Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik

Oseen, Carl Wilhelm

Leipzig, 1927

Zweiter Teil. Die Randwertaufgaben

urn:nbn:at:at-ubi:2-5756

Zweiter Teil.

Die Randwertaufgaben.

Einleitung.

Mit Hilfe der im ersten Teile entwickelten Formeln ist es möglich, die Bewegung einer zähen unzusammendrückbaren Flüssigkeit zu berechnen, wenn man annehmen darf, daß diese Flüssigkeit den ganzen Raum ausfüllt und in unendlicher Ferne ruht, und wenn entweder die Bewegung stationär, d. h. von der Zeit unabhängig ist oder auch in einem bestimmten Momente, etwa für $t = 0$, bekannt ist. Jene Probleme sind aber nicht diejenigen, zu welchen die wirkliche Bewegung einer zähen Flüssigkeit Anlaß gibt. Diese Probleme haben einen anderen Charakter. Eine wirkliche Flüssigkeit hat stets eine Begrenzung, die übrigens aus einer oder mehreren, festen oder bewegten Grenzflächen bestehen kann. Wir nehmen an, daß die Flüssigkeit an diesen Grenzflächen haftet, so daß die Bewegung der Grenzflächen die Bewegung der äußersten Schichten der Flüssigkeit bestimmt. Wir bezeichnen mit $U_j (j = 1, 2, 3)$ die Komponenten der Geschwindigkeit eines Punktes einer Grenzfläche. Das mathematische Problem, zu welchem die wirkliche Bewegung einer zähen Flüssigkeit Anlaß gibt, besteht dann darin, eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen I, II oder III zu finden, welche an den Grenzflächen den Bedingungen $u_j = U_j (j = 1, 2, 3)$ genügt. Wenn die Bewegung nicht stationär ist, kommt noch die Bedingung hinzu, daß in einem gewissen Momente, etwa für $t = 0$, die Größen u_j in dem von der Flüssigkeit erfüllten Bereiche bestimmte, vorgeschriebene Werte annehmen sollen. Jene Werte müssen jedoch der Kontinuitätsbedingung genügen. Die Methode zur Lösung dieses Problems, die wir zur Zeit besitzen, ist wieder die Methode der sukzessiven Annäherungen. Sie erfordert in erster Linie die Lösung des linearen Problems, das man durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält. So werden wir zu den Problemen geführt, die man die hydrodynamischen Randwertaufgaben nennen kann. Wir werden uns im folgenden mit speziellen Fällen beschäftigen, in denen man die hydrodynamische Randwertaufgabe exakt oder annähernd lösen konnte. Zwar gibt es auch allgemeine mathematische Untersuchungen über die hydrodynamischen Randwertaufgaben. Sie sind aber noch nicht so weit gefördert, daß sie Bedeutung für die Hydrodynamik gewonnen hätten. Wir gehen deshalb hier nicht auf diese allgemeinen mathematischen Probleme ein. Im ersten Kapitel behandeln wir einige Fälle, in denen es gelungen ist, eine exakte Lösung der hydrodynamischen Randwertaufgabe zu finden. Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem linearen System, welches aus II^a (oder II^b) durch Vernachlässigung der quadratischen Glieder hervorgeht, und geben angenäherte Lösungen einiger spezieller Fälle der diesem System entsprechenden Randwertaufgabe. Im dritten Kapitel behandeln wir in ähnlicher Weise die Randwertaufgabe des Systems III^a (oder III^b).

Es ist aus dem oben Gesagten ersichtlich, daß die Randwerte, welche in den hydrodynamischen Problemen vorkommen, im allgemeinen in sehr einfacher Weise von den Koordinaten der Punkte der Grenzfläche abhängen. Trotzdem muß man, um die Methode der sukzessiven Annäherungen anwenden zu können, bei den linearen Systemen, welche wir hier zu behandeln haben, Randwerte allgemeinster Art betrachten.

I.

Exakte Lösungen hydrodynamischer Randwertaufgaben.

§ 9. Die Stokesschen Gleichungen.

91. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das innere Problem.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß die Bewegung der Flüssigkeit stationär ist. In den Gleichungen II[a] (oder II[b]) vernachlässigen wir die quadratischen Glieder und setzen außerdem $X_j = 0$. Wir werden so zu dem System:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \tag{1}$$

geführt.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Bei dem inneren hydrodynamischen Problem betrachtet man eine Flüssigkeit, die sich im Inneren einer geschlossenen Fläche befindet und deren Geschwindigkeit an dieser Fläche bekannt ist. Bei dem äußeren hydrodynamischen Problem betrachtet man eine Flüssigkeit, welche den ganzen Raum außerhalb einer geschlossenen Fläche erfüllt. In diesem Falle muß man die Geschwindigkeit sowohl an der inneren Grenzfläche wie in unendlicher Ferne kennen.

Wir lösen in diesem Paragraphen die innere und die äußere hydrodynamische Randwertaufgabe der Gleichungen (1) für eine Kugel. Wir betrachten zuerst das innere Problem. Die Randbedingungen sind in diesem Fall: $u_j = U_j \; (j = 1, 2, 3)$ an der Oberfläche der Kugel. Die Größen U_j müssen wegen der Kontinuitätsbedingung (1, 2) S. 4 der Beziehung:

$$\int U_j n_j \, dS = 0$$

genügen, wo die Integration über die Oberfläche der Kugel erstreckt wird und wo, wie üblich, n_j die Richtungscosinusse der nach außen gezogenen Normalen dieser Fläche sind.

Wir haben im dritten Paragraphen S. 27 folgendes gesehen. Wenn man einen Tensor T_{jk} und einen Vektor P_k finden kann, die an einer geschlossenen Fläche S den Bedingungen $T_{jk} = 0$ genügen, im Innern derselben Fläche überall mit Ausnahme eines Punktes $x_j^{(0)}(P^{(0)})$ regulär sind und den Differentialgleichungen:

$$\mu \Delta T_{jk} - \frac{\partial P_k}{\partial x_j} = 0\,, \quad \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} = 0 \tag{2}$$

genügen, endlich sich in der Umgebung des Punktes $x_j^{(0)}$, bis auf reguläre Glieder, wie der Tensor t_{jk} und der Vektor p_k:

$$t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3}\,, \quad p_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3}\,, \quad r = \sqrt{x_j - x^{(0)})^2}$$

verhalten, dann gilt für jede innerhalb derselben Fläche reguläre Lösung des Systemes (1):

$$u_k(P^{(0)}) = -\frac{1}{8\pi\mu}\int U_j\left(\mu\frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j\right) dS\,. \tag{3}$$

Um unsere Aufgabe zu lösen, bestimmen wir eine Lösung τ_{jk}, π_k des Systems (2), die innerhalb von S regulär ist und an S den Bedingungen: $\tau_{jk} = t_{jk}$ genügt; dann hat $T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk}$, $P_k = p_k - \pi_k$ die verlangten Eigenschaften.

Für eine Kugel kann man mit einfachen Mitteln die Größen τ_{jk} und π_k herstellen. Wir wenden dazu das Spiegelungsverfahren an, durch welches W. Thomson das elektrostatische Problem der Kugel löste. Wir legen den Anfangspunkt des Bezugssystems in den Mittelpunkt unserer Kugel, bezeichnen mit a den Radius derselben und setzen:

$$x_j^2 = R^2\,, \quad x_j^{(0)2} = R^{(0)2}\,, \quad R \geqq 0\,, \quad R^{(0)} \geqq 0\,.$$

Durch die Formeln:

$$\bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}} x_j^{(0)}$$

definieren wir dann das Spiegelbild $\bar{P}^{(0)}$ des Punktes $P^{(0)}(= x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$. Wir setzen ferner:

$$\bar{x}_j^{(0)2} = \bar{R}^{(0)2}\,, \quad (x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2 = \bar{r}^2\,, \quad \bar{R}^{(0)} \geqq 0\,, \quad \bar{r} \geqq 0\,.$$

Um nun τ_{jk} und π_k zu berechnen, verzichten wir zunächst auf die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung (2b) und stellen uns die Aufgabe, einen Tensor τ_{jk}^* und einen Vektor π_k^* zu berechnen, die überall, außer im Punkte $\bar{P}^{(0)}$, regulär sind und die Differentialgleichungen:

$$\mu \Delta \tau_{jk}^* - \frac{\partial \pi_k^*}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

befriedigen und die an der Kugel $R = a$ den Bedingungen $\tau_{jk}^* = t_{jk}$ genügen. Wir versuchen diese vorbereitende Aufgabe durch den Ansatz:

$$\tau_{jk}^* = \frac{a_{jk}}{\bar r} + b_j \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar r} + c_k \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar r} + 2 d_{jk}\bar x_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{\bar r} + e\frac{\partial^2 \bar r}{\partial x_j \partial x_k},$$

$$\pi_k^* = 2\mu e \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar r}$$

zu lösen, wo a_{jk}, b_j, c_k, d_{jk} und e Konstanten sind. Dieser Ansatz erfüllt, wie sofort ersichtlich ist, die Bedingung, daß τ_{jk}^* und p_k^* überall mit Ausnahme des Punktes $\bar P^{(0)}$ regulär sind. Wir haben ferner:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\tau_{jk}^* = \mu \Delta_x \tau_{jk}^* = 2\mu e \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\frac{1}{\bar r} = \frac{\partial \pi_k^*}{\partial x_j}.$$

Wenn wir die Konstanten so bestimmen können, daß an der Kugel $R = a$ noch $\tau_{jk} = t_{jk}\,(j, k = 1, 2, 3)$ wird, so ist unsere vorbereitende Aufgabe gelöst. Nun ist für $R = a$:

$$\bar r^2 = x_j^2 - 2x_j \bar x_j^{(0)} + \bar x_j^{(0)2} = a^2\left(1 - \frac{2x_j x_j^{(0)}}{R^{(0)2}} + \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) = \frac{a^2 r^2}{R^{(0)2}},$$

also:

$$\bar r = \frac{ar}{R^{(0)}}$$

und ferner:

$$x_j \bar x_j^{(0)} = \frac{1}{2}(a^2 + \bar R^{(0)2}) - \frac{1}{2}\bar r^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right) - \frac{1}{2}\bar r^2.$$

Wir erhalten mit Hilfe dieser Beziehungen für $R = a$:

$$\bar x_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{\bar r} = -\frac{\bar x_l^{(0)}(x_l - \bar x_l^{(0)})}{\bar r^3} = \frac{1}{2\bar r} - \frac{a^2(R^{(0)2} - a^2)}{2R^{(0)2}\bar r^3}$$

und folglich:

$$\tau_{jk}^* = \frac{R^{(0)}}{a}(a_{jk} + d_{jk} + e\delta_{jk})\frac{1}{r} - \frac{R^{(0)3}}{a^3}\Big\{e x_j x_k -$$
$$- (e\bar x_j^{(0)} - b_j)x_k - (e\bar x_k^{(0)} - c_k)x_j + e\bar x_j^{(0)}\bar x_k^{(0)} - b_j \bar x_k^{(0)} - c_k \bar x_j^{(0)} +$$
$$+ a^2\left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right)d_{jk}\Big\}\frac{1}{r^3}.$$

Die Forderung:

$$\tau_{jk}^* = t_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3}$$

für $R = a$ ergibt jetzt:

$$\frac{R^{(0)}}{a}(a_{jk} + d_{jk} + e\delta_{jk}) = \delta_{jk}, \qquad -\frac{R^{(0)3}}{a^3}e = 1,$$

$$-\frac{R^{(0)3}}{a^3}(e\bar x_j^{(0)} - b_j) = x_j^{(0)}, \qquad -\frac{R^{(0)3}}{a^3}(e\bar x_k^{(0)} - c_k) = x_k^{(0)},$$

$$-\frac{R^{(0)3}}{a^3}\left\{e\bar x_j^{(0)}\bar x_k^{(0)} - b_j \bar x_k^{(0)} - c_k \bar x_j^{(0)} + a^2\left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right)d_{jk}\right\} = x_j^{(0)}x_k^{(0)}.$$

Wir erhalten schließlich:

$$a_{jk} = \frac{a}{R^{(0)}}\left(1 + \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right)\delta_{jk} + \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}a^3}\,\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)},$$

$$b_j = \frac{a}{R^{(0)}}\left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right)\bar{x}_j^{(0)}, \qquad c_k = \frac{a}{R^{(0)}}\left(1 - \frac{a^2}{R^{(0)2}}\right)\bar{x}_k^{(0)},$$

$$d_{jk} = -\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}a^3}\,\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}, \qquad e = -\frac{a^3}{R^{(0)3}}$$

und damit:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{jk}^* = {}& \frac{a}{R^{(0)}\bar{r}}\,\delta_{jk} + \frac{a^3}{R^{(0)3}}\,\frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \\ & + \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}}\left\{\frac{\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}}{a^3\,\bar{r}} - \frac{a}{R^{(0)2}\,\bar{r}^3}\,[\bar{x}_j^{(0)}(x_k - \bar{x}_k^{(0)}) + \right. \\ & \left. + \bar{x}_k^{(0)}(x_j - \bar{x}_j^{(0)})] - \frac{2\,\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}}{a^3}\,\bar{x}_l^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\,\frac{1}{\bar{r}}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\pi_k^* = -\frac{2\mu a^3}{R^{(0)3}}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{\bar{r}}. \tag{6}$$

Wir setzen jetzt, um unser anfängliches Problem zu lösen:

$$\tau_{jk} = \tau_{jk}^* + (R^2 - a^2)\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \tag{7}$$

so daß also das Zusatzglied für $R = a$ also auf der Kugel verschwindet.

Die Funktionen φ_k sollen Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung sein, die im Innern der Kugel $R = a$ regulär sind. Wir haben unter dieser Voraussetzung in demselben Bereich:

$$\Delta_x \tau_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{2\varphi_k + 4x_l\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \frac{2a^3}{R^{(0)3}}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{\bar{r}}\right\}.$$

Wenn wir:

$$\pi_k = 2\mu\left(\varphi_k + 2x_l\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \frac{a^3}{R^{(0)3}}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{\bar{r}}\right) \tag{8}$$

setzen, so sind dann τ_{jk}, π_k innerhalb der Kugel $R = a$ regulär und genügen den Differentialgleichungen (4). — Wir bestimmen schließlich die Potentialfunktionen φ_k so, daß die Kontinuitätsbedingung erfüllt wird. Wir haben:

$$\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j} + 2x_j\,\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j} = {}& -\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)3}}\left\{\frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - \frac{\bar{x}_k^{(0)}}{a}\,\bar{x}_j^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{1}{\bar{r}} + \right. \\ & \left. + a\bar{x}_j^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a}\left(\bar{x}_j^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\bar{x}_l^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\frac{1}{\bar{r}}\right\}.\end{aligned}$$

Da:

$$x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}}, \quad (x_j - \bar{x}_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}} = -\frac{2(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3}.$$

$$\left(\bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{1}{\bar{r}} = \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{1}{\bar{r}} + 2 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{\bar{r}},$$

so können wir unseren Ausdruck für $\frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j}$ auch in der Form:

$$-\frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)3}} \left\{ 3a \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{3 x_k^{(0)}}{a \bar{r}} + \frac{3 x_k^{(0)}}{a} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right.$$

$$\left. + a x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} + \frac{2 x_k^{(0)}}{a} \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{1}{\bar{r}} \right\}$$

schreiben. In der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{oder} \qquad x_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{jk}^*}{\partial x_j}$$

haben auf der rechten Seite einige Glieder unmittelbar die Gestalt $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$; diese geben für φ_k den Beitrag:

$$\frac{R^{(0)2} - a^2}{2 R^{(0)3}} \left\{ \frac{3 x_k^{(0)}}{a \bar{r}} + \frac{a (x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2 x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} \right\},$$

welcher der Laplaceschen Gleichung genügt.

Um die noch übrigen Glieder von φ_k zu bestimmen, müssen wir eine für $R \leqq a$ reguläre Lösung ψ_k der Differentialgleichung:

$$x_j \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + a^2 \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3}$$

suchen, welche außerdem der Laplaceschen Gleichung $\Delta_x \psi_k = 0$ genügt. Dies geschieht ohne Schwierigkeit. Wir führen statt x_1, x_2, x_3 Polarkoordinaten ein und drücken also x_1, x_2, x_3 durch R und zwei Winkel aus. Die linke Seite unserer Differentialgleichung bekommt dadurch die Form:

$$R \frac{\partial \psi_k}{\partial R}.$$

Die rechte Seite können wir in eine nach steigenden Potenzen der Größe $R/\bar{R}^{(0)}$ fortlaufende Reihe entwickeln. Da die rechte Seite für alle $\bar{R}^{(0)}$ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta_x \psi = 0$ ist, so wird jedes Glied der Reihe ebenfalls eine Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. Da ferner, wie man leicht verifiziert, die rechte Seite für $R = 0$ verschwindet, wird die Reihe kein konstantes Glied enthalten. Nicht nur die rechte Seite selbst, sondern auch die mit R dividierte rechte Seite läßt sich also in eine Potenzreihe nach $R/\bar{R}^0$ entwickeln. Wenn wir diese Reihe in bezug auf R zwischen 0 und R gliedweise integrieren, so bekommen wir eine neue Reihe, deren Glieder sich nur durch konstante Faktoren von den entsprechenden Gliedern der Entwicklung der rechten Seite selbst unterscheiden. Sie sind also ebenfalls Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Die Summe dieser Glieder ist ψ_k. Es ist indessen nicht notwendig, ψ_k durch eine Potenzreihe darzustellen. Es gibt einen ziemlich einfachen, geschlossenen Ausdruck für ψ_k. Wir setzen: $x_j \bar{x}_j^{(0)} = \bar{R} R^{(0)} \cos\vartheta$, wo also ϑ der Winkel zwischen den Vektoren x_j und $\bar{x}_j^{(0)}$ ist, und haben dann unter Benutzung der Formeln S. 98:

$$\frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{a^2(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} = \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}^3}\left(\bar{r}^2 - \frac{a^4}{R^{(0)2}}\right) + \frac{a^2 x_k}{\bar{r}^3} =$$

$$= \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}^3}(R^2 - 2R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta) + \frac{a^2 x_k}{\bar{r}^3}.$$

Also:

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial R} = \frac{x_k^{(0)}(R - 2\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta)}{(R^2 - 2R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} + \frac{a^2 x_k}{R(R^2 - 2R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}}$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\psi_k = x_k^{(0)}\int_0^R \frac{(R - 2\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta)\,dR}{(R^2 - 2R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} +\\ + \frac{a^2 x_k}{R}\int_0^R \frac{dR}{(R^2 - 2R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{R}^{(0)2})^{3/2}} = x_k^{(0)}\left(\frac{1}{\bar{R}^{(0)}} - \frac{1}{\bar{r}}\right) +\\ + \frac{R - \bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{r}\cos\vartheta}{R\bar{R}^{(0)2}\sin^2\vartheta\cdot\bar{r}}(a^2 x_k - x_k^{(0)}\cdot x_j\bar{x}_j^{(0)}).\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wir haben also:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k = \frac{R^{(0)2} - a^2}{2R^{(0)3}}\left\{\frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{r}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a}\bar{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{a}\psi_k\right\} =\\ = \frac{R^{(0)2} - a^2}{2R^{(0)3}}\left\{\frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{R}^{(0)}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a}\bar{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} +\right.\\ \left. + \frac{3}{a}\frac{R - \bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{r}\cos\vartheta}{R\bar{R}^{(0)2}\sin^2\vartheta\cdot\bar{r}}(a^2 x_k - x_k^{(0)}\cdot x_j\bar{x}_j^{(0)})\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Durch die Gleichungen (5)—(8) S. 100 und (10) sind die Größen τ_{jk} und π_k bestimmt. Wir setzen jetzt:

$$T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \tau_{jk},$$

$$P_k = p_k - \pi_k = 2\mu\,\frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - \pi_k.$$

Die Formel (3) ergibt uns dann den Wert von u_k in einem beliebigen Punkt $P^{(0)}$ innerhalb der Kugel.

Um zur vollständigen Lösung unseres Problems zu gelangen, müssen wir noch eine Formel für p ableiten. Da p durch die Differentialgleichungen und Randbedingungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, so suchen wir die Differenz $p(P^{(0)}) - p(O)$ zu berechnen, wobei wir unter O den Mittelpunkt der Kugel verstehen. Wir gehen von der Formel (3, 17) S. 28 aus und bezeichnen mit v_j, $\bar{p}$ eine innerhalb der Kugel $R = a$ reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta v_j - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = o,\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = o, \tag{11}$$

welche an der Kugel $R = a$ den Bedingungen: $v_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right)$ genügt. Wir haben nach (3, 2) S. 22:

$$\int\limits_{R=a}\left\{v_j\left(\mu\frac{du_j}{dn} - p n_j\right) - u_j\left(\mu\frac{dv_j}{dn} - \bar{p}\, n_j\right)\right\} dS = 0,$$

und folglich nach (3, 17), wenn wir $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right) - v_j = V_j$ setzen:

$$p(P^{(0)}) - p(O) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R=a} U_j\left(\mu\frac{dV_j}{dn} + \bar{p} n_j\right) dS. \tag{12}$$

Die Schwierigkeit besteht also nur in der Bestimmung der Größen v_j und $\bar{p}$. Wir gehen, um diese Aufgabe zu lösen, in ähnlicher Weise wie oben hervor. Wir setzen:

$$v_j = v_j^* + (R^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j},\quad \bar{p} = \bar{p}^* + 2\mu\left(\varphi + 2x_k\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right). \tag{13}$$

Hier soll v_j^*, $\bar{p}^*$ eine innerhalb der Kugel reguläre Lösung des Systemes:

$$\mu \Delta v_j^* - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_j} = O$$

sein, welche an der Kugel den Bedingungen $v_j^* = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right)$ genügt. φ soll eine im Innern der Kugel reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. — Um v_j^*, $\bar{p}^*$ zu bestimmen, gehen wir von der Tatsache aus, daß auf der Kugel $R = a$:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{R^{(0)}\bar{r}}$$

ist. Wir differenzieren diese Gleichung nach $x_j^{(0)}$ und erhalten für $R = a$:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_j^{(0)}}\frac{1}{r} = -\frac{a x_j^{(0)}}{R^{(0)3}\bar{r}} - \frac{a}{R^{(0)}}\frac{\partial \bar{x}_k^{(0)}}{\partial x_j^{(0)}}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} =$$

$$-\frac{a}{R^{(0)3}}\frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{a R^{(0)}}\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}}.$$

Wir setzen jetzt:

$$v_j^* = \frac{a}{R^{(0)3}}\frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{a^3}{R^{(0)3}}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} - \frac{2}{aR^{(0)}}\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} + \frac{x_j}{a^3}, \tag{14}$$

$$\bar{p}^* = 0, \tag{15}$$

und haben dann:

$$\mu\,\Delta\, v_j^* = 0 = \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_j}$$

innerhalb der Kugel $R = a$, und an der Kugel: $v_j^* = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

Zur Bestimmung der Potentialfunktion φ erhalten wir die Gleichung:

$$x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_j^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{2aR^{(0)}}\bar{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{aR^{(0)}}\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} -$$

$$-\frac{3}{2a^3} = \frac{3}{2a}\left(\frac{1}{R^{(0)}\bar{r}} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{2aR^{(0)}}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{3}{\bar{r}} + 2x_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}}\right).$$

Sie ergibt:

$$\varphi = \frac{1}{2aR^{(0)}}\left(\frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} + 3\psi\right). \tag{16}$$

ψ ist hier eine innerhalb der Kugel $R = a$ reguläre Lösung der Laplaceschen Gleichung, welche außerdem der Gleichung:

$$x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{R^{(0)}}{a^2} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}^{(0)}}$$

genügen muß. Aus dieser Gleichung können wir ψ in der oben auseinandergesetzten Weise entweder durch Reihenentwicklung der rechten Seite oder durch direkte Integration berechnen. Wir setzen wieder:

$$x_j\,\bar{x}_j^{(0)} = R\bar{R}^{(0)}\cos\vartheta$$

und haben dann:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \sum_0^\infty{}_{(n)} P^{(n)}(\cos\vartheta)\frac{R^n}{\bar{R}^{(0)n+1}},$$

wo die $P^{(n)}$ die Kugelfunktionen sind und also $P^{(0)} = 1$ ist. Wir erhalten so:

$$\psi = \sum_{1}^{\infty} P^{(n)}(\cos\vartheta) \frac{R^{(n)}}{n\,\bar{R}^{(0)n+1}}.$$

Durch direkte Integration erhalten wir dagegen:

$$\psi = \int_0^R \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}^{(0)}}\right) \frac{dR}{R} = -\frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R\cos\vartheta}{2\bar{R}^{(0)}}.$$

Wir haben also schließlich:

$$\varphi = \frac{1}{2a\bar{R}^{(0)}} \left(\frac{3}{\bar{r}} + 2\,\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - \frac{3}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R\cos\vartheta}{2\bar{R}^{(0)}}\right). \tag{17}$$

Die Formeln (12)–(17) vermitteln die Bestimmung von $p(P^{(0)}) - p(O)$.

92. Zusammenstellung der Formeln für das innere Problem der Kugel.

Wir fassen unsere bis jetzt gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Um eine innerhalb einer Kugel:

$$R = \sqrt{x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = a$$

reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu\,\Delta\,u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

zu konstruieren, welche auf der Kugel den Randbedingungen $u_j = U_j$ genügt, wo U_j vorgeschriebene Funktionen auf der Oberfläche der Kugel sind, bildet man die Funktionen:

$$\begin{aligned}
T_{jk} = {} & \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{a}{R^{(0)}\bar{r}}\,\delta_{jk} - \\
& - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}} \left\{ \frac{\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}}{a^3\,\bar{r}} - \right. \\
& - \frac{a}{R^{(0)2}\,\bar{r}^3} \left[\bar{x}_j^{(0)}(x_k - x_k^{(0)}) + \bar{x}_k^{(0)}(x_j - \bar{x}_j^{(0)})\right] - \\
& \left. - \frac{2\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}}{a^3}\,\bar{x}_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{\bar{r}} \right\} - (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j};
\end{aligned}$$

$$P_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - 2\mu \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} - 2\mu \left(\varphi_k + 2\,x_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}\right);$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2R^{(0)3}}(R^{(0)2} - a^2)\left\{\frac{3x_k^{(0)}}{aR^{(0)}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a}\,\bar{x}_j^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{a}\,\frac{R - \bar{R}^{(0)}\cos\vartheta + \bar{r}\cos\vartheta}{R\bar{R}^{(0)2}\sin^2\vartheta\cdot\bar{r}}\,(a^2x_k - x_k^{(0)}\cdot x_j\bar{x}_j^{(0)})\right\};$$

$$V_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - \frac{a}{R^{(0)3}}\,\frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} +$$

$$+ \frac{2}{aR^{(0)}}\,\bar{x}_j^{(0)}\,\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} - \frac{x_j}{a^3} - (R^2 - a^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j};$$

$$\bar{p} = 2\mu\left(\varphi + 2x_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right);$$

$$\varphi = \frac{1}{2aR^{(0)}}\left\{\frac{3}{\bar{r}} + 2\,\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}} - \frac{3}{\bar{R}^{(0)}}\log\frac{\bar{r} + \bar{R}^{(0)} - R\cos\vartheta}{2\bar{R}^{(0)}}\right\},$$

$$R^{(0)} = \sqrt{x_j^{(0)2}},\qquad \bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}}\,x_j^{(0)},\qquad \bar{R}^{(0)} = \sqrt{\bar{x}_j^{(0)2}},$$

$$r = \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2},\qquad \bar{r} = \sqrt{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2},\qquad \cos\vartheta = \frac{x_j\,\bar{x}_j^{(0)}}{R\,\bar{R}^{(0)}}.$$

Dann geben die Formeln:

$$u_k(P^{(0)}) = -\frac{1}{8\pi\mu}\int\limits_{R=a} U_j\left(\mu\frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j\right)dS,$$

$$p(P^{(0)}) - p(O) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R=a} U_j\left(\mu\frac{dV_j}{dn} + \bar{p}n_j\right)dS,$$

wo $P^{(0)}$ der Punkt $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$ und O der Mittelpunkt der Kugel ist, die Lösung des Problems.

9 3. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das äußere Problem.

Wir wenden uns zum äußeren Probleme, also zu der Aufgabe, eine Lösung des Systems (1) zu finden, die außerhalb der Kugel $R = a$ regulär ist und an dieser Kugel der Bedingung $u_j = U_j$ $(j = 1, 2, 3)$ genügt. Eine solche Lösung ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn ihr Verhalten in unendlicher Ferne vorgeschrieben ist. Wir schreiben vor, daß die Größen $R\,|u_j|$, $R^2\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right|$, $R^2\,|p|$ $(j, k = 1, 2, 3)$ für $R > a$ eine endliche obere Grenze haben sollen. Man sieht leicht, daß diese Bedingung nebst der Grenzbedingung $u_j = U_j$ für $R = a$ genügt, um eine für $R = a$ reguläre Lösung des Systems (1) eindeutig festzulegen. Die Formel (3, 17) gibt in unserem Falle, wenn wir auch jetzt die

Normale der Kugel $R = a$ nach außen ziehen und wenn der Punkt $P^{(0)}$ (mit den Koordinaten $x_j^{(0)}$) jetzt außerhalb der Kugel liegt:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int\limits_{R=a} U_j \left(\mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j\right) dS \tag{18}$$

T_{jk}, P_k soll hier eine Lösung des Systems (2) sein, die sich in der Umgebung des Punktes $P^{(0)}$ wie die oben eingeführte Lösung t_{jk}, p_k verhält, für $R = a$ den Bedingungen $T_{jk} = 0$ genügt und ferner der Bedingung genügt, daß die Größen $R\,|T_{jk}|$, $R^2 \left|\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_l}\right|$, $R^2\,|P_k|$ $(j, k, l = 1, 2, 3)$ für $R > 2R^{(0)}$ eine vom Punkte $P^{(0)}$ unabhängige, obere Grenze haben. Um T_{jk} und P_k zu bestimmen, benutzen wir dieselbe Methode wie beim inneren Problem. Wir setzen wieder $T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk}$, $P_k = p_k - \bar{p}_k$. Für τ_{jk} und $\bar{p}_k$ machen wir wieder die Ansätze (7) und (8). $\tau_{jk}{}^*$ hat dieselbe Bedeutung wie oben. Für φ_k erhalten wir wieder den ersten, in Formel (10) angegebenen Ausdruck. ψ_k soll jedoch eine andere Bedeutung haben. Zur Bestimmung dieser Funktion erhalten wir dieselben Gleichungen wie früher:

$$\Delta \psi_k = 0\,, \quad x_j \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} = \frac{x_k^{(0)}}{\bar{r}} + a^2 \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3}.$$

Wir müssen aber jetzt eine für $R > a$ reguläre Lösung dieser Gleichung suchen. Um ψ_k zu bestimmen, genügt es, eine für $R > a$ reguläre Lösung der Gleichungen:

$$\Delta \psi = 0\,, \quad x_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{r}} \tag{19}$$

zu bestimmen. Man erhält sie entweder durch Reihenentwicklung von $1/\bar{r}$ nach Potenzen von $1/R$ oder durch direkte Integration. Das Ergebnis ist:

$$\left.\begin{aligned} \psi = -\sum_0^\infty P^{(n)}(\cos\vartheta) \frac{\bar{R}^{(0)n}}{(n+1)R^{n+1}} &= \frac{1}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{r} + R\cos\vartheta - \bar{R}^{(0)}}{R(1+\cos\vartheta)} = \\ &= \frac{1}{\bar{R}^0} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wir haben dann:

$$\psi_k = x_k^{(0)} \psi + a^2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} = \frac{a^2}{\bar{R}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}}. \tag{21}$$

Man bestätigt durch elementare Rechnungen, daß die hiermit erhaltenen Größen T_{jk}, P_k den oben angegebenen Bedingungen genügen.

Aus unserer Voraussetzung, daß $R^2|p|$ für $R > a$ eine obere Grenze hat, folgt, daß p in unendlicher Ferne verschwindet. Unter diesen Umständen ist es möglich, den Wert von p in einem beliebigen Punkte $P^{(0)}$ außerhalb der Kugel durch die Werte U_j, welche die Größen u_j auf der Kugel annehmen, auszudrücken. Wir haben:

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi}\int U_j\left(\mu\frac{dV_j}{dn} + \bar{p}n_j\right)dS\,. \tag{22}$$

Hier ist:

$$V_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} - v_j\,.$$

v_j und $\bar{p}$ ist eine für $R > a$ reguläre Lösung des Systems (11), welche für $R = a$ der Bedingung $V_j = 0$ genügt. Wir machen für v_j und $\bar{p}$ wieder den Ansatz (13), setzen aber jetzt:

$$v_j^* = \frac{a}{R^{(0)3}}\frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} + \frac{a^3}{R^{(0)3}}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{\bar{r}} - \frac{2}{aR^{(0)}}\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\bar{r}}\,,\qquad \bar{p}^* = 0\,.$$

Für φ erhalten wir wieder den Ausdruck (16). ψ muß aber jetzt den Gleichungen (19) genügen. Für ψ können wir also den Ausdruck (20) benutzen.

9 4. Zusammenstellung der Formeln für das äußere Problem der Kugel.

