\frac{\beta x}{\alpha^2+\beta^2x^2}\right)=(-1)^m1.2..3..m\beta^m\frac{cos\left[(m+1)\,arctan\frac{\alpha}{\beta x}\right]}{(\alpha^2+\beta^2x^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Setzt man in der Formel 14) $\alpha = \beta = 1$, $m = n - 1$ und berücksichtigt, dass

$$D^{n-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = D^n \arctan x$$

ist, so kommt man auf dasselbe Resultat zurück, welches in §. 14, Nro. 13) durch ein weit umständlicheres Verfahren gefunden wurde.

§. 59.

Potenzenreihen mit imaginären Variabelen.

Vergleicht man die beiden früher erhaltenen Formeln

1) $$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots\cdots$$

2) $$\arctan y = \tfrac{1}{1}y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \cdots\cdots$$
$$-1 < x < +1, \quad -1 < y < +1,$$

so fällt in die Augen, dass die erste Reihe mit der zweiten identisch werden würde, wenn man ihr den Zeichenwechsel zu verschaffen wüsste. Dies erreicht man durch die Substitution $x = iy$; die linke Seite der Gleichung 1) verwandelt sich dabei in

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right) = i \arctan y,$$

wobei $l\,1$ als eindeutig $= 0$ vorausgesetzt wird; die rechte Seite der Gleichung 1) geht über in

$$i\left(\tfrac{1}{1}y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \cdots\cdots\right),$$

ob aber die Gleichung 1) unter diesen Umständen noch besteht, ist eine andere und zwar nicht überflüssige Frage, weil die Formel 1) nur für reelle x bewiesen wurde. Die Gleichung 2) zeigt nun, dass in der That die Gleichung 1) für $x = iy$ ihre Gültigkeit behält.

Aehnlich verhält es sich mit den Formeln

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\cdots,$$

$$l\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{y}{1} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^5}{5} - \cdots\cdots;$$
$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad -1 \leqq y \leqq +1,$$

deren zweite man auf demselben Wege erhalten kann, der in §. 47 zur Entwickelung der Reihe für $\arcsin x$ eingeschlagen wurde; auch hier lässt sich durch Substitution von $x = iy$ die erste Reihe in die zweite überführen, woraus folgt, dass die Reihe für $\arcsin x$ für ima-

ginäre x richtig bleibt, wenn deren Modulus die Einheit nicht überschreitet.

Behufs einer dritten Anwendung gehen wir von dem leicht beweisbaren Satze aus, dass ein Product von der Form

$$(1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

völlig entwickelt, zu einer Potenzenreihe

$$1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

führt, worin

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdot \cdot \cdot \cdot, \\ C_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \cdot \cdot \cdot \\ &\quad + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \cdot \cdot \cdot \\ &\quad + \alpha_3\alpha_4 + \cdot \cdot \cdot \cdot, \end{aligned}$$

u. s. w.

und überhaupt jeder Coefficient nach einem bekannten combinatorischen Gesetze gebildet ist. Demzufolge hat man z. B.

3) $$\left(1 + \frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{3^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$= 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und für den ersten Coefficienten

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdot \cdot \cdot\right)$$

und nach §. 50, S. 243

$$C_1 = \tfrac{1}{6}.$$

Auch die übrigen Coefficienten sind leicht zu bestimmen; setzt man nämlich $x = -z^2$ und multiplicirt beide Seiten der Gleichung 3) mit z, so erhält man

$$z\left(1 - \frac{z^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$= z - C_1 z^3 + C_2 z^5 - C_3 z^7 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

und hier ist die linke Seite identisch mit $\sin z$ (§. 49 Formel 16), mithin muss die rechte Seite mit der Sinusreihe übereinstimmen, woraus folgt

$$C_1 = \frac{1}{1.2.3}, \quad C_2 = \frac{1}{1.2 \ldots 5}, \quad C_3 = \frac{1}{1.2 \ldots 7}, \text{ etc.}$$

Aus Formel 3) wird jetzt

$$\left(1 + \frac{x}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x}{3^2\pi^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$= 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2 \ldots 5} + \frac{x^3}{1.2 \ldots 7} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und zwar gilt dies für alle reellen x. Setzt man $x = +y^2$ und multiplicirt beiderseits mit y, so geht die Reihe über in

$$y + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2\ldots5} + \frac{y^7}{1.2\ldots7} + \cdots = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

und man hat daher die Gleichung

$$4)\quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = y\left(1 + \frac{y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche zeigt, dass das unendliche Product für $\sin z$ auch in dem Falle richtig bleibt, wo z durch die imaginäre Variabele iy ersetzt wird.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten bei den Werthen

$$\alpha_1 = \frac{4}{1^2\pi^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{4}{3^2\pi^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{4}{5^2\pi^2}, \text{ etc.;}$$

man gelangt nämlich zu der Formel

$$5)\quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \left(1 + \frac{4y^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4y^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots,$$

welche beweist, dass das unendliche Product für $\cos z$ auch im Falle $z = iy$ richtig bleibt.

Auf die Gleichungen 4) und 5) sind die nämlichen Transformationen anwendbar, welche in §. 50 mit den unendlichen Producten für $\sin z$ und $\cos z$ ausgeführt wurden. Nimmt man zuerst die Logarithmen und differenzirt nachher in Beziehung auf y, so erhält man

$$6)\quad \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{y} + \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$7)\quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{2y}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$8)\quad \frac{2}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{y} - \frac{2y}{(1\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} - \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots,$$

$$9)\quad \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + y^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + y^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + y^2} - \cdots;$$

dieselben Resultate ergeben sich aus den Formeln 3), 4), 6) und 7) des §. 50 durch Substitutition von $z = iy$.

