

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik

Oseen, Carl Wilhelm

Leipzig, 1927

Dritter Teil. Der Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit

Dritter Teil.

Der Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit.

Einleitung.

Die Flüssigkeit, welche für uns die weitaus größte Bedeutung hat, ist das Wasser. Der Koeffizient der Zähigkeit μ hat für das Wasser einen kleinen Wert (bei 15° C 0,0113). Unter diesen Umständen hat die Frage, wie sich eine Flüssigkeit bei verschwindender Zähigkeit bewegen würde, ein sehr großes Interesse. Es kann scheinen, als ob man diese Frage sofort und ohne Schwierigkeit beantworten könne. In der Tat liegt der Gedanke nahe, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit einfach so auszuführen, daß man in den Differentialgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit $\mu = 0$ setzt. Man kommt in dieser Weise zu den Eulerschen Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit:

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

zurück. Das Studium dieser Gleichungen hat indessen zu Ergebnissen geführt, die mit den jedermann geläufigen Tatsachen in Widerspruch stehen. Die auf sie begründete Theorie der idealen Flüssigkeit lehrt, daß ein Wirbel niemals in einer Flüssigkeit entstehen kann. Sie lehrt ferner, daß ein starrer Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt, keinen Widerstand erfährt (das Paradoxon von Euler oder von d'Alembert).

Welcher ist der innere Grund dieses Widerspruches zwischen der hydrodynamischen Theorie und der Erfahrung? Kann er nicht in der Art der Ausführung des Grenzüberganges zu verschwindender Zähigkeit liegen? Es gibt von einem rein mathematischen Gesichtspunkte aus einen Grund, zu bezweifeln, daß man den Grenzübergang in der oben geschilderten einfachen Weise ausführen kann.

Bei Differentialgleichungen hängt der analytische Charakter der Lösungen wesentlich von den Gliedern höchster Differentiationsordnung ab, also bei den Differentialgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit von den Gliedern der Form $\frac{\partial u_j}{\partial t}$ (höchste Ableitung in bezug auf t), $\mu \Delta u_j, \frac{\partial p}{\partial x_j}$. Es ist unter diesen Umständen mathe-

matisch nicht ohne weiteres erlaubt, den Grenzübergang in der Weise auszuführen, daß man einfach die mit μ behafteten Glieder wegläßt.

Wir werden so zu der Aufgabe geführt, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit in exakter Weise auszuführen. Wir schreiben die hydrodynamischen Differentialgleichungen in der uns wohl-bekannten Form (vgl. S. 12, I^b):

$$\varrho \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right\} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2.$$

Wir gehen von einem Zustand aus, in welchem die Flüssigkeit ruht. Anfänglich gibt es also keinen Wirbel in derselben. Wenn die überlieferte Theorie der idealen Flüssigkeiten der Wahrheit entspricht, so würde, wenn $\mu = 0$ wäre, auch fernerhin kein Wirbel in der Flüssigkeit entstehen können. Nach dieser Theorie behält in der Tat die Zirkulation:

$$\oint u_j dx_j$$

für jede geschlossene, von Partikeln der Flüssigkeit gebildete Kurve einen konstanten, von der Zeit unabhängigen Wert. Wenn anfangs die Zirkulation für jede geschlossene Kurve den Wert Null hat, was insbesondere dann der Fall ist, wenn die Flüssigkeit anfangs ruht, so muß also in jedem Momente für jede geschlossene Kurve die Zirkulation verschwinden. Das ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß die Bewegung wirbellos ist. Wenn jetzt μ nicht Null, aber doch sehr klein ist, so treten zu den Eulerschen Differentialgleichungen nur die kleinen Glieder $\mu \Delta u_j$. Wir hätten also zu erwarten, daß die Wirbelkomponenten:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

sehr klein sind und daß sie beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ gegen Null konvergieren. Wenn die Wirbelkomponenten klein sind, so sind auch die Größen:

$$\varrho u_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

klein. Wir begehen dann einen kleinen Fehler, wenn wir in unseren hydrodynamischen Differentialgleichungen jene Glieder vernachlässigen und dieser Fehler muß gleichzeitig mit μ gegen Null konvergieren. Sind unsere Voraussetzungen richtig, so müssen wir durch Lösung des Systems:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

bei entsprechenden Randbedingungen ein annähernd richtiges Bild der Bewegung bekommen. Wenn dieses Bild bei $\mu \rightarrow 0$ mit der Theorie der idealen Flüssigkeiten übereinstimmt, so erhält diese Theorie dadurch eine Bestätigung. Wenn dagegen die gefundene Bewegung bei $\mu \rightarrow 0$ mit irgendeiner der zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht übereinstimmt, dann muß mindestens eine jener Voraussetzungen falsch sein. Aber unter unseren Voraussetzungen gibt es nur eine, an welcher wir füglich zweifeln können, eben die, daß bei verschwindender Zähigkeit die Theorie der idealen Flüssigkeiten die Wahrheit trifft. Unsere Methode gibt uns also, soweit dieses theoretisch möglich ist, ein Mittel, zu entscheiden, ob diese Theorie eine physikalische Bedeutung hat oder ob sie nur eine mathematische Fiktion ist.

Unsere Methode besitzt aber nicht nur das oben dargelegte negative Interesse, sondern auch ein nicht geringeres positives Interesse. Es gibt keine andere allgemeine Methode, die hydrodynamischen Differentialgleichungen zu behandeln, als diejenige, welche darin besteht, daß man zunächst die quadratischen Glieder vernachlässigt und nach Lösung der so erhaltenen linearen Gleichungen durch die Methode der sukzessiven Näherungen die anfangs vernachlässigten Glieder berücksichtigt. Auch bei kleinem μ ist dies die einzige bis jetzt bekannte mathematisch sichere und zuverlässige Methode, die zu unserer Verfügung steht. Von diesem Gesichtspunkte aus stellt das durch unseren Grenzübergang erhaltene Ergebnis eine erste Näherung der erstrebten, vollständigen Lösung dar. Aus den Widerstandsberechnungen von Zeilon geht nun hervor, daß diese erste Näherung viel mehr ergibt, als man von vornherein erwarten konnte. Die Druckverteilung auf der Vorderseite eines Körpers kommt in den von diesem Forscher behandelten Fällen schon bei dieser ersten Näherung fast genau richtig heraus. Und wenn bei dieser ersten Näherung der Unterdruck auf der Rückseite des Körpers zu groß ausfällt, so kann man, wie Zeilon an dem Beispiel des Kreiszyinders gezeigt hat, durch weiteren Ausbau der Theorie in zweiter Näherung auch in diesem Punkte zu einer fast vollständigen Übereinstimmung mit den Tatsachen gelangen. An dieser Stelle mag schließlich an die schöne Theorie des Magnuseffektes erinnert werden, die Prof. Zeilon in nahem Anschluß an die in diesem Teile entwickelten Gedanken und Methoden gegeben hat. Über die zuletzt erwähnten Arbeiten von Zeilon gibt der Anhang einen Bericht.

§ 23. Ein spezieller Fall. Eine dünne Platte.

23.1. Ansatz zur Lösung des Problems im Anschluß an den früheren Ansatz bei dem Ellipsoid.

Wir betrachten in diesem Paragraphen einen speziellen Fall. In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum einnimmt, bewege sich eine unendlich dünne, ebene Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit U in einer gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen Anfangspunkt auf der Scheibe liegt und sich mit dieser bewegt, und dessen x_1 -Achse mit der Bewegungsrichtung der Scheibe parallel und gleichgerichtet ist. Wir wenden in unserer üblichen Weise für die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit, auf dieses Koordinatensystem bezogen, die Bezeichnungen: $-U + u_1, u_2, u_3$ an. Zur Bestimmung der Größen u_j haben wir das System III^b S. 13:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = \varrho u_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

$$q = p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Wir vernachlässigen die rechten Seiten der Gleichungen (1) und suchen das so erhaltene System:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

n dem Grenzfall $\mu = 0$ zu lösen.

Wir bezeichnen mit $\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3$ die Koordinaten der Punkte der Scheibe. Wir setzen wie üblich $\varrho U/2\mu = \sigma$. Nach unseren Annahmen ist $\sigma > 0$. Wir setzen ferner:

$$r = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}, \quad s = r + x_1$$

$$\Phi(x - \xi) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma s} \frac{1 - e^{-a}}{a} da.$$

Die Funktion Φ genügt, wie wir Seite 33 gesehen haben, den partiellen Differentialgleichungen:

$$\Delta_x \Phi = \frac{2e^{-\sigma s}}{r}, \quad (4)$$

$$\Delta_x \Phi + 2\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{r}. \quad (5)$$

Wir bezeichnen mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Funktionen von ξ_2, ξ_3 und versuchen unser Problem durch den Ansatz (vgl. § 18):

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \sigma \left(\delta_{jk} \Delta_x - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \right) \int_S \varphi_k \Phi(x - \xi) dS_\xi, \\ q &= -\varrho U \int_S \varphi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

zu lösen. S ist hier die Oberfläche der einen Seite, etwa der vorderen Seite der Scheibe. $dS_\xi = d\xi_1 d\xi_2$ ist ein Element von S .

23 2. Aufstellung von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Unser Ansatz (6) genügt wegen (5) den partiellen Differentialgleichungen (3). Die Größen u_j verschwinden in unendlicher Ferne. Zur Befriedigung der Grenzbedingungen $u_1 = U, u_2 = u_3 = 0$ an beiden Seiten der Scheibe verfügen wir über die drei Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

In der ersten Gleichung (6), die wir wegen (4) auch in der Form:

$$u_j = 2\sigma \int_S \varphi_j \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \sigma \varphi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dS_\xi \quad (7)$$

schreiben können, setzen wir zunächst $j = 1$. Wir setzen der Kürze wegen (bemerke hier und im folgenden, daß $\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{s}{r}$!):

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1 - e^{-\sigma s}}{r} = P(x_1 - \xi). \quad (8)$$

Wir bemerken, daß, wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 sich in der Umgebung des Punktes $\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3$ befindet, der Ausdruck:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\sigma s}{r^2} e^{-\sigma s} - \frac{x_1}{r^3} (1 - e^{-\sigma s})$$

sich wie:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\sigma x_1}{r} = \sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3} \right)$$

verhält, und daß für $x_1 = 0$, $r > 0$:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\sigma}{r_0} e^{-\sigma r_0},$$

wo: $r_0 = [r]_{x_1=0} = \sqrt{(x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$.

Die Gleichung (7) ergibt unter diesen Umständen, für $j = 1$:

$$(u_1)_{x_1=0} = \sigma \int_S \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \varphi_2 P_{x_1=0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \varphi_3 P_{x_1=0} dS_\xi.$$

Zur Bestimmung von φ_1 , φ_2 , φ_3 erhalten wir so eine erste Gleichung:

$$\sigma \int_S \varphi_1 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \varphi_2 P_{x_1=0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \varphi_3 P_{x_1=0} dS_\xi = U. \quad (9)$$

Sie muß erfüllt sein, wenn der Punkt $x_1 = 0$, x_2 , x_3 im Inneren von S liegt.

Weitere Gleichungen zur Bestimmung von φ_1 , φ_2 , φ_3 erhalten wir aus den zwei übrigen Gleichungen (7). Die Grenzbedingungen $u_2 = u_3 = 0$ an der Scheibe ergeben:

$$\left. \begin{aligned} 2\sigma \int_S \varphi_2(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \sigma \varphi_k \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi &= 0, \\ 2\sigma \int_S \varphi_3(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \sigma \varphi_k \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wenn $x_1 = 0$ ist und wenn der Punkt $x_1 = 0$, x_2 , x_3 im Inneren der Platte liegt. Wir können die letzten Gleichungen auch in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right]_{x_1=0} dS_\xi &= 4\pi \psi(x_2, x_3), \\ 2\sigma \int_S \varphi_2 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi &= 4\pi \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad 2\sigma \int_S \varphi_3 \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi = 4\pi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

schreiben.

23.3. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen bei $\mu \rightarrow 0$.

Die Gleichungen (9), (10) — oder (9), (11) — sind leider zu kompliziert, um eine Lösung in einfacher Form zu gestatten. Zum Glück vereinfachen sie sich wesentlich in eben dem Falle, der für uns das größte Interesse besitzt, dem Grenzfalle $\mu = 0$, dies wenigstens dann, wenn wir voraussetzen dürfen, daß beim $\mu \rightarrow 0$, also bei $\sigma \rightarrow \infty$ die Funk-

tionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ gegen endliche, stetige und differenzierbare Funktionen $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}, \psi^{(0)}$ konvergieren, und zwar in solcher Weise, daß:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_2}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_3}.*$$

Man hat, wenn φ eine stetige Funktion ist und wenn der Punkt $x_1 = 0$, x_2, x_3 zur Scheibe gehört:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \int_S \varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \int_{r_0 < \varepsilon} \varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \varphi(x_2, x_3) \iint_{r_0 < \varepsilon} e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta + \\ &+ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \iint_{r_0 < \varepsilon} [\varphi(x_2 + r_0 \cos \vartheta, x_3 + r_0 \sin \vartheta) - \varphi(x_2, x_3)] e^{-\sigma r_0} dr_0 d\vartheta = \\ &= 2\pi \varphi(x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dagegen ist:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma r_0}}{r_0} dS_\xi = 0,$$

wenn der Punkt $x_1 = 0, x_2, x_3$ außerhalb von S liegt. Wir haben ferner:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) P_{x_1=0} dS_\xi = \int \frac{\varphi}{r_0} dS_\xi \\ & \lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right]_{x_1=0} dS_\xi = \int_S \varphi(\xi_2, \xi_3) \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_\xi \end{aligned}$$

usw. Wir bekommen also zur Bestimmung von $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}, \psi^{(0)}$ die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2^{(0)}(x_2, x_3) &= \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_2}, & \varphi_3^{(0)}(x_2, x_3) &= \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_3}, \\ 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{dS_\xi}{r_0} - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{dS_\xi}{r_0} &= U, \\ 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_\xi - \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{x_3 - \xi_3}{r_0^2} dS_\xi - \\ &- \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} = 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

* Von diesen Voraussetzungen unabhängige Untersuchungen über den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ werden in § 26 mitgeteilt.

23 4. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$.

Wir wollen annehmen, daß die Funktion $\psi^{(0)}$ am Rande der Scheibe verschwindet. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{dS_\xi}{r_0} &= - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{1}{r_0} dS_\xi = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_S \frac{\psi^{(0)}}{r_0} dS_\xi, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{dS_\xi}{r_0} &= \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int_S \frac{\psi^{(0)}}{r_0} dS_\xi, \\ \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{x_2 - \xi_2}{r_0^2} dS_\xi + \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{x_3 - \xi_3}{r_0^2} dS_\xi &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \log r_0 dS_\xi + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \log r_0 dS_\xi = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log r_0 dS_\xi = 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3), \end{aligned}$$

wenn der Punkt x_2, x_3 auf S liegt.

Wir erhalten also zur Bestimmung von $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} &= U, \\ 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Sie müssen erfüllt sein, wenn der Punkt $x_1 = 0, x_2, x_3$ im Inneren von S liegt.

23 5. Zurückführung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ auf eine Potentialfunktion A .

Die Bestimmung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ aus (13) kann als eine potentialtheoretische Randwertaufgabe aufgefaßt werden. Wir setzen:

$$- \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r} = A(x_1, x_2, x_3). \quad (14)$$

Die Funktion A ist eine überall mit Ausnahme der Scheibe reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung. Ihr Verhalten auf der Scheibe geht aus den Glei-

chungen (13) hervor. Sie zeigen, daß auf derselben*:

$$\begin{aligned}\lim_{x_1=-0} A &= \lim_{x_1=-0} \left\{ - \int_S \frac{x_1}{r^3} \psi^{(0)} dS_\xi - \int_S \varphi_1^{(0)} \frac{dS_\xi}{r} \right\} = \\ &= 2\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3) - \int_S \varphi_1^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} = 0, \\ \lim_{x_1=+0} \frac{\partial A}{\partial x_1} &= \lim_{x_1=+0} \left\{ \int_S \frac{x_1}{r^3} \varphi_1^{(0)} dS_\xi + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_S \psi^{(0)} \frac{dS_\xi}{r} \right\} = \\ &= 2\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{dS_\xi}{r_0} = U.\end{aligned}$$

Wenn wir A bestimmt haben, so ergeben sich $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ aus den Formeln:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=+0} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(U - \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} \right) \\ \psi^{(0)}(x_2, x_3) &= -\frac{1}{4\pi} (A_{x_1=+0} - A_{x_1=-0}) = -\frac{1}{4\pi} A_{x_1=+0}.\end{aligned} \right\} (15)$$

Die Bestimmung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ ist also auf die Bestimmung der Funktion A zurückgeführt worden.

236. Aufstellung einer Greenschen Funktion zur Bestimmung von A .

Wir wollen annehmen, daß wir eine vierwertige Potentialfunktion mit den folgenden Eigenschaften finden können.

1. Ihre Werte werden permutiert, wenn der Punkt x um die Randkurve der Scheibe eine kleine, geschlossene Kurve beschreibt, welche die Scheibe durchdringt.
2. Sie nimmt auf der Scheibe überall endliche Werte an.
3. Ihre Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x_1 , x_2 , x_3 werden am Rande höchstens derart unendlich, daß sie über eine beliebige Fläche integriert einen endlichen Wert geben.

* Der hier benutzte potentialtheoretische Satz wird selbstverständlich, wenn man bedenkt, daß $-\frac{x_1}{r^3} dS_\xi$, bzw. $+\frac{x_1}{r^3} dS_\xi$ der Raumwinkel ist, unter welchem das Flächenelement dS_ξ vom Punkte x_1 , x_2 , x_3 aus gesehen wird. Vgl. übrigens etwa Korn, Potentialtheorie I, S. 74.

4. Sie besitzt einen Zweig, der im Punkte y_1, y_2, y_3 wie:

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}$$

unendlich wird, während die übrigen Zweige dort regulär bleiben.

5. Sie ist, von diesen Ausnahmen abgesehen, überall regulär und verschwindet in unendlicher Ferne.

$F(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ sei eine Potentialfunktion mit den in 1 bis 5 aufgezählten Eigenschaften. F_1, F_2, F_3, F_4 seien ihre Zweige, wobei wir den Übergang von F_j zu F_{j+1} beim Durchgange des Punktes x durch die Scheibe geschehen lassen. F_1 sei derjenige Zweig, der im Punkte y_1, y_2, y_3 unendlich ist. F_{j+1} möge endlich aus F_j dadurch hervorgehen, daß der Punkt x_1, x_2, x_3 eine geschlossene Kurve beschreibt, welche die Scheibe einmal durchdringt und sich ihr dabei von der Seite der negativen x_1 -Achse nähert. Wir haben dann:

$$\left. \begin{aligned} F_j(x_1 = -0, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_{j+1}(x_1 = +0, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \\ \lim_{x_1 = -0} \frac{\partial F_j}{\partial x_1} &= \lim_{x_1 = +0} \frac{\partial F_{j+1}}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} (16)$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) + F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) - \\ &- F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) - F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= G(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß wegen der Symmetrie:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_1(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3), \\ F_2(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_4(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3), \\ F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= F_3(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned} \right\} (17)$$

Wir haben nach (16) und (17):

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 = -0} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= \lim_{x_1 = -0} F_1(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1 = +0} F_1(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \lim_{x_1 = -0} F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 = -0} F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= \lim_{x_1 = -0} F_3(-x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1 = +0} F_3(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \lim_{x_1 = -0} F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Also:

$$\lim_{x_1 = -0} G = 0.$$

Wir haben ferner nach (16) und (17):

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1=-0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &- \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3), \\ & \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_4(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &= \lim_{x_1=-0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_3(x_1, x_2, x_3; -y_1, y_2, y_3) = \\ &- \lim_{x_1=+0} \frac{\partial}{\partial x_1} F_3(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Folglich:

$$\lim_{x_1=+0} \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0.$$

Wenn wir die Scheibe als undurchdringlich auffassen, so ist G eine im ganzen Raume eindeutige Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche überall mit Ausnahme des Punktes y regulär ist, während sie dort wie:

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}$$

unendlich wird. G verschwindet im Unendlichen und genügt an der Scheibe den Bedingungen:

$$G_{x_1=-0} = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \right)_{x_1=+0} = 0.$$

Wir können unter diesen Umständen G als Greensche Funktion benutzen, um A zu bestimmen und wir erhalten:

$$A(x_1, x_2, x_3) = -\frac{U}{4\pi} \int_S G(0, \xi_2, \xi_3; x_1, x_2, x_3) dS_\xi.$$

Man zeigt mit Hilfe des Greenschen Satzes leicht, daß

$$G(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$$

in bezug auf die beiden Punkte x und y symmetrisch ist. Man hat also auch:

$$A(x_1, x_2, x_3) = -\frac{U}{4\pi} \int_S G(x_1, x_2, x_3; 0, \xi_2, \xi_3) dS_\xi.$$

Da in der Verzweigungskurve $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ ist, so folgt, daß A und somit $\psi^{(0)}$ am Rande verschwinden.

Wir wurden zu der Aufgabe geführt, die Funktion F zu bestimmen. In einem der interessantesten Fälle ist diese Aufgabe leicht lösbar. Wenn unsere Scheibe kreisförmig ist, kann man die Funktion F entweder durch ein Sommerfeldsches Integral darstellen oder F nach Ringfunktionen entwickeln. Man bestätigt leicht, daß A in diesem Fall auf der Scheibe überall endlich, im Innern derselben beliebig oft differenzierbar ist und am Rande verschwindet. In diesem Falle führt also unsere Methode die Gleichungen (9), (10) — oder (9), (11) — S. 216 bei $\mu \rightarrow 0$ aufzulösen sicher zum Ziele.

Wir werden später, in § 31 S. 311, einer expliziten Lösung des Problems der kreisförmigen Platte begegnen. Jener Paragraph kann unmittelbar nach diesem gelesen werden. Wir haben ihn nur deswegen an den Schluß gesetzt, um möglichst rasch zu den praktisch wichtigeren Fällen zu kommen.

23 7. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit außerhalb des von der Scheibe durchschrittenen Raumes.

Wir kehren zu den Gleichungen (6) S. 215 zurück. Wir nehmen an, daß es gelungen sei, die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus den Gleichungen (9) und (10) zu bestimmen und daß diese Funktionen nebst ihren Ableitungen beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ im Innern der Scheibe gleichmäßig gegen die Funktionen $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}$ und ihre Ableitungen konvergieren. Wir nehmen überdies an, daß am Rande $\psi^{(0)} = 0$ ist. Wir wollen unter diesen Voraussetzungen, unter Annahme, daß der Punkt x sich außerhalb der Scheibe befindet, den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ ausführen. Wir haben wegen der Gleichungen (6) S. 215, (12) S. 217 und (14) S. 218:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} q = - \varrho U \int_S \varphi_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_\xi = - \left. \begin{aligned} & - \varrho U \int_S \left\{ \varphi_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \right\} dS_\xi = - \\ & - \varrho U \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \left(\frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right) dS_\xi = \varrho U \frac{\partial A}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Durch jeden Punkt der Randkurve unserer Scheibe und in einer der Bewegungsrichtung derselben entgegengesetzten Richtung ziehen wir eine Gerade. Wir nehmen zuerst an,

daß der Punkt x außerhalb des von dieser Geraden erzeugten Zylinders Z liegt. Wir haben nach (7) S. 215:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= 2\sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) (1 - e^{-\sigma s}) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wenn der Punkt x außerhalb von Z liegt, so haben wir ferner $s > 0$ und folglich:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} e^{-\sigma s} dS_\xi = 0. \quad (21)$$

Folglich:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_j &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_\xi - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_j} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_2} \log s dS_\xi - \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_j} \int_S \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \xi_3} \log s dS_\xi = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)} \log s dS_\xi. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Dabei wurde unter Berücksichtigung, daß $\psi^{(0)}$ am Rande verschwindet, partiell integriert.

Die Funktion $\log s$ ($s > 0$) genügt der Laplaceschen Gleichung $\Delta_x \log s = 0$. Wir haben folglich nach (14):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_j &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left\{ \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log s \cdot \psi^{(0)} \right\} dS_\xi = - \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \left\{ \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} - \psi^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right\} dS_\xi = \frac{\partial A}{\partial x_j}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

238. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume.

Wenn wir zu dem Falle übergehen wollen, daß der Punkt x innerhalb vom Zylinder Z liegt, so müssen wir bedenken, daß die Gleichungen (20) und (21) jetzt nicht mehr erfüllt zu sein brauchen,

weil es jetzt im Integrationsbereiche einen Punkt $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$ gibt, in welchem s den Wert Null annimmt. Nur die Umgebung dieses Punktes kann zu den linken Seiten dieser Gleichungen Beiträge geben, die nicht beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ verschwinden. Um den Grenzwert des Integrals:

$$\int \sigma \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi$$

$$(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2$$

zu bestimmen, führen wir neue Integrationsvariable ein:

$$\xi_2 = x_2 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} \alpha \cos \beta, \quad \xi_3 = x_3 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} \alpha \sin \beta.$$

Wenn ε genügend klein ist, so können wir mit genügender Annäherung $r = |x_1|$, $s = \frac{(x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}{2|x_1|} = \frac{\alpha^2}{\sigma}$ setzen.

