

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der höheren Mathematik

Die algebraische Analysis und die analytische Geometrie in der Ebene
enthaltend - mit 3 Figurentafeln

Herr, Joseph

Wien, 1857

Zweiter Theil. Analytische Geometrie

ZWEITER THEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE.

ANALYTISCHE GEOMETRIE.

Die geometrische Darstellung einer Gleichung $y=f(x)$ zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y , welche wir in §. 14 kennen gelernt haben, eröffnet uns den Weg zu einem der wichtigsten Theile der Mathematik. Wir haben gesehen, dass die Gleichung $y=f(x)$ auf die dort angegebene Weise in einer Ebene construirt, im Allgemeinen zu einer krummen Linie führt, welche nach einem gewissen Gesetze gebildet ist, als dessen analytischer Ausdruck eben die Gleichung $y=f(x)$ betrachtet werden muss, daher dieselbe auch die Gleichung dieser Curve, so wie umgekehrt die Curve der geometrische Ort der Gleichung $y=f(x)$ genannt wird. Wir können daher annehmen, dass es auch immer möglich sein wird, die zu einer gegebenen Curve, deren Bildungsgesetz bekannt ist, gehörende Gleichung zu finden, und sind dadurch in den Stand gesetzt, ohne Hülfe einer Zeichnung, durch eine analytische Formel die Gestalt einer jeden Curve auszudrücken und festzuhalten.

Das Bildungsgesetz einer Curve ist aber nichts anderes, als der Ausdruck irgend einer hervorragenden, die Curve charakterisirenden Eigenschaft, aus welcher sich sämtliche übrige Eigenschaften derselben müssen ableiten lassen. In der sogenannten Elementargeometrie geschieht diess bekanntlich durch geeignete Constructionen. Besitzen wir aber für das Bildungsgesetz einen analytischen Ausdruck, so wird es auch möglich sein, aus diesem durch blosse Rechnung, auf analytischem Wege, alle Eigenschaften des in Rede stehenden geometrischen Gebildes abzuleiten.

Die Gleichung einer Curve ist aber nicht allein der analytische Ausdruck ihrer Gestalt und Eigenschaften, sie bestimmt auch deren Lage in einer Ebene in Bezug auf zwei in derselben angenommene feste Axen. Jede geometrische Aufgabe läuft aber am Ende darauf hinaus, entweder die geometrischen Gebilde zu bestimmen, welche gegebenen Bedingungen Genüge leisten, oder umgekehrt die Eigenschaften gegebener geometrischer Gebilde und deren Beziehungen unter einander zu erforschen. Da wir nun im Stande sind, Gestalt und gegenseitige

Lage derselben analytisch auszudrücken, so geht hieraus die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Geometrie zur Genüge hervor.

Das Gesagte findet offenbar Anwendung auch auf räumliche Gebilde, d. i. solche, welche nicht mit allen ihren Theilen in einer und derselben Ebene liegen, da jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen, $z = f(x, y)$, im Raume construirt, zu einer Fläche führt.

In der Entwicklung dieser Methode, durch Darstellung ihrer Principien sowohl als deren wichtigster Ergebnisse, besteht derjenige Theil der Mathematik, welcher analytische Geometrie, bisweilen auch Anwendung der Analysis auf Geometrie genannt wird.

Wir theilen dieselbe in zwei Abschnitte: analytische Geometrie in der Ebene und analytische Geometrie im Raume, von welchen der erste sich mit den in einer Ebene liegenden geometrischen Gebilden beschäftigt, der zweite mit solchen, welche im Raume construirt sind.

I. ABSCHNITT.

ANALYTISCHE GEOMETRIE IN DER EBENE.

ERSTES KAPITEL.

BESTIMMUNG DER LAGE EINES PUNCTES. — COORDINATEN-SYSTEME. —
TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

155. Es seien (Fig. 4) XX' , YY' zwei feste, ihrer Lage nach unveränderliche, nicht parallele Gerade in einer Ebene, M ein Punkt in derselben, dessen Lage bestimmt werden soll. Ziehen wir die Geraden MQ und MP beziehungsweise parallel zu XX' und YY' , so ist klar, dass die Längen dieser Geraden die Lage des Punktes M in dem Winkel XOY unzweideutig bestimmen.

Man nennt diese Geraden MP und MQ die Coordinaten des Punktes M ; die eine derselben $MQ = OP$, welche parallel zur festen Geraden XX' liegt, pflegt man mit x , die andere zur festen Geraden YY' parallele mit y zu bezeichnen und erstere die Abscisse, letztere die Ordinate des Punktes M zu nennen.

Die festen Geraden XX' , YY' heissen die Coordinaten-Axen und zwar beziehungsweise Axe der x , oder Abscissenaxe und Axe der y , oder Ordinatenaxe; ihr Durchschnittspunkt O der Anfang oder Ursprung der Coordinaten, weil von ihm aus die beiden Coordinaten $OP = MQ = x$ und $OQ = MP = y$ gezählt werden; der Winkel XOY , welchen die beiden Axen bilden, der Coordinatenwinkel, der Inbegriff beider Axen ein Coordinatensystem. Dasselbe heisst ein rechtwinkliges, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist, in jedem anderen Falle ein schiefwinkliges.

Die Lage des Punktes M in der Ebene würde jedoch durch die numerischen Werthe seiner Coordinaten MP und MQ allein nicht vollständig bestimmt sein, da denselben offenbar noch drei andere Punkte M' , M'' , M''' entsprechen, welche mit jenem in gleichen Abständen von den Axen liegen. Um diese vier Punkte von einander zu unterscheiden, genügt es, die Coordinaten derselben mit Vorzeichen zu versehen. Man pflegt die Abscissen, welche vom Ursprunge aus nach rechts in der Richtung OX gezählt werden, als positiv, jene

nach links in der Richtung OX' als negativ zu betrachten; die Ordinaten werden von O nach aufwärts in der Richtung OY positiv, jene nach abwärts in der Richtung OY' negativ genommen.

Jede der beiden Coordinatenaxen wird durch den Ursprung O in zwei Theile, Halbaxen, getheilt, von welchen die eine der Kürze wegen die positive, die andere die negative Halbaxe genannt werden mag. Unter dem Coordinatenwinkel verstehen wir immer jenen der vier Axenwinkel, welchen die beiden positiven Halbaxen einschliessen; er ist immer $< 180^\circ$.

Bezeichnen wir also mit m , n die numerischen Werthe der Coordinaten MP und MQ , so erhalten wir für die vier Punkte M, M', M'', M''' folgendes Schema:

$$M \begin{cases} x = +m \\ y = +n \end{cases} \quad M' \begin{cases} x = -m \\ y = +n \end{cases} \quad M'' \begin{cases} x = -m \\ y = -n \end{cases} \quad M''' \begin{cases} x = +m \\ y = -n \end{cases}$$

woraus man erkennt, dass durch die zwei Gleichungen:

$$x = a, \quad y = b \quad (1)$$

die Lage eines Punktes in der Ebene vollkommen und unzweideutig bestimmt ist, wenn wir unter a und b die mit den gehörigen Vorzeichen versehenen Werthe der Coordinaten verstehen. Die Gleichungen (1) werden aus diesem Grunde die Gleichungen des Punktes genannt.

Als besondere Fälle der Gl. (1) sind folgende zu bemerken:

1) $x = a, y = 0$; diese Gleichungen gehören zu einem in der Abscissenaxe liegenden Punkte.

2) $x = 0, y = b$, welche einen in der Ordinatenaxe liegenden Punkt bestimmen; endlich sind

3) $x = 0, y = 0$ die Gleichungen des Ursprunges selbst.