Verwandelt man ferner die soeben gefundenen Reihen in Potenzenreihen, so gelangt man zu folgenden Resultaten

10)
$$\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{y} + \frac{2^2 B_1}{1.2} y - \frac{2^4 B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6 B_5}{1.2..6} y^5 - \cdots,$$
$$-\pi < y < +\pi,$$

11)
$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1.2} y - \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1.2..4} y^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1.2...6} y^5 - \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi,$$

12)
$$\frac{2}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{y} - \frac{2(2^1-1)B_1}{1.2} y + \frac{2(2^3-1)B_3}{1.2..4} y^3 - \frac{2(2^5-1)B_5}{1.2...6} y^5 + \cdots,$$
$$-\pi < y < +\pi,$$

13)
$$\frac{2}{e^y + e^{-y}} = 1 - \frac{\tau_2}{1.2} y^2 + \frac{\tau_4}{1.2..4} y^4 - \frac{\tau_6}{1.2..6} y^6 + \cdots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi < y < +\tfrac{1}{2}\pi;$$

darin bedeuten B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen, τ_2, τ_4, τ_6 etc. die Secantencoefficienten.

Man ersieht aus den gefundenen vier Gleichungen, dass die Formeln 29), 30), 31) und 24) in §. 50 auch für $z = iy$ richtig bleiben, wenn y auf dasselbe Intervall wie z beschränkt wird.

Erscheinungen dieser Art veranlassen die allgemeinere Frage, ob es nicht möglich sein würde, das Theorem von Mac-Laurin auf complexe Variabelen auszudehnen, d. h. die Bedingungen zu finden, unter denen die Gleichung

$$f(x+iy) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x+iy) + \frac{f''(0)}{1.2}(x+iy)^2 + \cdots$$

gültig ist; diese Untersuchung werden wir im zweiten Bande erledigen.

Cap. IX.

Die Zerlegung rationaler algebraischer Functionen in Factoren und Partialbrüche.

§. 60.

Der Fundamentalsatz der Lehre von den algebraischen Gleichungen.

Aus der Algebra ist hinreichend bekannt, dass Gleichungen der vier ersten Grade jederzeit ebensoviel reelle oder complexe Wurzeln besitzen, als der Grad der Gleichung Einheiten zählt; es liegt daher die Frage nahe, ob diese Eigenschaft bei jedem höheren Grade gleichfalls stattfindet. Die Theorie der imaginären Zahlen macht eine genaue Discussion des Gegenstandes möglich, welcher wir nur eine Bemerkung vorauszuschicken haben.

Wenn eine Reihe positiver Grössen $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ gegeben ist und die Zahl q grösser als jeder der Quotienten

$$\frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \ldots \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

gewählt wird, so kann man aus den Ungleichungen

$$q > \frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad q > \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}}, \ldots q > \frac{c_n}{c_{n-1}}$$

leicht die folgenden ableiten

$$c_{k+1} < c_k q, \quad c_{k+2} < c_k q^2, \quad c_{k+3} < c_k q^3, \ldots$$

diese führen noch zu

$$\begin{aligned} &c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \ldots + c_n w^n \\ &< c_k w^k (q w + q^2 w^2 + \ldots + q^n w^n), \end{aligned}$$

worin w eine beliebige positive Variabele bezeichnet. Wählt man letztere $< \frac{1}{2q}$, so wird $qw < \frac{1}{2}$ und

$$qw + q^2w^2 + \cdots + q^nw^n$$
$$< \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

wobei die Summe rechter Hand $= 1$ ist. Die nunmehrige Ungleichung

$$c_k w^k > c_{k+1} w^{k+1} + c_{k+2} w^{k+2} + \cdots + c_n w^n$$

enthält folgenden Satz: in der aus positiven Grössen bestehenden Reihe

$$c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots + c_n w^n$$

lässt sich w immer so klein wählen, dass irgend ein Term $c_k w^k$ mehr beträgt als die Summe aller nachherigen Glieder. — Sind die Glieder theils positiv theils negativ, so kann man sie auf ihre absoluten Werthe reduciren und dann bleibt die Schlussweise dieselbe. Man ersieht hieraus, dass bei hinreichend kleinen w das Vorzeichen der Summe

$$c_k w^k + c_{k+1} w^{k+1} + \cdots + c_n w^n$$

mit dem Vorzeichen des ersten Summanden übereinstimmt.

Wir betrachten nun einen Ausdruck von der Form

1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

welchen man eine ganze rationale algebraische Function $n$ten Grades zu nennen pflegt. Setzt man für x die beliebige complexe Zahl $u + iv$, so stellt sich $f(x) = f(u + iv)$ unter die Form $M + iN$, wo M und N ganze rationale Functionen von u und v sind. Die Norm von $M + iN$, d. h. der Ausdruck $M^2 + N^2$, kann, wie leicht zu sehen ist, beliebig gross gemacht werden, wenn man u oder v oder u und v zugleich in's Unendliche wachsen lässt; dagegen kann $M^2 + N^2$ niemals negativ werden, und folglich hat dieser Ausdruck ein Minimum, welches entweder $= 0$ oder > 0 ist. Welcher von diesen Fällen stattfindet, wird die folgende Untersuchung lehren, worin das Minimum der Norm gleich mit $M^2 + N^2$ selber bezeichnet werden soll und $u + iv$ der complexe Werth von x sein möge, für welchen jenes Minimum eintritt.