Wir erhalten so:

$$\varepsilon \sqrt{\frac{\sigma}{2|x_1|}} \int_0^{2\pi} \int_0^\sigma \varphi_j \left(x_2 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} \alpha \cos \beta, \quad x_3 + \sqrt{\frac{2|x_1|}{\sigma}} \alpha \sin \beta \right) e^{-\alpha^2} d\beta.$$

Der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$, d. h. $\sigma \rightarrow \infty$ ergibt:

$$2\pi \varphi_j^{(0)}(x_2, x_3).$$

Um das Integral:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma s} \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi$$

bei $\mu \rightarrow 0$ zu untersuchen, schreiben wir es in der Form:

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_k} \int_s^\infty \frac{e^{-\sigma \alpha}}{\alpha} d\alpha dS_\xi.$$

Wir haben:

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = -\frac{\partial s}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_3} = -\frac{\partial s}{\partial \xi_3}.$$

Durch partielle Integrationen können wir deshalb unser Integral so umformen, daß neben Randintegralen, welche über den Kreis $(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = \varepsilon^2$ zu erstrecken sind und also für $\sigma \rightarrow \infty$ verschwinden, nur Integrale von den folgenden drei Typen vorkommen:

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \int_s^\infty \frac{e^{-\sigma \alpha}}{\alpha} d\alpha dS_\xi,$$

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_s^\infty \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} d\alpha dS_\xi = - \int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi,$$

$$\int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_s^\infty \frac{e^{-\sigma\alpha}}{\alpha} d\alpha dS_\xi = - \int_K \tilde{\varphi}(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi.$$

K ist hier eine Abkürzung für: $(\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2$. Man zeigt leicht unter Berücksichtigung der Tatsache, daß r oberhalb einer positiven Grenze liegt, daß alle drei Integrale bei $\mu \rightarrow 0$ verschwindende Grenzwerte haben. Wenn der Punkt x innerhalb des Zylinders Z liegt, so haben wir also:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma \int_S \varphi_j(\xi_2, \xi_3) \frac{e^{-\sigma s}}{r} dS_\xi = 2\pi \varphi_j^{(0)}(x_2, x_3), \quad (20')$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) e^{-\sigma s} \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi = 0. \quad (21')$$

Wir haben schließlich unter unserer jetzigen Voraussetzung, daß der Punkt x innerhalb vom Zylinder Z liegt, den Grenzwert des Gliedes:

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi$$

rechts in (19) zu bestimmen. Man sieht leicht, daß die Gleichung (22):

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi = \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_\xi - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \int_S \psi^{(0)} \log s dS_\xi \end{aligned}$$

immer noch gültig ist. Wir haben folglich:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \varphi_k(\xi_2, \xi_3) \frac{\partial \log s}{\partial x_k} dS_\xi = \\ \left. \begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S \frac{\varphi_1^{(0)}}{r} dS_\xi + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_1} \int_S \psi^{(0)} \frac{\partial \log s}{\partial x_1} dS_\xi - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_\xi = \\ & = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_\xi. \end{aligned} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des letzten Gliedes in (24) betrachten wir das Integral:

$$J = \int_{-l}^0 d\xi_1 \int_S \frac{\psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) dS_\xi}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}}.$$

Wir haben (wenn $\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} = \sqrt{(x_k - \xi_k)^2}$ gesetzt wird):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \log \{ \sqrt{(x_k - \xi_k)^2} + x_1 - \xi_1 \} = - \frac{1}{\sqrt{(x_k - \xi_k)^2}}.$$

Wir haben demzufolge:

$$\begin{aligned} J &= - \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_\xi + \\ &+ \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log \{ \sqrt{(x_1 + l)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} + x_1 + l \} dS_\xi = \\ &\quad - J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Nach unseren Annahmen ist x_1 eine negative Größe. Wir wählen jetzt die positive Größe l so groß, daß $l + x_1$ positiv ausfällt. Wir haben dann:

$$\Delta_x J_2 = 0.$$

Folglich:

$$\Delta_x J_1 = - \Delta_x J.$$

Nun läßt sich J als das Newtonsche Potential von Massen auffassen, welche hinter der Scheibe liegen. Ihre Raumdichte ist $\psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3)$. Wir haben folglich:

$$\Delta_x J = - 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3)$$

und also:

$$\Delta_x \int_S \psi^{(0)}(\xi_2, \xi_3) \log s dS_\xi = \Delta_x J_1 = 4\pi \psi^{(0)}(x_2, x_3). \quad (25)$$

Aus (19), (20'), (21'), (24) und (25) folgt wegen der ersten Gleichungen (12):

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_1(x_1, x_2, x_3) &= 4\pi \varphi_1^{(0)}(x_2, x_3) + \frac{\partial A}{\partial x_1}, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} u_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial A}{\partial x_2}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial A}{\partial x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 sich in dem von der Scheibe durchschrittenen Bereiche befindet. — Wegen der Beziehungen (15) und wegen

$$A = \frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0 \text{ für } x_1 = -0$$

gilt also für die Geschwindigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} u_1 &= \frac{\partial A}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1=-0} + U, & \lim_{\mu \rightarrow 0} u_2 &= \frac{\partial A}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \right)_{x_1=-0}, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} u_3 &= \frac{\partial A}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_3} \right)_{x_1=-0}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Diese Formeln zeigen sofort, daß die Flüssigkeit auch bei verschwindender Zähigkeit an der Rückseite der Scheibe haftet.

239. Zusammenfassung.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum erfüllt, bewegt sich eine ebene Scheibe mit konstanter Geschwindigkeit (Komponenten U_1, U_2, U_3) in einer gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Es wird angenommen, daß die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist und den Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j + \varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

gehört. Bei $\mu \rightarrow 0$ erhalten wir unter diesen Umständen für u_j und q die folgenden Ausdrücke:

In dem von der Scheibe nicht durchschrittenen Bereiche:

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}.$$

In dem von der Scheibe durchschrittenen Bereiche:

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h + U_j.$$

$\left(\frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h$ bezeichnet hier den Wert, den $\frac{\partial A}{\partial x_j}$ in demjenigen Punkte der Rückseite der Scheibe annimmt, in welchem diese von einer durch den Punkt x_1, x_2, x_3 gezogenen, mit der Geschwindigkeit (U) der Scheibe parallelen Geraden getroffen wird.

A ist eine außerhalb der Scheibe reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta A = 0.$$

An der Scheibe genügt A den Bedingungen:

an der Vorderseite:

$$\frac{dA}{dn} = U_n,$$

wenn n die nach außen gezogene Normale der Scheibe ist; auf der Rückseite:

$$A = 0.$$

Qualitativ können wir diese Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen: Bei dem Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ tritt in der Flüssigkeit eine Diskontinuitätsfläche auf. Diese Fläche ist ein Zylinder, der von der Randkurve der Scheibe ausgeht und sich in der Richtung erstreckt, welche der Bewegungsrichtung der Scheibe entgegengesetzt ist. Außerhalb dieser Fläche gehorcht die Bewegung den Gesetzen für die wirbellose Bewegung einer idealen Flüssigkeit. Innerhalb derselben herrschen andere Gesetze. Über die wirbellose Bewegung ist hier eine Wirbelbewegung überlagert, welche von dem Gliede $\left(\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)_n$ herrührt. Die Flüssigkeit gleitet an der Vorderseite der Scheibe, sie haftet an der Rückseite.

Mit der Theorie der idealen Flüssigkeiten stehen unsere Ergebnisse in schroffem Widerspruch. Dagegen stimmen sie, wenigstens qualitativ, gut mit den Tatsachen überein. Wir schließen hieraus, daß die paradoxen Resultate der Theorie der idealen Flüssigkeiten auf der unrichtigen Durchführung des Grenzüberganges zu verschwindender Zähigkeit beruhen.

§ 24. Allgemeinere Untersuchungen.

241. Aufgabestellung. Ansatz zur Lösung auf Grund des § 5.

Im vorigen Paragraphen haben wir uns mit einem sehr speziellen Falle beschäftigt. In diesem Paragraphen wenden wir uns allgemeineren Betrachtungen zu. Wir nehmen an, daß ein Körper sich in irgendeiner Weise in einer Flüssigkeit bewegt. Wir brauchen nicht vorauszusetzen, daß der Körper starr ist. Was wir voraussetzen, ist nur, daß eine Flüssigkeit, die sonst den ganzen Raum erfüllt, nach innen von einer, im allgemeinen von der Zeit abhängigen Fläche $S(t)$ begrenzt wird, auf welcher die Geschwindigkeitskomponenten u_j vorgeschriebene Werte annehmen sollen. Wir nehmen an, daß das ganze System für $t < t_0$ ruht. Bei $t = t_0$ fängt die Bewegung an. Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung der Flüssigkeit für $t > t_0$ unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder und im Grenzfalle $\mu \rightarrow 0$ zu

berechnen. Wir müssen dabei, wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, mit der Möglichkeit rechnen, daß die ganze Flüssigkeit bei $t = t_0$ sich auf einmal zu bewegen anfängt. Wir setzen voraus, daß eine derartige, momentan einsetzende Bewegung wirbellos ist. Wir stellen uns also die Aufgabe, für $t \geq t_0$ und für $\mu \rightarrow 0$ das System:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

mit den Nebenbedingungen: auf $S(t)$: $u_j = v_j(S, t)$; in unendlicher Ferne: $u_j = 0$; für $t = t_0$: $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0$, ($j, k = 1, 2, 3$) zu lösen.

Der Behandlung unseres Problems legen wir einige Annahmen betreffs der Fläche $S(t)$ und der Funktionen $v_j(S, t)$ zugrunde. Wir nehmen zunächst an, daß $S(t)$ stetige Tangentenebenen besitzt. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt Q von $S(t)$. Wir beziehen die Fläche in der Umgebung von Q auf ein Bezugssystem x'_1, x'_2, x'_3 , dessen Anfangspunkt der Punkt Q ist, dessen x'_3 -Achse längs der nach außen gezogenen Normale der Fläche im Punkte Q fällt und dessen x'_1 - und x'_2 -Achsen zwei gegeneinander senkrechte Tangenten von $S(t)$ in Q sind. Wir schreiben die Gleichung der Fläche $S(t)$ in der Form:

$$x'_3 = F(x'_1, x'_2, t)$$

und wir nehmen an, daß die Funktion F in der Umgebung des Punktes Q stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen in bezug auf x'_1, x'_2, t besitzt. Wir nehmen ferner an, daß die Funktionen $v_j(S, t)$ sich in der Umgebung von Q als zweimal stetig differenzierbare Funktionen von x'_1, x'_2, t darstellen lassen.

Um unsere Aufgabe zu lösen, gehen wir von den in § 5 gewonnenen Ergebnissen aus. Sie zeigen, daß wir durch den folgenden Ansatz eine außerhalb von $S(t)$ und für $t \geq t_0$ gültige Lösung des Systems (1) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q; t - \tau) dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= - \sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(t)} h_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

x_1, x_2, x_3 sind hier die Koordinaten des Punktes P in einem festen, rechtwinkligen Bezugssysteme. Die Koordinaten des Punktes Q im selben System werden wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnen. Wir haben ferner:

$$\left. \begin{aligned} u_{jk}(P, Q; t - \tau) &= -\delta_{jk} \Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \\ \Phi &= \frac{1}{r} \int_0^r E(a, t - \tau) da, \\ r^2 &= (x_j - \xi_j)^2, \quad r \geq 0; \quad E(a, t - \tau) = \frac{e^{-\frac{c a^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t - \tau}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ψ ist eine Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \psi = 0.$$

Unsere Aufgabe ist, die Funktion $h_k(Q, \tau)$ und die Potentialfunktion ψ so zu bestimmen, daß bei verschwindendem μ die Grenzbedingungen erfüllt werden. Wir werden dabei annehmen, daß die Funktionen h_k in bezug auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieselben Eigenschaften haben, welche wir oben für die Funktionen $v_j(S, t)$ angenommen haben.

24.2. Vorläufige Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)*}$.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Element $\sigma(\tau)$ der Fläche $S(\tau)$ und bilden das Integral:

$$\begin{aligned} J_{j\sigma} &= \int_{\sigma(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q, t - \tau) dS_Q = \\ &= - \int_{\sigma(\tau)} h_j(Q, \tau) \Delta \Phi dS_Q + \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} dS_Q = \mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)} + \mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}. \end{aligned}$$

Wir haben, da Φ nur von r und $t - \tau$ abhängt:

$$\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Phi dS_Q.$$

Wir betrachten einen bestimmten Punkt $\bar{Q}$ des Flächenelementes $\sigma(\tau)$. $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ seien die Koordinaten desselben im festen Bezugssysteme. Dem Punkte $\bar{Q}$ entspricht in der oben dargelegten Weise ein Bezugssystem x_1', x_2', x_3' — und ξ_1', ξ_2', ξ_3' — dessen x_3' - (oder ξ_3' -) Achse mit der im Punkte Q nach außen gezogenen Normal der Fläche $S(\tau)$ zusammenfällt. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten x_1, x_2, x_3

* Die Abteilungen 24.2–24.6 behandeln das Verhalten der Flächenintegrale in (2) bei $\mu \rightarrow 0$.

und den Koordinaten x_1', x_2', x_3' desselben Punktes mögen durch die Gleichungen:

$$x'_j = a_{jk} (x_k - \bar{\xi}_k), \quad a_{jk} a_{jl} = \delta_{kl}$$

ausgedrückt sein. Wir haben dann ebenso:

$$\xi'_j = a_{jk} (\xi_k - \bar{\xi}_k).$$

Wir haben ferner, wenn wir mit h'_j die Komponente des Vektors h_1, h_2, h_3 längs der x'_j -Achse bezeichnen:

$$h'_j = a_{jk} h_k, \quad h_j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} = h'_j \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = a_{kj} \frac{\partial}{\partial x'_k} = -a_{kj} \frac{\partial}{\partial \xi'_k}.$$

Also:

$$\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)} = \int_{\sigma(\tau)} h'_k a_{kj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_k \partial \xi'_j} dS_Q.$$

243. Definitive Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}$.

Wir zerlegen $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}$ in zwei Teile. Einen Teil:

$$\int_{\sigma(\tau)} h'_3 a_{3j} \Delta \Phi dS_Q = \int_{\sigma(\tau)} h_n \cos(n x_j) \Delta \Phi dS_Q$$

führen wir mit $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)}$ zusammen und bilden aus diesen beiden Ausdrücken ein Glied:

$$\mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)} = - \int_{\sigma(\tau)} [h_j - h_n \cos(n x_j)] \Delta \Phi dS_Q. \quad (4)$$

Den übrigen Teil von $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}$ nennen wir $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}$ und haben dann:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)} &= \int_{\sigma(\tau)} \left[h'_k a_{kj} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_k \partial \xi'_j} - h'_3 a_{3j} \Delta \Phi \right] dS_Q = \\ &= \int_{\sigma(\tau)} \left[h'_1 a_{1j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_j} + h'_2 a_{2j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_j} + \right. \\ &\quad \left. + h'_3 \left[a_{1j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_3} + a_{2j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} - a_{3j} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_2'^2} \right) \right] \right] dS_Q. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

24.4. Das Verhalten des Integrales $J_{j\sigma}^{(1)}$ bei kleinem μ .

Wir betrachten zuerst das Integral $J_{j\sigma}^{(1)}$. Wir haben:

$$\Delta\Phi = -\frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Also:

$$J_{j\sigma}^{(1)} = \int_{\sigma(\tau)} (h_j - h_n \cos(nx_j)) \frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} dS_\varrho.$$

Die Funktion:

$$|\Delta\Phi| = \frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}$$

konvergiert beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$, wenn $r > \delta > 0$ ist, gleichmäßig gegen Null. Auch die Funktion:

$$\mu^{-p} |\Delta\Phi|,$$

wo p irgendeine positive Zahl ist, konvergiert, wenn $r > \delta > 0$ ist, bei $\mu \rightarrow 0$ gegen Null. Wenn beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen h_j selbst oder die Produkte dieser Funktionen mit irgendeiner positiven Potenz von μ endlich bleiben, so konvergiert also das Integral $J_{j\sigma}^{(1)}$ bei diesem Grenzübergange gegen Null, sofern nicht das Flächenelement $\sigma(\tau)$ den Punkt P enthält.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß P in der Nähe von $\sigma(\tau)$ liegt. Wir nehmen an, daß eine Normale von P auf $\sigma(\tau)$ dieses Flächenstück in $P^{(0)}$ trifft und daß $PP^{(0)}$ die kürzeste Entfernung von P nach $\sigma(\tau)$ ist. Wir setzen die Entfernung $PP^{(0)} = d$, wobei also d eine positive Größe ist. Wir benutzen das Bezugssystem, welches nach der oben dargelegten Regel dem Punkte $P^{(0)}$ entspricht. Die Koordinaten des Punktes P in diesem Bezugssysteme sind: $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = d$ und wir haben folglich:

$$r^2 = (x_j - \xi_j)^2 = (x_j' - \xi_j')^2 = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + (d - \xi_3')^2$$

Wenn wir speziell zu x_1' - und x_2' -Achsen die Tangenten der Krümmungslinien der Fläche $S(\tau)$ im Punkte $P^{(0)}$ wählen, so haben wir:

$$\xi_3' = \frac{\xi_1'^2}{2R} + \frac{\xi_2'^2}{2R_2} + \frac{1}{6} \sum_{jkl} F_{jkl}(\Theta \xi_1', \Theta \xi_2') \xi_j' \xi_k' \xi_l',$$

$$0 \leq \Theta \leq 1, j, k, l = 1 \text{ oder } 2, \quad F_{jkl} = \frac{\partial^3 F}{\partial \xi_j' \partial \xi_k' \partial \xi_l'}.$$

$|R_1|$ und $|R_2|$ sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche $S(\tau)$ im Punkte $P^{(0)}$. Wir nehmen an, daß $d < |R_1|$, $d < |R_2|$ ist. Wir führen

in unserem Ausdruck für r^2 den obigen Wert von ξ_3' ein und bekommen:

$$r^2 = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 + d^2 + \xi_3'^2 - \frac{1}{3} d F_{jkl} \xi_j' \xi_k' \xi_l'.$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\frac{\varrho}{2\mu} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} = \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t-\tau)}{t-\tau}$$

und bemerken, daß diese Funktion für $\mu(t-\tau) \rightarrow 0$ für alle r wie eine Exponentialfunktion verschwindet mit Ausnahme von denjenigen, welche von der Größenordnung $\sqrt{\mu(t-\tau)}$ sind, d. h. genauer ausgedrückt in der ganzen $\xi_1' \xi_2'$ -Ebene mit Ausnahme von demjenigen Teile, in dem ξ_1' und ξ_2' von der Größenordnung

$$\sqrt{\frac{4\mu(t-\tau)}{\varrho}}$$

sind.

Wir führen den soeben gefundenen Wert von r^2 ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{2\mu} \frac{E(r, t-\tau)}{t-\tau} &= \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 + d^2 \right\}} \\ &\cdot \left\{ 1 - \frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left(\xi_3'^2 - \frac{1}{3} d \sum_{\substack{j,k,l \\ = 1 \text{ oder } 2}} F_{jkl} \xi_j' \xi_k' \xi_l' \right) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben ferner:

$$[h_j - h_n \cos(n x_{jl})]_Q = [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P^{(Q)}} + \sum_{k=1,2} h_j^{(k)} \xi_k',$$

$$dS_Q = \frac{d\xi_1' d\xi_2'}{\cos(n_Q x_3')} = d\xi_1' d\xi_2' \left(1 + \sum_{\substack{j,k \\ = 1 \text{ oder } 2}} g_{jk} \xi_j' \xi_k' \right).$$

F_{jkl} , $h_j^{(k)}$, g_{jk} sind Funktionen von ξ_1' , ξ_2' und von τ . Wenn wir $\sigma(\tau)$ genügend klein wählen, so gibt es für die absoluten Beträge aller dieser Funktionen endliche Grenzwerte, welche nicht überschritten werden, so lange der Punkt P innerhalb von $\sigma(\tau)$ bleibt.

Wir kehren zu unserem Integral $J_{j\sigma}^{(1)}$ zurück. Die gefundenen Ausdrücke der in $J_{j\sigma}^{(1)}$ eingehenden Größen zeigen, daß das Hauptglied (wenn μ und d klein sind) dieses Integrales in der Form:

$$[h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P^{(0)}} \frac{e^{-\frac{\varrho d^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot$$

$$\int \int_{\sigma(\tau)} \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2'$$

geschrieben werden kann. Wenn wir in dem hier auftretenden Integral die Integration über die ganze $\xi_1' \xi_2'$ -Ebene ausdehnen, so begehen wir einen Fehler, der um so kleiner ist, je kleiner μ ist, und der bei $\mu \rightarrow 0$ verschwindet. Wir können also, wenn wir einen bei $\mu \rightarrow 0$ verschwindenden Fehler vernachlässigen:

$$\int \int_{\sigma(\tau)} \frac{\varrho}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2' =$$

$$= \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{d}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

setzen. Für das Hauptglied von $J_{j\sigma}^{(1)}$ erhalten wir so den Ausdruck:

$$2\pi [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P^{(0)}} \frac{(1 + \varepsilon(\mu)) e^{-\frac{\varrho d^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{d}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varepsilon(\mu) = 0.$$

Wir betrachten jetzt die übrigen Glieder in $J_{j\sigma}^{(1)}$. Sie enthalten alle den Faktor $E(d, t - \tau)$. Dieser Faktor ist mit einem Integral vom Typus:

$$\int \int \frac{\varrho G}{2\mu(t-\tau)} e^{-\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)} \left\{ \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \xi_1'^2 + \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \xi_2'^2 \right\}} d\xi_1' d\xi_2'$$

multipliziert. Hier ist G eine Funktion von ξ_1', ξ_2' und τ , welche als Faktor eine der Größen:

$$\xi_1', \xi_2', \frac{\varrho d \xi_1'^3}{4\mu(t-\tau)} \dots, \frac{\varrho \xi_1'^4}{4\mu(t-\tau)} \dots$$

enthält. Da nun für kleine μ - und d -Werte nur die unmittelbare Umgebung des Punktes $P^{(0)}$, d. h. des Punktes $\xi_1' = 0, \xi_2' = 0$ einen merklichen Beitrag zum obigen Integrale gibt, so folgt, wenn wir annehmen dürfen, daß die übrigen Faktoren von G von derselben Größenordnung wie $[h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P^{(0)}}$ sind, daß diejenigen Beiträge zu dem Wert von $J_{j\sigma}^{(1)}$, welche wir aus diesen übrigen Gliedern erhalten, neben dem

Hauptglieder klein sind und daß der Fehler, den wir durch Vernachlässigung dieser Glieder begehen, bei $\mu \rightarrow 0$ verschwindet. Für kleine d -Werte können wir ferner d/R_1 und d/R_2 neben 1 vernachlässigen. Wir erhalten so, für kleine μ - und d -Werte, annähernd:

$$J_{j\sigma}^{(1)} = 2\pi[h_j - h_n \cos(n x_j)]E(d, t - \tau). \quad (6)$$

Wenn $d > 0$ ist, so können wir bei $\mu \rightarrow 0$ stets $J_{j\sigma}^{(1)} = 0$ setzen.

245. Beweis, daß $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$, wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen h_j endlich bleiben.

Wir gehen zu $J_{j\sigma}^{(2)}$ über. Wir setzen wieder:

$$dS_Q = \frac{d\xi_1' d\xi_2'}{\cos(n_Q x_3')}$$

und formen unseren Ausdruck (5) durch partielle Integrationen in bezug auf ξ_1' und ξ_2' um. Wir erhalten so eine Summe von einem doppelten und einem über die Randkurve des Integrationsbereiches erstreckten einfachen Integral. Die Integranden dieser Integrale bestehen aus Gliedern, die entweder Φ oder eine Ableitung erster Ordnung von Φ enthalten. Insbesondere enthalten die Glieder des Doppelintegrals entweder Φ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3'}$. Nun haben wir:

$$\Phi = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \int_0^{\frac{r\sqrt{\varrho}}{2\sqrt{\mu(t-\tau)}}} e^{-a^2} da.$$

Für kleine μ -Werte haben wir also annähernd:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \cdot \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial r}{\partial \xi_j}.$$

Wenn Q ein Punkt des Randes ist und P außerhalb von $\sigma(\tau)$ liegt oder ein innerer Punkt von $\sigma(\tau)$ ist, so gibt es ein solches δ , daß $r > \delta > 0$ ist. Die Funktion Φ und ihre Ableitungen erster Ordnung konvergieren also bei $\mu \rightarrow 0$ auf der Randkurve gleichmäßig gegen Null. Aber auch das Doppelintegral hat den Grenzwert Null, wie man sofort sieht, wenn man bedenkt, daß für $r = 0$:

$$\frac{d}{d\xi_3'} \frac{1}{r} = \frac{d}{dn_P} \frac{1}{r}, \quad \frac{dr}{d\xi_3'} = \cos(n_P r) = 0.$$

Wir schließen hieraus, daß, wenn beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen h_j endlich bleiben, stets:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0, \quad (7)$$

sei es, daß der Punkt P außerhalb von $\sigma(\tau)$ oder auf $\sigma(\tau)$ liegt.

**246. Untersuchung des Verhaltens von $J_{j\sigma}^{(2)}$,
wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen $\sqrt{\mu} h_j$ endlich bleiben.**

Es ist für das folgende notwendig zu wissen, wie sich $J_{j\sigma}^{(2)}$ beim Grenzübergange verhält, wenn dabei nicht die Funktionen h_j selbst, wohl aber die Produkte $\sqrt{\mu} h_j$ endlich bleiben. Es genügt diese Frage für den Fall zu beantworten, daß der Punkt P nicht auf dem Flächenelement σ liegt. Um diese Frage zu beantworten bemerken wir, daß das Glied:

$$g_2 = \frac{1}{r} e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{\partial r}{\partial \xi_j'}$$

bei $\mu \rightarrow 0$ neben dem Gliede:

$$g_1 = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial \xi_j'} \frac{1}{r}$$

zu vernachlässigen ist. Wir haben in der Tat:

$$\left| \frac{g_2}{g_1} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}, \quad x = r \sqrt{\frac{\varrho}{4\mu(t-\tau)}}.$$

g_2/g_1 hat also für $\mu > 0$, $r = 0$ den Wert Null und für $r > 0$ den Grenzwert 0, wenn $\mu \rightarrow 0$. Wir können also überall g_2 neben g_1 vernachlässigen. Wenn wir das tun, und wenn wir dann durch neue partielle Integrationen die früher vorgenommene Umformung von $J_{j\sigma}^{(2)}$ rückgängig machen, was stets erlaubt ist, wenn der Punkt P außerhalb von $\sigma(\tau)$ liegt, so erhalten wir annähernd:

$$\left. \begin{aligned} J_{j\sigma}^{(2)} &= \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{\sigma(\tau)} h_k' a_{lj} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k' \partial \xi_l'} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = -\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\sigma(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dieser Ausdruck ist also annähernd gültig, wenn P außerhalb von $\sigma(\tau)$ liegt.

247. Die Randbedingungen. Ruhendes Flächenelement.

Wir kehren zu unserem Ansatz (2) zurück. Wir setzen:

$$\sum_{\sigma} J_{j\sigma}^{(1)} = J_{jS}^{(1)}, \quad \sum_{\sigma} J_{j\sigma}^{(2)} = J_{jS}^{(2)},$$

wobei wir links über alle Elemente der Fläche S summieren. Wir haben dann:

$$u_j(P, t) = \int_{t_0}^t (J_{jS}^{(1)} + J_{jS}^{(2)}) d\tau + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \quad (9)$$

Die Bedingung:

$$u_j = v_j(S, t)$$

auf S ergibt:

$$\int_{t_0}^t (J_{jS}^{(1)} + J_{jS}^{(2)}) d\tau + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = v_j(S, t), \quad (9a)$$

wenn P auf $S(t)$ liegt. Wir wollen in dieser Gleichung den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ ausführen und müssen dabei zwei Hauptfälle unterscheiden. Wir nehmen zuerst an, daß das Flächenelement $\sigma_P(t)$, zu welcher P gehört, während der Zeit von t_0 bis t geruht hat. Für dieses Flächenelement haben wir dann in Formel (6) $d = 0$ zu setzen und wir haben folglich:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma_P}^{(1)} = 2\pi [h_j - h_n \cos(n x_j)] \frac{1}{\sqrt{t - \tau}}.$$

Für alle übrigen Flächenelemente σ haben wir $d > 0$ und folglich $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(1)} = 0$. Wir haben ferner nach (7) für alle Flächenelemente σ , auch σ_P , $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$. Wir erhalten folglich:

$$2\pi \int_{t_0}^t [h_j - h_n \cos(n x_j)] \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = v_j - \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \quad (10)$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen müssen zur Bestimmung der drei Funktionen h_j im Punkte P dienen. Multiplikation von (10) mit $\cos(n x_j)$ und Summierung in bezug auf j ergibt:

$$\left(v_j - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cos(n x_j) = 0$$

oder:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = v_n \quad (11)$$

in P . Dies ist eine Bedingung, welche ψ im Punkte P erfüllen muß.

