universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Compendium der höheren Analysis

in zwei Bänden

Schlömilch, Oskar

Braunschweig, 1868

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-5985

Einleitung.

I. Die veränderlichen Grössen und die Functionen.

Aus der elementaren Arithmetik ist hinreichend bekannt, dass zwischen zwei gegebenen Zahlen beliebig viel neue Zahlen eingeschaltet und deren Differenzen beliebig klein gemacht werden können; man darf sich daher an jeder Stelle der Zahlenreihe eine Zahl denken oder, mit anderen Worten, die ganze Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ ist als eine ununterbrochene anzusehen. Demnach kann auch der Uebergang von irgend einer Zahl a zu einer anderen b ohne Unterbrechung, d. h. so erfolgen, dass alle zwischen a und b denkbaren Zahlen getroffen worden sind; ein solcher Uebergang heisst ein stetiger (continuirlicher) und lässt sich passend mit dem Durchlaufen einer geraden Linie ab vergleichen, weil bei dieser Bewegung ebenfalls alle zwischen a und b liegenden Punkte der Geraden getroffen werden. Zufolge dieser Bemerkungen ist es möglich, sich eine veränderliche Zahl x vorzustellen, welche erst den Werth a besass und nachher durch stetigen Uebergang den Werth b erhielt; eine solche Zahl heisst eine continuirliche Variabele und wird gewöhnlich durch einen der letzten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet. Zahlen dagegen, denen man den Charakter stetiger Aenderung nicht beilegen will und welche daher als relativ unveränderlich gelten sollen, nennt man Constanten und bezeichnet sie mit den ersten Buchstaben des Alphabetes.

Sind zwei veränderliche Zahlen x und y durch eine Gleichung verbunden, welche auf der einen Seite y allein enthält, wie z. B.

1) $$y = \frac{(x-a)^2}{2b},$$

so entspricht jedem willkührlich angenommenen Werthe des x ein aus der Gleichung selbst folgender Werth des y, welcher eben desshalb nicht willkührlich ist; in diesem Falle heisst x die unabhängige, y die abhängige Variabele, und um anzudeuten, dass es x ist, wovon y abhängt, nennt man y eine Function von x. Man bezeichnet diess durch eine Gleichung von der Form

$$y = F(x) \text{ oder } y = f(x),\ y = \varphi(x) \text{ u. dgl.},$$

womit also nichts weiter gesagt sein soll, als dass jedem Werthe des x ein bestimmter Werth von y zugehört, gleichgültig, wo letzterer hergekommen ist.

Wenn ferner drei veränderliche Zahlen x, y, z durch eine Gleichung verbunden sind, die auf der einen Seite z allein enthält, wie z. B.

2) $$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b},$$

so hängen die verschiedenen Werthe des z gleichzeitig von denen des x und des y ab; dann heisst z eine Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y und wird im Allgemeinen bezeichnet durch

$$z = F(x, y) \text{ oder } z = f(x, y) \text{ u. s. w.}$$

Auf ganz analoge Weise lassen sich Functionen von drei, vier und überhaupt beliebig viel Variabelen bilden.

Für alle Functionen gilt noch die Bemerkung, dass die unabhängigen Variabelen immer als stetig veränderlich angesehen werden; ob die abhängige Variabele dieselbe Eigenschaft besitzt, entscheidet sich in jedem besonderen Falle durch die individuelle Natur der Function, und bedarf daher einer speciellen Untersuchung (s. Abschnitt III.).

Mit Hülfe der analytischen Geometrie ist es übrigens sehr leicht, sich ein Bild von jeder gegebenen Function zu verschaffen, vorausgesetzt, dass letztere eine oder höchstens zwei unabhängige Variabele enthält; man braucht nur die vorkommenden Variabelen als die Coordinaten eines veränderlichen Punktes, und die zwischen den Variabelen bestehende Gleichung als Gleichung einer Curve oder Fläche anzusehen. So wird z. B. durch die Gleichung 1) eine Parabel ausgedrückt, und überhaupt kann $y = f(x)$ als Gleichung irgend einer ebenen Curve gelten; der Gleichung 2) entspricht ferner ein hyper-

bolisches Paraboloid, allgemeiner ist $z = F(x, y)$ die Gleichung irgend einer Fläche. Bei einer Function von drei oder mehr Variabelen wie z. B. $u = \varphi(x, y, z)$ hört die Möglichkeit einer geometrischen Darstellung auf, weil der Raum nur drei Dimensionen besitzt.