Um eine außerhalb einer Kugel:

$$R = \sqrt{x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = a$$

reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu\,\Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0\,,\qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

zu konstruieren, welche in unendlicher Ferne der Bedingung $u_j \to 0$, $p \to 0$ und auf der Kugel der Bedingung $u_j = U_j$ $(j = 1, 2, 3)$ genügt, wo U_j vorgeschriebene Funktionen auf der Oberfläche der Kugel sind, bildet man die Funktionen:

$$\begin{aligned} T_{jk} = {} & \frac{\delta_{jk}}{r} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{a}{R^{(0)}\bar{r}}\delta_{jk} - \frac{a^3}{R^{(0)3}}\frac{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - \\ & - \frac{R^{(0)2} - a^2}{R^{(0)}}\left\{\frac{\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}}{a^3\bar{r}} - \frac{a}{R^{(0)2}\bar{r}^3}\left[\bar{x}_j^{(0)}(x_k - \bar{x}_k^{(0)}) + \bar{x}_k^{(0)}(x_j - \bar{x}_j^{(0)})\right] - \right. \\ & \left. - \frac{2\bar{x}_j^{(0)}\bar{x}_k^{(0)}}{a^3}\bar{x}_l^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{\bar{r}}\right\} - (R^2 - a^2)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\,; \end{aligned}$$

$$P_k = 2\mu \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^3} - 2\mu \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{x_k - \bar{x}_k^{(0)}}{\bar{r}^3} - 2\mu \left(\varphi_k + 2x_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}\right);$$

$$\varphi_k = \frac{R^{(0)2} - a^2}{2R^{(0)3}} \left\{ \frac{3x_k^{(0)}}{a\bar{r}} + \frac{a(x_k - \bar{x}_k^{(0)})}{\bar{r}^3} + \frac{2x_k^{(0)}}{a} \bar{x}_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3a}{\bar{R}^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}} \right\};$$

$$V_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} - \frac{a}{R^{(0)3}} \frac{x_j^{(0)}}{\bar{r}} - \frac{a^3}{R^{(0)3}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{2}{aR^{(0)}} \bar{x}_j^{(0)} \bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} -$$

$$- (R^2 - a^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j};$$

$$\bar{p} = 2\mu \left(\varphi + 2x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right);$$

$$\varphi = \frac{1}{2aR^{(0)}} \left(\frac{3}{\bar{r}} + 2\bar{x}_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{\bar{R}^{(0)}} \log \frac{\bar{R}^{(0)}\bar{r} + x_j \bar{x}_j^{(0)} - \bar{R}^{(0)2}}{R\bar{R}^{(0)} + x_j \bar{x}_j^{(0)}} \right);$$

$$R^{(0)} = \sqrt{x_j^{(0)2}}, \quad \bar{x}_j^{(0)} = \frac{a^2}{R^{(0)2}} x_j^{(0)}, \quad \bar{R}^{(0)} = \sqrt{\bar{x}_j^{(0)2}},$$

$$r = \sqrt{(x_j - x_j^{(0)})^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(x_j - \bar{x}_j^{(0)})^2}.$$

Dann geben die Formeln:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int\limits_{R=a} U_j \left(\mu \frac{dT_{jk}}{dn} - P_k n_j\right) dS,$$

$$p(P^{(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R=a} U_j \left(\mu \frac{dV_j}{dn} + \bar{p} n_j\right) dS,$$

wo $P^{(0)}$ der Punkt $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$ ist und wo die Normale der Kugel (von der Länge 1): n_1, n_2, n_3 nach außen gezogen wird, die Lösung des Problems.

Die beiden Probleme der Kugel können auch mit Hilfe von Reihenentwicklungen gelöst werden. Solche Reihen wurden von Lamb untersucht.

95. Die Stokessche Widerstandsformel.

Wenn wir in Formel (18) S. 107 die Größen U_j konstant annehmen, erhalten wir die Lösung des Stokesschen Problems, eine für $R > a$ reguläre Lösung des Systems (1) zu finden, bei welcher die Größen u_j in unendlicher Ferne verschwinden und an der Kugel $R = a$ vorgeschriebene, konstante Werte, U_j, annehmen. Man kann indessen diese Lösung in viel einfacherer Form darstellen. Es genügt:

$$u_j = \frac{3}{2} U_j \frac{a}{R} - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(3R + \frac{a^2}{R}\right), \quad p = -\frac{3}{2} \mu a U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R} \tag{23}$$

zu setzen. Stokes wurde zu diesem Problem durch die Aufgabe geführt, den Widerstand zu berechnen, den eine kleine Kugel erfährt, wenn sie sich mit konstanter Geschwindigkeit U_j in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Er führte, um diese Aufgabe zu lösen, ein Bezugssystem ein, dessen Anfangspunkt sich im Mittelpunkte der Kugel befand und sich also mit dieser bewegte. Er führte dadurch seine Aufgabe auf den Fall zurück, wo eine ruhende, kleine Kugel in eine mit der Geschwindigkeit $-U_j$ strömenden Flüssigkeit eingetaucht ist. Indem er die Größen U_j klein annahm und alle (sei es in U_j oder u_k) quadratischen Glieder vernachlässigte, erhielt er zur Bestimmung der Bewegung der Flüssigkeit das System (1) mit den Nebenbedingungen: für $R = a$: $u_j = 0$, in unendlicher Ferne: $u_j = -U_j$. Durch die Substitution: $u_j = -U_j + u_j'$ führte er dieses Problem auf das oben behandelte zurück. Auf ein mit der Kugel fest verbundenes Bezugssystem bezogen, ist also seine Lösung des Problems:

$$\left.\begin{aligned} u_j &= -U_j + \frac{3}{2} U_j \frac{a}{R} - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(3R + \frac{a^2}{R}\right), \\ p &= -\frac{3}{2} \mu a U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

In schroffem Gegensatz zu den bei gewöhnlichen Körpern und gewöhnlichen Geschwindigkeiten beobachteten Erscheinungen ist diese Bewegung in gewissem Sinne symmetrisch in bezug auf eine gegen die Strömungsrichtung senkrechte, durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene. In zwei Punkten, welche in bezug auf diese Ebene Spiegelbilder voneinander sind, haben die Geschwindigkeiten in der Strömungsrichtung gleiche, die Geschwindigkeiten in einer gegen jene Richtung senkrechten Richtung entgegengesetzt gleiche Werte. Daß dieses Ergebnis nicht zum Wesen der Sache gehört, sondern durch die angewandte Näherungsmethode bedingt wird, werden wir später sehen.

Wir berechnen mit Hilfe der Stokesschen Lösung die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt. Wir haben im ersten Paragraphen gesehen (vgl. S. 7), daß jene Resultierende die Komponenten:

$$\int\limits_{R=a} \left\{-p n_j + \mu n_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right\} dS$$

hat. Aus den Gleichungen (1) folgt leicht, daß die Werte dieser Integrale von der Integrationsfläche unabhängig sind, vorausgesetzt, daß diese eine geschlossene Fläche ist, welche den Anfangspunkt umgibt. Dies folgt aus der Beziehung:

$$\int\limits_{\bar{S}} \left\{- p n_j + \mu n_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right\} dS =$$

$$= \int\limits_{\bar{\Omega}} \left\{- \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu \Delta u_j + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} d\omega = 0\,,$$

welche gültig ist, wenn u_1, u_2, u_3, p in dem von der geschlossenen Fläche $\bar{S}$ begrenzten Bereiche $\bar{\Omega}$ eine reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen (1) bilden. Wir benutzen die Unabhängigkeit des Integrals von der Integrationsfläche in der Weise, daß wir zur Integrationsfläche eine Kugel um den Anfangspunkt mit sehr großem Radius R wählen. Wir haben auf jener Kugel in genügender Annäherung:

$$- p n_j + \mu n_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = - \frac{9}{2} \mu a U_k \frac{x_j x_k}{R^4}\,,$$

ferner ist:

$$\int\limits_{R = \text{Konst.}} \frac{x_j x_k}{R^4} dS = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk}\,.$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, hat also die Komponenten $-6\pi\mu a U_j$. Dies ist die berühmte Stokessche Widerstandsformel.

Die Stokessche Formel hat eine sehr große Bedeutung für die Molekularphysik, die Kolloidchemie und Meteorologie gewonnen. Die genaueren Bedingungen für ihre Gültigkeit werden wir später diskutieren. Wir werden dort auch etwas Näheres über ihre Anwendungen sagen.

96. Ein Satz von Faxén.

Dr. H. Faxén hat die Stokessche Widerstandsformel in sehr bemerkenswerter Weise verallgemeinert. Man kann den Satz von Faxén mit Hilfe der oben gegebenen, allgemeinen Lösung des Problems der Kugel beweisen. Obwohl wir den Beweis seiner Länge wegen hier nicht ausführen können, wollen wir doch den Gang desselben andeuten. Wir fragen zunächst, wie kann man, wenn die Bewegung einer Flüssigkeit den linearen Stokesschen Gleichungen gehorcht, die Geschwindigkeitskomponenten u_k sowie die Größen Δu_k in einem Punkte $P^{(0)}$ in der Flüssigkeit durch die Werte ausdrücken, welche die Größen u_j auf einer in der Flüssigkeit gelegenen Kugel annehmen, die ihren Mittelpunkt im Punkte $P^{(0)}$ hat? Die Formel (3) S. 98 gibt hinsichtlich der Größen u_k unmittelbar eine Antwort auf diese Frage. Wir verlegen für einen Augenblick den Anfangspunkt unseres Bezugssystems in den Punkt $P^{(0)}$. Es wäre ziemlich mühsam, aus der allgemeinen Formel für die Greenschen Funktionen durch Grenzübergang die Werte von T_{jk} und P_k zu berechnen. Man bestätigt aber leicht, daß diese Größen die folgenden Werte haben:

$$T_{jk} = \delta_{jk}\left(\frac{1}{R} + \frac{2R^2}{a^3} - \frac{3}{a}\right) + x_j x_k\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{a^3}\right),$$

$$P_k = \frac{10\,\mu\, x_k}{a^3} + \frac{2\,\mu\, x_k}{R^3}.$$

In der Tat genügen T_{jk}, P_k bei festem k den Stokesschen Gleichungen und sind im Anfangspunkte in der richtigen Weise singulär. Die Formel (3) ergibt unter diesen Umständen nach Ausführung der Integrationen und wenn wir wieder den Anfangspunkt in einen beliebigen Punkt verlegen:

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{3}{8\pi}\int\limits_{r=\text{Konst.}} u_j\left\{\frac{5}{r^2}\,(x_j - x_j^{(0)})\,(x_k - x_k^{(0)}) - \delta_{jk}\right\}\frac{dS}{r^4}. \tag{25}$$

Durch ähnliche Rechnungen findet man:

$$(\varDelta\, u_k)_{P^{(0)}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\right)_{P^{(0)}} = \frac{15}{4\pi}\int\limits_{r=\text{Konst.}} u_j\left\{\delta_{jk} - \frac{3(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^2}\right\}\frac{dS}{r^4}. \tag{26}$$

Wir nehmen jetzt an, daß eine Flüssigkeit sich in Übereinstimmung mit den linearen Stokesschen Gleichungen stationär bewegt. Wir betrachten einen Bereich, wo die Bewegung regulär ist. In diesen Bereich tauchen wir einen kugelförmigen starren Körper mit dem Radius a ein und denken uns ihn dort festgehalten. Die Flüssigkeit übt auf die Kugel Kräfte aus, deren Resultierende wir berechnen wollen. Wir haben zu diesem Zweck zuerst die von der Kugel hervorgerufene Störung der Flüssigkeitsbewegung zu berechnen. Diese Aufgabe ist durch die Formel (18) S. 107 gelöst. Wir haben hier die mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Komponenten der Geschwindigkeit der anfänglichen ungestörten Flüssigkeitsbewegung zu nehmen. Die wirkliche Bewegung der Flüssigkeit ist aus dieser Bewegung und der von der Kugel hervorgerufenen Störung zusammengesetzt. Man sieht nun leicht, daß unsere Resultierende nur von der Störung abhängt. Wie wir schon oben hervorgehoben haben, können wir in den Integralen, welche die Komponenten der Resultierenden darstellen, zur Integrationsfläche eine beliebige, geschlossene Fläche wählen, welche dieselben Singularitäten der Größen u_j wie unsere Kugel umschließt. Nun hat die anfängliche, ungestörte Bewegung der Flüssigkeit nach unserer Annahme im Innern der Kugel keine Singularitäten. Bei der Berechnung der Resultierenden der von dieser ungestörten Bewegung herrührenden Kräfte können wir deshalb die Integrationsfläche zu einem Punkt zusammenziehen. Das Ergebnis der Integration ist also Null. Betreffs der Störung kann man mit Hilfe der Formel (18), allerdings nur durch langwierige Rechnungen, die Komponenten der Resultierenden berechnen. Das Ergebnis läßt sich, wenn wir mit $u_k^{(r)}$ die Komponenten der Geschwindigkeit in der anfänglichen, ungestörten, regulären Bewegung bezeichnen, in der einfachen Form:

$$\frac{3}{2}\, a \mu \int\limits_{r=a} u_k^{(r)} \frac{dS}{r^2} \tag{27}$$

schreiben. Wegen (25) können wir diesen Ausdruck der Komponenten der Resultierenden auch in der integrallosen Form:

$$6 \pi \mu a u_k^{(r)}(P^{(0)}) + \pi a^3 \left(\frac{\partial p^{(r)}}{\partial x_k}\right)_{P^{(0)}} \cdot \tag{28}$$

darstellen. Dies ist der Satz von Faxén. Er ermöglicht es unter ganz allgemeinen Verhältnissen in sehr einfacher Weise die Kräfte, welche eine stationär bewegte, zähe Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, in erster Näherung zu berechnen.*

Wenn wir nur den Mittelpunkt der Kugel festhalten, wird die Kugel sich um diesen Punkt drehen. Für die Drehgeschwindigkeit hat Dr. Faxén einen sehr einfachen Ausdruck berechnet. Man drückt ihn am einfachsten in der vektoriellen Schreibweise aus. Die Drehgeschwindigkeit ist:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}^{(r)},$$

wenn $\boldsymbol{u}$ der Vektor mit den Komponenten u_j ist.

97. Das Problem der ebenen Wand.

Das Problem der Kugel enthält als speziellen Fall das Problem der Ebene, mit anderen Worten die Aufgabe, eine in einem Halbraume $x_3 > 0$ reguläre Lösung der Gleichungen (1) zu finden, welche den

* Dr. Faxén hat seinen Satz ohne Beweis in seiner Dissertation mitgeteilt. Einen Beweis gab er später in dem Aufsatze: Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden eingeschlossen ist. Arkiv f. mat., astr. och fysik. Bd. 18, 1924. Ein einfacher Beweis wäre sehr erwünscht.

Bedingungen: für $x_3 = 0$: $u_j = U_j$; $\lim\limits_{x_3 \to \infty} u_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ genügt. Um die Lösung dieses Problems zu erhalten, hat man nur nötig, in T_{jk} und P_k x_3 und $x_3^{(0)}$ mit $x_3 + a$ und $x_3^{(0)} + a$ zu vertauschen und dann den Grenzübergang $a \to \infty$ auszuführen. t_{jk} und p_k bleiben dabei unverändert. Man findet: $\bar{x}_1^{(0)} = x_1^{(0)}$, $\bar{x}_2^{(0)} = x_2^{(0)}$, $\bar{x}_3^{(0)} = -x_3^{(0)}$ und folglich: $\bar{r} = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + (x_3 + x_3^{(0)})^2}$. Man erhält ferner:

für $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$:

$$\tau_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{\bar{r}} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{\bar{r}^3} - 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\pi_k = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\bar{r}} - 4 \mu x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_k} \frac{1}{\bar{r}}.$$

für $j = 1, 2$:

$$\tau_{j3} = \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_3 - x_3^{(0)})}{\bar{r}^3} + 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\tau_{33} = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{(x_3 + x_3^{(0)})^2}{\bar{r}^3} + 2 x_3 x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{\bar{r}},$$

$$\pi_3 = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\bar{r}} + 4 \mu x_3^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{\bar{r}}.$$

Man beweist am einfachsten diese Formeln durch direkte Ausrechnung, indem man zeigt, daß die Funktionen τ_{jk}, π_k den Differentialgleichungen (2) und den zugehörigen Nebenbedingungen genügen.

Das Problem der ebenen Wand wurde zuerst von H. A. Lorentz im Jahre 1896 gelöst.

§ 10. Die nicht-stationären Gleichungen. Das Problem der Kugel. Die Formel von Boussinesq. Das Problem des Kreiszylinders.

10 1. Der Ansatz.

In den Gleichungen I^a S. 12 setzen wir $X_j = 0$ und vernachlässigen die quadratischen Glieder. So erhalten wir das System:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta u_j, \qquad \nu = \frac{\mu}{\varrho}, \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Die Kontinuitätsbedingung ergibt:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{2}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Lösung dieses Systems zu finden, welche den folgenden Bedingungen genügt. Für $t = 0$ sollen u_j $(j = 1, 2, 3)$ den Wert Null annehmen. Für $t > 0$ sollen u_j, p in dem Bereiche Ω, das heißt hier für $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > a$, nebst den in den Gleichungen (1), (2) vorkommenden Ableitungen stetig sein. An der Kugel $R = a$ sollen die Größen u_j vorgeschriebene, im allgemeinen vom Orte und von t abhängige Werte U_j annehmen. Endlich soll die Bedingung $\lim\limits_{R \to \infty} u_j = 0$ erfüllt sein.

Verfasser hat dieses Problem zuerst durch Reihen gelöst, welche nach Kugelfunktionen fortschreiten und wurde später durch Summierung dieser Reihen zu dem folgenden Ansatz geführt. Wir setzen:

$$u_j = \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Psi - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\right), \qquad p = -\varrho \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{3}$$

Ψ soll dabei eine in Ω reguläre und im Unendlichen verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung sein. Die Größen F_j sollen die Komponenten eines der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{F} \tag{4}$$

genügenden Vektors sein. Dieser Vektor soll für $t = 0$ verschwinden, für $t > 0$ in Ω regulär sein und in unendlicher Ferne verschwinden. Unser Ansatz (3) befriedigt unter diesen Umständen, wie man sofort sieht, die Systeme (1) und (2).

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt der Kugel $R = a$. n_j sind die Komponenten einer nach außen gezogenen Normale von der Länge 1 in diesem Punkte. Mit T_j $(j = 1, 2, 3)$ bezeichnen wir die Komponenten eines beliebigen, zur Normalen senkrechten, also die Kugel im betrachteten Punkte tangierenden Vektors von der Länge 1. Wir haben nach diesen Festsetzungen stets:

$$n_j T_j = 0. \tag{5}$$

Die Bedingungen $u_j = U_j$ für $R = a$ ergeben jetzt:

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial t} - U_j + \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k}\right) T_j = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} - U_j + \nu \Delta F_j - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k}\right) n_j = 0. \tag{7}$$

Wir befriedigen die Beziehungen (6) und (7) in der folgenden Weise. Wir setzen:

$$\Psi = \Phi + \Phi^*, \tag{8}$$

und bestimmen Φ durch die Forderung, daß Φ eine für $R > a$ reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösung der Laplaceschen Gleichung sein soll, welche auf der Kugel $R = a$ der Bedingung:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j = U_j n_j = U_n \tag{9}$$

genügt. Wir bestimmen sodann die Tangentialkomponenten des Vektors $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel $R = a$ durch die Bedingung: für $R = a$:

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial t} - U_j + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) T_j = 0, \qquad \text{wenn } n_j T_j = 0. \tag{10}$$

Sie ergibt:

$$T_j F_j = T_j \int\limits_0^t \left(U_j(\tau) - \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial x_j}\right) d\tau \qquad \text{für } R = a. \tag{11}$$

Aus (6) folgt dann:

$$T_j \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k}\right) = 0, \qquad \text{wenn } R = a. \tag{12}$$

Da diese Beziehung für jeden zu $\boldsymbol{n}$ senkrechten Vektor gelten soll, so ist, wie man auch auf der Kugel $R = a$ fortschreitet, die Änderung von $\Phi^* - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$ Null, also:

$$\Phi^* - \nu \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \text{Konstante}, \qquad \text{wenn } R = a. \tag{13}$$

Wegen (7) muß Φ^* außerdem der Bedingung:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} + \nu \left(\Delta F_j - \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k}\right) n_j = 0, \qquad \text{für } R = a \tag{14}$$

genügen.

Wir haben also zwei Potentialfunktionen Φ und Φ^* und eine Vektorfunktion $\boldsymbol{F}$, welche der Gleichung (4) genügt, eingeführt. Φ ist durch seine Randbedingung vollständig bestimmt. Von dem Vektor $\boldsymbol{F}$ kennen wir den Wert für $t = 0$, das Verhalten im Unendlichen, sowie die Tangentialkomponenten an der Kugel bei beliebigem t, so daß also der Wert der Normalkomponente von $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel noch zur Verfügung steht. Es entsteht dann die Aufgabe, über den Wert dieser Normalkomponente von $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel so zu verfügen, daß die beiden Randbedingungen (13), (14) für Φ^* auf der Kugel so erfüllt werden können, daß Φ^* noch im Unendlichen verschwindet.

102. Einführung eines Hilfsproblems.

Die Lösung der komplizierten, durch die Beziehungen (13), (14) gekennzeichneten Aufgabe, welche wir hier geben werden, beruht auf einer analytischen Tatsache, welche durch die oben erwähnten Reihenentwicklungen des Verfassers aufgedeckt wurde. Wir behaupten: man kann die Normalkomponente des Vektors $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel so bestimmen, daß zwei außerhalb der Kugel $R = a$ reguläre und im Unendlichen verschwindende Potentialfunktionen P und P^* existieren, welche Ableitungen in bezug auf x_1, x_2, x_3 besitzen, P von den zwei ersten Ordnungen, P^* von der ersten Ordnung, die an der Kugel $R = a$ endliche und stetige Werte annehmen und in unendlicher Ferne verschwinden und welche an der Kugel $R = a$ die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} P &= n_j F_j = F_n, \quad \frac{dP}{dn} = n_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - n_j n_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \\ &\quad - \frac{2}{a} n_j F_j = \Delta\iota v F; \\ P^* &= n_j n_k \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{dF_n}{dn}, \quad \frac{dP^*}{dn} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_k}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right) - \\ &\quad - n_j n_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_l}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_l}\right) - \frac{2}{a} n_j \frac{x_k}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \Delta\iota v \frac{dF}{dn} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

erfüllen.

Wir behaupten ferner: wenn P und P^* in dieser Weise bestimmt worden sind, dann hat der Ausdruck

$$\nu\left(\frac{x_j}{a}\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{2}{a}P + P^*\right)$$

alle die Eigenschaften, welche wir von der Funktion Φ^* verlangen müssen, und es ist also:

$$\Phi^* = \nu\left(\frac{x_j}{a}\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{2}{a}P + P^*\right). \tag{16}$$

Wir beweisen zuerst die Richtigkeit der zweiten Behauptung. Daß die durch (16) definierte Funktion Φ^* (wenn P und P^* existieren) eine außerhalb der Kugel $R = a$ reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion ist, ist unmittelbar klar. Auf der Kugel $R = a$ hat man ferner nach (15):

$$\Phi^* = \nu\left(\frac{dP}{dn} + \frac{2}{a}P + P^*\right) = \nu\frac{\partial F_j}{\partial x_j}.$$

Die Bedingung (13) ist also erfüllt. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß an der Kugel $R = a$ die Bedingung (14) erfüllt ist. Nun ist*:

$$\varDelta \iota v F = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \int\limits_s F_j T_j^{(n)} ds,$$

wo ds das Linienelement einer beliebigen kleinen Kurve auf der Kugel ist, welche das Flächenelement σ umschließt, und $T_j^{(n)}$ die Komponenten der die Kugel $R = a$ tangierenden, äußeren Normale (von

---

* Man definiert in der Vektoranalysis die Divergenz eines vom Orte abhängigen Vektors als den Grenzwert:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\omega} \int\limits_s V_j n_j dS.$$

Hier ist S eine beliebige geschlossene Fläche im Raume, n die nach außen gezogene Normale von der Länge 1 der Fläche S und ω das Volumen des von S eingeschlossenen Raumbereiches. Es wird vorausgesetzt, daß beim Grenzübergange $\omega \to 0$ die die Fläche S sich um einen bestimmten Punkt zusammenzieht. Wir nehmen jetzt an, daß ein Vektor V außerhalb der Kugel $R = a$, also im Bereiche Ω, definiert ist. Wir wollen div V in einem Punkte der Kugel $R = a$ berechnen. Wir ziehen zu diesem Zweck auf der Kugel eine kleine geschlossene Kurve s und verbinden die Punkte dieser Kurve mit dem Mittelpunkte der Kugel. Die so definierte konische Fläche und die beiden Kugeln $R = a$ und $R = a + da$ grenzen einen kleinen Bereich im Raume ab. Das Volumen dieses Bereiches ist σda, wenn σ der Flächeninhalt des von der Kurve s begrenzten kleineren Teiles der Kugel $R = a$ ist. Wie erhalten, indem wir bei der Berechnung von div V diesen Bereich benutzen und indem wir mit $T_j^{(n)}$ die Komponenten einer die Kugel $R = a$ tangierenden, äußeren Normale (von der Länge 1) der Kurve s bezeichnen und bedenken, daß, wenn dS ein Flächenelement einer Kugel mit dem Radius R ist, welches vom Mittelpunkte aus unter einem bestimmten Raumwinkel gesehen wird, dS/R^2 konstant ist:

$$(\operatorname{div} V)_{R=a} = \lim_{\sigma da \to 0} \left[\frac{1}{\sigma da} \int\limits_\sigma \left\{ (V_j R^2)_{R = a + da} - V_j R^2)_{R=a} \right\} \frac{x_j dS}{R^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma} \int\limits_s V_j T_j^{(n)} ds \right] = \left\{ \frac{x_j x_k}{a^4} \frac{\partial}{\partial x_k} (V_j R^2) \right\}_{R=a} + \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \int\limits_s V_j T_j^{(n)} ds =$$

$$= \left(n_j n_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{2}{a} n_j V_j \right)_{R=a} + \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \int\limits_s V_j T_j^{(n)} ds.$$

Nun haben wir andererseits:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_j}{\partial x_j}.$$

Folglich, nach (15), für $R = a$:

$$\varDelta \iota v V = \left(\operatorname{div} V - n_j n_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{2}{a} n_j V_j \right)_{R=a} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \int\limits_s V_j T_j^{(n)} ds.$$

der Länge 1) der Kurve s sind. $\varDelta\iota v\,\boldsymbol{F}$ hängt also nur von den Tangentialkomponenten von $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel ab. — Bei Einführung von Polarkoordinaten ist nun:

$$\frac{x_j}{R}F_j = F_R, \quad \frac{x_k}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_j}{\partial R}.$$

Wir haben ferner entsprechend der Definition von $\varDelta\iota v$ in (15) auf der Kugel $R = a$:

$$0 = \varDelta P = \operatorname{div}\operatorname{grad} P = \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial P}{\partial R} + \varDelta\iota v \operatorname{grad} P.$$

Da nach (15) P auf der betrachteten Kugel gleich F_R ist, so folgt aus dem in der Anmerkung S. 18 bewiesenen Satz, daß:

$$\varDelta\iota v \operatorname{grad} P = \varDelta\iota v \operatorname{grad} F_R$$

ist. Wir haben also:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial P}{\partial R} = -\varDelta\iota v \operatorname{grad} F_R, \quad \text{für } R = a,$$

folglich:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial P}{\partial R} = -\varDelta F_R + \frac{\partial^2 F_R}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial F_R}{\partial R}, \quad \text{für } R = a.$$

Die Gleichungen (15) ergeben für $R = a$:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \operatorname{div}\boldsymbol{F} - \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{a}F_R,$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial R} = \operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial R} - \frac{\partial^2 F_R}{\partial R^2} - \frac{2}{a}\frac{\partial F_R}{\partial R}.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt, immer unter der Voraussetzung $R = a$:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R}{a}\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{2}{a}P + P^*\right) = \operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial R} - \varDelta F_R + \frac{1}{a}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \frac{1}{a}\frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{a^2}F_R.$$

Nun ist:

$$\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_k}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right) = \frac{x_k}{R}\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{R}\frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{x_j x_k}{R^3}\frac{\partial F_j}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial R}\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \frac{1}{R}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \frac{1}{R}\frac{\partial F_R}{\partial R},$$

$$\varDelta F_R = \varDelta\left(\frac{x_j}{R}F_j\right) = \frac{x_j}{R}\varDelta F_j + \frac{2}{R}\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{2x_j x_k}{R^3}\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{2x_j}{R^3}F_j =$$

$$= (\varDelta \boldsymbol{F})_R + \frac{2}{R}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \frac{2}{R}\frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{R^2}F_R.$$

Folglich für $R = a$:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R}{a}\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{2}{a}P + P^*\right) = \frac{\partial}{\partial R}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - (\Delta\boldsymbol{F})_R.$$

Diese Gleichung zeigt, daß, wenn die Funktionen P und P^* die hier vorausgesetzten Eigenschaften haben, der Ansatz (16) in der Tat nicht nur der Bedingung (13), sondern auch der Bedingung (14) genügt.

10 3. Ansatz zur Lösung durch Reihen nach Kugelfunktionen.

Wir gehen zum Beweise der Existenz unserer Lösung über. Es muß gezeigt werden, daß die Normalkomponente des Vektors $\boldsymbol{F}$ an der Kugel $R = a$ so bestimmt werden kann, daß zwei in Ω reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktionen P und P^* existieren, welche an der Kugel $R = a$ den Bedingungen (15) genügen. Wir führen zu diesem Nachweis Polarkoordinaten ein, indem wir $x_1 = R\cos\vartheta$, $x_2 = R\sin\vartheta\cos\varphi$, $x_3 = R\sin\vartheta\sin\varphi$ setzen und entwickeln die Funktionen F_j in Reihen von der folgenden Form:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= \sum_0^\infty{}^{(m)} \sum_0^m{}^{(n)} (c_{m,n}^{(1)}\cos n\varphi + s_{m,n}^{(1)}\sin n\varphi)\, P_{m,n}(\cos\vartheta),\\
F_2 &= \sum_0^\infty{}^{(m)} \sum_0^m{}^{(n)} [(c_{m,n}^{(2)} + c_{m,n}^{(3)})\cos n\varphi +\\
&\quad + (s_{m,n}^{(2)} + s_{m,n}^{(3)})\sin n\varphi]\, P_{m,n}(\cos\vartheta),\\
F_3 &= \sum_0^\infty{}^{(m)} \sum_0^m{}^{(n)} [(s_{m,n}^{(3)} - s_{m,n}^{(2)})\cos n\varphi +\\
&\quad + (c_{m,n}^{(2)} - c_{m,n}^{(3)})\sin n\varphi]\, P_{m,n}(\cos\vartheta).
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Hier sind:

$$P_{m,n}(x) = \frac{(m-n)!}{(2m)!}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^{m+n}(x^2-1)^m}{dx^{m+n}} =$$

$$= (-1)^n\frac{(m+n)!}{(2m)!}(1-x^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{d^{m-n}(x^2-1)^m}{dx^{m-n}}$$

die zugeordneten Kugelfunktionen. Sie sind miteinander durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P_{m,n}(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta} &= n\cot\vartheta\, P_{m,n} - (m-n)\, P_{m,n+1} = \\
&\qquad -n\cot\vartheta\, P_{m,n} + (m+n)\, P_{m,n-1} \\
\frac{\partial P_{m,o}}{\partial\vartheta} = -m P_{m,1}, \quad \frac{\partial P_{m,m}}{\partial\vartheta} &= m\cot\vartheta\, P_{m,m} = \\
&\qquad -m\cot\vartheta\, P_{m,m} + 2m\, P_{m,m-1}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
(m+1)\cos\vartheta\, P_{m,n} + \sin\vartheta\, \frac{\partial P_{m,n}}{\partial\vartheta} &= (2m+1)\, P_{m+1,n} \\
\sin\vartheta\, P_{m,m} &= P_{m+1,m+1}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

verbunden. $c_{m,n}^{(j)}$ und $s_{m,n}^{(j)}$ sind Funktionen von R und t. Wir nehmen an, daß sie der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial f_m}{\partial R} - \frac{m(m+1)}{R^2} f_m\right)$$

genügen, für $t=0$, $R>a$ verschwinden und bei $R\to\infty$ den Bedingungen: $\lim c_{m,n}^{(j)} = \lim s_{m,n}^{(j)} = 0$ genügen. Die durch die Reihen (17) definierten drei Vektorkomponenten befriedigen dann für $t>0$ und $R>a$, wenn gliedweise Differentiation erlaubt ist, die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{F}.$$

Wir zeigen jetzt, daß, wenn wir den Funktionen c und s folgende neue Bedingungen auferlegen, alle unsere Bedingungen erfüllt sind: für $1 \leqq n \leqq m-1$:

$$\left.\begin{aligned}
&(m^2-n^2)\, c_{m,n}^{(1)} + (m+n)(m+n+1)\, c_{m,n+1}^{(2)} - \\
&\qquad\qquad -(m-n)(m-n+1)\, c_{m,n-1}^{(3)} = 0, \\
&(m^2-n^2)\, s_{m,n}^{(1)} + (m+n)(m+n+1)\, s_{m,n+1}^{(2)} - \\
&\qquad\qquad -(m-n)(m-n+1)\, s_{m,n-1}^{(3)} = 0, \\
&m\, c_{m,o}^{(1)} + (m+1)\, c_{m,1}^{(2)} = 0, \quad c_{m,o}^{(2)} = 0, \\
&2m\, c_{m,m}^{(1)} - c_{m,m-1}^{(3)} = 0, \quad s_{m,o}^{(2)} = 0, \quad 2m\, s_{m,m}^{(1)} - s_{m,m-1}^{(3)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

