

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik

Oseen, Carl Wilhelm

Leipzig, 1927

Anhang. Zwei Vorträge von Prof. N. Zeilon, gehalten vor dem zweiten internationalen Kongreß für technische Mechanik Zürich 1926

Anhang.

Zwei Vorträge von Prof. N. Zeilon,

**gehalten vor dem zweiten internationalen Kongreß
für technische Mechanik Zürich 1926.**

I.

Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem.

1. Die folgende Fragestellung schließt sich als natürliche Weiterführung der hydrodynamischen Theorie Oseens an. Die von einem eingetauchten Körper in einer reibungslosen Flüssigkeit hervorgerufenen Bewegungszustände werden durch Lösung der in geeigneter Weise linearisierten Differentialgleichungen bei nachfolgendem Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ beschrieben. Unter Beschränkung, der Einfachheit wegen, auf zweidimensionale Bewegung, läßt sich der Grundgedanke der Oseenschen Theorie folgendermaßen in verallgemeinerter Fassung aussprechen. Man geht aus von den bekannten Gleichungen der stationären Bewegung und nimmt an, daß durch:

$$u = u_0 + u', \quad v = v_0 + v'$$

die gesamte Geschwindigkeit in eine bekannte „eingeprägte“ Strömung u_0, v_0 und eine noch zu bestimmende „Störungsströmung“ aufgeteilt sei. Es wird angenommen, daß die quadratischen Störglieder:

$$u'\bar{w}, v'\bar{w} \quad \left(\bar{w} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)$$

gegenüber den halbquadratischen:

$$u_0\bar{w}, v_0\bar{w}$$

vernachlässigt werden dürfen.

2. Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wo als Primärströmung eine laminare Bewegung eingeführt worden ist. Setzen wir also:

$$u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_0 = +\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta \psi = 0,$$

so erhalten wir zunächst aus den Grundgleichungen nach Elimination von:

$$q = p + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2)$$

die Gleichung:

$$\rho \left(u_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \mu \Delta \bar{w}, \quad \bar{w} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}, \quad (1)$$

die, wenn $\mu = 0$ gesetzt wird, sofort

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{array} \right| = 0, \text{ oder } \bar{w} = f(\psi)$$

ergibt. Wir schließen somit, daß die asymptotische Lösung des linearisierten Gleichungssystems außer einer laminaren Strömung noch eine turbulente Strömung enthalten kann, derart, daß der Wirbel auf gewissen Stromlinien der eingepprägten Strömung mit konstanter Intensität verteilt ist.

Die Bestimmung dieser Wirbelverteilung wird dadurch erleichtert, daß die asymptotische Behandlung der Gleichung (1) sich auf eine schon bekannte Diskussion zurückführen läßt. Setzen wir nämlich

$$\psi = \text{Imaginärteil von } (\varphi + i\psi),$$

so erscheint es natürlich, auf die Koordinaten φ, ψ zu transformieren. Setzen wir, um die Kontinuitätsgleichung zu befriedigen:

$$u' = -\frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad v' = +\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

so läßt sich, nach einer leichten Rechnung, die Gleichung (1) so schreiben:

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi} \right) \Delta_{x, y} \theta = \left(\rho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi, \psi} \right) \bar{w} = 0. \quad *$$
 (2)

3. Die obige Gleichung für \bar{w} ist, von der Koordinatenwahl abgesehen, mit derjenigen Gleichung identisch, deren asymptotisches Verhalten in Oseens Theorie Wirbelbildung und Kielwasser bestimmt. An der Grenze für $\mu = 0$ kommt betreffs der Randbedingungen prinzipiell dasselbe Resultat heraus. Die Randkurve wird in zwei Bereiche geteilt, einer „hydrodynamischen Vorder-“ bzw. „Rückseite“ entsprechend. An der Vorderseite (S_v) gleitet die Flüssigkeit einfach

* Man vergleiche hierzu: J. Boussinesq, Journ. de Lionville (6) 1 S. 285, 1905; ferner J. M. Burgers, K. Ak. v. Wet. te Amsterdam, Verslag d. Wis- en Natuurk. Afdeel. D. XXIX S. 952, 1921.

in reiner Potentialströmung vorbei, während an der Rückseite (S_h) die Wirbelverteilung so zu bestimmen ist, daß, wenn möglich, die Flüssigkeit daselbst am Körper haftet.

