Compendium der höheren Analysis

in zwei Bänden

Schlömilch, Oskar

Braunschweig, 1868

Anhang

urn:nbn:at:at-ubi:2-5985

Anhang.

I. Der auf S. 70 und 71 gegebene Beweis der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

lässt sich folgendermaassen einfacher gestalten.

Nach Formel 3) auf S. 21 hat der Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten einer Function die Eigenschaft, gleichzeitig mit dem Incremente der unabhängigen Variabeln gegen die Null zu convergiren, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass der Differentialquotient überhaupt einen endlichen bestimmten Werth besitzt. Wendet man dies auf den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ an, welcher zur Abkürzung mit $f'_x(x, y)$ bezeichnet werden möge, so darf man

$$f'_x(x, y) = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} - \varrho$$

setzen, wo ϱ eine nicht näher bekannte Function von x, y und Δx bezeichnet, von der man wenigstens weiss, dass sie gleichzeitig mit Δx verschwindet. Lässt man jetzt y um Δy zunehmen, so ändert sich auch ϱ um $\Delta \varrho$ und es folgt

$$\frac{f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y} - \frac{\Delta \varrho}{\Delta y},$$

oder nach dem anfangs erwähnten Fundamentalsatze

$$\frac{f'_x(x, y + \varDelta y) - f'_x(x, y)}{\varDelta y}$$
$$= \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) + f(x,y)}{\varDelta y\, \varDelta x} - \left(\frac{d\varrho}{d y} + \varrho_1\right).$$

Bei unendlich abnehmenden $\varDelta x$ und $\varDelta y$ convergiren ϱ und ϱ_1 gleichfalls gegen die Null, daher ist

1) $$\frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial y}$$
$$= Lim \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) + f(x, y)}{\varDelta y\, \varDelta x},$$

wobei sich das Zeichen *Lim* auf die gleichzeitige unendliche Abnahme von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ bezieht.

Geht man zweitens von der analogen Gleichung aus

$$f'_y(x, y) = \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y} - \sigma,$$

so erhält man mittelst ganz derselben Schlussweise

$$\frac{f'_y(x + \varDelta x, y) - f'_y(x, y)}{\varDelta x}$$
$$= \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) - f(x, y+\varDelta y) + f(x,y)}{\varDelta x\, \varDelta y} - \left(\frac{d\sigma}{dx} + \sigma_1\right)$$

und bei unendlich abnehmenden $\varDelta x$, $\varDelta y$, σ, σ_1

2) $$\frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial x}$$
$$= Lim \frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) - f(x, y+\varDelta y) + f(x, y)}{\varDelta x\, \varDelta y}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 1) und 2) sind identisch, daher ist auch

$$\frac{\partial f'_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f'_y(x, y)}{\partial x},$$

woraus nach Substitution von

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

die zu beweisende Gleichung hervorgeht.

II. Das unendliche Product für $\sin z$ kann man auf folgendem sehr einfachen Wege finden.

Nach der bekannten elementaren Formel

1) $$\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \sin \frac{u + \pi}{2}$$

hat man zunächst

$$\sin z = 2 \sin \frac{z}{z} \sin \frac{z + \pi}{2},$$

ferner, wenn rechter Hand jeder Sinus wieder nach Nro. 1) zerlegt wird,

$$\sin z = 2^3 \sin \frac{z}{4} \sin \frac{z + \pi}{4} \sin \frac{z + 2\pi}{4} \sin \frac{z + 3\pi}{4};$$

die Wiederholung desselben Verfahrens liefert

$$\sin z = 2^7 \sin \frac{z}{8} \sin \frac{z + \pi}{8} \sin \frac{z + 2\pi}{8} \cdots \sin \frac{z + 7\pi}{8}.$$

