

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik

Oseen, Carl Wilhelm

Leipzig, 1927

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil.

Die Grundlösungen.

Erste Anwendungen derselben.

§ 1. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen	3
1 1. Der Impulssatz. Die Kontinuitätsbedingung	3
1 2. Der Deformationstensor	4
1 3. Beziehung zwischen Reibungskräften und Deformationstensor	6
1 4. Aufstellung der grundlegenden hydrodynamischen Integralgleichungen	8
1 5. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen	10
§ 2. Die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung	13
2 1. Zurückführung auf Poissonsche Gleichungen für das innere Problem ..	13
2 2. Lösung der Poissonschen Gleichungen vermittelt der Greenschen Funktion ..	14
2 3. Anwendung auf die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung	17
2 4. Das äußere Problem. Eine charakteristische Schwierigkeit	18
2 5. Auflösung der Schwierigkeit	19
§ 3. Die Grundlösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen von Stokes ..	21
3 1. Die Stokesschen Gleichungen	21
3 2. Verallgemeinerung der Greenschen Formel	21
3 3. Grundeigenschaften der Tensoren	22
3 4. Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten ..	25
3 5. Grundlösung zur Bestimmung des Druckes	27
3 6. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen	28
3 7. Das zweidimensionale Problem	29
§ 4. Die Grundlösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen	30
4 1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel	30
4 2. Die Grundlösungen zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten. Einführung der Funktion 0	31
4 3. Grundlösung für den Druck	35
4 4. Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen	35
4 5. Das zweidimensionale Problem	36
§ 5. Die Grundlösungen der allgemeinen, linearen, homogenen hydrodynamischen Differentialgleichungen	38
5 1. Verallgemeinerung der Greenschen Formel	38
5 2. Ansatz für die Grundlösungen der Geschwindigkeitskomponenten	39
5 3. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der linken Seite von (12)	41
5 4. Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in der rechten Seite von (12)	43
5 5. Erweiterung des gefundenen Ergebnisses	44

5 6.	Grundlösung zur Bestimmung des Druckes.....	47
5 7.	Ausführung des Grenzüberganges auf der linken Seite von (27)	48
5 8.	Ausführung des Grenzüberganges in der rechten Seite von (27)	50
5 9.	Zusammenfassung. Die hydrodynamischen Integralgleichungen	52
5 10.	Das zweidimensionale Problem	54
§ 6.	Die hydrodynamischen Integralgleichungen	56
6 1.	Die Aufgabe: Direkte Ableitung der hydrodynamischen Integralgleichungen aus den grundlegenden mechanischen Sätzen	56
6 2.	Mathematische Formulierung der Aufgabe	58
6 3.	Ableitung einer grundlegenden Integralbeziehung	59
6 4.	Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$) in den drei ersten Gliedern der Gleichung (4)	60
6 5.	Ausführung des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$) im letzten Gliede der Gleichung (4).....	61
6 6.	Das Ergebnis des Grenzüberganges $\Delta x_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$)	63
6 7.	Der Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$	63
6 8.	Die Bedeutung des gefundenen Ergebnisses	65
§ 7.	Erste Anwendungen der hydrodynamischen Integralgleichungen. Theorie der Singularitäten in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit	66
7 1.	Das Problem. Definition des Begriffes „reguläre Bewegung“ für eine den ganzen Raum erfüllende Flüssigkeit	66
7 2.	Integralgleichungen zur Berechnung der regulären Bewegung einer zähen Flüssigkeit	68
7 3.	Abschätzungen der Größen $t_{jk}, \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_l}$	68
7 4.	Lösung der Integralgleichungen durch Reihen	71
7 5.	Fortführung der Berechnung der regulären Bewegung	72
7 6.	Analyse der Singularitäten, welche in der Bewegung einer den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit auftreten können. Der Hauptsatz	73
7 7.	Erster Teil des Beweises des Hauptsatzes. Ausdruck der Geschwindigkeitskomponenten durch die Wirbelkomponenten. Abschätzung derselben	74
7 8.	Durchführung des Beweises des Hauptsatzes. Die Bedeutung desselben	79
§ 8.	Einfachste Beispiele von Wirbelbewegungen in einer zähen Flüssigkeit....	82
8 1.	Zirkulation um einen geradlinigen Wirbelfaden	82
8 2.	Zwei parallele, geradlinige Wirbel in einer zähen Flüssigkeit	87

Zweiter Teil.

Die Randwertaufgaben.

I.

Exakte Lösungen hydrodynamischer Randwertaufgaben.

