Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik

Oseen, Carl Wilhelm

Leipzig, 1927

Einleitung

urn:nbn:at:at-ubi:2-5756

Einleitung.

In dem großen Briefe an Oldenburg, in welchem Spinoza diesem Freund seine Bemerkungen über Robert Boyles „New experiments touching the spring of the Air" mitteilte, kommt der folgende Passus vor:

„Endlich, um auch dies nebenher zu bemerken, genügt es zum allgemeinen Verständnis der Natur der Flüssigkeiten, zu wissen, daß man seine Hand in einer Flüssigkeit mit einer ihr proportionierten Bewegung in allen Richtungen ohne Widerstand bewegen kann; was denen hinlänglich bekannt, die genau auf jene Begriffe achten, welche die Natur erklären, wie sie an sich ist, statt in ihrer Beziehung zur menschlichen Sinneswahrnehmung. Gleichwohl halte ich diese Beschreibung nicht für wertlos, im Gegenteil würde ich eine ebenso genaue und treue Beschreibung jeder Flüssigkeit für äußerst nützlich zum Verständnis ihrer Eigenart erachten, was ja als höchst wichtig von allen Philosophen erstrebt wird."*

Die Eigenschaft der „idealen" Flüssigkeiten, bei stationärer Bewegung keinen Widerstand gegen einen Körper zu leisten, die Spinoza hier (1662?) erwähnt, wurde im achtzehnten Jahrhundert mit dem Namen „das Paradoxon von d'Alembert" oder „das Paradoxon von Euler" belegt.

Der Beweggrund für die Untersuchungen des Verfassers, über welche dieses Buch berichtet, war der Wunsch, durch das Studium der Bewegungen der wirklichen, zähen Flüssigkeiten auf dieses Paradoxon Licht zu werfen. In der Zeit, in welcher diese Untersuchungen angefangen wurden, war die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ein beliebter Gegenstand der mathematischen Forschung. Es schien mir eine verlockende Aufgabe, die Methoden, welche in diesem Teile der reinen Mathematik gewonnen waren, zur Lösung jenes Rätsels anzuwenden.

Um eine Grundlage für folgende Untersuchungen zu gewinnen, hatte ich zuerst die linearen Systeme von partiellen Differentialgleichungen zu

---

* Übersetzung von J. Stern.

untersuchen, welche man aus den Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält. Ich hatte die Grundlösungen jener Systeme zu bestimmen. Über diese Untersuchungen berichtet der erste Teil dieses Buches.

Die oben erwähnten linearen Systeme von partiellen Differentialgleichungen, welche man aus den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen durch Weglassen der quadratischen Glieder erhält, gelten annähernd für langsame Bewegungen einer zähen Flüssigkeit. Durch die Kolloidchemie hat dieses Gebiet der langsamen Bewegungen wissenschaftliche Bedeutung bekommen. Meine Beschäftigung mit dem Gegenstand gab mir die Lösung eines hydrodynamischen Rätsels auf diesem Gebiete, des Paradoxons von Whitehead. Lamb zeigte, daß auch ein anderes hydrodynamisches Rätsel, das Paradoxon von Stokes, durch meine Methoden seine Lösung findet. Faxén hat im Anschluß an meine Arbeiten die Theorie der langsamen Flüssigkeitsbewegungen durch ausgedehnte und wertvolle Untersuchungen gefördert. Ich hoffe, daß die Zusammenstellung der auf diesem Gebiete in den letzten Jahren gewonnenen Ergebnisse, welche ich im zweiten Teile meines Buches gebe, für die Kolloidchemie willkommen sein wird.

Das Hauptziel meiner Untersuchungen war aber, den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit in exakter Weise auszuführen. Dieses Ziel habe ich noch nicht erreicht. Dagegen konnte ich in den linearen Systemen, von welchen ich oben gesprochen habe, den Grenzübergang ausführen. Die Ergebnisse, welche ich dabei erhielt, stehen in schroffem Widerspruch zu der Theorie der idealen Flüssigkeiten, dagegen in qualitativer Übereinstimmung mit dem Verhalten der wirklichen Flüssigkeiten. Schon aus diesen Tatsachen schien mir hervorzugehen, daß das d'Alembertsche Paradoxon auf einem schlecht vollzogenen Grenzübergange zu verschwindender Zähigkeit beruht. Die Untersuchungen von Zeilon, der auf diesem Gebiete meine Arbeit fortgeführt hat, haben gezeigt, daß mein Grenzübergang weit mehr als dieses negative Resultat ergibt. In bezug auf den Widerstand gibt er zwar nicht genau, aber doch der Größenordnung nach richtige Werte. Und von der Druckverteilung auf der Vorderseite eines Körpers gibt er ein auch quantitativ fast richtiges Bild. Über diese Dinge berichtet der dritte Teil des Buches.