Die Herleitung dieses Resultates ist aus den Eigenschaften der Grundlösung von (2) leicht verständlich. Wenn (φ_0, ψ_0) einen willkürlichen Punkt der Randkurve bezeichnet, so wird die gesuchte Lösung \bar{w} mit Hilfe der Funktion:

$$F(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha(\varphi - \varphi_0) + \beta(\psi - \psi_0))}}{\mu(\alpha^2 + \beta^2) - i\varrho\alpha} d\alpha d\beta =$$

$$= e^{-\frac{\varrho}{2\mu}(\varphi - \varphi_0)} K_0\left(\varrho \frac{R}{2\mu}\right); R = \sqrt{(\varphi - \varphi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2},$$

wo K_0 eine Hankelsche Funktion von imaginärem Argument bedeutet, in gewöhnlicher Weise durch die Greensche Formel dargestellt*. Für $\mu \rightarrow 0$ findet man, daß F überall gegen Null konvergiert außer auf der durch:

$$\psi = \psi_0, \varphi - \varphi_0 < 0$$

definierten singulären Kurve, wo F derart unendlich wird, daß das Greensche Randintegral einen entsprechenden endlichen Betrag liefert.

Durch jeden Punkt φ_0, ψ_0 hat man also die betreffende Stromlinie $\psi = \psi_0$ zu ziehen; die Gesamtheit aller Punkte der Flüssigkeit, für welche $\varphi < \varphi_0$ ist, bestimmt die Form und Ausdehnung des der hydrodynamischen Rückseite angeschlossenen Wirbelbereiches.

Die Art des neuen potentialtheoretischen Problems ist damit auch festgelegt. Nach dem Gesetz:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta_{x,y} \theta}{\partial \varphi} = 0; \Delta_{x,y} \theta = f(\psi),$$

soll auf den genannten singulären Kurven eine Wirbelbelegung mit zugehöriger Strömung, d. h. die unbekannte Funktion \bar{w} und die damit verbundene Strömungsfunktion θ , so bestimmt werden, daß:

$$\begin{aligned} (u_0 + u') \cos(n, x) + (v_0 + v') \cos(n, y) &= 0 && \text{an } S_v; \\ u_0 + u' = v_0 + v' &= 0 && \text{an } S_h; \\ u' = v' &= 0 && \text{im Unendlichen.} \end{aligned}$$

4. Nachdem das so formulierte Potentialproblem durch eine konforme Abbildung zuerst auf den Fall des Kreiszyinders zurück-

* Vgl. hierzu S. 38.

geführt worden ist, machen wir für die Lösung folgenden Ansatz. Der Wirbelbereich wird mit Wirbelfäden von der unbekanntten Stärke:

$$\frac{d^2 \Gamma(\psi)}{d\psi^2} dx dy = \frac{d^2 \Gamma(\psi)}{d\psi^2} \frac{d\varphi d\psi}{\kappa(z) \bar{\kappa}(\bar{z})}$$

belegt, wo

$$\frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dz} = \kappa(z) = u_0 - iv_0; \quad \bar{\kappa}(\bar{z}) = u_0 + iv_0.$$

Dabei setzen wir, was keine wesentliche Beschränkung bedingt, voraus, daß im Wirbelbereich das Produkt $\kappa(z)\bar{\kappa}(\bar{z})$ nicht verschwindet oder jedenfalls zu keiner gefährlichen Singularität Anlaß gibt.