II. Die einfachen Functionen.

Nimmt man mit einer Variabelen x die vier arithmetischen Grundoperationen vor, so entstehen die vier einfachsten Functionen

$$a + x,\ a - x,\ bx,\ \frac{b}{x},$$

die man aber nicht besonders zu unterscheiden pflegt, weil sie in der gemeinschaftlichen Form $a + bx^m$ begriffen sind. Ferner liefert die Potenz zwei verschiedene Functionen, je nachdem die Basis oder der Exponent als variabel angesehen wird; die erste dieser Functionen, nämlich x^μ, führt in der Analysis ausschliesslich den Namen Potenz, während die zweite, a^x, Exponentialgrösse genannt wird. Denkt man sich ferner die Logarithmen als Functionen der Zahlen, so hat man noch die Function ${}^a\!log\, x$, worin das oben angesetzte a die Basis des logarithmischen Systemes bezeichnen soll.

Man weiss ferner aus der Geometrie, dass sich jeder Bogen eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises in Theilen des Halbmessers, d. h. durch eine absolute Zahl ausdrücken lässt; man kann daher auch jede Zahl als Maass eines solchen Kreisbogens ansehen und die goniometrischen Linien desselben aufsuchen. In diesem Sinne hat jede absolute Zahl ihren Sinus, Cosinus u. s. w. z. B.

$$sin\ (1{,}570796\ ..) = sin\ \frac{\pi}{2} = sin\ 90^0 = 1,$$

$$cos\ (1{,}047197\ ..) = cos\ \frac{\pi}{3} = cos\ 60^0 = 0{,}5,$$

$$tan\ 3 = tan\ 171^0\,53'\,14''4 = -\ 0{,}1425467,$$

und es entstehen so die goniometrischen Functionen der Zahl u, nämlich $sin\, u$, $cos\, u$, $tan\, u$, $cot\, u$, $sec\, u$, $csc\, u$.

Umgekehrt kann man auch eine Variabele x als Maass einer trigonometrischen Linie betrachten und den zugehörigen Bogen aufsuchen; hierdurch entstehen die sogenannten cyclometrischen Functionen. Sehen wir z. B. x als die Länge eines Sinus an, so entspricht demselben ein bestimmter, im ersten Quadranten liegender Bogen, welcher mit $arcsin\ x$ bezeichnet und positiv oder negativ

genommen werden möge, je nachdem x positiv oder negativ ist. Nach dieser an keiner Vieldeutigkeit leidenden Bezeichnung ist z. B.

$$\arcsin\left(+\tfrac{1}{2}\right) = +\frac{\pi}{6}, \qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Ebenso bedeutet $\arccos x$ den kleinsten Bogen, welcher x zum Cosinus hat, z. B.

$$\arccos\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = +\frac{\pi}{4}, \qquad \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Ferner ist unter $\arctan x$ derjenige im ersten Quadranten liegende Bogen zu verstehen, welcher x zur Tangente hat, und zwar mit demselben Vorzeichen wie x genommen, z. B.

$$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arctan\left(-1\right) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\arctan\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Dem Vorigen analog kann man noch die Functionen $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$ etc. bilden, doch sind letztere wenig im Gebrauch.

Da in den Lehrbüchern der Trigonometrie keine Rücksicht auf die cyclometrischen Functionen genommen zu werden pflegt, so mögen hier die betreffenden Hauptrelationen folgen.

Ein im ersten Quadranten liegender Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, hat $\sqrt{1-x^2}$ zum Cosinus, daher gilt die Gleichung:

1) $$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}.$$

Das Complement des Bogens $\arcsin x$ hat x zum Cosinus, mithin ist

2) $$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wenn x den Sinus eines Bogens darstellt, so hat derselbe Bogen eine Tangente $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; diess giebt

3) $$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Einer Tangente $= z$ entspricht umgekehrt ein Sinus $= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, d. h.