Durch Untersuchungen, welche noch nicht veröffentlicht sind, hat Zeilon gezeigt, daß man durch einen weiteren Ausbau meines Ansatzes die Übereinstimmung mit den Tatsachen zu einer fast vollständigen machen kann. Auch hat er den Magnuseffekt in sehr schöner Weise behandelt. Es war mir nicht möglich, diese neuen Ergebnisse in mein

Buch aufzunehmen. Einen Ersatz ergeben zwei Vorträge von Herrn Zeilon, welche im Anhange mitgeteilt werden.

Um die Übersicht zu erleichtern und die Bedeutung der verschiedenen Methoden und Resultate zu charakterisieren, geben wir im folgenden eine genauere Übersicht über den Inhalt des Buches, die einige Einzelaussagen bringen wird, die wir im Text nicht wiederholen werden.

Im ersten Paragraphen werden die hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitet. Als Ausgangspunkt wird dabei der Impulssatz der Newtonschen Mechanik benutzt. Dieser Satz wird auf einen beliebig herausgegriffenen Teil der Flüssigkeit angewandt. Die Beziehungen, welche so erhalten werden, haben die Form von Integralgleichungen. In diesen Integralgleichungen kommen die zunächst unbekannten Kräfte vor, welche die Umgebung des herausgegriffenen Teiles der Flüssigkeit auf jenen Teil ausübt. Die Annahme, daß diese Kräfte von der Formänderung der Flüssigkeit abhängen, ermöglicht es, einen Ansatz für sie zu gewinnen. Aus den Integralgleichungen, welche keine andere Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten oder des Druckes als die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten, werden in gewöhnlicher Weise, unter Voraussetzung, daß die Geschwindigkeitskomponenten stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Zeit, zweiter Ordnung in bezug auf die Raumkoordinaten haben und daß der Druck einmal stetig in bezug auf die Raumkoordinaten differenzierbar ist, die hydrodynamischen Differentialgleichungen abgeleitet. Außer den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen werden zwei in speziellen Fällen gültige Formen derselben aufgestellt, nämlich die Gleichungen für stationäre Bewegung in bezug auf ein ruhendes Bezugssystem und die Gleichungen für stationäre Bewegung in bezug auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem.

Der zweite Paragraph hat den Zweck, die mathematische Methode, welche später verwendet wird, durch ein einfaches Beispiel zu erläutern. Hierzu wird die verallgemeinerte Poissonsche Gleichung benutzt. Es wird gezeigt, wie das innere Problem für diese Gleichung durch Reihenentwicklung nach Potenzen eines Parameters λ auf ein unendliches System von gewöhnlichen Poissonschen Gleichungen zurückgeführt werden kann. Die Lösung der Poissonschen Gleichung mit Hilfe des Greenschen Satzes, der Grundlösung und der ersten Greenschen Funktion wird dargelegt. Betreffs des äußeren Problems wird auf eine charakteristische Schwierigkeit hingewiesen, welche darin ihre Wurzel hat, daß die Lösung nicht mehr in der Umgebung von $\lambda = 0$ eine analytische

Funktion des Parameters λ ist. Die hydrodynamische Bedeutung dieser Tatsache wird hervorgehoben.

Im dritten Paragraphen wird, nach dem Vorgange von H. A. Lorentz, der verallgemeinerte Greensche Satz für das lineare System der Gleichungen aufgestellt, die man im stationären Falle durch Weglassen der quadratischen Glieder aus den vollständigen hydrodynamischen Gleichungen erhält und die man kurz die Stokesschen Gleichungen nennen kann. Mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen werden die Grundlösungen (von H. A. Lorentz) wiedergefunden. Mit Hilfe dieser Grundlösungen werden die vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen für stationäre Bewegung in ein System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt.