Im Unendlichen sei ferner:

$$w \rightarrow z.$$

Wir betrachten zunächst die Stromfunktion:

$$\theta_1 = \Gamma(\psi) + \frac{1}{2\pi} \iint \left(\frac{1}{\kappa_0 \bar{\kappa}_0} - 1 \right) \frac{d^2 \Gamma}{d\psi_0^2} \log R d\varphi_0 d\psi_0,$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

die der Bedingung:

$$\bar{w} = \Delta_{x,y} \theta_1 = (u_0^2 + v_0^2) \Delta_{\varphi,\psi} \theta_1 = \frac{d^2 \Gamma}{d\psi^2}$$

genügt. Der Funktion θ_1 entspricht eine Geschwindigkeit, die aus Wirbelelementen:

$$-\frac{i}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

aufgebaut ist. Wird ferner eine laminare Bewegung superponiert, indem die gespiegelte Winkelfunktion:

$$\frac{z \kappa(z)}{\bar{\kappa} \left(\frac{1}{z} \right)} \frac{1}{1 - \bar{z}_0 z}$$

über dem Wirbelgebiet mit der Verteilung:

$$d\varphi_0 d\psi_0 \left(\frac{1}{\kappa(z_0) \bar{\kappa}(\bar{z}_0)} - 1 \right) \frac{d^2 \Gamma}{d\psi_0^2} = \left(\frac{1}{\kappa_0 \bar{\kappa}_0} - 1 \right) df(\psi_0) d\varphi_0$$

integriert wird, so sieht man sogleich, daß die gesamte Bewegung eine am Kreise $|z| = 1$ verschwindende ψ -Komponente der Geschwindigkeit ergibt.

Wird jetzt am Kreise noch die φ -Komponente U^φ berechnet, so läßt sich die Schwierigkeit des für $z = z_0$ unendlichen Kernes durch

Isolieren des singulären Bestandteiles beseitigen. Eine Diskussion, die ich hier übergehe, zeigt, daß U_φ so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right)_{|z|=1} f(\psi) + \int K(\psi, \psi_0) f(\psi_0) d\psi_0 = U_\varphi,$$

wo $f(\psi)$ außerhalb des Wirbelgebietes (insbesondere an S_a) verschwindet und K einen für $\psi = \psi_0$ höchstens logarithmisch unendlichen Kern bedeutet.

Ferner läßt sich ein „gemischtes Potential“ superponieren derart, daß:

an S_v :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} + u_0 \cos(n, x) + v_0 \cos(n, y) = -U_\varphi \cos(n, \varphi)$$

an S_h :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 0.$$

Das Potential Φ , das durch die noch hinzukommende Bedingung betreffs der Geschwindigkeitsverhältnisse im Unendlichen eindeutig festgelegt ist, wird an der Rückseite des Kreises eine φ -Geschwindigkeit ergeben, die ihrerseits das unbekannte U_φ mit einem regulären Kerne längs jener Rückseite integriert enthält.

Die schließlich übriggebliebene Bedingung, daß die gesamte φ -Geschwindigkeit an der Rückseite verschwinden soll, führt somit die Bestimmung der unbekanntenen Funktion f auf eine Fredholmsche Integralgleichung zurück, deren Kern sowohl in ψ wie ψ_0 quadratisch integrierbar ist.

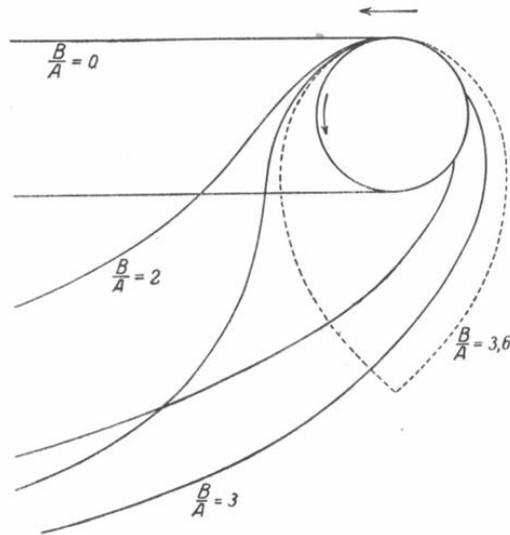
Das hier gefundene Resultat läßt sich, wie unmittelbar ersichtlich sein dürfte, noch auf den Fall übertragen, daß die Geschwindigkeit an der Rückseite vorgeschriebene Werte annehmen soll.