4) $$\arctan z = \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

wie man auch aus Nr. 4) durch Substitution von $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = z$ er-

hält. Derselbe Bogen, welcher z zur Tangente hat, besitzt eine Cotangente $= \frac{1}{z}$, mithin ist

5) $$arctan\, z = arccot\, \frac{1}{z};$$

das Complement dieses Bogens hat z zur Cotangente, folglich

6) $$arctan\, z + arccot\, z = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Aehnliche Formeln für $arcsec\, x$ und $arccsc\, x$ sind leicht zu entwickeln.

Für zwei im ersten Quadranten liegende Bögen u und v sei

$$\begin{aligned} sin\, u &= x, \quad \text{mithin } u = arcsin\, x, \\ sin\, v &= y, \quad \text{„ } v = arcsin\, y, \end{aligned}$$

man hat dann

$$\begin{aligned} sin\,(u + v) &= sin\, u\, cos\, v + sin\, v\, cos\, u \\ &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

und auf ganz ähnliche Weise

$$cos\,(u+v) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy = \frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + xy}$$

An dem Vorzeichen des letzten Ausdrucks erkennt man, ob die Bögen u und v zusammengenommen einen Bogen des ersten oder des zweiten Quadranten geben; im ersten Falle ist

$$u + v = arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

oder vermöge der Werthe von u und v

7) $$arcsin\, x + arcsin\, y = arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad x^2 + y^2 \leqq 1.$$

Liegt dagegen $u + v$ im zweiten Quadranten, so folgt

$$u + v = \pi - arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

oder

8) $$arcsin\, x + arcsin\, y = \pi - arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad x^2 + y^2 \geqq 1.$$

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu der Formel

9) $$arcsin\, x - arcsin\, y = arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}),$$

bei welcher es keiner Unterscheidung bedarf, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Ist ferner bei zwei im ersten Quadranten liegenden Bögen u und v

$$\begin{aligned} \tan u &= x, \quad \text{mithin } u = \arctan x, \\ \tan v &= y, \quad \text{„ } v = \arctan y, \end{aligned}$$

so hat man

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Im Falle $xy < 1$ ist, liegt $u + v$ im ersten Quadranten, und dann folgt

$$u + v = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

oder vermöge der Werthe von u und v

10) $$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},$$

$$xy \leqq 1.$$

Wenn dagegen $xy > 1$ ist, so fällt $u + v$ in den zweiten Quadranten, und man hat dann

$$u + v = \pi - \arctan \frac{x+y}{xy-1},$$

d. i.

11) $$\arctan x + \arctan y = \pi - \arctan \frac{x+y}{xy-1},$$

$$xy \geq 1.$$

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu der Formel

12) $$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy},$$

für welche keine Unterscheidung nöthig ist.

III. Continuität und Discontinuität der Functionen.

Wie bereits in Nr. I. erwähnt wurde, gelten die unabhängigen Variabelen jederzeit als stetig veränderlich; ob diese Eigenschaft der Continuität auch den abhängigen Variabelen zukommt, ist dagegen eine andere Frage, die wir jetzt discutiren wollen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Sache unter dem geometrischen Gesichtspunkte und denken uns die Gleichung

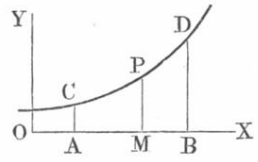
$$y = f(x)$$

als Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen ebenen

Curve; sollte letztere aus mehreren Zweigen bestehen, so fassen wir jeden derselben einzeln in's Auge.

Sind nun in Fig. 1 $OA = a$ und $OB = b > a$ zwei beliebige Abscissen und $AC = f(a)$, $BD = f(b)$ die zugehörigen Ordinaten, so können bezüglich des Curvenstückes CD nur zwei Fälle eintreten; die Curve geht nämlich entweder in einem ununterbrochenen Zuge von C nach D, oder sie erleidet auf dieser Strecke Unterbrechungen. Im ersten Falle nennen wir $f(x)$ continuirlich, von $x = a$ bis $x = b$, im zweiten Falle discontinuirlich.

Fig. 1.