Es bedeute ϱ eine Wurzel der positiven oder negativen Einheit, w eine beliebige reelle Grösse, und es werde in Nro. 1) $x = u + iv + \varrho w$ gesetzt; man erhält dann einen Ausdruck von der Form

2) $$f(u + iv + \varrho w) = P + iQ,$$

dessen Norm $P^2 + Q^2$ ist. Dieser Ausdruck lässt sich nach Potenzen von ϱw ordnen, indem man $u + iv + \varrho w$ als ein aus $u + iv$

und ϱw bestehendes Binom ansieht und dem entsprechend die Potenzen von $u + iv + \varrho w$ mittelst des binomischen Satzes entwickelt; man gelangt auf diesem Wege zu einer Gleichung folgender Gestalt

$$f(u + iv + \varrho w) = M + iN + (M_1 + iN_1)\varrho w + \cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n,$$

worin M, N die vorige Bedeutung haben, und M_1, N_1, M_2, N_2, $\ldots$ M_n, N_n rationale Functionen von u und v sind. Da möglicher Weise mehrere dieser Ausdrücke verschwinden können, so mögen M_k und N_k die ersten nicht gleichzeitig verschwindenden Functionen bedeuten; es ist dann

3) $$f(u + iv + \varrho w) = M + iN + (M_k + iN_k)\varrho^k w^k + \cdots + (M_n + iN_n)\varrho^n w^n.$$

Für ϱ, welches bisher nicht näher bestimmt wurde, lassen sich vier verschiedene Wahlen treffen, nämlich

$$\varrho = (+1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-1)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (+i)^{\frac{1}{k}}, \quad \varrho = (-i)^{\frac{1}{k}},$$

welchen die Werthe

$$\varrho^k = +1, \quad \varrho^k = -1, \quad \varrho^k = +i, \quad \varrho^k = -i$$

entsprechen; bezeichnet demnach ε eine reelle (positive oder negative) Einheit, so kann einerseits $\varrho^k = \varepsilon$, mithin

$$f(u + iv + \varrho w) = M + \varepsilon M_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon N_k w^k + \cdots),$$

andererseits $\varrho^k = \varepsilon i$, folglich

$$f(u + iv + \varrho w) = M - \varepsilon N_k w^k + \cdots + i(N + \varepsilon M_k w^k + \cdots)$$

gemacht werden. Die Normen dieser Ausdrücke sind für die genannten Fälle

$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(MM_k + NN_k)w^k + \cdots$$
$$P^2 + Q^2 = M^2 + N^2 + 2\varepsilon(NM_k - MN_k)w^k + \cdots,$$

demnach ist es ebensowohl möglich

$$P^2 + Q^2 - (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(MM_k + NN_k)w^k + \cdots$$

als

$$P^2 + Q^2 - (M^2 + N^2) = 2\varepsilon(NM_k - MN_k)w^k + \cdots$$

zu machen. Bei hinreichend kleinen w hat jede der Summen rechter Hand dasselbe Vorzeichen wie das erste Glied, man kann daher jene Summen negativ werden lassen, indem man dem ε das hierzu erforderliche Vorzeichen giebt. Dieses Resultat widerspricht aber der Voraussetzung, dass $M^2 + N^2$, das Minimum der Norm also $P^2 + Q^2$

$-(M^2+N^2)$ positiv sein soll, und dieser Widerspruch hört nur dann auf, wenn gleichzeitig

$$MM_k + NN_k = 0, \qquad NM_k - MN_k = 0$$

ist. Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so folgt

$$(M^2+N^2)(M_k^2+N_k^2) = 0,$$

und da $M_k^2 + N_k^2$ nicht $= 0$ ist, so muss $M^2 + N^2 = 0$, d. h. $M = 0$, $N = 0$, mithin auch $f(u+iv) = 0$ sein. Demnach existirt immer wenigstens ein complexer Werth $x = u+iv$, für welchen die ganze Function $f(x)$ verschwindet.

Bezeichnet r_1 einen complexen Werth der angegebenen Art, so ist $f(r_1) = 0$, mithin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(r_1) \\ &= a_1(x-r_1) + a_2(x^2-r_1^2) + \cdots + a_n(x^n - r_1^n); \end{aligned}$$

jeder auf der rechten Seite vorkommende Parentheseninhalt lässt sich durch $x - r_1$ ohne Rest dividiren, und daher hat man auch

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-r_1)[a_1 + a_2(x+r_1) + a_3(x^2 + xr_1 + r_1^2) + \cdots \\ &\qquad \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + r_1^{n-1})] \\ &= (x-r_1)[a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_1^2 + \cdots + a_n r_1^{n-1} \\ &\qquad + (a_2 + a_3 r_1 + \cdots + a_n r_1^{n-2})x \\ &\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n x^{n-1}] \end{aligned}$$

oder unter Benutzung leicht verständlicher Abkürzungen

$$f(x) = (x-r_1)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}).$$

Der zweite Factor rechter Hand ist eine ganze Function $(n-1)$ten Grades, die wir mit $f_1(x)$ bezeichnen wollen, so dass

$$f(x) = (x-r_1) f_1(x).$$

Von der Function $f_1(x)$ gilt nun wieder der Satz, dass sie für einen gewissen Werth $x = r_2$ verschwinden muss; hieraus folgt durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$f_1(x) = (x-r_2) f_2(x),$$

wo $f_2(x)$ eine ganze Function $(n-2)$ten Grades bedeutet. Auf diesem Wege fortgehend, gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$f_{n-1}(x) = (x-r_n) f_n(x)$$

und darin ist $f_n(x)$ vom Grade $n - n = 0$, d. h. eine Constante C. Durch Substitution von jeder Gleichung in die folgende erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= C(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n), \end{aligned}$$

worin $C = a_n$ sein muss, wie man u. A. auf die Weise erkennt, dass man beide Seiten durch x^n dividirt und nachher x in's Unendliche wachsen lässt. Die Gleichung

4) $$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

zeigt, dass $f(x)$ jedesmal und nur dann verschwindet, wenn x einen der Werthe $r_1, r_2, \ldots r_n$ erhält, d. h. mit anderen Worten: jede algebraische Gleichung $n$ten Grades $[f(x) = 0]$ hat n Wurzeln*).