5. Beispiel. Der Magnuseffekt. Es ist klar, daß die Wahl der eingepprägten Strömung ψ gewissermaßen willkürlich ist und selbstverständlich den natürlichen Voraussetzungen des bezüglichen Problems gemäß getroffen werden muß. Im Falle des in einem gleichmäßigen Strome stillstehenden Zylinders führte die einfachste natürliche Annahme:

$$u_0 = \text{Konst.}, \quad v_0 = 0$$

auf die Theorie Oseens. Als ebenso natürlichen Ansatz nimmt man für den rotierenden Zylinder am einfachsten:

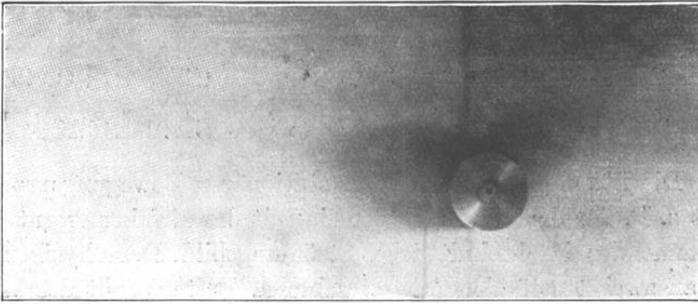
$$\varphi + i\psi = A(x + iy) + iB \log(x + iy).$$



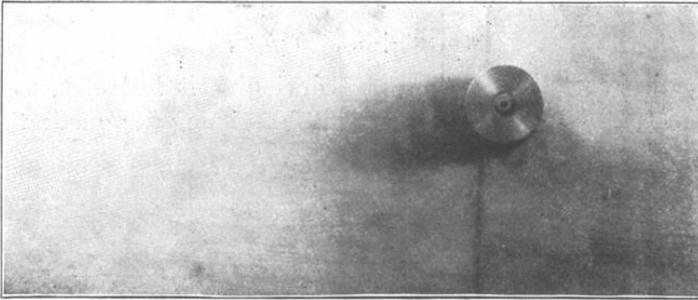
Figur 1

Die Aufgabe, die Gesamtheit der Kurven ψ mit $\varphi - \varphi_0 < 0$ anzugeben, ist eine rein elementare, deren Ergebnis die beigefügte Fig. 1 (für $\frac{B}{A} = 0; 2; 3$) illustriert. Man sieht, wie der Wirbelbereich, der in der Oseenschen Theorie des stillstehenden Zylinders der Strömungsrichtung parallel verläuft und geradlinig begrenzt ist, jetzt durch die Rotation deformiert und abgelenkt erscheint.