Die genannten Unterbrechungen können aus verschiedenen Ursachen eintreten. Es ist erstens möglich, dass $f(a)$ und $f(b)$ reell sind, dass aber $f(x)$ für gewisse, zwischen a und b liegende Werthe von x imaginär wird. Ein Beispiel hierzu liefert die Gleichung

$$y = \sqrt{(x-1)\,(x-3)},$$

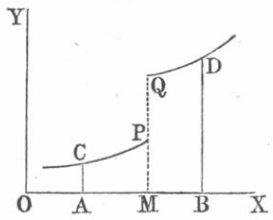
welche sowohl für $x < 1$ als für $x > 3$ reelle y, dagegen für $1 < x < 3$ imaginäre y liefert; von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 4$ verläuft also die Curve nicht in einem Zuge. Hierher gehören auch die Curven mit isolirten Punkten, z. B.

$$y = (x-2)\sqrt{(x-1)\,(x-3)};$$

diese Curve ist gleichfalls imaginär zwischen $x = 1$ und $x = 3$, besitzt aber in der Mitte des genannten Intervalles einen reellen Punkt mit den Coordinaten $x = 2$ und $y = 0$.

Aber selbst in dem Falle, wo $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ reell bleibt, kann eine Discontinuität eintreten, sobald nämlich an einer Stelle $OM = \xi$ die Ordinate sprungweis von einem Werthe MP zu einem anderen MQ übergeht (Fig. 2). Zu jener Abscisse gehören hier plötzlich zwei verschiedene Ordinaten, während ausserdem jeder Abscisse nur eine Ordinate entspricht; die erste Ordinate MP beschliesst die bisherige Reihe der Ordinaten, die zweite MQ bildet den Anfang einer neuen Reihe. Berücksichtigt man, dass jedes $x < \xi$ durch $\xi - \gamma$, und jedes $x > \xi$ durch $\xi + \delta$ dargestellt werden kann, so ist es

Fig. 2.



nur consequent, die Coordinaten von P mit

$$OM = \xi - 0, \quad MP = f(\xi - 0),$$

und die Coordinaten von Q mit

$$OM = \xi + 0, \quad MQ = f(\xi + 0)$$

zu bezeichnen. Demnach kann man sagen, die Function $f(x)$ bleibt an der Stelle $x = \xi$ continuirlich, wenn $f(\xi - 0) = f(\xi + 0)$, sie wird dagegen für $x = \xi$ discontinuirlich, wenn $f(\xi - 0)$ von $f(\xi + 0)$ verschieden ist. Indem wir den Fall ausschliessen, wo $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ theilweis imaginär wird, haben wir nun folgenden Satz:

Wenn die Differenz

$$f(x + \delta) - f(x - \gamma)$$

mit γ und δ gleichzeitig verschwindet, und zwar bei allen von $x = a$ bis $x = b$ gehenden Werthen des x, so ist die Function $f(x)$ innerhalb jenes Intervalles continuirlich; giebt es dagegen zwischen a und b einen oder mehrere Werthe des x, bei denen jene Differenz sich nicht annullirt, so erleidet $f(x)$ für jeden derartigen Werth eine Unterbrechung der Continuität.

So ändert sich z. B. die Function $f(x) = \frac{1}{x-1}$ discontinuirlich beim Ueberschreiten der Stelle $x = 1$, denn es ist

$$f(1 - \gamma) = -\frac{1}{\gamma}, \qquad f(1 - 0) = -\infty,$$

$$f(1 + \delta) = +\frac{1}{\delta}, \qquad f(1 + 0) = +\infty;$$

demnach findet hier ein Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$ statt.

Ein zweites Beispiel liefert die Function

$$f(x) = 2 + \arctan \frac{1}{x-1},$$

wobei der auf S. 4 angegebene Sinn des Zeichens *arctan* streng festzuhalten ist. Man erhält

$$f(1 - \gamma) = 2 + \arctan\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = 2 - \arctan\frac{1}{\gamma},$$

$$f(1 - 0) = 2 - \arctan\infty = 2 - \tfrac{1}{2}\pi;$$

$$f(1 + \delta) = 2 + \arctan\frac{1}{\delta},$$

$$f(1 + 0) = 2 + \arctan\infty = 2 + \tfrac{1}{2}\pi;$$

an der Stelle $x = 1$ geht also die Curve sprungweis von $2 - \frac{1}{2}\pi$ nach $2 + \frac{1}{2}\pi$. Ganz ähnlicher Art ist die allgemeinere Function

$$f(x) = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{\pi}\ arctan\ \frac{a}{x-a},$$

bei welcher an der Stelle $x = a$ eine discontinuirliche Aenderung von $f(a-0) = b$ nach $f(a+0) = c$ eintritt.