Wenn sie erfüllt ist, so ist eine der Gleichungen (10) eine Folge der übrigen. Wir können dann den Funktionen h_j im Punkte P noch eine Bedingung, etwa $h_n = 0$ auferlegen. Wir erhalten dann:

$$\int_{t^{(0)}}^t \frac{h_j(\tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = \frac{1}{2\pi} \left(v_j - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right). \quad (12)$$

Um diese Integralgleichung aufzulösen, multiplizieren wir nach dem Vorgange von Abel die beiden Seiten derselben mit $(T - t)^{-\frac{1}{2}}$ und integrieren in bezug auf t zwischen den Grenzen $t^{(0)}$ und T . Links kehren wir die Ordnung der beiden Integrationen um. Wir erhalten so:

$$\int_{t^{(0)}}^T h_j(\tau) d\tau \int_{\tau}^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{t^{(0)}}^T \left(v_j(t) - \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \right) \frac{dt}{\sqrt{T-t}}.$$

Die Substitution:

$$t = \tau + \frac{1}{2}(T - \tau)(1 + \sin \vartheta)$$

führt das Integral:

$$\int_{\tau}^T \frac{dt}{\sqrt{(T-t)(t-\tau)}}$$

in

$$+ \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta$$

über. Sein Wert ist also π . Wir haben folglich:

$$\int_{t^{(0)}}^T h_j(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_{t^{(0)}}^T \left(v_j(t) - \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \right) \frac{dt}{\sqrt{T-t}}$$

und also schließlich:

$$h_j(t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{d}{dt} \int_{t^{(0)}}^t \left[v_j(S, \tau) - \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial x_j} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (13)$$

Wir sehen aus dieser Formel, daß die Größen h_j tatsächlich beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ gegen endliche und stetige Grenzwerte konvergieren.

Wir wollen für einen Augenblick annehmen, daß nicht nur das Flächenelement σ_P , sondern die ganze Fläche S in der Zeit von t_0 bis t ruht. Wir lassen unter dieser Voraussetzung P einen Punkt im

Inneren der Flüssigkeit bedeuten und führen in den Formeln (9) den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ aus. Wir erhalten wegen (6) und (7):

$$u_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Diese Gleichungen nebst der Laplaceschen Gleichung $\Delta \psi = 0$ und der Gleichung (11) bestimmen die Bewegung der Flüssigkeit. Wenn wir verlangen, daß bei $\mu > 0$ die Flüssigkeit an der Fläche S haften soll, müssen wir in dem jetzt behandelten Falle $v_j(S, t) = 0$ setzen. Die Gleichung (11) ergibt dann:

$$\frac{d\psi}{dn} = 0$$

an S . Dieses Ergebnis steht in voller Übereinstimmung mit der Eulerschen Hydrodynamik. Wenn es in einer Flüssigkeit nur ruhende Körper gibt, so erhält man bei $\mu \rightarrow 0$ aus den Gleichungen (1) eine Potentialbewegung der Flüssigkeit, welche durch die Bedingung festgelegt ist, daß die Flüssigkeit an der Oberfläche der Körper gleiten muß.

248. Bewegtes Flächenelement. Grundlegende Voraussetzungen.

Wir gehen zu dem anderen Hauptfalle über. Wir nehmen an, daß ein beliebiger Punkt im Raume, x_1, x_2, x_3 , während der Zeit $t_0 \leq \tau \leq t$ höchstens in einzelnen Momenten $\tau = t_1, \tau = t_2 \dots \tau = t_m (t_0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_m \leq t)$ auf der Fläche $S(\tau)$ liegt. Wir nehmen an, daß man jedem Werte $k (k = 1, 2 \dots m)$ zwei positive Größen U_k und α_k in solcher Weise zuordnen kann, daß für genügend kleine Werte von $|\tau - t_k|$ mit genügender Annäherung $d = U_k |\tau - t_k|^{\alpha_k}$ gesetzt werden kann. Wenn $\alpha_k = 1$ ist, so ist U_k die Geschwindigkeit, mit welcher die Fläche sich im Momente $\tau = t_k$ dem Punkte x nähert oder sich von ihm entfernt. Wenn $\alpha_k < 1$ wäre, so würde jene Geschwindigkeit unendlich groß sein. Diesen Fall schließen wir aus und können also im folgenden stets $\alpha_k \geq 1$ voraussetzen.

249. Untersuchung des Integrales $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(1)} d\tau$,

wenn der betrachtete Punkt im betrachteten Zeitmoment auf dem Flächenelement liegt.

Wir haben nach (6), wenn $t_m = t$ und $t_1 > t_0$ ist und wenn wir nur die Hauptglieder von $J_{j\sigma}^{(1)}$ berücksichtigen:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi \int_{t-\varepsilon}^t [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)] x_{(m)}^{(0)} E(d_{(m)}, t - \tau) d\tau + \\ + 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)] x_{(k)}^{(0)} E(d_{(k)}, t - \tau) d\tau.$$

Wir haben hier mit $x_k^{(0)}$ den Punkt bezeichnet, in welchem während des Intervalles $t_k - \varepsilon \leq \tau \leq t_k + \varepsilon$ bzw. für $k = m$, während $t - \varepsilon \leq \tau \leq t$ die kürzeste vom Punkte P (mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3) nach der Fläche S gezogene Gerade diese Fläche trifft. ε ist eine Größe, die wir, wenn μ genügend klein ist, sehr klein annehmen können. Wir benutzen diesen Umstand, um unseren Ausdruck zu vereinfachen und können, wenn ε genügend klein ist, für $x_{(k)}^{(0)}$ den Punkt P selbst einsetzen. Wir können ferner in:

$$[h_j - h_n \cos(n_k, x_j)]_{x, \tau}$$

$\tau = t_k$ setzen. Indem wir ferner für $d_{(k)}$ den Wert:

$$U_k |\tau - t_k|^{\alpha_k}$$

einsetzen, erhalten wir bei kleinem μ annähernd:

$$\int_{t_0}^t J_{jS}^{(1)} d\tau = 2\pi [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x, t} \int_{t-\varepsilon}^t \frac{e^{-\frac{\varrho U_m^2}{4\mu} |\tau-t|^{2\alpha_m-1}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\ + 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x, t_k} \int_{t_k-\varepsilon}^{t_k+\varepsilon} \frac{e^{-\frac{\varrho U_k^2}{4\mu} |\tau-t_k|^{2\alpha_k}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Noch eine Vereinfachung ist bei unserer angenäherten Berechnung der Integrale in der Summe erlaubt. $t - \tau$, das im Nenner des Integranden und im Nenner des Exponenten vorkommt, weicht wenig von $t - t_k$ ab und wir können dafür $t - t_k$ schreiben. Wir setzen dann im ersten Integrale:

$$\tau = t - \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_m-1}} \cdot \xi$$

und in den Integralen der Summe:

$$\tau = t_k + \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} \cdot \xi.$$

Wir erhalten so annähernd:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t J_{js}^{(1)} d\tau &= 2\pi \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x,t} \int_0^{\varepsilon(m)} \frac{e^{-\xi^{2\alpha_m-1}}}{\sqrt{\xi}} d\xi + \\
&+ 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \binom{k}{k} \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k} \frac{1}{\sqrt{t-t_k}} \int_{-\varepsilon(k)}^{+\varepsilon(k)} e^{-|\xi|^{2\alpha_k}} d\xi, \\
\varepsilon(m) &= \varepsilon \cdot \left(\frac{\varrho U_m^2}{4\mu} \right)^{\frac{1}{2\alpha_m-1}}, \quad \varepsilon(k) = \varepsilon \cdot \left(\frac{\varrho U_k^2}{4\mu(t-t_k)} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}}.
\end{aligned}$$

Wir gehen in den Integralen der letzten Formel zur Grenze $\mu \rightarrow 0$ über und setzen:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^{2\alpha_m-1}}}{\sqrt{\xi}} d\xi = C_m, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^{2\alpha_k}} d\xi = D_k.$$

Wir erhalten bei kleinen μ -Werten annähernd:

$$\left. \begin{aligned}
\int_{t_0}^t J_{js}^{(1)} d\tau &= 2\pi C_m \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n_{(m)} x_j)]_{x,t} + \\
&+ 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k}.
\end{aligned} \right\} (14)$$

24 10. Entsprechende Resultate in den anderen Fällen.

Wir haben oben $t_m = t$, $t_1 > t_0$ angenommen. Wir betrachten jetzt den Fall $t_m < t$, $t_1 > t_0$. Wir erhalten:

$$\int_{t_0}^t J_{js}^{(1)} d\tau = 2\pi \sum_{k=1}^m \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n_{(k)} x_j)]_{x,t_k}. \quad (15)$$

Der Fall $t_1 = t_0$ kann in derselben Weise behandelt werden wie der Fall $t_m = t$ ist. Wir brauchen uns deshalb nicht bei diesem Falle aufzuhalten.

24 11. Entsprechende Untersuchung für das Integral $\int_{t_0}^t J_{js}^{(2)} d\tau$.

Wir gehen zum Integrale:

$$\int_{t_0}^t J_{js}^{(2)} d\tau$$

über. Wir sehen aus Formel (8), daß, wenn μ klein ist, annähernd:

$$J_{js}^{(2)} = - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q, \quad (16)$$

vorausgesetzt, daß der Punkt P nicht auf $S(\tau)$ liegt. Wenn dies der Fall ist, ist Formel (16) nicht gültig. Wir wissen aber, daß auch in diesem Falle $J_{js}^{(2)}$ einen endlichen Wert hat, dessen Hauptglied mit $\sqrt{\mu}$ proportional ist. Dies reicht für unsere jetzigen Zwecke aus und wir sehen, daß annähernd:

$$\int_{t_0}^t J_{js}^{(2)} d\tau = - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \quad (17)$$

24.12. Aufstellung von Integrodifferentialgleichungen für die Größen h_j bei kleinem μ .

Wir sind jetzt imstande, die Gleichungen aufzustellen, welche zur Bestimmung der Funktionen h_j und der Potentialfunktion ψ dienen können. Wir bezeichnen mit P_s einen beliebigen Punkt der Grenzfläche S und erhalten dann aus (9a) wegen (14) und (17):

$$\left. \begin{aligned} v_j(P_s, t) = & 2\pi C_m \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_s, t} + \\ & + 2\pi \sum_1^{m-1} \binom{k}{1} \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_s, t_k} - \\ & - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P_s, t}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

24.13. Nachweis, daß in dem von der Fläche nicht durchschrittenen Bereiche die Bewegung eine Potentialbewegung ist.

Wenn es gelungen ist, aus den Bedingungen (18) und aus der außerhalb von S gültigen Gleichung $\Delta \psi = 0$, die h_j und ψ zu berechnen, so kann man die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck in einem beliebigen Punkte P der Flüssigkeit berechnen. Wenn P in demjenigen Bereiche — wir wollen ihn B_v nennen — der zwischen t_0 und t nicht von $S(t)$ durchschritten worden ist, liegt, haben wir, da jetzt $d > 0$ ist, wegen (9), (15), (17):

$$u_j(P, t) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P, t} - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \quad (19)$$

Im letzten Gliede rechts in (19) hat nach unserer Voraussetzung r überall einen positiven, von Null verschiedenen Wert. Wir haben folglich:

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q$$

und also:

$$u_j(P, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}. \quad (20)$$

Die Bewegung ist also in diesem Teile der Flüssigkeit eine Potentialbewegung.

2414. Nachweis, daß die Flüssigkeit an der Vorderseite der Fläche gleitet.

Über das Verhalten der Flüssigkeit an demjenigen Teile von $S(t)$, der an B_v grenzt — wir nennen ihn S_v — gibt Formel (18) Aufschluß. Wenn wir jene Formel auf einen Punkt P_s anwenden, der zum ersten Male auf S liegt, fällt das zweite Glied rechts, also die Summe, weg und wir haben:

$$u_j(P_{S_v}, t) = 2\pi C_m \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2a_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_{S_v}, t} - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P_{S_v}, t}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\cos(n x_j)$ und summieren in bezug auf j ($j = 1, 2, 3$). Das Ergebnis können wir in der Form:

$$\left(\frac{d\psi}{dn} \right)_{P_{S_v}, t} - \sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = [v_n]_{P_{S_v}, t} \quad (21)$$

schreiben. Das in (21) links vorkommende Integral kann auch in der Form:

$$\sqrt{\frac{\mu \pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q$$

geschrieben werden. Wenn der Punkt P im Innern des Bereiches B_v läge, so würden wir dafür auch:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q \quad \left(\frac{d}{dn} = \cos(n x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

schreiben können. Das Integral, zu welchem wir so geführt worden sind, kann als das Potential gewisse Massen gedeutet werden, welche in dem von S in der Zeit t_0 bis t durchschrittenen Bereiche — wir nennen ihn B_h — ausgebreitet sind. Aus der Potentialtheorie ist nun bekannt, daß die Ableitungen zweiter Ordnung räumlicher Potentialfunktionen einen Sprung erleiden, wenn der Aufpunkt eine Unstetigkeit der Dichte durchschreitet. Insbesondere kann man einem Punkte P der Oberfläche des Körpers, von welchem das Potential herrührt, im allgemeinen drei verschiedene Werte einer solchen Ableitung zweiter Ordnung zuordnen. Ein Wert ist der Wert der in P selbst gebildeten Ableitung. Ein anderer ist der Grenzwert, gegen welchen die Ableitung konvergiert, wenn der Aufpunkt von Innen sich P nähert. Der dritte endlich ist der Grenzwert der Ableitung, wenn der Aufpunkt sich von außen P nähert. Wir behaupten nun, daß, wenn x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des Punktes P_S sind:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} \frac{h_k(\xi)}{r} dS_Q = - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q,$$

vorausgesetzt, daß wir der linken Seite die letzte (dritte) der oben erwähnten Bedeutungen geben. Zum Beweise genügt es, zu bemerken, daß:

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ & = \lim_{\delta \rightarrow 0} - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^{t-\delta} d\tau \frac{d}{dn} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned}$$

Wir können infolgedessen die Gleichung (21) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\lim_{P \text{ durch } B_v \rightarrow P_S} \cos(n_{P_S} x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\} = \left. \begin{aligned} & = (v_n)_{P_S, t}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Wenn wir die v_j als die Komponenten der Geschwindigkeit der Fläche S auffassen, so ist wegen (20) die Formel (22) die Bedingung dafür, daß die Flüssigkeit längs der Vorderseite S_v der Fläche S gleiten soll, d. h. die Bedingung dafür, daß Flüssigkeit und Fläche gleiche Normalgeschwindigkeit haben.

2415. Untersuchung der Bewegung in dem von der Fläche durchschrittenen Teilbereiche.

Wir betrachten jetzt einen Punkt P in dem Bereiche B_h , der in der Zeit von t_0 bis t von der Fläche S durchschritten worden ist. Wenn P eine allgemeine Lage hat, so wird man $a_k = 1$ ($k = 1, 2 \dots m$) haben. Man hat dann entsprechend S. 241 $C_m = D_k = \sqrt{\pi}$ und folglich wegen (9), (15), (17):

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) = 2\pi \sum_1^m (k) \left(\frac{4\pi\mu}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P, t_k} - \\ - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$t_1, t_2 \dots t_m$ ($t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq t$) sind die Momente, in welchen P auf S gelegen hat. Wir nehmen zunächst an, daß $t > t_m$ ist. Wir lassen dann bei festgehaltenem P t gegen t_m abnehmen und erhalten in dieser Weise aus (23):

$$\begin{aligned} u_j(P, t_m) = v_j(P_{S_h}, t_m) = 2\pi \sum_1^m (k) \left(\frac{4\pi\mu}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P, t_k} - \\ - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^{t_m} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x, t_m). \end{aligned}$$

Wir ziehen diese Gleichung von (23) ab und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) = v_j(P_{S_h}, t_m) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_m}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \psi(x, t_m) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Wenn wir jetzt bei festgehaltenem t den Punkt P sich der Grenzfläche S_n nähern lassen und wenn dabei t_m gegen t konvergiert, was immer an der Rückseite des Körpers der Fall sein wird, so haben wir:

$$\lim_{P \text{ durch } B_h \rightarrow P_{S_h}} u_j(P, t) = v_j(P_{S_h}, t). \quad (25)$$

Wenn wir wieder die v_j als Geschwindigkeitskomponenten der Fläche S auffassen, so sagt diese Gleichung aus, daß die Flüssigkeit, wenn ihre Bewegung dem System (1) gehorcht und wenn sie bei $\mu > 0$ an S haftet, auch bei verschwindender Zähigkeit μ an der Rückseite des Körpers haften muß. Den Fall, daß die Fläche eine Geschwindigkeit hat, die in das Gebiet der schon durchwirbelten Flüssigkeit, das sie hinter sich gelassen hat, hinein gerichtet ist, haben wir hier nicht untersucht.

24.16. Zusammenfassung.

Es sei die Aufgabe vorgelegt, bei kleinem positivem μ außerhalb einer geschlossenen, im allgemeinen von der Zeit t abhängigen Fläche $S(t)$ eine Lösung des Systems:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3)$$

zu finden, welche den folgenden Nebenbedingungen genügt: auf $S(t)$: $u_j =$ vorgeschriebenen Funktionen $v_j(S, t)$; in unendlicher Ferne: $u_j = 0$. Um diese Aufgabe zu lösen, suche man auf der Oberfläche $S(t)$ drei Funktionen h_1, h_2, h_3 und im Raume außerhalb von $S(t)$ eine reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion zu bestimmen, welche in den Punkten $P_s (= x_1, x_2, x_3)$ den Bedingungen:

$$\begin{aligned} & 2\pi C_m \left(\frac{4\mu}{\varrho U_m^2} \right)^{\frac{1}{2(2\alpha_m-1)}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_s, t} + \\ & + 2\pi \sum_{k=1}^{m-1} \frac{D_k}{\sqrt{t-t_k}} \left(\frac{4\mu(t-t_k)}{\varrho U_k^2} \right)^{\frac{1}{2\alpha_k}} [h_j - h_n \cos(n x_j)]_{P_s, t_k} - \\ & - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{P_s, t} = u_j(P_s, t) \end{aligned}$$

genügt. ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind hier die Koordinaten eines Punktes Q auf der Fläche $S(\tau)$; r ist die Entfernung zwischen den Punkten P_s und Q . $t_1, t_2 \dots t_{m-1}, t_m$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m$) sind die Zeitpunkte, in welchen P_s auf der Fläche S gelegen hat. In der obigen Gleichung ist also $t_m = t$. Es wird angenommen, daß die kleinste Entfernung d , des Punktes P_s von der Fläche $S(t)$, wenn $|t - t_k|$ klein ist, in der Form:

$$d = U_k |t - t_k|^{\alpha_k}$$

dargestellt werden kann und es ist:

$$C_m = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^{2\alpha_m-1}}}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad D_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|^{2\alpha_k}} d\xi.$$

Wenn es gelungen ist, die Funktionen h_1, h_2, h_3, ψ zu bestimmen, so hat man in demjenigen Bereiche, der nicht von der Fläche $S(t)$ durchschritten worden ist:

$$u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}.$$

Dagegen hat man in dem von $S(t)$ durchschrittenen Bereiche:

$$u_j(P, t) = v_j(P_{S_h}, t_m) - \sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} \int_{t_m}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S(\tau)} h_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \psi(x, t) - \psi(x, t_m) \right\}.$$

Hier ist t_m der Zeitpunkt, in welchem der Punkt P zuletzt auf S lag. P_{S_h} ist der Punkt auf der Rückseite von $S(t_m)$, der geometrisch mit P zusammenfällt.

Wenn die Größen $v_j(S, t)$ die Komponenten der Geschwindigkeit sind, welche der betreffende Punkt von $S(t)$ bei der Bewegung dieser Fläche hat, so lassen sich die erhaltenen Formeln so deuten, daß die Bewegung der Flüssigkeit in dem von S nicht durchschrittenen Raume eine Potentialbewegung ist, bei welcher die Flüssigkeit längs der Vorderseite von S gleitet; dagegen die Bewegung in dem von $S(t)$ durchschrittenen Raume eine Wirbelbewegung, bei welcher die Flüssigkeit an der Rückseite — vgl. hierzu S. 227 — an $S(t)$ haftet.

§ 25. Translatorische Bewegung.

251. Vereinfachungen durch die Annahme, daß der Körper sich stets in derselben Richtung bewegt.

Wir wenden die im vorigen Paragraphen gefundenen Ergebnisse auf den Fall an, daß sich ein starrer Körper in einer bestimmten, von der Zeit unabhängigen Richtung in einer Flüssigkeit bewegt, die sonst den ganzen Raum erfüllt. $U(t)$ sei die Geschwindigkeit des Körpers, $S(t)$ die Oberfläche desselben, $K(t)$ der vom Körper

erfüllte Bereich des Raumes, $B(t)$ der übrige Teil des Raumes. Der Einfachheit wegen nehmen wir zunächst an, daß eine mit der Bewegungsrichtung des Körpers parallele Gerade $S(t)$ höchstens in zwei Punkten schneidet. $S(t)$ zerfällt dann in zwei Teile, einen vorderen Teil $S_v(t)$ und einen hinteren Teil $S_h(t)$. $B(t)$ zerfällt ebenfalls in zwei Teile, einen $B_h(t)$, der vom Körper oder von einem Teile des Körpers durchschritten worden ist, und einen $B_h(t)$ und $K(t)$ umgebenden Teil $B_v(t)$. Wir bezeichnen wie gewöhnlich mit U_j ($j = 1, 2, 3$) die Komponenten des Vektors $\mathbf{U}$, mit $\mathbf{n}$ eine nach außen gezogene Normale der Fläche $S(t)$ von der Länge 1. Wir setzen:

$$|U_j(t) \cos(n x_j)| = |U_j(t) n_j| = U_n(t).$$

Das Flächenelement dS durchschreitet dann während der Zeit t bis $t + dt$ einen Raumbereich $U_n(t) dS dt$.

Ein beliebiger Punkt, ξ_1, ξ_2, ξ_3 , in $B_h(t)$ ist vor der Zeit t entweder von der Fläche S_h allein oder sowohl von S_v wie von S_h überstrichen worden. Wir bezeichnen mit t_v und t_h die Zeiten, zu denen S_v bzw. S_h den Punkt ξ enthielt. Mit $\mathbf{U}^{(v)}$, $\mathbf{U}^{(h)}$, $U_n^{(v)}$, $U_n^{(h)}$ bezeichnen wir die den Zeiten t_v und t_h und dem Punkte ξ entsprechenden Werte von $\mathbf{U}$ und U_n . $\mathbf{U}^{(v)}$ und $U_n^{(v)}$ sind im Bereiche $B_h(t)$ mit Ausnahme von $K(t_0)$ definiert, $\mathbf{U}^{(h)}$ und $U_n^{(h)}$ im ganzen Bereiche $B_h(t)$. Wir nehmen an, daß $U_j(t_v)$ und $U_j(t_h)$ stetige und stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind.

Unsere Aufgabe ist, das System:

$$\varrho \frac{\partial u_j}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

mit den Nebenbedingungen: in unendlicher Ferne $u_j = 0$;
an $S(t)$:

$$u_j = U_j(t), \quad \text{für } t = t_0: \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

im Grenzfalle $\mu = 0$ zu lösen.

Wir machen wieder (vgl. S. 229) den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} u_j(P, t) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{S(\tau)} h_k(Q, \tau) u_{jk}(P, Q, t - \tau) dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) &= -\sqrt{\mu \varrho \pi} \int_{S(\tau)} h_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \Delta \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir stellen jetzt die Grenzbedingungen auf und benutzen dabei die im vorigen Paragraphen gefundenen, bei kleinem μ angenähert

richtigen Ausdrücke für die in unserem Ansatz vorkommenden Integrale. Wir haben jetzt $\alpha = 1$ zu setzen. Wie man sofort sieht, tritt unter diesen Umständen in unseren angenäherten Ausdrücken h_j stets mit dem Faktor $\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}}$ multipliziert auf. Wir setzen deshalb:

$$\sqrt{\frac{\mu\pi}{\varrho}} h_j = k_j.$$

Der Umstand, daß wir für k_j endliche Werte finden, zeigt, daß die h_j , den absoluten Beträgen nach, beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ wie $\mu^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden. Wir bezeichnen mit $k_j^{(v)}(t)$ die Werte der k_j an der Vorderseite von $S(t)$, $S_v(t)$, und in derselben Weise mit $k_j^{(h)}(t)$ die Werte von k_j an der Rückseite, $S_h(t)$, von $S(t)$. Die Grenzbedingungen können dann bei kleinem μ in der folgenden Form geschrieben werden:

auf $S_v(t)$:

$$\left. \begin{aligned} U_j(t) = & \frac{4\pi}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)]_{P,t} - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \end{aligned} \right\} (3)$$

auf $S_h(t)$:

$$\left. \begin{aligned} U_j(t) = & 4\pi \left\{ \frac{1}{U_n^{(h)}} [k_j^{(h)} - k_n^{(h)} \cos(n x_j)]_{P,t} + \right. \\ & + \frac{1}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)]_{P,t_v} \left. \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \end{aligned} \right\} (4)$$

252. Beginn der Umformung der Gleichung (3).

Verwandlung der Zeit-Oberflächenintegrale in Ableitungen von Potentialfunktionen.

In § 23 gelang es uns, die Bestimmung der Funktionen $\varphi_j^{(0)}$, welchen hier die Funktionen k_j entsprechen, auf die Auflösung einer potentialtheoretischen Randwertaufgabe zurückzuführen. Wir suchen

hier ein ähnliches Ziel zu erreichen. Es ist zu diesem Zweck notwendig, die in den Gleichungen (3) und (4) vorkommenden Integrale einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Wir betrachten zunächst die Gleichung (3). Wir nehmen also an, daß der Punkt P auf $S_v(t)$ liegt. Wir nehmen überdies an, daß P ein innerer Punkt von $S_v(t)$ ist und also nicht auf der Grenzkurve zwischen $S_v(t)$ und $S_h(t)$ liegt. Wir haben dann:

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{t_0}^t d\tau \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q.$$

$U_n^{(h)} d\tau dS_Q$ ist das Volumenelement $d\omega_Q (= d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3)$, das während der Zeit $d\tau$ vom Flächenelemente dS_Q von $S_h(t)$ durchschritten wird. Unser Integral kann deshalb in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q$$

geschrieben werden, wo $B_h(t)$ die in 25 1 S. 248 angegebene Bedeutung hat. Um das Integral:

$$\int_{t_0}^t dt \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q$$

in ähnlicher Weise umzuformen, führen wir eine Annahme ein, deren Zulässigkeit wir später nachprüfen werden, die Annahme, daß an $S_v(t)$:

$$k_n^{(v)} = k_k^{(v)} \cos(n x_k) = 0. \quad (5)$$

Wir haben, wenn wir innerhalb von $K(t_0)$ $k_k^{(v)} = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S(B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon))} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t-\varepsilon)+K(t-\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q \right]. \end{aligned}$$

Da $k_n^{(v)} = 0$ an S_v , brauchen wir das Flächenintegral im letzten Ausdrucke nur über die zylindrische Mantelfläche von $B_h(t-\varepsilon)$ und über

$S_h(t_0)$ zu erstrecken. Wir können deshalb unmittelbar den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ ausführen und bekommen:

$$\begin{aligned} \int_{S(B_h(t)+K(t))} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t)+K(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{S(B_h(t)+K(t))} \frac{k_n^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{dS_Q}{r} - \int \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \right) \frac{d\omega_Q}{r} \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)+K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

253. Durchführung der Umformung der Gleichung (3).

Darstellung der Größen $k_j^{(v)}$ durch eine Potentialfunktion φ .