Im vierten Paragraphen werden dieselben Aufgaben für die „erweiterten Stokesschen Gleichungen" gelöst, d. h. für das lineare System von partiellen Differentialgleichungen, welches man durch Weglassen der quadratischen Glieder aus dem System erhält, das für stationäre Bewegung in bezug auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem gültig ist.

Der fünfte Paragraph gibt die Lösung derselben Aufgaben für das lineare System von Differentialgleichungen, das man durch Weglassen der quadratischen Glieder aus den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen erhält. In diesem Paragraphen wird also das allgemeine vollständige System von hydrodynamischen Differentialgleichungen in ein System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt. In diesen Gleichungen kommen keine anderen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten oder des Druckes vor als die Ableitungen erster Ordnung von den Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten.

In den Paragraphen 1—5 sind die Integralgleichungen — oder genauer Integrodifferentialgleichungen —, welche der unmittelbare Ausdruck der zugrunde gelegten mechanischen Sätze sind und welche nur die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten, durch Vermittlung der hydrodynamischen Differentialgleichungen und ihrer Grundlösungen in ein neues System von Integrodifferentialgleichungen umgeformt worden, welche ebenfalls nur die Ableitungen erster Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Raumkoordinaten enthalten. Es ist eine naheliegende Frage, ob man nicht, ohne Vermittlung der Differentialgleichungen, direkt aus den zugrunde gelegten mechanischen Sätzen zu den schließlichen Integrodifferentialgleichungen gelangen kann. Paragraph 6 zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist. Wie aus diesem Bericht über den Inhalt dieses Paragraphen unmittelbar klar sein dürfte, liegt sein Interesse wesentlich auf dem mathematischen Gebiete. Die Kenntnis dieses Paragraphen ist für das Verständnis des folgenden nicht notwendig.

Paragraph 7 gibt eine erste Anwendung der gefundenen Integrodifferentialgleichungen. Es handelt sich um die Berechnung der Bewegung einer zähen, den ganzen Raum erfüllenden Flüssigkeit, wenn die Geschwindigkeit in einem gewissen Momente, $t = T$, bekannt ist und der Kontinuitätsgleichung genügt. Man kann diese Aufgabe mittelst der im zweiten Paragraphen dargelegten Methode der Reihenentwicklung nach den Potenzen eines Parameters angreifen. Es war leider bei der Darstellung dieser Untersuchungen nicht möglich, die Beweise für die mitgeteilten Sätze vollständig zu geben. Betreffend einiger Integralabschätzungen mußte ich auf die Originalabhandlungen verweisen. Als erstes Resultat ergibt sich der Satz: Wenn die Bewegung einer zähen Flüssigkeit in einem gewissen Momente $t = T$ regulär (in einem gewissen Sinne) ist, dann gibt es stets ein Intervall $T \leqq t < T + \tau$ $(\tau > 0)$, in welchem die Bewegung regulär bleibt. Dieser Satz gibt zu einer Frage Anlaß: Kann die Größe τ stets beliebig groß genommen werden, oder gibt es, wenigstens in gewissen Fällen, eine endliche obere Grenze der Größe τ, das heißt der Zeit, während welcher die Bewegung regulär bleibt? Der Verfasser hat sich lange bemüht, durch Verschärfung der Ungleichungen, welche die Grundlage der Konvergenzbeweise bilden, den Beweis dafür zu führen, daß die in einem Momente T reguläre Bewegung für $t > T$ stets regulär bleibt. Das Ergebnis dieser Bemühungen war, daß es, wenigstens in dieser Weise, nicht möglich ist, einen solchen Beweis zu führen. Wir müssen vielmehr damit rechnen, daß eine in einem Momente reguläre Bewegung in einem späteren Momente irregulär werden kann. Es ist unter diesen Umständen von erheblichem Interesse zu wissen, welcher Art die Irregularitäten sind, die in einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit auftreten können. Es wird bewiesen, daß sie entweder darin bestehen, daß der Wirbelvektor irgendwo unendlich groß wird, oder darin, daß die Wirbelbewegung sich in solcher Weise in unendlicher Ferne ausbreitet, daß die Bewegung nicht mehr „regulär" ist. Es wird auf die Bedeutung dieses Ergebnisses hingewiesen. Die Hypothese wird (mit allem Vorbehalt) aufgestellt, daß die irregulären Flüssigkeitsbewegungen mit den „turbulenten" Bewegungen der Hydraulik identisch sind.