Wendet man überhaupt diese Zerlegung n-mal an und setzt zur Abkürzung $2^n = p$, so erhält man

$$\sin z = 2^{p-1} \sin \frac{z}{p} \sin \frac{z + \pi}{p} \sin \frac{z + 2\pi}{p} \cdots \sin \frac{z + (p-1)\pi}{p}$$

oder in kurzer selbstverständlicher Bezeichnung

2) $$\sin z = 2^{p-1}\, s_0\, s_1\, s_2 \cdots s_{p-1}.$$

Die Reihe der Factoren $s_0, s_1, \cdots s_{p-1}$ werde nun in zwei Gruppen $s_0, s_1, \cdots s_{\frac{1}{2}p-1}$ und $s_{\frac{1}{2}p}, s_{\frac{1}{2}p+1}, \cdots s_{p-1}$ getheilt und die zweite Gruppe in umgekehrter Ordnung folgendermaassen unter die erste gesetzt

$$\begin{array}{lllll} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots & s_{\frac{1}{2}p-1}, \\ s_{p-1}, & s_{p-2}, & \ldots & & s_{\frac{1}{2}p+1}, \; s_{\frac{1}{2}p}; \end{array}$$

irgend zwei unter einander stehende Factoren sind dann

$$s_h = \sin \frac{h\pi + z}{p},$$

$$s_{p-h} = \sin \frac{(p-h)\pi + z}{p} = \sin \frac{h\pi - z}{p}.$$

Das Product derselben ist

$$s_h\, s_{p-h} = \sin^2 \frac{h\pi}{p} - \sin^2 \frac{z}{p};$$

macht man hiervon Gebrauch für $h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}p - 1$ und beachtet noch die Gleichung

$$s_{\frac{1}{2}p} = \cos\frac{z}{p},$$

so erhält man statt der Gleichung 2) die folgende

$$3)\quad \sin z = 2^{p-1}\sin\frac{z}{p}\left(\sin^2\frac{\pi}{p}-\sin^2\frac{z}{p}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{p}-\sin^2\frac{z}{p}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\sin^2\frac{(\frac{1}{2}p-1)\pi}{p}-\sin^2\frac{z}{p}\right)\cos\frac{z}{p}.$$

Hieraus folgt noch eine specielle Formel, wenn man beiderseits mit z dividirt und nachher zur Grenze für unendlich abnehmende z übergeht; sie lautet

$$4)\quad 1 = \frac{2^{p-1}}{p}\sin^2\frac{\pi}{p}\,\sin^2\frac{2\pi}{p}\,\sin^2\frac{3\pi}{p}\cdots\sin^2\frac{(\frac{1}{2}p-1)\pi}{p}.$$

Dividirt man die Gleichung 3) durch Nro. 4) und bezeichnet zur Abkürzung $\frac{1}{2}p-1$ mit m, so kann man den Quotienten in folgender Form darstellen

$$\frac{\sin z}{p\sin\frac{z}{p}\cos\frac{z}{p}}$$
$$=\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{2\pi}{p}}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\sin\frac{z}{p}}{\sin\frac{m\pi}{p}}\right)^2\right].$$

Auf die rechte Seite sind wörtlich dieselben Erörterungen anwendbar, welche in §. 49 für die rechte Seite der Formel 6) angestellt wurden; durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende p gelangt man nachher zu den dort entwickelten Formeln 14), 15) u. s. w.

III. Für die Entwickelung solcher Integrale, welche nur trigonometrische Functionen enthalten, also der Form

$$\int F\,(\sin u,\ \cos u,\ \tan u,\ \ldots)\,d\,u$$

angehören (§. 77, III.), möge noch bemerkt werden, dass die Substitution

$$\tan \tfrac{1}{2} u = t$$

einen besonderen Vortheil gewährt. Zufolge derselben ist nämlich

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan u = \frac{2\,t}{1-t^2},\ \cdots$$

$$d\,u = \frac{2\,d\,t}{1+t^2};$$

das obige Integral erhält hiernach die Form

$$\int F\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2\,t}{1-t^2},\ \cdots\right)\frac{2\,d\,t}{1+t^2},$$

und diese ist von selber rational, wenn in der Function F ursprünglich keine Wurzeln vorkommen.