Einleitung	95
§ 9. Die Stokesschen Gleichungen	97
9 1. Eine Kugel. Randwertaufgabe für das innere Problem	97
9 2. Zusammenstellung der Formeln für das innere Problem der Kugel....	105

9 3.	Eine Kugel. Randwertaufgabe für das äußere Problem	106
9 4.	Zusammenstellung der Formeln für das äußere Problem der Kugel . .	108
9 5.	Die Stokessche Widerstandsformel	109
9 6.	Ein Satz von Faxén	111
9 7.	Das Problem der ebenen Wand	113
§ 10.	Die nicht-stationären Gleichungen. Das Problem der Kugel. Die Formel von Boussinesq. Das Problem des Kreiszyinders	114
10 1.	Der Ansatz	114
10 2.	Einführung eines Hilfsproblems	117
10 3.	Ansatz zur Lösung durch Reihen nach Kugelfunktionen	120
10 4.	Berechnung von F_R , $\Delta v F$ und $n \operatorname{rot} F$ für $R = a$	121
10 5.	Verifikation der Bedingungen	124
10 6.	Neue Darstellung von F_R	127
10 7.	Zusammenfassung	128
10 8.	Erste Anwendung	129
10 9.	Zweite Anwendung	130
10 10.	Das Problem von Boussinesq	132
10 11.	Das zweidimensionale Problem	134
§ 11.	Die Stokesschen Gleichungen. Ein Ellipsoid mit konstanter Geschwindigkeit. Die Formeln von Oberbeck	136

II.

Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den Stokesschen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung.

§ 12.	Eine kleine Kugel und eine ebene Wand	140
12 1.	Berechnung des Widerstandes	140
12 2.	Eine Spiegelungsmethode von H. A. Lorentz	143
§ 13.	Eine Kugel oder ein Kreiszyinder zwischen zwei ebenen Wänden	144
13 1.	Einleitung und Darstellung des Abstandes R durch Integrale	144
13 2.	Einsetzung der so gewonnenen Darstellungen von R usw. in die Stokessche Formel behufs Gewinnung allgemeiner Integrale	148
13 3.	Ansatz zur Lösung und zur Widerstandsberechnung	151
13 4.	Durchführung in speziellen Fällen	152
13 5.	Das zweidimensionale Problem	155
§ 14.	Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit	156
14 1.	Einleitung und Satz von Faxén über die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln von derselben Größe	156
14 2.	Erste Näherung bei Kugeln mit verschiedenen Radien	157
14 3.	Genauere Formeln	160
§ 15.	Die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead	162
15 1.	Das Paradoxon von Stokes	162
15 2.	Das Paradoxon von Whitehead	163
15 3.	Erklärung dieser Paradoxien	165

III.

Angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den erweiterten Stokesschen Gleichungen.

§ 16. Das Problem der Kugel	166
16 1. Aufstellung spezieller Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen	166
16 2. Lösungen der erweiterten Stokesschen Gleichungen, welche die Randbedingungen angenähert erfüllen	167
16 3. Untersuchung der Gültigkeit der Lösung. Vergleich mit der Stokes'schen Lösung	169
16 4. Eigenschaften der neuen Lösung. Ausblick auf die Theorie der idealen Flüssigkeiten	170
16 5. Teilung der vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung in Glieder mit $U_1 U_1 $ und in Glieder mit U_1^2	173
16 6. Berücksichtigung der Glieder mit $U_1 U_1 $. Genauere Widerstandsformel	174
16 7. Berücksichtigung der Glieder mit U_1^2	174
§ 17. Das Problem des Kreiszyinders	177
17 1. Die Lambsche Lösung	177
17 2. Magnuseffekt bei kleinen Geschwindigkeiten	179
17 3. Methode zur numerischen Berechnung des Widerstandes bei größeren Werten von $\sigma'a$ bzw. des Reynoldsschen Zahl $2\sigma'a$	179
§ 18. Das Problem des Ellipsoides	182
18 1. Einleitung	182
18 2. Herstellung dreier spezieller Lösungen des Systemes (1)	183
18 3. Ansatz zur Lösung des Problems	185
18 4. Berechnung des Widerstandes	187
§ 19. Eine kleine Kugel und eine ebene Wand	190
19 1. Einleitung. Die von der Kugel primär hervorgerufene Strömung	190
19 2. Integraldarstellung der Funktionen Φ_1 und P	191
19 3. Berechnung der von der Wand zurückgeworfenen Strömung	193
19 4. Resultierende Kraft auf die Kugel	194
§ 20. Eine Kugel in einer Röhre	196
20 1. Einleitung. Integraldarstellungen für die Funktionen $\frac{1}{R}$ und $\frac{e^{-\sigma'R - \sigma x_1}}{R}$	196
20 2. Ansatz zur Lösung des Problems	198
20 3. Die Widerstandsformel	198
§ 21. Zwei Kugeln in einer Flüssigkeit	199
21 1. Einleitung. Die Theorie von Smochulowski nach § 14	199
21 2. Neue Lösung auf Grund der erweiterten Stokesschen Gleichungen ..	200
21 3. Diskussion der neuen Lösung	201
§ 22. Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln	203
22 1. Stationäre Bewegung. Die Stokesschen Gleichungen	203
22 2. Stationäre Bewegung. Die erweiterten Stokesschen Gleichungen	205
22 3. Nicht-stationäre Bewegung	208