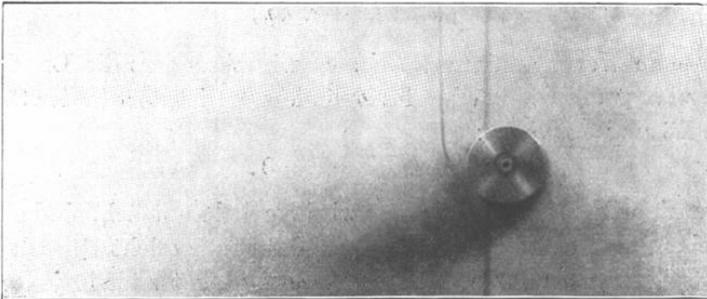
Insbesondere bemerkt man, daß für große Werte von $\frac{B}{A} (> 1)$ die untere Begrenzung des Wirbelschwanzes durch jene ψ -Kurve gebildet wird, die durch den Doppelpunkt der Primärströmung, $x = 0$, $y = -B$, hindurch geht. Die Folge davon ist, daß mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit der Wirbelschwanz sich immer höher an der der Translationsströmung zugewandten Vorderseite des Zylinders hinaufsaugt, und daß er gleichzeitig hinter dem Körper immer schmaler wird. Schließlich (bei $\frac{B}{A} =$ etwa 3,6) trifft der in der Figur gestrichelte Grenzfall ein; der ganze Wirbelschwanz ist zu einer Art von Korona, die den Zylinder umhüllt, zusammengeschumpft.



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Die nach zunehmender Rotationsgeschwindigkeit geordneten Aufnahmen, Fig. 2—4, zeigen, daß der theoretische Ansatz jedenfalls qualitativ sich der Erfahrung sehr gut anpaßt. Es ist wohl kaum nötig, hervorzuheben, daß die ausgeführte Berechnung nicht nur einen Auftrieb, sondern gleichzeitig auch einen Widerstand ergeben würde.

II.

Zur Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie.

1. Die Lösung des Oseenschen stationären Bewegungsproblems ergibt z. B. für den Kreiszylinder ein mit der Erfahrung gut übereinstimmendes durchschnittliches Strömungsbild. Der Physiker wird aber an zwei Umständen Anstoß nehmen. Erstens fällt der Widerstand viel zu groß aus, zweitens wird beim Passieren des Wirbelschwanzes der Druck unstetig.

Setzen wir, wie gewöhnlich:

$$u = u_0 + u', \quad v = v',$$

wo u_0 die konstante Strömungsgeschwindigkeit bedeutet, so folgt aus den Grundgleichungen bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder, für $\mu \rightarrow 0$, sofort:

$$q = -\rho u_0 \int \bar{w} dy,$$

während exakt:

$$q = \rho \int \bar{w} (v' dx - (u' + u_0) dy)$$

sein sollte. Die Druckbestimmung wird also fehlerhaft sein, sobald der Ausdruck:

$$\int \bar{w} (v' dx - u' dy)$$

bedeutende Werte annimmt. Nehmen wir besonders die Druckverteilung längs der Oberfläche des Zylinders, so ist dort in der Oseenschen Lösung entweder:

$$\bar{w} \quad \text{oder} \quad v' = 0.$$

Eine unrichtige Druckberechnung wird somit hauptsächlich dadurch entstehen, daß das quadratische Produkt $u' \bar{w}$ nicht überall vernachlässigt werden kann. Dieses Produkt nimmt aber in jener Lösung nahe der Grenze des Wirbelgebietes große Werte an; insbesondere wird beim Eintritt in das Wirbelgebiet \bar{w} derart unendlich, daß q mit einem endlichen Betrag diskontinuierlich bis zu jenem übertriebenen Saugdruck herabfällt, der für den zu großen Widerstandskoeffizienten verantwortlich ist. Das fehlerhafte Schlußresultat ist eben die natürliche Folge davon, daß in einem kritischen Bereich die Differentialgleichungen in allzu grober Weise verletzt worden sind.