---

*) Obschon die numerische Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung in die Algebra gehört, wollen wir doch ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der reellen Wurzeln angeben, einerseits, weil dasselbe eine nette Anwendung der Differentialrechnung darbietet, andererseits, weil es für transcendente Gleichungen ebenso passt wie für algebraische.

Um einen reellen Werth von x zu finden, welcher die Gleichung

$$f(x) = 0$$

befriedigt, suche man zunächst zwei Näherungswerthe x_1 und x_2 der Art, dass die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ endlich und stetig bleiben von $x = x_1$ bis $x = x_2$, und dass $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Denkt man sich x_1 und $y_1 = f(x_1)$ sowie x_2 und $y_2 = f(x_2)$ als rechtwinklige Coordinaten zweier auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenachse liegender Curvenpunkte P_1 und P_2, wobei $OM_1 = x_1$, $M_1P_1 = y_1$, $OM_2 = x_2$, $M_2P_2 = y_2$ sein möge, so wird die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, die Abscissenachse zwischen M_1 und M_2 in einem Punkte M schneiden, dessen Abscisse OM das gesuchte x darstellt; auch existirt nur ein solcher Durchschnitt, wenn die Curve von P_1 bis P_2 entweder fortwährend steigt oder fortwährend fällt, d. h. wenn $f'(x)$ innerhalb des Intervalles $x = x_1$ bis $x = x_2$ sein Vorzeichen behält. Setzen wir noch voraus, dass $f''(x)$ innerhalb des genannten Intervalles gleichfalls keinen Zeichenwechsel erleide, so sind hinsichtlich des Verlaufs der Curve von P_1 bis P_2 nur vier Möglichkeiten vorhanden: die Curve steigt entweder mit convexer Krümmung oder sie fällt mit concaver Krümmung, oder sie fällt convex oder steigt concav. Im ersten und zweiten Falle haben $f'(x)$ und $f''(x)$ gleiche Vorzeichen; wir ziehen dann die Sehne P_1P_2, welche die Abscissenachse im Punkte S schneiden möge, legen an P_2 die Tangente P_2T_2, und haben in beiden Fällen

$$OS < OM < OT_2$$

d. i.

A) $$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} < x < x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Im dritten und vierten Falle sind $f'(x)$ und $f''(x)$ von entgegengesetzten Vorzeichen; wir legen dann an P_1 die Tangente P_1T_1, ziehen wie vorhin die Sehne und erhalten

$$OT_1 < OM < OS$$

d. i.

B) $$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x < \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Wenn die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ reell sind und $x = u + iv$ eine complexe Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, so genügt dieser Gleichung auch der conjugirte complexe Werth $x = u - iv$, wie man aus den über $f(u + iv + \varrho w)$ angestellten Betrachtungen leicht erkennen wird; die complexen Wurzeln kommen daher nur paarweis vor. Ist nun z. B. $r_1 = \lambda + i\mu$ und die conjugirte Wurzel $r_2 = \lambda - i\mu$, so können die beiden complexen Factoren $x - r_1$ und $x - r_2$ zusammengezogen werden und liefern den reellen quadratischen Factor

$$(x - \lambda - i\mu)(x - \lambda + i\mu) = (x - \lambda)^2 + \mu^2.$$

Jede algebraische Function lässt sich daher in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegen.

Als Beispiel möge die Zerlegung von $f(x) = x^n - 1$ dienen, wobei die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ aus §. 54 bekannt sind. Man erhält für gerade n:

5)
$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)\cdots\cdots \cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right),$$

dagegen für ungerade n:

6)
$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)\cdots\cdots \cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right).$$

Durch Auflösung der Gleichung $x^n + 1 = 0$ gelangt man zu analogen Resultaten; es ist nämlich für gerade n:

7)
$$x^n + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\cdots\cdots \cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right),$$

Wenn demnach die anfangs ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind, so liefern, je nachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Formeln A) oder B) neue und zwar genauere Näherungswerthe.

Durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes kann man die Grenzen, zwischen denen die gesuchte Wurzel liegt, beliebig eng ziehen.

und für ungerade n:

8)
$$x^n + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\cdot\cdots\cdot\cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right).$$

Diese vier Sätze gestatten eine geometrische Interpretation, wenn man einen mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kreis in $2n$ gleiche Theile theilt und die Theilpunkte mit einem festen Punkte verbindet, welcher auf dem durch den Nullpunkt der Theilung gehenden Durchmesser um x vom Centrum entfernt liegt.

§. 61.

Die Zerlegung ächt gebrochener Functionen.

Unter einer gebrochenen rationalen algebraischen Function versteht man einen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen sind; sie heisst ächt gebrochen, wenn der Nenner von höherem Grade als der Zähler ist, im Gegenfalle nennt man sie unächt gebrochen. Bei einer Function der letzteren Art kann man mit dem Nenner so lange in den Zähler dividiren, bis ein ächt gebrochener Rest zum Vorschein kommt, d. h. jede unächt gebrochene Function lässt sich in eine ganze und in eine ächt gebrochene Function zerlegen.