156. Die im vorigen Paragraphe entwickelte Methode zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene, mittelst zweier zu zwei festen sich schneidenden Axen paralleler Coordinaten (daher dieses System auch Parallel-Coordinaten-system genannt wird), ist aber offenbar nicht das einzige Mittel zu diesem Zwecke und es liessen sich deren leicht mehrere ausdenken, unter welchen jedoch nur noch das sogenannte Polarcoordinaten-System von besonderer Wichtigkeit und häufigem Gebrauche ist. Wir denken uns wieder in der Ebene eine feste Gerade XX' (Fig. 4) als Axe, die Polaraxe, und in derselben einen festen Punkt O , als Ursprung, hier der Pol genannt, und von demselben eine Gerade OM zu einem beliebigen Punkte M in der Ebene gezogen. Die Lage desselben ist offenbar bestimmt, wenn die Länge der Geraden OM und die Neigung derselben ge-

gen die eine Halbaxe, z. B. OX , also der Winkel MOX gegeben sind. Die Gerade OM wird der Radiusvektor des Punktes M genannt; der Winkel MOX möge Polarwinkel heissen; ersteren werden wir gewöhnlich mit r , letzteren mit θ bezeichnen. Dieser Winkel wird, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, stets von der rechten Halbaxe OX aus von 0 bis 360° herum und zwar — wenn wir uns im Punkte O auf der Ebene stehend denken — von rechts nach links gezählt werden, wobei r im Allgemeinen immer positiv bleibt.

157. Fällt, wie in Fig. 4, die Polaraxe mit der Abscissenaxe, der Pol mit dem Ursprunge des Parallelkoordinatensystems zusammen, so stehen die Parallelkoordinaten x, y eines Punktes M mit den Polarcoordinaten in sehr einfachen Beziehungen. Aus dem Dreiecke OMP folgt nämlich, wenn der Coordinatenwinkel $XOY = \varphi$ gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin \varphi}, \\ y &= r \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y \sin \varphi}{x + y \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ist das Parallel - Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so ist $\varphi = 90^\circ$, somit:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln allgemein gelten, in welchem der Axenwinkel der Punkt M auch liegen mag.

TRANSFORMATION DER COORDINATEN.

158. Sehr häufig tritt das Bedürfniss ein, von einem Coordinatensysteme, dessen man sich bei einer Aufgabe bedient hat, auf ein neues überzugehen, in Bezug auf welches die Gleichungen eine einfachere, oder wenigstens dem Zwecke der Untersuchung sich besser anschmiegende Form erhalten. Diese Aufgabe führt den Namen: Transformation der Coordinaten, und kommt offenbar darauf hinaus, die Coordinaten eines Punktes, welche sich auf das ursprüngliche Coordinatensystem beziehen, auszudrücken durch die auf das neue System sich beziehenden Coordinaten dieses Punktes, unter der Voraussetzung, dass

die Lage des neuen Axensystems gegen das ursprüngliche gegeben ist.

Der einfachste Fall ist jener, wenn bloss der Ursprung geändert wird, die Richtung der Axen aber unverändert bleibt.

Seien OX, OY (Fig. 5) die ursprünglichen Axen, und M ein Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf dieselben $OP = x, MP = y$ sein mögen. Sei ferner O' der Ursprung des neuen Systems, dessen Axen $O'X', O'Y'$ den ursprünglichen parallel sein sollen; bezeichnen wir mit a, b die Coordinaten des neuen Ursprunges O' bezogen auf das alte System, mit x', y' die neuen Coordinaten des Punktes M , so ist, wie man sieht $OP = OB + BP = OB + O'P, MP = PP' + MP' = O'B + MP'$, somit:

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \quad (1)$$

159. Von einem schiefwinkligen Coordinatensysteme zu einem anderen schiefwinkligen, ohne Aenderung des Ursprunges überzugehen.

Seien (Fig. 6) der alte Coordinatenwinkel $XOY = \varphi$, der neue $X'OY' = \varphi'$, ferner θ, θ' die Winkel, welche der Radiusvektor $OM = r$ des Punktes M mit den Axen OX und OX' bildet, so haben wir, wenn mit x, y die alten, mit x', y' die neuen Coordinaten des Punktes M bezeichnet werden, nach Gl. (1), §. 157:

$$x = \frac{r \sin (\varphi - \theta)}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{r \sin \theta}{\sin \varphi}, \quad (m)$$

$$x' = \frac{r \sin (\varphi' - \theta')}{\sin \varphi'}, \quad y' = \frac{r \sin \theta'}{\sin \varphi'}. \quad (n)$$

Sind nun α, α' die Winkel, welche die neue Abscissen- und Ordinatenaxe mit der alten Abscissenaxe einschliessen, so wird:

$\varphi' = \alpha' - \alpha, \theta' = \theta - \alpha$, somit $\varphi' - \theta' = \alpha' - \theta$, wodurch die Gl. (n) übergehen in:

$$x' = \frac{r \sin (\alpha' - \theta)}{\sin (\alpha' - \alpha)}, \quad y' = \frac{r \sin (\theta - \alpha)}{\sin (\alpha' - \alpha)},$$

aus welchen durch Entwicklung des Zählers:

$$\begin{aligned} x' \sin (\alpha' - \alpha) &= r \sin \alpha' \cos \theta - r \cos \alpha' \sin \theta, \\ y' \sin (\alpha' - \alpha) &= -r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \end{aligned}$$

folgt. Werden diese Gleichungen, die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha'$ multiplicirt und addirt, so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors $\sin (\alpha' - \alpha)$:

$$r \cos \theta = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha'.$$

Addirt man aber dieselben Gleichungen, nachdem die erste mit $\sin \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha'$ multiplicirt worden ist, so folgt:

$$r \sin \theta = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'.$$

Durch Substitution dieser Werthe von $r \sin \theta$ und $r \cos \theta$ in die Gleichungen (m) erhält man endlich:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' \sin (\varphi - \alpha) + y' \sin (\varphi - \alpha')}{\sin \varphi}, \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

welche die gesuchten Transformationsformeln sind.

Sollte auch noch der Ursprung geändert und in einen Punkt verlegt werden, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche System a, b sind, so erhält man mit Rücksicht auf (1):

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin (\varphi - \alpha) + y' \sin (\varphi - \alpha')}{\sin \varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Erfordert übrigens eine Aufgabe sowohl die Veränderung des Ursprunges als der Richtung der Axen, so ist es gewöhnlich vortheilhaft, diese beiden Transformationen eine nach der anderen auszuführen. Die Formeln (2) und (3) sind allgemein gültig, welche auch die Richtung der neuen Axen sein mag, wenn nur für α und α' immer die Winkel genommen werden, welche die neuen positiven Halbaxen der x' und y' mit der ursprünglichen positiven Halbaxe der x bilden, in der Richtung von OX gegen OY von 0 bis 360° gezählt.

160. In den bei weiten meisten Fällen kommen rechtwinklige Coordinatensysteme in Anwendung, da sich für solche die Ausdrücke in der Regel am einfachsten gestalten. Betrachten wir daher noch folgende spezielle Fälle.

I. Von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Coordinatensysteme überzugehen.

Die hiezu dienenden Formeln ergeben sich aus den allgemeinen Transformationsformeln (3), indem man $\varphi = 90^\circ$ setzt; man erhält also:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

II. Von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen Coordinatensysteme überzugehen.

Man setze in (3) $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, somit $\varphi - \alpha' = -\{90 - (\varphi - \alpha)\}$, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin (\varphi - \alpha) - y' \cos (\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

III. Von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme auf ein anderes gleichfalls rechtwinkliges überzugehen.

Zu diesem Behufe haben wir in (3) $\varphi = 90^\circ$ und $\alpha' = \alpha + 90$ zu setzen, und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ENTFERNUNG ZWEIER GEGEBENER PUNKTE.