Dass eine Function auch mehrmalige Unterbrechungen der Continuität erleiden kann, zeigt das Beispiel $f(x) = tan\, x$; an den Stellen $x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi$ etc. geht nämlich $tan\, x$ von $-\infty$ nach $+\infty$ über, wie aus den Elementen der Trigonometrie bekannt ist.

Diese Erörterungen lassen sich ohne Mühe auf Functionen mehrer Variabelen übertragen. Insbesondere bei Functionen zweier Variabelen ist die geometrische Bemerkung von Nutzen, dass eine stetig gekrümmte Fläche mit jeder Verticalebene eine continuirlich verlaufende Durchschnittslinie bilden muss.

IV. Die Grenzwerthe der Functionen.

Wenn in der Function $\frac{a}{x}$ die Variabele x in's Unendliche wächst, so nimmt der Functionswerth beständig ab, und zwar in der Weise, dass er kleiner als jeder noch so kleine willkührlich gewählte Bruch werden kann, wofern nur x gross genug genommen wird. Kürzer drückt man diess durch die Worte aus: „Bei unendlich wachsenden x convergirt $\frac{a}{x}$ gegen die Null“ oder „für $x = \infty$ ist der Grenzwerth von $\frac{a}{x}$ gleich Null“; die letztere Form lässt sich in einer Gleichung darstellen, wenn man die Worte „Grenzwerth von“ irgendwie abkürzt, entweder deutsch durch Gr. oder lateinisch durch *Lim.* (von *limes*), und man schreibt daher

$$Lim\ \frac{a}{x} = 0, \qquad \text{für } x = \infty.$$

In gleicher Weise convergirt der etwas zusammengesetztere Ausdruck $\frac{a}{x} + b$ gegen die Grenze b, d. h.

$$Lim\left(\frac{a}{x} + b\right) = b, \qquad \text{für } x = \infty.$$

Dem entsprechend bedeutet die Gleichung

$$Lim\, f(x) = \lambda, \quad (x = \infty),$$

dass der Unterschied zwischen der Constanten λ und der Function

$f(x)$ kleiner als jede angebbare Zahl gemacht werden kann, wenn x in's Unendliche wächst. Geometrisch heisst dies, die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, hat eine in der Entfernung λ parallel zur x-Achse liegende Asymptote.

Der Kürze wegen bezeichnen wir im Folgenden eine unendlich wachsende Zahl mit ω, eine gegen die Null convergirende Zahl dagegen mit δ oder ϑ. Wir wollen nun einige Grenzwerthe untersuchen, die später sich als wichtig zeigen werden.

A. In der identischen Gleichung

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \cdots a b^{m-1} + b^m$$

möge $a > b$ sein; die rechte Seite erhält dann einen zu grossen Werth, wenn man überall a statt b setzt, mithin ist

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} < (m + 1)\, a^m$$

oder durch Wegschaffung des Bruches und Vereinigung aller der Grössen, welche a^m enthalten,

1) $$[a - (m + 1)(a - b)]\, a^m < b^{m+1}.$$

Die Substitutionen $a = 1 + \frac{1}{m}$, $b = 1 + \frac{1}{m+1}$ erfüllen die Bedingung $a > b$ und geben

2) $$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$

folglich, wenn der Reihe nach $m = 1, 2, 3$ etc. gesetzt wird,

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 < \cdots$$

Man ersieht hieraus, dass der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ fortwährend wächst, wenn ω das Gebiet der natürlichen Zahlen durchläuft.