Die Summe mehrerer ächt gebrochenen Functionen ist wieder eine ächt gebrochene Function, deren Nenner im Allgemeinen das Product aus den Nennern der Summanden darstellt, z. B.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{5x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^2+1)};$$

man wird durch diese Bemerkung auf die Frage geführt, ob es umgekehrt wohl möglich sein würde, eine gegebene ächt gebrochene Function in einzelne Functionen derselben Art, in sogenannte Partialbrüche, zu zerlegen. Um dies zu untersuchen, denken wir uns vorerst den Nenner $F(x)$ in Factoren zerlegt, etwa

$$F(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

und nehmen $C = 1$, worin keine wesentliche Beschränkung liegt, weil man erforderlichen Falls Zähler und Nenner der gebrochenen

Function durch den Coefficienten der höchsten im Nenner vorkommenden Potenz dividiren kann. Da möglicherweise mehrere der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_n$ gleich sein können, so wollen wir annehmen, es seien vorhanden α Wurzeln jede $= a$, β Wurzeln jede $= b$ u. s. w.; es ist dann

$$1) \qquad F(x) = (x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\,(x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa = n$$

und die Grössen $a, b, c, \ldots k$ sind jetzt sämmtlich verschieden. Der Zähler der gegebenen Function heisse $f(x)$; sein Grad ist $< n$.

Für den Augenblick sei

$$2) \qquad \Phi(x) = (x-b)^\beta\,(x-c)^\gamma \ldots (x-k)^\varkappa,$$

mithin

$$3) \qquad F(x) = (x-a)^\alpha\,\Phi(x),$$

ferner

$$4) \qquad A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}, \qquad f_1(x) = \frac{f(x) - A\Phi(x)}{x-a};$$

es gilt dann, wie durch Substitution der Werthe von A und $f_1(x)$ sogleich geprüft werden kann, die folgende identische Gleichung

$$5) \qquad \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\,\Phi(x)},$$

und daran knüpfen sich zwei wesentliche Bemerkungen. Da $\Phi(x)$ den Factor $x-a$ nicht enthält, so ist $\Phi(a)$ von Null verschieden, mithin A eine endliche bestimmte Grösse. Ferner hat man zufolge des Werthes von A

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \dfrac{f(a)}{\Phi(a)}\,\Phi(x)}{x-a};$$

der Zähler des vorstehenden Bruches ist eine ganze rationale Function von x und verschwindet für $x = a$; eben desswegen lässt sich diese Function ohne Rest durch $x - a$ dividiren und folglich ist der Quotient, d. h. $f_1(x)$ eine ganze Function von x. In der Gleichung 5) liegt demnach der Satz, dass die ursprünglich gegebene ächt gebrochene Function in zwei ächt gebrochene Functionen zerlegt werden kann, von denen die zweite dieselbe Form besitzt wie die Urfunction, während gleichzeitig der Grad ihres Nenners um eine Einheit niedriger ist. Indem man dasselbe Theorem wieder auf die zweite Function rechter Hand anwendet, erhält man

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\Phi(x)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\,\Phi(x)},$$

$$A_1 = \frac{f_1(a)}{\Phi(a)}, \qquad f_2(x) = \frac{f_1(x) - A_1\,\Phi(x)}{x-a};$$

es erhellt augenblicklich, wie dieses Verfahren fortgesetzt werden kann und dass man dabei zu folgender Gleichung gelangen muss:

6) $$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\,\Phi(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_\alpha(x)}{\Phi(x)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Psi(x) = (x-c)^\gamma \ldots\ldots (x-k)^\varkappa,$$

so ist der letzte Bruch in der vorigen Gleichung

$$\frac{f_\alpha(x)}{\Phi(x)} = \frac{f_\alpha(x)}{(x-b)^\beta\,\Psi(x)};$$

mit dieser ächt gebrochenen Function lassen sich wieder dieselben Umwandlungen vornehmen wie in Nro. 6) und indem man dieses Verfahren fortsetzt, gelangt man schliesslich zu folgender Gleichung

7) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots\cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{K}{(x-k)^\varkappa} + \frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}} + \cdots\cdots + \frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}.$$

Nachdem hiermit die Möglichkeit sowie die Form der Zerlegung ächt gebrochener Functionen gezeigt worden ist, kommt es noch auf die Berechnung der constanten Zähler A, A_1, $\ldots$ $A_{\alpha-1}$, B, B_1 etc. an. Diese würden sich zwar bei wirklicher Ausführung der vorhin angedeuteten Operationen unmittelbar finden, doch ist dieses Verfahren so umständlich, dass ein kürzeres wünschenswerth bleibt.

Der nächstliegende Gedanke ist offenbar, allen auf der rechten Seite von Nro. 7) stehenden Grössen den gemeinsamen Nenner $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-k)^\varkappa = F(x)$ zu verschaffen und dann die Zähler zu vergleichen. Die völlige Identität von $f(x)$ und dem rechts zum Vorschein kommenden Zähler ist aber nur möglich, wenn beiderseits

gleich hohe Potenzen von x gleiche Coefficienten besitzen; man erhält damit $\alpha + \beta + \cdots + \varkappa$ Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der eben so viel Unbekannten.