Um unter Benutzung der eben gewonnenen Resultate die rechte Seite der Gleichung (3) in einfacherer Weise schreiben zu können, setzen wir:

$$\frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \frac{k_j^{(h)}}{U_n^{(h)}} = L_j. \quad (\text{A})$$

Wir setzen ferner:

$$\psi - \int_{B_h(t)} L_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q - \int_{K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q = \varphi. \quad (\text{B})$$

Da die Funktion φ offenbar in $B_v(t)$ ganz andere Eigenschaften als in $B_h(t)$ hat, so wollen wir statt φ , wenn der Aufpunkt in $B_v(t)$ liegt, φ_v und, wenn der Aufpunkt in $B_h(t)$ liegt, φ_h schreiben. Unsere Gleichung (3) ergibt jetzt wegen (5):

an $S_v(t)$:

$$U_j(t) = 4\pi \frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j} \right)_{S_v(t)}. \quad (\text{6})$$

Das letzte Glied rechts in (6) kann als der Wert aufgefaßt werden, gegen welchen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ konvergiert, wenn der Aufpunkt von außen, also durch $B_v(t)$, sich der Grenzfläche $S_v(t)$ nähert. Wegen (5) müssen wir φ die Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = U_n^{(v)} \quad (\text{C})$$

aufzulegen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so haben wir:

$$k_j^{(v)}(t) = \frac{U_n^{(v)}(t)}{4\pi} \left(U_j(t) - \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j} \right). \quad (\text{D})$$

254. Beginn der entsprechenden Umformung der Gleichung (4). Zurückführung der Zeitflächenintegrale auf Potential- funktionen nebst einem Zusatzgliede.

Wir gehen zur Formel (4) über. Wir haben, da im Momente t_v die Vorderseite S_v durch den Punkt x geht, der erst zur Zeit t auf der Rückseite liegt:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_0}^{t_v - \varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \int_{t_v + \varepsilon}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Beziehung (5) können wir die Glieder rechts nach derselben Methode behandeln, welche wir bei der Formel (3) benutzt haben. Wir erhalten so:

$$\int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t) + K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \quad (7)$$

Mehr Mühe macht uns das letzte Integral in (4). Wir haben:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_h(t-\varepsilon)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q^* = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S(B_h(t-\varepsilon))} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t-\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $S(B)$ die Grenzfläche des Bereiches B .

* Wir setzen hier voraus, was durch das Ergebnis unserer Untersuchung bestätigt werden wird, daß die Quotienten $\frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}}$ überall endliche Werte haben.

Die Grenzfläche $S(B_h(t - \varepsilon))$ des Bereiches $B_h(t - \varepsilon)$ enthält unter anderem die Fläche $S_h(t - \varepsilon)$. Beim Grenzübergange $\varepsilon \rightarrow 0$ wird ein Element dieser Fläche sich dem Aufpunkte x unbegrenzt nähern. Um den Grenzwert des Teiles des im letzten Ausdrucke vorkommenden Flächenintegrals, das von diesem Flächenelemente, σ , herrührt, zu bestimmen, führen wir in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen ein mit σ verbundenes Bezugssystem ein, dessen ξ_1' - und ξ_2' -Achsen σ in dem Anfangspunkte tangieren und dessen ξ_3' -Achse also gegen σ normal ist. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q &= - \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q = \\ &= - \int_{\sigma(t-\varepsilon)} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(\xi_k' x_j) \frac{\partial}{\partial \xi_k'} \frac{1}{r} dS_Q. \end{aligned}$$

Unser letztes Flächenintegral zerfällt, entsprechend den Werten $k = 1, 2, 3$, in drei. Zwei von diesen Integralen, diejenigen, in denen $k = 1$ oder 2 ist, können durch partielle Integration in bezug auf ξ_1' oder ξ_2' umgeformt werden. Man sieht leicht, daß die Grenzwerte dieser beiden Integrale bei $\varepsilon \rightarrow 0$ erstens endlich sind und zweitens gegen Null konvergieren, wenn man den Flächeninhalt des Elementes σ gegen Null konvergieren läßt. Der Grenzwert des dritten Integrales:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos(n x_j) \int \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_Q$$

behält dagegen einen endlichen Wert:

$$- 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j),$$

selbst wenn der Flächeninhalt des Elementes σ gegen Null konvergiert. Wir erhalten infolgedessen:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} \frac{k_k^{(h)}}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= - 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ &+ \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Für das Flächenintegral der rechten Seite soll hier der Wert genommen werden, den man erhält, wenn man zuerst den singulären

Punkt $\xi_j = x_j$ durch eine um ihn gezogene geschlossene Kurve auf der Integrationsfläche ausschließt und dann diese Kurve sich von allen Seiten um den singulären Punkt zusammenziehen läßt.

25 5. Weitere Umformung vermittelt der Sätze der Potentialtheorie.

Um weiter zu kommen, müssen wir einen Satz aus der Potentialtheorie heranziehen. Das Flächenintegral:

$$\int \frac{F(\xi)}{r} dS_Q \quad (r^2 = (x_j - \xi_j)^2, r \geq 0),$$

wo $F(\xi)$ auf der Integrationsfläche eine stetig differenzierbare Funktion ist, besitzt partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x_1, x_2, x_3 , dies auch dann, wenn der Punkt P , dessen Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind, auf der Integrationsfläche liegt. Man erhält diese Ableitungen dadurch, daß man unter dem Integralzeichen deriviert, aber bei der Berechnung des so entstehenden Integrales zuerst den singulären Punkt P ausschließt und dann den ausgeschlossenen Bereich sich um P zusammenziehen läßt.

Aus diesem Satze folgt:

$$\begin{aligned} \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} d\omega_Q &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \int_{S(B_h(t))} \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{dS_Q}{r} - \int_{B_h(t)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{d\omega_Q}{r} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= -2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir können dieses Ergebnis auch in einer anderen Form schreiben. Die rechte Seite ist, wie aus den obigen Rechnungen unmittelbar hervorgeht, der Grenzwert des Ausdruckes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q,$$

wenn der Punkt P (mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3) von außen, also durch den Bereich $K(t)$, sich der Grenzfläche $S_h(t)$ des Integrationsbereiches nähert. Wir wollen unter:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}}$$

den Grenzwert einer Ableitung in bezug auf x_j verstehen, den sie annimmt, wenn der Aufpunkt P (mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3) sich durch die Flüssigkeit, also durch den Bereich $B(t)$, der Grenzfläche $S(t)$ nähert. Die Berechnung von:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q$$

können wir nach denselben Methoden ausführen, die wir oben benutzt haben. Man hat nur zu beachten, daß der Punkt P jetzt innerhalb der Grenzfläche $S(B_h(t))$ des Integrationsbereiches liegt. Man findet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q &= + 2\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned}$$

Wir haben also schließlich auch:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= - 4\pi \frac{k_n^{(h)}}{U_n^{(h)}} \cos(n x_j) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(h)}}{U_n^{(h)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir bemerken, daß wir offenbar unsere Formel (7) auch in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q &= \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{B_h(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j^{(h)}} \int_{K(t)} \frac{k_k^{(v)}}{U_n^{(v)}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} d\omega_Q \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

schreiben können.

256. Durchführung der Umformung.

Darstellung der Größen L_j durch die Potentialfunktion φ .

Wir führen jetzt in (4) die in (8) und (9) gefundenen Werte der dort vorkommenden Integrale ein. Die Glieder, welche $k_n^{(h)}$ enthalten, heben sich auf. $k_n^{(v)}$ hat nach (5) den Wert Null. Wir erhalten folglich:

$$U_j(t) = 4\pi L_j(t) + \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t)}. \quad (10)$$

Wir haben also:

$$L_j(t) = \frac{k_j^{(v)}}{U_n^{(v)}} + \frac{k_j^{(h)}}{U_n^{(h)}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ U_j(t) - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t)} \right\}. \quad (11)$$

257. Vorläufige Formulierung der Bedingungen für die Potentialfunktion φ .

Mit Hilfe der Gleichung D S. 252 können wir $k_j^{(v)}$ in bekannten Größen und in φ ausdrücken. Die Gleichung (11) gibt uns dann $k_j^{(h)}$ in denselben Größen ausgedrückt. Wir sehen, daß das ganze Problem auf die Bestimmung von φ zurückgeführt worden ist.

Wenn wir in die Definitionsgleichung B für φ die in D und (11) gegebenen Werte von $k_j^{(v)}$ und L_j einsetzen, geht sie in ein System von zwei Integro-Differentialgleichungen für φ_v und φ_h über. Dazu kommt die Grenzbedingung C.

258. Darstellung der Bewegung im Inneren der Flüssigkeit vermittelt der Funktion φ .

Wenn es gelungen ist φ zu bestimmen, so ist damit die Bewegung für $\mu = 0$ bekannt. Die Umformungen unseres ursprünglichen Ansatzes für die Geschwindigkeitskomponenten, die wir oben gemacht haben, können natürlich auch dann gemacht werden, wenn der Aufpunkt P nicht auf der Oberfläche des Körpers $S(t)$ liegt. Wir gehen wieder vom

Ansätze (2) aus und verfahren genau wie in 251. Wir erhalten, wenn der Punkt P in dem von $S(t)$ nicht durchschrittenen Bereiche liegt:

$$\begin{aligned} u_j(P, t) = & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) = & - \varrho \int_{S(t)} k_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir formen die Integrale rechts in der ersten dieser Gleichungen mit Hilfe der in 252 und 253 dargelegten Methoden um und erhalten:

$$u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Differentiation der Gleichung B in bezug auf t gibt ferner:

$$q = -\varrho \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}. \quad (13)$$

Wenn dagegen der Punkt P in dem von $S(t)$ durchschrittenen Bereiche liegt, so erhalten wir aus (2) zunächst:

$$\begin{aligned} u_j(P, t) = & 4\pi \left\{ \left(\frac{1}{U_n^{(h)}} [k_j^{(h)} - k_n^{(h)} \cos(n x_j)] \right)_{P, t_n} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{U_n^{(v)}} [k_j^{(v)} - k_n^{(v)} \cos(n x_j)] \right)_{P, t_h} \right\} - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_v(\tau)} k_k^{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_h(\tau)} k_k^{(h)} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \\ q(P, t) = & - \varrho \int_{S(t)} k_k(Q, t) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r} dS_Q - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

t_h und t_v sind hier die Zeitpunkte, in welchen der Punkt P auf S_h bzw. S_v lag.

Die Umformung ergibt jetzt:

$$u_j = 4\pi L_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}, \quad q = -\varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}.$$

Nach Gleichung (11) können wir dieses Ergebnis auch in der Form:

$$u_j = U_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{S_h(t_h)}, \quad q = -\varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} \quad (14)$$

schreiben.

Die Bedingung C für φ zeigt, daß die Flüssigkeit längs der Vorderseite des Körpers gleitet. Die Gleichungen (14) zeigen dagegen, daß die Flüssigkeit an S_h haftet.

25.9. Definitive Formulierung der Bedingungen für φ . Verifikation der Kontinuitätsbedingung.

Wir haben oben in 25.7 die Integro-Differentialgleichung erwähnt, welcher die Funktion φ genügen muß. Wir wollen jetzt den Inhalt jener Integro-Differentialgleichung in anderer Form darstellen. Vorab bemerken wir folgendes: die Größen L_j sind durch die Gleichungen (11) als Funktionen von t und den Punkten der Fläche S_h definiert. Wir können sie aber auch als (von der Zeit unabhängige) Funktionen der Punkte des Bereiches B_h auffassen. Wir können mit anderen Worten jedem Punkte P in B_h einen und zwar nur einen, von der Zeit unabhängigen Vektor L zuordnen. Zu diesem Zwecke haben wir nur den Zeitmoment t_h zu bestimmen, in welchem P auf S_h lag. Wir ordnen P den Vektor L zu, der im Momente t_h demjenigen Punkte von S_h zugehört, der zu eben dieser Zeit mit P zusammenfällt. Wir betrachten im folgenden die Größen L_j als Funktionen von x_1, x_2, x_3 . Die Größen U_j , die wegen der vorausgesetzten Starrheit des Körpers auf der ganzen Fläche S_h die selben Werte haben, können wir ebenso als Funktionen von x_1, x_2, x_3 auffassen. Aus den Gleichungen B, C, D schließen wir, daß φ jetzt den folgenden Bedingungen genügen muß:

1. Im Bereiche $B_v(t)$ muß $\varphi = \varphi_v$ der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_v = 0$$

genügen. φ_v muß in B_v regulär sein und im Unendlichen verschwinden.

2. Auf $S_v(t)$ muß:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} = U_n^{(v)}$$

sein.

3. Im Bereiche $B_h(t)$ muß $\varphi = \varphi_h$ der Poissonschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_h = -4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j}$$

genügen.

4. Auf der Grenzfläche Z , zwischen B_v und B_h , muß:

$$\varphi_v = \varphi_h$$

sein.

5. Auf Z muß ferner:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_Z} = \frac{d\varphi_h}{dn_Z} + 4\pi L_{nZ}$$

sein.

6. In jedem Punkte P von B_h muß, wenn t_h der Zeitmoment ist, in welchem P auf S_h lag:

$$L_j(P) = \frac{1}{4\pi} \left\{ U_j(P) - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h} \right\}.$$

Diese sechs Bedingungen enthalten alles, was wir von der Funktion φ wissen. Sie bilden also einen vollständigen Ersatz für die früher erwähnte Integro-Differentialgleichung.

Die Frage erhebt sich jetzt, ob die Bedingungen 1—6 die Funktion φ und den Vektor $\mathbf{L}$ eindeutig bestimmen. Es ist leicht zu sehen, daß dies nicht der Fall ist. Wir betrachten die Bewegung eines starren Körpers während einer bestimmten Zeit, etwa $t_0 \leq t \leq t_1$. Für jedes t , welches in dieses Intervall fällt, sind dann die Größen U_j in $B_h(t)$ bekannte Funktionen von x_1, x_2, x_3 . Wir nehmen an, daß es gelungen ist, eine diesen Werten von U_j entsprechende Lösung φ, L_j der Bedingungen 1—6 zu finden. Wir konstruieren dann in folgender Weise eine neue Lösung derselben Bedingungen. Wir bezeichnen mit $\tilde{\varphi}$ irgendeine von t unabhängige, im Inneren des Bereiches $B_h(t_1)$ stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion von x_1, x_2, x_3 , welche auf der Grenzfläche $S(B_h(t_1))$ von $B_h(t_1)$ verschwindet. Wir setzen dann: in $B_v(t)$:

$$\varphi^* = \varphi_v^* = \varphi_v,$$

in $B_h(t)$:

$$\varphi^* = \varphi_h^* = \varphi_h + \tilde{\varphi},$$

$$L_j^* = L_j - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j}.$$

Man sieht sofort, daß φ^*, L_j^* eine neue Lösung der Bedingungen 1—6 ist. Und ein Blick auf die Gleichungen (12), (13), (14) zeigt, daß die durch diese Formeln beschriebene Bewegung der Flüssigkeit in keiner Weise verändert wird, wenn wir φ mit φ^* vertauschen.

Wir können die Unbestimmtheit der Funktion φ und der Größen L_j benutzen, um die Bedingungen 1—6 zu vereinfachen. Wir erreichen dieses Ziel, indem wir die Funktion $\tilde{\varphi}$ so wählen, daß in B_h :

$$\frac{\partial L_j^*}{\partial x_j} = 0$$

ausfällt.

Wir brauchen dazu nur für $\tilde{\varphi}$ eine Lösung der Gleichung:

$$\Delta \tilde{\varphi} - 4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0$$

wählen, welche in $B_h(t_1)$ regulär ist und auf der Grenzfläche dieses Bereiches verschwindet.

Es folgt aus dem oben Gesagten, daß wir vom Anfang an hätten voraussetzen können, daß in B_h

$$\frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0 \quad (15)$$

ist. Wir führen jetzt diese Voraussetzung ein und wollen die Folgerungen daraus ziehen.

Wir kehren zu der Bedingung (6), S. 259, zurück. Sie ergibt wegen (15):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j}.$$

Diese Gleichung enthält, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine Bedingung, welche die Funktion φ_h an S_h erfüllen muß. In den Fällen, welche für die Anwendungen Interesse haben, kann man diese Bedingung in viel einfacherer Weise schreiben. Es ist wohl bekannt, daß die Potentialfunktionen, mit welchen man sich in der mathematischen Physik beschäftigt, bei den einfach geformten Körpern, mit denen man am meisten zu tun hat, nicht nur außerhalb dieser Körper existieren, sondern vielmehr ein Stückchen ins Innere der Körper fortgesetzt werden können. Wenn wir annehmen, daß dies auch für unser Problem gilt, so können wir unsere Gleichung in der Form:

$$\Delta \varphi_h + \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_j \partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j} = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial x_j}$$

schreiben. Da:

$$\Delta \varphi_h = -4\pi \frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0$$

ist, und da an S_h t_h konstant ist und folglich:

$$\frac{\partial t_h}{\partial x_1} : \cos(n x_1) = \frac{\partial t_h}{\partial x_2} : \cos(n x_2) = \frac{\partial t_h}{\partial x_3} : \cos(n x_3)$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x_j \partial t_h} \cos(n_h x_j) = \frac{\partial U_j}{\partial t_h} \cos(n_h x_j)$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}$$

an S_h .

Wir fassen zusammen, was wir unter unseren jetzigen Voraussetzungen über die Funktion φ aussagen können.

I. Im Bereiche $B_v(t)$ ist $\varphi = \varphi_v$ eine reguläre und im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung:

II. Auf $S_v(t)$ gilt:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n} = U_n^{(v)}.$$

III. Im Bereiche $B_h(t)$ genügt $\varphi = \varphi_h$ ebenfalls der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi_h = 0.$$

IV. Auf $S_h(t)$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}.$$

V. Auf der Grenzfläche Z zwischen B_v und B_h gilt:

$$\varphi_v = \varphi_h.$$

VI. Auf Z gilt ferner:

$$\frac{\partial \varphi_v}{\partial n_Z} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_Z} - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_Z} \right)_{P, t_h} + U_{n_Z}(P).$$

Wenn es gelungen ist, eine Funktion φ zu bestimmen, welche diesen Bedingungen genügt, so ist die Bewegung der Flüssigkeit durch die einfachen Formeln:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, \quad q = -\varrho \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}.$$

in B_h :

$$u_j = U_j(t_h) + \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_{P, t_h}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi_h}{\partial t}$$

bestimmt.

In den folgenden Paragraphen 27–31 werden wir uns mit speziellen Problemen beschäftigen, in denen es gelungen ist, die Funktion φ explizit zu bestimmen.

25 10. Befreiung von einschränkenden Voraussetzungen.

Wir haben unserer Analyse des Systemes (3), (4) die Annahme (5): $k_n^{(v)} = 0$ an $S_v(t)$, zugrunde gelegt. Man sieht leicht, daß diese Annahme zulässig, aber nicht notwendig ist. Aus dem in § 24 14 bewiesenen Satze folgt, daß auch ohne diese Annahme φ_v an $S_v(t)$ der Bedingung C genügen muß. Und man sieht leicht, daß auch die übrige Analyse ohne diese Annahme ausgeführt werden kann. Unsere Ergebnisse sind also davon unabhängig, ob man die Annahme (5) macht oder nicht.

Wir haben ferner zur Vereinfachung unseres Problems angenommen, daß eine mit der Bewegungsrichtung des Körpers parallele Gerade die Oberfläche desselben höchstens in zwei Punkten schneidet. Auch von dieser Annahme können wir uns leicht frei machen. Wenn man sie aufgibt, kann es eintreten, daß die Oberfläche des Körpers einen zylindrischen Teil hat, dessen Erzeugenden mit der Bewegungsrichtung parallel sind. Man zeigt leicht, daß ein solcher Teil der Oberfläche zur Vorderseite zu zählen ist. Es kann ferner eintreten, daß gewisse Teilbereiche von $B_h(t)$ von mehreren Flächen S_v und mehreren Flächen S_h durchschritten worden sind. In diesen Fällen gibt es mehrere mit der Bewegungsrichtung parallele, zylindrische Flächen, welche den Körper $K(t)$ umhüllen. Die hinter dem Körper gelegenen Teile dieser Flächen zerlegen den Bereich $B_h(t)$ in Teilbereiche. In jedem Teilbereiche gelten die oben gefundenen Gesetze I—VI. Die verschiedenen Potentialfunktionen φ_h gehen auf den Grenzflächen ihrer Existenzbereiche stetig ineinander oder in φ_v über.

25 11. Stationärer Fall.

Wenn die Geschwindigkeit des Körpers konstant und die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist, kann φ nur von den Variablen $x_j - U_j t$ ($j = 1, 2, 3$) abhängen. Wir haben in diesem Falle:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = -U_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial U_j}{\partial t} = 0.$$

Die Bedingung IV, S. 261, ergibt unter diesen Umständen:

$$\frac{d}{dn} \left(U_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{auf } S_h. \quad (16)$$

Wenn wir die x_1 -Achse in die Richtung der Bewegung des Körpers legen, können wir diese Bedingung einfacher:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad \text{auf } S_h \quad (17)$$

schreiben.

Wir haben also den Satz: Bei stationärer Bewegung genügt φ an der Vorderseite der Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n$$

und an der Rückseite der Bedingung:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

25 12. Ausführungen über den Begriff der hydrodynamischen Rückseite.

Wir sind schon mehrmals dem Satze begegnet: bei verschwindender Zähigkeit gleitet eine Flüssigkeit längs der Vorderseite eines Körpers, aber haftet an der Rückseite desselben. Wir wollen noch einen Augenblick bei diesem Satze stehen bleiben. Wir sind bei der Ableitung desselben von den vereinfachten hydrodynamischen Differentialgleichungen (1) ausgegangen. Wenn unser Satz eine physikalische Bedeutung haben soll, so muß er auch für die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen gelten. Was ist aber, wenn man von diesen vollständigen Differentialgleichungen ausgeht, unter „Vorderseite“ und „Rückseite“ eines Körpers zu verstehen? Daß hier nicht die geometrischen Verhältnisse, sondern die relative Bewegung des Körpers und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht entscheidend sind, liegt im Wesen der Sache. Etwas definitives darüber zu sagen wird erst dann möglich sein, wenn es gelungen ist, bei den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ auszuführen. Es gibt aber eine Vermutung, die einen so hohen Grad von innerer Wahrscheinlichkeit hat, daß wir sie hier aussprechen wollen. Als Maß der relativen Bewegung des Körpers und der angrenzenden Flüssigkeitsschicht in einem bestimmten Punkte der Oberfläche des Körpers wählen wir die Größe:

$$\frac{du_n}{dn} = \cos(n x_j) \cos(n x_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

Wir bemerken, daß an einem Teile der Oberfläche eines stationär bewegten Körpers, wo die Flüssigkeit am Körper haftet, wegen der Kontinuitätsbedingung notwendig:

$$\frac{du_n}{dn} = 0$$

ist, und wir stellen das (hypothetische) Gesetz auf: Bei verschwindender Zähigkeit darf an der Oberfläche eines stationär bewegten starren Körpers die Größe:

$$\frac{du_n}{dn}$$

nirgends einen positiven Wert annehmen.

Werfen wir von dem hier eingenommenen Standpunkte aus einen Blick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten! Betrachten wir etwa die Bewegung einer starren Kugel in einer solchen Flüssigkeit! U sei ihre Geschwindigkeit in einem gewissen Momente. Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel in diesem Momente und die

x_1 -Achse in die Bewegungsrichtung derselben. Die Bewegung der Flüssigkeit in diesem Momente ist dann durch die Formel:

$$u_j = -\frac{1}{2} U a^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_1}{R^3}$$

gegeben, wo a der Radius der Kugel und $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ist. Wir berechnen $\frac{du_n}{dn}$ an der Oberfläche der Kugel und finden:

$$\frac{du_n}{dn} = -\frac{3x_1 U}{a^2}.$$

Nach unseren Annahmen ist $U > 0$. Wir haben dann:

$$\frac{du_n}{dn} \leq 0,$$

je nachdem $x_1 \geq 0$. Der Fehler der Theorie der idealen Flüssigkeiten ist nach unserem jetzigen Standpunkte der, daß nach ihr an der Rückseite des Körpers, d. h. für $x_1 < 0$, die nicht zulässige Ungleichung $\frac{du_n}{dn} > 0$ bestehen soll.

§ 26. Neue Methode zur Behandlung des stationären Falles.

A. Zweidimensionaler Fall.

261. Der Grenzübergang bei geradliniger Begrenzung.

Die am meisten befriedigende Methode den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit auszuführen, würde darin bestehen, zuerst das Randwertproblem bei endlichem, nicht verschwindendem μ zu lösen und dann den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ zu vollziehen. Dieser Weg ist in dem allgemeinen Falle noch nicht gangbar. Dagegen kann man für einen Bereich mit einer geradlinigen — bzw. im dreidimensionalen Falle, ebenen — Begrenzung die Gleichungen:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

mit vorgeschriebenen Werten der u_j an der Grenze, auch wenn $\mu > 0$ ist, exakt lösen und dann den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ in dieser Lösung ausführen. Die Resultate, welche man in dieser Weise erhält, stimmen mit den oben abgeleiteten vollständig überein. Sie gestatten uns aber, wie wir später sehen werden, einen Schritt weiter zu gehen, als unsere bis jetzt erhaltenen Ergebnisse erlauben. Wir wollen deshalb diese Resultate hier mitteilen.

Wir betrachten zuerst den zweidimensionalen Fall und wählen die gerade Grenzlinie zu unserer x_2 -Achse. Wir müssen dann die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit in der allgemeinen Form:

$$-\varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

schreiben. Wir suchen eine für $x_1 > 0$ gültige Lösung dieses Systemes. Die Nebenbedingungen seien für $\mu > 0$: für $x_1 = 0$: $u_j = V_j(x_2)$; in unendlicher Ferne: $u_j = 0$.