Die Formel 1) giebt ferner für $a = 1 + \frac{1}{2n}$, $b = 1$, $m = n$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 1 \text{ oder } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2$$

und durch Erhebung auf's Quadrat

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Nach Nr. 2) ist nun um so mehr

$$\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4;$$

es mag also m gerade oder ungerade sein, jedenfalls beträgt $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ weniger als 4. Der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ wird demnach, trotz seines fortwährenden Wachsthums, nicht unendlich gross, und muss desshalb gegen eine bestimmte endliche Grenze convergiren, die > 2 aber ≤ 4 ist. Bezeichnen wir dieselbe mit e, wo nun e eine zwar nicht genau bekannte, aber sicher existirende absolute Zahl ist, so haben wir für unendlich wachsende ganze positive ω die Gleichung

3) $$Lim\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega\right] = e.$$

Ist ω keine ganze, aber wenigstens eine positive Zahl, so giebt es immer zwei auf einander folgende ganze positive Zahlen σ und $\tau = \sigma + 1$, zwischen denen ω liegt; man hat dann

$$1 + \frac{1}{\sigma} > 1 + \frac{1}{\omega} > 1 + \frac{1}{\tau},$$

mithin auch

$$\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)^\omega > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^\omega.$$

Zugleich lässt sich ω unter der doppelten Form $\omega = \sigma + \alpha$ und $\omega = \tau - \beta$ darstellen, wo α und β ächte Brüche bezeichnen, die sich zur Einheit ergänzen; die vorige Ungleichung wird dann zur folgenden

$$\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)^{\sigma+\alpha} > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau-\beta}$$

wofür man schreiben kann

$$\left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)^\sigma\right]^{1+\frac{\alpha}{\sigma}} > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega > \left[\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^\tau\right]^{1-\frac{\beta}{\tau}}.$$

Bei unendlich wachsenden ω nehmen auch die ganzen Zahlen σ und τ in's Unendliche zu; die Ausdrücke $\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)^\sigma$ und $\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^\tau$ convergiren nach Nr. 3) gegen die gemeinschaftliche Grenze e, und $\frac{\alpha}{\sigma}$ sowie $\frac{\beta}{\tau}$ haben die Null zur gemeinschaftlichen Grenze. Hieraus zusammen folgt die Gleichung

4) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e,$$

welche nunmehr auch für nicht ganze positive unendlich wachsende ω besteht.

Ist ω eine negative unendlich werdende Zahl, so kann man $\omega=-(\varrho+1)$ setzen, wo ϱ eine positive unendlich wachsende (ganze oder nicht ganze) Zahl bedeutet; man hat dann

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1-\frac{1}{\varrho+1}\right)^{-(\varrho+1)}=\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}\left(1+\frac{1}{\varrho}\right).$$

Der Grenzwerth des ersten Factors rechter Hand ist e, der des zweiten die Einheit, mithin ergiebt sich wieder

5) $$Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e,$$

und damit ist bewiesen, dass die vorstehende Gleichung für jedes irgendwie unendlich werdende ω gilt.

Der numerische Betrag von e kann nach Nr. 5) näherungsweis berechnet werden, wenn man für ω eine grosse Zahl setzt und die angedeutete Potenzirung ausführt; doch erreicht man damit keine bedeutende Genauigkeit. Nach einem anderen Verfahren, welches in §. 7 zur Sprache kommen wird, findet man sehr leicht

$$e=2{,}718281828459\,.$$

Nicht selten stellt man die Gleichung 5) in einer anderen Form dar, welche dadurch entsteht, dass man $\frac{1}{\omega}=\delta$ setzt, wo nun δ eine gegen die Null convergirende Zahl bezeichnet; es ist dann

6) $$Lim\,[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]=e.$$

B. Indem man die identische Gleichung

$$\frac{log\,(1+\delta)}{\delta}=log\,[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]$$

beachtet, gelangt man mit Hülfe von Nr. 6) zu folgender Formel

7) $$Lim\frac{log\,(1+\delta)}{\delta}=log\,e.$$

C. Wenn ϑ irgend eine gegen die Null convergirende Zahl bedeutet, so hat a^{ϑ} die Einheit und $a^{\vartheta}-1$ die Null zur Grenze; man kann daher

$$a^{\vartheta}-1=\delta,\text{ mithin }\vartheta={}^{a}log\,(1+\delta)$$

setzen. Hieraus folgt

$$\frac{a^{\vartheta}-1}{\vartheta} = \frac{\delta}{{}^{a}log\,(1+\delta)} = \frac{1}{\frac{{}^{a}log\,(1+\delta)}{\delta}}$$

und durch Uebergang zur Grenze für gleichzeitig unendlich abnehmende ϑ und δ

8) $$Lim\,\frac{a^{\vartheta}-1}{\vartheta} = \frac{1}{{}^{a}log\,e}.$$

D. Die Formeln 7) und 8) können noch zur Bestimmung des Grenzwerthes von $\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}$ benutzt werden, worin δ eine irgendwie gegen die Null convergirende Zahl bedeutet. Es ist nämlich identisch