104. Berechnung von $\boldsymbol{F}_R$, $\Delta\iota v \boldsymbol{F}$ und n rot $\boldsymbol{F}$ für $R=a$.

Wir berechnen unter der Voraussetzung, daß die Beziehungen (20) bestehen, F_R und $\Delta\iota v\, \boldsymbol{F}$ und berechnen außerdem die Normalkomponente von rot $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel $R=a$. Wir gehen bei der Berechnung von F_R auf die Einzelheiten ein, geben aber betreffs $\Delta\iota v F$ nur das Ergebnis der Rechnung. Wir haben:

$$F_R = \sum_0^\infty{}^{(m)} \sum_0^m{}^{(n)} \{[c^{(1)}_{m,n} \cos\vartheta \cos n\varphi + c^{(2)}_{m,n} \sin\vartheta \cos(n-1)\varphi +$$

$$+ c^{(3)}_{m,n} \sin\vartheta \cos(n+1)\varphi] P_{m,n} + [s^{(1)}_{m,n} \cos\vartheta \sin n\varphi +$$

$$+ s^{(2)}_{m,n} \sin\vartheta \sin(n-1)\varphi + s^{(3)}_{m,n} \sin\vartheta \sin(n+1)\varphi] P_{m,n}\} =$$

$$= \sum_0^\infty{}^{(m)} \Big\{ \sum_1^{m-1}{}^{(n)} \{[c^{(1)}_{m,n} P_{m,n} \cos\vartheta + c^{(2)}_{m,n+1} P_{m,n+1} \sin\vartheta +$$

$$+ c^{(3)}_{m,n-1} P_{m,n-1} \sin\vartheta] \cos n\varphi + [s^{(1)}_{m,n} P_{m,n} \cos\vartheta +$$

$$+ s^{(2)}_{m,n+1} P_{m,n+1} \sin\vartheta + s^{(3)}_{m,n-1} P_{m,n-1} \sin\vartheta] \sin n\varphi\} +$$

$$+ c^{(1)}_{m,0} P_{m,0} \cos\vartheta + c^{(2)}_{m,1} P_{m,1} \sin\vartheta + (c^{(1)}_{m,m} P_{m,m} \cos\vartheta +$$

$$+ c^{(3)}_{m,m-1} P_{m,m-1} \sin\vartheta) \cos m\varphi + c^{(3)}_{m,m} P_{m,m} \sin\vartheta \cos(m+1)\varphi +$$

$$+ (s^{(1)}_{m,m} P_{m,m} \cos\vartheta + s^{(3)}_{m,m-1} P_{m,m-1} \sin\vartheta) \sin m\varphi +$$

$$+ s^{(3)}_{m,m} P_{m,m} \sin\vartheta \sin(m+1)\varphi \Big\}.$$

Wir formen diesen Ausdruck um, indem wir mit Hilfe von (18) $P_{m,n-1}$ und $P_{m,n+1}$ durch $P_{m,n}$ und $\dfrac{\partial P_{m,n}}{\partial\vartheta}$ ausdrücken. Wenn wir beachten, daß aus (20) folgt:

$$c^{(1)}_{m,n} + \frac{n}{m-n} c^{(2)}_{m,n+1} + \frac{n}{m+n} c^{(3)}_{m,n-1} =$$

$$= (m+1)\left(\frac{1}{m+n} c^{(3)}_{m,n-1} - \frac{1}{m-n} c^{(2)}_{m,n+1}\right),$$

$$s^{(1)}_{m,n} + \frac{n}{m-n} s^{(2)}_{m,n+1} + \frac{n}{m+n} s^{(3)}_{m,n-1} =$$

$$= (m+1)\left(\frac{1}{m+n} s^{(3)}_{m,n-1} - \frac{1}{m-n} s^{(2)}_{m,n+1}\right)$$

$$1 \leqq n \leqq m-1$$

und außerdem:

$$c^{(1)}_{m,0} = -\frac{m+1}{m} c^{(2)}_{m,1}, \quad c^{(1)}_{m,m} + \frac{1}{2} c^{(3)}_{m,m-1} = \frac{m+1}{2m} c^{(3)}_{m,m-1},$$

$$s^{(1)}_{m,m} + \frac{1}{2} s^{(3)}_{m,m-1} = \frac{m+1}{2m} s^{(3)}_{m,m-1}$$

so können wir das Ergebnis in der folgenden Form schreiben:

$$F_R = \sum_0^\infty {}^{(m)} \left\{ \sum_1^{m-1} {}^{(n)} \left\{ \left(\frac{1}{m+n} c_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} c_{m,n+1}^{(2)} \right) \cos n\varphi + \right. \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{m+n} s_{m,n-1}^{(3)} - \frac{1}{m-n} s_{m,n+1}^{(2)} \right) \sin n\varphi \Big\} \Big\{ (m+1) P_{m,n} \cos\vartheta +$$

$$+ \frac{\partial P_{m,n}}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \Big\} - \frac{1}{m} c_{m,1}^{(2)} \Big\{ (m+1) P_{m,0} \cos\vartheta + \frac{\partial P_{m,0}}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2m} \{ c_{m,m-1}^{(3)} \cos m\varphi + s_{m,m-1}^{(3)} \sin m\varphi \} \Big\{ (m+1) P_{m,m} \cos\vartheta +$$

$$+ \frac{\partial P_{m,m}}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \Big\} + \{ c_{m,m}^{(3)} \cos(m+1)\varphi + s_{m,m}^{(3)} \sin(m+1)\varphi \} P_{m,m} \sin\vartheta \Big\}.$$

Wir wenden jetzt die Identitäten (19) an. Da wegen (20):

$$(2m+1) \left(\frac{c_{m,n-1}^{(3)}}{m+n} - \frac{c_{m,n+1}^{(2)}}{m-n} \right) = c_{m,n}^{(1)} - c_{m,n+1}^{(2)} + c_{m,n-1}^{(3)},$$

$$(2m+1) \left(\frac{s_{m,n-1}^{(3)}}{m+n} - \frac{s_{m,n+1}^{(2)}}{m+n} \right) = s_{m,n}^{(1)} - s_{m,n+1}^{(2)} + s_{m,n-1}^{(3)},$$

$$-\frac{2m+1}{m} c_{m,1}^{(2)} = c_{m,0}^{(1)} - c_{m,1}^{(2)}, \quad \frac{2m+1}{2m} c_{m,m-1}^{(3)} = c_{m,m}^{(1)} + c_{m,m-1}^{(3)},$$

$$\frac{2m+1}{2m} s_{m,m-1}^{(3)} = s_{m,m}^{(1)} + s_{m,m-1}^{(3)},$$

können wir das Ergebnis in der einfachen Form:

$$F_R = \sum_0^\infty {}^{(m)} S_{m+1} \tag{21}$$

schreiben, wo:

$$S_{m+1} = \sum_0^{m-1} {}^{(n)} P_{m+1,n} \Big[\left(c_{m,n}^{(1)} - c_{m,n+1}^{(2)} + c_{m,n-1}^{(3)} \right) \cos n\varphi +$$

$$+ \left(s_{m,n}^{(1)} - s_{m,n+1}^{(2)} + s_{m,n-1}^{(3)} \right) \sin n\varphi \Big] +$$

$$+ P_{m+1,0} \left(c_{m,0}^{(1)} - c_{m,1}^{(2)} \right) + P_{m+1,m} \Big[\left(c_{m,m}^{(1)} + c_{m,m-1}^{(3)} \right) \cos m\varphi +$$

$$+ \left(s_{m,m}^{(1)} + s_{m,m-1}^{(3)} \right) \sin m\varphi \Big]$$

$$+ P_{m+1,m+1} \left[c_{m,m}^{(3)} \cos(m+1)\varphi + s_{m,m}^{(3)} \sin(m+1)\varphi \right].$$

Man findet durch ähnliche Rechnungen:

$$\operatorname{div} F = \sum_0^\infty {}^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{m}{R} \right) S_{m+1} \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt:

$$\Delta\iota v\, F = \left(\operatorname{div} F - \frac{\partial F_R}{\partial R} - \frac{2}{R} F_R \right)_{R=a} = -\frac{1}{a} \sum_0^\infty {}^{(m)} (m+2) S_{m+1} \tag{23}$$

Wir betrachten schließlich:

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\frac{x_1}{a}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)+\frac{x_2}{a}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)+\frac{x_3}{a}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Die Berechnung geschieht ohne Schwierigkeit und man findet, ohne die Beziehungen (20) zu benutzen:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}{}^{(m)}\Big\{\sum_{2}^{m-1}{}^{(n)}\{[(m-n+1)\,c^{(3)}_{m,\,n-1}+(m+n+1)\,c^{(2)}_{m,\,n+1}-\\
-n\,c^{(1)}_{m,\,n}]\sin n\varphi-[(m-n+1)\,s^{(3)}_{m,\,n-1}+(m+n+1)\,s^{(2)}_{m,\,n+1}-\\
-n\,s^{(1)}_{m,\,n}]\cos n\varphi\}\,P_{m,\,n}(\cos\vartheta)-(m+1)\,s^{(2)}_{m,\,1}\,P_{m,\,0}+\\
+[m\,(c^{(2)}_{m,\,0}+c^{(3)}_{m,\,0})+(m+2)\,c^{(2)}_{m,\,2}-c^{(1)}_{m,\,1}]\sin\varphi\,P_{m,\,1}-\\
-[m\,(s^{(2)}_{m,\,0}+s^{(3)}_{m,\,0})+(m+2)\,s^{(2)}_{m,\,2}-s^{(1)}_{m,\,1}]\cos\varphi\,P_{m,\,1}-\\
-(c^{(3)}_{m,\,m-1}-m\,c^{(1)}_{m,\,m})\sin m\varphi\,P_{m,m}-\\
-(s^{(3)}_{m,\,m-1}-m\,s^{(1)}_{m,\,m})\cos m\varphi\,P_{m,m}\Big\}
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

10 5. Verifikation der Bedingungen.

Wir können leicht zeigen, daß, wenn eine Vektorfunktion $\boldsymbol{F}$ existiert, welche allen bis jetzt aufgestellten Bedingungen genügt, welche also die Differentialgleichung (4) befriedigt, für $t=0$, $R>a$ und für $t>0$, $R\to\infty$ verschwindet, an der Kugel $R=a$ Tangentialkomponenten hat, welche der Bedingung (11) genügen, und endlich die Bedingungen (20) erfüllt, daß dann tatsächlich die beiden Potentialfunktionen P und P^* existieren. Wir haben in der Tat:

$$P=\sum_{0}^{\infty}{}^{(m)}\,(S_{m+1})_{R=a}\,\frac{a^{m+2}}{R^{m+2}},\quad P^*=\sum_{0}^{\infty}{}^{(m)}\left(\frac{\partial S_{m+1}}{\partial R}\right)_{R=a}\frac{a^{m+2}}{R^{m+2}}.$$

Die Frage, welche wir schließlich zu beantworten haben, ist also die, ob es eine Vektorfunktion $\boldsymbol{F}$ gibt, die den oben aufgestellten Bedingungen genügt. Wir können diese Frage auch so formulieren: gibt es eine Vektorfunktion $\boldsymbol{F}$, welche der Differentialgleichung (4) und den Bedingungen (20) genügt und deren Tangentialkomponenten an der Kugel $R=a$ vorgeschriebene Werte annehmen? Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zunächst, daß die linken Seiten der Gleichungen (20) partiellen Differentialgleichungen vom Typus der Wärmeleitungsgleichung genügen und für $t=0$, $R>a$ sowie für $t>0$, $R\to\infty$ verschwinden. Wenn die Bedingungen (20) für $R=a$ erfüllt sind, so müssen sie unter diesen Umständen auch für $R > a$ erfüllt sein.* Wir bemerken ferner, daß durch die Beziehungen (20) nur eine der Komponenten von $\boldsymbol{F}$ bestimmt wird, während die übrigen unbestimmt bleiben. Die Bedeutung der Beziehungen (20) ist also, daß eine Komponente von $\boldsymbol{F}$ an der Kugel $R = a$ durch die anderen Komponenten ausgedrückt wird. Wenn wir zeigen können, daß die Beziehungen sich insbesondere so deuten lassen, daß sie die Normalkomponente von $\boldsymbol{F}$ an der Kugel $R = a$ durch die Tangentialkomponenten ausdrücken, während diese vollständig unbestimmt bleiben, so haben wir unseren Beweis zu Ende geführt.

Um nun zu zeigen, daß die Beziehungen (20) in keiner Weise die Tangentialkomponenten des Vektors $\boldsymbol{F}$ an der Kugel $R = a$ bestimmen, betrachten wir für $R = a$ die Ausdrücke (23) und (24) für $\Delta\iota v\,\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$. Wir behaupten, daß diese trotz der Beziehungen (20) frei wählbar sind. Um dies zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß wir die Größen $c^{(j)}_{m,n}$, $s^{(j)}_{m,n}$ (für $R = a$) so bestimmen können, daß (20) erfüllt ist und daß gleichzeitig (für $R = a$) die Koeffizienten der Reihen (23) und (24) vorgeschriebene Funktionen von t sind. Wenn wir uns der Kürze wegen auf die Hauptglieder, für die $1 \leqq n < m$ ist, beschränken und ferner nur die Größen c betrachten, so ergeben diese Bedingungen:

$$(m^2 - n^2)\,c^{(1)}_{m,n} + (m+n)(m+n+1)\,c^{(2)}_{m,n+1} - \\ - (m-n)(m-n+1)\,c^{(3)}_{m,n-1} = 0,$$

$$c^{(1)}_{m,n} - c^{(2)}_{m,n-1} + c^{(3)}_{m,n+1} = \alpha_{m,n}(t),$$

$$- n\,c^{(1)}_{m,n} + (m+n+1)\,c^{(2)}_{m,n+1} + (m-n+1)\,c^{(3)}_{m,n-1} = \beta_{m,n}(t),$$

wo $\alpha_{m,n}(t)$ und $\beta_{m,n}(t)$ vorgeschriebene Funktionen von t sind. Die Determinante dieses linearen Systemes ist:

$$-2m(m+1)(2m+1).$$

Sie kann also niemals verschwinden. Da auch die „pathologischen" Glieder in (23) und (24), d. h. die Glieder, bei denen in $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ $n = 0{,}1$ oder $n = m$ ist, willkürlich bestimmt werden können, so ist bewiesen, daß die Werte von $\Delta\iota v\,\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel $R = a$ in keiner Weise durch die Beziehungen (20) bestimmt sind.

---

* Es ist eine wohlbekannte Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \qquad (\mu > 0),$$

daß eine Lösung, welche für $r \geqq a$, $t \geqq 0$ regulär ist und für $r > a$, $t = 0$ und für $t > 0$, $r = a$ und $r = \infty$ verschwindet, für $r > a$, $t > 0$ identisch gleich Null ist.

Wir zeigen ferner kurz, daß durch die Werte von $\Delta\iota v\,\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel $R = a$ die Tangentialkomponenten dieses Vektors eindeutig bestimmt sind, präziser ausgedrückt, daß wenn eine auf der Kugel $R = a$ definierte Vektorfunktion dort stetige und stetig differenzierbare Tangentialkomponenten hat und wenn auf der Kugel sowohl $\Delta\iota v\,\boldsymbol{F} = 0$ wie $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F} = 0$ sind, daß dann die Tangentialkomponenten von $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel verschwinden. Wir haben in der Tat:

$$\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma} \int_s F_j\, dx_j,$$

wobei die Integration in positiver Richtung um die geschlossene Kurve s geführt wird, welche das Flächenelement σ umschließt. Aus $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$ $= 0$ folgt unmittelbar, daß

$$\int_s F_j\, dx_j = 0$$

für jede geschlossene Kurve s auf der Kugel. Daraus folgt wiederum, daß das Integral:

$$\int_{P^{(0)}}^{P} F_j\, dx_j,$$

wo $P^{(0)}$ ein fester und P ein variabler Punkt der Kugel $R = a$ ist, vom Wege unabhängig ist und also als eine offenbar stetige und stetig differenzierbare Funktion des Punktes P aufgefaßt werden kann. Wir setzen:

$$\int_{P^{(0)}}^{P} F_j dx_j = G(P).$$

Aus der Beziehung:

$$\Delta\iota v\,\boldsymbol{F} = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma} \int_s F_j\, T_j^{(n)} ds = 0$$

folgt andererseits für jede geschlossene Kurve s:

$$\int F_j T_j^{(n)}\, ds = 0.$$

Diese Beziehung läßt sich auch in der Form:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial x_j} T_j^{(n)}\, ds = 0 \tag{25}$$

schreiben, indem für jeden die Kugel tangierenden Vektor $\boldsymbol{T}$ gilt:

$$F_j T_j = \frac{\partial G}{\partial x_j} T_j.$$

Die Beziehung (25) entspricht der bekannten Gleichung:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial n} ds = 0$$

in der Theorie des ebenen Potentials und zeigt wie diese Gleichung, daß die Funktion G keine Maximum- oder Minimumstelle haben kann. Da dies auf der ganzen Kugel gilt, muß G konstant sein und also die Tangentialkomponenten des Vektors $\boldsymbol{F}$ auf der Kugel $R = a$ verschwinden.

Um nun auf der Kugel $R = a$ eine Vektorfunktion $\boldsymbol{F}$ zu konstruieren, welche vorgeschriebene Tangentialkomponenten hat und den Bedingungen (20) genügt, berechnet man zunächst aus den Tangentialkomponenten $\Delta\iota v \boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$. Man bildet dann, z. B. durch Reihenentwickelungen, die Vektorfunktion, welche den so gefundenen Werten von $\Delta\iota v \boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$ entspricht und welche außerdem den Bedingungen (20) genügt. Die Tangentialkomponenten dieser Vektorfunktion auf der Kugel $R = a$ nehmen notwendig die vorgeschriebenen Werte an. Abgesehen von der Stetigkeit, stetigen Differenzierbarkeit usw., welche wir für die Tangentialkomponenten des Vektors $\boldsymbol{F}$ zur Sicherung der Existenz von $\Delta\iota v \boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{n}$ rot $\boldsymbol{F}$ und der Konvergenz unserer Reihen voraussetzen müssen, sind also diese Tangentialkomponenten trotz der Beziehungen (20) frei wählbar.

Unser Beweis ist hiermit zu Ende geführt.

10 6. Neue Darstellung von F_R.

Wir zeigen jetzt, wie man, wenn (wie wir jetzt wissen) die Funktionen P und P^* existieren, die Normalkomponente des Vektors $\boldsymbol{F}$ an der Kugel $R = a$ bestimmen kann. Wir haben an dieser Kugel nach (15) S. 117:

$$\frac{dP}{dn} = \Delta\iota v \boldsymbol{F}.$$

Folglich, wegen (11) S. 116:

$$\frac{dP}{dn} = \int_0^t \Delta\iota v \{U(\tau) - \operatorname{grad} \Phi(\tau)\} d\tau.$$

Wir bezeichnen mit $\overline{\Phi}$ eine in Ω reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion, welche an der Kugel $R = a$ der Bedingung:

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \varDelta \iota v\, U$$

genügt. Da:

$$\varDelta \iota v \operatorname{grad} \Phi = \left(\varDelta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{2}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{R=a} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{R=a} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \Phi}{\partial R} + \Phi\right)\right\}_{R=a}$$

ist, so können wir, für beliebige R-Werte:

$$P = \int_0^t \left\{\bar{\Phi}(\tau) + \frac{R}{a}\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial R} + \frac{1}{a}\Phi(\tau)\right\} d\tau$$

setzen. Für $R = a$ erhalten wir hieraus:

$$F_R = P = \int_0^t \left\{U_j(\tau) n_j + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a}\Phi(\tau)\right\} d\tau. \tag{26}$$

10 7. Zusammenfassung.

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Um eine für $t > 0$, $R > a$ reguläre Lösung des Systems (1), (2) zu bestimmen, welche für $t = 0$, $R > a$ und für $t > 0$, $R \to \infty$ der Bedingung $u_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) und an der Kugel $R = a$ der Bedingung $u_j = U_j$ genügt, bestimmt man zunächst zwei außerhalb der Kugel reguläre, in unendlich entfernten Punkten verschwindende Potentialfunktionen Φ und $\bar{\Phi}$, die an der Kugel $R = a$ den Bedingungen:

$$\frac{d\Phi}{dn} = U_n\,, \quad \frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \varDelta \iota v\, \boldsymbol{U}$$

genügen. Die Normale wird hier nach außen gezogen. Die Operation $\varDelta \iota v\, U$ ist durch die Gleichung:

$$\varDelta \iota v\, U = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \int_s T_j^{(n)} U_j\, ds = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - n_j n_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{2}{a} n_j U_j$$

definiert, wo σ ein Flächenelement der Kugel $R = a$, s die Randkurve von σ und $T_j^{(n)}$ die Komponenten eines die Kugel tangierenden, gegen das Element ds der Kurve s senkrechten, von σ nach außen gezogenen Vektors von der Länge 1 ist.

Nachdem Φ und $\bar{\Phi}$ bestimmt worden sind, sucht man eine für $t > 0$, $R > a$ reguläre, für $t = 0$, $R > a$ und $t > 0$, $R \to \infty$ verschwindende Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{F}, \qquad \left(\nu = \frac{\mu}{\varrho}\right)$$

die an der Kugel $R = a$ den Wert:

$$\int_0^t \left\{ \boldsymbol{U}(\tau) - \operatorname{grad} \Phi + \boldsymbol{n} \left(U_n(\tau) + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right) \right\} d\tau$$

annimmt. Die Tangentialkomponenten dieses Vektors haben die Werte:

$$T_j \int_0^t \left(U_j(\tau) - \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial x_j} \right) d\tau$$

was mit (11) übereinstimmt. Die Normalkomponente hat wegen (9) den Wert:

$$\int_0^t \left(U_n(\tau) + \bar{\Phi}(\tau) + \frac{1}{a} \Phi(\tau) \right) d\tau,$$

was mit (26) übereinstimmt.

Man bestimmt schließlich eine für $t > 0$, $R > a$ reguläre, in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion Φ^*, die an der Kugel $R = a$ den Wert:

$$\nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

annimmt. Dann ist an derselben Kugel:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} = \nu n_j \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_k} - \nu n_k \Delta F_k$$

und die Lösung des Problems ist:

$$u_j = \frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Phi + \Phi^* - \nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right), \quad p = -\varrho \frac{\partial}{\partial t}(\Phi + \Phi^*).$$

10₈. Erste Anwendung.

Um die Anwendung dieses Satzes zu illustrieren, behandeln wir zwei spezielle Fälle, von denen der erste trivial ist, während der zweite hydrodynamisches Interesse besitzt.

$\varphi\,(x_j, t)$ sei eine für $t > 0$, $R > a$ reguläre, für $t = 0$, $R > a$ und für $t > 0$, $R \to \infty$ verschwindende Potentialfunktion. Wir setzen in der in 10, 1 formulierten Aufgabe:

$$U_j = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_{R=a}.$$

Die Lösung des hiermit gegebenen Problems ist

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Wir bestätigen, daß man aus unserer Regel dieses Ergebnis bekommt. Wir haben:

$$U_n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R=a}, \quad \varDelta\iota v\, \boldsymbol{U} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)_{R=a},$$

also:

$$\Phi = \varphi, \quad \bar{\Phi} = -\frac{R}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial R} - \frac{1}{a}\varphi.$$

Folglich:

$$\left(U_j - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)_{R=a} = 0, \quad \left(U_n + \bar{\Phi} + \frac{1}{a}\Phi\right)_{R=a} = 0.$$

Also:

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \Phi^* = 0.$$

Also schließlich:

$$u_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

10 9. Zweite Anwendung.

In unserem zweiten Beispiel nehmen wir an, daß die Größen $U_j(t)$ an der Kugel $R = a$ vom Orte unabhängig sind. Wir haben unter diesen Umständen für $R = a$:

$$\frac{d\Phi}{dn} = U_n = \frac{1}{a}x_j U_j, \quad \frac{d\bar{\Phi}}{dn} = \varDelta\iota v\, \boldsymbol{U} = -\frac{2}{a^2}x_j U_j,$$

folglich:

$$\Phi = -\frac{1}{2}x_j U_j \frac{a^3}{R^3}, \quad \bar{\Phi} = x_j U_j \frac{a^2}{R^3}$$

und, für $R = a$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{3}{2}\int_0^t \boldsymbol{U}(\tau)\,d\tau.$$

Wir sind also zu der Aufgabe geführt worden, eine für $t > 0$, $R > a$ reguläre, für $t = 0$, $R > a$ und für $t > 0$, $R \to \infty$ verschwindende Lösung der Vektorgleichung (4) zu bestimmen, die an der Kugel $R = a$ einen nur von der Zeit abhängigen Wert annimmt. Die Substitution:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{R} f(R,t)$$

führt die Differentialgleichung (4) in die einfachere Gleichung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial R^2}$$

über. Eine Lösung dieser Gleichung, welche für $t > 0$, $R > a$ regulär ist, für $t = 0$, $R > a$ und für $t > 0$, $R \to \infty$ verschwindet und an der Kugel $R = a$ den Wert:

$$\frac{3}{2} a \int_0^t \boldsymbol{U}(\tau)\, d\tau$$

annimmt, ist (vgl. hierzu unsere Ausführungen im fünften Paragraphen S. 40ff.):

$$\boldsymbol{f} = \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}}\, a \int_0^t (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} \boldsymbol{U}(\tau)\, d\tau\,.$$

Sie ergibt:

$$\boldsymbol{F} = \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}}\, dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} \boldsymbol{U}(\tau)\, d\tau\,.$$

Wir erhalten hieraus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \frac{x_j}{R}\frac{\partial F_j}{\partial R} &= -\frac{1}{R^2} x_j F_j - \\
&\quad - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{a x_j}{R} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial R^2} \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}}\, dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_j(\tau)\, d\tau = \\
&\quad - \frac{1}{R^2} x_j F_j + \frac{3 x_j}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t^{(0)}} \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}}\, dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_j(\tau)\, d\tau = \\
&\quad - \frac{1}{R^2} x_j F_j - \frac{3 x_j}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \int_0^t U_j(t^{(0)}) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{1/2}}\, dt^{(0)}
\end{aligned}$$

und für $R = a$:

$$\nu \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \Phi^* = -\frac{3\nu x_j}{2a^2} \left\{ \int_0^t U_j(\tau)\, d\tau + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\, dt^{(0)} \right\}.$$

Folglich:

$$\Phi^* = -\frac{3\nu x_j}{2R^3}\left\{a\int_0^t U_j(\tau)\,d\tau + \frac{a^2}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\,dt^{(0)}\right\}.$$

10 10. Das Problem von Boussinesq.

Das hydrodynamische Problem, das zu der eben gelösten Randwertaufgabe führt, ist das folgende. In einer zähen Flüssigkeit, welche sonst den ganzen Raum erfüllt, befindet sich ein kugelförmiger Körper. Bis zu dem Momente $t = 0$ ruht die Flüssigkeit und der Körper. Bei $t = 0$ fängt der Körper eine translatorische Bewegung an. Man will die dadurch hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit und den Widerstand derselben gegen die Bewegung des Körpers berechnen.

Wir wenden zunächst ein im Raume festes Bezugssystem an. Für die Bewegung der Flüssigkeit gelten dann die Gleichungen $\mathrm{I^a}$ S. 12 (wo jedoch $X_j = 0$ zu setzen ist) und die Kontinuitätsbedingung. Die Nebenbedingungen sind: für $t = 0$ in der ganzen Flüssigkeit $u_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$; für $t > 0$ in unendlicher Ferne $u_j = 0$, an der Oberfläche der Kugel $u_j = U_j$, wenn $U_j(t)$ die Komponenten der Geschwindigkeit derselben sind. Wir transformieren jetzt die Koordinaten (aber nicht die Geschwindigkeitskomponenten), indem wir ein Bezugssystem einführen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, während die Achsen mit den festen Achsen parallel sind. Wir erhalten so die Gleichungen:

$$\varrho\frac{\partial u_j}{\partial t} - \mu\,\Delta u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j} - \varrho(u_k + U_k)\frac{\partial u_j}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

mit den Nebenbedingungen: für $t = 0$, $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > a$: $u_j = 0$; für $t > 0$, $R \to \infty$: $u_j = 0$, für $R = a$: $u_j = U_j$. Wenn wir nach dem Vorgange von Stokes die quadratischen Glieder vernachlässigen, werden die obigen Differentialgleichungen mit unseren Gleichungen (1), (2) identisch. Die in unserem zweiten Beispiele entwickelten Formeln geben uns also die Lösung unserer Aufgabe, soweit sich diese Aufgabe auf die Bewegung der Flüssigkeit bezieht.

Um die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte zu berechnen, haben wir die Integrale:

$$\int\limits_{R=a}\left(-p n_j + \mu n_k\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right)dS$$

auszuwerten. Wegen der Kontinuitätsbedingung ist das Integral:

$$\int\limits_{R=A} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dS \qquad (A \geqq a)$$

von A unabhängig, da für $A > B \geqq a$:

$$\int\limits_{R=A} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dS - \int\limits_{R=B} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dS = \int\limits_{A>R>B} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\, d\omega = 0\,.$$

Da:

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_{R=A} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dS = 0\,,$$

so folgt:

$$\int\limits_{R=a} n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\, dS = 0$$

und also:

$$\int\limits_{R=a}\left(-\,p n_j + \mu n_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right) dS = \int\limits_{R=a}\left(p n_j + \mu n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dS\,.$$

Wir haben (vgl. S. 129, 130 und 132):

$$p = -\,\varrho \frac{\partial(\Phi + \Phi^*)}{\partial t} = \varrho \frac{x_j}{R^3}\left\{\frac{1}{2}\, a^3 U'_j(t) + \frac{3}{2}\, \nu a\, U_j(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\, a^2 \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\, \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t - t^{(0)}}}\, dt^{(0)}\right\} \qquad \left(U'_j = \frac{d\,U_j}{dt}\right).$$

Da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{U_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\, dt^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t U_j(t-\tau)\, \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{U_j(0)}{\sqrt{t}} + \int\limits_0^t \frac{U'_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\, dt^{(0)}\,,$$

so folgt:

$$-\int\limits_{R=a} p n_j dS = -\,\frac{2}{3}\,\pi \varrho a^3 U'_j(t) - 2\pi\mu a \left\{ U_j(t) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{U_j(0)}{\sqrt{t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int\limits_0^t \frac{U'_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\, dt^{(0)}\right\}.$$

Wir haben ferner:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{a}{R} \left(\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{R^2}\right) \int_0^t U_k(t^{(0)}) (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} +$$

$$+ \frac{3a\nu}{4\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{R^3} \left(\delta_{jk} - \frac{3x_j x_k}{R^2}\right) \int_0^t (R-a) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{(t-t^{(0)})^{3/2}} dt^{(0)} \int_0^{t^{(0)}} U_k(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{3a\nu}{2\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{R^2} \left(\delta_{jk} - \frac{3x_j x_k}{R^2}\right) \int_0^t U_k(t^{(0)}) \frac{e^{-\frac{(R-a)^2}{4\nu(t-t^{(0)})}}}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)}.$$

Hieraus:

$$\mu \int_{R=a} \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial F_j}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\right) dS = -4\pi\mu a U_j(t) - \frac{4a^2}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{U'_j(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)}.$$

Die aus Φ und Φ^* hervorgehenden Glieder von u_j geben keinen Beitrag zur Resultante. Die Resultante der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, ist also:

$$-\int_{R=a} \left(p\boldsymbol{u} - \mu \frac{d\boldsymbol{u}}{dn}\right) dS = -\frac{2}{3}\pi\varrho a^3 \boldsymbol{U}'(t) - 6\pi\mu a \left\{ \boldsymbol{U}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\boldsymbol{U}'(t^{(0)})}{\sqrt{t-t^{(0)}}} dt^{(0)} \right\} - 2a^2 \sqrt{\frac{\mu\pi\varrho}{t}}\, \boldsymbol{U}(0).$$

Der Betrag der Resultante wird für $t = 0$ unendlich groß ausfallen, wenn nicht $U(0) = 0$ ist. Wir sehen hieraus, daß es nicht möglich ist, einem Körper in einer zähen Flüssigkeit plötzlich eine endliche Geschwindigkeit zu geben. Wir setzen also $U(0) = 0$. Die so modifizierte Formel wurde zuerst von Boussinesq gefunden.

Das Problem der Kugel enthält als speziellen Fall das Problem der ebenen Wand. Die Regel, welche wir oben zur Lösung des Problems der Kugel gegeben haben, kann auch zur Lösung des Problems der ebenen Wand verwendet werden.

10₁₁. Das zweidimensionale Problem.

Mit dem Problem der Kugel eng verwandt ist endlich die entsprechende zweidimensionale Aufgabe, also das Problem des Kreiszylinders. Die Methode, welche uns die Lösung des Problems der Kugel gab, läßt sich auch zur Lösung des Problems des Kreiszylinders benutzen. Die Rechnungen sind im zweidimensionalen Falle wesentlich einfacher als im dreidimensionalen. Wir gehen deshalb nicht auf diese Rechnungen ein, sondern begnügen uns damit, ihr Ergebnis in dem folgenden Satz zusammenzufassen:

Um das System:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

für $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > a$, $t > 0$ und mit den Nebenbedingungen: für $t = 0$, $r > a$ und für $t > 0$, $r \to \infty$: $u_j = 0$; für $r = a$: $u_j = U_j$, zu lösen, bestimmt man zuerst zwei für $r > a$ reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Lösungen $\overline{\Phi}$ und Φ der Laplaceschen Gleichung mit zwei Veränderlichen, welche für $r = a$ den Bedingungen:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U_n - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n d\vartheta,$$

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dn} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} = U_\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\vartheta d\vartheta$$

genügen, wo U_n und U_ϑ die durch die Beziehungen $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$, $U_n = U_1\cos\vartheta + U_2\sin\vartheta$, $U_\vartheta = U_2\cos\vartheta - U_1\sin\vartheta$ festgelegten Bedeutungen haben. Man bestimmt dann eine für $t > 0$, $r > a$ reguläre, für $t = 0$, $r > a$ und für $t > 0$, $r \to \infty$ verschwindende Lösung der Vektorgleichung:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \nu \Delta f_j, \qquad (j = 1, 2)$$

welche für $r = a$ den Bedingungen genügt:

$$f_1 = \int_0^t \left\{ U_1(\tau) - \frac{\cos\vartheta}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\tau) d\vartheta + \frac{\cos\vartheta}{a}\frac{\partial\overline{\Phi}(\tau)}{\partial\vartheta} + \frac{\sin\vartheta}{a}\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\vartheta} \right\} d\tau,$$

$$f_2 = \int_0^t \left\{ U_2(\tau) - \frac{\sin\vartheta}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n(\tau) d\vartheta + \frac{\sin\vartheta}{a}\frac{\partial\overline{\Phi}(\tau)}{\partial\vartheta} - \frac{\cos\vartheta}{a}\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\vartheta} \right\} d\tau.$$

Man bestimmt schließlich eine für $r > a$ reguläre, in unendlicher Ferne verschwindende Lösung Φ^* der Laplaceschen Gleichung, die auf dem Kreise $r = a$ den Wert $\nu \operatorname{div} \boldsymbol{f}$ annimmt. Dann gilt an demselben Kreise:

$$\frac{d\Phi^*}{dn} = \nu \frac{d}{dn} \operatorname{div} f - \frac{d\Phi}{dn} - \frac{1}{a} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \vartheta}$$

und die Lösung des Problems ist:

$$u_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \Phi + \Phi^* + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(t) d\vartheta \cdot \log r - \nu \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right\}, \quad (j, k = 1, 2)$$

$$p = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Phi + \Phi^* + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(t) d\vartheta \cdot \log r \right\}.$$

§ 11. Die Stokesschen Gleichungen. Ein Ellipsoid mit konstanter Geschwindigkeit. Die Formeln von Oberbeck.

Unter den speziellen hydrodynamischen Randwertaufgaben, deren Lösung bekannt ist, gibt es eine, die ein so großes Interesse besitzt, daß wir hier einen Bericht darüber geben wollen. Es ist die zuerst von Oberbeck behandelte Aufgabe, eine Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

zu bilden, welche außerhalb des Ellipsoids:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{2}$$

regulär ist, in unendlicher Ferne den Bedingungen $u_j = 0$ und am Ellipsoid den Bedingungen $u_j = U_j$ genügt, wo U_j Konstanten sind.