161. Es seien (Fig. 7) M, M' zwei Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, x', y' gegeben sind; man soll einen Ausdruck für die Entfernung $D = MM'$ dieser Punkte in Funktion ihrer Coordinaten aufstellen. Ziehen wir die Ordinaten $MP = y, M'P' = y'$ und durch einen der beiden Punkte, etwa M , die MR parallel zur x -Axe, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke $MM'R$: $MM'^2 = MR^2 + M'R^2$; es ist aber $MR = x' - x, M'R = y' - y$, somit:

$$D = \pm \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}. \quad (1)$$

Das doppelte Zeichen erklärt sich dadurch, dass die Entfernung D entweder von M gegen M' oder umgekehrt gezählt werden kann. Im Allgemeinen werden Distanzen immer positiv genommen.

Auf demselben Wege würde sich der Ausdruck von D für ein schiefwinkliges Coordinatensystem ergeben. Man findet ohne Schwierigkeit:

$$D = \pm \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y) \cos \varphi}. \quad (2)$$

Betrachten wir noch das Dreieck, welches die beiden Punkte M, M' mit dem Ursprunge bilden. Sind r, r' die Radienvektoren der Punkte M, M' und α, α' deren Neigungswinkel gegen die x -Axe so ist:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos \alpha' = \frac{x'}{r'}, \quad \sin \alpha' = \frac{y'}{r'}.$$

Ist nun δ der Winkel MOM' , welchen beide Radienvektoren einschliessen, so hat man $\pm \delta = \alpha' - \alpha$, somit:

$$\pm \sin \delta = \sin \alpha' \cos \alpha - \cos \alpha' \sin \alpha,$$

oder nach Substitution obiger Werthe:

$$\pm rr' \sin \delta = xy' - yx';$$

bezeichnet man aber mit f den Flächeninhalt des Dreieckes OMM' , so ist bekanntlich $2f = rr' \sin \delta$, folglich:

$$2f = \pm [xy' - yx'] \quad (3)$$

wo von beiden Zeichen jenes zu wählen ist, welches den Ausdruck von f positiv macht.

Geht man von dem jetzigen Coordinatensysteme, ohne die Richtung der Axen zu ändern, auf ein neues System über, und sind $-x''$, $-y''$ die Coordinaten des neuen Ursprunges in Bezug auf die alten Axen, so hat man in (3) $x - x''$, $y - y''$; $x' - x''$, $y' - y''$ statt x, y ; x', y' zu setzen, wodurch man:

$$2f = y(x'' - x') + y'(x - x'') + y''(x' - x) \quad (4)$$

erhält, als Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreieckes, welches von den drei Punkten x, y ; x', y' und x'', y'' gebildet wird.

ZWEITES KAPITEL.

VON DER GERADEN LINIE.

162. Es sei HL (Fig. 8) eine gerade Linie, in der Ebene der rechtwinkligen Coordinatenaxen OX , OY auf beliebige Weise gezogen; ziehen wir durch den Punkt A , in welchem diese Gerade die Ordinatenaxe schneidet, die AK parallel zu OX und zu beliebigen Punkten: $M, M', M'', \dots$ der Geraden HL , die Ordinaten $MP, M'P', M''P'', \dots$ so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $AMQ, AM'Q', AM''Q'', \dots$ welche offenbar nur dann entstehen, wenn $M, M', M'', \dots$ Punkte einer Geraden sind, sofort:

$$\frac{MQ}{AQ} = \frac{M'Q'}{AQ'} = \frac{M''Q''}{AQ''} = \text{u. s. w.}$$

oder:

$$\frac{MP - AO}{OP} = \frac{M'P' - AO}{OP'} = \frac{M''P'' - AO}{OP''} = \text{u. s. w.,}$$

woraus folgt, dass die um das Stück AO verminderte Ordinate eines beliebigen Punktes der Geraden zur Abscise desselben in einem constanten Verhältnisse steht.

Bezeichnen wir daher dieses constante Verhältniss mit a , die Entfernung AO des Durchschnittspunktes der Geraden mit der y -Axe vom Ursprunge mit b , endlich mit x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so besteht für jeden Punkt der Geraden die Gleichung:

$$\frac{y-b}{x} = a, \text{ woraus:} \\ y = ax + b \quad (1)$$

folgt. Aus der Ableitung dieser Gleichung erhellt, dass derselben durch die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden HL Genüge geleistet wird; umgekehrt geht aus der Construction dieser Gleichung die Gerade HL hervor. Man nennt aus diesem Grunde die Gleichung (1) die Gleichung der Geraden.

In derselben bedeuten x, y die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden, sind also als veränderliche Grössen zu betrachten und werden gewöhnlich die laufenden Coordinaten der Geraden genannt. a, b sind hingegen constante Grössen, durch welche die Lage der Geraden gegen das Axensystem bestimmt wird. Wegen der nothwendigen Homogenität der Gl. (1) muss b eine Linie, a hingegen eine absolute Zahl sein. In der That ist, wie schon oben bemerkt, b die Ordinate der Geraden im Ursprunge; ferner folgt aus dem ΔAMQ :

$$a = \frac{MQ}{AQ} = \operatorname{tg} MAQ = \operatorname{tg} \alpha, \quad .$$

wenn α der Neigungswinkel der Geraden HL gegen die positive Halbaxe der x ist; der Coefficient von x in der nach y aufgelösten Gleichung der Geraden ist folglich die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst.

Die Gl. (1) besteht, da die Ableitung offenbar ganz dieselbe bleibt, unverändert auch für schiefwinklige Coordinaten; nur ist dann (Fig. 9):

$$a = \frac{MQ}{AQ} = \frac{\sin MAQ}{\sin AMQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}, \quad (2)$$

wo φ der Coordinatenwinkel; für den Winkel α , welchen die Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst, findet man hieraus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \varphi}{1 + a \cos \varphi}.$$

In der Folge werden wir jedoch immer rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist.

163. Da die Constanten a, b in Gl. (1) jeden möglichen positiven oder negativen Werth haben können, so wird die Gl. (1) dadurch

fähig, eine Gerade in jeder beliebigen Lage gegen das Axensystem darzustellen. Ist b negativ, so schneidet die Gerade die y -Axe unterhalb des Ursprungs; sie geht durch den Ursprung, wenn $b = 0$, also die Gleichung von der Form: $y = ax$ ist, d. h. eines constanten Gliedes ermangelt; ist a negativ, so macht der oberhalb der x -Axe liegende Theil derselben mit der Richtung der positiven Halbaxe der x einen stumpfen Winkel.

Für $a = \operatorname{tg} \alpha = 0$, wird auch $\alpha = 0$ und die Gerade zur Abscissenaxe parallel; die Gl. (1) geht über in $y = b$, welche demnach die Gl. einer im Abstände $= b$ zur x -Axe parallelen Geraden ist. Wird $b = 0$, so fällt die Gerade mit dieser Axe zusammen; es ist daher $y = 0$ die Gl. der Abscissenaxe selbst.

Aus dem $\triangle AOB$ (Fig. 8) folgt $AO = BO \cdot \operatorname{tg} \alpha$, d. h. wenn $BO = -c$ gesetzt wird, $b = -ac$; führt man diesen Werth in die Gl. (1) ein, so nimmt dieselbe die Form an:

$$y = ax - ac, \text{ oder } x = \frac{y}{a} + c;$$

für $\alpha = 90^\circ$, wird $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ und die Gerade senkrecht auf die Abscissenaxe; die letzte Gleichung geht über in $x = c$, welches somit die Gleichung einer zur Ordinatenaxe im Abstände $= c$ parallelen Geraden ist. Für $c = 0$ fällt diese mit der genannten Axe zusammen; es ist daher $x = 0$ die Gl. der y -Axe.