2. Ein charakteristisches Ergebnis der Oseenschen Theorie ist die Einteilung des Körpers in eine „hydrodynamische Vorder-“ und „Rückseite“. Vieles (z. B. die experimentelle Tatsache des an der Rückseite eines Körpers nahezu konstanten Druckes) deutet darauf hin, daß die damit zusammenhängenden verschiedenartigen Grenzbedingungen (Gleiten der Flüssigkeit an der Vorderseite, Haften an der Rückseite) der Erfahrung gut entsprechen. Daß überhaupt eine „reibunglose“ Flüssigkeit einen Widerstand aufweisen kann, rührt davon her, daß an der Körperoberfläche die Reibungskräfte noch bei verschwindender Viskosität eine endliche Arbeit ausführen, die zum Losreißen und Transportieren von Wirbeln von der Hinterseite nach rückwärts verbraucht wird. Da aber hinter dem Körper die Geschwindigkeit überall Null sein sollte, wird der eigentliche Wirbeltransport nur in den „kritischen“ Übergangspunkten zwischen Vorder- und Rückseite stattfinden. Von diesem Gesichtspunkte aus erscheint es natürlich, die Druckdiskontinuität dadurch „aufzulockern“, daß man jene Punkte als den Grenzfall von sehr kleinen Gleitungsintervallen betrachtet. Eine derartige Vorstellung wird im folgenden zu einer eindeutigen Festlegung des Kielwasserdruckes benutzt.

3. Nehmen wir nun die Lösung des Oseenschen Problemles als erste Näherung des Widerstandsproblemles an, so erscheint zunächst der Druck (oder die Funktion q) als bei der gewählten Vereinfachung der Bewegungsgleichungen eindeutig bestimmt. In der Tat ist aber diese Eindeutigkeit gewissermaßen nur scheinbar.

Denn schreiben wir:

$$u = u_1(y) + u', \quad v = v',$$

wo u_1 außerhalb des Oseenschen Wirbelschwanzes gleich u_0 ist und innerhalb dieses Bereiches in irgendeiner Weise von y stetig abhängt, so können wir statt u_0 ebensogut $u_1(y)$ als eine modifizierte Primärströmung mit überlagerter Störungsströmung u', v' einführen. Wenn aber jetzt $u'\bar{w}, v'\bar{w}$ als quadratische Glieder vernachlässigt werden, so kommt durch Elimination von q aus:

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x_i} + \mu \Delta u$$

$$\rho u_1(y) \bar{w} = -\frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v,$$

die Gleichung

$$\rho u_1(y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \mu \Delta \bar{w} \quad (1)$$

heraus, die für $\mu \rightarrow 0$ voraussichtlich auf die fundamentale Gleichung der Oseenschen Theorie:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

führen wird. Dementsprechend wird man jetzt die in der Flüssigkeit gültige Beziehung:

$$q \rightarrow -\rho \int u_1(y) \bar{w} dy, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

finden. Damit hat man aber innerhalb des Wirbelgebietes eine ganz verschiedene Druckbestimmung eingeführt, obschon das Strömungsbild immer durch die Gleichung (2) bestimmt wird und folglich auf den Oseenschen Typus zurückkommt.

4. Nach der obigen Auseinandersetzung wird man, von der Oseenschen Strömung ausgehend, nur dadurch zu einer bestimmten Druckberechnung gelangen, daß man durch irgendeine ergänzende Hypothese einen geeigneten Anteil der geradlinigen turbulenten Geschwindigkeit als „Primärströmung“ absondert. Mit Rücksicht auf die vollständigen Differentialgleichungen erscheint es für das Widerstandsproblem natürlich, die Auswahl so zu treffen, daß in der Nähe des Körpers diese vollständigen Gleichungen so gut wie möglich befriedigt werden, d. h., wir sollten:

$$u_1(y) = u_{s_h}(y)$$

setzen, wo u_{s_h} die totale Geschwindigkeit an der Körperoberfläche bedeutet.