Durch die Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda} = 1 \tag{3}$$

und die Bedingung $\lambda > 0$ definieren wir eine Funktion $\lambda(x_1, x_2, x_3)$. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{x_3^2}{(c^2+\lambda)^2} &= D, \\ \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} &= W(\lambda), \\ \frac{d \log W(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right\} &= E(\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir erhalten aus (3) durch Differenzieren:

$$D\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}=\frac{2x_1}{a^2+\lambda}\ \text{usw.}$$

Folglich:

$$\frac{x_1}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{x_2}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\frac{x_3}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}=2. \tag{5}$$

$$D\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}\right)^2\right\}=4. \tag{6}$$

Nochmaliges Differenzieren der Gleichungen (3) ergibt:

$$D\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1{}^2}=\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{4x_1}{(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+2\left\{\frac{x_1{}^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{x_2{}^2}{(b^2+\lambda)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{x_3{}^2}{(c^2+\lambda)^3}\right\}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2\ \text{usw.}$$

Folglich wegen (5) und (6):

$$D\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j^2}=D\Delta\lambda=4E(\lambda)=4\frac{\partial\log W(\lambda)}{\partial\lambda}. \tag{7}$$

Wir betrachten jetzt die beiden Funktionen:

$$\Omega(x_1,x_2,x_3)=\pi abc\int_\lambda^\infty\left(\frac{x_1{}^2}{a^2+s}+\frac{x_2{}^2}{b^2+s}+\frac{x_3{}^2}{c^2+s}-1\right)\frac{ds}{W(s)},$$

$$\chi(x_1,x_2,x_3)=abc\int_\lambda^\infty\frac{ds}{W(s)}.$$

Wir haben:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}=2\pi abc\int_\lambda^\infty\frac{x_1\,ds}{(a^2+s)\,W(s)}\quad\text{usw.}$$

und:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1{}^2}=2\pi abc\left\{\int_\lambda^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\,W(s)}-\frac{1}{W(\lambda)}\frac{x_1}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right\}\quad\text{usw.}$$

Folglich wegen (4) und (5):

$$\Delta\Omega=4\pi abc\left\{\int_\lambda^\infty\frac{1}{W(s)}\frac{d}{ds}\log W(s)\,ds-\frac{1}{W(\lambda)}\right\}=0.$$

Ferner wegen (6) und (7):

$$\Delta\chi=\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\Delta\lambda+\frac{\partial^2\chi}{\partial\lambda^2}\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}\right)^2\right\}=$$
$$-\frac{4abc}{W(\lambda)D}\left\{E(\lambda)-\frac{\partial}{\partial\lambda}\log W(\lambda)\right\}=0.$$

Wir versuchen unsere Aufgabe durch den Ansatz:

$$u_j = A_k^{(1)}\left(\delta_{jk}\chi - x_k\frac{\partial\chi}{\partial x_j}\right) + A_k^{(2)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_j\partial x_k}$$

zu lösen. Dieser Ansatz befriedigt für alle konstanten Werte von $A_k^{(1)}$ und $A_k^{(2)}$ die Gleichung $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$. Wir haben ferner:

$$\Delta u_j = -2A_k^{(1)}\frac{\partial^2\chi}{\partial x_j\partial x_k}.$$

Die Bewegungsgleichungen sind also erfüllt, wenn wir:

$$p = -2\mu A_k^{(1)}\frac{\partial\chi}{\partial x_k} + \text{Konst.}$$

setzen. Auf dem Ellipsoid (2) haben wir $\lambda = 0$ und:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1{}^2} = 2\pi abc\left\{\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)W(s)} - \frac{x_1}{a^3bc}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\right\},\quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial x_2} = -\frac{2\pi x_2}{b^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\text{usw.},$$

$$x_k\frac{\partial\chi}{\partial x_k} = -x_k\frac{\partial\lambda}{\partial x_k}.$$

Wir sehen hieraus, daß die Bedingungen: $u_j = U_j$ am Ellipsoide erfüllt sind, wenn wir den Konstanten $A_k^{(1)}$ und $A_k^{(2)}$ die Bedingungen:

$$A_1^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi}A_1^{(1)},\quad A_2^{(2)} = \frac{b^2}{2\pi}A_2^{(1)},\quad A_3^{(2)} = \frac{c^2}{2\pi}A_3^{(1)},$$

$$abc\left\{A_1^{(1)}\int_0^\infty\frac{ds}{W(s)} + 2\pi A_1^{(2)}\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)W(s)}\right\} = U_1 \text{ usw.}$$

auferlegen. Wir setzen:

$$abc\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)W(s)} = P_1 \text{ usw.},\quad abc\int_0^\infty\frac{ds}{W(s)} = \chi_{\lambda=0} = \chi_0$$

und erhalten:

$$A_1^{(1)} = \frac{U_1}{\chi_0 + a^2P_1},\quad A_2^{(1)} = \frac{U^2}{\chi_0 + b^2P_2},\quad A_3^{(1)} = \frac{U_3}{\chi_0 + c^2P_3}.$$

Das Problem ist hiermit gelöst. Wenn wir über die gefundene Bewegung der Flüssigkeit eine translatorische Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit $u_j = -U_j$ überlagern, erhalten wir die Bewegung einer Flüssigkeit, die mit konstanter Geschwindigkeit $-U$ an einem ellipsoidförmigen Körper vorüberströmt. Um die Resultante der Kräfte zu berechnen, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, benutzen wir dieselbe Methode wie im 7. Paragraphen. Wir berechnen das Integral:

$$\int\left(-p n_j + \mu n_k\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right) dS,$$

wo die Integration über eine mit dem Ellipsoide konzentrische Kugel erstreckt wird. Wir haben für große R-Werte:

$$\lambda = R^2, \quad \Omega = -\frac{4\pi abc}{3R}, \quad \chi = \frac{2abc}{R}$$

und erhalten mit Hilfe dieser Werte leicht:

$$\int\left(-p n_j + \mu n_k\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\right) dS = -16\pi\mu abc A_j^{(1)}.$$

Die Komponente der Resultante in der Richtung der x_1-Achse hat also den Betrag:

$$-\frac{16\pi\mu abc\, U_1}{\chi_0 + a^2 P_1}.$$

Dies ist die Formel von Oberbeck.

Wenn wir $a = b = c$ setzen, so erhalten wir: $P_k = \frac{2}{3}$, $\chi_0 = 2a^2$. Die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte ist in diesem Falle also: $-6\pi\mu a U$. Wir haben hiermit die Stokessche Formel wiedergefunden. Mit anderen speziellen Fällen der Formel von Oberbeck werden wir uns beschäftigen, nachdem wir die Formel erweitert haben.

II.

Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den Stokesschen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung.

§ 12. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand.

12 1. Berechnung des Widerstandes.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß die Flüssigkeit den Halbraum $x_3 > 0$ erfüllt. In dieser Flüssigkeit soll sich ein kugelförmiger Körper mit konstanter Geschwindigkeit U in beliebiger Richtung bewegen. Unter der (offenbar im allgemeinen nicht genau gültigen) Voraussetzung, daß die Bewegung der Flüssigkeit als stationär aufzufassen ist, wollen wir diese Bewegung und die Resultante der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kräfte berechnen. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen x_3-Achse gegen die ebene Wand senkrecht ist und den Mittelpunkt der Kugel enthält, während die $x_1 x_2$-Ebene mit der Ebene der Wand zusammenfällt, und die x_1- und x_2-Achsen beliebige, aber feste Richtungen haben. In bezug auf dieses System ist die Bewegung der Flüssigkeit eine Strömung mit den konstanten, d. h. vom Orte unabhängigen Komponenten $-U_1$, $-U_2$, 0 und eine darüber gelagerte Bewegung, deren Komponenten wir mit u_j bezeichnen wollen. Indem wir mit Stokes die in den Größen U und u quadratischen Glieder vernachlässigen, erhalten wir wie in § 9, 1 S. 97 zur Bestimmung der Größen u_j die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

mit den Nebenbedingungen: für $x_3 = 0$ und für $x_3 \to \infty$: $u_j = 0$; an der Oberfläche der Kugel $r = a$: $u_j = U_j$. Wir haben hier:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - x_3^{(0)})^2} = r$$

gesetzt, wo $x_3^{(0)}$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der festen Wand ist. Wir setzen im folgenden:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_3^{(0)})^2} = \bar{r}.$$

Wir haben im 9. Paragraphen die Bewegung berechnet, welche eine stationär bewegte Kugel in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit hervorruft. Für die Komponenten jener Flüssigkeitsbewegung erhielten wir S. 110 (23) mit unseren jetzt gebrauchten Bezeichnungen:

$$\frac{3}{2}\frac{a}{r} U_j - \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(3r + \frac{a^2}{r}\right) \tag{2}$$

und für den Druck:

$$p = -\frac{3}{2} a \mu U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}.$$

Diese Bewegung wird in dem jetzt vorliegenden Falle durch die feste Wand gestört. Man kann in gewissem Sinne sagen, daß sich über diese Bewegung eine durch Reflexion an der festen Wand erhaltene lagert. Um die zurückgeworfene Bewegung zu berechnen, haben wir eine für $x_3 > 0$ reguläre Lösung des Systems (1) zu suchen, die den Randbedingungen:

$$\text{für } x_3 = 0: \quad u_j = -\frac{3}{2}\frac{a}{r} U_j + \frac{a}{4} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(3r + \frac{a^2}{r}\right), \tag{3}$$

$$\text{für } x_3 \to \infty: \qquad u_j = 0$$

genügt. Wie wir jene Lösung in der Gestalt von Doppelintegralen darstellen können, haben wir im 9. Paragraphen S. 113 gesehen. Es gibt aber auch eine einfache, integrallose Darstellung dieser Lösung. Wenn wir mit u_j^* die Komponenten der zurückgeworfenen Strömung bezeichnen, so haben wir:

für $j = 1, 2$:

$$\left.\begin{aligned}
u_j^* = &-\frac{3}{2}\frac{a}{\bar{r}} U_j + \frac{a}{4}\sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\Big\{3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} + \frac{6 x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} + \\
&+ 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}\Big\} + \frac{a}{4} U_3 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\Big\{3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} - \frac{6 x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}\Big\},\\
&\text{ferner:}\\
u_3^* = &-\frac{9}{2}\frac{a}{\bar{r}} U_3 - \frac{a}{4}\sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_k}\Big\{3\bar{r} + \frac{a^2}{\bar{r}} - \frac{6 x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - \\
&- 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}\Big\} - \frac{a}{2}\sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\frac{3(x_3^{(0)} - x_3)}{\bar{r}} + a^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}\Big\} + \\
&+ \frac{a}{4} U_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Big\{15\bar{r} + \frac{5a^2}{\bar{r}} - \frac{6 x_3 x_3^{(0)}}{\bar{r}} - 2a^2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}\Big\} - 3aU_3 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\bar{r}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Für den zugehörigen Druck p^* gilt:

$$\left.\begin{aligned} p^* = \frac{1}{2}\mu a \sum_{k=1,2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{3}{r} + 6x_3^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} + 2a^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right\} + \\ + \frac{1}{2}\mu a U_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{3}{r} - 6x_3^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} - 2a^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Man verifiziert leicht, daß u_j^* und p^* dem System (1) und den Randbedingungen (3) genügen.

Wenn wir $a/x_3^{(0)}$, also das Verhältnis des Kugelradius zum Abstand des Kugelmittelpunktes von der Wand so klein annehmen, daß wir Glieder von der Größenordnung $a^2/x_3^{(0)2}$ neben 1 vernachlässigen dürfen, so haben wir im Mittelpunkt der Kugel, also im Punkte $0, 0, x_3^{(0)}$, mit genügender Annäherung:

$$u_k^* = -\frac{9}{16}\frac{a}{x_3^{(0)}} U_k \ (k = 1, 2), \quad u_3^* = -\frac{9}{8}\frac{a}{x_3^{(0)}} U_3.$$

Die Resultante der von der Flüssigkeit infolge der Bewegung (2) auf die Kugel ausgeübten Kräfte ist nach 9, 5 S. 111 $-6\pi\mu a \boldsymbol{U}$. Die von der Bewegung (4) abhängigen Kräfte haben nach dem Satze von Faxén S. 113 die Resultante:

$$6\pi\mu a u^*(P^{(0)}) + \pi a^3(\operatorname{grad} p^*)_{P^{(0)}},$$

wenn wir mit $P^{(0)}$ den Mittelpunkt der Kugel bezeichnen. Ein Blick auf den Ausdruck (5) für p^* zeigt sofort, daß das letzte Glied des obigen Ausdruckes neben dem ersten zu vernachlässigen ist. Die Resultante der von u^* abhängigen Kräfte auf die Kugel hat also die Komponenten:

$$-\frac{27}{8}\pi\mu\frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_1, \quad -\frac{27}{8}\pi\mu\frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_2, \quad -\frac{27}{4}\pi\mu\frac{a^2}{x_3^{(0)}} U_3.$$

Die Flüssigkeit übt also auf die Kugel Kräfte aus, deren Resultante in der hier angestrebten Näherung die Komponenten:

$$-6\pi\mu a U_1\left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right), \quad -6\pi\mu a U_2\left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right),$$
$$-6\pi\mu a U_3\left(1 + \frac{9}{8}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right)$$

hat. Dieses Ergebnis rührt von H. A. Lorentz her.

12 2. Eine Spiegelungsmethode von H. A. Lorentz.

Wenn man die Annäherung weiter treiben will, so muß man beachten, daß die aus (2) und (4) zusammengesetzte Bewegung nicht der Bedingung $u_j = U_j$ an der Oberfläche der Kugel genügt. Mit anderen Worten: die reflektierte Bewegung u^* muß ihrerseits an der Oberfläche der Kugel reflektiert werden. Die so erhaltene, doppelt reflektierte Bewegung wird wiederum von der Ebene $x_3 = 0$ zurückgeworfen. So kann man fortfahren. Wir wissen aus § 9, daß die Randwertaufgaben, zu welchen man durch dieses Verfahren geführt wird, mit Hilfe von Doppelintegralen gelöst werden können. Die Spiegelung in der Ebene $x_3 = 0$ kann man indessen mit Hilfe eines von H. A. Lorentz gefundenen Satzes viel einfacher ausführen. Nehmen wir an, daß wir eine Lösung u_j, p des Systemes (1) kennen. Man bestätigt leicht, daß die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u_j^{(S)} &= -u_j - 2x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \frac{x_3^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2) \\ u_3^{(S)} &= u_3 - 2x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{x_3^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ p^{(S)} &= p + 2x_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} - 4\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

eine neue Lösung $u_j^{(S)}, p^{(S)}$ des Systemes (1) definieren. Wenn die Größen u_j, p einen singulären Punkt $x_j^{(0)}$ ($x_3^{(0)} > 0$) haben, so ist dieser Punkt offenbar auch für $u_j^{(S)}, p^{(S)}$ singulär. Man kann in diesem Fall, wenn $x_j^{(0)}$ der einzige singuläre Punkt der Funktionen u_j, p ist, von der Lösung des Systemes (1) ausgehen, die man aus u_j, p durch Fortsetzung über die Grenzebene $x_3 = 0$ hinaus und durch Spiegelung (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) der so für $x_3 < 0$ erhaltenen Bewegung an der $x_1 x_2$-Ebene erhält. Wenn wir für einen Augenblick die durch das erwähnte Verfahren aus u_j, p erhaltene Bewegung mit $\bar{u}_j, \bar{p}$ bezeichnen, so haben wir offenbar auf der Ebene $x_3 = 0$: $\bar{u}_1 = u_1$, $\bar{u}_2 = u_2$, $\bar{u}_3 = -u_3$. Die Lösung $\bar{u}_j^{(S)}, \bar{p}^{(S)}$ des Systemes (1), welche wir mit Hilfe der Formeln (6) aus $\bar{u}_j, \bar{p}$ herstellen können, erfüllt also auf der Ebene $x_3 = 0$ die Bedingungen $\bar{u}_j^{(S)} = -u_j$ ($j = 1, 2, 3$). Sie ist überdies für $x_3 > 0$ regulär. Sie stellt also die von der Ebene $x_3 = 0$ zurückgeworfene Strömung u_j, p dar. — Man bestätigt leicht, daß die Größen u_j^*, p^* in dieser Weise aus den Größen (2) abgeleitet werden können.

Mit Hilfe der hier dargelegten Methode haben Stock und Faxén eingehend den Fall untersucht, daß die Kugel sich parallel zur Wand bewegt und also $U_3 = 0$ ist. Wir werden im folgenden (S. 194) eine

Formel von Faxén mitteilen, welche in einem Grenzfalle den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel gibt, den man aus dem System (1) bei Berücksichtigung von Gliedern von der Größenordnung $a^5/x_3^{(0)5}$ erhalten würde.

§ 13. Eine Kugel oder ein Kreiszylinder zwischen zwei ebenen Wänden.

131. Einleitung und Darstellung des Abstandes R durch Integrale.

Die Aufgabe, den Widerstand zu berechnen, den eine Kugel erfährt, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden in einer zu den Wänden parallelen Richtung bewegt, hat durch die Kolloidforschung Interesse gewonnen. Eine angenäherte Lösung dieses Problems erhalten wir durch das in § 12 dargelegte Verfahren. Die von der Kugel zunächst hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit wird von den beiden Grenzebenen zurückgeworfen. Wenn wir auf die Kenntnis des weiteren Schicksals dieser zurückgeworfenen Bewegungen verzichten und die Berechnung schon an diesem Punkte abbrechen, erhalten wir für die Komponenten der Resultante der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, die Werte:

$$-6\pi\mu a U_j\left\{1+\frac{9a}{16}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)\right\}, \tag{1}$$

wo l_1 und l_2 die Entfernungen des Mittelpunktes der Kugel von den beiden Wänden sind. Um genauere Werte dieser Komponenten zu erhalten, müssen wir für beide reflektierte Bewegungen ihre neue Reflexion an der Kugel und an der anderen Wand untersuchen. So kann man fortfahren. Man erhält auf diese Weise die gesuchten Größen durch unendliche Reihen dargestellt. Die Konvergenz dieser Reihen ist jedoch schlecht, und deshalb hat der Forscher, dem wir die Lösung dieses Problems verdanken, Faxén, eine andere Methode benutzt, die immer bei solchen Problemen anwendbar ist, in denen Randbedingungen an einer Ebene oder an zwei parallelen Ebenen eine Hauptrolle spielen.

Als wir im 9. Paragraphen die Randwertaufgabe der Stokesschen Gleichungen (für stationäre Bewegung) für die Kugel lösten, erhielten wir die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck durch Integrale über die Oberfläche der Kugel ausgedrückt. In dem einfachen Falle, daß die Randwerte U_j vom Orte unabhängig waren, war es möglich, eine einfache integrallose Darstellung der Lösung zu finden. In den meisten Fällen ist eine solche integrallose Lösung einer in Integralform dargestellten weitaus vorzuziehen. Aber in dem Problem, das wir hier zu behandeln haben, liegen die Verhältnisse anders. Hier ist es zweckmäßig, die einfache Lösung des Problems der Kugel bei konstanten Randwerten, die wir im 9. Paragraphen (Gl. 23) erhielten, in Integralform darzustellen.

Wir gehen von dem Integral*:

$$\frac{1}{\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{i\alpha_j x_j})\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_l^2)^2} \tag{2}$$

aus. Wegen des Verhaltens des Integranden im Anfangspunkte des $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$-Raumes ist dieses Integral nur bedingt konvergent. Um demselben einen bestimmten Wert zu geben, schließen wir zunächst durch eine kleine Kugel $\alpha_j^2 = \varepsilon^2$ den Anfangspunkt vom Integrationsbereiche aus. Der Grenzwert des so erhaltenen Integrales bei $\varepsilon \to 0$ soll der Wert von (2) sein. Um diesen Wert zu berechnen führen wir im α-Raum Polarkoordinaten ein. Wir erhalten, wenn Θ der Winkel zwischen den beiden Vektoren x_j und α_j ist:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^2}\int\limits_{0}^{\pi}(1-e^{i\alpha R\cos\Theta})\sin\Theta\, d\Theta = \frac{4}{\pi R}\int\limits_{0}^{\infty}\{\alpha R-\sin(\alpha R)\}\frac{d\alpha}{\alpha^3} = CR,$$

wo die Substitution: $\alpha R = \beta$ unmittelbar zeigt, daß C eine Konstante ist.

Um C zu bestimmen, bemerken wir, daß:

$$C = \frac{d^2}{dR^2}\left(\frac{1}{2}\,CR^2\right) = \frac{d^2}{dR^2}\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\{\alpha R-\sin(\alpha R)\}\frac{d\alpha}{\alpha^3} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha R)}{\alpha}\,d\alpha = 1^{**}.$$

Wir haben also:

$$R = \frac{1}{\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{i\alpha_j x_j})\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_l^2)^2}. \tag{3}$$

Wir wollen in dem Integral rechts die Integration in bezug auf α_3 ausführen. Wir betrachten also das Integral:

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{i\alpha_j x_j})\frac{d\alpha_3}{(\alpha_l^2)^2}.$$

* Wir schreiben der Kürze wegen und in Übereinstimmung mit dem hier gefolgten Brauche statt: $e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3)}$ wieder: $e^{i\alpha_j x_j}$.

** Man vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik. I, S. 55.

Wir nehmen zunächst an, daß a_1 und a_2 bestimmte Werte haben, welche der Ungleichung $a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2 > 0$ genügen. a_3 soll dann alle reellen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen. Wenn wir eine komplexe a_3-Ebene einführen, können wir indessen den Integrationsweg in dieser Ebene beliebig verschieben, wenn nur dabei die Endpunkte fest bleiben. Wir benutzen diesen Umstand so, daß wir, wenn $x_3 > 0$ ist, den Integrationsweg in seinen mittleren Teilen nach oben verschieben, dagegen wenn $x_3 < 0$ ist, nach unten. Dabei wird einer der beiden singulären Punkte:

$$a_3 = \pm i \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \pm ik$$

überschritten. Er gibt zu einem Glied:

$$\frac{1}{2\pi k^3}\{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\}(1 + k|x_3|)$$

Anlaß. Dagegen verschwindet das Kurvenintegral bei unbeschränkter Verschiebung des Integrationsweges nach oben (wenn $x_3 > 0$) oder nach unten (wenn $x_3 < 0$).

Wir zerlegen jetzt unseren Ausdruck (3) für R in zwei Teile:

$$R = \frac{1}{\pi^2}\underset{a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}}(1 - e^{i a_j x_j})\,\frac{da_1\,da_2\,da_3}{(a_l^2)^2} + \frac{1}{\pi^2}\underset{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\infty \leq a_3 \leq +\infty}}{\int\int\int}(1 - e^{i a_j x_j})\,\frac{da_1\,da_2\,da_3}{(a_l^2)^2}.$$

Der erste Teil läßt sich nach dem Obigen, wenn $|x_3| > 0$ ist, in der Form:

$$\frac{1}{2\pi}\underset{a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}{\int\int_{-\infty}^{+\infty}}\{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\}\,(1 + k|x_3|)\,\frac{da_1\,da_2}{k_3}$$

schreiben. Den zweiten Teil wollen wir im Grenzfalle $\varepsilon = 0$ berechnen. Wir haben offenbar, wenn δ irgend eine positive Größe ist:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi^2}\underset{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\infty \leq a_3 \leq +\infty}}{\int\int\int}(1 - e^{i a_j x_j})\,\frac{da_1\,da_2\,da_3}{(a_l^2)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi^2}\underset{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq +\delta}}{\int\int\int}(1 - e^{i a_j x_j})\,\frac{da_1\,da_2\,da_3}{(a_l^2)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\pi^2}\underset{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq \delta}}{\int\int\int}\left\{- i a_j x_j - \frac{1}{2}(a_j x_j)^2\right\}\frac{da_1\,da_2\,da_3}{(a_l^2)^2}.$$

Bei der Berechnung unseres Integrals haben wir nach der obigen Festsetzung zuerst den Anfangspunkt durch eine kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, auszuschließen. Wir haben unter diesen Umständen:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{i}{\pi^2} \iiint\limits_{\substack{a_1^2 + {}_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_2 \leq \delta}} \frac{(a_j x_j)\, d a_1\, d a_2\, d a_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2} = 0,$$

da die Elemente des Integrals sich zu je zwei aufheben.

Man findet ferner:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi^2} \iiint\limits_{\substack{a_1^2 + a_2^2 < \varepsilon^2 \\ -\delta \leq a_3 \leq \delta}} a_j a_k \frac{d a_1\, d a_2\, d a_3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2} = 0, \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

weil das Integral unbedingt konvergent ist.

Wir haben folglich, wenn $|x_3| > 0$ ist:

$$R = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{-\infty \\ a_1^2 + a_2^2 > \varepsilon^2}}^{+\infty} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\} (1 + k|x_3|) \frac{d a_1\, d a_2}{k^3}.$$

Wir können diese Gleichung in der einfacheren Form:

$$R = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \{1 - e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|}\} (1 + k|x_3|) \frac{d a_1\, d a_2}{k^3} \tag{4}$$

schreiben, wenn wir übereinkommen, daß bei der Berechnung der linken Seite der Anfangspunkt zunächst durch einen kleinen Kreis $a_1^2 + a_2^2 = \varepsilon^2$ ausgeschlossen und nachträglich der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vollzogen werden soll.

Man sieht leicht, daß die Gleichung (4), wenn $|x_3| > \delta > 0$ ist, beliebig oft in bezug auf x_1, x_2, x_3 differenziert werden darf. So z. B. erhalten wir:

$$\frac{x_1}{R} = \frac{\partial R}{\partial x_1} = -\frac{i}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \frac{a_1}{k^3} (1 + k|x_3|)\, d a_1\, d a_2 \tag{5}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \varDelta R = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2) - k|x_3|} \frac{d a_1\, d a_2}{k} \tag{6}$$

usw.

Die Formel (6) hat eine sehr große Bedeutung. Man kann in anderer Weise zu dieser Formel gelangen, indem man von dem Integral:

$$\frac{1}{2\pi^2}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha_j x_j}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$$

ausgeht. Doch ist diese Beweismethode wesentlich komplizierter als die oben benutzte.

13 2. Einsetzung der so gewonnenen Darstellungen von $\mathfrak{R}$ usw. in die Stokessche Formel behufs Gewinnung allgemeiner Integrale.

Wir kehren zu unserem hydrodynamischen Probleme zurück. Wir legen den Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Kugel und die x_1-Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel parallel. Die ebenen Wände mögen die Gleichungen $x_3 = +l_1$ und $x_3 = -l_2$ haben. Die Bewegung, welche die Kugel in einer den ganzen Raum erfüllenden, mit der Geschwindigkeit $-U_1, 0, 0$ strömenden Flüssigkeit hervorrufen würde, ist durch die Stokessche Formel (24) S. 110 gegeben, wenn wir in dieser Formel $U_2 = U_3 = 0$ setzen. Mit Hilfe der oben entwickelten Beziehungen finden wir leicht die unten angegebenen Ausdrücke für u_j und p:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= -U_1 + \frac{c}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k|x_3|}\left\{\frac{2}{k}-\frac{\alpha_1^2}{k^3}(1+k\,|x_3|)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{a^2\alpha_1^2}{3k}\right\}d\alpha_1\,d\alpha_2,\\
u_2 &= \frac{c}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k|x_3|}\left\{-\frac{\alpha_1\alpha_2}{k^3}(1+k\,|x_3|)+\frac{a^2\alpha_1\alpha_2}{3k}\right\}d\alpha_1 d\alpha_2,\\
u_3 &= \frac{c}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k|x_3|}\left\{-\frac{i\alpha_1}{k}x_3+i\alpha_1\cdot\frac{a^2 x_3}{3|x_3|}\right\}d\alpha_1\,d\alpha_2,\\
p &= \frac{c\mu}{\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k|x_3|}\left\{-\frac{i\alpha_1}{k}\right\}d\alpha_1\,d\alpha_2.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

In diesen Formeln hat c die Bedeutung $\frac{3}{4}a\,U_1$.

Die Lösungen der Stokesschen Gleichungen, welche durch die obigen Formeln definiert werden, sind überall mit Ausnahme vom Anfangspunkte regulär. Selbstverständlich ist dies nicht die einzige Lösung der Stokesschen Gleichungen, welche diese Eigenschaft hat. Man kann vielmehr z. B. durch partielle Differenzierung der schon gefundenen Lösung in bezug auf x_1, x_2 oder x_3, eine unbeschränkte Zahl von solchen Lösungen herstellen. Wir werden im folgenden eine Lösung der Stokesschen Gleichungen von der folgenden Form benutzen:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= -U_1 + \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1x_1+a_2x_2)-k|x_3|}\left\{\frac{ia_1}{k}g_2 + \frac{2g_1}{k} - \right.\\
&\quad \left. - \frac{a_1^2 g_1}{k^3}(1+k|x_3|) + \frac{a_1^2 x_3}{k} g_3\right\} da_1\,da_2,\\
u_2 &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1x_1+a_2x_2)-k|x_3|}\, ia_2 \left\{\frac{g_2}{k} + \frac{ia_1}{k^3} g_1(1+k|x_3|) - \right.\\
&\quad \left. - \frac{ia_1x_3}{k} g_3\right\} da_1\,da_2,\\
u_3 &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1x_1+a_2x_2)-k|x_3|}\left\{-\frac{x_3}{|x_3|} g_2 - \frac{ia_1}{k} g_1 x_3 + \right.\\
&\quad \left. + \frac{ia_1}{k} g_3(1+k|x_3|)\right\} da_1\,da_2,\\
p &= \frac{\mu}{\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a_1x_1+a_2x_2)-k|x_3|}\,\frac{ia_1}{k}\left\{-g_1 + \frac{x_3}{|x_3|} k g_3\right\} da_1\,da_2.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

g_1, g_2, g_3 sind hier unbekannte Funktionen von a_1, a_2, k, von denen wir nur annehmen, daß sie die Eigenschaften haben, welche nötig sind, damit unsere Integrale (8) einen Sinn haben und wir sie unter den Integralzeichen (u_1, u_2, u_3 zweimal, p einmal) in bezug auf x_1, x_2, x_3 differenzieren dürfen. Man verifiziert unter diesen Voraussetzungen umgekehrt leicht, daß u_j, p den Stokesschen Gleichungen für stationäre Bewegung genügen. Wie aus dem oben Gesagten ersichtlich ist, können wir den Bedingungen $u_j = 0$ an der Oberfläche der Kugel $R = a$ durch den Ansatz:

$$g_1 = c, \quad g_2 = -\tfrac{1}{3} c i a_1 \cdot a^2, \quad g_3 = 0, \quad c = \tfrac{3}{4} a U_1$$

genügen.

Neue Lösungen der Stokesschen Gleichungen, welche mit (8) nahe verwandt sind, sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
u_1^* &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k x_3}\Big\{\frac{i\alpha_1}{k}\,g_5+\frac{2}{k}\,g_4-\frac{\alpha_1^2}{k^3}\,g_4(1+kx_3)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\alpha_1^2}{k}\,x_3 g_6\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
u_2^* &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k x_3}\, i\alpha_2\Big\{\frac{g_5}{k}+\frac{i\alpha_1}{k^3}\,g_4(1+kx_3)-\\
&\qquad\qquad-\frac{i\alpha_1}{k}\,x_3 g_6\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
u_3^* &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k x_3}\Big\{-g_5-\frac{i\alpha_1}{k}\,g_4 x_3+\\
&\qquad\qquad+\frac{i\alpha_1}{k}\,g_6(1+kx_3)\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
p^* &= \frac{\mu}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-k x_3}\,\frac{i\alpha_1}{k}\Big\{-g_4+k g_6\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2\,;
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
u_1^{**} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)+k x_3}\Big\{\frac{i\alpha_1}{k}\,g_8+\frac{2}{k}\,g_7-\\
&\qquad\qquad-\frac{\alpha_1^2}{k^3}\,g_7\,(1-kx_3)+\frac{\alpha_1^2}{k}\,x_3 g_9\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
u_2^{**} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)+k x_3}\; i\alpha_2\,\Big\{\frac{g_8}{k}+\frac{i\alpha_1}{k^3}\,g_7(1-kx_3)-\\
&\qquad\qquad-\frac{i\alpha_1}{k}\,x_3 g_9\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
u_3^{**} &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)+k x_3}\Big\{g_8-\frac{i\alpha_1}{k}\,g_7 x_3+\\
&\qquad\qquad+\frac{i\alpha_1}{k}\,g_9(1-kx_3)\Big\}\,d\alpha_1 d\alpha_2,\\
p^{**} &= \frac{\mu}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)+k x_3}\,\frac{i\alpha_1}{k}\{-g_7-k g_9\}\,d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Über die Funktionen g_4, g_5, g_6; g_7, g_8, g_9 machen wir ähnliche Annahmen wie betreffs der Funktionen g_1, g_2, g_3. Aus der formalen Analogie mit (8) folgt unmittelbar, daß sowohl u_j^*, p^* wie u_j^{**}, p^{**} den Stokesschen Gleichungen für stationäre Bewegung genügen.

133. Ansatz zur Lösung und zur Widerstandsberechnung.

Wir betrachten jetzt eine Flüssigkeitsbewegung mit den Komponenten $u_j + u_j^* + u_j^{**}$. Wir bestimmen die Funktionen g so, daß jene Bewegung uns eine angenäherte Lösung unseres Problems ergibt. Wir fordern zunächst, daß die Geschwindigkeitskomponenten an den ebenen Wänden $x_3 = l_1$, $x_3 = -l_2$ die Werte $-U_1, 0, 0$ annehmen. Dieses bewirken wir dadurch, daß wir die Funktionen g der Bedingung unterwerfen, daß für $x_3 = +l_1$ und $x_3 = -l_2$ und für $j = 1, 2, 3$ die Summe der Integranden in unserem Ausdrucke für $u_j + u_j^* + u_j^{**}$ verschwinden soll. Wir erhalten hieraus sechs lineare und homogene Beziehungen zwischen den Funktionen g. Wir setzen $e^{2kl_1} = s_1$, $e^{2kl_2} = s_2$ und haben dann:

$$\left.\begin{aligned}
g_4 = -\frac{s_1 - 1}{s_1 s_2 - 1}\, g_1, \quad g_7 = -\frac{s_2 - 1}{s_1 s_2 - 1}\, g_1,\\
g_2 + g_5 + g_8 s_1 - 2l_1 \frac{ia_1}{k} g_7 s_1 - l_1 i a_1 (g_3 + g_6 + g_9 s_1) = 0,\\
-g_2 - g_5 + g_8 s_1 + l_1 i a_1 (g_3 + g_6 - g_9 s_1) + \frac{ia_1}{k}(g_3 + g_6 + g_9 s_1) = 0,\\
g_2 + g_8 + g_5 s_2 - 2l_2 \frac{ia_1}{k} g_4 s_2 + l_2 i a_1 (g_3 + g_9 + g_6 s_2) = 0,\\
g_2 + g_8 - g_5 s_2 + l_2 i a_1 (g_3 + g_9 - g_6 s_2) + \frac{ia_1}{k}(g_3 + g_9 + g_6 s_2) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Zur Befriedigung der Bedingung $u_j = 0$ an der Oberfläche der Kugel verfügen wir über drei Funktionen g. Offenbar genügt diese Zahl nicht, um die Randbedingungen exakt zu erfüllen. Um eine angenäherte Lösung unseres Problems zu bekommen, können wir so vorgehen, daß wir den Funktionen g_1, g_2, g_3 die S. 149 angegebenen Werte: c, $-\frac{1}{3} c i a_1 a^2$, 0 geben und dabei $c = \frac{3}{4} a U_1$ setzen. Die Beziehungen (11) geben dann die Werte der Funktionen $g_4 \ldots g_9$. Wir erhalten so die Störung, welche unsere ruhende Kugel in einer mit der Geschwindigkeit $-U_1, 0, 0$ strömenden, den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit hervorrufen würde, und darüber gelagert die Bewegung, welche durch die Reflexion dieser Störung von den Wänden entstehen würde. Mit Hilfe des Satzes von Faxén (§ 9 S. 113) können wir die Resultante der Kräfte berechnen, welche die Flüssigkeit unter diesen Umständen auf die Kugel ausübt. Wir können aber auch einen etwas anderen Weg gehen. Wir können die drei Funktionen g, welche zu unserer Verfügung stehen, so bestimmen, daß die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten $u_j + u_j^* + u_j^{**}$ an der Oberfläche der

Kugel verschwinden. Wenn wir dann die Geschwindigkeit in zwei Teile:

$$u_j^* + u_j^{**} - \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{R=a}(u_j^* + u_j^{**})\,dS \text{ und } u_j - \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{R=a} u_j\,dS$$

zerlegen, so wird nach dem Satze von Faxén (vgl. § 9 (28) S. 113) der erste Teil keinen Beitrag zu unserer Resultante geben. Die Resultante rührt also nur vom zweiten Teile her und zwar vom ersten Gliede dieses Teiles, weil das zweite Glied eine überall, auch im Innern der Kugel konstante Geschwindigkeit gibt, die keinen Beitrag zur Resultante geben kann.