164. Wählt man statt a und b andere Constanten zur Bestimmung der Lage der Geraden, so nimmt auch die Gleichung derselben andere Formen an.

So ist die Lage einer Geraden offenbar durch ihre Durchschnittspunkte A, B , (Fig. 8) mit den beiden Axen bestimmt; bezeichnet man daher mit b und c die Entfernungen dieser Punkte vom Ursprunge, positiv, wenn dieselben auf den positiven Halbaxen der y und x liegen, so besteht für jeden Punkt der Geraden die Proportion:

$$AO : BO = MP : BP, \text{ d. i. } b : -c = y : x - c,$$

woraus als Gleichung der Geraden:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1 \quad (1)$$

folgt. Man sieht leicht ein, dass diese Form der Gl. der Geraden für recht- und schiefwinklige Coordinaten gilt und in beiden Fällen die Bedeutung der Constanten b, c , dieselbe bleibt.

Fällt man aus dem Ursprunge O , (Fig. 10) das Perpendikel OD auf die Gerade HL , so ist die Lage dieser Geraden durch die Länge des Perpendikels $OD = p$ und den Winkel $DOX = \beta$ bestimmt, wel-

chen dasselbe mit der positiven Richtung der x - Axe einschliesst. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Geraden HL , sind x, y seine Coordinaten, zieht man ferner $MO = r$ und setzt $\angle MOX = \theta$, so hat man: $MP = y = r \sin \theta$, $OP = x = r \cos \theta$; ist aber die Linie ADL eine Gerade, so ist für jeden Punkt M derselben das $\angle ODM$ bei D rechtwinklig, somit $OD = OM \cos \angle DOM$, d. i.:

$$p = r \cos (\beta - \theta) = r \cos \beta \cos \theta + r \sin \beta \sin \theta;$$

hieraus folgt, wenn statt $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ obige Werthe substituirt werden:

$$x \cos \beta + y \sin \beta = p \quad (2)$$

als Gleichung der Geraden HL , welche auch die Form:

$$x \cos \lambda + y \cos \mu = p \quad (3)$$

annimmt, wenn λ und μ die Winkel sind, welche p mit der x - und y - Axe bildet. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die Formen (2) und (3) der Gl. einer Geraden nur für rechtwinklige Coordinaten gelten.

Wie man aber auch die Gleichung der Geraden umgestalten mag, ihr wesentlicher Charakter bleibt immer der, dass sie in Bezug auf die veränderlichen Coordinaten x und y vom ersten Grade ist. Wir schliessen hieraus, dass jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, ihrer geometrischen Bedeutung nach, einer geraden Linie angehöre.

In der That ist die allgemeine Form einer solchen Gleichung:

$$Ay + Bx + C = 0, \quad (4)$$

welche nach y aufgelöst, die Form:

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

d. h. die Form $y = ax + b$ annimmt, wenn man $-\frac{B}{A} = a$, $-\frac{C}{A} = b$ setzt, was immer möglich ist, weil die Constanten a, b in Gl. (1) jedes Werthes fähig sind.

Enthält die Gl. bloss eine Veränderliche, ist also von der Form $f(x) = 0$ oder $f(y) = 0$, so ist ihr geometrischer Ort (vorausgesetzt, dass ihr durch reelle Werthe von x oder y genügt werden kann, widrigenfalls ihr gar keine geometrische Bedeutung zukäme) eine Gerade, oder ein System mehrerer, beziehungsweise zur Ordinaten- oder Abscissenaxe paralleler Geraden, je nachdem sie in Bezug auf die in ihr enthaltene Veränderliche vom 1^{sten} oder höherem Grade ist.

Ist die Gleichung einer Geraden gegeben, so lässt sich dieselbe auf verschiedene Weise construiren, am einfachsten indem man ihre Durchschnittspunkte mit den beiden Coordinatenaxen bestimmt, welche

sich offenbar ergeben, wenn man in der vorgelegten Gleichung der Reihe nach x und y gleich Null setzt.

165. Aus der Anwesenheit zweier Constanten in der Gleichung der Geraden erkennt man, dass zur Bestimmung der Lage derselben zwei Bedingungen erfordert werden. Sind die Constanten gegeben, so ist dadurch auch die Lage der Linie bestimmt; sind umgekehrt zwei von einander unabhängige Bedingungen gegeben, welchen die Gerade genügen soll, so lassen sich die Werthe der Constanten diesen gemäss bestimmen.

Aufgabe. Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt x', y' geht.

Die gesuchte Gleichung kann von der Form $y = ax + b \dots (\alpha)$ vorausgesetzt werden, in welcher a und b noch unbestimmte Grössen sind. Da die Gerade durch den Punkt x', y' gehen soll, so müssen die Coordinaten dieses Punktes der Gl. (α) Genüge leisten, wodurch sich die Bedingungsgleichung: $y' = ax' + b$ ergibt, mittelst welcher sich eine der beiden Unbekannten z. B. b bestimmen und aus (α) eliminiren lässt, am einfachsten, indem man die letzte Gleichung von (α) abzieht; man erhält dadurch:

$$y - y' = a(x - x') \quad (1)$$

für die gesuchte Gleichung. Setzt man in derselben $x = x'$ so folgt $y = y'$, zum Beweise, dass die durch dieselbe dargestellte Gerade durch den Punkt x', y' geht. Sie enthält noch eine willkürliche Constante $a = \operatorname{tg} \alpha$; der Winkel α , welchen sie mit der x -Axe einschliesst, bleibt also unbestimmt, wie es sein muss, weil durch einen Punkt unendlich viele Linien gezogen werden können.

166. Aufg. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte x', y' und x'', y'' geht.

Sei wieder $y = ax + b \dots (\alpha)$ die Gleichung der Geraden, so bestehen den gegebenen Bedingungen gemäss die Gleichungen:

$$y' = ax' + b \dots (\beta) \quad y'' = ax'' + b \dots (\gamma),$$

aus welchen sich die zwei Unbekannten a und b bestimmen lassen.

Zieht man (β) von (α) und (γ) von (β) ab, so folgt:

$$y - y' = a(x - x'), \quad y'' - y' = a(x' - x''),$$

und wenn der aus der zweiten dieser Gleichungen gezogene Werth von a in die erste substituirt wird:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x' - x''} (x - x'), \quad (1)$$

welche die verlangte Gleichung ist.

Ist einer der zwei Punkte, z. B. x'', y'' der Ursprung, so folgt aus (1) wegen $x'' = y'' = 0$:

$$y = \frac{y'}{x'} x \quad (2)$$

als Gleichung einer durch den Ursprung und den Punkt x', y' gehenden Geraden.

Soll der Punkt x''', y''' in der Geraden (1) liegen, so müssen diese Coordinaten der Gl. (1) Genüge leisten, d. h. es muss die Gleichung:

$$y''' - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x''' - x')$$

oder:

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{y' - y'''}{x' - x'''} \quad (3)$$

erfüllt sein. Diese Gleichung drückt daher die Bedingung aus, dass die drei Punkte $x', y'; x'', y''; x''', y'''$ in einer Geraden liegen.

Wie leicht einzusehen, sind die Formeln dieses und des vorhergehenden Paragraphen vom Coordinatenwinkel unabhängig und gelten für recht- und schiefwinklige Coordinaten.

167. Aufg. Es sind die Gleichungen zweier Geraden gegeben; man bestimme den Winkel, unter welchem sich dieselben schneiden.