Dritter Teil.

Der Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit.

Einleitung	211
§ 23. Ein spezieller Fall. Eine dünne Platte	214
23 1. Ansatz zur Lösung des Problems im Anschluß an den früheren Ansatz bei dem Ellipsoid	214
23 2. Aufstellung von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	215
23 3. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen bei $\mu \rightarrow 0$	216
23 4. Vereinfachung der Integro-Differentialgleichungen für die Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$	218
23 5. Zurückführung der Funktionen $\varphi_1^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ auf eine Potentialfunktion A	218
23 6. Aufstellung einer Greenschen Funktion zur Bestimmung von A	219
23 7. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit außerhalb des von der Scheibe durchschrittenen Raumes	222
23 8. Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeit in dem von der Scheibe durchschrittenen Raume	223
23 9. Zusammenfassung	227
§ 24. Allgemeinere Untersuchungen	228
24 1. Aufgabestellung. Ansatz zur Lösung auf Grund des § 5	228
24 2. Vorläufige Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $J_{j\sigma}^{(1)}$ und $J_{j\sigma}^{(2)}$	230
24 3. Definitive Zerlegung des Flächenintegrals in zwei Summanden $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{j\sigma}^{(2)}$	231
24 4. Das Verhalten des Integrals $J_{j\sigma}^{(1)}$ bei kleinem μ	232
24 5. Beweis, daß $\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{j\sigma}^{(2)} = 0$, wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen h_j endlich bleiben	235
24 6. Untersuchung des Verhaltens von $J_{j\sigma}^{(2)}$, wenn bei $\mu \rightarrow 0$ die Funktionen $\sqrt{\mu} h_j$ endlich bleiben	236
24 7. Die Randbedingungen. Ruhendes Flächenelement	237
24 8. Bewegtes Flächenelement. Grundlegende Voraussetzungen	239
24 9. Untersuchung des Integrals $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(1)} d\tau$, wenn der betrachtete Punkt im betrachteten Zeitmoment auf dem Flächenelement liegt	239
24 10. Entsprechende Resultate in den anderen Fällen	241
24 11. Entsprechende Untersuchung für das Integral $\int_{t_0}^t J_{j\sigma}^{(2)} d\tau$	241
24 12. Aufstellung von Integrodifferentialgleichungen für die Größen h_j bei kleinem μ	242
24 13. Nachweis, daß in dem von der Fläche nicht durchschrittenen Bereiche die Bewegung eine Potentialbewegung ist	242
24 14. Nachweis, daß die Flüssigkeit an der Vorderseite der Fläche gleitet	244
24 15. Untersuchung der Bewegung in dem von der Fläche durchschrittenen Teilbereiche	245
24 16. Zusammenfassung	246