Die Lösung dieser Aufgabe und der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ ergibt: wenn $U_1 > 0$ ist:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, & q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k}, \\ \varphi_v &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(\xi) \log r d\xi, \\ r^2 &= x_1^2 + (x_2 - \xi)^2, & r &\geq 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wenn $U_1 < 0$ ist:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left\{ \frac{x_1 U_2 + (x_2 - \xi) U_1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_1}{x_2 - \xi - \frac{U_2}{U_1} x_1} \right\} d\xi + \\ &\quad + \frac{U_1}{U_1^2 + U_2^2} \left\{ U_1 V_1 \left(x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) + U_2 V_2 \left(x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) \right\}, \\ u_2 &= \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left\{ \frac{(x_2 - \xi) U_2 - x_1 U_1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_2}{x_2 - \xi - \frac{U_2}{U_1} x_1} \right\} d\xi + \\ &\quad + \frac{U_2}{U_1^2 + U_2^2} \left\{ U_1 V_1 \left(x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) + U_2 V_2 \left(x_2 - \frac{U_2}{U_1} x_1 \right) \right\}, \\ q &= \frac{\varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \frac{x_2 - \xi}{r^2} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wenn wir mit einem Strich über einer Funktion von x_1, x_2 andeuten, daß darin x_j mit $x_j - \frac{U_j}{U_1} x_1$ vertauscht werden soll, können wir die Gleichungen (3) auch in der Form:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\varphi_h}}{\partial x_j} + \overline{V}_j \\ q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k}, \\ \varphi_h &= \frac{1}{\pi(U_1^2 + U_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [V_1(\xi) U_2 - V_2(\xi) U_1] \left\{ U_2 \log r - \right. \\ &\quad \left. - U_1 \arctg \frac{x_2 - \xi}{x_1} \right\} d\xi \end{aligned} \right\} (3^{\text{bis}})$$

schreiben.

26 2. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems.

Die Formeln (2), (3) geben die Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe des Systemes (1) bei $\mu = 0$ für den Fall, daß die Grenzkurve S des „Körpers“ eine gerade Linie ist. Wir sehen aus diesen Formeln, daß in diesem Falle die u_j aus Elementen zusammengesetzt sind, welche je von einem Elemente der geradlinigen Grenzkurve abhängen. Es liegt nahe, anzunehmen, daß auch im allgemeinen Falle, d. h. wenn die Grenzkurve nicht geradlinig ist, die u_j sich durch Ausdrücke darstellen lassen, welche aus Elementen zusammengesetzt sind, welche in derselben Weise von je einem Elemente der Grenzkurve S abhängen. Die Verfolgung dieses Gedankens führt zu dem folgenden Ansatz zur Lösung des Problems:

in B_v :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1) n_2(\xi) - (x_2 - \xi_2) n_1(\xi)] \frac{ds_\xi}{r^2}, \\ u_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{r^2} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1) n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2) n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r^2}; \end{aligned} \right\} (4)$$

in B_h :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_2} [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r^2} + \\ &\quad + \nu(x_2), \\ u_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2 - \xi_2}{r^2} ds_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ξ_1, ξ_2 sind hier die Koordinaten eines Punktes auf dem Elemente ds_ξ von S . $n(\xi)$ ist die im Punkte ξ_1, ξ_2 nach außen gezogene Normale der Kurve S von der Länge 1. B_v, B_h, S_v, S_h haben dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen. $\lambda(\xi), \mu(\xi), \nu(\xi)$ sind Funktionen von ξ_1, ξ_2 , welche aus den Randbedingungen: $u_n = U_1 n_1$ an S_v ; $u_1 = U_1, u_2 = 0$ an S_h bestimmt werden müssen. r hat die Bedeutung $\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$.

263. Zurückführung der Randbedingungen auf eine Fredholmsche Integralgleichung.

Die Randbedingungen:

$$u_n = U_1 n_1 \text{ an } S_v, \quad u_2 = 0 \text{ an } S_h$$

ergeben unter Benutzung bekannter Eigenschaften des logarithmischen Potentials, wenn der Punkt P' mit den Koordinaten x_1', x_2' auf S liegt: wenn P' auf S_v liegt:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x') + \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) [(x_1' - \xi_1)n_1(x') + (x_2' - \xi_2)n_2(x')] \frac{ds_\xi}{r'^2} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \{ (x_1' - \xi_1)[n_1(x')n_2(\xi) + n_2(x')n_1(\xi)] - \\ - (x_2' - \xi_2)[n_1(x')n_1(\xi) - n_2(x')n_2(\xi)] \} \frac{ds_\xi}{r'^2} = U_1 n_1, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wenn P' auf S_h liegt:

$$\left. \begin{aligned} \mu(x') + \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_2' - \xi_2}{r'^2} ds_\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) [(x_1' - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r'^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$r' = \sqrt{(x_1' - \xi_1)^2 + (x_2' - \xi_2)^2}.$$

Die Gleichungen (6), (7) lassen sich als eine Fredholmsche Integralgleichung auffassen. Der Kern derselben ist überall endlich, wenn die Randkurve eine überall stetige Tangente und eine überall endliche Krümmung hat. Er ist als Funktion der beiden Punkte x_1', x_2' und ξ_1', ξ_2' stetig, so lange diese beiden Punkte nicht die Grenzpunkte der beiden Bereiche S_v und S_h überschreiten. Dagegen macht der Kern im allgemeinen einen endlichen Sprung, wenn einer der beiden Punkte durch einen der beiden Grenzpunkte zwischen S_v und S_h passiert. Das System (6), (7) kann unter diesen Umständen offenbar mittels der Fredholmschen Methode behandelt werden.

Nachdem $\lambda(\xi)$ und $\mu(\xi)$ bestimmt sind, erhält man $v(x_2)$ aus der Bedingung $u_1 = U_1$ an S_h . Sie ergibt:

$$\left. \begin{aligned} v(x_2') = U_1 - \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} ds_\xi - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \frac{x_1' - \xi_1}{x_2' - \xi_2} [(x_1' - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{ds_\xi}{r'^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Man hat hier rechts x_1' als Funktion von x_2' aufzufassen. Die Beziehung zwischen ihnen wird durch die Gleichung des Kurvenstückes S_h gegeben. Man erhält so v in seiner Abhängigkeit von x_2' oder allgemeiner von x_2 .

26 4. Nachweis, daß die erhaltene Lösung dieselbe Gestalt hat wie die in den Paragraphen 23 und 25 gewonnene Lösung.

Wir haben im § 23 S. 227 und 228 die Lösung eines speziellen Falles des hier behandelten Problems in der Form:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}, \quad q = q U_1 \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

in B_h :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

$$\Delta A = 0$$

gefunden. In § 25 (12), (13) und (14) haben wir die Lösung eines allgemeineren Problems, das unsere jetzige Aufgabe als speziellen Fall enthält, in einer ähnlichen Form dargestellt. Es ist unter diesen Umständen von Interesse zu sehen, ob die jetzt gefundene Lösung auch in dieser Form dargestellt werden kann. Man sieht nun leicht, daß dies in der Tat der Fall ist. Wir definieren durch die Formel:

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{s_v} \lambda(\xi) \log r dS_\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{s_h} \mu(\xi) \left\{ n_2(\xi) \log r + n_1(\xi) \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} \right\} dS_\xi \quad (9)$$

eine Funktion von x_1, x_2 . Sie ist eine außerhalb der Kurve S überall reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Sie ist nicht eindeutig. Vielmehr wächst der Betrag von φ um:

$$2 \int_{s_h} \mu(\xi) n_1(\xi) dS_\xi,$$

wenn der Punkt x_1, x_2 in positiver Richtung die Kurve S umkreist. φ verschwindet in unendlicher Ferne nicht, sondern nimmt im allgemeinen dort einen dem absoluten Betrage nach unendlich großen Wert an. Dagegen sind die Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ außerhalb der Kurve S überall endliche, eindeutige und stetige Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Auch verschwinden sie in unendlicher Ferne.

Wir wollen zeigen, daß man die durch (4) und (5) gegebene Lösung unseres Problems durch die Funktion φ ausdrücken kann. Mit Hilfe der Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \log r = \frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} = \frac{x_1 - \xi_1}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \log r = - \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - \xi_2}{x_1 - \xi_1} = \frac{x_2 - \xi_2}{r^2},$$

sieht man in der Tat sofort, daß die Formeln (4) sich in der Form:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

schreiben lassen. Der zugehörige Wert von q ist:

$$q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

In die erste Gleichung (5) führen wir den Wert (8) von $v(x_2)$ ein. Wir erhalten so:

in B_h :

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} - \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} \right\} ds_\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 - \xi_2} [(x_1 - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2 - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{x_1' - \xi_1}{x_2' - \xi_2} [(x_1' - \xi_1)n_1(\xi) + (x_2' - \xi_2)n_2(\xi)] \frac{1}{r'^2} \right\} ds_\xi + U_1. \end{aligned}$$

Hier ist $x_2' = x_2$. x_1' , x_2' ist der Punkt der Rückseite, S_h , in welcher diese von einer mit der x_1 -Achse parallelen, durch den Punkt x_1 , x_2 gezogenen Geraden getroffen wird. Unser Ausdruck für u_1 läßt sich unter diesen Umständen auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{1}{\pi} \int_{S_v} \lambda(\xi) \left\{ \frac{x_1 - \xi_1}{r^2} - \frac{x_1' - \xi_1}{r'^2} \right\} ds_\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{S_h} \mu(\xi) \left\{ [(x_1 - \xi_1)n_2(\xi) - (x_2 - \xi_2)n_1(\xi)] \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - [(x_1' - \xi_1)n_2(\xi) - (x_2' - \xi_2)n_1(\xi)] \frac{1}{r'^2} \right\} ds_\xi + U_1. \end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, daß in B_h :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1.$$

Ein Blick auf die zweite Gleichung (5) zeigt, daß in B_h auch:

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Für q erhält man wieder den Wert:

$$q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Wir haben also, zusammenfassend:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad (10)$$

in B_h :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}.$$

Die Randbedingungen, welchen die Funktion φ genügt, sind durch (6) und (7) S. 267 u. 268 gegeben. Die erste Gleichung drückt aus, daß auf S_v :

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n. \quad (11)$$

Die Gleichung (7) drückt aus, daß auf S_h :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad (11^{\text{bis}})$$

ist. Diese Gleichung können wir aber in einer anderen Form schreiben.

Wir können die Gleichung (11^{bis}) als die Gleichung der Kurve S_h auffassen. Für die Normale dieser Kurve folgt dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \cos nx_2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \cos nx_1 = 0.$$

Wenn nun, wie wir vorausgesetzt haben, auf S_h :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \cos nx_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \cos nx_2 = 0$$

auf S_h . Also:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad (12)$$

auf S_h .

Die Gleichungen (10), (11), (12) zeigen, daß die in diesem Paragraphen gefundenen Ergebnisse vollständig mit den in den Paragraphen 23 und 25 gefundenen übereinstimmen. Aber offenbar gehen die hier gefundenen Resultate über die früher gefundenen hinaus. Wir sehen aus der Definitionsgleichung (9) von φ und aus den Gleichungen (10), daß die Unterscheidung zwischen φ_v und φ_h , welche wir im

Paragraph 25 machen mußten, im zweidimensionalen Falle überflüssig ist. Die Definitionsgleichung von φ zeigt ferner, wie sich diese Funktion in unendlicher Ferne verhält. Auch geht die Vieldeutigkeit der Funktion φ unmittelbar aus dieser Gleichung hervor. Diese Vieldeutigkeit hat einen sehr einfachen Sinn. Sie zeigt, daß die Flüssigkeit um den Körper zirkulieren muß. Unsere Formeln bestätigen mit anderen Worten die zuerst von Lanchester aufgestellte Hypothese, daß, wenn ein Körper sich in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegt, diese im allgemeinen um den Körper zirkulieren muß. Und schließlich sind wir ja durch die Fredholmsche Theorie imstande, die Funktion φ explizit zu berechnen und also das ganze Problem definitiv zu lösen.

B. Dreidimensionaler Fall.

26. Der Grenzübergang bei ebener Begrenzung.

Im dreidimensionalen Falle legen wir zunächst die x_2x_3 -Ebene in die Grenzebene. Die Flüssigkeit möge den Halbraum $x_1 > 0$ erfüllen. Unsere Aufgabe ist, das System:

$$-\varrho U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

mit den Nebenbedingungen: für $x_1 = 0$: $u_j = V_j(x_2, x_3)$, in unendlicher Ferne: $u_j = 0$ zu lösen und dann den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ auszuführen. Auch hier müssen wir uns damit begnügen, das Ergebnis dieser Untersuchung mitzuteilen. Wir setzen, um es in einigermaßen einfacher Form schreiben zu können:

$$\begin{aligned} U_j^2 &= U^2, \quad (U \geq 0); \quad U_j = \alpha_j U; \quad \alpha_3 V_1 - \alpha_1 V_3 = W_2, \\ \alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 &= W_3; \quad r^2 = x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 = (x_j - \xi_j)^2, \\ (\xi_1 &= 0). \text{ Ein Strich über einer Funktion von } x_1, x_2, x_3 \text{ soll bedeuten,} \\ \text{daß } x_j \text{ darin mit } x_j - \frac{U_j}{U_1} x_1 \text{ vertauscht werden soll. Wir haben dann:} \end{aligned}$$

für $U_1 > 0$:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_k \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k}, \\ \varphi_v &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int V_1(\xi_2, \xi_3) \frac{d\xi_2 d\xi_3}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

für $U_1 < 0$:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\varphi_h}}{\partial x_j} + V_j \left(x_2 - \frac{a_2}{a_1} x_1, \quad x_3 - \frac{a_3}{a_1} x_1 \right), \\ q &= \varrho U_k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k}, \\ \varphi_h &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[W_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - W_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \log \{ r + a_j (x_j - \xi_j) \} d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial W_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial W_2}{\partial \xi_3} \right) \log \{ r + a_j (x_j - \xi_j) \} d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Man kann aus den Formeln (14), (15) folgendes ablesen. Wenn $U_1 > 0$ ist, so ist die Bewegung eine reine Potentialbewegung. Von den Grenzbedingungen $u_j = V_j$ an der Ebene $x_1 = 0$ ist nur eine, $u_1 = V_1$, erfüllt. Wenn dagegen $U_1 < 0$ ist, so ist die Bewegung aus einer Potentialbewegung und einer den Gleichungen:

$$U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0$$

genügenden Wirbelbewegung zusammengesetzt. Die Grenzbedingungen $u_j = V_j$ an der Ebene $x_1 = 0$ sind alle erfüllt. Unser Satz, daß eine Flüssigkeit bei verschwindender Zähigkeit an der Vorderseite eines Körpers gleitet und an der Rückseite desselben haftet, findet auch in diesen Ergebnissen eine Bestätigung.

266. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems.

Wir legen die x_1 -Achse zur Geschwindigkeit des Körpers parallel. Unser System von Differentialgleichungen hat dann die Form:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} = -\frac{\partial q}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (16)$$

Wir stellen uns die Aufgabe, dieses System an der Grenze $\mu = 0$ für den Fall zu lösen, daß u_1, u_2, u_3 auf einer geschlossenen Fläche S die Werte $U_1, U_2 = 0, U_3 = 0$ annehmen und, so lange $\mu > 0$ ist, in unendlicher Ferne verschwinden. Die Formeln (14), (15) legen es nahe, die Lösung dieser Aufgabe durch den Ansatz:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

in B_h :

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = q U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ \Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} \frac{P(\xi) dS_\xi}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \log(r + x_1 - \xi_1) dS_\xi, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

zu versuchen. Die Funktionen P und N sind dabei aus den Randbedingungen zu bestimmen.

26 7. Nachweis, daß der Ansatz sich auf die aus § 23 und § 25 bekannte Form zurückführen läßt.

Die Funktion:

$$\log(r + x_1 - \xi_1)$$

genügt in dem Bereich, wo $r + x_1 - \xi_1 > 0$ ist, der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \log(r + x_1 - \xi_1) = 0.$$

Die Funktion Φ in (17) ist infolgedessen in B_v eine Lösung der Laplaceschen Gleichung. Dagegen genügt Φ in B_h , wie wir aus der Formel (25) S. 226 ersehen können, der Gleichung:

$$\Delta \Phi = 2 \left(\frac{N(x)}{|\cos(n x_1)|} \right)_h. \quad (18)$$

Die Gleichung (18) zeigt, daß der Ansatz (17) nicht die Form hat, welche wir nach den in § 23, Formeln (27) S. 227 und im § 25, Formeln (12), (13), (14) S. 257 gewonnenen Ergebnissen für die Lösung unseres Problems zu erwarten haben. Sie zeigt aber auch, daß wir unseren Ansatz (17) leicht auf jene Form bringen können. Die rechte Seite von (18) hängt nur von x_2, x_3 ab. Wir können infolgedessen eine nur von x_2, x_3 abhängige Funktion, $\psi(x_2, x_3)$, bilden, die in B_h der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \Delta \Phi \quad (19)$$

genügt. Wenn wir dann:

in B_v :

$$\Phi = \varphi_v,$$

in B_h :

$$\Phi - \psi = \varphi_h$$

setzen, so genügen φ_v und φ_h der Laplaceschen Gleichung, und wir haben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{in } B_v: \\ u_j = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_1}, \\ \text{in } B_h: \\ u_j = \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} \right)_h + U_j, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1}. \end{array} \right\} (20)$$

Die Funktion φ ist durch die Gleichung (20) noch nicht bestimmt. Wir können noch vorschreiben, daß der Wert von φ am Rande des Existenzbereiches, d. h. auf der zylindrischen Grenzfläche Z , zwischen B_v und B_h eine beliebige stetige Funktion von x_2, x_3 sein soll. Wenn wir insbesondere vorschreiben, daß am Rande $\varphi = 0$ sein soll, so werden φ_v und φ_h auf Z stetig ineinander übergehen. Dagegen wird im allgemeinen auf Z die Beziehung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_z} = \frac{d\varphi_h}{dn_z}$$

nicht bestehen. Diese Ergebnisse stimmen mit den in § 25 gefundenen vollständig überein.

26 s. Die Randbedingungen.

Wir können jetzt die Gleichungen aufstellen, die zur Bestimmung von P und N in (17) dienen müssen. Die Bedingung, daß die Flüssigkeit in der Grenze $\mu = 0$ längs der Vorderseite S_v gleiten soll, ergibt:

$$\text{auf } S_v: \quad \frac{d\Phi}{dn} = U_n = U_1 \cos n x_1,$$

also:

$$P(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \frac{d}{dn_x} \log(r + x_1 - \xi_1) dS_\xi = U_n. \quad (21)$$

Die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

auf den Bereich B_h angewandt, ergibt andererseits, wie wir aus § 25 S. 262 sehen können:

$$\text{auf } S_h: \quad \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} = \frac{d}{dn} \frac{d\Phi}{dx_1} = 0,$$

also:

$$\left. \begin{aligned} N(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{S_h} N(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{1}{r} dS_\xi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Gleichungen (21) und (22) können als eine lineare Integralgleichung aufgefaßt werden. Singulär ist diese Integralgleichung nicht nur wegen des Verhaltens der Kerne im Punkte $x_j = \xi_j$, sondern auch besonders dadurch, daß, wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 zu der Randkurve s_h gehört, welche die Grenze zwischen S_v und S_h ist, das Integral:

$$\int_{S_v} P(\xi) \frac{d}{dn_x} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} dS_\xi$$

keinen Sinn hat, wenn über $P(\xi)$ nichts als Stetigkeit vorausgesetzt wird. Doch läßt sich die Integralgleichung durch Iteration auf eine reguläre Form bringen.

269. Nachweis, daß die Potentialfunktion φ im rotations-symmetrischen Falle außerhalb des Körpers regulär ist.

Wir kehren zu den Gleichungen (17) zurück und wenden die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

auf den Bereich B_h an. Wir erhalten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h.$$

Wir integrieren diese Gleichung über einen gegen die x_1 -Achse senkrechten, die Fläche S nicht schneidenden Querschnitt Q des Bereiches B_h . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta \Phi dx_2 dx_3 &= \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h \right] dx_2 dx_3 = \\ &= \int_s \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)_h \cos(n_z x_2) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_h \cos(n_z x_3) \right] ds = \int_s \left(\frac{d\Phi}{dn_z} \right)_h dS. \end{aligned}$$

s ist hier die Randkurve von Q . n_z ist die Normale des Zylinders Z .

Nun ist offenbar:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_z}\right)_h$$

der Grenzwert, welchem sich die normale Ableitung von Φ auf S_h nähert, wenn der Aufpunkt sich der Grenzkurve s_h nähert. Andererseits folgt aus dem Ausdruck (17) von Φ , daß die normale Ableitung von Φ auf S stetig ist. Daraus folgt, daß:

$$\left(\frac{d\Phi}{dn_z}\right)_h$$

den Wert:

$$\left(\frac{d\Phi}{dn}\right)_{s_n} = (U_1 \cos(n x_1))_{s_n} = 0$$

haben muß. Folglich:

$$\int_Q \Delta \Phi dx_2 dx_3 = 0 \quad (23)$$

Die Beziehung (23) ist die Bedingung dafür, daß die Gleichung (19) eine Lösung besitzt, welche am Rande, d. h. auf der zylindrischen Grenzfläche Z zwischen B_v und B_h der Bedingung:

$$\frac{d\psi}{dn_z} = 0 \quad (24)$$

genügt. Statt der Bedingung $\psi = 0$ an Z können wir also der Funktion ψ die Bedingung (24) an Z vorschreiben. Da ψ durch diese Bedingung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, so können wir außerdem vorschreiben, daß ψ in einem bestimmten Punkte von Z verschwindet.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß der Körper Rotationssymmetrie um eine mit der Bewegungsrichtung parallele Gerade hat. Wir setzen überdies voraus, daß die Fläche Z aus einer einzigen, zylindrischen Fläche besteht. Wir bestimmen unsere Lösung ψ der Gleichung (19) durch die Bedingung (24) und die Forderung, daß ψ in einem gewissen Punkte von Z verschwinden soll. Aus der Symmetrie des Problems folgt, daß ψ nur von der Entfernung des Aufpunktes von der Symmetrieachse des Körpers abhängen kann. Wenn ψ in einem Punkte von Z verschwindet, muß dann überall auf Z :

$$\psi = 0$$

sein. In diesem Falle besteht auf Z sowohl die Beziehung:

$$\varphi_v = \varphi_h$$

wie die Beziehung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn_Z} = \frac{d\varphi_h}{dn_Z}.$$

Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie folgt aus diesen Beziehungen, daß alle Ableitungen von φ_v an der Grenzfläche Z dieselben Werte annehmen, wie die entsprechenden Ableitungen von φ_h . φ_h kann als die Fortsetzung der innerhalb von B_v definierten Funktion φ_v in B_h aufgefaßt werden. φ_v und φ_h bilden eine einzige Funktion.

Daß es im zweidimensionalen Falle ebenfalls überflüssig ist, zwischen den Funktionen φ_v und φ_h zu unterscheiden, haben wir oben gesehen.

26 10. Vereinfachung der Randbedingungen im rotations-symmetrischen Falle.

Die Verwandtschaft zwischen dem zweidimensionalen und dem rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle tritt auch in anderer Weise zutage. Wir haben oben gesehen, daß die allgemeine Bedingung auf S_h :

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

im zweidimensionalen Falle in der einfachen Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$$

geschrieben werden kann. Prof. Zeilon hat gezeigt, daß, wenn $\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \bar{R}$ gesetzt wird, im rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle dieselbe Bedingung in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

geschrieben werden kann. Um diesen Satz zu beweisen, gehen wir von den Formeln (20) aus. Sie zeigen sofort, daß die Kontinuitätsbedingung im Bereiche B_h in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_h = 0$$

geschrieben werden kann. Nun kann aber φ nur von x_1 und $\bar{R}$ abhängen. Wir haben infolgedessen, wenn auf S_h $x_1 = \sigma(\bar{R})$ ist:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_h + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_h = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_{x_1 = \sigma(\bar{R})} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)_{x_2 = \sigma(\bar{R})} = \\
&= \frac{1}{\bar{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left[\bar{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right] \right\}_{x_1 = \sigma(\bar{R})} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial \bar{R}} \right)_{x_1 = \sigma(\bar{R})} \frac{d\sigma(\bar{R})}{d\bar{R}} = \\
&= \frac{1}{\bar{R}} \frac{d}{d\bar{R}} \left[\bar{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_{x_1 = \sigma(\bar{R})} \right].
\end{aligned}$$

Folglich:

$$\frac{d}{d\bar{R}} \left[\bar{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_{x_1 = \sigma(\bar{R})} \right] = 0$$

und also:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} \right)_h = \frac{C}{\bar{R}}, \quad (25)$$

wo C eine Konstante ist. Nach unseren Annahmen muß φ auf S_h eine stetige und stetig differenzierbare Funktion sein. Auf der Kurve, welche S_h von S_v scheidet, muß nach unseren obigen Ergebnissen (vgl. Nr. 9 oben):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

sein. Es folgt hieraus und aus (25) daß überall auf S_h :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0$$

sein muß.

26 11. Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen sind für den stationären Fall die früher erhaltenen Ergebnisse mittels einer neuen Methode wiedergefunden worden. Dabei hat es sich gezeigt, daß für das ebene Problem und für das rotationssymmetrische dreidimensionale Problem die Potentialfunktion φ , auf deren Bestimmung die Lösung des Problems zurückgeführt werden kann, überall außerhalb des Körpers regulär ist, so daß die Unterscheidung zwischen den Funktionen φ_v und φ_h überflüssig wird. Die Randbedingungen, welche φ zu erfüllen hat, sind, wenn die Bewegung des Körpers in der Richtung der x_1 -Achse geschieht, im zweidimensionalen Falle:

$$\text{an } S_v: \quad \frac{d\varphi}{dn} = U_n,$$

$$\text{an } S_h: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0;$$

im rotationssymmetrischen, dreidimensionalen Falle, wenn die x_1 -Achse die Symmetrieachse ist und wenn $\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \bar{R}$ gesetzt wird:

an S_v :

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n,$$

an S_h :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{R}} = 0.$$

Die Bestimmung von φ ist im zweidimensionalen Falle auf eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt worden. Auch im allgemeinen dreidimensionalen Falle ist das Problem auf eine Fredholmsche Integralgleichung reduziert worden. Sie ist singulär, kann aber durch Iterationen in eine reguläre Fredholmsche Integralgleichung übergeführt werden.

§ 27. Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgabe, zu welcher die stationäre Bewegung in der Ebene Anlaß gibt.

27 1. Lösung eines potentialtheoretischen Problems nach Hilbert.

Nach den Ergebnissen des § 26 können wir die potentialtheoretische Randwertaufgabe, zu welcher die stationäre Bewegung im zweidimensionalen Falle Anlaß gibt, mit Hilfe der Fredholmschen Determinanten lösen. Die Lösung, welche wir in dieser Weise erhalten, hat aber eine so komplizierte Form, daß sie keine Aussagen über die Dinge erlaubt, die uns am meisten interessieren, den Widerstand und die Druckverteilung auf den Körper. Wir müssen uns deshalb nach einer einfacheren Methode zur Lösung unseres Problems umsehen. Zum Glück gibt es eine solche.

In seinen Grundzügen einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen löst Hilbert* u. a. das folgende Problem: Eine innerhalb einer geschlossenen Kurve C mit stetig sich ändernder Tangente und von der Gesamtbogenlänge l reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

* D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. X, S. 82. Leipzig 1912.

zu finden, deren Real- und Imaginärteil $u(s)$ bzw. $v(s)$ auf C der linearen Relation:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0$$

genügen; dabei sind $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ als stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s mit der Periode l — die ersteren beiden $a(s)$, $b(s)$ ohne gemeinsame Nullstelle — gegeben.