Es seien:

$$1) \dots y = ax + b, \quad 2) \dots y = a'x + b'$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, bezogen auf rechtwinklige Axen; den gesuchten Neigungswinkel derselben wollen wir mit (1. 2) bezeichnen, so wie die Winkel, welche dieselben mit der Axe der x machen, beziehungsweise mit (1. x), (2. x).

Wie aus Fig. 11 erhellt, ist (1. 2) = (2. x) — (1. x) oder auch (1. 2) = 180 — {(2. x) — (1. x)}, je nachdem (1. 2) den spitzen oder stumpfen Winkel bedeutet, somit:

$$\operatorname{tg} (1. 2) = \pm \operatorname{tg} \{(2. x) - (1. x)\} = \pm \frac{\operatorname{tg} (2. x) - \operatorname{tg} (1. x)}{1 + \operatorname{tg} (1. x) \operatorname{tg} (2. x)};$$

es ist aber $\operatorname{tg} (1. x) = a$, $\operatorname{tg} (2. x) = a'$, folglich:

$$\operatorname{tg} (1. 2) = \pm \frac{a' - a}{1 + aa'}. \quad (1)$$

Gewöhnlich behält man nur das obere Zeichen bei, wo dann der Ausdruck den spitzen Winkel giebt, wenn man a' den grösseren der zwei Coefficienten a, a' sein lässt.

Die Ergebnisse dieser Aufgabe führen zu wichtigen Folgerungen:

a) Sind die Geraden 1) und 2) parallel, so ist der $\angle (1. 2) = 0$,

folglich auch $\operatorname{tg} (1. 2) = 0$, womit aus (1) $a' - a = 0$, d. h. $a = a'$ folgt. Die Gleichung $a = a'$ drückt somit die Bedingung des Parallelismus der Geraden 1) und 2) aus.

b) Stehen die Geraden 1) und 2) auf einander senkrecht, so ist $\angle (1. 2) = 90^\circ$, somit $\cotg (1. 2) = \frac{1 + aa'}{a' - a} = 0$, woraus $1 + aa' = 0$ folgt. Durch die Gleichung $1 + aa' = 0$ oder $a' = -\frac{1}{a}$ wird daher die Bedingung der Perpendikularität der Geraden 1) und 2) ausgedrückt.

Beziehen sich die Gleichungen der Geraden 1) und 2) auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Koordinatenwinkel $= \varphi$, so erhält man mit Hülfe der Gl. (3), §. 162:

$$\operatorname{tg} (1. 2) = \frac{(a' - a) \sin \varphi}{1 + aa' + (a + a') \cos \varphi},$$

Die Bedingung des Parallelismus der beiden Geraden bleibt somit $a = a'$, die Bedingung des Senkrechtstehens wird aber:

$$1 + aa' + (a + a') \cos \varphi = 0.$$

168. Aufg. Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt x', y' geht und zur Geraden

$$y = ax + b$$

parallel ist.

Es sei $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so bestehen die beiden Bedingungsgleichungen: $y' = Ax' + B$, und $A = a$, es ist somit $B = y' - ax'$, und die gesuchte Gleichung wird:

$$y - y' = a (x - x').$$

169. Aufg. Die Gleichung einer Geraden zu suchen, welche durch den Punkt x', y' geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht steht.

Da die Gerade durch den Punkt x', y' gehen soll, so hat ihre Gleichung die Form: $y - y' = A (x - x')$, und damit sie auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht stehe, muss $aA = -1$ sein; es ist somit:

$$y - y' = -\frac{1}{a} (x - x')$$

die verlangte Gleichung.

170. Aufg. Es sind die Gleichungen zweier Geraden:

$$1) \dots y = ax + b, \quad 2) \dots y = a'x + b'$$

gegeben; man suche die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind offenbar jene Werthe von x und y , welche beiden Gleichungen 1) und 2) gleichzeitig Genüge leisten, welche somit erhalten werden, wenn man diese Gleichungen als zusammengehörig oder coëxistirend betrachtet und daraus x und y bestimmt. Auf diese Weise erhält man für die gesuchten Grössen:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, \quad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

Ist $a = a'$, so werden diese Werthe unendlich, was damit übereinstimmt, dass bei dieser Voraussetzung die Geraden parallel sind.

Ist aber $a = a'$ und $b = b'$, so wird $x = y = \frac{0}{0}$, d. i. unbestimmt; in der That fallen dann beide Gerade in eine einzige zusammen und haben daher alle Punkte gemeinschaftlich.

171. Aufg. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt M ausserhalb derselben gegeben; man sucht die Entfernung P des Punktes von der Geraden, d. i. die Länge des von dem Punkte M auf die Gerade gefällten Perpendikels.

Es seien:

$$1) \dots y = ax + b$$

die Gleichung der gegebenen Geraden und x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes M , so ist:

$$2) \dots y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

die Gleichung der durch den Punkt x', y' senkrecht auf 1) gezogenen Geraden. Sind x'', y'' die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden 1) und 2), so ist [§. 161]:

$$P = \pm \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Da ferner die Coordinaten x'', y'' den Gleichungen 1) und 2) Genüge leisten müssen, so hat man:

$$y'' = ax'' + b, \quad y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x'),$$

woraus man ohne Schwierigkeit:

$$x'' - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}$$

findet. Mit diesen Werthen wird endlich:

$$P = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

wo von beiden Zeichen jenes zu nehmen ist, welches P positiv macht,

da es sich bei Entfernungen in der Regel nur um ihren absoluten Werth handelt. Der Zähler $y' - (ax' + b)$ ist übrigens positiv oder negativ, je nachdem y' , d. i. die Ordinate des gegebenen Punktes grösser oder kleiner ist als $ax' + b$, d. i. die zur Abscisse x' des gegebenen Punktes gehörige Ordinate der gegebenen Geraden, d. i. je nachdem der Punkt M ober oder unter der Geraden liegt. Beachtet man, dass $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ der Cosinus des Neigungswinkels der gegebenen Geraden gegen die x -Axe ist, so zieht man leicht aus obigem Ausdrucke von P folgende Regel:

Man findet die Entfernung eines gegebenen Punktes x', y' von einer gegebenen Geraden, wenn man die Gleichung der letzteren auf die Form $y - ax - b = 0$ bringt, und den Werth, welchen die linke Seite dieser Gleichung für $x = x'$ und $y = y'$ annimmt, mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Geraden gegen die Abscissenaxe multiplicirt.

172. Aufg. Man sucht die Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden geht.

Seien:

$$(1) \dots y = ax + b, \quad (2) \dots y = a'x + b'$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Statt [nach §. 170] die Coordinaten des Durchschnittspunktes zu suchen und hierauf [nach §. 165] durch diesen Punkt eine Gerade zu legen, kann man kürzer auf folgende Weise verfahren.

Schreibt man obige Gleichungen in der Form:

$$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0,$$

multiplicirt eine derselben, etwa die erste mit einer willkürlichen Constante m , und addirt sie sodann, so erhält man:

$$(y - ax - b)m + y - a'x - b' = 0, \quad (3)$$

und diess ist die gesuchte Gleichung, da sie — weil nach x und y vom ersten Grade — einer Geraden angehört, und offenbar für dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche den Gleichungen der beiden gegebenen Geraden (1) und (2) gleichzeitig Genüge leisten.*) Durch Auflösung nach y erhält sie die Form:

*) Man sieht leicht, dass dieses Verfahren auch eine allgemeinere Anwendung zulässt. Sind $f(x, y) = 0 \dots (\alpha)$ und $F(x, y) = 0 \dots (\beta)$ die Gleichungen zweier Curven,

$$y = \frac{am + a'}{m + 1}x + \frac{bm + b'}{m + 1}. \quad (4)$$

Sie enthält noch eine unbestimmte Constante m , weil in der That unendlich viele Gerade der Bedingung der Aufgabe Genüge leisten; wir wollen daher noch die Bedingung hinzufügen, dass die Gerade (3) den von den gegebenen Geraden (1) und (2) eingeschlossenen Winkel halbire.