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu\,\frac{a^{\mu\,log\,(1+\delta)}-1}{\mu\,log\,(1+\delta)}\cdot\frac{log\,(1+\delta)}{\delta},$$

wobei zur Abkürzung $log.$ statt ${}^{a}log.$ geschrieben wurde; setzt man weiter $\mu\,log\,(1+\delta) = \vartheta$, so hat man auch

$$\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu\,\frac{a^{\vartheta}-1}{\vartheta}\cdot\frac{log\,(1+\delta)}{\delta}$$

und hierin bedeutet ϑ eine Grösse, welche gleichzeitig mit δ verschwindet. Durch Uebergang zur Grenze erhält man unter Anwendung der Formeln 7) und 8)

9) $$Lim\,\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta} = \mu.$$

E. Wir wollen endlich noch die Grenze aufsuchen, welcher sich das Verhältniss $\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta}$ in dem Falle nähert, wo ϑ gegen die Null convergirt. Denken wir uns unter ϑ vorläufig einen beliebigen Bogen des ersten Quadranten, so haben wir die Ungleichung

$$sin\,\vartheta < \vartheta < tan\,\vartheta$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{sin\,\vartheta} > \frac{1}{\vartheta} > \frac{cos\,\vartheta}{sin\,\vartheta},$$

mithin durch Multiplication mit $sin\,\vartheta$

$$1 > \frac{sin\,\vartheta}{\vartheta} > cos\,\vartheta.$$

Da bei verschwindenden ϑ die einschliessenden Grössen 1 und $cos\,\vartheta$ den gemeinschaftlichen Werth 1 haben, so folgt

10) $$Lim\,\frac{sin\,\vartheta}{\vartheta} = 1.$$

Die Formeln 7), 8), 9) und 10) genügen für die späteren Untersuchungen.

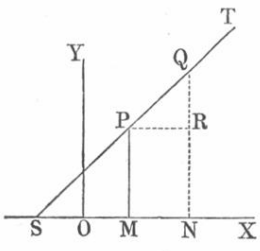
V. Die Aenderungsgeschwindigkeit einer Function.

Schon die oberflächliche Ansicht verschiedener Curven zeigt mannichfaltige Arten der Ordinatenveränderung; während z. B. die Ordinaten der Parabel fortwährend zunehmen, die Curve also steigt, hat die Sinuslinie ($y = \sin x$) unendlich viel Punkte, in denen ein Uebergang von Wachsthum zu Abnahme der Ordinaten stattfindet. Ja selbst bei Curven von gleicher Gattung können die Ordinatenänderungen auf sehr verschiedene Weise vor sich gehen. So z B. steigen die Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ gleichzeitig, man wird aber von der zweiten sagen, dass sie rascher als die erste steigt, auch findet noch insofern ein wesentlicher Unterschied statt, als die erste Parabel ihre hohle Seite, die zweite dagegen ihre erhabene Seite gegen die Abscissenachse kehrt. Um nun jenen noch unbestimmten Begriff der Geschwindigkeit des Wachsthums festzustellen, betrachten wir vorerst die Gerade, deren Gleichung $y = ax + b$ sein möge. Hier ist unmittelbar einleuchtend, dass die Steigung immer dieselbe bleibt; ihr Maass kann man einfach dadurch ausdrücken, dass man angiebt, um wieviel die Ordinate wächst, wenn die Abscisse um die Einheit zunimmt. (Steigungen von Strassen werden bekanntlich auf dieselbe Art ausgedrückt.) Nehmen wir in Fig. 3 $OM = x$, $MP = y$, $MN = PR = 1$, so ist QR die entsprechende Ordinatenzunahme, also die Steigung, und zwar findet man leicht

$$QR = tan\ QPR = a;$$

in der That hängt dieser Ausdruck nicht von x ab und bleibt daher constant für alle Punkte der Geraden.