Hilbert löst dieses Problem in der folgenden Weise. Er bezeichnet mit $2n\pi$ die Änderung, die $\log(a(s) + ib(s))$ beim positiven Umlauf längs der geschlossenen Kurve C erfährt. Durch den Imaginärteil von $\log(a(s) + ib(s))$, d. h. durch den Ausdruck:

$$\operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$$

wird dann eine reelle Funktion auf C dargestellt, die von s stetig abhängt mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Punktes $s = 0$, wo ein Sprung ihrer Werte um $2n\pi$ stattfindet. Mittels der bekannten Randwertaufgabe in der Theorie des logarithmischen Potentials kann man nun eine analytische Funktion $F(z)$ bestimmen, die sich innerhalb der Kurve C wie eine ganze Funktion verhält und deren Imaginärteil die Randwerte $\operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$ besitzt. Wird dann:

$$G(z) = e^{F(z)} = U(x, y) + iV(x, y)$$

gesetzt, während:

$$U(s) + iV(s)$$

die Randwerte dieser Funktion $G(z)$ bezeichnen, so erkennen wir auf der Kurve C die Übereinstimmung der Imaginärteile von:

$$\log(U(s) + iV(s)) \quad \text{und} \quad \log(a(s) + ib(s)),$$

d. h. es ist auf der Kurve C :

$$a(s)V(s) - b(s)U(s) = 0.$$

Endlich konstruieren wir eine analytische Funktion $f^*(z)$, die innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion hat und deren Realteil auf C die Randwerte:

$$-\frac{c(s)U(s)}{a(s)(U(s)^2 + V(s)^2)} = -\frac{c(s)V(s)}{b(s)(U(s)^2 + V(s)^2)}$$

besitzt; dann ist:

$$f(z) = G(z)f^*(z)$$

eine analytische Funktion, die das vorgelegte Problem löst.

Die gefundene Funktion $f(z)$ hat innerhalb C den Charakter einer ganzen Funktion; sie besitzt jedoch, wenn n negativ ausfällt, auf C im Punkte $s = 0$ einen Pol $-2n$ -ter Ordnung.

27 2. Unterschied unserer hydrodynamischen Randwertaufgabe von der Hilbertschen.

Unser Problem ist nicht mit dem von Hilbert behandelten identisch, es ist aber damit eng verwandt. Um dies einzusehen, bezeichnen wir mit $\Phi(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $x_1 + ix_2 = z$, deren Realteil die durch die Gleichung (26, 9) S. 269 definierte Funktion φ ist. Wir setzen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

und haben dann:

$$v_1 - iv_2 = \frac{d\Phi(z)}{dz}.$$

v_1 und $-v_2$ sind also Real- und Imaginärteil einer außerhalb der Kurve S regulären und im unendlich fernen Punkte verschwindenden analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x_1 + ix_2$. Wenn wir die Werte von v_1 und v_2 auf der Kurve S mit $v_1(s)$ und $v_2(s)$ bezeichnen, so genügen sie nach S. 271 (11) und (11^{bis}) den Bedingungen:

auf S_v :

$$v_1(s) \cos(nx_1) + v_2(s) \cos(nx_2) = U_1 \cos(nx_1);$$

auf S_h :

$$v_2 = 0.$$

Diese Bedingungen können in der Form:

$$a(s)v_1(s) + b(s)v_2(s) = c_2(s)$$

geschrieben werden. Dabei ist:

auf S_v :

$$a(s) = \cos(nx_1), \quad b(s) = \cos(nx_2), \quad c(s) = U_1 \cos(nx_1);$$

auf S_h :

$$a(s) = 0, \quad b(s) = 1, \quad c(s) = 0.$$

Der Unterschied von dem Hilbertschen Probleme besteht einmal darin, daß die Funktion $b(s)$ nicht wie bei Hilbert durchweg stetig ist. Mindestens in einem der Grenzpunkte zwischen S_v und S_h macht $b(s)$ einen endlichen Sprung, von -1 nach $+1$. Andererseits verlangen wir von der gesuchten analytischen Funktion $v_1 - iv_2$ mehr als Hilbert, indem in unserem Probleme diese Funktion im unendlich

fernen Punkte verschwinden muß. Wir werden unten sehen, daß die Unstetigkeit von $b(s)$ die Anwendung der Hilbertschen Methode nicht hindert und daß die Bedingung $v_1 - iv_2 = 0$ im unendlich fernen Punkte aus den unendlich vielen Lösungen des Hilbertschen Problems eine auswählt, welche allein für die Hydrodynamik Bedeutung hat.

273. Konforme Abbildung des Bereiches auf das Äußere eines Kreises.

Durch eine konforme Abbildung können wir den Bereich $B_v + B_h$, das heißt die ganze $x_1 x_2$ -Ebene mit Ausnahme des von der Kurve S eingeschlossenen Teiles auf den Bereich $|z| > 1$ abbilden. Der Kurve S wird dann der Kreis $|z| = 1$ entsprechen. Wenn S eine einzige zusammenhängende Vorderseite S_v besitzt, können wir es so einrichten, daß die beiden Grenzpunkte zwischen S_v und S_h auf die beiden Punkte $z = \pm i$ abgebildet werden. Durch diese Transformation wird unsere Aufgabe in die folgende übergeführt. Man soll eine außerhalb des Kreises $|z| = 1$ reguläre analytische Funktion $W = v_1 - iv_2$ bestimmen, welche in einem Punkte z_0 ($|z_0| > 1$) verschwindet und welche auf dem Kreise $|z| = 1$ den Bedingungen genügt:

für:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}, \quad \left(\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \right);$$

$$a(\theta)v_1(\theta) + b(\theta)v_2(\theta) = c(\theta),$$

$$\left(\lim_{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = +\infty, \quad \lim_{\theta = -\frac{\pi}{2}} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = -\infty \right);$$

für:

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$v_2(\theta) = 0.$$

Wir erreichen eine kleine Vereinfachung unserer Formel, wenn wir statt $W(z)$ die Funktion: $W^{(1)}(z) = iW(z)$ betrachten. Wir setzen: $W^{(1)}(z) = v_1^{(1)}(x_1, x_2) + iv_2^{(1)}(x_1, x_2)$ und erhalten für die Werte von $v_1^{(1)}$ und $v_2^{(1)}$ auf dem Kreise $|z| = 1$: $v_1^{(1)}(\theta), v_2^{(1)}(\theta)$ die Bedingung:

$$a_1(\theta)v_1^{(1)}(\theta) - b_1(\theta)v_2^{(1)}(\theta) = c(\theta). \quad (1)$$

Dabei ist: $a_1(\theta) = b(\theta)$, $b_1(\theta) = -a(\theta)$ und also, wenn $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c = 0. \quad (2)$$

27 4. Ansatz zur Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis mit Hilfe des Poissonschen Integrales.

Wir betrachten jetzt die auf dem Kreise $|z|=1$, kurz dem Kreise C , erklärte, rein imaginäre Funktion:

$$-\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta) + ib_1(\theta)}{a_1(\theta) - ib_1(\theta)}. \quad (3)$$

Wir wollen eine außerhalb des Kreises reguläre analytische Funktion konstruieren, deren imaginärer Teil dieselben Werte wie jene Funktion annimmt. Wir bestimmen zu diesem Zwecke zunächst eine außerhalb des Kreises reguläre Potentialfunktion, welche auf der Kreisperipherie die Werte (3) annimmt. Eine solche Funktion erhält man bekanntlich durch das Poissonsche Integral* in der Form:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \frac{(r^2 - 1)d\theta'}{r^2 - 2r \cos(\theta - \theta') + 1},$$

wobei

$$z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta} \text{ also } x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

gesetzt worden ist. Nun ist, wenn $e^{i\theta'} = z'$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(\theta - \theta') + 1}$$

der reelle Teil von:

$$e^{i\theta'} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right).$$

Also ist, wenn die Integration in positiver Richtung längs des Kreises C geführt wird:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz' \quad (4)$$

eine außerhalb dieses Kreises reguläre analytische Funktion, deren imaginärer Teil auf dem Kreise die Werte (3) annimmt.

Der reelle Teil von $w(z)$ nimmt auf dem Kreise C den Wert:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \cot \frac{1}{2}(\theta' - \theta) d\theta' \quad (5)$$

an. Man hat dabei rechts den Cauchyschen Hauptwert zu nehmen.

* Man vergleiche betreffend das Poissonsche Integral etwa Picard, *Traité d'Analyse* T. II oder Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 3 Lichtenstein S. 220 ff.

275. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = 0$ auf dem ganzen Kreise.

Wir bilden jetzt die Funktion:

$$G(z) = e^{w(z)}. \quad (6)$$

Sie ist außerhalb des Kreises C regulär und nimmt auf dem Kreise die Werte:

$$\sqrt{\frac{a_1(\theta) - ib_1(\theta)}{a_1(\theta) + ib_1(\theta)}} e^{w(\theta)} = \frac{a_1(\theta) - ib_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}$$

an. Die Wurzel rechts wird hier positiv genommen. Die Exponentialfunktion ist reell und positiv. Wenn wir jetzt:

$$iG(z) = v_1^{(0)}(x_1, x_2) + iv_2^{(0)}(x_1, x_2)$$

setzen, so haben wir auf dem Kreise C :

$$v_1^{(0)}(\theta) = \frac{b_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}, \quad v_2^{(0)}(\theta) = \frac{a_1(\theta)}{\sqrt{a_1(\theta)^2 + b_1(\theta)^2}} e^{w(\theta)}.$$

Folglich:

$$a_1(\theta)v_1^{(0)}(\theta) - b_1(\theta)v_2^{(0)}(\theta) = 0. \quad (7)$$

Wir können diese Tatsache so ausdrücken, daß die Funktion $iG(z)$ eine Nulllösung unseres Problems ist.

276. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = U_1\alpha$.

In den Anwendungen, mit welchen wir uns später beschäftigen werden, tritt insofern eine Vereinfachung auf, als stets $c(\theta) = U_1\alpha(\theta)$ ist. In diesem Falle erfüllt, wie man sofort verifizieren kann, die analytische und im Unendlichen reguläre Funktion $W^{(1)} = iU_1$ die Randbedingung (1) S. 283. Ehe wir nun weiter gehen, empfiehlt es sich des allgemeinen Interesses wegen in der folgenden Nummer eine spezielle Lösung für den allgemeinen Fall herzustellen.

277. Herstellung einer Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe.

Wir bilden dazu die analytische Funktion $f^*(z)$, welche außerhalb des Kreises C regulär ist und deren Realteil auf C die Werte:

$$\frac{c(\theta)v_1^{(0)}(\theta)}{b_1(\theta)(v_1^{(0)}(\theta)^2 + v_2^{(0)}(\theta)^2)}$$

annimmt. Wir haben:

$$f^*(z) = - \left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{c(\theta') v_1^{(0)}(\theta')}{b_1(\theta') (v_1^{(0)}(\theta')^2 + v_2^{(0)}(\theta')^2)} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz' = - \\ & - \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{c(\theta')}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} e^{-w(\theta')} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir setzen jetzt:

$$\bar{W}^{(1)} = f^*(z) G(z) = - \frac{1}{\pi i} e^{w(z)} \int_C \frac{c(\theta') e^{-w(\theta')}}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'} \right) dz'. \quad (9)$$

Auf dem Kreise C haben wir dann:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(1)} &= \bar{v}_1^{(1)}(\theta) + i \bar{v}_2^{(1)}(\theta) = \\ &= \frac{a_1(\theta) - i b_1(\theta)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)} \left(\frac{c(\theta) e^{-w(\theta)}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + iP \right), \end{aligned}$$

wo P der Cauchysche Hauptwert von:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{c(\theta') e^{-w(\theta')}}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}} \cot \frac{1}{2}(\theta' - \theta) d\theta'$$

und also eine positive GröÙe ist. Wir haben also:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^{(1)}(\theta) &= \frac{a_1(\theta) c(\theta)}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{b_1(\theta) P}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)}, \\ \bar{v}_2^{(1)}(\theta) &= - \frac{b_1(\theta) c(\theta)}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1(\theta) P}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{w(\theta)}. \end{aligned}$$

Folglich:

$$a_1(\theta) \bar{v}_1^{(1)}(\theta) - b_1(\theta) \bar{v}_2^{(1)}(\theta) = c(\theta). \quad (10)$$

Die Funktion $\bar{W}^{(1)}$ ist also bis auf die Bedingung $\bar{W}^{(1)}(z_0) = 0$, die im allgemeinen nicht erfüllt ist, eine Lösung unseres Problems.

27 8. Herstellung der allgemeinen Nulllösung.

Untersuchung der singulären Stellen auf dem Kreise C .

Um eine Lösung unseres Problems zu erhalten, haben wir zu $\bar{W}^{(1)}$ eine zweckmäßig gewählte Nulllösung, d. h. eine der Annahme $c(\theta) = 0$ entsprechende, aber nicht die Bedingung $\bar{W}^{(1)}(z_0) = 0$ erfüllende Lösung unseres Problems hinzuzufügen. Nun haben wir oben gesehen, daß:

$$iG(z) = i e^{w(z)}$$

eine solche Nulllösung ist. Eine neue Nulllösung kann man offenbar in

der Weise bilden, daß man $iG(z)$ mit einer beliebigen, für $|z| > 1$ regulären, analytischen Funktion von z multipliziert, die auf dem Kreise C reelle Werte annimmt. Die Größe:

$$\zeta = i \frac{z - i}{z + i}$$

nimmt auf dem Kreise C reelle Werte an. Dem Bereiche $|z| > 1$ entspricht in der $\zeta_1 \zeta_2$ -Ebene ($\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$) die Halbebene $\zeta_2 > 0$, dem Kreise $|z| = 1$ die reelle ζ_1 -Achse. Für unseren Zweck ist also eine beliebige, in der Halbebene $\zeta_2 > 0$ reguläre, analytische Funktion von ζ verwendbar, die auf der reellen ζ_1 -Achse reelle Werte annimmt. Eine solche Funktion ist aber nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie auch in der Halbebene $\zeta_2 < 0$ regulär. Sie kann also nur auf der reellen ζ_1 -Achse Singularitäten haben. Nun müssen wir aber von unserer Funktion $g(z)$ verlangen, daß:

$$g(z)e^{w(z)}$$

auf dem Kreise C regulär ist. Die entsprechende Funktion von ζ darf also nur in einem solchen Punkte auf der ζ_1 -Achse singulär sein, dem ein Punkt z auf dem Kreise C entspricht, wo $e^{w(z)} = 0$ ist. Wir werden so zu der Frage geführt, wie sich die Funktion $e^{w(z)}$ am Kreise C verhält.

Wir hatten nach (5) S. 284:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'.$$

Da nach (2) S. 283 $b_1(\theta') = 0$, wenn $\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{3\pi}{2}$ ist, so können wir diese Formel auch in der Form:

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (11)$$

schreiben. Wir hatten:

$$a_1(\theta) = b(\theta), \quad b_1(\theta) = -a(\theta).$$

Wir haben folglich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} &= \frac{1}{2} \log \frac{a(\theta') + ib(\theta')}{a(\theta') - ib(\theta')} + \frac{1}{2} \log(-1) = \\ &= i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')} \pm \frac{i\pi}{2} (1 + 2n), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wo $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen wird und wo n irgendeine nicht-negative, ganze Zahl ist.

Aus (12) folgt:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}} &= e^{-i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')} + \frac{i\pi}{2}(1+2n)} \\ &= \frac{a(\theta') - ib(\theta')}{\sqrt{a(\theta')^2 + b(\theta')^2}} e^{-\frac{i\pi}{2}(1+2n)} \\ &= -i \frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{\sqrt{a_1^2(\theta') + b_1^2(\theta')}} e^{-\frac{i\pi}{2}(1+2n)}.\end{aligned}$$

Nun haben wir aber oben:

$$\sqrt{\frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}} = \frac{a_1(\theta') - ib_1(\theta')}{\sqrt{a_1(\theta')^2 + b_1(\theta')^2}}$$

gesetzt. Wenn wir die Quadratwurzeln gleicher Größen überall mit denselben Vorzeichen nehmen wollen, so folgt, daß wir der ganzen Zahl n die Bedingung:

$$-ie^{\frac{i\pi}{2}(1+2n)} = 1$$

auferlegen müssen. Sie ist erfüllt, wenn wir links das untere Vorzeichen wählen und n eine gerade Zahl ist oder wenn wir das obere Vorzeichen wählen und dabei n eine ungerade Zahl ist. Wir wählen das untere Vorzeichen und setzen $n = 0$. Wir setzen also:

$$\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta') + ib_1(\theta')}{a_1(\theta') - ib_1(\theta')} = i \operatorname{arctg} \frac{b(\theta')}{a(\theta')} - \frac{i\pi}{2} \quad (12^{\text{bis}})$$

und haben also:

$$\begin{aligned}w(\theta) &= \left(\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{4} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cot \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' + \\ &\quad + \text{stetige Funktion von } \theta.\end{aligned}$$

Wir haben:

$$\cot \frac{\theta' - \theta}{2} = \frac{d}{d\theta'} \left(2 \log \left| \sin \frac{\theta' - \theta}{2} \right| \right).$$

Folglich:

$$w(\theta) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{2} \right) \log \left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \text{stet. Funktion}$$

und also:

$$e^{w(\theta)} = \left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{1}{2}} \cdot \text{stet. Funktion.}$$

Der letzte Faktor hat überall auf dem Kreise C einen von Null verschiedenen Wert.

Unser Ausdruck für $e^{w(\theta)}$ zeigt sofort, daß diese Funktion für $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = \frac{\pi}{2}$ einen endlichen, von Null verschiedenen Wert hat und daß sie für $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} = -\frac{\pi}{2}$ in derselben Weise wie $\theta + \frac{\pi}{2}$ oder $z + i$ verschwindet.

279. Lösung des Problems.

Wir kehren zur Funktion $g(z)$ zurück. Wir sahen, daß diese Funktion nur in solchen Punkten des Kreises C singular sein darf, wo $e^{w(\theta)}$ verschwindet. Wir wissen jetzt, daß es nur einen solchen Punkt gibt, den Punkt $z = -i$ oder $\zeta = \infty$. In diesem Punkt darf $g(z)$, als Funktion von ζ aufgefaßt, von erster Ordnung unendlich werden. Wir schließen hieraus, daß $g(z)$ notwendig die Form:

$$k_1 + ik_2 \frac{z-i}{z+i}$$

haben muß, wo k_1 und k_2 reelle Konstanten sind. Diese Konstanten müssen so bestimmt werden, daß:

$$W^{(1)}(z) = \overline{W}^{(1)}(z) + ie^{w(z)} \left(k_1 + ik_2 \frac{z-i}{z+i} \right)$$

im Punkte z_0 verschwindet. Da z_0 außerhalb des Kreises C liegt und nur für Punkte dieses Kreises die Determinante des aus dieser Beziehung hervorgehenden Gleichungssystems für k_1 und k_2 verschwindet, so sehen wir, daß k_1 und k_2 durch diese Bedingung eindeutig bestimmt sind. Es gibt eine und nur eine Lösung für unser hydrodynamisches Problem.

Gehen wir wieder zur ursprünglichen z -Ebene zurück, so folgt aus unserer Formel für $W_{(i)}^{(1)}$, daß diese Funktion sich für große z -Werte wie

$$iU_1 \frac{A - iB}{z}$$

verhält, wo A und B reelle, im allgemeinen nicht verschwindende Größen sind. Die Funktion $W = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2)$ verhält sich also für große Werte von $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$ wie:

$$U_1 \frac{A - iB}{z} = U_1 \frac{Ax_1 - Bx_2 - i(Ax_2 + Bx_1)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Wenn wir v_1 und v_2 als die Geschwindigkeitskomponenten einer Strömung auffassen, so besteht diese Strömung aus einem radialen Ausfluß vom Körper mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{A U_1}{r}$$

und einer Zirkulation in positiver Richtung um den Körper mit der Geschwindigkeit:

$$\frac{B U_1}{r}.$$

27 10. Zusammenfassung.

Das Problem, zu welchem die stationäre Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit im zweidimensionalen Falle in erster Näherung und bei $\mu \rightarrow 0$ führt, wurde im vorigen Paragraphen auf die Bestimmung einer Potentialfunktion, φ , zurückgeführt. Wenn man statt φ die Ableitungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = v_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = v_2$$

betrachtet, so kann man das Problem in folgender Weise formulieren. Man soll zwei außerhalb der Grenzkurve S des Körpers zweimal stetig differenzierbare und im Unendlichen verschwindende Funktionen v_1 und v_2 , von x_1 und x_2 bestimmen, welche außerhalb von S den Gleichungen:

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$$

und auf S folgenden Bedingungen genügen:

auf der Vorderseite von S , d. h. auf S_v :

$$\cos n x_1 \cdot v_1 + \cos n x_2 \cdot v_2 = \cos n x_1 \cdot U_1;$$

auf der Rückseite von S , d. h. auf S_h :

$$v_2 = 0.$$

Um dieses Problem zu lösen, kann man folgendermaßen verfahren. Man setzt $x_1 + i x_2 = z$ und bildet durch die Transformation $z = f(z')$ ($z' = x_1' + i x_2'$) das Äußere der Kurve S auf das Äußere des Kreises $|z'| = 1$ konform ab. v_1 und v_2 befriedigen als Funktionen von x_1' , x_2' die Gleichungen:

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta v_2 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2'} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1'} = 0,$$

und man kann es so einrichten, daß die Randbedingungen, welche sich auf den Kreis $|z'| = 1$ beziehen, die Form:

$$a v_1 + b v_2 = c = U_1 a$$

annehmen. Dabei soll für $-\frac{\pi}{2} < \theta' < \frac{\pi}{2}$ ($z' = r' e^{i\theta'}$, $r' = 1$): $a = \cos n x_1$,

$b = \cos n x_2$ sein. Dagegen soll für $\frac{\pi}{2} < \theta' < \frac{3\pi}{2}$: $a = 0$, $b = 1$ sein. Die Funktionen v_1 und v_2 müssen überdies in dem Punkte z_0' verschwinden, der dem Punkt $z = \infty$ entspricht.

Man bildet nun die Funktion:

$$w(z') = \frac{1}{\pi} \oint \left(\operatorname{arctg} \frac{b(\theta^*)}{a(\theta^*)} - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{1}{z^* - z'} - \frac{1}{2z^*} \right) dz^*, \quad (13)$$

wo die Integration in positiver Richtung längs des Kreises $|z^*| = 1$ geführt werden soll und wo $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen wird. Man bildet ferner die Funktion:

$$W(z') = U_1 + e^{w(z')} \left(k_1 + i k_2 \frac{z' - i}{z' + i} \right).$$

Man bestimmt k_1 und k_2 so, daß $W(z_0') = 0$ ausfällt. Man kehrt dann zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück und drückt also W als Funktion von z aus. Wenn man dann $z = x_1 + i x_2$ setzt und W in der Form:

$$W = v_1(x_1, x_2) - i v_2(x_1, x_2)$$

darstellt, wo v_1 und v_2 reelle Größen sind, so geben diese Funktionen v_1, v_2 die Lösung des Problems.

§ 28. Die Druckverteilung und der Widerstand bei zweidimensionalen hydrodynamischen Problemen.

281. Einleitung. Ist der Druck bei $\mu \rightarrow 0$ überall stetig?

Wir haben nach den Formeln (10) im § 26:

$$\text{in } B_v: \quad u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad q = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad (j=1,2)$$

$$\begin{aligned} \text{in } B_h: \quad u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ q &= \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Unter q haben wir die Größe:

$$p + \frac{1}{2} \varrho u^2$$

verstanden. Wir haben also:

$$p = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho (u_1^2 + u_2^2).$$

Da u_1 beim Passieren der zylindrischen Grenzfläche zwischen B_v und B_h einen endlichen Sprung macht, so muß ebenfalls p beim Passieren dieser Fläche eine Unstetigkeit aufweisen. Dies Ergebnis kann befremdend erscheinen. Man darf aber nicht vergessen, daß die in der Theorie der idealen Flüssigkeiten übliche Annahme, daß der Druck in einer bewegten Flüssigkeit eine stetige Funktion der Raumkoordinaten ist, auf der stillschweigend gemachten Annahme beruht, daß die Größen $\mu \Delta u_j$ beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ überall in der Flüssigkeit, also auch in den Diskontinuitätsflächen, gegen Null konvergieren. Daß es im mathematischen Sinne nicht selbstverständlich ist, daß p bei $\mu \rightarrow 0$ überall stetig ausfallen wird, zeigt das System:

$$\varrho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta u_j,$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

das sich nur durch Vertauschen der Indizes j und k an einer Stelle von dem System der hydrodynamischen Gleichungen unterscheidet. Dies ist ja gerade das System, für welches wir den Grenzübergang ausgeführt haben und bei welchem wir bei $\mu \rightarrow 0$ den Druck unstetig gefunden haben. Es zeigt, daß bei Differentialgleichungen von demselben Typus wie die hydrodynamischen Differentialgleichungen bei dem Grenzübergang zu verschwindendem μ im allgemeinen der Druck unstetig ausfällt und daß also, wenn sich die hydrodynamischen Differentialgleichungen anders verhalten, es sich dabei, mathematisch gesprochen, um eine Ausnahme handeln muß.

Übrigens darf natürlich nicht vergessen werden, daß unsere Lösung nur eine erste Näherung darstellt*.

28 2. Zerlegung des Druckes in zwei Teile.