Da aber, bei vollständigem Haften an der Rückseite,

$$u_{s_h} = 0$$

ist, so würde folgen:

$$dq = 0, \quad q = \text{Konst.}$$

Der absolute Wert des Kielwasserdruckes würde aber immer noch unbestimmt bleiben, weil in den kritischen Punkten als einzigem Sitz der Wirbelablösung $\bar{w} = \infty$ und u_{s_p} diskontinuierlich ist. Um bestimmte Druckwerte zu erzielen, muß man die Annahme von den oben erwähnten, den kritischen Punkten zugeordneten Gleitungsintervallen zu Hilfe nehmen. Dabei wird die Oseensche Strömung durch eine gewisse naheliegende Strömung ersetzt, bei der der Druckübergang in bestimmter stetiger Weise durch die Gleitungsintervalle hindurch erfolgt. Läßt man nachher die Ausdehnung des Gleitungsintervalles nach Null konvergieren, so wird es möglich, auf eine der Oseenströmung entsprechende Druckbestimmung zu schließen.

5. Gehen wir umgekehrt davon aus, es handle sich darum, eine möglichst genaue Lösung der vollständigen Gleichungen in der Nähe des Körpers zu erhalten, so würden wir immer, bei Annahme von sehr kleinen Gleitintervallen und vollständigem Haften an der übrigen Rückseite, entweder v' sehr klein oder $= 0$ haben. Die vollständige Gleichung:

$$\varrho \left(u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \mu \Delta \bar{w}$$

würde somit, in der unmittelbaren Nähe von S_h mit guter Näherung in die Gleichung

$$\varrho u_{S_h}(y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \mu \Delta \bar{w} \quad (3)$$

übergehen. Aus (3) folgert man aber unter allgemeinen Voraussetzungen, daß die längs der Körperoberfläche exakt gültige Beziehung:

$$q = -\mu \int (\Delta u dx + \Delta v dy)$$

wirklich, für $\mu \rightarrow 0$, die Formel:

$$q = -\varrho \int u_{S_h}(y) \bar{w} dy$$

ergibt.

6. Die explizite Durchführung des oben geschilderten Vorganges kann in wenigen Worten abgefertigt werden. Die besondere Art, Gleitintervalle einzuführen ist mehr oder weniger gleichgültig. Das unten angeführte Resultat bezieht sich auf folgende Anordnung. Der Zylinderumfang wird vom vorderen Staupunkte aus in Bogenmaß von 0 bis 2π gerechnet. Es wird angenommen, daß die Flüssigkeit zwischen $2\pi - a$ und a vorbei gleitet, so daß die Gleitintervalle die Winkel zwischen $2\pi - a$ bis $\frac{3\pi}{2}$ und zwischen $\frac{\pi}{2}$ und a einnehmen. Um zu erzielen, daß die Gleitung der Flüssigkeit gegen die Rückseite hin stetig gegen Null retardiert wird, führen wir vom Anfang an in die Streifen:

$$\begin{aligned} 1 > y > \sin \alpha, \\ -1 < y < -\sin \alpha, \end{aligned} \quad x < 0,$$

eine geeignete Wirbelverteilung an. Es sei z. B. eine geradlinige Strömung $w^0(y)$ vorhanden derart, daß:

$$w^0 = \text{Konst.} = -U$$

außerhalb des Oseenschen Wirbelstreifens, und daß am Zylinder:

$$u^0(\sin \vartheta) = u_{s_p}^0 = U \left(-1 + \frac{\cos \vartheta}{\cos a} \right), \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < a$$

$$2\pi - a < \vartheta < \frac{3\pi}{2};$$

$$u^0(\sin \vartheta) = u_{s_h}^0 = 0, \quad a < \vartheta < 2\pi - a.$$

Wir lösen jetzt das folgende Potentialproblem. Eine Geschwindigkeitsfunktion $u' - iv'$ wird so bestimmt, daß:

$$u' \cos \vartheta + v' \sin \vartheta + u_{s_p}^0 \cos \vartheta = 0, \quad -a < \vartheta < a$$