134. Durchführung in speziellen Fällen.

Wir behandeln im folgenden nur den einfachsten und wichtigsten Fall, nämlich denjenigen, bei dem die Kugel sich gerade in der Mitte zwischen den beiden Wänden bewegt und also $l_1 = l_2$ ist. Wir setzen in diesem Fall $l_1 = l_2 = l$, $s_1 = s_2 = s$. Wir benutzen die zuletzt erwähnte Methode und suchen also g_1, g_2, g_3 so zu bestimmen, daß

$$\int\limits_{R=a}(u_j + u_j^* + u_j^{**})\,dS = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Aus geometrischen Gründen ist nun unmittelbar klar, daß zwei von diesen Gleichungen identisch erfüllt sind. Wir können deshalb auch jetzt:

$$g_1 = c, \quad g_2 = -\tfrac{1}{3}\,c\,i\,\alpha_1 a^2, \quad g_3 = 0 \tag{12}$$

setzen. c soll aber jetzt keineswegs den Wert $\frac{3}{4} a U_1$ haben, sondern muß vielmehr aus der Bedingung:

$$\int\limits_{R=a}(u_1 + u_1^* + u_1^{**})\,\frac{dS}{a^2} = 0 \tag{13}$$

bestimmt werden. — Der Ansatz (12) gibt nun unmittelbar für $R = a: u_1 = -U_1 + \frac{4}{3}\frac{c}{a}$. Aus § 9 (27) und (28) S. 113 folgt ferner:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R=a}(u_1^* + u_1^{**})\,\frac{dS}{a^2} = (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^2}{6\mu}\left(\frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^{**}}{\partial x_1}\right)_0.$$

Zur Bestimmung von c erhalten wir also die Gleichung:

$$-U_1 + \frac{4}{3}\frac{c}{a} + (u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^2}{6\mu}\left(\frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^{**}}{\partial x_1}\right)_0 = 0.$$

Da u_1^*, p^*, u_1^{**}, p^{**} c als Faktor enthalten, so können wir die letzte Gleichung in der Form:

$$c = \frac{\frac{3}{4}\, a\, U_1}{1 + \frac{3}{4}\,\frac{a}{c}\,(u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^3}{8\mu c}\left(\frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1}\right)_0}$$

auflösen.

Wir haben oben gesehen, daß die resultierende Kraft auf die Kugel nur von den Geschwindigkeitskomponenten u_j oder wie wir auch sagen können, von $u_1 + U_1, u_2, u_3$ abhängt. Wir wissen ferner, daß diese Größen sich nur durch den Faktor $\frac{4c}{3aU_1}$ von den Größen § 9 (23) S. 110 (mit $U_2 = U_3 = 0$) unterscheiden. Nun erhielten wir in § 9 aus der Formel (23) für die Komponenten der resultierenden Kraft auf die Kugel die Werte $-6\pi\mu a U_j$. Wir schließen hieraus, daß jetzt die Komponenten der Resultierenden $-8\pi\mu c, 0, 0$ sein müssen. Für den Betrag der Kraft auf die Kugel erhalten wir:

$$8\pi\mu c = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 + \frac{3}{4}\,\frac{a}{c}\,(u_1^* + u_1^{**})_0 + \frac{a^3}{8\mu c}\left(\frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1}\right)_0}. \tag{14}$$

Unsere Aufgabe wird durch die Formel (14) auf die Berechnung des Nenners auf der rechten Seite dieser Gleichung zurückgeführt. Wir schreiben diesen Nenner:

$$1 + \frac{3}{4}\,\frac{a}{c}\left[u_1^* + u_1^{**} + \frac{a^2}{6\mu}\,\frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1}\right]_0$$

und haben nach (9) und (10):

$$\left.\begin{aligned}\left[u_1^* + u_1^{**} + \frac{a^2}{6\mu}\,\frac{\partial(p^* + p^{**})}{\partial x_1}\right]_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \Big\{\frac{i\alpha_1}{k}\,(g_5 + g_8) + {}\\ + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha_1^2}{k^3}\right)(g_4 + g_7) + \frac{a^2}{3}\,\frac{\alpha_1^2}{k}\,(g_4 + g_7 - k g_6 + k g_9)\Big\}\, d\alpha_1\, d\alpha_2.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Gleichungen (11) geben in unserem Falle ($l_1 = l_2 = l$, $s_1 = s_2 = s$, $g_3 = 0$):

$$g_4 = g_7 = -\frac{g_1}{s+1}, \quad g_6 = -g_9 = -\frac{2skg_2}{i\alpha_1(s^2 - 4lks - 1)} - {}$$

$$-\frac{2ls(s-1)g_1}{(s^2 - 4lks - 1)(s+1)},$$

$$g_5 = g_8 = \frac{2lsk - s + 1}{s^2 - 4lks - 1}\, g_2 - \frac{2li\alpha_1}{k}\,\frac{s\,\frac{s-1}{s+1} - lks}{s^2 - 4lks - 1}\, g_1.$$

Wir haben außerdem: $g_1 = c$, $g_2 = -\frac{1}{3} c i \alpha_1 a^2$.

Wir tragen die gefundenen Ausdrücke für die Funktionen g in (15) ein und schreiben das Ergebnis in der Form:

$$-\frac{4c}{3l} A + \frac{4ca^2}{3l^3} B - \frac{4ca^4}{3l^5} C\,.$$

A, B, C sind hier Zahlen, welche durch die Gleichungen:

$$A = \frac{3l}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha_1^2}{k^3} \right) \frac{1}{s+1} - \frac{2l\alpha_1^2}{k^2} \frac{s\dfrac{s-1}{s+1} - lks}{s^2 - 4lks - 1} \right\} d\alpha_1 d\alpha_2\,,$$

$$B = \frac{l^3}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ \frac{\alpha_1^2}{k} \cdot \frac{2lks - s + 1}{s^2 - 4lks - 1} - \frac{\alpha_1^2}{k} \left[\frac{1}{s+1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2lks(s-1)}{(s^2 - 4lks - 1)(s+1)} \right] \right\} d\alpha_1 d\alpha_2\,,$$

$$C = \frac{l^5}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\alpha_1^2 s k}{s^2 - 4lks - 1}\, d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$k = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,, \qquad s = e^{2lk}$$

definiert werden.

Wenn man in der $\alpha_1 \alpha_2$ – Ebene Polarkoordinaten einführt, so kann man, wie unmittelbar ersichtlich ist, die Integration in bezug auf den Winkel sofort ausführen. Für die Ausführung der letzten Integration ist man dagegen auf numerische Rechnung angewiesen. Faxén findet so: $A = 1{,}004$, $B = 0{,}418$, $C = 0{,}169$. Eine Kugel, welche sich in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden in einer mit den Wänden parallelen Richtung und mit der Geschwindigkeit U_1 bewegt, erfährt also, wenn a der Radius der Kugel und $2l$ die Entfernung zwischen den Wänden ist, einen Widerstand:

$$W = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 - 1{,}004\,\dfrac{a}{l} + 0{,}418\,\dfrac{a^3}{l^3} - 0{,}169 \cdot \dfrac{a^5}{l^5}}\,.$$

Glieder von der Größenordnung $\frac{a^6}{l^6}$ sind hier vernachlässigt worden.

Faxén hat diese theoretische Formel mit Messungen von Westgren verglichen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung war gut.

Faxén hat auch den Fall $l_2 = 3l_1$ untersucht. Er findet in diesem Fall, unter Voraussetzung, daß die Kugel sich frei um ihren Mittelpunkt drehen kann:

$$W = \frac{6\pi\mu a U_1}{1 - 0{,}6526\frac{a}{l_1} + 0{,}1475\frac{a^3}{l_1^3} - 0{,}131\frac{a^4}{l_1^4} - 0{,}0644\frac{a^5}{l_1^5}}.$$

Faxén hat endlich eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit berechnet, mit welcher eine Kugel mit der Dichte ϱ und dem Radius a in einer Flüssigkeit mit der Zähigkeit μ und der Dichte ϱ_F fällt, wenn die Kugel zwischen zwei vertikalen parallelen Wänden mit der Entfernung $2L$ eingeschlossen ist. Dabei wurde angenommen, daß die verschiedenen Lagen der Kugel zwischen den Wänden dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Faxén fand unter diesen Voraussetzungen für die Geschwindigkeit U:

$$U = \frac{2}{9\mu} a^2 g(\varrho - \varrho_F)\left(1 - \frac{a}{L}\bar{A} + \frac{a^3}{L^3}\bar{B} - \cdots\right),$$

$$\bar{A} = \frac{3}{32H} + \frac{9}{16H}\left\{\log\frac{2(1+H)}{(3-H)(1-H)} + (1-C)(1-H) - CH\right\} + R_A,$$

$$\bar{B} = \frac{5}{64H(1-H)^2} - \frac{1}{16(1-H^2)^2} - \frac{1}{64H(3-H)^2} + \frac{s_3}{128} + R_B,$$

$$H = 1 - \frac{a}{L}, \quad s_3 = 1{,}20205, \quad C = 0{,}57722.$$

R_A und R_B sind, wenn H in der Nähe von 1 liegt, kleine Korrektionsglieder. Für $H = 0{,}9$ findet Faxén $R_A = 0{,}0340$, $R_B = 0{,}104$; für $H = 0{,}85$: $R_A = 0{,}0352$, $R_B = 0{,}108$.

135. Das zweidimensionale Problem.

Das zweidimensionale Problem, das der hier behandelten Aufgabe entspricht, ist die Berechnung des Widerstandes einen Kreiszylinders, der sich zwischen zwei parallelen ebenen Wänden in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Prof. Bairstow, Fräulein Cave und Fräulein Lang haben dieses Problem für den speziellen Fall gelöst, daß der Zylinder sich in der Mitte zwischen den Wänden befindet und die Entfernung zwischen diesen fünfmal größer als der Durchmesser des Zylinders ist. Sie finden unter diesen Umständen für den Widerstand pro Längeneinheit des Zylinders $2{,}26\pi\mu U_1$. Eine neuere Berechnung von Harrison gab für dieselbe Größe den Wert $5{,}21\pi\mu U_1$. Mit der in diesem

Paragraphen behandelten Aufgabe ist ferner nahe verwandt die Frage nach dem Widerstande, den eine Kugel erfährt, die sich längs der Achse einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre bewegt. Dieses Problem hat Ladenburg auf Grundlage der Stokesschen Gleichungen behandelt. Wir werden im folgenden Kapitel S. 196 auf diese Frage zurückkommen.

§ 14. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit.

141. Einleitung und Satz von Faxén über die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln von derselben Größe.

Wenn zwei Kugeln sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen, so wird die Strömung der Flüssigkeit in der Umgebung einer dieser Kugeln nicht nur von der Bewegung dieser Kugel, sondern auch von der Bewegung der anderen Kugel abhängen. Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf einen dieser Körper ausübt, wird folglich von der Bewegung des anderen Körpers beeinflußt. Die beiden Kugeln üben mit anderen Worten durch Vermittelung der Flüssigkeit scheinbare Kräfte aufeinander aus. Diese Kräfte verdienen von mehreren Gesichtspunkten aus Interesse. Unter anderem haben sie Bedeutung für die Kolloidforschung.

Wir stellen uns zunächst die Frage: welche Kräfte übt eine zähe Flüssigkeit auf zwei gleich große, gleich schwere mit derselben konstanten Geschwindigkeit darin fallende Kugeln aus? Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zunächst, daß die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf eine Kugel ausübt, auf eine Resultierende durch den Mittelpunkt und auf ein Drehmoment um denselben Punkt reduziert werden können. Wenn keine anderen äußeren Drehmomente auf die Kugeln wirken, was im allgemeinen der Fall sein wird, wenn der Schwerpunkt jeder Kugel mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, so kann die Bewegung nur dann stationär sein, wenn jene Drehmomente verschwinden. Dies wird im allgemeinen bei rein translatorischer Bewegung der Kugeln nicht der Fall sein. Jede Kugel muß sich infolgedessen um eine durch den Mittelpunkt gehende Achse drehen, die sowohl auf der Translationsrichtung wie auf der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der Kugeln senkrecht steht. Wir bezeichnen mit U_j die Komponenten der translatorischen Bewegung, mit $K_j^{(1)}$ und $K_j^{(2)}$ die Komponenten der auf die Kugeln wirkenden Resultierenden und mit $\omega_j^{(1)}$ und $\omega_j^{(2)}$ die Komponenten der Drehgeschwindigkeiten.

Wegen der linearen Form der Stokesschen Gleichungen müssen $K_j^{(1)}, K_j^{(2)}, \omega_j^{(1)}$ und $\omega_j^{(2)}$ lineare und homogene Funktionen der Größen U_j sein. Wenn wir die Richtung des Vektors $\boldsymbol{U}$ umkehren, müssen also $K_j^{(1)}$, $K_j^{(2)}$, $\omega_j^{(1)}$ und $\omega_j^{(2)}$ ihre Vorzeichen wechseln. Wir gehen jetzt von einer stationären Bewegung des ganzen Systems aus, kehren zunächst den Vektor $\boldsymbol{U}$ um und drehen dann das System um 180^0 um eine Achse, welche sowohl auf der Bewegungsrichtung der Kugeln wie auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht steht und welche jene Verbindungslinie gerade in der Mitte zwischen den beiden Kugeln schneidet. Die Kugeln bewegen sich nach diesen beiden Operationen wieder mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{U}$. Die Resultierende auf die erste Kugel ist wieder $\boldsymbol{K}^{(1)}$, die auf die zweite $\boldsymbol{K}^{(2)}$. Andererseits haben die beiden Kugeln durch die beiden Operationen ihre Plätze gewechselt. Die Resultierende auf die erste Kugel muß also den Wert $\boldsymbol{K}^{(2)}$, die Resultierende auf die zweite Kugel den Wert $\boldsymbol{K}^{(1)}$ haben. Daraus folgt, daß $\boldsymbol{K}^{(1)} = \boldsymbol{K}^{(2)}$, also $K_j^{(1)} = K_j^{(2)}$ sein muß. In derselben Weise sehen wir, daß $\omega_j^{(1)} = -\omega_j^{(2)}$ ist. Wir haben damit den von Faxén gefundenen Satz bewiesen:

Wenn zwei Kugeln von derselben Größe und mit derselben Schwere unter dem Einfluß dieser Schwere in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit steigen oder sinken, so hat die Resultierende der von der Flüssigkeit auf eine Kugel ausgeübten Kräfte für beide Kugeln dieselbe Richtung und denselben Betrag. Die Entfernung und der Höhenunterschied zwischen den beiden Kugeln werden also durch diese Kräfte nicht geändert. Dagegen gerät im allgemeinen jede Kugel in eine Rotation um eine durch den Mittelpunkt gehende, gegen die Vertikalebene, welche beide Mittelpunkte enthält, senkrechte Achse. Die Drehgeschwindigkeiten haben denselben Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen.

142. Erste Näherung bei Kugeln mit verschiedenen Radien.

Wir wollen jetzt für zwei Kugeln mit verschiedenen Radien, a_1 und a_2, die Resultierenden $\boldsymbol{K}^{(1)}$ und $\boldsymbol{K}^{(2)}$ in erster Näherung berechnen. $x_j^{(1)}$ und $x_j^{(2)}$ seien die Koordinaten der Mittelpunkte der beiden Kugeln. Unsere Aufgabe ist, eine Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

zu finden, welche außerhalb der beiden Kugeln regulär ist und welche den folgenden Randbedingungen genügt:

$$\begin{aligned}
&\text{für } r_1^2 = (x_j - x_j^{(1)})^2 = a_1^2\colon\ u_1 = U_1, \quad u_2 = u_3 = 0,\\
&\text{für } r_2^2 = (x_j - x_j^{(2)})^2 = a_2^2\colon\ u_1 = U_1, \quad u_2 = u_3 = 0,\\
&\text{für } R^2 = x_j^2 \to \infty\colon\ u_j \to 0.
\end{aligned}$$

Eine angenäherte Lösung dieser Aufgabe finden wir in der folgenden Weise. Wir suchen zuerst eine außerhalb der Kugel $r_1 = a_1$ reguläre Lösung $u_j^{(1)}$, $p^{(1)}$ der Gleichungen (1), welche an dieser Kugel den Bedingungen $u_j^{(1)} = v_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3)$ genügt, wo $v_j^{(1)}$ die Komponenten eines konstanten Vektors sind. Diese Lösungen können wir offenbar in der Form:

$$u_j^{(1)} = U_{jk}^{(1)} v_k^{(1)}, \quad p^{(1)} = P_k^{(1)} v_k^{(1)} \tag{2}$$

schreiben und wir haben nach § 9 S. 110:

$$U_{jk}^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{a_1}{r_1} \delta_{jk} - \frac{a_1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(3r_1 + \frac{a^2}{r_1}\right), \quad P_k^{(1)} = -\frac{3}{2} \mu a_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r_1}. \tag{3}$$

Wir suchen ferner eine außerhalb der Kugel $r_2 = a_2$ reguläre Lösung der Gleichungen (1) $u_j^{(2)}$, $p^{(2)}$, welche an dieser Kugel den Bedingungen $u_j^{(2)} = v_j^{(2)}$ genügt, wo $v_j^{(2)}$ ebenfalls Komponenten eines konstanten Vektors sind. Wir haben:

$$u_j^{(2)} = U_{jk}^{(2)} v_k^{(2)}, \quad p^{(2)} = P_k^{(2)} v_k^{(2)}. \tag{4}$$

$U_{jk}^{(2)}$ und $P_k^{(2)}$ haben in diesen Gleichungen leichtverständliche Bedeutungen. Wir versuchen jetzt unser Problem durch den Ansatz

$$u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)}, \quad p = p^{(1)} + p^{(2)}$$

zu lösen. Mit diesem Ansatz den Randbedingungen exakt zu genügen, ist offenbar unmöglich. Bei unserer angenäherten Behandlung des Problems wollen wir aber die zweiten und höheren Potenzen der Größen a_1/r_{12}, a_2/r_{12} $(r_{12}^2 = (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2,\ r_{12} \geqq 0)$ vernachlässigen. Unter diesen Umständen ist es gar nicht nötig, den Randbedingungen exakt zu genügen. Es reicht vielmehr vollkommen aus, daß sie durchschnittlich erfüllt sind. Wir legen also den Größen $v_j^{(1)}$ und $v_j^{(2)}$ die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
v_1^{(1)} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_1 = a_1} u_1^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} = U_1, \quad v_k^{(1)} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_1 = a_1} u_k^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} = 0, \quad k = 2, 3,\\
v_1^{(2)} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_2 = a_2} u_2^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} = U_1, \quad v_k^{(2)} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_2 = a_2} u_k^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} = 0, \quad k = 2, 3.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

auf. Aus (27) und (28) S. 113 folgt nun für $l = 1$, $m = 2$ und $l = 2$, $m = 1$, $k = 1, 2, 3$:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_m = a_m} u_k^{(l)} \frac{dS}{a_m^2} = u_k^{(l)}(x_j^{(m)}) + \frac{2\pi}{3}\frac{a_m^2}{\mu}\left(\frac{\partial p^{(l)}}{\partial x_k}\right) x_j^{(m)}.$$

Wir setzen hier zunächst $l = 1$, $m = 2$. Einsetzen der Werte (2) von $u_k^{(1)}$, $p^{(1)}$ zeigt sofort, daß das zweite Glied der rechten Seite vernachlässigt werden kann. Wir haben also annähernd:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_2 = a_2} u_k^{(1)} \frac{dS}{a_2^2} = u_k^{(1)}(x_j^{(2)}). \tag{6}$$

Wir erhalten in derselben Weise:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_1 = a_1} u_k^{(2)} \frac{dS}{a_1^2} = u_k^{(2)}(x_j^{(1)}). \tag{7}$$

Zur Bestimmung der Größen $v_j^{(1)}$ und $v_j^{(2)}$ erhalten wir also nach (4) und (5) die Gleichungen:

$$v_1^{(1)} + v_k^{(2)} U_{1k}^{(2)}(x_j^{(1)}) = U_1, \quad v_l^{(1)} + v_k^{(2)} U_{lk}^{(2)}(x_j^{(1)}) = 0, \quad l = 1, 2,$$
$$v_1^{(2)} + v_k^{(1)} U_{1k}^{(1)}(x_j^{(2)}) = U_1, \quad v_l^{(2)} + v_k^{(1)} U_{lk}^{(1)}(x_j^{(2)}) = 0, \quad l = 1, 2.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen in der hier angestrebten Genauigkeit ergibt:

$$v_k^{(1)} = U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)})), \quad v_k^{(2)} = U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x_j^{(2)})).$$

Wir haben also:

$$u_k = U_1(U_{k1}^{(1)} - U_{kl}^{(1)} U_{l1}^{(2)}(x_j^{(1)})) + U_1(U_{k1}^{(2)} - U_{kl}^{(2)} U_{l1}^{(1)}(x_j^{(2)})). \tag{8}$$

Wir können dieses Ergebnis in der folgenden Weise deuten. In der Umgebung der ersten Kugel sind die Komponenten der von der zweiten Kugel herrührenden Strömung annähernd konstant und haben (annähernd) die Werte:

$$U_1 U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)}).$$

In dieser Strömung bewegt sich die erste Kugel mit einer relativen Geschwindigkeit, deren Komponenten:

$$U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)}))$$

sind. Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf diese Kugel ausübt, kann nur von dieser relativen Bewegung abhängen. Sie hat folglich die Komponenten:

$$-6\pi\mu a_1 U_1(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x_j^{(1)})).$$

In derselben Weise wirkt auf die andere Kugel die Kraft:

$$- 6\pi\mu a_2 U_1 (\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x_j^{(2)})).$$

Außer dem Stokesschen Widerstande wirkt also auf die erste Kugel eine Kraft:

$$\frac{9}{2}\pi\mu \frac{a_1 a_2}{r_{12}} U_1 \delta_{k1} + \frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U_1 \frac{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})(x_k^{(1)} - x_k^{(2)})}{r_{12}^3}.$$

Die Symmetrie dieses Ausdruckes in bezug auf die beiden Kugeln zeigt, daß auf die zweite Kugel eine Kraft derselben Größe und derselben Richtung wirkt. Diese Kraft kann als die Resultierende von zwei Kräften aufgefaßt werden, von welchen eine dieselbe Richtung wie die Bewegung der Kugeln hat und also auf die Kugeln beschleunigend wirkt, während die andere dieselbe Richtung wie eine vom Mittelpunkte der hinteren Kugel zum Mittelpunkte der vorderen Kugel gezogene Gerade hat. Jene Kraft hat den Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu U_1 \frac{a_1 a_2}{r_{12}}$$

und diese den Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu U_1 a_1 a_2 \frac{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}{r_{12}^2}.$$

Diese Sätze sind von M. Smoluchowski gefunden worden.

14 3. Genauere Formeln.

Für den Fall, daß die Bewegungsrichtung der beiden Kugeln mit der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zusammenfällt, hat Faxén eine genauere Formel für den Widerstand berechnet. Er findet für den Widerstand der ersten Kugel:

$$\begin{aligned} W = 6\pi\mu a_1 U_1 \Big\{ & 1 - \frac{3a_2}{2r_{12}} + \frac{9a_1 a_2}{4r_{12}^2} + \\ & + \frac{1}{r_{12}^3}\left(\frac{1}{2}a_1^2 a_2 - \frac{27}{8}a_1 a_2^2 + \frac{1}{2}a_2^3\right) + \\ & + \frac{1}{r_{12}^4}\left(-\frac{3}{2}a_1^3 a_2 + \frac{81}{16}a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4}a_1 a_2^3\right) - \\ & - \frac{1}{r_{12}^5}\left(\frac{9}{4}a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32}a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4}a_1 a_2^4\right) + \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man einfach durch Vertauschen von a_1 und a_2. Welche von den beiden Kugeln vorangeht, ist für den Widerstand belanglos.

In dem Fall, daß die beiden Kugeln sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten (aber doch stets in einer zur Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen Richtung) bewegen, findet Faxén für den Widerstand der ersten Kugel:

$$W = 6\pi\mu a_1 U_1 \left\{ 1 + \frac{9 a_1 a_2}{4 r_{12}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_{12}^4}\left(-\frac{3}{2} a_1^3 a_2 + \frac{81}{16} a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4} a_1 a_2^3\right) + \cdots \right\} -$$
$$- 6\pi\mu a_1 U_2 \left\{ \frac{3}{2}\frac{a_2}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}^3}\left(-\frac{1}{2} a_1^2 a_2 + \frac{27}{8} a_1 a_2^2 - \frac{1}{2} a_2^3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_{12}^5}\left(\frac{9}{4} a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32} a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4} a_1 a_2^4\right) + \cdots \right\}.$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man durch Vertauschen von a_1 und a_2, U_1 und U_2.

Eine von H. Dahl ausgeführte genauere Berechnung des Falles $a_1 = a_2 = a$ ergab für den Widerstand der ersten Kugel den Wert:

$$W = 6\pi\mu a U_1 \{1 + 9x^2 + 93x^4 + 1197x^6 + 19821x^8 + \cdots\} -$$
$$- 6\pi\mu a U_2 \{3x + 19x^3 + 387x^5 + 5331x^7 + 76115x^9 + \cdots\},$$
$$x = \frac{a}{2 r_{12}}.$$

Den Widerstand der zweiten Kugel erhält man durch Vertauschen von U_1 und U_2.

Die Bewegung zweier Kugeln mit derselben konstanten Geschwindigkeit längs der Verbindungslinie der Mittelpunkte derselben ist kürzlich Gegenstand einer Untersuchung von Margaret Stimson und G. B. Jeffery gewesen. Diese Autoren geben auf der Grundlage der Stokesschen Gleichungen eine vollständige Lösung des Problems durch unendliche Reihen. In dem Falle, daß die beiden Kugeln denselben Radius (a) haben, finden sie für den Widerstand jeder Kugel einen Ausdruck:

$$6\pi\mu a U_1 \lambda,$$

wo*:

$$\lambda = \frac{4}{3}\sinh\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ 1 - \frac{4\sinh^2(n+\frac{1}{2})\alpha - (2n+1)^2\sinh^2\alpha}{2\sinh(2n+1)\alpha + (2n+1)\sinh 2\alpha} \right\},$$

α ist dabei durch die Gleichung:

* In der Formel von Miß Stimson und Dr. Jeffery fehlt infolge eines Druckfehlers rechts ein Faktor 2. Ich verdanke Dr. Faxén diese Bemerkung.

$$\cosh a = \frac{r_{12}}{2a}$$

definiert. Für λ haben die beiden Autoren eine Tabelle berechnet:

a	$r_{12}/2a$	λ
0,5	1,128	0,663
1,0	1,543	0,702
1,5	2,352	0,768
2,0	3,762	0,836
2,5	6,132	0,892
3,0	10,068	0,931
∞	∞	1,00

Dr. Faxén hat zu dieser Tabelle eine neue Zeile hinzugefügt:

$$a = 0, \quad r_{12}/2a = 1, \quad \lambda = 0{,}645.$$

§ 15. Die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead.

151. Das Paradoxon von Stokes.

Wir haben in § 9 das Problem behandelt, eine Lösung der Stokesschen Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

zu finden, bei welcher die Größen u_j außerhalb der Kugel $R = a$ regulär sind, an dieser Kugel die konstanten Werte U_j annehmen und in unendlicher Ferne verschwinden. Das entsprechende zweidimensionale Problem ist die Aufgabe, eine Lösung der Gleichungen:

$$\mu \Delta u_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (k = 1, 2) \tag{2}$$

zu finden, welche außerhalb des Kreises $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a$ regulär ist und den Randbedingungen: für $R = a$, $u_k = U_k =$ Konst., für $R \to \infty$: $u_k \to 0$ genügt. Zu dieser Aufgabe wird man geführt, wenn man nach der Methode von Stokes die Bewegung untersuchen will, die in einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit durch einen unendlich langen Kreiszylinder erzeugt wird, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer gegen die Längsrichtung senkrechten Richtung darin bewegt. Man kann leicht eine Lösung der Gleichungen (2) angeben, die formal der von Stokes gefundenen Lösung des Problems der Kugel entspricht. Sie ist:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= A\left\{2\,U_k \log R - U_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left[\frac{1}{2}R^2(\log R - 1) + \frac{1}{2}a^2 \log R\right]\right\}, \\ p &= -\,2\mu A\,U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\log R, \quad A = \frac{1}{\log a}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ein Blick auf diese Lösung zeigt sofort, daß sie sich aber bei großen R-Werten nicht in der Weise verhält, wie wir von der Lösung eines hydrodynamischen Problems verlangen müssen. Bei wachsendem R konvergieren die Größen u_k nicht gegen Null, sondern wachsen vielmehr, den absoluten Beträgen nach, über alle Grenzen. Wenn man trotzdem unter Verzicht der Forderung $u_k \to 0$ für $R \to \infty$ der Lösung eine hydrodynamische Bedeutung zuschreiben wollte, so würde man auf die Schwierigkeit stoßen, daß die Randwertaufgabe unendlich viele Lösungen besitzt. Eine von (3) verschiedene Lösung ist z. B. $u_k = U_k$ in der ganzen Flüssigkeit. Stokes zog aus diesen Umständen den Schluß, daß das physikalische Problem der stationären Bewegung eines Zylinders in einer zähen Flüssigkeit unlösbar ist. Natürlich ist die Tatsache, daß die in formaler Analogie gebildete Lösung die Randbedingung im Unendlichen nicht erfüllt, an sich kein Beweis für die Nichtexistenz einer solchen Lösung. Andererseits dürfte es nicht sehr schwer sein, diesen Beweis streng zu führen.

152. Das Paradoxon von Whitehead.

In der von Stokes gegebenen Lösung des Problems der stationären Bewegung der Kugel (§ 9, (23)) sind u_j und p lineare und homogene Funktionen der Größen U_1, U_2, U_3. Es ist naheliegend, die von Stokes gefundenen Ausdrücke als die ersten Glieder von Reihen aufzufassen, die nach Potenzen von U_1, U_2, U_3 fortschreiten. Im Jahre 1888 machte Whitehead in Anschluß an Stokes einen Versuch, die Glieder in u_j, p, welche im U_1, U_2, U_3 vom zweiten Grade sind, zu berechnen. Wir geben einen kurzen Bericht über diese Untersuchung von Whitehead. Wir legen der Einfachheit halber die Koordinatenachsen so, daß die x_1-Achse mit der Bewegungsrichtung parallel wird. Die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung, auf ein mit der Kugel fest verbundenes Bezugssystem bezogen, sind, wie wir im ersten Teile, S. 12, sahen, wenn wir die Geschwindigkeitskomponenten $= -\,U_1\delta_{j1} + u_j$ setzen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (j, k = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Die Nebenbedingungen sind: Für $R^2 = x_j^2 = a^2$, $u_j = U_1 \delta_{j1}$; für $R \to \infty$, $u_j = 0$.

Stokes vernachlässigte in den Gleichungen (4) die rechten Seiten. Er löste also die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

und zwar durch den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} u_j &= \frac{3}{2} U_1 \frac{a}{R} \delta_{j1} - \frac{a}{4} U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j}\left(3R + \frac{a^2}{R}\right) = u_j^{(1)}, \\ p &= -\frac{3}{2} \mu a U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} = p^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir setzen jetzt:

$$u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)} + \cdots, \qquad p_2 = p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots,$$

wo $u_j^{(1)}$, $p^{(1)}$ die in (5) angegebenen Werte haben sollen und wo $u_j^{(n)}$, $p^{(n)}$ den Faktor U_1^n enthalten sollen. Zur Bestimmung von $u_j^{(2)}$, $p^{(2)}$ erhalten wir aus (4) die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} + \varrho u_k^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_j} = 0. \tag{6}$$

Die Nebenbedingungen sind: für $R = a$, $u_j^{(2)} = 0$; für $R \to \infty$, $u_j^{(2)} \to 0$. Wir sehen hier vom letzten Gliede rechts in der ersten Gleichung (6) ab. Wir beschränken uns also auf die Aufgabe, eine Lösung $u_j^{(2)}$, $p^{(2)}$ der Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j^{(2)} - \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

zu finden, welche den oben bei (6) erwähnten Nebenbedingungen genügt. Das System (7) ist ein lineares, inhomogenes System, es empfiehlt sich daher, diese Aufgabe in zwei zu zerlegen: erstens irgendeine außerhalb der Kugel $R = a$ reguläre Lösung des Systems (7) zu finden, zweitens eine jene Lösung an der Kugel $R = a$ und in unendlicher Ferne kompensierende, für $R > a$ reguläre Lösung der Stokesschen Gleichungen (1) zu finden.

Es ist nicht schwer, die erste Aufgabe zu lösen. Eine Lösung des Systems (7) ist:

$$u_j^{(2)} = -\frac{\varrho a U_1^2}{\mu}\left\{\frac{3 x_1}{4 R} \delta_{j1} - \frac{1}{16} \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_j} R^3 - \frac{a^2}{4}\left(\frac{x_1}{R^3} \delta_{j1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 R}{\partial x_1^2 \partial x_j}\right)\right\},$$

$$p_j^{(2)} = 0.$$

Um so schwieriger ist aber die zweite Aufgabe. Es gelang in der Tat Herrn Whitehead nicht, diese Aufgabe zu lösen. Er zog hieraus den Schluß, daß das physikalische Problem, das er lösen wollte, keine Lösung besitzt. Bei der Bewegung eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit sollen nach Whitehead Diskontinuitätsflächen auftreten.