Der letzte Paragraph des ersten Teiles behandelt die einfachsten Beispiele von Wirbelbewegung in einer zähen Flüssigkeit. Gegenstand der Untersuchung ist einmal der einzelne, geradlinige, rotationssymmetrische Wirbelfaden, andererseits die Wechselwirkung zwischen zwei solchen Wirbelfäden. Bei der ersten Aufgabe geben die Integrodifferentialgleichungen direkt die exakte Lösung des Problems. Die Bewegung ist nur wenig komplizierter als die im Grenzfalle $\mu = 0$ auftretende Helmholtzsche Bewegung. Bei dem zweiten Probleme wird nur eine angenäherte Lösung gegeben. Sie wird zur Ableitung eines Satzes über die Wechselwirkung zwischen zwei Wirbeln in einer zähen Flüssigkeit angewandt.

Der zweite Teil des Buches ist, wie schon erwähnt wurde, den hydrodynamischen Randwertaufgaben gewidmet. Er ist in drei Abschnitte zerlegt. Im ersten Abschnitte werden einige Fälle behandelt, in denen es möglich ist, eine exakte Lösung der Randwertaufgabe zu geben. Zuerst wird in Paragraph 9 das Problem behandelt, eine Lösung der linearen Stokesschen Gleichungen für stationäre Bewegung zu finden, bei welchen die Geschwindigkeitskomponenten u_j im Unendlichen verschwinden und auf der Oberfläche einer Kugel vorgeschriebene Werte annehmen. Lamb hat dieses Problem durch Reihenentwicklung gelöst. Hier wird eine Lösung in geschlossener Form gegeben, indem die verallgemeinerten Greenschen Funktionen des Problems aufgestellt werden. Die gefundenen Formeln geben theoretisch die Lösung der allgemeinsten hydrodynamischen Randwertaufgabe der Kugel für die Stokesschen Gleichungen. Einfache Aufgaben löst man aber bequemer durch spezielle Methoden. So erhält man sehr einfach mit Hilfe der Grundlösung der Stokesschen Gleichungen die Lösung der Randwertaufgabe, wenn die vorgeschriebenen Werte auf der Kugel konstant sind. Man kann mit Hilfe dieser Lösung die sogenannte Stokessche Widerstandsformel ableiten, welche den Widerstand ergibt, den eine kleine Kugel erfährt, welche sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegt. Faxén hat diese Stokessche Formel in schöner Weise verallgemeinert, indem er gezeigt hat, wie man die Resultierende der Kräfte berechnen kann, welche eine in beliebiger stationärer Bewegung begriffene Flüssigkeit auf eine darin versenkte Kugel ausübt. Man kann dieses Resultat mit Hilfe der Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe gewinnen. Leider sind aber die hierfür nötigen Rechnungen so langwierig, daß ich davon absehen mußte, sie hier zu reproduzieren, und mich darauf beschränken mußte, den Gang des Beweises anzudeuten. Paragraph 9 gibt endlich die Lösung der Randwertaufgabe der ebenen Wand für die Stokesschen Gleichungen.

Paragraph 10 ist derjenigen Randwertaufgabe der Kugel gewidmet, zu welcher die allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen für nichtstationäre Bewegungen Anlaß geben. Verfasser hat vor Jahren dieses Problem durch Reihenentwicklungen gelöst. Später gelang es ihm durch Summieren jener Reihen, das Problem auf bekannte Randwertaufgaben für die Laplacesche Gleichung und die Wärmeleitungsgleichung zurückzuführen. Hier wird der Versuch gemacht, durch Hervorhebung der analytischen Tatsache, auf welcher diese Zurückführung beruht, den Kern des Problems in möglichst helles Licht zu setzen. Der Beweis jener analytischen Tatsache wird auch hier durch Reihenentwicklungen gegeben. Von einer Darlegung der (übrigens leicht zu führenden) Konvergenzbeweise mußte hier abgesehen werden. Eine einfache Anwendung der gefundenen Ergebnisse gibt die Lösung der Boussinesqschen Aufgabe, den Widerstand gegen die nichtstationäre Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit zu berechnen.