Als Beispiel diene die Zerlegung von

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1$ sind $x = +1$, $x = +1$, $x = -1$, daher ist $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 (x+1)$ und

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{9x^2 - 3x + 8}{(x-1)^2 (x+1)}$$
$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Nach beiderseitiger Multiplication mit $(x-1)^2 (x+1)$ hat man die beiden Zähler

$$9x^2 - 3x + 8$$
$$= (A_1 + B) x^2 + (A - 2B) x + (A - A_1 + B),$$

deren Identität folgende drei Gleichungen liefert

$$A_1 + B = 9, \quad A - 2B = -3, \quad A - A_1 + B = 8;$$

man findet hieraus $A = 7$, $A_1 = 4$, $B = 5$, mithin

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+1}.$$

Bei einer grösseren Anzahl von Partialbrüchen würde auch dieses Verfahren sehr weitläufig werden; wir wollen daher noch andere Methoden zeigen.

§. 62.

Die Zähler der Partialbrüche.

Zunächst mag der einfache Fall betrachtet werden, wo $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = 1$ ist, also der Nenner

1) $$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$$

keine gleichen Factoren enthält; die Gleichung 12) lautet jetzt

2) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k}.$$

Wir bringen dieselbe auf die kurze Form

3) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

wo $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ die Summe aller übrigen Partialbrüche bezeichnet und

$$\Phi(x) = (x-b)\,(x-c)\ldots(x-k),$$

mithin

4) $$F(x) = (x-a)\,\Phi(x)$$

ist. Durch Multiplication der Gleichungen 3) und 4) erhalten wir

$$f(x) = A\Phi(x) + (x-a)\,\varphi(x)$$

und für $x = a$

$$f(a) = A\Phi(a) \text{ oder } A = \frac{f(a)}{\Phi(a)}.$$

Um aus dieser Gleichung, welche mit Nro. 4) des vorigen Paragraphen übereinstimmt, $\Phi(a)$ zu entfernen, differenziren wir die Gleichung 4), wodurch entsteht

$$F'(x) = (x-a)\,\Phi'(x) + \Phi(x),$$

und nehmen auch hier $x = a$; dies giebt

$$F'(a) = \Phi(a),$$

mithin nach dem Vorigen

5) $$A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$$

Für jeden anderen Zähler würde sich die Sache ganz analog gestalten und es ist daher

6) $$B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \qquad C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots \qquad K = \frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6}.$$

Der Nenner desselben verschwindet für $x = -1$, $x = +2$, $x = -3$ und ist daher $= (x+1)\,(x-2)\,(x+3)$; die Zerlegung geschieht demnach in folgender Weise:

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

Hier ist $a = -1$, $b = +2$, $c = -3$,

$$f(x) = x^2-7, \qquad F'(x) = 3x^2+4x-5,$$

$$A = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-6}{-6} = +1,$$

$$B = \frac{f(+2)}{F'(+2)} = \frac{-3}{+15} = -\tfrac{1}{5},$$

$$C = \frac{f(-3)}{F'(-3)} = \frac{+2}{+10} = +\tfrac{1}{5},$$

und daher zerlegt sich der betrachtete Bruch wie folgt

$$\frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Das soeben auseinandergesetzte Verfahren bleibt im Wesentlichen ungeändert, wenn einige oder alle der Wurzeln $a, b, c, \ldots k$ complex sind, denn die vorgenommenen Rechnungsoperationen gelten ganz gleichförmig für reelle und complexe Zahlen. Will man aber den Uebelstand vermeiden, dass auf der rechten Seite der Gleichung 2) imaginäre Grössen vorkommen, so braucht man nur je zwei solche Partialbrüche zu vereinigen, deren Nenner je zwei conjugirte complexe Wurzeln enthalten. Um dies näher zu erläutern, wollen wir vorerst annehmen, die Gleichung $F(x) = 0$ habe nur zwei complexe Wurzeln; diese sind dann einander conjugirt und von den Formen

$$a = p + iq, \qquad b = p - iq.$$

Aus der Gleichung 2) wird jetzt die folgende

$$7)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-p-iq} + \frac{B}{x-p+iq} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k},$$

und darin ist

$$A = \frac{f(p+iq)}{F'(p+iq)}, \qquad B = \frac{f(p-iq)}{F'(p-iq)}.$$

Die vollständige Entwickelung von A führt zu einem Werthe von complexer Form etwa

$$A = M + iN,$$

da sich aber A und B nur in dem Vorzeichen von i unterscheiden, so muss B den conjugirten Werth

$$B = M - iN$$

besitzen. In Nro. 7) lassen sich jetzt die beiden ersten Partialbrüche zusammenziehen; der gemeinschaftliche Nenner wird $(x-p)^2 + q^2$, im Zähler kann man zur Abkürzung

$$2M = P, \qquad -2(Mp + Nq) = Q$$

setzen und erhält dann

$$8)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Px+Q}{(x-p)^2+q^2} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{K}{x-k}.$$

Die beiden, zu conjugirten Wurzeln gehörigen imaginären Partialbrüche liefern also zusammen einen reellen Partialbruch mit quadratischem Nenner. Auf gleiche Weise behandelt man jedes Paar von Partialbrüchen, welches von einem Paare conjugirter Wurzeln herrührt.