153. Erklärung dieser Paradoxien.

Dem inneren Grunde der Paradoxien, zu welchen Stokes und Whitehead in ihren hier dargelegten Untersuchungen sich geführt sahen, sind wir schon im 2. Paragraphen, S. 18, begegnet. Die Annahme, daß eine Lösung der Gleichungen (4), die außerhalb einer gewissen Fläche regulär ist, in eine Potenzreihe nach U_1 entwickelt werden kann, ist unzulässig. Aber nicht nur diese Annahme, sondern auch die Stokesschen Gleichungen (1) sind unrichtig. Man sieht das sofort, wenn man die Glieder dieser Gleichungen hinsichtlich der Größenordnung mit den in den vollständigen Gleichungen (4) vorkommenden, aber in (1) vernachlässigten Gliedern vergleicht. Wir haben z. B.:

$$\mu \varDelta u_1^{(1)} = \frac{3}{2} a \mu U_1 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x_1^2}{R^5}\right).$$

Gleichzeitig haben wir:

$$-\varrho U_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} = -\frac{3}{4} \varrho a U_1^2 \frac{x_1}{R^3}\left(1 - \frac{3x_1^2}{R^2}\right) + \frac{3}{4} \varrho a^3 U_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \frac{1}{R}.$$

Wie klein auch U_1 ist, es gibt stets Bereiche, in denen $\left|\varrho U_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1}\right|$ im Verhältnis zu $|\mu \varDelta u_1^{(1)}|$ beliebig groß ist. Schon in erster Näherung ist es deshalb, wenn man ein überall richtiges Bild der Bewegung erhalten will, notwendig, das erste Glied rechts in der ersten Gleichung (4) mitzunehmen. Um so mehr ist dies notwendig, wenn man die in erster Näherung gefundene Lösung zur Grundlage einer genaueren Berechnung der Bewegung machen will. Zu einer exakten Berechnung des Widerstandes müssen wir also zunächst von den erweiterten Stokesschen Gleichungen (siehe S. 12) ausgehen.

III.

Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den erweiterten Stokesschen Gleichungen.

§ 16. Das Problem der Kugel.*

16 1. Aufstellung spezieller Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen.

Wir kehren zu dem Problem zurück, die Strömung einer sonst den ganzen Raum erfüllenden, zähen Flüssigkeit zu berechnen, welche durch eine kleine Kugel erzeugt wird, die sich darin mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wir benutzen ein Bezugssystem, dessen Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt und dessen x_1-Achse mit der Bewegungsrichtung der Kugel parallel ist. Wir bezeichnen die auf dieses System bezogenen Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit mit $-U_1 + u_1$, u_2, u_3. Zur Bestimmung von u_j und des Druckes p erhalten wir, wie wir S. 12 sahen, bei Vernachlässigung der in den Größen u_j quadratischen Glieder:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{1}$$

Wir haben eine Lösung dieses Systems zu suchen, die außerhalb der Kugel $R = a$ regulär ist und welche den Nebenbedingungen: für $R = a$: $u_1 = U_1$, $u_2 = u_3 = 0$; für $R \to \infty$: $u_j \to 0$ genügt.

Wir haben im 4. Paragraphen S. 32 gesehen, daß das System (1) die Lösung:

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_j}, \quad p^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu \Delta \Phi + \varrho U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)$$

* Vgl. § 15, Schlußbemerkung.

besitzt, wo:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma'} O(\sigma' s) = \frac{1}{\sigma'} \int_0^{\sigma' s} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha, \quad \sigma = \frac{\varrho U_1}{2\mu}, \quad s = R + \frac{\sigma}{\sigma'} x_1,$$

$$R^2 = x_j^2, \quad R \geqq 0,$$

und wo σ' diejenige der beiden Größen $\pm \sigma$ ist, welche positiv ist. **$2\sigma' a$, d. h. $\varrho | U_1 | a/\mu$ ist die sogenannte Reynoldssche Zahl.** *Wir nehmen zunächst an, daß sie verglichen mit 1 klein ist, d. h. wir betrachten Fälle, in denen entweder der Kugelradius oder die Geschwindigkeit verhältnismäßig klein oder aber der Reibungskoeffizient μ groß ist.* Wir haben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1 - e^{-\sigma' s}}{\sigma R}, \quad \Delta \Phi = \frac{2}{R} e^{-\sigma' s};$$

folglich:

$$\Delta \Phi + \frac{\varrho U_1}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{2}{R}$$

und

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \frac{2}{R} e^{-\sigma' s} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_j}, \quad p^{(1)} = \frac{2 \mu x_1}{R^3}. \tag{2}$$

Wir haben in § 4 Formel (12), S. 34, ferner gesehen, daß für kleine Werte von $\sigma' s$:

$$\Phi = s - \frac{1}{4} \sigma' s^2 + \cdots = R + \frac{\sigma}{\sigma'} x_1 - \frac{1}{4} \sigma' (R^2 + x_1^2) - \frac{1}{2} \sigma R x_1 + \cdots, \tag{3}$$

also für kleine R annähernd, bei Vernachlässigung der Glieder, welche σ' oder s als Faktor enthalten:

$$u_j^{(1)} = \delta_{1j} \frac{2}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial x_j}.$$

Eine andere Lösung von (1) ist offenbar:

$$u_j^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \frac{1}{R}, \quad p^{(2)} = \varrho U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{R}. \tag{4}$$

162. Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen, welche die Randbedingungen angenähert erfüllen.

Ein Blick auf (9, 24) zeigt sofort, daß wir aus (2) und (4) eine angenäherte Lösung unseres Problems bilden können, welche dem System (1) genügt, im Unendlichen die Bedingungen $u_j = 0$ und auf der Kugel, bis auf Glieder von der Größenordnung $\sigma' a U_1$ die Bedingungen $u_1 = U_1$, $u_2 = u_3 = 0$ erfüllt. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u_j &= \frac{3}{4} a U_1 u_j^{(1)} - \frac{1}{4} a^3 U_1 u_j^{(2)} = \frac{3}{2}\frac{a}{R} U_1 e^{-\sigma' s} \delta_{1j} - \\ &\qquad - \frac{1}{4} a U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j}\left(3\Phi + \frac{a^2}{R}\right), \\ p &= \frac{3}{2} \mu a U_1 \frac{x_1}{R^3} + \frac{1}{4} \varrho U_1^2 \frac{a^3}{R^3}\left(1 - \frac{3 x_1^2}{R^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn wir in (5) den Wert von Φ einsetzen, erhalten wir:

$$u_j = \frac{3}{2}\frac{a}{R} U_1 e^{-\sigma' s} \delta_{1j} - \frac{3}{4} a U_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1 - e^{-\sigma' s}}{\sigma R} - \frac{1}{4} a^3 U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j} \frac{1}{R}. \quad (6)$$

Die gefundene Lösung besitzt offenbar Rotationssymmetrie um die x_1-Achse. Wir können sie infolgedessen durch die sogenannte Stokessche Stromfunktion ausdrücken. Wir setzen für einen Augenblick:

$$\frac{3}{4} a U_1 \Phi + \frac{1}{4} a^3 U_1 \frac{1}{R} = \Psi$$

und haben dann:

$$u_j = \Delta \Psi \cdot \delta_{1j} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_j}.$$

Ψ kann als eine Funktion der beiden Größen x_1 und $h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ aufgefaßt werden. Wenn wir:

$$-h \frac{\partial \Psi}{\partial h} = H$$

setzen, so haben wir:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial h^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial \Psi}{\partial h} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{h^2} H, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = -\frac{x_3}{h^2} H,$$

folglich:

$$u_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h} u_2 + \frac{x_3}{h} u_3 = \frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}. \quad (7)$$

H ist dann die Stokessche Stromfunktion für die Bewegung mit den Geschwindigkeitskomponenten u_1, u_2, u_3. Dagegen ist $H + \frac{1}{2} U_1 h^2$ die Stromfunktion für die Bewegung, deren Geschwindigkeitskomponenten $-U_1 + u_1$, u_2, u_3 sind. Die Gleichung der Stromlinien, d. h. der Bahnkurven der Flüssigkeitspartikel, ist in unserem Falle:

$$H + \tfrac{1}{2} U_1 h^2 = \text{Konst.}$$

Wir setzen die obigen Werte für Ψ und Φ ein und erhalten so für die Funktion H den Ausdruck:

$$H = \frac{1}{4}\, a U_1 \frac{h^2}{R}\left(\frac{a^2}{R^2} - 3\,\frac{1 - e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{\sigma' R + \sigma x_1}\right). \tag{8}$$

Die Formeln (7) und (8) sind mit den Formeln (5) und (6) gleichbedeutend.

163. Untersuchung der Gültigkeit der Lösung. Vergleich mit der Stokesschen Lösung.

Wir wollen jetzt prüfen, unter welchen Umständen unsere Formeln (5) eine hinreichend genaue Lösung unseres Problems ergeben. Wir haben vorausgesetzt, daß es an der Oberfläche der Kugel $R = a$ erlaubt ist, in der zweiten Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder zu berücksichtigen. Ein Blick auf (3) zeigt nun sofort, daß dies nur dann gestattet ist, wenn $\sigma' a$ eine kleine Größe ist, die neben 1 vernachlässigt werden kann. Wenn dies der Fall ist, haben wir in der Umgebung der Kugel $R = a$ annähernd:

$$u_j = \frac{3}{2}\, U_1 \frac{a}{R}\,\delta_{1j} - \frac{1}{4}\, a U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j}\left(3R + \frac{a^2}{R}\right),$$

d. h. die Stokessche Lösung des Problems der Kugel. Wenn man aus jener Lösung die Glieder $\varrho u_k \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$ der vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen berechnet, so findet man, daß sie unter der Voraussetzung $\sigma' a$ klein gegen 1 im Vergleich mit den in (1) mitgenommenen Gliedern klein sind. In der Umgebung der Kugel ist also unsere Näherung erlaubt, wenn $\sigma' a$ klein gegen 1 ist. In den von der Kugel entfernten Teilen der Flüssigkeit ist die aus (6) berechnete Geschwindigkeit klein neben U_1. Wir haben deshalb in diesen Bereichen:

$$\left| u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| \text{ klein gegen } \left| U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right|.$$

Wenn $\sigma' a$ klein gegen 1 ist, so gibt also unsere Lösung (6) sowohl in der Umgebung der Kugel wie in großer Entfernung davon ein angenähert richtiges Bild der Bewegung.

Ein Vergleich der hier gefundenen Bewegung mit derjenigen, zu welcher Stokes geführt wurde, zeigt sofort einen charakteristischen Unterschied zwischen diesen beiden Bewegungen. Die Symmetrie in bezug auf die Ebene $x_1 = 0$, welche für die von Stokes betrachtete Bewegung charakteristisch ist, ist in der neuen Bewegung nicht mehr vorhanden. Mit anderen Worten, die Beziehungen:

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = u_1(-x_1,x_2,x_3), \quad u_2(x_1,x_2,x_3) = -u_2(-x_1,x_2,x_3),$$
$$u_3(x_1,x_2,x_3) = -u_3(-x_1,x_2,x_3),$$

welche für die von Stokes untersuchte Bewegung Geltung haben, bestehen bei der neuen Bewegung nicht.

16 4. Eigenschaften der neuen Lösung. Ausblick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten.

Wir haben gesehen, daß für die neue Lösung eine gewisse Dissymmetrie der Bewegung vor und hinter der Kugel charakteristisch ist. Um die Art dieser Dissymmetrie festzustellen, bemerken wir, daß in Bezug auf ein mitbewegtes Koordinatensystem nach der neuen Lösung in großer Entfernung von der Kugel vor derselben:

$$u_1 = \frac{3}{4} \frac{a U_1}{\sigma} \frac{x_1}{R^3},$$

hinter derselben:

$$u_1 = \frac{3}{2} \frac{a U_1}{R}$$

ist. In der Stokesschen Lösung ist dagegen sowohl vor wie hinter der Kugel in großer Entfernung:

$$u_1 = \frac{3}{2} \frac{a U_1}{R}.$$

Wir sehen, daß nach der neuen Lösung die Flüssigkeit hinter der Kugel eine Tendenz hat, dieser zu folgen, während die Flüssigkeit vor der Kugel ausweicht.

Die Art des Schwanzes, der sich hinter der Kugel bildet, erkennt man durch Berechnung des Wirbelvektors. Die Wirbellinien sind offenbar Kreise, deren Ebenen gegen die x_1-Achse senkrecht sind und deren Mittelpunkte auf dieser Achse liegen. Die Wirbelbewegung in einem beliebigen Punkte des Raumes ist unter diesen Umständen durch den Betrag des Wirbelvektors gekennzeichnet. Er ist in einem mitbewegten Bezugssystem:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3} (1 + \sigma' R)\, e^{-\sigma' R - \sigma x_1}.$$

Nach Stokes würde er den Wert:

$$\frac{3}{2} a U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3}$$

haben. Wir sehen, daß er nach der neuen Lösung in großen Entfernungen vor der Kugel, wo x_1 dasselbe Vorzeichen wie σ hat und also der Exponent in unserer Formel den Wert:

$$-\sigma'(R + |x_1|)$$

hat, sehr viel schneller mit $1/R$ abnimmt, als es in der Stokesschen Theorie der Fall ist. Wir sehen ferner, daß hinter der Kugel, wo x_1 dasselbe Vorzeichen wie $-\sigma$ hat und wo also der Exponent den Wert:

$$-\sigma'(R - |x_1|)$$

hat, zwar in großen Entfernungen von der Kugel im allgemeinen der Betrag des Wirbelvektors exponentiell und also schneller als nach der Stokesschen Formel abnimmt, daß aber die Umgebung der vom Mittelpunkt der Kugel durchlaufenen Bahn eine Ausnahme bildet, indem hier:

$$R = |x_1| + \frac{1}{2}\frac{x_2^2 + x_3^2}{|x_1|} + \cdots$$

also annähernd: $R = |x_1|$ ist und folglich der Exponent annähernd den Wert Null hat. In diesem Bereich ist der Betrag des Wirbelvektors annähernd:

$$\frac{3}{2}\, a\, U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3}(1 + \sigma' R).$$

Bei großen $\sigma' R$ können wir hierfür einfacher:

$$\frac{3}{2}\, a\, U_1 \sigma' \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^2}$$

schreiben. Hinter der Kugel nimmt also der Betrag des Wirbelvektors wie $1/R$ ab, also langsamer als bei der Theorie von Stokes, nach welcher der Betrag des Wirbelvektors in allen Richtungen wie $1/R^2$ abnimmt.

Wenn wir zwar $R > a$, aber doch $\sigma' R$ klein annehmen, können wir die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickeln und nur die ersten Glieder berücksichtigen. Man erhält für den Betrag des Wirbelvektors:

$$\frac{3}{2}\, a\, U_1 \frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{R^3}(1 - \sigma x_1(1 + \sigma' R) + \cdots).$$

Auch in der Nähe der Kugel ist wegen des Gliedes:

$$-\sigma x_1(1 + \sigma' R)$$

der Wirbelvektor vor der Kugel dem Betrage nach kleiner als hinter der Kugel. Ein Vergleich mit der Stokesschen Formel zeigt, daß auch in diesem Bereich der Wirbelvektor vor der Kugel nach der neuen Theorie kleiner als nach der alten ist, hinter der Kugel dagegen umgekehrt nach der neuen Theorie größer als nach der alten ist.

Wir wollen, an diesem Punkte angelangt, einen Blick auf die klassische Green-Dirichletsche Theorie der Bewegung einer Kugel in einer idealen Flüssigkeit werfen. Nach jener Theorie soll die Bewegung der Flüssigkeit dieselbe Symmetrie in bezug auf eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende, gegen die Bewegungsrichtung derselben senkrechte Ebene aufweisen, welche wir in der von Stokes untersuchten Bewegung fanden. Kann dieses Ergebnis richtig sein? Wir haben gesehen, daß selbst bei den kleinsten Geschwindigkeiten, wo die Bewegung in so hohem Maße, wie es überhaupt möglich ist, von der Reibung beherrscht wird, doch die Trägheit eine Dissymmetrie erzeugt. Kann man annehmen, daß in dem entgegengesetzten Grenzfalle, wo die Reibung keine Rolle mehr spielt, sondern die Trägheit allein das Feld beherrscht, jene Dissymmetrie verschwinden wird? Ist es nicht wahrscheinlich, daß die Dissymmetrie auch bei verschwindender Reibung bestehen bleibt? Auf diese Frage kommen wir später zurück.

Auf den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel können offenbar nur die Verhältnisse in der Umgebung derselben einen Einfluß haben. Da unsere Lösung in diesem Gebiete mit der von Stokes gefundenen übereinstimmt, so erhalten wir in erster Näherung für den Widerstand den Stokesschen Wert (vgl. S. 111): $6\pi\mu a U_1$.

Es dürfte hier am Platze sein, einige Worte über die Bedeutung des Stokesschen Widerstandsgesetzes zu sagen. Stokes wurde zu seinen Untersuchungen über den Widerstand einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit durch seine Pendelstudien geführt. Eine größere Bedeutung bekam das Gesetz erst, nachdem es in der Kolloidchemie Verwendung gefunden hatte. Das Gesetz spielt in der Tat eine wichtige Rolle in Einsteins Theorie der Brownschen Bewegung. Außerdem hat man das Gesetz dazu benutzt, die Größe der kolloidalen Partikel zu bestimmen. Durch diese Umstände hat das Gesetz eine sehr große Bedeutung für die Kolloidchemie gewonnen. Daß das Gesetz für die Theorie des Regens und damit für die Meteorologie wichtig ist, liegt auf der Hand. Aber auch bei vielen rein physikalischen Untersuchungen ist das Gesetz von Bedeutung gewesen. Es genüge, hier auf zwei Beispiele hinzuweisen. Einstein hat das Gesetz auf die Jonenbeweglichkeit angewandt. Millikan hat es bei seiner Bestimmung der Größe der Elektronenladung benutzt.

165. Teilung der vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung in Glieder mit $U_1 | U_1 |$ und in Glieder mit U_1^2.

Die oben gegebene Lösung des Problems der Kugel stellt nur eine Annäherung dar. An zwei Stellen haben wir Glieder vernachlässigt. In den hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \varrho U_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} &= \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

haben wir die rechte Seite der ersten Gleichung vernachlässigt. Und die Randbedingung $u_j = U_1 \delta_{1j}$ an der Oberfläche der Kugel wird von unserer Lösung nicht exakt, sondern nur annähernd erfüllt. Eine Prüfung der vernachlässigten Glieder zeigt nun, daß sie von verschiedener Art sind. Wenn wir die oben gegebene Lösung unseres Problems unter Berücksichtigung der rechten Seite der ersten Gleichung (9) verbessern wollen, so müssen wir in jenes Glied unsere angenäherte Lösung (5) einsetzen und aus dem so erhaltenen Systeme:

$$\left.\begin{aligned} \mu \Delta u'_j - \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \varrho U_1 \frac{\partial u'_j}{\partial x_1} &= \varrho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

mit den Nebenbedingungen: für $R = a$, $u'_j = 0$; für $R \to \infty$, $u'_j \to 0$ die Korrektionsglieder u'_j, p' berechnen. Nun enthalten die Größen u_j in (5) den Faktor U_1. Die rechte Seite von (10) wird also den Faktor U_1^2 enthalten. Offenbar werden u'_j, p' mit demselben Faktor behaftet sein. Betrachten wir dagegen die Glieder in (5), welche wir bei der Erfüllung der Grenzbedingung $u_j = U_1 \delta_{1j}$ für $R = a$ vernachlässigt haben, so sehen wir aus (3) sofort, daß sich unter ihnen Glieder befinden, welche den Faktor $U_1 \sigma'$, also, für reelles U_1, den Faktor $U_1 | U_1 |$ enthalten. Denselben Faktor werden offenbar die Korrektionsglieder enthalten, welche aus jenen Gliedern in (5) hervorgehen. Offenbar sind die beiden Arten von Korrektionsgliedern, welche wir hier unterschieden haben, von ganz verschiedener Natur. So kann in dem Ausdruck für den Widerstand wohl ein Glied mit dem Faktor $U_1 | U_1 |$, aber kein Glied mit dem Faktor U_1^2 vorkommen, weil die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, gleichzeitig mit U_1 ihre Vorzeichen wechseln müssen. Es ist ferner ersichtlich, daß ein Glied mit dem Faktor $U_1 | U_1 |$ nicht von einem Gliede mit dem Faktor U_1^2 aufgehoben werden kann. Es ist deshalb berechtigt, die Aufgabe, die uns jetzt obliegt, in zwei zu zerlegen, indem wir zuerst die Korrektionsglieder mit dem Faktor $U_1 | U_1 |$ und dann, näherungsweise, die Korrektionsglieder mit dem Faktor U_1^2 berechnen.

16 6. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1 | U_1 |$. Genauere Widerstandsformel.

Die erste Aufgabe können wir ohne Schwierigkeit lösen. Wir setzen statt (5):

$$u_j = A\, u_j^{(1)} - B\, u_j^{(2)}, \qquad p = A\, p^{(1)} - B\, p^{(2)}$$

und bestimmen A und B aus den Bedingungen: für $R = a$, $u_j = U_1\, \delta_{1j}$, indem wir jetzt auch die Glieder: $-\delta_{1j}\, \sigma'$ des Ausdruckes (2) für $u_j^{(1)}$ berücksichtigen.

Wir erhalten:

$$\delta_{1j}\left\{A(1 - a\sigma') + \frac{B}{a^2}\right\} + \frac{x_1 x_j}{a^2}\left(A - \frac{3B}{a^2}\right) = a\, U_1 \delta_{1j}.$$

Also:

$$A(1 - a\sigma') + \frac{B}{a^2} = a\, U_1, \qquad A - \frac{3B}{a^2} = 0$$

und:

$$A = \tfrac{3}{4} a\, U_1 (1 + \tfrac{3}{4} a\sigma'), \qquad B = \tfrac{1}{4} a^3\, U_1 (1 + \tfrac{3}{4} a\sigma').$$

Diese Ausdrücke für A und B unterscheiden sich nur durch den Faktor $1 + \frac{3}{4} a\sigma'$ von den Ausdrücken, welche wir in erster Näherung, bei $a\sigma' \to 0$, erhielten. Wenn die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit mit diesem Faktor multipliziert werden, so muß offenbar auch der Widerstand mit ihm multipliziert werden. Der Widerstand hat also, in zweiter Näherung, den Wert:

$$6\pi\mu a\, U_1 \left(1 + \frac{3}{8}\frac{\varrho a |U_1|}{\mu}\right). \tag{11}$$

Betreffs des Gültigkeitsbereiches dieser Formel darf nicht vergessen werden, daß sie unter der Voraussetzung abgeleitet worden ist, daß die Flüssigkeit, von der Kugel abgesehen, den ganzen Raum erfüllt. Wir werden später in § 19 darauf zurückkommen.

16 7. Berücksichtigung der Glieder mit U_1^2.

Wir wenden uns zur Bestimmung der Korrektionsglieder, welche den Faktor U_1^2 enthalten. Eine Gruppe dieser Glieder, wir nennen sie u_j^*, p^*, rühren von den Nebenbedingungen her, indem wir noch nicht auf das Glied $-\sigma x_1$ der Exponentialfunktion und auf das letzte ausgeschriebene Glied: $-\frac{1}{2}\sigma R x_1$ der Reihe (3) S. 167 für Φ Rücksicht genommen haben. Die Funktionen u_j^*, p^* müssen also außerhalb der Kugel $R = a$ das System (1) befriedigen, für $R = a$ der Bedingung:

$$u_j^* = \frac{3}{8}\sigma U_1 \left\{2x_1\delta_{1j} + x_j\left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right)\right\}, \tag{12}$$

und für $R \to \infty$ der Bedingung: $u_j^* \to 0$ genügen. Wir setzen:

$$u_j^* = C\left(\delta_{1j}\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_1^2\partial x_j}\right) - C'\frac{\partial^3}{\partial x_1^2\partial x_j}\frac{1}{R},$$

$$p^* = -2\mu C\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{1}{R}.$$

Wir haben für kleine R-Werte:

$$u_j^* = -6C'\frac{x_1}{R^5}\delta_{1j} + \frac{x_j}{R^3}\left\{C\left(1 - \frac{3x_1^2}{R^2}\right) - \frac{3C'}{R^2}\left(1 - \frac{5x_1^2}{R^2}\right)\right\} + \cdots$$

Wir können deshalb der Bedingung (12) annähernd, d. h. bis auf Glieder der Ordnung $\sigma^2 a^2 U_1$, dadurch genügen, daß wir setzen:

$$C = -\tfrac{3}{4}\sigma U_1 a^3, \qquad C' = -\tfrac{1}{8}\sigma U_1 a^5.$$

Die der Geschwindigkeit u^* entsprechende Stokessche Stromfunktion ist:

$$\left.\begin{aligned} H^* &= \frac{3}{4}\sigma U_1 a^3 h\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial h} + \frac{1}{8}\sigma U_1 a^5 h\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial h}\frac{1}{R} = \\ &-\frac{3}{4}U_1 a^3\frac{h^2}{R^3}\left\{1 - (1+\sigma' R)e^{-\sigma' s}\right\} + \frac{3}{8}\sigma U_1 a^5\frac{x_1 h^2}{R^5}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir wenden uns dem schwierigsten Teile unserer Aufgabe zu, der Lösung des Systemes (10) mit den dort angegebenen Nebenbedingungen. Ihre einfachste Gestalt nimmt diese Aufgabe an, wenn wir durch die Gleichungen (7) S. 168 die Stokessche Stromfunktion einführen. Man bestätigt durch eine direkte Rechnung, daß, wenn u_j^{**}, p^{**} dem System (10) genügen sollen, die diesen Größen entsprechende Stromfunktion H^{**} die partielle Differentialgleichung:

$$\left(\mu D + \varrho U_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)DH^{**} = \frac{\varrho}{h}\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial DH}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial h}\frac{\partial DH}{\partial x_1} - \frac{2}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}DH\right) \tag{14}$$

befriedigen muß, wo:

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} - \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial h}$$

und wo H den in Gleichung (8) angegebenen Wert hat*. Die Schwierigkeit der Gleichung (14) beruht auf der komplizierten Form der rechten Seite. Wenn man eine im ganzen Raume gültige Lösung der Gleichung (14) wünscht, läßt sich die rechte Seite nicht vereinfachen. Anders liegt aber die Sache, wenn man nur die Bewegung in der Umgebung der Kugel berechnen will. In diesem Falle kann man H durch den einfachen Ausdruck:

$$\frac{1}{4}\, a\, U_1 \frac{h^2}{R}\left(\frac{a^2}{R^2} - 3\right)$$

ersetzen. Man findet in diesem Falle:

$$DH = \frac{3}{2}\, a\, U_1 \frac{h^2}{R^3},$$

$$\frac{\varrho}{h}\left\{\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial DH}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial h}\frac{\partial DH}{\partial x_1} - \frac{2}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1} DH\right\} = \frac{9}{4}\varrho a^2 U_1^2 \frac{x_1 h^2}{R^6}\left(\frac{a^2}{R^2} - 3\right).$$

Den Beweis, daß es bei der Berechnung der Bewegung in der Umgebung der Kugel tatsächlich erlaubt ist, in (14) rechts diesen einfachen Wert zu benutzen, kann man in der Weise führen, daß man mittels der in § 4 S. 30 dargelegten Methode die partielle Differentialgleichung (14)

---

* Wenn man in (10):

$$u_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h}u_2 + \frac{x_3}{h}u_3 = \frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}, \qquad \left(h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}\right)$$

$$u_1' = -\frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial h}, \quad \frac{x_2}{h}u_2' + \frac{x_3}{h}u_3' = \frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial x_1}$$

setzt und die Rotationssymmetrie um die x_1-Achse benutzt, welche sowohl das Vektorfeld u_j wie das Vektorfeld u_j' haben muß, so erhält man einerseits:

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial h}\right)\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial h}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x_1} + \varrho U_1 \cdot \frac{1}{h}\frac{\partial^2 H^{**}}{\partial h\, \partial x_1} =$$

$$-\varrho\left\{\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}\cdot\frac{1}{h}\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial h} - \frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial h}\right)\right\},$$

andererseits:

$$\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial h}\right)\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial x_1}\right) = \mu\Delta\left(\frac{x_2}{h}u_2' + \frac{x_3}{h}u_3'\right) =$$

$$= \mu\left\{\frac{x_2}{h}\Delta u_2' + \frac{x_3}{h}\Delta u_3' - \frac{2}{h}\frac{\partial u_1'}{\partial x_1} - \frac{2x_2}{h^2}\frac{\partial u_2'}{\partial h} - \frac{2x_3}{h^2}\frac{\partial u_3'}{\partial h} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_2 u_2' + x_3 u_3'}{h^3}\right\} = \frac{\partial p'}{\partial h} - \varrho U_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial x_1}\right) + \frac{2\mu}{h}\frac{\partial^2 H^{**}}{\partial h\, \partial x_1} -$$

$$- \frac{2\mu}{h}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H^{**}}{\partial x_1}\right) - \frac{\varrho}{h}\frac{\partial H}{\partial h}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}\right) + \frac{\varrho}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial H}{\partial x_1}\right).$$

Elimination von p' zwischen diesen beiden Gleichungen gibt die Formel (14) des Textes. Einfacher kann diese Formel aus den grundlegenden hydrodynamischen Integralgleichungen in § 1 abgeleitet werden.

(welche ja einen speziellen Fall der erweiterten Stokesschen Gleichungen darstellt) durch ein über den Bereich $R > a$ erstrecktes Integral integriert und dann aus diesem Integral die Glieder auswählt, welche in der Umgebung der Kugel $R = a$ die Hauptglieder sind. Man findet durch dieses Verfahren, auf dessen Einzelheiten wir der Kürze wegen hier nicht eingehen wollen, daß noch eine Vereinfachung der Gleichung (14) erlaubt ist, wenn wir nur die Umgebung der Kugel in Betracht ziehen wollen. Wir können nämlich links in (14) das Glied mit dem Faktor ϱU_1 vernachlässigen und erhalten so die einfache Gleichung:

$$D D H^{**} = \frac{9}{2} a^2 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^6}\left(\frac{a^2}{R^2} - 3\right).$$

Es ist nun leicht, eine Lösung dieser Gleichung zu finden, die sowohl an der Kugel $R = a$ wie in unendlicher Ferne der Bedingung genügt, daß die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten dort verschwinden. Diese Lösung ist:

$$H^{**} = -\frac{9}{16} a^2 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^4}\left(R^2 + \frac{1}{3} a^2\right) + \frac{3}{16} a^3 U_1 \sigma \frac{x_1 h^2}{R^3}\left(5 - \frac{a^2}{R^2}\right).$$

Wir bilden jetzt die Stromfunktion der ganzen Bewegung:

$$\tfrac{1}{2} U_1 h^2 + (1 + \tfrac{3}{4} a \sigma') H + H^* + H^{**}. \tag{15}$$

Wir führen in (15) für H und H^* ihre Werte in der Umgebung der Kugel ein und erhalten so den folgenden, in der Umgebung der Kugel gültigen Ausdruck für die Stromfunktion:

$$\frac{1}{4} U_1 \left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 \frac{h^2}{R^2}\left\{\left(1 + \frac{3}{4} a \sigma'\right) R(2R + a) + \frac{3}{4} a \sigma \frac{x_1}{R}(2R^2 + aR + a^2)\right\}. \tag{16}$$

Der Ausdruck (16) wurde, mit Ausnahme der Glieder, welche den Faktor σ' enthalten, zuerst von F. Noether aufgestellt (1911). Er ermöglicht offenbar ein genaues Studium der Strömung der Flüssigkeit in der Umgebung der Kugel. Die von der Trägheit bedingte Dissymmetrie tritt in den mit dem Faktor x_1 behafteten Gliedern zu Tage.

§ 17. Das Problem des Kreiszylinders.

17 1. Die Lambsche Lösung.

Wir haben in § 15 ein zweidimensionales Analogon der von Stokes gegebenen Theorie der Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit gesucht. Wir fanden, daß ein solches Analogon nicht existiert.

Wir untersuchen jetzt, ob es ein zweidimensionales Analogon der im vorigen Paragraphen gegebenen Lösung des Problemes der Kugel gibt. Um diese Frage zu beantworten, gehen wir von der am Schluß des 4. Paragraphen gefundenen Grundlösung des Systemes:

$$\mu \Delta u_k - \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\varrho U_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2 \tag{1}$$

aus. Wir setzen in (4, 20) S. 37 $x_1 = x_2 = 0$ und schreiben dann statt $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, x_1 und x_2. Aus t_{11}, t_{12}, p_1 erhalten wir in dieser Weise eine Lösung des Systemes (1), die wir mit $u_k^{(1)}$, $p^{(1)}$ bezeichnen. Wir haben:

$$\left.\begin{aligned} u_k^{(1)} &= 2 K_0(\sigma' R)\, e^{-\sigma x_1} \delta_{1k} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \{\log R + K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1}\}, \\ p^{(1)} &= 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} \log R, \qquad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir haben nach (4, 2) S. 39 für kleine R-Werte:

$$u_k^{(1)} = \delta_{1k} \log \frac{2}{\gamma \sigma' R} + \frac{x_1 x_k}{R^2}, \tag{3}$$

$$\gamma = 1{,}7811.$$

Eine andere Lösung des Systemes (1) ist:

$$u_k^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_k} \log R, \qquad p^{(2)} = \varrho U_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log R.$$

Wir bilden jetzt eine Lösung: $u_k = A_1 u_k^{(1)} + A_2 u_k^{(2)}$, $p = A_1 p^{(1)} + A_2 p^{(2)}$ des Systemes (1) und versuchen die Konstanten A_1, A_2 so zu bestimmen, daß für $R = a$ die Bedingungen: $u_1 = U_1$, $u_2 = 0$ erfüllt werden. Wir erhalten, wenn a so klein ist, daß wir mit genügender Annäherung mit dem angenäherten Wert (3) von $u_k^{(1)}$ rechnen können:

$$A_1 = -\frac{U_1}{\log \frac{\gamma \sigma' a}{2} - \frac{1}{2}}, \qquad A_2 = \frac{1}{2} a^2 A_1. \tag{4}$$

In der Nähe des Zylinders haben wir also:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= A_1 \left\{ \frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2}\gamma \sigma' R\right) - \frac{1}{2}(R^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log R \right\} \\ u_2 &= -\frac{1}{2} A_1 (R^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \log R. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Zylinder ausübt, haben eine Resultierende, welche pro Längeneinheit die Größe:

$$\int\limits_{R=a}\left\{-p\frac{x_1}{a}+\mu\left(\frac{du_1}{dn}+\mu\left(\frac{x_1}{a}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{x_2}{a}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right\}ds\right.$$

$$(ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2})$$

hat. Man findet leicht:

$$-\int\limits_{R=a}p\frac{x_1}{a}ds=-2\pi\mu A_1,\qquad \mu\int\limits_{R=a}\frac{du_1}{dn}ds=-2\pi\mu A_1,$$

$$\int\limits_{R=a}\left(\frac{x_1}{a}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{x_2}{a}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)ds=0.$$

Die Resultierende, deren Richtung selbstverständlich längs der negativen x_1-Achse verläuft, hat also den Betrag:

$$|4\pi\mu A_1|=\frac{4\pi\mu|U_1|}{|\frac{1}{2}-\log(\frac{1}{2}\gamma\sigma' a)|} \tag{6}$$

Die hier entwickelte Theorie für die Bewegung eines Kreiszylinders in einer zähen Flüssigkeit wurde im Jahre 1911 von Lamb gegeben.