Paragraph 11 reproduziert, als Vorbereitung zum folgenden, die von Oberbeck gegebene Theorie für die stationäre Bewegung eines Ellipsoids in einer zähen Flüssigkeit.

Der zweite Abschnitt des zweiten Teiles bringt angenäherte Lösungen von Randwertaufgaben bei den Stokesschen Differentialgleichungen für die stationäre Bewegung. Es dürfte hier am Platze sein, den Grund dafür anzugeben, daß wir diesen Stokesschen Differentialgleichungen soviel Raum und Interesse widmen. Schon beim flüchtigen Durchblättern dieses zweiten Abschnitts wird es dem Leser sicher auffallen, daß nirgends Bedingungen für die Gültigkeit der mitgeteilten Formeln angegeben werden. Den Grund hierzu findet er im letzten Paragraphen des Abschnitts, wo gezeigt wird, daß die Stokesschen Differentialgleichungen eine nicht zulässige Annäherung darstellen, indem man, um zu diesen Gleichungen zu kommen, in den vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichungen Glieder vernachlässigen muß, welche nicht nur von derselben Größenordnung wie die von Stokes beibehaltenen Glieder sind, sondern sogar, diesen Gliedern gegenüber, beliebig groß sein können. Der ganze zweite Abschnitt entbehrt infolge dieses Umstandes einer festen Grundlage. Nun stimmt aber das Stokessche Widerstandsgesetz mit den Tatsachen gut überein. Der Grund hierzu liegt darin, daß man bei strenger Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen eine Bewegung bekommt, die zwar in großen Entfernungen von der Kugel einen ganz anderen Charakter als die von Stokes untersuchte Bewegung hat, die aber in der Nähe der Kugel nahezu mit der Stokesschen Bewegung übereinstimmt. In solchen Fällen, wo nur die Bewegung der Flüssigkeit in der Nähe des bewegten Körpers von Bedeutung ist, kann man also die Bewegung in erster Näherung nach der Stokesschen Methode berechnen. Solche Fälle kommen in der Kolloidchemie in großer Zahl vor. Dies ist der Grund, warum wir, obwohl die Stokesschen Gleichungen von theoretischem Standpunkte aus unrichtig sind, ihnen doch soviel Aufmerksamkeit widmen.

Paragraph 12 behandelt die stationäre Bewegung einer Kugel in einer von einer ebenen Wand begrenzten zähen Flüssigkeit. Es handelt sich hier wesentlich um einen Bericht über eine Untersuchung von H. A. Lorentz.

In Paragraph 13 wird die Bewegung einer Kugel zwischen zwei parallelen, ebenen Wänden untersucht. Es ist die Hoffnung des Verfassers, daß seine Darstellung in diesem Paragraphen die schöne, von Faxén gegebene Lösung dieses für die Kolloidchemie bedeutsamen Problems leichter zugänglich machen wird.

Paragraph 14 gibt einen Bericht über die Untersuchungen betreffend die Wechselwirkungen zwischen zwei Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. Die erste, angenäherte Lösung des Problems rührt von Smoluchowski her. Tiefergehende Untersuchungen verdanken wir Faxén, Dahl und in neuester Zeit Margaret Stimson und G. B. Jeffery.

In Paragraph 15 werden die sogenannten Paradoxien von Stokes und von Whitehead besprochen. Das erste Paradoxon besagt, daß es unmöglich ist, eine Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen zu finden, welche dem Fall entspricht, wo ein Kreiszylinder sich mit konstanter Geschwindigkeit in einer zähen Flüssigkeit bewegt. Das Paradoxon von Whitehead besagt, daß es bei Zugrundelegung der Stokesschen Theorie für die translatorische Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit unmöglich ist, diese Theorie dadurch zu verbessern, daß man weitere Glieder für die Geschwindigkeitskomponenten und für den Druck berechnet. Es wird gezeigt, daß die Wurzel der Schwierigkeiten in beiden Fällen dieselbe ist und daß sie einfach darin besteht, daß die Stokesschen Gleichungen im oben erörterten Sinne eine unzulässige Näherung darstellen.