Wir setzen:

$$\varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho v^2 = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho (v_1^2 + v_2^2) = p'.$$

Dabei soll, wie im vorigen Paragraphen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

* Auch durch die Ausführungen von Prof. Zeilon, welche im Anhange mitgeteilt werden, wird die Frage von der Stetigkeit des Druckes bei $\mu = 0$ nicht in abstrakt mathematischem Sinne entschieden.

sein. Wir haben dann an S_v : $p = p'$ und an S_h , weil dort $u_1^2 = U_1^2$ ist:

$$p = \varrho U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varrho U_1^2 = p' + p'',$$

wo:

$$p'' = -\frac{1}{2} \varrho (U_1^2 - v_1^2 - v_2^2).$$

283. Berechnung des Widerstandes.

Um die Resultierende der auf den Körper ausgeübten Druckkräfte zu berechnen, betrachten wir zunächst:

$$-\int_S p' \cos(n x_1) ds = -\oint_S p' dx_2,$$

wo die Integration im letzten Integral in positiver Richtung um S herumgeführt werden soll. Um das Integral auszuwerten, addieren wir:

$$-J = -\varrho \oint_S v_1 (v_1 dx_2 - v_2 dx_1).$$

Wir erhalten:

$$-\oint_S p' dx_2 - J = -\varrho \oint_S U_1 v_1 dx_2 - \frac{1}{2} \varrho \oint_S [(v_1^2 - v_2^2) dx_2 - 2v_1 v_2 dx_1].$$

Das letzte Glied ist der reelle Teil von:

$$\frac{i}{2} \varrho \oint_S W^2 dz,$$

wo $W = v_1 - i v_2$ eine außerhalb von S reguläre analytische Funktion von $z = x_1 + i x_2$ ist, welche in unendlicher Ferne von derselben Ordnung klein wie $1/z$ ist. Wir sehen hieraus, daß:

$$\frac{1}{2} \varrho \oint_S W^2 dz = 0.$$

Folglich:

$$-\oint_S p' dx_2 = -\varrho U_1 \oint_S v_1 dx_2 + J.$$

Nun ist, wenn wir:

$$dx_2 = ds \cos(n x_1), \quad dx_1 = -ds \cos(n x_2), \quad (ds > 0)$$

setzen:

$$J = \varrho \int_S v_1 (v_1 \cos(n x_1) + v_2 \cos(n x_2)) ds = \varrho \int_S v_1 \frac{d\varphi}{dn} ds.$$

An der Vorderseite S_v haben wir: $\frac{d\varphi}{dn} = U_1 \cos(n x_1)$ und an der Rückseite S_h : $v_2 = 0$. Also:

$$-\oint_S p' dx_2 = -\varrho U_1 \int_{S_h} v_1 dx_2 + \varrho \int_{S_h} v_1^2 dx_2.$$

Wir haben andererseits:

$$-\int_{S_h} p'' dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2 - v_2^2) dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_2.$$

Folglich:

$$-\oint_S p dx_2 = -\oint_S p' dx_2 - \int_{S_h} p'' dx_2 = \frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2.$$

Auf S_h hat $dx_2 = ds \cos(n x_1)$ einen negativen Wert. Die Komponente der Resultierenden der Druckkräfte in der Richtung der Bewegung des Körpers ist also stets negativ. Der Körper hat daher stets einen Widerstand zu überwinden. Wir setzen diesen Widerstand $= \varrho U_1^2 R_1$, wo R_1 der Widerstandskoeffizient ist, und haben dann:

$$\text{Widerstand} = \varrho U_1^2 R_1 = -\frac{1}{2} \varrho \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2. \quad (1)$$

Wir können dieser Formel eine anschauliche Deutung geben. Wir haben in B_h :

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h + U_1.$$

Nun verschwindet $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ in unendlicher Entfernung vom Körper. Wir haben also in weit entfernten Punkten von B_h :

$$U_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h = u_1,$$

wo $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_h$ wie früher den Wert von $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ auf der Rückseite des Körpers bedeutet. Wir können unsere Formel deshalb auch in der Form:

$$\varrho U_1^2 R_1 = \frac{1}{2} \varrho \int u_1^2 dx_2$$

schreiben, wo die Integration jetzt über einen weit entfernten Querschnitt des Wirbelschwanzes geführt werden soll und dabei $dx_2 > 0$ angenommen werden soll. Diese Formel sagt aus:

Der Widerstand in der Richtung der Bewegung ist gleich der kinetischen Energie, welche der Wirbelschwanz pro Längeneinheit transportiert.

284. Berechnung des Druckes senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Wir berechnen jetzt die zur Bewegungsrichtung senkrechte x_2 -Komponente der Resultierenden der Druckkräfte.

Wir setzen:

$$\varrho \oint_S v_2 (v_2 dx_1 - v_1 dx_2) = J_1$$

und haben dann:

$$\begin{aligned} - \int_S p' \cos(n x_2) ds + J_1 &= \oint_S p' dx_1 + J_1 = \\ &= \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1 - \frac{1}{2} \varrho \oint_S [(v_1^2 - v_2^2) dx_1 + 2 v_1 v_2 dx_2] = \\ &= \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1 - \frac{1}{2} \varrho \cdot \text{Realteil von } \oint W^2 dz = \varrho U_1 \oint_S v_1 dx_1. \end{aligned}$$

Wir haben:

$$J_1 = - \varrho \int_S v_2 \frac{d\varphi}{dn} ds$$

und, weil an S_v : $\frac{d\varphi}{dn} = U_1 \cos(n x_1)$, an S_h : $v_2 = 0$:

$$J_1 = - \varrho U_1 \oint_S v_2 dx_2.$$

Folglich:

$$- \int_S p' \cos(n x_2) ds = \varrho U_1 \oint_S (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) = \varrho U_1 \oint d\varphi.$$

Statt der Kurve S können wir, wie die letzte Formel zeigt, eine beliebige, S einmal umlaufende, geschlossene Kurve zum Integrationsweg benutzen. Wir wählen dazu einen Kreis um den Anfangspunkt mit sehr großem Radius. Nun kann man, wie wir am Schluß des letzten Paragraphen gesehen haben, für großes r ($= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) v_1 und v_2 durch Ausdrücke von der Form:

$$v_1 = U_1 \frac{A x_1 - B x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = U_1 \frac{A x_2 + B x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

darstellen. Wir erhalten demnach:

$$- \int_S p' \cos(n x_2) ds = 2\pi B \varrho U_1^2.$$

Setzt man also den Druck senkrecht zur Bewegung, d. h. die Tragkraft $= \varrho U_1^2 R_2$, so erhält man also schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \varrho U_1^2 R_2 &= - \int_{\dot{s}} p \cos(nx_2) ds = - \int_{\dot{s}} p' \cos(nx_2) ds - \int_{\dot{s}_h} p'' \cos(nx_2) ds = \\ &= 2\pi B \varrho U_1^2 - \frac{1}{2} \varrho \int_{\dot{s}_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1. \end{aligned} \right\} (2)$$

Das erste Glied unseres Ausdruckes für $\varrho U_1^2 R_2$ hängt nur von der Zirkulation der Flüssigkeit um den Körper bei der Strömung v_1, v_2 ab. Es kann als ein Zirkulationsglied bezeichnet werden. Das zweite Glied hängt von dem Unterdruck in der Flüssigkeit hinter dem Körper ab und kann als eine Saugwirkung des Wirbelschwanzes auf den Körper gedeutet werden.

285. Zusammenfassung.

Nachdem man mittels der in § 27 dargelegten Methode die Funktionen v_1 und v_2 berechnet hat, erhält man aus den Formeln:

$$\begin{aligned} \varrho U_1^2 R_1 &= - \frac{1}{2} \varrho \int_{\dot{s}_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2, \\ \varrho U_1^2 R_2 &= 2\pi B \varrho U_1^2 - \frac{1}{2} \varrho \int_{\dot{s}_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1 \end{aligned}$$

den Widerstand $\varrho U_1^2 R_1$ und die Tragkraft $\varrho U_1^2 R_2$. In diesen Formeln soll die Integration in positiver Richtung um den Körper geführt werden. Im ersten Integral ist also dx_2 stets < 0 . B hat die angegebene Bedeutung. B ist also ein Maß der Zirkulation um den Körper.

§ 29. Das Problem des Kreiszylinders.

291. Bericht über die Methode von Prof. Burgers.

Prof. Burgers in Delft hat im Jahre 1921 den aus unserer Theorie hervorgehenden Widerstand gegen einen Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt berechnet, der sich mit konstanter, sehr großer Geschwindigkeit in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegt. Die Methode von Prof. Burgers bestand darin, daß er für die Potentialfunktion den Ansatz:

$$\begin{aligned} \varphi &= A_0 \log r - \sum_1^N \frac{A_n \cos n\theta}{nr^n} \\ (x_1 &= r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta) \end{aligned}$$

machte und mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die endlich vielen Koeffizienten $A_0, A_1, \dots, A_N$ so bestimmte, daß die Randbedingungen:

$$\frac{d\varphi}{dn} = U_n \quad \text{an } S_v,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \quad \text{an } S_h$$

möglichst genau erfüllt wurden. Obwohl diese Methode ein sehr großes Interesse besitzt, wollen wir doch, nachdem durch Prof. Zeilon eine exakte Lösung des Problems gewonnen ist, von einem genaueren Bericht über die Untersuchung von Prof. Burgers absehen und statt dessen die in den zwei vorhergehenden Paragraphen dargelegte Methode benutzen.

292. Berechnung der Funktion $w(z)$.

Wir betrachten einen Kreiszylinder, dessen Radius den Wert R haben möge. Um die in § 27 (vgl. besonders die Zusammenfassung S. 290!) entwickelte Methode benutzen zu können, setzen wir:

$$z' = \frac{z}{R}, \quad \text{also: } r' = \frac{r}{R}, \quad \theta' = \theta.$$

Wir haben auf S_v : $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}\right)$. Folglich:

$$w(z') = w\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta^* = -\frac{\pi}{2}}^{\theta^* = +\frac{\pi}{2}} \left(\theta^* - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{z^* - \frac{z}{R}} - \frac{1}{2z^*}\right) dz^*. \quad (1)$$

Wir berechnen den reellen und den imaginären Teil der Funktion w auf dem Kreise C , d. h. für $r' = 1$, $r = R$. Der reelle Teil hat den Wert:

$$\left. \begin{aligned} w(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\theta^* - \frac{\pi}{2}\right) \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\theta^* - \theta) \cot \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) d\theta^* = \\ &= \left(\frac{\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \log \left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

f ist hier die durch die Gleichung:

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\xi} \cot \xi \, d\xi \quad (3)$$

definierte Funktion.

Der imaginäre Teil von $w(z')$ nimmt nach der Definition von $w(z)$ (§ 27 4 S. 284) auf dem Kreise C den Wert:

$$-\frac{1}{2} \log \frac{a_1(\theta) + ib_1(\theta)}{a_1(\theta) - ib_1(\theta)} = -i \left(\arctg \frac{b(\theta)}{a(\theta)} - \frac{\pi}{2} \right)$$

an. Wir haben also auf dem Kreise C , wenn: $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\text{imaginärer Teil von } w(z') = -i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right); \quad (4)$$

wenn: $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$:

$$\text{imaginärer Teil von } w(z') = 0. \quad (5)$$

Betreffend die Funktion $e^{w(\theta)}$ können wir hieraus schließen, daß sie auf dem Kreise C ($|z'| = 1$, $|z| = R$) die folgenden Werte annimmt, wenn: $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$ie^{-i\theta} e^{w(\theta)}; \quad (6)$$

wenn: $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$:

$$e^{w(\theta)}. \quad (7)$$

293. Lösung des Problems.

Um unser Problem zu lösen, d. h. um die beiden Funktionen:

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

zu bestimmen, haben wir nach § 27, Zusammenfassung (S. 290), in dem Ausdruck:

$$W(z') = W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 + e^{w(z')} \left(k_1 + ik_2 \frac{z' - i}{z' + i} \right)$$

die beiden reellen Konstanten k_1 und k_2 so zu bestimmen, daß in dem Punkte z'_0 , der dem Punkte $z = \infty$ entspricht, $W(z') = 0$ ausfällt. Nun ist offenbar in diesem Falle $z'_0 = \infty$. Wir haben:

$$w(\infty) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta^* = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\theta^* - \frac{\pi}{2} \right) \frac{dz^*}{z^*} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\theta^* - \frac{\pi}{2} \right) d\theta^* = \frac{i\pi}{4}.$$

Zur Bestimmung von k_1 und k_2 erhalten wir also die Gleichung:

$$U_1 + e^{\frac{i\pi}{4}} (k_1 + ik_2) = 0.$$

Sie ergibt:

$$k_1 + ik_2 = -U_1 e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

d. h.:

$$k_1 = -\frac{U_1}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = +\frac{U_1}{\sqrt{2}}.$$

Wir haben also:

$$W\left(\frac{z}{R}\right) = W(z') = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(z')}}{\sqrt{2}} \left(1 - i \frac{z' - i}{z' + i} \right) \right\} \quad (8)$$

Um v_1 und v_2 zu erhalten, genügt es, $W(z')$ in einen reellen und einen rein imaginären Teil zu zerlegen und dann x_1' mit $\frac{x_1}{R}$, x_2' mit $\frac{x_2}{R}$ zu vertauschen. Wir haben mit anderen Worten:

$$v_1(x_1, x_2) - i v_2(x_1, x_2) = W(z').$$

294. Verhalten der Lösung in unendlicher Ferne.

Besonderes Interesse hat, wie wir oben gesehen haben, das Verhalten der Funktion W in unendlicher Ferne. Wir wollen deshalb dieses Verhalten untersuchen. Wir erhalten aus (1) für große $|z|$ -Werte:

$$\begin{aligned} w(z') = w\left(\frac{z}{R}\right) &= \frac{i\pi}{4} - \frac{iR}{\pi z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\theta^* - \frac{\pi}{2} \right) (\cos \theta^* + i \sin \theta^*) d\theta^* = \\ &= \frac{i\pi}{4} + \frac{2R}{\pi z} + \frac{iR}{z}. \end{aligned}$$

Die Formel (8) ergibt unter diesen Umständen für großes $|z|$:

$$W(z) \rightarrow \frac{(\pi - 2)RU_1}{\pi z}. \quad (9)$$

Wir sehen aus (9), daß beim Kreiszyylinder die S. 289 definierte Größe $B = 0$ ist und also keine Zirkulation um den Zylinder stattfindet. Wegen der Symmetrie war dies von vornherein zu erwarten. Wir sehen ferner, daß:

$$AU_1 = \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) RU_1$$

und also, daß der radiale Ausfluß, der nach S. 291 den Wert $2\pi AU_1$ hat,

$$= 2(\pi - 2)RU_1 = 2,283RU_1$$

ist. Prof. Burgers fand bei seiner angenäherten Lösung des Problems für diese Größe den Wert $2,30RU_1$.

295. Werte von v_1 und v_2 auf der Oberfläche des Zylinders.

Auf der Oberfläche des Zylinders haben wir nach (8) und (6), wenn $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} W\left(\frac{z}{R}\right) &= U_1 \left\{ 1 - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{w(\theta) - i\theta} \left(1 - i \frac{\cos \theta + i \sin \theta - i}{\cos \theta + i \sin \theta + i} \right) \right\} = \\ &= U_1 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta + i \cos \theta) e^{w(\theta)} \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben also auf der Oberfläche des Zylinders, wenn

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}:$$

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= U_1 \left\{ 1 - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{w(\theta)} \left(1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}, \\ v_2(\theta) &= \frac{U_1}{\sqrt{2}} \cos \theta e^{w(\theta)} \left(1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

Wir haben dagegen, wenn $r = R$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ist:

$$W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(\theta)}}{\sqrt{2}} \left(1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\},$$

also:

$$\begin{aligned} v_1(\theta) &= W\left(\frac{z}{R}\right) = U_1 \left\{ 1 - \frac{e^{w(\theta)}}{\sqrt{2}} \left(1 - \cot\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right\}, \\ v_2(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

296. Numerische Ergebnisse. Vergleich mit der Erfahrung.

Wir geben eine von Prof. Zeilon berechnete Tabelle für die zwei Funktionen wieder:

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \theta^* \cot \theta^* d\theta^*$$

und:

$$\left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| e^{w(\theta)} = \left| \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|^{\frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2}} \cdot e^{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}.$$

Tabelle I

θ	$f(\theta)$ $= -f(-\theta)$	$\left \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right e^{w(\theta)}$	θ	$f(\theta)$	$\left \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right e^{w(\theta)}$
— 180°	—	0,79	+ 9	0,099	2,31
— 162	—	0,92	18	0,198	2,07
— 144	—	1,05	27	0,292	1,79
— 126	—	1,24	36	0,383	1,52
— 117	—	1,35	45	0,465	1,23
— 108	—	1,49	54	0,537	0,948
— 99	—	1,68	63	0,599	0,673
— 90	—	2,00	72	0,648	0,416
— 81	—	2,37	81	0,682	0,187
— 72	—	2,62	90	0,693	0,000
— 63	—	2,80	99	0,679	0,132
— 54	—	2,91	108	0,634	0,236
— 45	—	2,96	117	0,551	0,325
— 36	—	2,98	126	0,423	0,403
— 27	—	2,92	135	0,229	0,477
— 18	— 0,198	2,85	144	—	0,538
— 9	— 0,099	2,71	162	—	0,667
0	0,000	2,53	180	—	0,790

Mit Hilfe der Tabelle I kann man die Werte von v_1 und v_2 auf dem Umkreise des Zylinders berechnen. Man erhält dann p . Man hat auf S_v :

$$p = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho (v_1^2 + v_2^2) = - \frac{\varrho (v_1 - U_1)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{\varrho}{2} U_1^2,$$

auf S_h :

$$p = \varrho U_1 v_1 - \frac{1}{2} \varrho U_1^2.$$

Die Tabelle II ist ebenfalls von Prof. Zeilon berechnet worden. Sie bringt in der zweiten und dritten Kolumne die theoretisch berechneten Werte von v_1/U_1 und $p/\varrho U_1^2$ auf der Oberfläche des Zylinders. Die in der vierten und fünften Kolumne gegebenen Werte wurden bei Experimenten gefunden, in denen ein Zylinder mit einem Durchmesser von 7,5 cm einem Luftstrom ausgesetzt wurde, dessen Geschwindigkeit in einem Experiment 25, in einem anderen 18 Meter/Sekunde war.* Die Werte sind hier auf absolute Einheiten reduziert. Man sieht, daß der theoretisch berechnete Druck an der Vorderseite des Zylinders ganz denselben allgemeinen Verlauf wie der experimentell bestimmte Druck hat und daß sogar die theoretischen

* Die experimentellen Werte sind aus Jacob, *La Résistance de l'Air et l'Expérience*, tome 2, Paris 1921, entnommen.

Tabelle II

θ	v_1/U_1	$p/\varrho U_1^2$	$p/\varrho U_1^2$ <i>Exp. U = 25</i>	$p/\varrho U_1^2$ <i>Exp. U = 18</i>
0°	1,000	+ 0,500	+ 0,500	+ 0,500
9	0,954	0,457	0,45	0,44
18	0,836	0,360	0,32	0,42
27	0,635	0,179	0,24	0,28
31,5	0,512	+ 0,060	0,06	0,06
36	0,387	— 0,043	— 0,17	— 0,14
45	0,127	— 0,139	— 0,37	— 0,29
54	— 0,130	— 0,474	— 0,47	— 0,36
63	— 0,344	— 0,635	— 0,59	— 0,40
72	— 0,493	— 0,725	— 0,59	— 0,39
81	— 0,531	— 0,695	— 0,57	— 0,37
90	— 0,416	— 0,503	— 0,53	— 0,36
99	— 0,275	—	— 0,47	— 0,31
108	— 0,216	—	— 0,40	— 0,27
117	— 0,181	—	— 0,33	— 0,26
126	— 0,159	—	—	—
135	— 0,144	—	— 0,27	— 0,24
144	— 0,131	—	—	—
153	— 0,126	—	— 0,24	— 0,23
162	— 0,120	—	—	—
180	— 0,117	—	— 0,22	— 0,19

Werte numerisch in überraschend guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sind. Man sieht auch, daß die theoretischen Werte am besten mit denjenigen experimentellen Werten übereinstimmen, welche der größeren Geschwindigkeit entsprechen. Auch dies war theoretisch zu erwarten.

In Figur 1 stellt die untere, voll ausgezogene Kurve die theoretische Druckverteilung an der Vorderseite des Zylinders dar. Die gestrichelten Kurven entsprechen den beiden in Tabelle II aufgenommenen experimentellen Messungsreihen. Offenbar schließt sich die untere der beiden gestrichelten Kurven, welche der Geschwindigkeit $U = 25$ m pro Sekunde entspricht, gut an die theoretische Kurve an. Man bekommt aus der Figur den Eindruck, daß die beiden experimentellen Kurven Glieder einer unendlichen Schar von Kurven sind, welche sich bei wachsender Geschwindigkeit immer näher an die theoretische Kurve anschließen.

Die obere voll ausgezogene Kurve stellt graphisch v_1/U_1 dar.

Mit Hilfe der Tabelle I können wir auch den Widerstandskoeffizient R_1 berechnen. Das Ergebnis ist:

$$R_1 = 1,314.$$

Für einen Zylinder mit dem Querschnitt 1 ergibt dies:

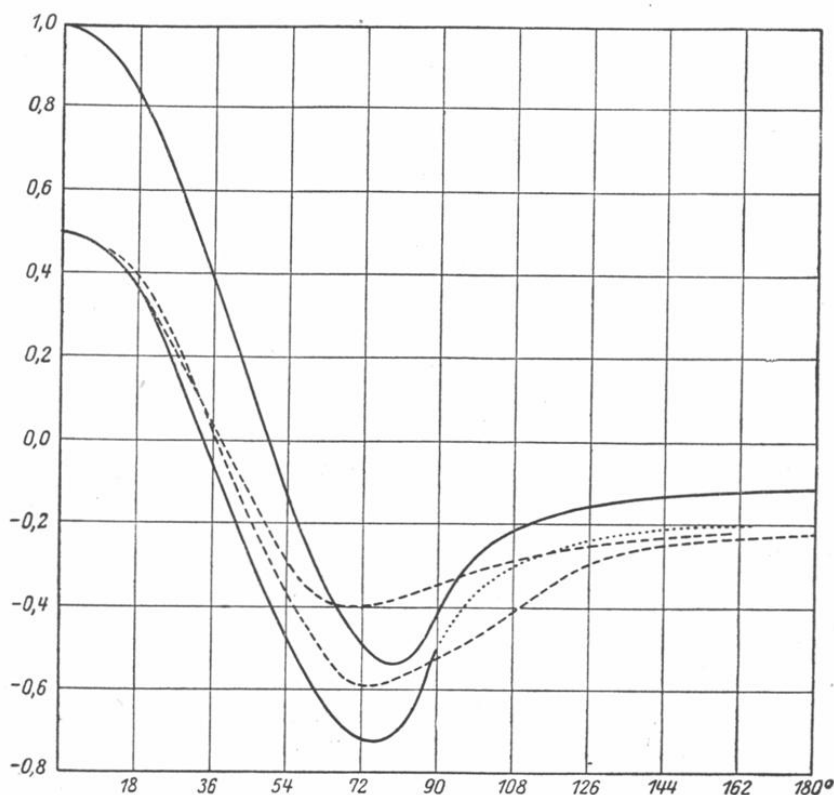
$$R_1 = 0,657.$$

Dieser Widerstandskoeffizient ist zu groß. Die experimentellen Bestimmungen ergeben etwa:

$$R_1 = 0,38.$$

Da der theoretische Druck an der Vorderseite des Zylinders nahe mit dem experimentellen übereinstimmt, so müssen wir schließen, daß die theoretische Druckerniedrigung in dem Wirbelschwanz zu groß ausfällt. Eine nähere Untersuchung bestätigt dies. Hier ist offenbar der Punkt, wo der weitere Ausbau der Theorie einzusetzen hat. Dies ist auch theoretisch verständlich. Im Wirbelschwanz und nur dort befriedigt unsere in erster Näherung erhaltene Lösung nicht die vollständigen Bewegungsgleichungen einer reibungslosen Flüssigkeit.

Wie Professor Zeilon durch weitere Ausführung der Theorie beim Kreiszylinder eine fast vollständige Übereinstimmung mit den Tatsachen erreicht hat, wird im Anhange gezeigt.



Figur 1

§ 30. Das Problem einer dünnen Platte.

30 1. Einleitung. Konforme Abbildung.

Wir wählen die Maßeinheiten so, daß die Breite der Platte den Wert 2 hat. Der Neigungswinkel derselben gegen die Bewegungsrichtung sei α . Eine mit der Bewegungsrichtung parallele, gegen die Platte senkrechte z -Ebene ($z = x_1 + ix_2$) schneide die Platte längs der geraden Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten $\pm e^{i\alpha}$. Um unsere allgemeine Methode zur Lösung dieses speziellen Problems anzuwenden, haben wir die längs L zerschnittene z -Ebene konform auf denjenigen Teil einer z' -Ebene abzubilden, der außerhalb des Kreises C , d. h. des Kreises $|z'| = 1$ liegt. Wenn wir die in § 27, Zusammenfassung, S. 290 entwickelten Formeln anwenden wollen, müssen dabei die Punkte $z = \pm e^{i\alpha}$ den Punkten $z' = \pm i$ entsprechen. Diese Abbildung wird durch die Formel:

$$z = \frac{e^{i\alpha}}{2i} \left(z' - \frac{1}{z'} \right) \quad (1)$$

bewirkt.

30 2. Formulierung der Aufgabe. Berechnung der Funktion $w(z')$.

Unsere Aufgabe ist, eine in der zerschnittenen z -Ebene reguläre und eindeutige, in unendlicher Ferne verschwindende Funktion $W(z) = v_1(x_1, x_2) - iv_2(x_1, x_2)$ zu finden, welche an der Vorderseite der Platte der Bedingung:

$$v_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha = U_1 \sin \alpha$$

und an der Rückseite der Bedingung:

$$v_2 = 0$$

genügt. Die entsprechende Aufgabe in der z' -Ebene ist eine außerhalb des Kreises C reguläre und eindeutige, in unendlicher Ferne verschwindende Funktion:

$$W(z') = v_1(x'_1, x'_2) - iv_2(x'_1, x'_2)$$

zu finden, welche für:

$$r' = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (x'_1 = r' \cos \theta, x'_2 = r' \sin \theta),$$

der Bedingung:

$$v_1 \sin \alpha - v_2 \cos \alpha = U_1 \sin \alpha,$$

für: $r' = 1, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

der Bedingung:

$$v^2 = 0$$

genügt. Wir sehen hieraus, daß beim Problem der Platte:

$$a(\theta) = \sin \alpha, \quad b(\theta) = -\cos \alpha; \quad a_1(\theta) = -\cos \alpha, \quad b_1(\theta) = -\sin \alpha.$$

Die Formel (27, 13) S. 291 ergibt unter diesen Umständen:

$$w(z') = \frac{\alpha - \pi}{\pi} \int_{\theta^* = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z^* - z'} - \frac{1}{2z^*} \right) dz^* = \frac{(\alpha - \pi)}{\pi} \log \frac{z' - i}{z' + i} - \frac{i(\alpha - \pi)}{2}.$$

Folglich:

$$G(z') = e^{w(z')} = i e^{-\frac{i\alpha}{2} \left(\frac{z' + i}{z' - i} \right)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}}. \quad (2)$$

Wir haben in § 27 S. 287 eine komplexe Größe ζ eingeführt. Wenn wir sie auch jetzt benutzen wollen, müssen wir sie durch die Gleichung:

$$\zeta = i \frac{z' - i}{z' + i} \quad (3)$$

definieren. Mit Hilfe dieser Größe ζ können wir unser Ergebnis (2) in der einfachen Form:

$$G(z') = - e^{-i\alpha \zeta^{\frac{\alpha}{\pi} - 1}} \quad (4)$$

schreiben.