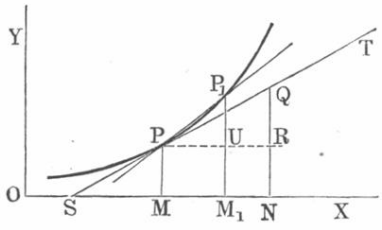
Fig. 3



Denken wir uns ferner eine Curve durch stetige Fortbewegung eines Punktes entstanden, während gleichzeitig die Richtung der Bewegung sich continuirlich ändert, so wird die momentane Bewegungsrichtung jederzeit durch die zugehörige Tangente an der Curve dargestellt. Es sei nun PT (Fig. 4) die Tangente der Curve im Punkte P und die vorige Construction auf diese Tangente angewandt, so ist QR diejenige Zunahme der Ordinate MP, welche der Abscissenzu-

nahme $MN = 1$ entsprechen würde, wenn die Curve von P aus in ihre Tangente verliefe, also in die gleichmässig steigende Gerade PT überginge. Nennen wir wiederum QR die Steigung der Curve im Punkte P, so kommt es darauf an, den Winkel zu finden, welchen die Tangente PT mit der Abscissenachse einschliesst; die trigonometrische Tangente dieses Winkels, multiplicirt mit der Längeneinheit, wäre dann das gesuchte Maass für die Geschwindigkeit der Steigung oder überhaupt der Aenderung.

Fig. 4.



Zur Kenntniss des genannten Winkels führt die Bemerkung, dass eine Gerade, die zwei Punkte einer Curve verbindet, also eine Secante, zur Tangente wird, sobald die Endpunkte der abgeschnittenen Sehne zusammenfallen. Demgemäss verbinden wir den gegebenen Curvenpunkt P mit einem zweiten, willkührlich auf der Curve gewählten Punkte P_1 und bestimmen zunächst den Winkel $P_1PU = \sigma$, welchen die Secante PP_1 mit der Abscissenachse bildet; unter Einführung der Bezeichnungen $OM = x$, $MP = y = f(x)$ und $MM_1 = \delta$ erhalten wir

$$1) \qquad tan\ \sigma = \frac{P_1U}{PU} = \frac{M_1P_1 - MP}{MM_1} = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}.$$

Lassen wir jetzt δ in Null übergehen, so dreht sich die Secante um den festbleibenden Punkt P und wird für $\delta = 0$ zur Tangente; gleichzeitig verwandelt sich σ in den Winkel zwischen Tangente und Abscissenachse, welcher τ heissen möge. Wollte man in Nr. 1) geradezu $\delta = 0$ setzen, so würde man rechter Hand das unbestimmte und nichtssagende Resultat $\frac{0}{0}$ erhalten; man thut daher besser nur anzudeuten, dass schliesslich $\delta = 0$ werden soll, also zu schreiben

$$2) \qquad tan\ \tau = \left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}\right]_{(\delta=0)}.$$

In jedem speciellen Falle bedarf es der wirklichen Ausführung der angedeuteten Operationen, wie die folgenden Beispiele zeigen werden. Für $f(x) = x^2$ hat man zunächst

$$tan\ \sigma = \frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} = 2x + \delta,$$

mithin für $\delta = 0$

$$tan\ \tau = 2\,x.$$

Ferner ist, wenn $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ genommen wird,

$$tan\ \sigma = \frac{\sqrt{a^2-(x+\delta)^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\delta} = -\frac{2\,x+\delta}{\sqrt{a^2-(x+\delta)^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$$

mithin für $\delta = 0$

$$tan\ \tau = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die Formel 2) setzt stillschweigend voraus, dass δ den Werth Null erreichen könne; diess ist zwar bei einer ganz willkührlichen Grösse möglich, würde jedoch in dem Falle unthunlich werden, wo δ abhängig ist, wie z. B. wenn es einen aliquoten Theil einer anderen Grösse ausmacht. Dann bildet aber die Null wenigstens die Grenze, welcher δ beliebig nahe gebracht werden kann, und in demselben Sinne ist τ die Grenze von σ, mithin wird man statt der Gleichung 2) schreiben

3) $$tan\ \tau = Lim\ \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

Hierunter ist auch die Gleichung 2) mitbegriffen, wenn man sich in den Fällen, wo $\delta = 0$ werden kann, vorstellt, dass δ seinen Grenzwerth wirklich erreicht habe.