Der zweite Abschnitt endet mit dem Nachweis, daß in den Stokesschen Differentialgleichungen Glieder vernachlässigt worden sind, welche dieselbe Größenordnung wie die berücksichtigten Glieder haben. Wenn man jene Glieder schon in erster Näherung in die Differentialgleichungen aufnimmt, erhält man die Gleichungen, welche ich die erweiterten Stokesschen Gleichungen genannt habe. Diesen Gleichungen und den bei ihnen auftretenden Randwertaufgaben ist der dritte Abschnitt gewidmet. Ein Beweis, daß diese Gleichungen eine zuverlässige Grundlage einer exakten Berechnung der durch die Verschiebung eines Körpers hervorgerufenen

Bewegung einer zähen Flüssigkeit darstellen, wird hier nicht gegeben. Als ich mich zuerst mit diesen Gleichungen beschäftigte, konnte ich diesen Beweis nicht führen, weil die allgemeine Randwertaufgabe für diese Gleichungen nicht gelöst war. Als einen Ersatz für den mangelnden Beweis zeigte ich, daß man, von den erweiterten Stokesschen Gleichungen ausgehend, durch sukzessive Näherungen in exakter Weise die Bewegung berechnen kann, welche in einer den ganzen Raum erfüllenden zähen Flüssigkeit von einem System von Kräften erzeugt wird, deren Angriffspunkte sich mit konstanter Geschwindigkeit verschieben, die aber sonst von der Zeit unabhängig sind. In der letzten Zeit ist nun die allgemeine Randwertaufgabe der erweiterten Stokesschen Gleichungen in mathematischem Sinne gelöst worden. Es wäre also aller Wahrscheinlichkeit nach jetzt möglich, den Beweis zu führen, daß man auf der Grundlage der erweiterten Stokesschen Gleichungen in exakter Weise diejenige Bewegung einer zähen Flüssigkeit berechnen kann, die durch die Verschiebung eines starren Körpers darin hervorgerufen wird. Doch würde ein solcher Beweis notwendig einen sehr abstrakten, rein mathematischen Charakter haben und würde deshalb in diesem Buche kaum am Platze sein.

In Paragraph 16 wird mit der neuen Methode für eine zähe Flüssigkeit die Bewegung untersucht, welche durch eine kleine Kugel erzeugt wird, die sich mit konstanter Geschwindigkeit darin bewegt. Es wird gezeigt, daß schon die Bewegung, die man in erster Näherung bekommt, einen ganz anderen Charakter als die Stokessche Bewegung hat. Kurz kann man den Unterschied so ausdrücken, daß, während nach Stokes die Bewegung hinter der Kugel ein Spiegelbild der Bewegung vor der Kugel ist, in der neuen Theorie eine ausgeprägte Dissymmetrie hervortritt, indem hinter der Kugel ein Wirbelschwanz zum Vorschein kommt. Es wird ferner gezeigt, daß man in zweiter Näherung ein neues, mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionales Glied im Ausdrucke für den Widerstand erhält. Endlich wird die Bewegung in der Umgebung der Kugel in zweiter Näherung untersucht.

Paragraph 17 behandelt das Problem des Kreiszylinders. Zuerst wird Lambs für kleine Geschwindigkeiten gültige Lösung dieses Problems wiedergegeben. Es folgt eine Übersicht über die Untersuchungen von Prof. Bairstow, Miß Cave und Miß Lang.

In Paragraph 18 wird das Problem des Ellipsoids wieder aufgenommen. Für die Komponenten der Resultierenden der Kräfte, welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, erhält man in erster Näherung die Werte von Oberbeck. In zweiter Näherung kommen neue Glieder hinzu, welche mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sind. Das zweidimensionale Analogon des Problems, die Bewegung eines elliptischen Zylinders in einer zähen Flüssigkeit, hat Harrison behandelt. Seine Ergebnisse werden (ohne Beweis) mitgeteilt.