Bezeichnen wir mit α , α' und u die Neigungswinkel der Geraden (1), (2) und (3) gegen die x -Axe, mit v den Winkel, welchen die Geraden (1) und (2) einschliessen; aus (4) folgt zunächst:

$$\operatorname{tg} u = \frac{am + a'}{m + 1}, \quad (2)$$

woraus m gefunden wird, sobald u bekannt ist. Damit nun die (3) den Winkel v halbire, muss $u = \frac{v}{2} + \alpha$, somit $\operatorname{tg} 2u = \operatorname{tg} (v + 2\alpha)$ sein, woraus nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$\frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} u^2} = \frac{\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{a + a'}{1 - aa'}$$

folgt, wenn man für $\operatorname{tg} v$ und $\operatorname{tg} 2\alpha$ ihre Werthe:

$$\operatorname{tg} v = \frac{a' - a}{1 + aa'}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2a}{1 - a^2},$$

einsetzt. Obige Gleichung, gehörig geordnet, giebt nun:

$$\operatorname{tg} u^2 - \frac{2(aa' - 1)}{a + a'} \operatorname{tg} u - 1 = 0. \quad (\mu)$$

Da hieraus für $\operatorname{tg} u$, somit mittelst (2) auch für m zwei Werthe erhalten werden, so giebt es zwei Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der (1) und (2) gehen und den von ihnen gebildeten Winkel halbiren, wie es auch sein muss, da solcher Winkel zwei, nämlich v und $180 - v$ existiren. Sind $\operatorname{tg} u_1$ und $\operatorname{tg} u_2$ die Wurzeln der Gl. (μ), so ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen $\operatorname{tg} u_1 \operatorname{tg} u_2 = -1$, oder $1 + \operatorname{tg} u_1 \operatorname{tg} u_2 = 0$, woraus folgt, dass diese zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen. Aus (μ) findet man:

$$\operatorname{tg} u = \frac{aa' - 1 \pm \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{a + a'},$$

und man bildet eine neue Gleichung, $\varphi(x, y) = 0 \dots (\gamma)$, die für dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche den Gleichungen (α) und (β) genügen, so schneiden sich die drei Curven (α), (β) und (γ) in einem oder mehreren gemeinschaftlichen Punkten. Eine solche Gleichung wäre z. B. $\varphi(x, y) = f(x, y) \pm F(x, y) = 0$ oder allgemeiner $\varphi(x, y) = m F(x, y) \pm n f(x, y) = 0$, wo m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten.

welcher Werth in (2) substituirt:

$$m = -\frac{1 + a'^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}{1 + a^2 \mp \sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}, \text{ d. i.}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{1 + a'^2}{1 + a^2}} = \pm \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$$

liefert. Führt man endlich diesen Werth in (3) ein, so erhält man:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} \quad (5)$$

als Gleichung derjenigen Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden (1) und (2) geht und den von ihnen gebildeten Winkel halbirt. Mit Hülfe der am Schlusse des vorigen §. gegebenen Regel hätte sich übrigens diese Gleichung unmittelbar hinschreiben lassen, wenn man die Bemerkung macht, dass jeder Punkt dieser Geraden von den gegebenen Geraden (1) und (2) gleich weit entfernt ist.

173. Aufg. Es ist ein Winkel $XOL = \alpha$ gegeben (Fig. 12.); man suche einen Punkt M , dessen senkrechte Entfernungen von den Schenkeln des Winkels sich wie m zu n verhalten.

Nimmt man den einen Schenkel OX als Abscissenaxe, den Scheitel O als Ursprung, so wird die Gleichung des zweiten Schenkels $OL: y = x \operatorname{tg} \alpha = ax$. Bezeichnen wir nun mit ξ, η die Coordinaten des Punktes M , so ist $MP = \eta$, $MQ = \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}}$ [§.171], und man hat der Bedingung der Aufgabe gemäss: $MP:MQ = m:n$, d. i.:

$$\eta : \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}} = m : n,$$

woraus:

$$\eta = \frac{am}{m \pm n\sqrt{1 + a^2}} \xi$$

folgt. Da wir zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η des Punktes M nur diese eine Gleichung erhalten, deren geometrischer Ort (des doppelten Zeichens im Nenner wegen) zwei im Ursprunge sich schneidende Gerade sind, so folgt, dass sämtliche Punkte dieser zwei Geraden der Aufgabe Genüge leisten.

174. Aufg. Es ist ein Dreieck ABC (Fig. 13.) gegeben; eine Gerade HK bewege sich so, dass sie beständig der Seite BC parallel bleibt; verbindet man nun die Durchschnittspunkte D, E der beweglichen Geraden mit den Seiten AB und AC mit den Gegenwinkeln C und B , so schneiden sich diese

Verbindungslinien im Punkte G ; man sucht den geometrischen Ort dieses Punktes, d. h. die Linie, in welcher sämtliche Durchschnittspunkte G liegen, während die Gerade HK sich parallel zu BC bewegt.

Nehmen wir den Scheitel A als Ursprung, die Dreiecksseiten AB und AC als Axen der x und y , wobei also im Allgemeinen schiefwinkelige Coordinaten in Anwendung kommen; setzen wir ferner $AB=c$, $AC=b$, so ist die Gleichung der BC :

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0. \quad (p)$$

Bezeichnen wir AD mit ξ , so ist die Gl. der HK : $y = m(x - \xi)$; da

aber diese Gerade zur BC parallel sein soll, so hat man $m = -\frac{b}{c}$,

und somit $y = -\frac{b}{c}(x - \xi)$ als Gleichung der HK . Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, so folgt $y = \frac{b\xi}{c} = AE$. Hiemit erhält man nun als

$$\text{Gleichung der } CD: \frac{y}{b} + \frac{x}{\xi} - 1 = 0, \quad (q)$$

$$\text{BE: } \frac{cy}{b\xi} + \frac{x}{c} - 1 = 0. \quad (r)$$

Betrachtet man nun diese beiden Gleichungen als coëxistirend, so gehören sie dem Durchschnittspunkte G an, dessen Coordinaten sich durch successive Elimination von y und x ergeben würden und zwar ausgedrückt in Function von ξ , wie es sein muss, weil die Coordinaten eines bestimmten Durchschnittspunktes von dem besonderen Werthe von ξ abhängen. Eliminirt man hingegen ξ , d. h. diejenige Grösse, durch welche ein bestimmter Durchschnittspunkt individualisirt wird, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y , d. h. zwischen den Coordinaten sämtlicher Durchschnittspunkte, welche demnach die gesuchte Gleichung des geometrischen Ortes dieser Durchschnittspunkte sein muss.

Durch Subtraktion der Gleichungen (q) und (r) erhält man nun:

$$\frac{y}{b} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) + x \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{c}\right) = 0,$$

oder:

$$\frac{y}{b} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) - \frac{x}{c} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) = 0,$$

somit nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors:

$$y = \frac{b}{c} x \quad (s)$$

als Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes, welcher daher eine durch den Ursprung gehende Gerade ist, welche die Gegenseite BC halbt. Denn aus der Verbindung der Gl. (s) mit (p) erhält man $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ als Coordinaten des Durchschnittspunktes I , woraus $BI = CI$ folgt.