17 2. Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten.

Wenn der Zylinder gleichzeitig mit der oben betrachteten translatorischen Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit U_1 eine Drehbewegung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω ausführt, so lagert sich über die oben betrachtete Bewegung der Flüssigkeit eine andere:

$$u_k^{(3)}=a^2\omega\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},\qquad p^{(3)}=-\varrho U_1 a^2\omega\frac{x_2}{R^2}. \tag{7}$$

Die von dieser Bewegung erzeugten Kräfte der Flüssigkeit auf den Zylinder haben (vgl. § 1 (3) S. 7) eine Resultierende, deren Betrag pro Längeneinheit des Zylinders $\pi\varrho U_1 a^2\omega$ ist und deren Richtung mit der Richtung des vektoriellen Produktes des Drehvektors und der translatorischen Geschwindigkeit zusammenfällt. Was wir hier gefunden haben, ist der Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten.

17 3. Methode zur numerischen Berechnung des Widerstandes bei größeren Werten von $\sigma' a$ bzw. der Reynoldsschen Zahl $2\sigma' a$.

Das Problem, den Widerstand zu berechnen, den ein Kreiszylinder erfährt, der sich ohne Drehung mit konstanter, gegen die Achse senkrechter Richtung in einer zähen Flüssigkeit bewegt, wurde kürzlich von Prof. Bairstow, Fräulein Cave und Fräulein Lang wieder aufgenommen (1923). Diese Autoren gingen vom System (1) S. 166 aus. Sie drückten die Geschwindigkeitskomponenten u_1 und u_2 durch eine Lagrangesche Stromfunktion ψ aus, indem sie:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \qquad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

setzten. Die Stromfunktion ψ muß dabei, wie aus (1) durch Elimination von p hervorgeht, der partiellen Differentialgleichung:

$$\left(\varDelta + 2\sigma \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varDelta \psi = 0 \tag{8}$$

genügen. Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung können wir aus unserer Lösung (5) der Gleichungen (1) ableiten. Um jene Lösung in einfachster Weise schreiben zu können, führen wir die Besselschen Funktionen $K_n(x)$ ein, indem wir sie durch die Gleichungen:

$$K_n(x) = \int\limits_0^\infty e^{-x \operatorname{cos hyp} s} \operatorname{cos hyp} n s \, ds$$

definieren. Zwischen den Funktionen $K_0(x)$ und $K_1(x)$ bestehen dann die Beziehungen:

$$K_1 + \frac{dK_0}{dx} = 0, \qquad K_0 + \frac{1}{x} K_1 + \frac{dK_1}{dx} = 0.$$

Wir definieren jetzt eine Funktion L von $x_1 = R\cos\vartheta$, $x_2 = R \sin\vartheta$ durch die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} L(x_1, x_2) = R K_1(\sigma' R) \frac{\sigma'}{\sigma} \int\limits_0^\vartheta e^{-\sigma R \cos \alpha} d\alpha - \frac{\vartheta}{\sigma} - \\ - R K_0(\sigma' R) \int\limits_0^\vartheta e^{-\sigma R \cos\alpha} \cos\alpha \, d\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Man findet durch eine einfache Rechnung, daß

$$\frac{\partial L}{\partial R} = - K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \sin\vartheta, \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{\sigma'}{\sigma} K_1(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} -$$
$$- \frac{1}{\sigma R} - K_0(\sigma' R) e^{-\sigma x_1} \cos\vartheta.$$

Folglich nach (2):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{x_1}{R}\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{x_2}{R^2}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_2}\{\log R + K_0(\sigma' R)e^{-\sigma x_1}\} = u_2^{(1)},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{x_2}{R}\frac{\partial L}{\partial R} + \frac{x_1}{R^2}\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -\frac{x_1}{\sigma R^2} - K_0(\sigma' R)e^{-\sigma x_1} +$$

$$+ \frac{\sigma'}{\sigma} K_1(\sigma' R)e^{-\sigma x_1}\frac{x_1}{R} =$$

$$= -2K_0(\sigma' R)e^{-\sigma x_1} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_1}\{\log R + K_0(\sigma' R)e^{-\sigma x_1}\} = -u_1^{(1)}.$$

L ist eine eindeutige Funktion von x_1 und x_2.

Aus L können wir eine etwas allgemeinere Lösung der partiellen Differentialgleichung (8) bilden. Wir setzen rechts in (9):

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{x_2 - x_2^{(0)}}{x_1 - x_1^{(0)}}.$$

Die so erhaltene Funktion L hängt von zwei Punkten x_1, x_2, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ ab. Wir schreiben sie deshalb $L(x_1, x_2; x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$. Diese Funktion haben Bairstow, Cave und Lang ihrer Lösung des Problems des Kreiszylinders zugrunde gelegt. Sie setzen:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta) = AL(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, 0, 0) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} L(R\cos\alpha, R\sin\alpha; a\cos\alpha, a\sin\alpha) f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\sin n\vartheta}{R^n}.$$

A, G_1, G_2 . . . sind hier Konstanten, welche zur Verfügung stehen. $f(\alpha)$ ist eine unbekannte Funktion, von welcher die Autoren doch annehmen, daß sie in eine Reihe von der Form:

$$f(\alpha) = e^{-a\cos\alpha}\sum_{q=0}^{\infty} a_q \cos q\alpha$$

entwickelt werden kann. Wenn eine Lösung dieser Form existiert, so ist das Problem offenbar auf die Berechnung der Konstanten $A, a_1, a_2, \ldots,$ $G_1, G_2, \ldots$ zurückgeführt worden. Wenn man in den Reihen eine endliche Zahl von Gliedern behält, kann man mit ihrer Hilfe erreichen, daß die Randbedingungen an der Oberfläche des Zylinders in einer gewissen Annäherung erfüllt sind. In dieser Weise haben die drei Autoren ihre Koeffizienten bestimmt.

Nach der hier dargelegten Methode haben Bairstow, Cave und Lang den Widerstand eines Kreiszylinders in dem Bereich von $\sigma' a = 0$ bis zu $\sigma' a = 5$ berechnet. In demjenigen Gebiete, wo experimentelle Bestimmungen des Widerstandes vorliegen, stimmt der berechnete Widerstand in bezug auf die Größenordnung mit dem Beobachteten überein, ist aber durchweg größer. Etwas Überraschendes liegt darin nicht, da die Geschwindigkeiten, welche hier in Betracht kommen, weit außerhalb des Bereiches liegen, wo die in (1) weggelassenen Glieder vernachlässigt werden können.

Prof. Bairstow hat mit seinen beiden Mitarbeiterinnen auch den Widerstand berechnet, den eine ebene Scheibe erfährt, welche sich in einer mit ihrer eigenen Ebene parallelen Richtung in einer zähen Flüssigkeit bewegt.

§ 18. Das Problem des Ellipsoides.

18 1. Einleitung.

Bei unserer Behandlung des Problems der Kugel sahen wir, daß in dem Ausdruck für den Widerstand, den eine Kugel erfährt, die sich in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit bewegt, ein Glied vorkommt, das den Faktor $U_1 \sigma'$ enthält und also mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar auf das Ellipsoid übertragen. Zu den von Oberbeck in schöner Weise berechneten Gliedern des Widerstandes müssen andere mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Glieder hinzukommen, deren Größe von der Orientierung des Ellipsoides in bezug auf die Bewegungsrichtung desselben abhängen muß. Wir wollen hier jene Glieder berechnen.

Wir wenden dieselben Bezeichnungen wie in § 9 an und setzen außerdem:

$$U_j = U\alpha_j, \quad U \geqq 0, \quad \alpha_j^2 = 1.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind dann die Richtungscosinusse der Bewegungsrichtung des Ellipsoides in bezug auf die Hauptachsen desselben. Wir schreiben die Komponenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Form: $-U\alpha_j + u_j$. Zur Bestimmung der Größen u_j erhalten wir die Gleichungen:

$$\mu \Delta u_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\varrho U \alpha_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{1}$$

Die Nebenbedingungen sind an der Oberfläche des Ellipsoides

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1: \tag{2}$$

$$u_j = U\alpha_j;$$

für $R^2 = x_j^2 \to \infty$: $\qquad \lim u_j = 0.$

18 2. Herstellung dreier spezieller Lösungen des Systemes (1).

Wir können die zur Lösung unserer Aufgabe nötigen Hilfsmittel dadurch gewinnen, daß wir drei verschiedene Systeme von Lösungen des Systemes (1) konstruieren. Wir gehen zunächst von dem im § 4 S. 34 betrachteten Tensor t_{jk} aus, wobei wir jedoch die Größen x_j und $x_j^{(0)}$ vertauschen. Die drei Größen t_{1k}, t_{2k}, t_{3k} ($k = 1, 2$ oder 3) definieren dann drei Funktionen der Größen x_1, x_2, x_3. Diese Funktionen genügen den partiellen Differentialgleichungen, welche wir im § 4 die erweiterten Stokesschen Gleichungen genannt haben und welche wir durch eine Drehung des Bezugssystemes in das System (1) überführen können. Indem wir diese Drehung des Bezugssystemes für die drei Funktionen t_{1k}, t_{2k}, t_{3k} selbst ausführen, erhalten wir eine erste Lösung des Systemes (1):

$$u_j = t_{jk} = \delta_{jk} \Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p = -2\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r},$$

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma s} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha,$$

$$s = r + \alpha_j (x_j - x_j^{(0)}), \quad \sigma = \frac{\varrho U}{2\mu},$$

$$r^2 = (x_j - x_j^{(0)})^2, \quad r \geqq 0.$$

k hat in diesen Formeln den Wert 1, 2 oder 3.

Wir haben im § 11, S. 137 eine durch die Gleichungen:

$$\chi = abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{W(s)}, \tag{4}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda} = 1, \qquad (\lambda > 0), \tag{5}$$

$$W(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$$

definierte Potentialfunktion benutzt. Sie nimmt, wie aus (4) ersichtlich ist, auf jedem Ellipsoid $\lambda =$ Konst. einen konstanten Wert an. Wir betrachten jetzt ein beliebiges Ellipsoid E jener Schar $\lambda =$ Konst., welches wir jedoch so wählen, daß es innerhalb des Ellipsoids $\lambda = 0$ fällt. λ soll also auf E einen solchen negativen Wert annehmen, daß $a^2 + \lambda$, $b^2 + \lambda$, $c^2 + \lambda$ alle positiv ausfallen. Aus dem Greenschen Satze folgt, wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 außerhalb von E liegt:

$$\chi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_E \left\{ \chi(x^{(0)}) \frac{d}{dn^{(0)}} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dn^{(0)}} \right\} dS^{(0)}$$

oder, da auf E $\chi(x^{(0)})$ einen konstanten Wert hat und da:

$$\int_E \frac{d}{dn^{(0)}} \frac{1}{r} \, dS^{(0)} = 0$$

ist, weil der Punkt x_1, x_2, x_3 nach unserer Annahme außerhalb von E liegt:

$$\chi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_E \frac{d\chi(x^{(0)})}{dn^{(0)}} \frac{dS^{(0)}}{r}.$$

Wir können also die Funktion χ außerhalb von E durch ein Integral von der Form:

$$\int_E \frac{F(x^{(0)})}{r} \, dS^{(0)}$$

darstellen.

Aus der Funktion Φ bilden wir jetzt eine neue Funktion Ψ von x_1, x_2, x_3, indem wir setzen:

$$\Psi(x) = \int_E F(x^{(0)}) \Phi(x, x^{(0)}) \, dS^{(0)}. \tag{6}$$

In derselben Weise, wie wir aus der Funktion Φ eine Lösung des Systems (1) abgeleitet haben, können wir jetzt aus Ψ eine Lösung desselben Systemes herleiten. Wir setzen:

$$u_{jk}^{(1)} = \delta_{jk} \Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{7}$$

$$p_k^{(1)} = 2\mu \int_E F(x^{(0)}) \frac{x_k - x_k^{(0)}}{r^2} \, dS^{(0)}. \tag{8}$$

Für jeden Wert von k ($k = 1$, 2 oder 3) genügen dann die Funktionen $u_{1k}^{(1)}$, $u_{2k}^{(1)}$, $u_{3k}^{(1)}$, $p_k^{(1)}$ dem System (1).

Ein neues System von Lösungen der Differentialgleichungen (1) leiten wir aus der Potentialfunktion Ω ab, welche wir in § 11 S. 137 benutzten und durch die Gleichung:

$$\Omega = \pi abc \int_\lambda^\infty \left\{ \frac{x_1^2}{a^2 + s} + \frac{x_2^2}{b^2 + s} + \frac{x_3^2}{c^2 + s} - 1 \right\} \frac{ds}{\Delta(s)} \tag{9}$$

definiert haben. Wir setzen:

$$u_{jk}^{(2)} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j \partial x_k}, \quad p_k^{(2)} = \varrho U a_l \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_l \partial x_k}. \tag{10}$$

Ein drittes System von Lösungen erhalten wir durch den Ansatz:

$$u_j^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_j}, \quad p^{(3)} = \varrho U a_l \frac{\partial \Pi}{\partial x_l}, \tag{11}$$

wo Π eine beliebige, außerhalb der Fläche (2) reguläre und in unendlicher Ferne verschwindende Potentialfunktion ist.

18₃. Ansatz zur Lösung des Problems.

Aus den gefundenen drei Systemen von Lösungen (7)—(8), (10), (11) setzen wir eine neue allgemeinere Lösung der Gleichungen (1) zusammen:

$$u_j = A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + A_k^{(2)} u_{jk}^{(2)} + u_j^{(3)},$$
$$p = A_k^{(1)} p_k^{(1)} + A_k^{(2)} p_k^{(2)} + p^{(3)}.$$

Sie enthält sechs willkürliche Konstanten $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ und eine willkürliche Potentialfunktion Π. Wir werden zeigen, daß wir, wenn $a\sigma$, $b\sigma$, $c\sigma$ genügend klein sind, über diese willkürlichen Elemente unserer Lösung so verfügen können, daß die Nebenbedingungen in genügender Annäherung erfüllt werden.

Wenn σr eine kleine Größe ist, so haben wir annähernd:

$$\Phi = r + a_j(x_j - x_j^{(0)}) - \tfrac{1}{4}\sigma\{r^2 + [a_j(x_j - x_j^{(0)})]^2\} + \cdots$$

und:

$$\delta_{jk}\Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{r}\delta_{jk} + \frac{(x_j - x_j^{(0)})(x_k - x_k^{(0)})}{r^3} - \frac{1}{2}\sigma(3\delta_{jk} - a_j a_k).$$

Wir haben also:

$$u_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}\int\limits_E \frac{F(x^{(0)})}{r}\,dS^{(0)} + x_k \int\limits_E \frac{F(x^{(0)})(x_j - x_j^{(0)})}{r^3}\,dS^{(0)} -$$
$$- \int\limits_E F(x^{(0)})\frac{x_k^{(0)}(x_j - x_j^{(0)})}{r^3}\,dS^{(0)} - \frac{1}{2}\sigma(3\delta_{jk} - a_j a_k)\int\limits_E F(x_0)\,dS^{(0)}.$$

Wir hatten:

$$\int\limits_E \frac{F(x^{(0)})}{r}\,dS^{(0)} = \chi$$

und haben in § 11 S. 139 gesehen, daß χ für große Werte von R den Wert $2abc/R$ annimmt. Da die linke Seite der obigen Gleichung für große R-Werte den Wert:

$$\frac{1}{R}\int\limits_E F(x^{(0)})\,dS^{(0)}$$

annimmt, so schließen wir, daß:

$$\int\limits_E F(x^{(0)})\,dS^{(0)} = 2abc$$

ist, folglich für kleine $\sigma' R$-Werte annähernd:

$$u_{jk}^{(1)} = \delta_{jk}\chi - x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\int_E \frac{x_k^{(0)} F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)} - \sigma abc(3\delta_{jk} - \alpha_j \alpha_k).$$

Wir setzen jetzt:

$$\Pi = -A_k^{(1)} \int_E \frac{x_k^{(0)} F(x^{(0)})}{r} dS^{(0)}$$

und haben dann für kleine $\sigma' R$-Werte:

$$A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + u_j^{(3)} = A_j^{(1)}\chi - A_k^{(1)} x_k \frac{\partial \chi}{\partial x_j} - \sigma abc(3A_j^{(1)} - \alpha_j \alpha_k A_k^{(1)}). \quad (12)$$

Da nun auf der Fläche (2) $\lambda = 0$, $\chi = \chi^{(0)}$ und:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_j} = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_j},$$

so gilt auf der Fläche (2) annähernd:

$$A_k^{(1)} u_{jk}^{(1)} + u_j^{(3)} = A_j^{(1)}\chi_0 + A_k^{(1)} x_k \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} - \sigma abc(3A_j^{(1)} - \alpha_j \alpha_k A_k^{(1)}). \quad (12)$$

Wir haben andererseits auf derselben Fläche:

$$A_k^{(2)} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_k} = 2\pi abc A_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta(s)} - $$
$$- 2\pi \left(\frac{A_1^{(2)} x_1}{a^2} + \frac{A_2^{(2)} x_2}{b^2} + \frac{A_3^{(2)} x_3}{c^2}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}$$

usw. Wir sehen aus diesen Gleichungen, daß wir, wenn a, b, c so klein sind, daß wir $\sigma^2 a^2$, $\sigma^2 b^2$, $\sigma^2 c^2$ neben 1 vernachlässigen können, die Nebenbedingungen in genügender Annäherung dadurch erfüllen können, daß wir den Konstanten $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ die folgenden Bedingungen auferlegen:

$$A_1^{(2)} = \frac{a^2}{2\pi} A_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} = \frac{b^2}{2\pi} A_2^{(1)}, \quad A_3^{(2)} = \frac{c^2}{2\pi} A_3^{(1)}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}(\chi_0 + a^2 P_1 - 3\sigma abc) + \sigma abc \alpha_1 \alpha_k A_k^{(1)} &= U\alpha_1, \\ A_2^{(1)}(\chi_0 + b^2 P_2 - 3\sigma abc) + \sigma abc \alpha_2 \alpha_k A_k^{(1)} &= U\alpha_2, \\ A_3^{(1)}(\chi_0 + c^2 P_3 - 3\sigma abc) + \sigma abc \alpha_3 \alpha_k A_k^{(1)} &= U\alpha_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir haben dabei der Kürze wegen:

$$abc\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)W(s)} = P_1, \quad abc\int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)W(s)} = P_2,$$

$$abc\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)W(s)} = P_3$$

gesetzt. Die Gleichungen (14) ergeben in erster Näherung, wenn wir die σ enthaltenden Glieder vernachlässigen:

$$A_1^{(1)} = \frac{U\alpha_1}{\chi_0 + a^2 P_1}, \quad A_2^{(1)} = \frac{U\alpha_2}{\chi_0 + b^2 P_2}, \quad A_3^{(1)} = \frac{U\alpha_3}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

In zweiter Näherung erhalten wir:

$$A_1^{(1)} = \frac{U\alpha_1}{\chi_0 + a^2 P_1}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + a^2 P_1} - M\right]\right\},$$

$$A_2^{(2)} = \frac{U\alpha_2}{\chi_0 + b^2 P_2}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + b^2 P_2} - M\right]\right\},$$

$$A_3^{(2)} = \frac{U\alpha_3}{\chi_0 + c^2 P_3}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + c^2 P_3} - M\right]\right\},$$

$$M = \frac{\alpha_1^2}{\chi_0 + a^2 P_1} + \frac{\alpha_2^2}{\chi_0 + b^2 P_2} + \frac{\alpha_3^2}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

184. Berechnung des Widerstandes.

Die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt, hängen nur von der Bewegung in der Umgebung desselben ab. Ein Vergleich zwischen den Formeln im § 11, S. 136—139 und den hier entwickelten Formeln, besonders (12), zeigt, daß, von der veränderten Bedeutung von $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ abgesehen, die hier betrachteten Geschwindigkeitskomponenten sich nur durch konstante Glieder von den dort gefundenen unterscheiden. Da konstante Glieder der Geschwindigkeitskomponenten bei der Berechnung der auf das Ellipsoid ausgeübten Kräfte ohne Belang sind, können wir das S. 139 gewonnene Ergebnis sofort auf unsere jetzt erhaltene Lösung übertragen. Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Ellipsoid ausübt, hat die Komponenten:

$$-\,16\pi\mu abc A_j^{(1)} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Die Größen χ_0 und P_j, welche sowohl in Oberbecks Widerstandsformeln wie in unseren Formeln vorkommen, sind Funktionen von a, b, c, welche durch elliptische Integrale definiert sind. Von besonderem Interesse sind diejenigen Fälle, in denen diese elliptischen Integrale in einfachere Funktionen von a, b, c entarten. Dies trifft ein, wenn das Ellipsoid Rotationssymmetrie um eine Achse besitzt. Wir setzen in diesem Fall $a = b$ und erhalten, wenn $a = b < c$:

$$\chi_0 = \frac{2a^2c}{\sqrt{c^2-a^2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{c^2}{c^2-a^2} - \frac{a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right),$$

$$P_3 = \frac{2a^2c}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right) - \frac{2a^2}{c^2-a^2}.$$

Wir haben dagegen, wenn $a = b > c$,

$$\chi_0 = \frac{2a^2c}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}\right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}\right) - \frac{c^2}{a^2-c^2},$$

$$P_3 = \frac{2a^2}{a^2-c^2} - \frac{2a^2c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}\right).$$

Der Widerstand, den ein Rotationsellipsoid erfährt, das sich parallel der Symmetrieachse, der c-Achse, bewegt, ist also:

$$W = \frac{16\pi\mu a^2 c U}{N}\left(1 + \frac{2\sigma a^2 c}{N}\right),$$

wo, wenn $c > a$ ist:

$$N = \frac{2a^2c(2c^2-a^2)}{(c^2-a^2)^{3/2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right) - \frac{2a^2c^2}{c^2-a^2}$$

ist, und wenn $c < a$ ist:

$$N = \frac{2a^2c^2}{a^2-c^2} + \frac{2a^2c(a^2-2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2}-1}\right).$$

Für $c = a$ geben beide Formeln $N = \frac{8}{3}a^2$ und folglich:

$$W = 6\pi\mu a U\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\varrho a U}{\mu}\right), \qquad (U > 0)$$

was mit dem S. 174 gefundenen Ergebnis übereinstimmt. — Für $c = 0$ findet man $N = \pi a c$ und folglich:

$$W = 16\mu a U\left(1 + \frac{\varrho a U}{\pi\mu}\right). \qquad (U > 0)$$

Das Ellipsoid kann in eine ebene Scheibe entarten, ohne daß $a = b$ ist. Stets können wir aber in diesem Falle $c = 0$ setzen. Wir setzen:

$$\lim_{c \to 0} \frac{\chi_0}{c} = \chi_0^*, \quad \lim_{c \to 0} \frac{P_j}{c} = P_j^*.$$

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Scheibe ausübt, hat dann die Komponenten:

$$K_1 = -\frac{16\pi\mu a b \alpha_1 U}{\chi_0^* + a^2 P_1^*}\left\{1 + \sigma a b\left[\frac{3}{\chi_0^* + a^2 P_1^*} - M^*\right]\right\},$$

$$K_2 = -\frac{16\pi\mu a b \alpha_2 U}{\chi_0^* + b^2 P_2^*}\left\{1 + \sigma a b\left[\frac{3}{\chi_0^* + b^2 P_2^*} - M^*\right]\right\},$$

$$K_3 = -\frac{16\pi\mu a b \alpha_3 U}{\chi_0^*}\left\{1 + \sigma a b\left[\frac{3}{\chi^{0*}} - M^*\right]\right\},$$

wobei:

$$M^* = \frac{\alpha_1^2}{\chi_0^* + a^2 P_1^*} + \frac{\alpha_2^2}{\chi_0^* + b^2 P_2^*} + \frac{\alpha_3^2}{\chi_0^*}.$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß der mit U^2 proportionale Teil der Kraft im allgemeinen nicht senkrecht gegen die Scheibe ist. Sein Betrag und seine Richtung hängen von der Orientierung des Geschwindigkeitsvektors in bezug auf die Scheibe ab. Die gegen die Scheibe senkrechte Komponente jener Kraft hat den Betrag:

$$-\frac{16\pi\mu\sigma a^2 b^2 \alpha_3 U}{\chi_0^*}\left(\frac{3}{\chi_0^*} - M^*\right).$$

Da:

$$\frac{a}{b} P_1^* = \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} - \int_0^\infty \frac{s\,ds}{(a^2+s)W(s)}, \quad \frac{b}{a} P_2^* = \int_0^\infty \frac{ds}{W(s)} - \int_0^\infty \frac{s\,ds}{(b^2+s)W(s)},$$

so folgt, daß wenn $a > b$ ist, $a^2 P_1^* > b^2 P_2^*$ ist. Wenn $a > b$ ist, so ist deshalb M^* im Falle $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \cos\vartheta$ größer als im Falle $\alpha_1 = \cos\vartheta$, $\alpha_2 = 0$. Hieraus folgt wiederum, daß die gegen die Scheibe senkrechte Komponente der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Kraft im „apteroid aspect" ($\alpha_2 = 0$) größer als im „pterygoid aspect" ($\alpha_1 = 0$) ist.

Wenn $a = b$ ist, so können wir $\alpha_2 = 0$ setzen und erhalten dann:

$$K_1 = -\frac{32}{3}\mu a \alpha_1 U\left\{1 + \frac{\sigma a}{3\pi}(4 - \alpha_3^2)\right\},$$

$$K_2 = 0, \quad K_3 = -16\mu a \alpha_3 U\left\{1 + \frac{\sigma a}{3\pi}(7 - \alpha_3^2)\right\}.$$

Die gegen die Scheibe senkrechte Komponente der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Kraft verschwindet, wenn $\alpha_3 = 0$ ist, d. h. wenn der Geschwindigkeitsvektor der Scheibe mit der Ebene derselben parallel ist. Sie nimmt den größtmöglichen Wert an, wenn $\alpha_3 = 1$ ist, d. h. wenn der Geschwindigkeitsvektor gegen die Ebene der Scheibe senkrecht ist.

In einer in mehrerer Hinsicht interessanten und wertvollen Arbeit hat W. J. Harrison unter anderem auch den Widerstand berechnet, den ein elliptischer Zylinder erfährt, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegt und wenn dabei entweder die große Achse oder die kleine Achse des Querschnittes mit der Bewegungsrichtung parallel ist. Er findet für den Widerstand pro Längeneinheit im ersten Falle:

$$W_1 = \frac{4\pi\mu U}{\frac{a}{a+b} - \log\left[\frac{1}{4}\gamma\sigma'(a+b)\right]}.$$

Dabei ist U die Geschwindigkeit, $2a$ die große und $2b$ die kleine Achse des Querschnittes. γ hat den Wert 1,7811.

Wenn die Bewegungsrichtung mit der kleinen Achse des Querschnittes parallel ist, ist der Widerstand pro Längeneinheit:

$$W_2 = \frac{4\pi\mu U}{\frac{b}{a+b} - \log\left[\frac{1}{4}\gamma\sigma'(a+b)\right]}.$$

Wenn $a = b$ ist, stimmen W_1 und W_2 mit dem von Lamb berechneten Widerstand eines kreisförmigen Zylinders überein.

§ 19. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand.

19 1. Einleitung. Die von der Kugel primär hervorgerufene Strömung.

Wir sahen in § 12, 2, S. 143 wie man bei den Stokesschen Gleichungen Probleme behandeln kann, in denen eine ebene Grenzfläche vorkommt. Nach dieser Methode hat, wie in § 12 erwähnt wurde, Stock eine genaue Berechnung des Widerstandes ausgeführt, den eine Kugel erfährt, die in einer von einer ebenen Wand begrenzten zähen Flüssigkeit sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer mit der Wand parallelen Richtung bewegt. Faxén hat dieses hydrodynamische Problem wieder aufgenommen, aber dabei die erweiterten Stokesschen Gleichungen zugrunde gelegt. Seine Methode ist die in § 13 dargelegte. Zuerst wird die in § 16, S. 168 gegebene

Lösung des Problems der Kugel derart umgeformt, daß die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck durch Doppelintegrale dargestellt werden, in denen die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Aufpunktes nur im Exponenten, und zwar linear, vorkommen. Faxén benutzt ein Bezugssystem, dessen x_1-Achse in die Bewegungsrichtung fällt. Er schreibt die Geschwindigkeitskomponenten der durch die Kugel primär eingeprägten Strömung in der Form $-U\delta_{j1} + u_j$ wo:

$$u_j = 2\sigma\Phi_1\delta_{j1} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_1 + P), \quad p = \varrho U \frac{\partial P}{\partial x_1}, \tag{1}$$

$$\Phi_1 = c\left\{1 - \sigma a^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{6} + c_1\right)\sigma^2 a^4 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right\}\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}, \tag{2}$$

$$P = -c\left\{1 - \frac{2}{3}\sigma a^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + c_1 \sigma^2 a^4 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right\}\frac{1}{R}. \tag{3}$$

Hier ist:

$$c = \frac{3a\mu}{2\varrho}\,\frac{1}{1 - \frac{3}{4}a\sigma'}. \tag{4}$$

c_1 ist eine Konstante, deren Betrag ohne Belang ist.

192. Integraldarstellung der Funktionen Φ_1 und P.

Für die Funktion $1/R$ haben wir in § 13 die Darstellung gefunden:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \varkappa |x_3|}\,\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\varkappa} \tag{5}$$

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad R \geqq 0, \quad \varkappa = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Um eine entsprechende Darstellung für die Funktion:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$$

zu finden, gehen wir von dem Integrale:

$$J = \frac{\sigma^2}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int \frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2(\alpha_l^2 + \sigma^2)}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

aus. Da dieses Integral für reelle x_j unbedingt konvergent ist, so haben wir:

$$J = \lim_{A\to\infty}\frac{\sigma^2}{2\pi^2}\int\!\!\int\!\!\int\limits_{0<\alpha_j^2<A^2} \frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2(\alpha_l^2 + \sigma^2)}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi^2}\left\{\int\!\!\int\!\!\int\limits_{0<\alpha_j^2<A^2}\frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \int\!\!\int\!\!\int\limits_{0<\alpha_j^2<A^2}\frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2 + \sigma^2}\,d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3\right\}.$$

Die beiden Glieder innerhalb der Parenthese haben bei $A \to \infty$ bestimmte Grenzwerte. Wir haben in der Tat:

$$\iiint\limits_{0<\alpha_j<A^2} \frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2}\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 2\pi \int\limits_{\alpha=0}^{A} d\alpha \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{i\alpha R\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{4\pi}{R} \int\limits_0^A \frac{\sin(\alpha R)}{\alpha}\, d\alpha\,.$$

Der Grenzwert dieses Integrales ist also $\frac{2\pi^2}{R}$.

Wir haben ferner:

$$\iiint\limits_{0<\alpha_j^2<A^2} \frac{e^{i\alpha_j x_j}}{\alpha_k^2+\sigma^2}\, d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 2\pi \int\limits_{\alpha=0}^{A} \frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+\sigma^2} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{i\alpha R\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{4\pi}{R} \int\limits_0^A \frac{\alpha\sin(\alpha R)}{\alpha^2+\sigma^2}\, d\alpha\,.$$

Wir lassen jetzt A ins Unendliche wachsen. Das Integral, welches wir zuletzt bekommen haben, nähert sich dabei einem endlichen Grenzwerte, den wir am einfachsten durch komplexe Integration berechnen. Wir erhalten so:

$$\frac{2\pi^2}{R} e^{-\sigma' R}$$

und haben also schließlich:

$$J = \frac{1-e^{-\sigma' R}}{R}. \tag{6}$$

Wir können andererseits, wegen der unbedingten Konvergenz des Integrales J, den Wert desselben in der Weise berechnen, daß wir zuerst die Integration in bezug auf α_3 ausführen. Wir können dabei komplexe Integration anwenden, indem wir, wenn $x_3 > 0$ ist, den Integrationsweg in der komplexen α_3-Ebene nach oben schieben, dagegen wenn $x_3 < 0$ ist, nach unten. Wir erhalten so, indem wir beachten, daß der Integrand von J die singulären Punkte:

$$\alpha_3 = \pm i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} = \pm i\varkappa, \quad \alpha_3 = \pm i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\sigma^2} = \pm i\lambda^*$$

hat:

$$J = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-\varkappa|x_3|} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\varkappa} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-\lambda^*|x_3|} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\lambda^*}.$$

Da das erste Glied rechts nach (5) den Wert $1/R$ hat, so folgt wegen (6):

$$\frac{e^{-\sigma' R}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda^* |x_3|} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\lambda^*}.$$

Wir sehen aus dieser Formel, daß:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(\alpha_1 + i\sigma) x_1 + \alpha_2 x_2] - \lambda^* |x_3|} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\lambda^*},$$

also, wenn wir rechts $\alpha_1 + i\sigma$ statt α_1 als Integrationsvariable benutzen und diese Variable wieder mit α_1 bezeichnen:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda |x_3|} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\lambda}. \tag{7}$$

Hier ist:

$$\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2i\sigma\alpha_1}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (5) und (7) können wir Φ_1 und P durch Integrale darstellen:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1}{\lambda} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda |x_3|} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2}{\varkappa} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \varkappa |x_3|} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

wo:

$$g_1 = c\left\{1 - \sigma a^2 \cdot i\alpha_1 + \left(\frac{1}{6} + c_1\right) \sigma^2 a^4 \cdot (i\alpha_1)^2\right\},$$

$$g_2 = -c\left\{1 - \frac{2}{3} \sigma a^2 \cdot i\alpha_1 + c_1 \sigma^2 a^4 \cdot (i\alpha_1)^2\right\}.$$

193. Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung.

Der jetzt folgende Teil unserer Untersuchung ist die Berechnung der von der Wand $x_3 = -\zeta$ erzeugten, zurückgeworfenen Strömung. Für diese Strömung kann man den folgenden Ansatz machen:

$$u_j^* = 2\sigma\left(\Phi_1^* \delta_{j1} + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_1} \delta_{j3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Phi_1^* + P^* + \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial x_3}\right),$$

$$p^* = \varrho U \frac{\partial P^*}{\partial x_1},$$

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_4(\alpha_1, \alpha_2)}{\lambda} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda(x_3 + 2\zeta)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$P^* = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_5(\alpha_1, \alpha_2)}{\varkappa} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \varkappa(x_3 + 2\zeta)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\Phi_2^* = \frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_6(\alpha_1, \alpha_2)}{\lambda} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda(x_3 + 2\zeta)} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Die Bedingungen $u_j^* = -u_j$ für $x_3 = -\zeta$ ergeben:

$$g_4 = -g_1, \quad g_5 = -g_2 \frac{(\lambda + \varkappa)^2}{2 i \sigma \alpha_1} - g_1 \frac{\lambda(\lambda + \varkappa)}{i \sigma \alpha_1} e^{\zeta\varkappa - \zeta\lambda},$$

$$g_6 = -g_2 \frac{\lambda(\lambda + \varkappa)}{i \sigma \alpha_1 \varkappa} e^{-\zeta\varkappa + \zeta\lambda} - g_1 \frac{\lambda(\lambda + \varkappa)}{i \sigma \alpha_1 \varkappa}.$$

Wegen des singulären Punktes $\alpha_1 = 0$ sind die Integrale, durch welche wir die Funktionen P^* und Φ_2^* darstellten, divergent. Wir definieren P^* und Φ_2^* als die Cauchyschen Hauptwerte der Integrale, welche wir zur Darstellung derselben benutzt haben.