Paragraph 19 behandelt die stationäre Bewegung einer Kugel in einer von einer ebenen Wand begrenzten Flüssigkeit. Dieses Problem hat prinzipielle Bedeutung, weil der darin untersuchte Fall der einfachste ist, worin sich eine Kugel in der Nähe einer Wand bewegt. Die Lösung des Problems verdanken wir Faxén. Der Paragraph gibt die Ausdrücke der Geschwindigkeitskomponenten in Form von Integralen. Dagegen war es nicht möglich, auf die Auswertung dieser Integrale einzugehen. Ich mußte mich darauf beschränken, die Schlußformeln von Faxén mitzuteilen. Die Widerstandsformel zeigt, daß die Wand sozusagen den Einfluß der Trägheitsglieder aufhebt. Wenn die Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Wand, ζ, und die Geschwindigkeit der Kugel, U, so klein sind, daß $\varrho U \zeta / 2\mu$ eine kleine Größe ist, fällt das oben erwähnte, mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale Glied im Ausdrucke für den Widerstand weg. Dagegen kommt es bei größeren ζ-Werten, also bei größeren Entfernungen der Kugel von der Wand, wieder zum Vorschein.

Paragraph 20 ist mit Paragraph 19 nahe verwandt. Gegenstand der Untersuchung ist hier die Bewegung einer Kugel längs der Achse einer Röhre. Dieses Problem hat praktische Bedeutung, weil Untersuchungen über Fallbewegungen von Kugeln meistens in dieser Weise ausgeführt werden. Ladenburg hat als erster dieses Problem behandelt. Er ging, was damals selbstverständlich war, von den Stokesschen Gleichungen aus. Faxén hat dann das Problem unter Zugrundelegung der erweiterten Stokesschen Gleichungen gelöst. Der Paragraph gibt die Theorie von Faxén.

Paragraph 21 behandelt auf Grundlage der erweiterten Stokesschen Gleichungen die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln, welche sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit bewegen.

Paragraph 22 gibt endlich eine Zusammenstellung der mitgeteilten Widerstandsformeln.

Der dritte Teil beschäftigt sich, wie schon oben mitgeteilt wurde, mit dem Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit. Um diese Aufgabe in endgültiger und vollauf befriedigender Weise auszuführen, hätten wir die Differential- oder Integralgleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit exakt zu lösen und dann den Grenzübergang $\mu \to 0$ in der erhaltenen Lösung auszuführen. Es ist wohl kaum notwendig zu sagen, daß dieses Problem zur Zeit unlösbar ist. Eine exakte Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen können wir bei endlichem μ nur in der Form von Reihen geben, die bei genügend großen μ-Werten konvergieren. Aus jenen Reihen müßten wir Ausdrücke bilden, welche bei beliebig kleinem μ ihren Sinn und Bedeutung behalten, und dann in diesen Ausdrücken μ gegen Null konvergieren lassen. In mathematischem Sinne mag diese Aufgabe lösbar sein. Aber ein anderes ist es, ein mechanisches Problem durch eine mathematische Formel zu lösen, ein anderes, es im mechanischen Sinne zu lösen. Von einer Lösung des hier vorliegenden Problems, welche den Anforderungen der Hydrodynamik genügt, sind wir noch weit entfernt.

Die Aufgabe, mit welcher wir uns im dritten Teile des Buches beschäftigen, ist eine bescheidenere. Wir führen in den linearisierten hydrodynamischen Differentialgleichungen, also in den erweiterten Stokesschen Gleichungen, und in den entsprechenden, die zeitlichen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten enthaltenden Differentialgleichungen für nichtstationäre Bewegung den Grenzübergang $\mu \to 0$ aus.

In Paragraph 23 untersuchen wir die stationäre Bewegung einer ebenen Scheibe in der gegen die Scheibe senkrechten Richtung. Dies war der erste Fall, in welchem der Grenzübergang ausgeführt wurde. Das Ergebnis ist, daß die Bewegung der Flüssigkeit in dem nicht von der Scheibe durchschrittenen Bereiche bei $\mu = 0$ eine Potentialbewegung ist, während sie in dem durchschrittenen Bereiche eine Wirbelbewegung ist. Die explizite Bestimmung der Bewegung wird auf die Auffindung einer vierwertigen Potentialfunktion zurückgeführt, deren Werte permutiert werden, wenn der Aufpunkt eine kleine geschlossene Kurve um die Randkurve beschreibt und dabei die Platte einmal durchdringt, und die einen Zweig hat, der in einem gewissen, übrigens willkürlichen Punkte wie $1/R$ unendlich wird, sonst aber überall regulär ist und im Unendlichen verschwindet. In dem Falle, worin die Scheibe kreisförmig ist, gelingt es leicht, eine solche Potentialfunktion herzustellen. In diesem Falle ist also das Problem explizit lösbar. Die Behandlung dieses speziellen Falles wird indessen erst in Paragraph 31 gegeben.