Lässt man die bewegliche Gerade eine solche Lage einnehmen, dass $AD = DB$ ist, so wird auch $AE = EC$ und es ergibt sich sofort aus Obigem unmittelbar der aus der Geometrie bekannte Satz: Die drei Geraden, welche die Scheitelpunkte eines Dreieckes mit den Halbirungspunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Für diesen Fall werden ferner wegen $AD = \frac{c}{2}$, $AE = \frac{b}{2}$ die

$$\text{Gl. der } CD: \frac{y}{b} + \frac{2x}{c} = 1, \quad \text{Gl. der } BE: \frac{2y}{c} + \frac{x}{c} = 1,$$

durch deren Verbindung man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes G findet: $x = \frac{1}{3}c$, $y = \frac{1}{3}b$, woraus, da die Abscisse von I , $= \frac{1}{2}c$ ist, $AG:AI = 2:3$, oder $AG:GI = 2:1$ folgt; d. h. der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Halbirungspunkten der Gegenseiten theilt diese Linien im Verhältnisse von 1:2, wie ebenfalls aus den Elementen bekannt ist. Dieser Durchschnittspunkt ist der Schwerpunkt des Dreieckes.

DRITTES KAPITEL.

VOM KREISE.

175. Der Kreis ist bekanntlich jene krumme Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte (dem Mittelpunkte des Kreises) gleich weit entfernt sind.

Bezeichnen wir demnach mit α , β die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes, mit x , y jene eines beliebigen Punktes des Kreises, so wird die Entfernung dieser beiden Punkte ausgedrückt durch:

$$\sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2},$$

und da diese gemäss der oben erwähnten Eigenschaft eine constante Grösse ist, so besteht, wenn wir diese constante Entfernung (den Halbmesser des Kreises) mit r bezeichnen, die Gleichung:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2, \quad (1)$$

welche somit für alle Punkte der Kreisperipherie und nur für diese gilt, und daher die Gleichung des Kreises ist.

Die Gl. (1) ist die Gleichung des Kreises in ihrer allgemeinsten Form; sie wird mehr oder weniger einfach, wenn man dem Axensysteme eine bestimmte Lage gegen den Kreis giebt.

1) Fällt der Mittelpunkt mit dem Ursprunge zusammen, so erhält man aus (1) wegen $\alpha = \beta = 0$:

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad (2)$$

die sogenannte Mittelpunkts Gleichung des Kreises.

2) Fällt der Ursprung in den Endpunkt eines Durchmessers und dieser in die positive Halbaxe der x , so ist $\alpha = r$, $\beta = 0$, und die Gl. des Kreises wird bei dieser Lage:

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0. \quad (3)$$

3) Liegt der Ursprung in der Peripherie des Kreises, so ist die Entfernung des Mittelpunktes vom Ursprunge dem Halbmesser gleich, somit $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, wodurch die Gl. (1) sich verwandelt in

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x = 0. \quad (4)$$

Aus (1) folgt ferner durch Entwicklung der Quadrate:

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \quad (5)$$

aus welcher Gleichung, als der Kreisgleichung in ihrer allgemeinsten Form, sich die charakteristischen Eigenschaften derselben ergeben. Sie ist nämlich eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y , in welcher die Quadrate von x und y den Coefficienten $= 1$, oder überhaupt gleiche Coefficienten haben und das Glied mit dem Produkte xy fehlt.

Hieraus schliesst man, dass der geometrische Ort jeder Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen von der Form:

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (6)$$

ein Kreis ist. In der That werden die Gleichungen (5) und (6) identisch, wenn man

$$D = -2\beta, \quad E = -2\alpha, \quad F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

setzt, woraus:

$$\alpha = -\frac{1}{2} E, \quad \beta = -\frac{1}{2} D, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

folgt, wodurch die Lage des Mittelpunktes und der Halbmesser des durch die Gleichung (6) repräsentirten Kreises, dieser selbst also vollkommen bestimmt ist.

Aus obigem Ausdrucke des Halbmessers erhellt übrigens, dass in dem besonderen Falle, wenn $D^2 + E^2 = 4 F$ ist, die Gleichung (6) einen Punkt (Kreis vom Halbmesser $= 0$) bedeutet, dessen Coordinaten $x = -\frac{1}{2} E$, $y = -\frac{1}{2} D$ sind. In der That bringt man in diesem Falle die Gl. (6) leicht auf die Form:

$$(y + \frac{1}{2} D)^2 + (x + \frac{1}{2} E)^2 = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen: $y + \frac{1}{2} D = 0$ und $x + \frac{1}{2} E = 0$ zerfällt, und somit einen Punkt zum geometrischen Orte hat, dessen Coordinaten $x = -\frac{1}{2} E$, $y = -\frac{1}{2} D$ sind.

Die Gl. (6) hat endlich keine geometrische Bedeutung, wenn $D^2 + E^2 < 4 F$, weil in diesem Falle der Ausdruck des Halbmessers imaginär wird. Man findet auch leicht, dass in diesem Falle aus (6) für jeden Werth von x ein imaginärer Werth von y folgt.

176. Aus der Mittelpunkts Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

folgt: $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \dots (\alpha)$, $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2} \dots (\beta)$

somit für $x = 0$: $y = \pm r$ und für $y = 0$: $x = \pm r$, d. h. der Kreis schneidet jede der beiden Axen in zwei Punkten: A, B und C, D [Fig. 14], welche zu beiden Seiten des Ursprunges in gleichen Entfernungen von demselben liegen. Die Gl. (α) zeigt, dass zu jedem Werthe von $x < r$ zwei numerisch gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe von y gehören, woraus folgt, dass die Abscissenaxe den Kreis in zwei congruente Theile theilt; dasselbe gilt von der Ordinatenaxe, wie aus Gl. (β) erhellt und überhaupt von jeder durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, da die Gl. (1) ihre Form nicht ändert, man mag was immer für eine solche Gerade als Abscissenaxe wählen. Hieraus folgt zugleich, dass der Kreis eine geschlossene Curve ist, von deren Gestalt man somit durch die Discussion ihrer Gleichung eine deutliche Vorstellung gewinnt. Wir übergehen die Ableitung der bekannten wesentlichsten Eigenschaften des Kreises aus der Gleichung desselben, und nur beispielsweise möge die folgende Aufgabe eine Stelle finden.

177. Aufg. Zwei Punkte A und B sind gegeben; man sucht einen Punkt von der Eigenschaft, dass die zwei Geraden, welche denselben mit A und B verbinden, einen gegebenen Winkel γ einschliessen.

Legen wir (Fig. 15) die Abscissenaxe durch die gegebenen Punkte,

A und B und den Ursprung in den Halbirungspunkt O der $AB = 2a$, so sind, wenn wir die Coordinaten des gesuchten Punktes M mit ξ, η bezeichnen:

$$y = -\frac{\eta}{a-\xi}(x-a), \quad y = \frac{\eta}{a+\xi}(x+a)$$

die Gleichungen der Geraden AM und BM und somit der Bedingung der Aufgabe gemäss [§. 167]:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-\frac{\eta}{a-\xi} - \frac{\eta}{a+\xi}}{1 - \frac{\eta}{a+\xi} \cdot \frac{\eta}{a-\xi}}.$$

Da wir zur Bestimmung der beiden unbekannten Coordinaten ξ, η nur diese eine Gleichung erhalten, so ist die Aufgabe unbestimmt und jeder Punkt ist eine Auflösung derselben, dessen Coordinaten obiger Gleichung Genüge leisten. Durch Wegschaffung der Brüche erhält sie die Form:

$$\eta^2 + \xi^2 - 2a \cotg \gamma \cdot \eta - a^2 = 0 \quad (m)$$

in welcher man die Gl. eines Kreises erkennt, dessen Mittelpunkts-coordinaten:

$$\alpha = 0, \quad \beta = a \cotg \gamma, \quad \text{Halbmesser} = a \operatorname{cosec} \gamma$$

sind, und welcher durch die beiden Punkte A und B geht, weil aus (m) für $\eta = 0$, $\xi = \pm a$ folgt.