§ 25. Translatorische Bewegung	247
25 1. Vereinfachungen durch die Annahme, daß der Körper sich stets in derselben Richtung bewegt	247
25 2. Beginn der Umformung der Gleichung (3). Verwandlung der Zeit-Oberflächenintegrale in Ableitungen von Potentialfunktionen	249
25 3. Durchführung der Umformung der Gleichung (3). Darstellung der Größen $k_j(v)$ durch eine Potentialfunktion φ	251
25 4. Beginn der entsprechenden Umformung der Gleichung (4). Zurückführung der Zeitflächenintegrale auf Potentialfunktionen nebst einem Zusatzgliede	252
52 5. Weitere Umformung vermittelt der Sätze der Potentialtheorie	254
25 6. Durchführung der Umformung. Darstellung der Größen L_j durch die Potentialfunktion φ	256
25 7. Vorläufige Formulierung der Bedingungen für die Potentialfunktion φ	256
25 8. Darstellung der Bewegung im Inneren der Flüssigkeit vermittelt der Funktion φ	256
25 9. Definitive Formulierung der Bedingungen für φ . Verifikation der Kontinuitätsbedingung	258
25 10. Befreiung von einschränkenden Voraussetzungen	261
25 11. Stationärer Fall	262
25 12. Ausführungen über den Begriff der hydrodynamischen Rückseite	263
§ 26. Neue Methode zur Behandlung des stationären Falles	264
A. Zweidimensionaler Fall	264
26 1. Der Grenzübergang bei geradliniger Begrenzung	264
26 2. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems	266
26 3. Zurückführung der Randbedingungen auf eine Fredholmsche Integralgleichung	267
26 4. Nachweis, daß die erhaltene Lösung dieselbe Gestalt hat wie die in den Paragraphen 23 und 25 gewonnene Lösung	268
B. Dreidimensionaler Fall	272
26 5. Der Grenzübergang bei ebener Begrenzung	272
26 6. Ansatz zur Lösung des allgemeinen Problems	273
26 7. Nachweis, daß der Ansatz sich auf die aus § 23 und § 25 bekannte Form zurückführen läßt	274
26 8. Die Randbedingungen	275
26 9. Nachweis, daß die Potentialfunktion φ im rotationssymmetrischen Falle außerhalb des Körpers regulär ist	276
26 10. Vereinfachung der Randbedingungen im rotationssymmetrischen Falle	278
26 11. Zusammenfassung	279
§ 27. Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgabe, zu welcher die stationäre Bewegung in der Ebene Anlaß gibt	280
27 1. Lösung eines potentialtheoretischen Problems nach Hilbert	280
27 2. Unterschied unserer hydrodynamischen Randwertaufgabe von der Hilbertschen	282
27 3. Konforme Abbildung des Bereiches auf das Äußere eines Kreises	283
27 4. Ansatz zur Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis mit Hilfe des Poissonschen Integrales	284
27 5. Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = 0$ auf dem ganzen Kreise	285

27 6.	Herstellung einer Lösung der Randwertaufgabe im Falle $c = U_1 a \dots$	285
27 7.	Herstellung einer Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe	285
27 8.	Herstellung der allgemeinen Nulllösung. Untersuchung der singulären Stellen auf dem Kreise C	286
27 9.	Lösung des Problems	289
27 10.	Zusammenfassung	290
§ 28	Die Druckverteilung und der Widerstand bei zweidimensionalen hydrodynamischen Problemen	291
28 1.	Einleitung. Ist der Druck bei $\mu \rightarrow 0$ überall stetig?	291
28 2.	Zerlegung des Druckes in zwei Teile	292
28 3.	Berechnung des Widerstandes	293
28 4.	Berechnung des Druckes senkrecht zur Bewegungsrichtung	295
28 5.	Zusammenfassung	296
§ 29.	Das Problem des Kreiszylinders	296
29 1.	Bericht über die Methode von Prof. Burgers	296
29 2.	Berechnung der Funktion $w(z)$	297
29 3.	Lösung des Problems	298
29 4.	Verhalten der Lösung in unendlicher Ferne	299
29 5.	Werte von v_1 und v_2 auf der Oberfläche des Zylinders	300
29 6.	Numerische Ergebnisse. Vergleich mit der Erfahrung	300
§ 30.	Das Problem einer dünnen Platte	304
30 1.	Einleitung. Konforme Abbildung	304
30 2.	Formulierung der Aufgabe. Berechnung der Funktion $w(z')$	304
30 3.	Berechnung der Funktion $W(z)$. Eigenschaften	305
30 4.	Berechnung des Widerstandes und der Tragkraft	306
30 5.	Vergleich mit der Erfahrung	309
§ 31.	Die kreisförmige Platte und verwandte Probleme	311
31 1.	Formulierung des Problems	311
31 2.	Einführung von dipolaren Koordinaten	312
31 3.	Einführung einer aus vierwertigen Funktionen aufgebauten Potentialfunktion mit Hilfe der Sommerfeldschen Methode. Eigenschaften derselben	313
31 4.	Lösung des Problems	315
31 5.	Das Verhalten der Lösung am Rande der Scheibe	315
31 6.	Berechnung des Widerstandes. Vergleich mit der Erfahrung. Verwandte Probleme	316

Anhang.

Zwei Vorträge von Prof. N. Zeilon,

gehalten vor dem zweiten internationalen Kongreß
für technische Mechanik Zürich 1926.

I.	Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem	321
II.	Zur Berechnung des Kielwasserdruckes in der asymptotischen Widerstandstheorie	328