$$v' = 0, \quad a < \vartheta < 2\pi - a;$$

$$u' = v' = 0, \quad \text{im Unendlichen.}$$

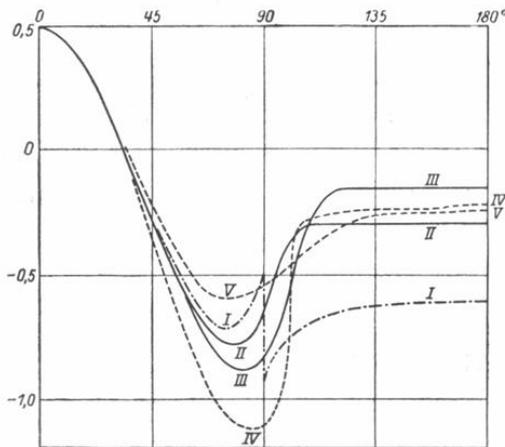
Um zwischen a und $2\pi - a$ Haftung zu erzielen, wird nachher eine geradlinige turbulente Strömung nach dem Schema Oseens überlagert.

Die Funktion $u' - iv'$ läßt sich nach bekannten Prinzipien konstruieren und ohne Schwierigkeit berechnen. Die so erhaltene Strömung liegt für a nahe $\frac{\pi}{2}$ der Oseenschen Strömung sehr nahe, hat aber überall endlichen Wirbel und ist mit einem stetigen Geschwindigkeits- und Druckverlauf hinter dem Zylinder verbunden.

Die beigelegte Figur zeigt das Resultat der durch Integration über den Gleitungsintervallen mit $u_{s_h} = u_{s_h}^0 + u'$ erzielten Druckberechnung.

Die Kurven haben folgende Bedeutung:

I. Druckverteilung am Zylinderumfang bei direkter Lösung des Oseenschen Problems;



Figur 5

- II. Druckverteilung mit Gleitung, $\alpha = 108^\circ$;
III. „ „ „ „ , $\alpha = 126^\circ$;
IV. Experimentelle Druckwerte, nach Eisner*, für hohe Reynoldssche Zahl;
V. Experimentelle Werte, nach Lafay**.

Der Vergleich der Kurve I mit den Kurven II und III zeigt, daß die lästige Druckdiskontinuität nunmehr verschwunden ist, und daß ferner der große Unterdruck der Kurve I durch einen mäßigeren, im Haftungsbereich konstanten und mit zunehmender Ausdehnung der Gleitintervalle abnehmenden Saugdruck ersetzt wird.

Die Kurven II und III schließen sich, sowohl ihrem allgemeinen Typus nach wie auch quantitativ, den experimentellen Kurven ersichtlich gut an. Durch Integration der Kurven erhält man sofort den Widerstandskoeffizienten. Sowohl die theoretischen wie die experimentellen Kurven zeigen einen sehr kleinen resultierenden Überdruck an der Vorderseite des Zylinders; der Widerstand hängt (im Gegensatz zur Helmholtz-Dirichletschen Diskontinuitätsflächentheorie) fast ausschließlich von dem hinteren Saugdruck ab.

Der experimentell gefundene Widerstand ist sowohl nach Eisner wie nach Lafay zwischen den theoretischen Widerständen nach II und III enthalten.

Die Verringerung des Widerstandes mit erhöhter Gleitung deutet auf die Möglichkeit einer zwanglosen Erklärung des mit steigender Reynoldsscher Zahl abnehmenden Widerstandskoeffizienten. Es mag in diesem Zusammenhang bemerkt werden, daß der Widerstandskoeffizient der reinen Oseenschen Bewegung, mit Haftung an der ganzen Rückseite, nach den obigen Prinzipien als Grenzfall berechnet, sich auf ungefähr 0,5 (in absolutem Maße) erhebt. Dieser Wert deckt sich etwa mit dem experimentell gefundenen Koeffizienten unmittelbar vor dem bei einer Reynoldsschen Zahl von der Größenordnung 10^5 eintretenden Widerstandsabfall.

* Druckmessungen an umströmten Zylindern. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 5, 1925.

** Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience. Tome II, Tafel XII, bis. Encycl. Scientif. Octave Doin, Paris 1921.