In Paragraph 24 wird der allgemeinste Fall untersucht. Es wird nur vorausgesetzt, daß eine im allgemeinen nicht starre Fläche sich in irgendeiner Weise in einer Flüssigkeit bewegt und daß dabei die Werte der Geschwindigkeitskomponenten auf jener Fläche vorgeschrieben sind. Die Ergebnisse bestätigen die in Paragraph 23 gefundenen Resultate, gehen aber weit über sie hinaus.

In Paragraph 25 werden die in Paragraph 24 gefundenen Ergebnisse auf den speziellen Fall angewandt, daß ein starrer Körper mit veränderlicher Geschwindigkeit, aber in einer konstanten Richtung sich in einer

Flüssigkeit bewegt. Die Lösung des Problems wird in diesem Fall auf die Bestimmung von zwei Potentialfunktionen, φ_v und φ_h, zurückgeführt, von welchen φ_v in dem vom Körper nicht durchschrittenen Bereiche existieren soll, φ_h dagegen in dem vom Körper durchschrittenen Bereiche. φ_v soll auf der Vorderseite des Körpers der Bedingung:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} = U_n$$

genügen; φ_h auf der Rückseite des Körpers der Bedingung:

$$\frac{d}{dn}\frac{\partial\varphi_h}{\partial t} = \frac{\partial U_n}{\partial t}.$$

Auf der Grenze zwischen den beiden Bereichen soll $\varphi_v = \varphi_h$ sein. Dagegen sollen die beiden normalen Ableitungen:

$$\frac{d\varphi_v}{dn} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi_h}{dn}$$

sich in bestimmter Weise voneinander unterscheiden.

In Paragraph 26 wird das Problem der stationären Bewegung mittelst einer neuen Methode untersucht. Die früher gefundenen Ergebnisse werden wiedergefunden. Außerdem ergeben sich neue Resultate. Es wird gezeigt, daß in dem zweidimensionalen Probleme und in dem rotationssymmetrischen dreidimensionalen Probleme die Funktionen φ_v und φ_h eine einzige, überall außerhalb des Körpers reguläre Potentialfunktion definieren. Wenn die x_1-Achse in der Bewegungsrichtung des Körpers gelegt wird, kann die Randbedingung, welcher jene Funktion auf der Rückseite des Körpers genügen muß, in der Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0$$

geschrieben werden. In dem rotationssymmetrischen dreidimensionalen Falle kann die entsprechende Bedingung, wenn die x_1-Achse die Symmetrieachse ist und wenn $\bar{R}$ die Entfernung eines Punktes von jener Achse ist, in der Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{R}} = 0$$

geschrieben werden. Die Lösung des Problems der stationären Bewegung wird in Paragraph 26 allgemein auf die Auflösung gewisser Fredholmscher Integralgleichungen zurückgeführt werden.

In Paragraph 27 wird im Anschluß an Hilbert eine Methode entwickelt, das mathematische Problem, zu welchem die stationäre Bewegung eines Zylinders (mit beliebigem Querschnitt und in einer gegen die Erzeugenden des Zylinders senkrechten Richtung) Anlaß gibt, explizit zu lösen. Es wird gezeigt, daß, wenn der Querschnitt keine Ecken oder Spitzen hat, die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Paragraph 28 schließt sich eng an Paragraph 27 an. Er gibt Ausdrücke für den Widerstand gegen die Bewegung des Zylinders und für die Tragkraft der Flüssigkeit.

In Paragraph 29 wird die in Paragraph 27 und Paragraph 28 entwickelte Theorie auf den Fall des Kreiszylinders angewandt.

Paragraph 30 behandelt, ebenfalls nach der in Paragraph 27 und Paragraph 28 entwickelten Methode, die Bewegung der ebenen Platte.

Paragraph 31 gibt, wie schon oben erwähnt wurde, die explizite Theorie der kreisförmigen Platte. Die elliptischen Funktionen spielen in dieser Theorie eine wesentliche Rolle. Mit denselben Hilfsmitteln kann man die Bewegung einer Halbkugel in den beiden rotationssymmetrischen Fällen behandeln. Doch gibt der Paragraph in bezug auf diese beiden Fälle nur die numerischen Resultate.