303. Berechnung der Funktion $W(z)$. Eigenschaften.

Die Lösung unseres Problems wird nach § 27, Zusammenfassung S. 290 durch die Funktion:

$$W(z') = U_1 + e^{w(z')} \left(k_1 + i k_2 \frac{z' - i}{z' + i} \right)$$

gegeben. k_1 und k_2 müssen so bestimmt werden, daß in dem Punkte z'_0 , der dem Punkt $z = \infty$ entspricht, $W(z') = 0$ ausfällt. Jener Punkt z'_0 ist offenbar $z' = \infty$. Für $z' = \infty$ haben wir:

$$\zeta = i, \quad e^{w(z')} = - e^{-i\alpha} \cdot e^{\frac{i\alpha}{2} - \frac{i\pi}{2}} = i e^{-\frac{i\alpha}{2}}.$$

Zur Bestimmung der beiden reellen Größen k_1 und k_2 erhalten wir also die Gleichung:

$$k_1 + i k_2 = i U_1 e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

Sie ergibt:

$$k_1 = -U_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad k_2 = U_1 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} W(z') &= U_1 \left\{ 1 - \left(\sin \frac{\alpha}{2} - i \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{z' - i}{z' + i} \right) e^{w(z')} \right\} = \\ &= U_1 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir haben jetzt $W(z')$ als Funktion von z auszudrücken. Zwischen ζ und z besteht die Beziehung:

$$z = e^{i\alpha} \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}.$$

Sie ergibt:

$$\zeta = \sqrt{\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z}}.$$

Wir haben folglich:

$$\begin{aligned} W(z) &= v_1 - i v_2 = \\ &= U_1 \left\{ 1 - e^{-i\alpha} \left[\cos \frac{\alpha}{2} \left(\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} + z} \right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir benutzen den Ausdruck (6), um das Verhalten der Funktion $W(z)$ bei $z \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Man findet:

$$W(z) \rightarrow U_1 \frac{A - iB}{z},$$

wo:

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \cos \alpha + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \cos \alpha, \quad (7)$$

$$B = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \sin \alpha. \quad (8)$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ haben wir nach diesen Formeln $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$. Für kleine α -Werte werden sowohl A wie B klein. Die Zirkulation hat für kleines α den Wert $\pi \sin \alpha$. Dies ist die Hälfte des Wertes, den Kutta aus seiner Theorie abgeleitet hat.

304. Berechnung des Widerstandes und der Tragkraft.

Um den Widerstand und die Tragkraft zu berechnen, haben wir nach den Formeln (28, 1 S. 294) und (28, 2 S. 296) die beiden Integrale:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2, \quad \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1$$

auszuwerten. Nun haben wir auf S_h nach (5), weil dort $v_2 = 0$ ist:

$$(U_1 - v_1)^2 = (U_1 - W)^2 = \\ = U_1^2 e^{-2i\alpha} \left\{ \cos^2 \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-2} \right\}.$$

Wir haben auf S_h ferner:

$$dx_2 = \sin \alpha e^{-i\alpha} dz = -\sin \alpha \frac{4\zeta d\zeta}{(1+\zeta^2)^2}.$$

Wir bemerken, daß z^* auf S_h im Punkte $z = -e^{i\alpha}$ den Wert $-i$ und ζ den Wert $-\infty$ annimmt. — Wir haben folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \int_{-\sin \alpha}^{\sin \alpha} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = U_1^2 (J_1 + J_2 + J_3),$$

wo:

$$J_1 = -\sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2i\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}+1}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta,$$

$$J_2 = 2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} e^{-2i\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta,$$

$$J_3 = -\sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2i\alpha} \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta.$$

Um J_1, J_2, J_3 zu berechnen, betrachten wir das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta, \quad (9)$$

in dem der Integrationsweg in der Umgebung des singulären Punktes $\zeta = 0$ in der komplexen ζ -Ebene oberhalb des singulären Punktes gehen soll. Wenn wir zwei Punkte $\zeta, -\zeta$ ($\zeta > 0$) des Integrationsweges miteinander vergleichen, haben wir dann:

$$\zeta = (-\zeta) e^{-\pi i}, \quad \zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}} = -e^{-i\beta} (-\zeta)^{1+\frac{\beta}{\pi}}.$$

Wir können deshalb unser Integral (9) in der Form:

$$(1 - e^{-i\beta}) \int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta$$

schreiben. Wir können andererseits den Wert des Integrales (9) in der Weise berechnen, daß wir den Integrationsweg unbegrenzt nach

oben verschieben. Dabei wird der singuläre Punkt $\zeta = +i$ überschritten. Wir erhalten deshalb:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta = -2\beta i e^{\frac{1}{2}\epsilon\beta}.$$

Also:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{4\zeta^{1+\frac{\beta}{\pi}}}{(\zeta^2+1)^2} d\zeta = -\frac{\beta e^{\epsilon\beta}}{\sin \frac{\beta}{2}}. \quad (10)$$

Mit Hilfe der Formel (10) erhalten wir:

$$J_1 = 2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad J_2 = (\pi - 2a) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}, \quad J_3 = 2(\pi - a) \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \left[\pi - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\cos \alpha} \right] U_1^2.$$

Wir erhalten in ähnlicher Weise:

$$\begin{aligned} \int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_2 &= 2U_1 \int_{S_h} (U_1 - v_1) dx_2 - \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = \\ &= -4\pi A U_1^2 - \int_{S_h} (U_1 - v_1)^2 dx_2 = -\left(\pi - \frac{\pi - 2a}{\cos \alpha} \right) U_1^2. \end{aligned}$$

Nun haben wir an S_h : $dx_1 = \cot \alpha dx_2$. Folglich:

$$-\int_{S_h} (U_1^2 - v_1^2) dx_1 = \left(\pi \cot \alpha - \frac{\pi - 2a}{\sin \alpha} \right) U_1^2.$$

Die Formeln (28, $\frac{1}{2}$ S. 294), (28, $\frac{2}{2}$ S. 296) ergeben jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho U_1^2 R_1 &= \frac{1}{2} \varrho U_1^2 \left(\pi - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\cos \alpha} \right), \\ \varrho U_1^2 R_2 &= \frac{1}{2} \varrho U_1^2 \left(\pi \cot \alpha - (\pi - 2a) \frac{\cos 2a}{\sin \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Beziehung:

$$R_2 = R_1 \cot \alpha$$

drückt die Tatsache aus, daß die Kraft $\varrho U_1^2 R_1$, $\varrho U_1^2 R_2$ die Resultierende eines überall gegen die Platte senkrechten Druckes ist. Dabei ist zu bemerken, daß $\varrho U_1^2 R_1$ die Komponente dieser Resultierenden in der Richtung der negativen x_1 -Achse ist, dagegen $\varrho U_1^2 R_2$ die Komponente in der Richtung der positiven x_2 -Achse.

305. Vergleich mit der Erfahrung.

Die nachfolgende Tabelle enthält in den vier ersten Kolumnen einige numerische Ergebnisse, die aus den Formeln (11) erhalten worden sind. R hat die Bedeutung:

$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Alle Resultate sind auf die Plattenbreite 1 reduziert, also die direkt aus (11) hervorgehenden Werte nachträglich mit 2 dividiert. Die Kolumne R exp. enthält experimentelle Werte. Sie sind den von Eiffel für eine rechteckige Platte gefundenen Werte proportional, wobei:

$$\text{Länge : Breite} = 9$$

war. Die Werte von Eiffel sind aber mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert, der so gewählt ist, daß R für $\alpha = 90^\circ$ den Wert 0,78 bekommt, der nach Jacob* für eine unendlich lange, zur Bewegungsrichtung senkrechte Platte der wahrscheinlich richtige Wert ist.

Tabelle I

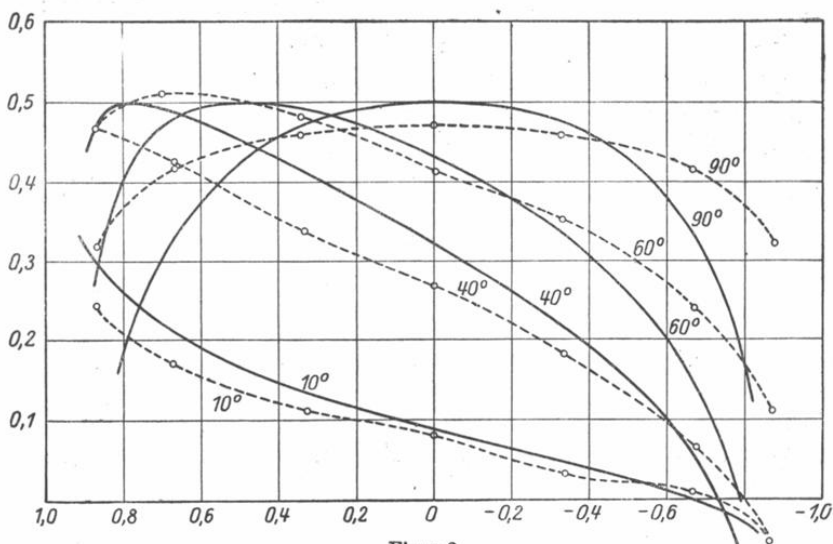
α	R_1	R_2	R	R exp.	R/R exp.	R/R_{90°	(R/R_{90°) exp.
0°	0,000	0,500	0,500	(0,00)	(∞)	—	—
6°	0,064	0,610	0,614	0,35	1,73	0,47	0,46
10°	0,121	0,673	0,697	0,46	1,52	0,54	0,60
20°	0,288	0,788	0,845	0,56	1,52	0,66	0,60—0,73
30°	0,483	0,837	0,966	0,61	1,59	0,75	0,73—0,80
40°	0,692	0,824	1,078	—	—	0,84	0,82
45°	0,785	0,785	1,112	—	—	—	—
60°	1,047	0,607	1,212	0,73	1,65	0,94	0,94
70°	1,177	0,172	1,252	—	—	—	—
90°	1,285	0,000	1,285	0,78	1,65	1,00	1,00

Wir sehen aus dieser Tabelle, daß die theoretischen R -Werte durchweg größer als die experimentellen Werte sind. Wir sehen aber, daß im Intervalle $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ das Verhältnis zwischen dem theoretischen und dem experimentellen R -Wert annähernd konstant ist. Dies tritt besonders deutlich in den zwei letzten Kolumnen der Tabelle zutage. Besonders hervorzuheben ist die geringe Abhängigkeit vom Neigungswinkel, welche sowohl der theoretische wie der experimentelle R -Wert im Intervalle $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ aufweist.

Bei kleinen Neigungswinkeln ($\alpha < 6^\circ$) steht die Theorie in schroffem Widerspruch mit den Tatsachen. Es ist nicht schwer, den inneren Grund hierfür zu finden. Im Grenzfalle $\alpha = 0$ würden nach den Ergeb-

* Jacob, La Résistance de l'Air et l'Expérience. T. I, S. 106 u. 110, T. II, Tab. 1.

nissen, welche wir beim Grenzübergange $\mu \rightarrow 0$ gefunden haben, beide Seiten der Platte zur Vorderseite S_v gehören. Die Flüssigkeit würde also an beiden Seiten der Platte gleiten und die Platte würde unter diesen Umständen gar keine Bewegung in der Flüssigkeit hervorrufen. Wir würden also notwendig $R = 0$ haben. Hier aber, wo wir zuerst bei $\alpha > 0$ den Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ und dann den Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ ausgeführt haben, bekommen wir eine Bewegung, bei welcher die Flüssigkeit immer noch an der einen Seite der Scheibe



Figur 2

haftet, während sie an der anderen Seite gleitet. Daß wir unter solchen Umständen Ergebnisse erhalten, die nicht mit den Tatsachen übereinstimmen, kann nicht Wunder nehmen. Immerhin stellen diese Ergebnisse die Theorie vor neue und interessante Aufgaben.

Dr. Zeilon, dem wir die Theorie der Platte verdanken, hat auch das Moment der Druckkräfte auf die Platte in bezug auf die Mittellinie derselben berechnet. Er hat aus seiner Formel die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen theoretischen Werte berechnet. Die experimentellen Werte sind Messungen von Eiffel entnommen. Sie sind auf die Breite 2 reduziert. Bei diesen Messungen war Länge : Breite = 6.

Dr. Zeilon hat auch die Druckverteilung auf beiden Seiten der Platte untersucht. Die Ergebnisse für die Vorderseite der Platte sind in Fig. 2 dargestellt.

Tabelle II

$\alpha =$	10°	25°	40°	60°	90°
$\left[\oint p s ds \right]_{\text{theor.}}$	0,117	0,192	0,188	0,156	0
$\left[\oint p s ds \right]_{\text{exp.}}$	0,250	0,204	0,192	0,150	0

Die voll ausgezogenen Kurven geben bei verschiedenen Neigungswinkeln α die theoretische Druckverteilung. Die gestrichelten Kurven beziehen sich auf die bekannten Messungen von Eiffel. Wenn man bedenkt, daß die Theorie ja nur eine erste Näherung darstellt und daß die Messungen von Eiffel sich auf Platten von endlicher Länge beziehen, darf man wohl die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung als überraschend gut bezeichnen.

Auf der Rückseite ist der Druck in Übereinstimmung mit den Tatsachen annähernd konstant. Dagegen fällt der Unterdruck dort zu groß aus. Auf diesem Umstand beruht es, daß die theoretischen R -Werte zu groß ausfallen.

§ 31. Die kreisförmige Platte und verwandte Probleme.

311. Formulierung des Problems.

Das Problem der kreisförmigen Platte erheischt, wie wir schon in § 23 gesehen haben, die Bestimmung einer außerhalb von der Platte regulären und in unendlicher Ferne verschwindenden Potentialfunktion, A , welche an der Vorderseite der Platte, etwa für $x_1 = +0$, $\bar{R} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} < a$ der Bedingung:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = U_1,$$

an der Rückseite derselben, d. h. für $x_1 = -0$, $\bar{R} < a$, der Bedingung $A = 0$ genügt. Wenn wir diese Funktion A bestimmt haben, so haben wir:

in B_v :

$$u_j = \frac{\partial A}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, 3)$$

in B_h :

$$u_1 = \frac{\partial A}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_{x_1 = -0} + U_1, \quad u_2 = \frac{\partial A}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial A}{\partial x_3}.$$

Wir können die mathematische Aufgabe, von deren Erledigung die Lösung des Problems der kreisförmigen Platte abhängt, auch in etwas anderer Weise formulieren. Wir haben am Schlusse des ersten Paragraphen bei der Ableitung der Gleichungen III S. 12, die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit, auf ein Koordinatensystem, in welchem der Körper ruht, bezogen, mit $\bar{u}_j$ ($j = 1, 2, 3$) bezeichnet und wir haben: $\bar{u}_1 = u_1 - U_1$, $\bar{u}_2 = u_2$, $\bar{u}_3 = u_3$ gesetzt. Wenn wir jetzt:

$$-U_1 x_1 + A = \Phi$$

setzen, so ist Φ eine außerhalb der Platte reguläre Potentialfunktion und wir haben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{in } B_v: \\ \text{in } B_h: \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{u}_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \\ \bar{u}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_1=0}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \bar{u}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{array} \quad (1)$$

Die Potentialfunktion Φ muß sich in unendlicher Ferne wie:

$$-U_1 x_1 + \text{Konst.} + \frac{C}{R} + \dots$$

$$(R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

verhalten. Auf der Platte muß Φ den Bedingungen:

$$\text{auf } S_v: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad (2)$$

$$\text{auf } S_h: \quad \Phi = 0 \quad (3)$$

genügen. Wenn es also gelingt, eine Potentialfunktion Φ mit diesen Eigenschaften zu bestimmen, so ist das Problem der kreisförmigen Platte gelöst. Daß dieses Problem lösbar ist, haben wir übrigens schon in § 23 gesehen. Wir haben dort auch das Hilfsmittel kennengelernt, das zur Lösung des Problems führt: die vierwertigen Potentialfunktionen, deren Werte bei Umkreisung der Randkurve der Platte permutiert werden. Es handelt sich jetzt um die explizite Ausführung des in § 23 angedeuteten Gedankens.

31 2. Einführung von dipolaren Koordinaten.

Wir setzen:

$$x_1 = \frac{a \sin v}{\cosh u + \cos v}, \quad \bar{R} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = \frac{a \sinh u}{\cosh u + \cos v}. \quad (4)$$

Wir bemerken, daß ein Punkt $x_1, \bar{R}$, für welchen $\bar{R} < a$, $x_1 = +0$

ist, auf der Vorderseite S_v der Platte liegt, ein Punkt für welchen $\bar{R} < a$, $x_1 = -0$ ist, dagegen auf der Rückseite der Platte. — Wir betrachten jetzt die reziproke Entfernung der Punkte x_1, x_2, x_3 und $a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha, 0, 0$. Es ist:

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1 - a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha)^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{1}{a} \left| \cos \frac{1}{2} \alpha \right| \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}} \quad (5)$$

vorausgesetzt, daß die Wurzeln rechts mit solchen Vorzeichen genommen werden, daß sie für reelle Werte von x_1, x_2, x_3, a , d. h. für $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$, $-\infty < a < +\infty$, positiv ausfallen. Wir schließen aus (5), daß die Funktion:

$$\frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}}$$

für alle a , als Funktion von x_1, x_2, x_3 aufgefaßt, der Laplaceschen Gleichung genügt.

313. Einführung einer aus vierwertigen Funktionen aufgebauten Potentialfunktion mit Hilfe der Sommerfeldschen Methode. Eigenschaften derselben.

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, \bar{R}) &= \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{8\pi i} \left\{ \int_{(W_1)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v - \alpha)}} \frac{d\alpha}{\sin \frac{\alpha - v_0}{4}} + \right. \\ &+ \left. \int_{(W_2)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v + \alpha)}} \frac{d\alpha}{\sin \frac{\alpha - v_0}{4}} \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\cosh u + \cos v}}{8\pi i} \int_{(W)} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos \alpha}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha - v_0 + v}{4}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \frac{\alpha - v_0 - v}{4}} \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Wir wählen den Integrationsweg (W) des letzten Integrals in der folgenden Weise. Ein Zweig geht etwa vom Punkte $\alpha = iu + \varepsilon + i\infty$ ($\varepsilon > 0$) aus, umkreist in negativer Richtung den Punkt $\alpha = iu$ und kehrt ins Unendliche zurück, etwa nach dem Punkte $\alpha = iu - \varepsilon + i\infty$. Ein anderer Zweig des Integrationsweges (W) ist das Spiegelbild des

ersten in bezug auf den Punkt $\alpha = 0$. Wie die Integrationswege (W_1) und (W_2) zu wählen sind, damit die Beziehung (6) besteht, ist leicht ersichtlich und hat hier keine Bedeutung*.

Wir setzen $v_0 = \pi$ und wollen unter dieser Voraussetzung die Eigenschaften der Funktion Φ_1 untersuchen. Wir nehmen an, daß $0 \leq v \leq 2\pi$ ist. In dem Bereiche des $x_1 x_2 x_3$ -Raumes, wo $u > \delta > 0$ ist, ist dann offenbar Φ_1 eine reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche auf S_v , also für $v = 0$, der Bedingung:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 0,$$

und auf S_h , also für $v = 2\pi$, der Bedingung:

$$\Phi_1 = 0$$

genügt. Um zu untersuchen, wie sich Φ_1 verhält, wenn u sich dem Werte Null nähert, bemerken wir, daß, wenn $|\pi - v| > \varepsilon > 0$ ist, Φ_1 auch in der folgenden Weise dargestellt werden kann:

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) = \frac{\sqrt{\cosh y u + \cos v}}{8\pi i} \left\{ \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} F(\alpha) d\alpha + \int_{+\varepsilon + i\infty}^{+\varepsilon - i\infty} F(\alpha) d\alpha \right\}. \quad (7)$$

Wir haben hier zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh y u - \cos \alpha}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha - v_0 + v}{4}} + \frac{1}{\sin \frac{\alpha - v_0 - v}{4}} \right) = F(\alpha)$$

gesetzt. Die Integrationswege in (7) sollen zwei mit der imaginären α -Achse parallele Geraden sein. Wir sehen aus dieser Darstellung, daß $\Phi_1(x_1, \bar{R})$ in dem Bereiche des x -Raumes, wo $|\pi - v| > \varepsilon$ ist, endlich und regulär bleibt, wenn u gegen Null konvergiert. Um schließlich festzustellen, wie sich Φ_1 verhält, wenn u gegen Null und gleichzeitig v gegen π konvergiert, das heißt, wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 sich ins Unendliche entfernt, bemerken wir, daß, wenn $|\pi - v| < \varepsilon$ ist, rechts in (7) noch ein Glied hinzukommen muß. Dieses Glied rührt von dem singulären Punkte $\alpha = \pi - v$ her, der, wenn v den Wert $\pi \pm \varepsilon$ passiert, den Integrationsweg eines der beiden Integrale in (7) durchdringt. Das Glied hat den Wert $+1$. Wir haben also, wenn $|\pi - v| < \varepsilon$ ist:

* Die Vierwertigkeit der einzelnen Integrale in (6) rührt vom Nenner $\sin \frac{\alpha - v_0}{4}$ bzw. $\sin \frac{\alpha - v_0 + v}{4}$, $\sin \frac{\alpha - v_0 - v}{4}$ her.

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) = \frac{\sqrt{\cos hu + \cos v}}{8\pi i} \left\{ \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} F(a) da + \int_{+\varepsilon + i}^{+\varepsilon - i\infty} F(a) da \right\} + 1. \quad (8)$$

Wir sehen hieraus, daß:

$$\Phi_1(x_1, \bar{R}) \rightarrow 1,$$

wenn:

$$R = \sqrt{x_1^2 + \bar{R}^2} \rightarrow \infty.$$

Man beweist in ähnlicher Weise, daß bei $R \rightarrow \infty$, d. h. bei $v \rightarrow \pi$:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v_0} \right)_{v_0 = \pi} \rightarrow \sqrt{\cosh u + \cos v} \left(\frac{\partial}{\partial v_0} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(v_0 - v)}} \right)_{v_0 = \pi} = -\frac{\sin v}{2(\cosh u + \cos v)} = -\frac{x_1}{2a}.$$

314. Lösung des Problems.

Wir schließen aus diesen Ergebnissen, daß der Ausdruck:

$$\left[\left(2a U_1 \frac{\partial}{\partial v_0} + \lambda \right) \Phi_1 \right]_{v_0 = \pi} = \Phi,$$

wo λ eine beliebige Konstante ist, eine Potentialfunktion definiert, welche außerhalb der Platte regulär ist, sich in unendlicher Ferne von einer belanglosen Konstante abgesehen wie:

$$- U_1 x_1 + \frac{C}{R} + \dots$$

verhält und auf der Platte den Bedingungen:

auf S_v :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0,$$

auf S_h :

$$\Phi = 0$$

genügt.

315. Das Verhalten der Lösung am Rande der Scheibe.

Wir haben bis jetzt die besonderen Verhältnisse am Rande der Platte außer acht gelassen. Um die Konstante λ zu bestimmen, ist es notwendig, auf sie Rücksicht zu nehmen. λ so zu bestimmen, daß die Geschwindigkeitskomponenten, also die Größen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

am Rande endlich bleiben, ist unmöglich. Dies ist aber auch nicht

nötig. Was wir verlangen müssen, ist nur, daß die Resultierende der Druckkräfte auf die Platte einen endlichen Beitrag hat. Dafür ist notwendig und, wie wir unten zeigen werden, auch hinreichend, daß:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

auf der Rückseite der Platte quadratisch integrierbar ist. Was wir verlangen müssen, ist also, daß:

$$\int_{S_h} \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 dx_2 dx_3$$

einen endlichen Wert hat. Es läßt sich zeigen, daß durch diese Bedingung λ eindeutig bestimmt ist und daß λ den Wert $\frac{1}{4}$ haben muß. Man kann ferner zeigen, daß, wenn λ diesen Wert hat,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

in der Nähe des Randes wie $(a - \bar{R})^{-\frac{1}{4}}$ unendlich wird und also tatsächlich auf S_h quadratisch integrierbar ist. Auf den Beweis dieser Sätze gehen wir nicht ein.

31 6. Berechnung des Widerstandes.

Vergleich mit der Erfahrung. Verwandte Probleme.

Um den Widerstand der Flüssigkeit gegen die kreisförmige Platte zu berechnen, wenden wir den Impulssatz an. Um die Platte mit der Geschwindigkeit U_1 vorwärts zu treiben, muß auf sie eine Kraft wirken, welche dem pro Sekunde gewonnenen Zuwachs des Impulses der ganzen Flüssigkeit gleich ist. Der Zuwachs, den der Impuls der Flüssigkeit während der Bewegung erfährt, besteht darin, daß der Wirbelschwanz sich verlängert hat. Offenbar ist der Impuls mit der Bewegungsrichtung der Platte parallel. Der Zuwachs desselben während einer Sekunde ist deshalb:

$$\rho \int_Q u_1^2 dx_2 dx_3,$$

wo wir mit Q einen Querschnitt des Wirbelschwanzes in großer Entfernung hinter der Platte bezeichnen. Wir haben deshalb auf Q :

$$u_1 = - \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)_h + U_1 = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h.$$

Wenn wir mit $\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1$ den Widerstand der Flüssigkeit gegen die Platte bezeichnen, so haben wir folglich:

$$\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1 = \varrho \int_{S_h} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h^2 dx_2 dx_3.$$

Das Integral, durch welches wir Φ_1 dargestellt haben, ist offenbar ein elliptisches Integral. Auch:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_h$$

läßt sich durch elliptische Integrale und zwar durch zwei (im Legendreschen Sinne) „vollständige“ elliptische Integrale dritter Art ausdrücken. Wenn wir nämlich zur Abkürzung:

$$\coshyp u + 1 = \frac{2a^2}{a^2 - R^2} = \frac{2}{K^2}$$

setzen und wenn wir durch die Beziehungen:

$$\int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{u(Ku+1)(1-u^2)}} = H_1,$$

$$\int_0^1 \frac{u^3 du}{\sqrt{u(Ku+1)(1-u^2)}} = H_2$$

zwei Funktionen von K definieren, so haben wir auf S_h :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{\pi a} \left(\frac{3}{4} K^{-\frac{1}{2}} H_1 + K^{\frac{1}{2}} H_2 \right).$$

H_1 und H_2 sind vollständige elliptische Integrale dritter Art und können deshalb durch die Legendreschen Integrale E und F ausgedrückt und mit Hilfe der Tabellen über E und F auch numerisch berechnet werden. Dr. Zeilon hat indessen vorgezogen H_1 und H_2 neu zu berechnen. Aus der so erhaltenen Tabelle der Werte von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

auf S_h hat Dr. Zeilon schließlich den Widerstand berechnet. Er findet

$$\pi a^2 \varrho U_1^2 R_1 = 1,179 \pi a^2 \varrho U_1^2,$$

also:

$$R_1 = 1,179.$$

Die Methoden, welche wir in diesem Paragraphen benutzt haben, lassen sich auch in einigen anderen Fällen anwenden. So hat Dr. Zeilon

nach diesen Methoden die Bewegung einer Halbkugel in einer Flüssigkeit untersucht. Für den Widerstand fand er:

wenn die krumme Fläche vorangeht:

$$0,611 \pi a^2 \rho U_1^2$$

wenn die ebene Fläche vorangeht:

$$0,622 \pi a^2 \rho U_1^2.$$

Die hier angegebenen Widerstände sind, mit den experimentellen Werten verglichen, etwa in demselben Maße zu groß wie die Widerstände, welche wir bei den zweidimensionalen Problemen gefunden haben. Auch bei den Raumproblemen fällt also die Druckerniedrigung im Wirbelschwanz zu groß aus. Wenn dieser Umstand nachdrücklich daran erinnert, daß unsere Lösung des hydrodynamischen Problems nur eine erste Näherung darstellt, so bleibt es andererseits sehr bemerkenswert, daß schon die Berücksichtigung der linearen Glieder der Bewegungsgleichungen ein sowohl bei den kleinsten wie bei den größten Geschwindigkeiten qualitativ richtiges Bild der Bewegung gibt und daß die daraus berechneten Widerstände in dem weiten Bereich von den kleinsten zu den größten Geschwindigkeiten hinsichtlich der Größenordnung richtig sind.