194. Resultierende Kraft auf die Kugel.

Durch unsere Formeln ist die Berechnung der einmal zurückgeworfenen Strömung im mathematischen Sinne erledigt. Um die erhaltenen Formeln hydrodynamisch zu verwerten, ist man aber auf ein eingehendes Studium der Integrale angewiesen, durch welche Φ_1^*, P^* und Φ_2^* definiert wurden. Wir werden hier nicht auf diese komplizierten Fragen eingehen. Wir begnügen uns damit, die Ergebnisse von Faxén mitzuteilen. Wir bemerken, daß Faxén nicht nur die oben bestimmte, einmal zurückgeworfene Strömung, sondern auch die doppelt zurückgeworfene Strömung berechnet hat. Er findet für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4} a\sigma' - \frac{9}{8}\frac{a}{2\zeta}\chi(\sigma'\zeta) + \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^3 - \frac{45}{16}\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^5}.$$

Hier ist:

$$\chi(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{16}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{317}{864}x^4 + \frac{8}{9}x^5 - \left\{\frac{25}{24}x^4 + \cdots\right\}\log\frac{\gamma x}{2}$$

$$(\gamma = 1{,}781070).$$

Für $\chi(x)$ hat Faxén die folgende Tabelle berechnet:

x	$\chi(x)$	x	$\chi(x)$	x	$\chi(x)$	x	$\chi(x)$
0	1	0,30	0,6978	0,8	0,4277	3	0,0873
0,05	0,9367	0,35	0,6608	0,9	0,3925	4	0,0479
0,10	0,8796	0,40	0,6265	1,0	0,3603	5	0,0262
0,15	0,8276	0,5	0,5660	1,5	0,2390	10	0,004
0,20	0,7804	0,6	0,5137	2,0	0,1692	18	– 0,0016
0,25	0,7370	0,7	0,4680	2,5	0,1195	∞	0

Die Widerstandsformel ist gültig, wenn $a^2\sigma^2$ und a^6/ζ^6 neben 1 vernachlässigt werden können.

Die Resultierende der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf die Kugel ausübt, hat auch eine gegen die Wand senkrechte Komponente. Sie strebt die Entfernung der Kugel von der Wand zu vergrößern und hat den Betrag:

$$\frac{9}{8}\pi\mu a U \cdot \sigma' a \frac{\tau(\sigma'\zeta)}{1 - \frac{27}{16}\frac{a}{\zeta}}.$$

Hier ist:

$$\tau(\sigma'\zeta) = 1 - \frac{11}{8}\sigma'^2\zeta^2 + \frac{8}{3}\sigma'^3\zeta^3 - \frac{137}{288}\sigma'^4\zeta^4 - \frac{8}{5}\sigma'^5\zeta^5 + \cdots$$
$$+ \left\{\frac{175}{96}\sigma'^4\zeta^4 + \cdots\right\}\log\frac{\gamma\sigma'\zeta}{2}.$$

Faxén findet ferner, daß die Kugel, wenn sie um ihren Mittelpunkt frei rotieren kann, die Drehgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{3U}{32a}\cdot\frac{a^4}{\zeta^4}\left(1 - \frac{3a}{8\zeta}\right)$$

hat. Die Drehachse und die Drehrichtung sind dieselben wie in dem Falle, daß die Kugel die ebene Wand berührt.

Wenn man in der Widerstandsformel $\sigma'\zeta$ und a/ζ so klein annimmt, daß $\sigma'\zeta \cdot \sigma' a$ und a^3/ζ^3 neben 1 vernachlässigt werden können, wird das Glied $-\frac{3}{4}a\sigma'$ im Nenner von W durch das zweite Glied der Entwickelung von $\chi(\sigma'\zeta)$ aufgehoben, und wir erhalten annähernd:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{9}{16}\frac{a}{\zeta}} = 6\pi\mu a U\left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{\zeta} + \cdots\right).$$

Dies ist die von H. A. Lorentz aufgestellte Widerstandsformel, welche wir im 12. Paragraphen, S. 142, abgeleitet haben. Sie ist also gültig, wenn die Kugel sich in genügender Nähe der Wand befindet und wenn der Radius und die Geschwindigkeit derselben genügend klein sind.

§ 20. Eine Kugel in einer Röhre.

20 1. Einleitung.

Integraldarstellungen für die Funktionen $\frac{1}{R}$ und $\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$.

Das Problem, den Widerstand zu berechnen, den eine Kugel erfährt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit längs der Achse einer mit einer zähen Flüssigkeit gefüllten Röhre bewegt, hat als erster Ladenburg in seiner Dissertation in Angriff genommen. Er legte seiner Berechnung die Stokesschen Differentialgleichungen zugrunde. Faxén nahm das Problem wieder auf. Er zeigte, daß man durch eine verhältnismäßig geringe Abänderung der von Ladenburg gegebenen Formeln die den erweiterten Stokesschen Differentialgleichungen entsprechende Lösung des Problems erhalten kann. Der Ausgangspunkt von Faxén ist die S. 191 (1)—(3) gegebene Darstellung der Bewegung, welche eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit erzeugt. Für die Funktion:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R}$$

benutzt er zunächst die Darstellung (19, 7) S. 193, führt sie jedoch durch Ausführung der Integration in bezug auf α_2 in eine Form über, welche die Symmetrie des Problems in bezug auf die Achse des Rohres zum Ausdruck bringt. Wir setzen:

$$\sqrt{x_2^2 + x_3^2} = r, \quad i x_2 = r \sin\operatorname{hyp}(i\xi), \quad |x_3| = r \cos\operatorname{hyp}(i\xi).$$

Wir setzen ferner:

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\,\sin\operatorname{hyp} t,$$

und geben dabei der Wurzel ein solches Vorzeichen, daß der reelle Teil derselben positiv ausfällt. Wir erhalten:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \lambda |x_3|}\,\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_2 x_2 - \lambda|x_3|}\,\frac{d\alpha_2}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\,\cos\operatorname{hyp}(t - i\xi)}dt\,.$$

Das zweite Integral in der letzten Formel definiert eine Hankelsche

Zylinderfunktion, und zwar hat man*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\cos\operatorname{hyp}(t - i\xi)}\,dt = -\pi i H_2^0\left(-ir\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\right).$$

Wir haben also:

$$\frac{e^{-\sigma' R - \sigma x_1}}{R} = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_1 x_1} H_2^0\left(-ir\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\right) d\alpha_1. \tag{1}$$

Ein spezieller Fall der Beziehung (1) ist die Formel:

$$\frac{1}{R} = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_1 x_1} H_2^0(-ir|\alpha_1|)\,d\alpha_1.$$

Man erhält sie aus (1), indem man $\sigma = 0$ setzt.

Aus den Formeln (1), (2), (3) S. 191 folgt jetzt:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 2\sigma\Phi_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi_1 + P), \qquad q = \frac{x_2}{r}u_2 + \frac{x_3}{r}u_3 = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1 + P), \\ p &= \varrho U \frac{\partial P}{\partial x_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\Phi_1 = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g_1 e^{i\alpha_1 x_1} H_2^0\left(-ir\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1}\right) d\alpha_1, \tag{3}$$

$$P = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{-\infty} g_2 e^{i\alpha_1 x_1} H_2^0(-ir|\alpha_1|)\,d\alpha_1. \tag{4}$$

g_1 und g_2 haben die S. 193 angegebenen Bedeutungen.

Umgekehrt kann man sofort verifizieren, daß diese Ausdrücke den Stokesschen Differentialgleichungen genügen, wenn man nur die Tatsache benutzt, daß die Hankelsche Zylinderfunktion $H_2^{(0)}(-ix)$ der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{5}$$

genügt. Hieraus erhellt sofort, daß wir eine neue Lösung der erweiterten Stokesschen Gleichungen in der Weise erhalten können, daß wir in (2) — (4) $H_2^0(-ix)$ durch eine andere Lösung der Gleichung (5) ersetzen. Eine solche Lösung ist die Funktion:

$$J^0(-ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}.$$

---

* Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen. S. 128.

20 2. Ansatz zur Lösung des Problems.

Wir benutzen diese für alle x-Werte reguläre Lösung von (5) in unserem Ansatz für die Bewegung, welche durch die Reflexion der Strömung (3) in der zylindrischen Wand der Röhre erhalten wird. Wir setzen für die zurückgeworfene Strömung:

$$u_1^* = 2\sigma\Phi_1^* + \frac{\partial(\Phi_1^* + P^*)}{\partial x_1}, \qquad q = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1^* + P^*),$$

$$p = \varrho U \frac{\partial P^*}{\partial x_1},$$

$$\Phi_1^* = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_3 e^{i\alpha_1 x_1} J^0(-ir\sqrt{\alpha_1^2 - 2i\sigma\alpha_1})\,d\alpha_1,$$

$$P^* = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_4 e^{i\alpha_1 x_1} J^0(-ir|\alpha_1|)\,d\alpha_1,$$

wobei wir uns vornehmen, g_3 und g_4 so zu bestimmen, daß die Integrale konvergieren.

Die Bedingungen $u_1 + u_1^* = 0$, $q + q^* = 0$ an der zylindrischen Grenzfläche, etwa für $r = l$, drücken g_3 und g_4 als lineare, homogene Funktionen von g_1 und g_2 aus. Die so erhaltenen Ausdrücke erfüllen die oben erwähnte Bedingung. Die Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung ist damit in mathematischem Sinne erledigt.

20 3. Die Widerstandsformel.

Die weitere Aufgabe ist jetzt, aus der gefundenen Lösung den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel zu berechnen. Wie oben erwähnt wurde, hat Ladenburg diese Aufgabe für den Fall $\sigma = 0$ gelöst und Faxén für den allgemeinen Fall, wo σ einen von Null verschiedenen Wert hat. Auf die Berechnungen, welche zur Gewinnung der Widerstandsformel notwendig sind, wollen wir hier nicht eingehen. Wir begnügen uns damit, das Ergebnis mitzuteilen. Faxén findet für den Widerstand einer Kugel, die sich mit der Geschwindigkeit U längs der Achse einer zylindrischen Röhre mit dem inneren Radius l bewegt, unter Voraussetzung, daß $\sigma'^2 a^2$, $\sigma' a \cdot a^2/l^2$ und a^6/l^6 gegen 1 vernachlässigt werden können:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4}a\sigma' - \frac{a}{l}L(\sigma' l) + 2{,}09\frac{a^3}{l^3} - 0{,}95\frac{a^5}{l^5}}.$$

Hier ist:

$$L(x) = \frac{3}{8\pi x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{(a-4ix)(a-ix)}{a\cdot 2ix}\,\frac{i}{[J^0(-i\lambda)]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\,|\,a\,|\,\lambda[J^0(-i\,|\,a\,|) - J^0(-i\lambda)]^2}{aA\,J^0(-i\,|\,a\,|)J^0(-i\lambda)}\right\} da,$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 - 2ixa},$$

$$A = \lambda J^{0\prime}(-i\,|\,a\,|)J^0(-i\lambda) - |\,a\,|\,J^0(-i\,|\,a\,|)J^{0\prime}(-i\lambda).$$

Eine Reihenentwickelung der Funktion $L(\sigma' l)$ ergab:

$$L(\sigma' l) = 2{,}104 - \tfrac{3}{4}\sigma' l + \cdots$$

Eine numerische Berechnung ergab:

$$L(0) = 2{,}104, \quad L(0{,}5) = 1{,}76, \quad L(1) = 1{,}48, \quad L(2) = 1{,}04,$$
$$L(5) = 0{,}46.$$

Die Widerstandsformel zeigt, daß das Glied $-\frac{3}{4}a\sigma'$ im Nenner für kleine Werte von $\sigma' l$ vom zweiten Gliede in der Entwickelung von $L(\sigma' l)$ aufgehoben wird. Eine Prüfung der erweiterten Stokesschen Widerstandsformel durch Messung der Fallgeschwindigkeit einer Kugel längs der Achse einer vertikal gestellten, von einer zähen Flüssigkeit erfüllten Röhre ist also nur dann möglich, wenn der innere Radius der Röhre so groß ist, daß es nicht erlaubt ist, die Entwickelung von $L(\sigma' l)$ nach dem zweiten Gliede abzubrechen. Wie Faxén hervorgehoben hat, ist diese Bedingung bei zwei Messungsreihen von Arnold erfüllt, und bei diesen Messungen ist der Einfluß des Gliedes $-\frac{3}{4}a\sigma'$ deutlich zu sehen*.

§ 21. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit.

211. Einleitung. Die Theorie von Smochulowski nach § 14.

Wir haben im 14. Paragraphen eine Untersuchung von Smoluchowski kennen gelernt, in welcher er die Kräfte untersucht hat, welche zwei Kugeln, welche sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegen, durch die Vermittlung

* Nach Experimenten, die in Leipzig unter der Leitung von Prof. Schiller ausgeführt worden sind, stimmt das Widerstandsgesetz (11) in § 16 noch bei $\sigma' a = 0{,}25$ bis auf ein Prozent mit den Messungen überein. Vgl. Geiger und Scheel, Handbuch der Physik. Bd. 7, S. 111.

dieser Flüssigkeit auf einander ausüben. Wenn wir die Geschwindigkeit der Kugeln U nennen und wenn wir die x_1-Achse mit der Richtung derselben parallel legen, so können wir das in § 12 gewonnene Ergebnis so ausdrücken, daß auf die Kugel 1 mit dem Mittelpunkte $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ und dem Radius a_1 eine Kraft wirkt, deren Komponenten:

$$-6\pi\mu a_1 U(\delta_{k1} - U_{k1}^{(2)}(x^{(1)})), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sind, während auf die Kugel 2 mit dem Mittelpunkte $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ und dem Radius a_2 die Kraft:

$$-6\pi\mu a_2 U(\delta_{k1} - U_{k1}^{(1)}(x^{(2)}))$$

wirkt. Die Größen $U_{k1}^{(1)}$, $U_{k1}^{(2)}$ sind dabei durch die Annahme definiert, daß

$$u_j^{(1)} = U_{jk}^{(1)} v_k^{(1)}, \qquad p^{(1)} = P_k^{(1)} v_k^{(1)};$$

und

$$u_j^{(2)} = U_{jk}^{(2)} v_k^{(2)}, \qquad p^{(2)} = P_k^{(2)} v_k^{(2)},$$

wo $v_k^{(1)}$ und $v_k^{(2)}$ willkürliche Konstanten sind, Lösungen der Stokesschen Differentialgleichungen sind, welche den Nebenbedingungen:

für $\quad r_1^2 = (x_j - x_j^{(1)})^2 = a_1^2 : u_j^{(1)} = v_j^{(1)}, \quad \lim\limits_{r_1 \to \infty} u_j^{(1)} = 0;$

bzw.:

für $\quad r_2^2 = (x_j - x_j^{(2)})^2 = a_2^2 : u_j^{(2)} = v_j^{(2)}, \quad \lim\limits_{r_2 \to \infty} u_j^{(2)} = 0$

genügen.

Die hier gegebene Lösung des Problems von Smoluchowski ist nur bis auf Glieder von den Größenordnungen a_1^2/r_{12}^2, a_2^2/r_{12}^2 ($r_{12}^2 = (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2$) richtig.

21 2. Neue Lösung auf Grund der erweiterten Stokesschen Gleichungen.

Wenn wir das Problem von Smoluchowski unter Zugrundelegung der erweiterten Stokesschen Differentialgleichung statt der von Stokes selbst benutzten Differentialgleichungen lösen wollen, haben wir nur in der oben gegebenen Vorschrift zur Lösung des Problems die Worte „Stokesschen Differentialgleichungen“ mit „erweiterten Stokesschen Differentialgleichungen“ zu vertauschen.

Die Werte der Größen $U_{k1}^{(1)}$, $U_{k1}^{(2)}$ können wir jetzt aus (16,5) S. 168 entnehmen. Wir erhalten unter Vernachlässigung von Gliedern von den Größenordnungen a_1^2/r_{12}^2, a_2^2/r_{12}^2, $\sigma' a_1$, $\sigma' a_2$:

$$U_{k1}^{(1)}(x^{(2)}) = \frac{3}{2}\frac{a_1}{r_{12}} e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})} \delta_{1k} - \\ - \frac{3}{4} a_1 \frac{\partial}{\partial x_k^{(2)}} \frac{1 - e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{\sigma r_{12}},$$

$$U_{k1}^{(2)}(x^{(1)}) = \frac{3}{2}\frac{a_2}{r_{12}} e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})} \delta_{1k} -$$
$$-\frac{3}{4} a_2 \frac{\partial}{\partial x_k^{(1)}} \frac{1 - e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}}.$$

Auf die Kugel 1 wirkt also eine Kraft mit den Komponenten:

$$-6\pi\mu a_1 U \delta_{1k} + \frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{r_{12}} \delta_{k1} -$$
$$-\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{x_k^{(2)} - x_k^{(1)}}{r_{12}} \frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}.$$

Die Kraft, welche auf die Kugel 2 wirkt, erhält man durch Vertauschung von $x_j^{(1)}$, $x_j^{(2)}$ sowie von a_1, a_2.

21 3. Diskussion der neuen Lösung.

Wir sehen aus unserer Formel, daß die Kraft, welche eine Kugel durch Vermittlung der Flüssigkeit auf die andere Kugel ausübt, sich in zwei Teilkräfte zerlegen läßt. Die erste Teilkraft hat dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit und kann also als eine Abschwächung des Widerstandes gegen die Bewegung der Kugel aufgefaßt werden. Die zweite Teilkraft fällt in die Richtung der Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln. Die erste Teilkraft hat für die Kugel (1) den Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}}{r_{12}}$$

und folglich für die Kugel 2 den Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{r_{12}}.$$

Wenn wir $U > 0$, $x_1^{(1)} > x_1^{(2)}$ annehmen, so hat der erste dieser beiden Ausdrücke stets einen kleineren Wert als der zweite. Die Abschwächung des Widerstandes ist also für die vorangehende Kugel stets kleiner als für die nachfolgende Kugel. Die vorangehende Kugel hat mit anderen Worten stets einen größeren Widerstand zu überwinden als die nachfolgende Kugel.

Wir gehen zur zweiten Teilkraft über. Längs der Verbindungsgeraden zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln, in der Richtung von der Kugel 2 nach der Kugel 1, wirkt auf die Kugel 1 eine Kraft:

$$\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{1 - (1 + \sigma' r_{12}) e^{-\sigma' r_{12} - \sigma(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}}{\sigma r_{12}^2}$$

und auf die Kugel 2 eine Kraft:

$$-\frac{9}{2}\pi\mu a_1 a_2 U \frac{1-(1+\sigma' r_{12})e^{-\sigma' r_{12}+\sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}.$$

Wir nehmen wieder an, daß $U > 0$, $x_1^{(1)} \geqq x_1^{(2)}$ ist. Da unter diesen Umständen $\sigma > 0$ und:

$$(1+\sigma' r_{12})e^{-\sigma' r_{12}} < 1, \qquad e^{-\sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})} \leqq 1$$

ist, so hat der erste der beiden Ausdrücke sicher einen positiven Wert. Wir sehen hieraus, daß die längs der Verbindungsgeraden wirkende Kraft auf die vorangehende Kugel stets den Charakter einer Abstoßung von der nachfolgenden Kugel hat.

Der Ausdruck:

$$-\frac{1-(1+\sigma' r_{12})e^{-\sigma' r_{12}+\sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})}}{\sigma r_{12}^2}$$

kann sowohl positive wie negative Werte annehmen. Er ist negativ, wenn $\sigma > 0$ und:

$$1+\sigma' r_{12} < e^{\sigma' r_{12}-\sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})},$$

positiv, wenn $\sigma > 0$ und:

$$1+\sigma' r_{12} > e^{\sigma' r_{12}-\sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})}.$$

Die längs der Verbindungsgeraden wirkende Kraft auf die nachfolgende Kugel kann also sowohl den Charakter einer Abstoßung wie den Charakter einer Anziehung von der vorangehenden Kugel haben. Wenn $U > 0$, $x_1^{(1)} > x_1^{(2)}$, $x_2^{(1)} = x_2^{(2)}$, $x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$, wenn also die nachfolgende Kugel genau hinter der vorangehenden folgt, so ist die Kraft eine Anziehung. Wenn dagegen $x_1^{(1)} = x_1^{(2)}$ ist, so ist sie eine Abstoßung.

Wenn $\sigma' r_{12} = \varrho\,|\,U\,|\,r_{12}/2\mu$ eine kleine Größe ist, können wir annähernd:

$$e^{-\sigma' r_{12} \mp \sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})} = 1, \qquad 1-e^{-\sigma' r_{12} \mp \sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})} = \sigma' r_{12} \pm \sigma(x_1^{(1)}-x_1^{(2)})$$

setzen. Wir kommen in dieser Weise zu den in § 14 mitgeteilten, von Smoluchowski aufgestellten Sätzen zurück. Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Sätze ist also, daß $\sigma' r_{12}$ eine kleine Größe ist.

§ 22. Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln.

221. Stationäre Bewegung. Die Stokesschen Gleichungen.

W = Widerstand, $K_j (j = 1, 2, 3)$ = Komponenten der Resultierenden der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt.

1. Eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit. Formel von Stokes. § 9. a = Radius, U = Geschwindigkeit der Kugel.
$$W = 6\pi\mu a U.$$

2. Ruhende Kugel in einer in beliebiger stationärer und regulärer Bewegung begriffenen Flüssigkeit. Formel von Faxén. § 9. $u_j^{(r)}$ = Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit bei Abwesenheit der Kugel, $p^{(r)}$ = der Druck in derselben, a = Radius der Kugel, $P^{(0)}$ der Mittelpunkt derselben.
$$K_j = 6\pi\mu a u_j^{(r)}(P^{(0)}) + \pi a^3 \left(\frac{\partial p^{(r)}}{\partial x_j}\right)_{P^{(0)}}.$$

3. Ein Ellipsoid in einer sonst den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit. Formeln von Oberbeck. § 11. a, b, c = Halbachsen. U_j = Geschwindigkeitskomponenten des Ellipsoides, U_1 längs der a-, U_2 der b-, U_3 der c-Achse.
$$W(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$
$$\chi_0 = abc\int_0^\infty \frac{ds}{W(s)}, \qquad P_1 = abc\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)W(s)} \text{ usw.}$$
$$K_1 = -\frac{16\pi\mu abc U_1}{\chi_0 + a^2 P_1}, \qquad K_2 = -\frac{16\pi\mu abc U_2}{\chi_0 + b^2 P_2},$$
$$K_3 = -\frac{16\pi\mu abc U_3}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

4. Eine Kugel in einer außerdem von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Formeln von H. A. Lorentz. § 12. $x_1 x_2$-Achsen in der Grenzebene. $x_3 > 0$ in der Flüssigkeit. $x_3^{(0)}$ = Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Grenzebene. a = Radius. U_j = Geschwindigkeitskomponenten der Kugel.
$$K_1 = -6\pi\mu a U_1 \left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right), \quad K_2 = -6\pi\mu a U_2 \left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right),$$
$$K_3 = -6\pi\mu a U_3 \left(1 + \frac{9}{8}\frac{a}{x_3^{(0)}}\right).$$

5. Eine Kugel zwischen zwei parallelen ebenen Wänden. Die Geschwindigkeit der Kugel den Wänden parallel. Formeln von H. Faxén. § 13. a = Radius. U = Geschwindigkeit der Kugel. l_1, l_2 = Entfernungen des Mittelpunktes der Kugel von den Wänden.

a) $l_2 = l_1 = l$:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - 1{,}004\frac{a}{l} + 0{,}418\frac{a^3}{l^3} - 0{,}169\frac{a^5}{l^5}}.$$

b) $l_2 = 3l_1$:

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - 0{,}6526\frac{a}{l_1} + 0{,}1475\frac{a^3}{l_1^3} - 0{,}131\frac{a^4}{l_1^4} - 0{,}0644\frac{a^5}{l_1^5}}.$$

c) Mittlere Geschwindigkeit einer Kugel, die zwischen zwei senkrechten, parallelen, ebenen Wänden fällt. Siehe S. 155.

6. Zwei Kugeln in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. § 14. a_1, a_2 = Radien, U_1, U_2 = Geschwindigkeiten der Kugeln, r_{12} = Entfernung zwischen den Mittelpunkten derselben, ϑ = Winkel zwischen der gemeinsamen Bewegungsrichtung beider Kugeln und der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten derselben $\left(0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Formeln von M. Smoluchowski. $U_1 = U_2 = U$.

$$W_1 = 6\pi\mu a_1 U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_2}{r_{12}}\right), \quad W_2 = 6\pi\mu a_2 U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_1}{r_{12}}\right).$$

Außerdem wirkt auf beide Kugeln in der Richtung vom Mittelpunkte der hinteren Kugel zum Mittelpunkte der vorderen Kugel eine Kraft:

$$\frac{9}{2}\pi\mu U a_1 a_2 \frac{\cos\vartheta}{r_{12}}.$$

b) Formeln von H. Faxén. $\vartheta = 0$:

$$W_1 = 6\pi\mu a_1 U_1\left\{1 + \frac{9}{4}\frac{a_1 a_2}{r_{12}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_{12}^4}\left(-\frac{3}{2}a_1^3 a_2 + \frac{81}{16}a_1^2 a_2^2 + \frac{9}{4}a_1 a_2^3\right)\right\} -$$
$$- 6\pi\mu a_1 U_2\left\{\frac{3}{2}\frac{a_2}{r_{12}} + \frac{1}{r_{12}^3}\left(-\frac{1}{2}a_1^2 a_2 + \frac{27}{8}a_1 a_2^2 - \frac{1}{2}a_2^3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_{12}^5}\left(\frac{9}{4}a_1^3 a_2^2 + \frac{243}{32}a_1^2 a_2^3 + \frac{9}{4}a_1 a_2^4\right) + \cdots\right\}.$$

W_2 wird aus W_1 durch Vertauschen von a_1 und a_2, U_1 und U_2 erhalten.

c) Formeln von H. Dahl. $a_1 = a_2 = a$, $\vartheta = 0$.

$$W_1 = 6\pi\mu a U_1\{1 + 9x^2 + 93x^4 + 1197x^6 + 19821x^8 + \cdots\} -$$
$$- 6\pi\mu a U_2\{3x + 19x^3 + 387x^5 + 5331x^7 + 76115x^9 + \cdots\}$$

$$x = \frac{a}{2r_{12}}.$$

W_2 wird aus W_1 durch Vertauschen von U_1 und U_2 erhalten.

d) Formeln von M. Stimson und G. F. Jeffery. $a_1 = a_2 = a$, $U_1 = U_2 = U$, $\vartheta = 0$:

$$W_1 = W_2 = 6\pi\mu a U \lambda$$

$$\lambda = \frac{4}{3}\sinh\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left\{1 - \frac{4\sinh^2(n+\frac{1}{2})\alpha - (2n+1)^2\sinh^2\alpha}{2\sinh(2n+1)\alpha + (2n+1)\sinh 2\alpha}\right\}$$

$$\cosh\alpha = \frac{r_{12}}{2a}.$$

Tabelle für λ siehe S. 162.

22 2. Stationäre Bewegung. Die erweiterten Stokesschen Gleichungen.

Bezeichnungen wie oben. Außerdem:

$$U_j = U\alpha_j, \quad U \geqq 0, \quad \alpha_j^2 = 1, \quad \sigma = \varrho U/2\mu.$$

1. Eine Kugel in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit. Formel vom Verf. § 16. a = Radius, U = Geschwindigkeit.

$$W = 6\pi\mu a U\left(1 + \frac{3}{4}a\sigma\right).$$

2. Ein Ellipsoid in einer sonst den ganzen Raum füllenden Flüssigkeit. Formeln vom Verf. § 18. Vgl. oben S. 187—189.

$$K_1 = -\frac{16\pi\mu abc U\alpha_1}{\chi_0 + a^2 P_1}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + a^2 P_1} - M\right]\right\},$$

$$K_2 = -\frac{16\pi\mu abc U\alpha_2}{\chi_0 + b^2 P_2}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + b^2 P_2} - M\right]\right\},$$

$$K_3 = -\frac{16\pi\mu abc U\alpha_3}{\chi_0 + c^2 P_3}\left\{1 + \sigma abc\left[\frac{3}{\chi_0 + c^2 P_3} - M\right]\right\},$$

$$M = \frac{\alpha_1^2}{\chi_0 + a^2 P_1} + \frac{\alpha_2^2}{\chi_0 + b^2 P_2} + \frac{\alpha_3^2}{\chi_0 + c^2 P_3}.$$

Spezielle Fälle:

a) $a = b < c$.

$$\chi_0 = \frac{2a^2 c}{\sqrt{c^2 a^2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}\right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{c^2}{c^2 - a^2} - \frac{a^2 c}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}\right),$$

$$P_3 = \frac{2a^2 c}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \log\left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}\right) - \frac{2a^2}{c^2 - a^2}.$$

b) $a = b < c$:

$$\chi_0 = \frac{2a^2 c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}\right),$$

$$P_1 = P_2 = \frac{a^2 c}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}\right) - \frac{c^2}{a^2 - c^2},$$

$$P_3 = \frac{2a^2}{a^2 - c^2} - \frac{2a^2 c}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}\right).$$

3. Ein Kreiszylinder in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Formel von Lamb. § 17. $\gamma = 1{,}7811$, $a =$ Radius, $U =$ Geschwindigkeit des Zylinders.

$$W \text{ pro Längeneinheit} = \frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2}\gamma\sigma a\right)}.$$

4. Ein elliptischer Zylinder in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Formeln von Harrison. § 18. a, $b =$ Halbachsen des Querschnittes, U_1, $U_2 =$ Geschwindigkeitskomponenten des Zylinders längs der Hauptachsen.

$$K_1 \text{ pro Längeneinheit} = -\frac{4\pi\mu U_1}{\dfrac{a}{a+b} - \log\left[\dfrac{1}{4}\gamma\sigma(a+b)\right]},$$

$$K_2 \text{ pro Längeneinheit} = -\frac{4\pi\mu U_2}{\dfrac{b}{a+b} - \log\left[\dfrac{1}{4}\gamma\sigma(a+b)\right]}.$$

5. Eine Kugel in einer außerdem von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Formeln von H. Faxén. § 19. Geschwindigkeit der Kugel, U, parallel der Wand. $a =$ Radius, $\zeta =$ Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Wand.

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4} a\sigma - \frac{9}{8}\frac{a}{2\zeta}\chi(\sigma\zeta) + \left(\frac{a}{2\zeta}\right)^3 - \frac{45}{16}\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{2\zeta}\right)^5}.$$

$$\chi(x) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{16}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{317}{864}x^4 + \frac{8}{9}x^5 -$$

$$- \left\{\frac{25}{24}x^4 + \cdots\right\}\log\frac{\gamma x}{2}.$$

Tabelle für $\chi(x)$ siehe S. 195.

Außerdem wirkt auf die Kugel eine Kraft, welche die Entfernung ζ von der Wand zu vergrößern strebt. Sie hat den Betrag:

$$\frac{9}{8}\pi\mu a U \cdot \sigma a \frac{\tau(\sigma\zeta)}{1 - \frac{27}{16}\frac{a}{\zeta}},$$

wo:

$$\tau(x) = 1 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{137}{288}x^4 - \frac{8}{5}x^5 + \left\{\frac{175}{96}x^4 + \cdots\right\}\log\left(\frac{1}{2}\gamma x\right),$$

$$\gamma = 1{,}781070.$$

6. Eine Kugel in einer Röhre. Die Kugel bewegt sich längs der Achse der Röhre. Formel von Faxén. § 20. a = Radius der Kugel, l = innerer Radius des Zylinders, U = Geschwindigkeit der Kugel.

$$W = \frac{6\pi\mu a U}{1 - \frac{3}{4}a\sigma - \frac{a}{l}L(\sigma l) + 2{,}09\frac{a^3}{l^3} - 0{,}95\frac{a^5}{l^5}}.$$

Numerische Werte der Funktion L s. S. 199.

7. Zwei Kugeln in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Beide Kugeln bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit U in der Richtung der positiven x_1-Achse. § 21. Formeln vom Verf. a_1, a_2 = Radien, $x_j^{(1)}$, $x_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, 3)$ Koordinaten der Mittelpunkte, r_{12} = Entfernung zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln. Auf die erste Kugel wirkt in der Richtung der x_1-Achse eine Kraft:

$$K_1^{(1)} = -6\pi\mu a_1 U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_2}{r_{12}}e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(1)} - x_1^{(2)})}\right).$$

Auf die zweite Kugel wirkt eine gleichgerichtete Kraft:

$$K_1^{(2)} = -6\pi\mu a_2 U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_1}{r_{12}}e^{-\sigma(r_{12} + x_1^{(2)} - x_1^{(1)})}\right).$$

Außerdem wirkt auf die erste Kugel eine Kraft, welche dieselbe Richtung hat wie der Vektor vom Mittelpunkte der zweiten Kugel zum Mittelpunkte der ersten Kugel und deren Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu\frac{a_1 a_2}{\sigma r_{12}^2}U\{1-(1+\sigma r_{12})e^{-\sigma(r_{12}+x_1^{(1)}-x_1^{(2)})}\}$$

ist. Auf die zweite Kugel wirkt eine Kraft, welche die entgegengesetzte Richtung hat und deren Betrag:

$$\frac{9}{2}\pi\mu\frac{a_1 a_2}{\sigma r_{12}^2}U\{1-(1+\sigma r_{12})e^{-\sigma(r_{12}+x_1^{(2)}-x_1^{(1)})}\}$$

ist.

22 3. Nicht-stationäre Bewegung.

Eine Kugel bewegt sich in einer sonst unbegrenzten Flüssigkeit. Die Bewegung ist stetig und fängt bei $t=0$ an. Formeln von Boussinesq. § 10. a = Radius, $U_j(t)$ = Geschwindigkeitskomponenten der Kugel, $\nu=\mu/\varrho$.

$$K_j=-\frac{2}{3}\pi\varrho a^3\frac{dU_j(t)}{dt}-6\pi\mu a\left\{U_j(t)+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{dU_j(t^{(0)})}{dt^{(0)}}\frac{dt^{(0)}}{\sqrt{t-t^{(0)}}}\right\}.$$