Als Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 + x + 5$ sind $x = 2 + i$, $x = 2 - i$, $x = -1$, mithin wird die Zerlegung

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A}{x-2-i} + \frac{B}{x-2+i} + \frac{C}{x+1}.$$

Hier ist

$$a = 2+i, \quad b = 2-i, \quad c = -1,$$

$$f(x) = 7x-3, \quad F'(x) = 3x^2 - 6x + 1,$$

$$A = \frac{f(2+i)}{F'(2+i)} = \frac{+11+7i}{-2+6i} = \tfrac{1}{2} - 2i,$$

$$B = \frac{f(2-i)}{F'(2-i)} = \frac{+11-7i}{-2-6i} = \tfrac{1}{2} + 2i,$$

$$C = \frac{f(-1)}{F'(-1)} = \frac{-10}{+10} = -1,$$

folglich die gesuchte Zerlegung

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{\frac{1}{2}-2i}{x-2-i} + \frac{\frac{1}{2}+2i}{x-2+i} - \frac{1}{x+1}$$

d. i. bei Zusammenziehung der beiden ersten Partialbrüche

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{x+2}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1}.$$

Als zweites Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1},$$

worin m und $n > m-1$ positive ganze Zahlen bedeuten mögen. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{\pi}{n} = \vartheta$, so hat die Gleichung $x^n - 1 = 0$ bei geraden n die beiden reellen Wurzeln

$$x = +1, \qquad x = -1$$

und $n-2$ complexe Wurzeln, welche aus den Formeln

$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$$

dadurch erhalten werden, dass man $h = 2, 4, 6 \ldots n - 2$ nimmt. Nun ist im vorliegenden Falle

$$f(x) = x^{m-1}, \quad F(x) = x^n - 1, \qquad F'(x) = nx^{n-1};$$

die beiden reellen Wurzeln liefern also die Partialbrüche

$$\frac{1}{n}\frac{1}{x-1}, \qquad \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1}.$$

Ferner giebt die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ einen Partialbruch, dessen Zähler ist

$$R = \frac{(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{m-1}}{n(\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)^{n-1}} = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i \sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wobei der Moivre'sche Satz benutzt wurde. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass $n\vartheta = \pi$ und h eine gerade Zahl ist, erhält man einfacher

$$R = \frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{n};$$

die Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ giebt also den Partialbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)}.$$

Der conjugirten Wurzel $x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$ entspricht der conjugirte Partialbruch

$$\frac{1}{n}\frac{\cos hm\vartheta - i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta - i \sin h\vartheta)};$$

beide Partialbrüche zusammen liefern den reellen Bruch

$$10) \qquad \frac{2}{n}\frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x \cos h\vartheta + 1},$$

dessen Zähler sich noch etwas reduciren lässt, was aber späterer Anwendungen wegen unterbleiben möge. Man erhält nun die gesuchte Zerlegung, wenn man die in Nro. 9) angegebenen Brüche nebst den Brüchen summirt, welche aus Nro. 10) für $h = 2, 4, 6, \ldots n - 2$ hervorgehen; unter Benutzung eines Summenzeichens (Σ) ist also für **gerade** n:

$$11) \qquad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^m}{n}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{n}\sum \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x \cos h\vartheta + 1},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots\ldots n - 2.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ folgende

$$x = +1,$$

$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta,$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n - 1;$$

die Rechnung unterscheidet sich jetzt nur dadurch von der vorigen, dass die Wurzel $x = -1$ nebst dem entsprechenden Partialbruch wegfällt; daher ist für ungerade n:

$$12) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{n} \sum \frac{(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta - \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x \cos h\vartheta + 1},$$

$$h = 2, 4, 6, \ldots n - 1.$$

Als letztes Beispiel diene die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x^{m-1}}{x^n + 1};$$

wir unterscheiden dabei wieder gerade und ungerade n. Im ersten Falle hat die Gleichung $x^n + 1 = 0$ nur complexe Wurzeln von den Formen

$$x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta,$$

wo $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und $h = 1, 3, 5, \ldots n - 1$ zu setzen ist. Der Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ entspricht ein Partialbruch mit dem Zähler

$$R = \frac{\cos h(m-n)\vartheta + i \sin h(m-n)\vartheta}{n},$$

wofür man wegen $n\vartheta = \pi$ und wegen des ungeraden h schreiben kann

$$R = -\frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{n}.$$

Die beiden conjugirten Wurzeln liefern daher die conjugirten Partialbrüche

$$-\frac{1}{n} \frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)} \text{ und } -\frac{1}{n} \frac{\cos hm\vartheta - i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta - i \sin h\vartheta)},$$

die sich leicht zusammenziehen lassen. Damit gelangt man bei geraden n zu folgender Zerlegung:

$$13) \quad \frac{x^{m-1}}{x^n + 1} = \frac{2}{n} \sum \frac{-(x - \cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x \cos h\vartheta + 1},$$

$$h = 1, 3, 5, \ldots n - 1.$$

Bei ungeraden n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$:

$$x = -1,$$
$$x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta, \qquad x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta,$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2;$$

die Zerlegung geschieht also wie vorhin, nur kommt noch der Partialbruch hinzu, welcher der reellen Wurzel $x = -1$ entspricht. Man hat daher für ungerade n:

14) $$\frac{x^{m-1}}{x^n+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n}\frac{1}{x+1} + \frac{2}{n}\sum \frac{-(x-\cos h\vartheta)\cos hm\vartheta + \sin h\vartheta \sin hm\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$
$$h = 1, 3, 5, \ldots n-2.$$

§. 63.

Fortsetzung und Schluss.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ nicht sämmtlich $= 1$ sind (Formel 7 in §. 61). Es sei r irgend eine der Grössen $a, b, c, \ldots k$, und es bedeute $\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}$ die Summe aller Partialbrüche, in denen r nicht vorkommt; die Gleichung 7) in §. 61 lässt sich dann folgendermaassen darstellen:

1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{R}{(x-r)^\varrho} + \frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{R_{\varrho-1}}{x-r} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

und zwar ist hier

2) $$F(x) = (x-r)^\varrho\, \Phi(x).$$

Durch Multiplication beider Gleichungen, wobei zur Abkürzung

3) $R + R_1(x-r) + R_2(x-r)^2 + \cdots + R_{\varrho-1}(x-r)^{\varrho-1} = X$

gesetzt werden möge, ergiebt sich

4) $$f(x) = X\Phi(x) + (x-r)^\varrho\, \varphi(x).$$

Diese Gleichung differenziren wir mehrmals nach einander und nehmen in jeder einzelnen Differentialgleichung wie auch in Nro. 12) selbst, $x = r$ was bei X und seinen Differentialquotienten X', X'' etc. durch ein angehangenes r bezeichnet werden möge; wir haben dann folgende Gleichungen:

$$f(r) = X_r\Phi(r),$$
$$f'(r) = X_r\Phi'(r) + X_r'\Phi(r),$$
$$f''(r) = X_r\Phi''(r) + 2X_r'\Phi'(r) + X_r''\Phi(r),$$

u. s. w.

Andererseits ergeben sich aus Nro. 3) folgende Werthe von X_r, X_r', X_r'' etc.

$X_r = R$, $X_r' = 1R_1$, $X_r'' = 1.2R_2$, $X_r''' = 1.2.3R_3$ u. s. w.;

substituirt man dieselben in die vorigen Gleichungen und bezeichnet zur Abkürzung $1.2.3\ldots m$ mit m', so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} f(r) &= R\Phi(r), \\ f'(r) &= R\Phi'(r) + 1'R_1\Phi(r), \\ f''(r) &= R\Phi''(r) + 2.1'R_1\Phi'(r) + 2'R_2\Phi(r), \end{cases}$$

u. s. w.

deren allgemeines Schema ist

$$f^{(m)}(r) = R\Phi^{(m)}(r) + (m)_1\, 1'R_1\Phi^{(m-1)}(r) + (m)_2\, 2'R_2\Phi^{(m-2)}(r) + \cdots.$$

Man kennt hier $\Phi(x)$, mithin auch $\Phi(r)$, $\Phi'(r)$, $\Phi''(r)$ etc.; die Gleichungen 5) enthalten daher nur die Unbekannten R, R_1, R_2 etc., welche der Reihe nach daraus entwickelt werden können.

Als Beispiel diene die Zerlegung

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2\,(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Um zunächst A, A_1, A_2 zu bestimmen, hat man A für $R, r = 0$, und

$$\Phi(x) = (x-1)^2\,(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1,$$
$$\Phi'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \qquad \Phi''(x) = 6x - 2$$

zu setzen, während $f(x)$ immer $= 1$ ist. Die Gleichungen 5) werden jetzt

$$1 = A,$$
$$0 = A(-1) + A_1,$$
$$0 = A(-2) + 2A_1(-1) + 2A_2,$$

und daraus ergeben sich die Werthe

$$A = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 2.$$

Um B und B_1 zu finden, schreibt man in Nro. 5) B statt R, setzt $r = 1$,

$$\Phi(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3,$$
$$\Phi'(x) = 4x^3 + 3x^2,$$

und erhält

$$1 = B.2 \qquad 0 = B.7 + B_1.2,$$

mithin

$$B = \tfrac{1}{2} \qquad B_1 = -\tfrac{7}{4}.$$

Zur Bestimmung von C gehören endlich die Substitutionen $R = C$, $r = -1$,

$$\Phi(x) = x^3(x-1)^2;$$

die erste der Gleichungen 5) liefert dann

$$1 = C(-4) \quad \text{oder} \quad C = -\tfrac{1}{4}.$$

Zufolge dieser Coefficientenwerthe hat man jetzt folgende Zerlegung

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2\,(x+1)}$$
$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Das angegebene Verfahren bleibt der Hauptsache nach ungeändert, wenn zwei oder mehrere der Grössen $a, b, c, \ldots k$ complex ausfallen, nur wird man das Imaginäre wie früher dadurch vermeiden, dass man je zwei Partialbrüche vereinigt, welche conjugirten Wurzeln entsprechen. Ein Beispiel dürfte hinreichen, um diese Modification kennen zu lernen.

Wenn es sich um die Zerlegung des Bruches

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}$$

handelt, so zerfällt man erst $x^2 + 1$ in $(x - i)\,(x + i)$ und setzt dann

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)} = \frac{x+1}{(x-i)^2\,(x+i)^2\,(x-1)}$$
$$= \frac{A}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i} + \frac{C}{x-1}.$$

Die Gleichungen 5) liefern, wenn man $f(x) = x + 1$, A für R, i für r und $\Phi(x) = (x + i)^2\,(x - 1)$ setzt, die Werthe

$$A = \frac{i}{4}, \qquad A_1 = -\frac{1-i}{4}.$$

Zur Bestimmung von B und B_1 ist keine neue Rechnung erforderlich, denn es würde sich diese nur darin von der vorigen unterscheiden, dass überall $-i$ an der Stelle von i und B statt A stände; man hat daher

$$B = -\frac{i}{4}, \qquad B_1 = -\frac{1+i}{4}.$$

Die Substitution $r = 1$, $R = C$, $\Phi(x) = (x^2 + 1)^2$ giebt noch $C = \frac{1}{2}$ und daher ist

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{i}{4}\left[\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{(x+i)^2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1-i}{x-i} + \frac{1+i}{x+i}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1},$$

oder bei Zusammenziehung der conjugirten Partialbrüche

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$= -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}.$$