Dieser Kreis lässt sich leicht construiren. Man mache $\angle OAD = \gamma$ und errichte in A eine Senkrechte auf AD , welche das im Halbirungspunkte O der AB errichtete Loth OY in dem gesuchten Mittelpunkt C schneidet, wodurch auch der Halbmesser $CA = CB$ bekannt wird. Denn vermöge dieser Construction wird $OC = OA \cotg \angle OCA = a \cotg \gamma = \beta$, und $AC = OA: \sin \gamma = a \operatorname{cosec} \gamma = r$.

Aus dem Ausdrucke für (β) folgt übrigens, dass der Mittelpunkt oberhalb, unterhalb oder in die Abscissenaxe fällt, je nachdem:

$$\gamma < 90^\circ, > 90^\circ \text{ oder } = 90^\circ$$

ist, in welch' letzterem Falle AB zum Durchmesser wird. Daraus geht weiter hervor, dass von den beiden Winkeln AMB und $AM'B$, welche über der Sehne AB in beiden Kreisabschnitten construirt werden, der eine spitz, der andere stumpf ist; da ferner Gl. (m) sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig $-\eta$ und $180^\circ - \gamma$ statt η und γ schreibt, so muss $\angle AMB + \angle AM'B = 180^\circ$ sein.

Alles dieses zusammengefasst, führt zu folgenden Sätzen:

1) Alle Peripheriewinkel, welche über derselben Sehne in demselben Kreisabschnitte beschrieben werden, sind einander gleich.

2) Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

3) In jedem Kreisvierecke ist die Summe je zweier Gegenwinkel $= 180^\circ$.

178. Da die allgemeine Gleichung des Kreises (1) oder (6) [§. 175] drei Constanten enthält, so sind zur vollständigen Bestimmung der Lage und Grösse eines Kreises drei Bedingungen erforderlich und hinreichend. Unter den mannigfaltigen Aufgaben, welche sich hier darbieten, wollen wir zunächst folgende vornehmen.

Die Gleichung des Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte geht.

Seien $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ die Coordinaten der gegebenen Punkte; die Gleichung des gesuchten Kreises hat die Form:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2, \quad (1)$$

wo nun die noch unbekannten Constanten α, β, r so zu bestimmen sind, dass dieser Kreis durch die gegebenen Punkte gehe.

Da diese Punkte in der Peripherie des Kreises (1) liegen sollen, so müssen die Coordinaten derselben der Gl. (1) Genüge leisten; es bestehen daher folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2 &= r^2 \\ (y_2 - \beta)^2 + (x_2 - \alpha)^2 &= r^2 \\ (y_3 - \beta)^2 + (x_3 - \alpha)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

welche zur Bestimmung der Unbekannten α, β, r hinreichen. Entwickelt man die Quadrate und zieht nach einander die 2^{te} und 3^{te} Gleichung von der 1^{sten} ab, so erhält man:

$$2(y_1 - y_2)\beta + 2(x_1 - x_2)\alpha - (y_1^2 - y_2^2) - (x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (3)$$

$$2(y_1 - y_3)\beta + 2(x_1 - x_3)\alpha - (y_1^2 - y_3^2) - (x_1^2 - x_3^2) = 0, \quad (4)$$

aus welchen Gleichungen sich nun die Mittelpunktscoordinaten α, β ohne Schwierigkeit finden lassen, da dieselben nach α und β vom ersten Grade sind. Durch Substitution der gefundenen Werthe in eine der Gl. (2) ergibt sich sodann auch r . Da jedoch die Ausdrücke ziemlich weitläufig werden und kein weiteres Interesse darbieten, so wollen wir aus den bisher erhaltenen Resultaten eine Construction der Aufgabe ableiten.

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind jene Werthe von α und β , welche den Gl. (3) und (4) gleichzeitig Genüge leisten. Betrachten wir nun für einen Augenblick α und β als veränderliche (laufende) Coordinaten, so ist, da die Gl. (3) und (4) nach α und β vom ersten Grade sind, der geometrische Ort einer jeden derselben eine gerade Linie, deren Durchschnittspunkt offenbar der gesuchte Mittelpunkt

sein muss, weil derselbe der einzige Punkt ist, dessen Coordinaten gleichzeitig beide Gleichungen (3) und (4) erfüllen. Es kommt daher nur auf die Construction dieser beiden Geraden an. Durch Division mit $2(y_1 - y_2)$ bringt man die Gl. (3) leicht auf folgende Form:

$$\beta - \frac{y_1 + y_2}{2} = - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left(\alpha - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (3')$$

woraus man erkennt, dass diese Gerade durch den Punkt geht, dessen Coordinaten $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ sind, d. h. durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 . Da ferner die Gleichung dieser Verbindungslinie:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

ist, so folgt, dass die Gerade (3) oder (3') auf dieser Verbindungslinie in ihrem Halbirungspunkte senkrecht steht. — Eben so findet man, dass der geometrische Ort der Gl. (4) die Gerade ist, welche im Halbirungspunkte der die Punkte x_1, y_1 und x_3, y_3 verbindenden Geraden senkrecht auf diese errichtet wird. Der Durchschnittspunkt dieser zwei Senkrechten, welche hiernach sehr leicht zu construiren sind, ist der gesuchte Mittelpunkt.

Wie man sieht, führt die analytische Auflösung der Aufgabe auf jene Construction, welche schon in den Elementen gelehrt wird. Einfacher werden übrigens obige Formeln, wenn man den Ursprung in einen der gegebenen Punkte, etwa x_1, y_1 , und die x -Axe noch durch einen der beiden anderen Punkte, etwa x_2, y_2 legt, weil dann:

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0$$

werden.

Aus dieser Aufgabe ersieht man den grossen Vortheil, welchen man aus der Benutzung der geometrischen Oerter bei der Auflösung bestimmter Aufgaben ziehen kann. Handelt es sich nämlich allgemein um die Bestimmung eines Punktes aus gegebenen Bedingungen, so führen diese, wenn die Aufgabe eine bestimmte ist, immer auf zwei Gleichungen, $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$ zwischen den Coordinaten x, y des gesuchten Punktes, welche sich durch Elimination aus diesen Gleichungen ergeben. Diese Elimination ist aber nicht selten sehr weitläufig und führt dann auf complicirte, schwer zu behandelnde Ausdrücke. Beachtet man aber, dass die Coordinaten des gesuchten Punktes den beiden Gleichungen gleichzeitig Genüge leisten müssen, so sieht man sogleich, dass dieser Punkt der Durchschnittspunkt der durch diese Gleichungen dargestellten Linien sein muss, wenn

man darin x, y als veränderliche Coordinaten ansieht, durch deren Construction sich daher der gesuchte Punkt ergibt.

Ist die Aufgabe unbestimmt, so erhält man zwischen den Coordinaten des gesuchten Punktes nur eine Gleichung, deren geometrischer Ort irgend eine gerade oder krumme Linie sein wird, deren sämtliche Punkte der Aufgabe Genüge leisten. Hieher gehörige Beispiele bieten die §§. 173, 174, 177.

VERBINDUNG DES KREISES MIT DER GERADEN.

179. Es seien die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden:

$$(x - a)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (1), \quad y = ax + b \quad (2)$$

gegeben und die Coordinaten der Durchschnittspunkte zu suchen. Es ergeben sich dieselben, wenn wir die beiden Gleichungen als coëxistirend betrachten und daraus x und y durch Elimination bestimmen. Man findet auf diese Weise:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a + a\beta - ab \pm \sqrt{(1 + a^2)r^2 - (aa + b - \beta)^2}}{1 + a^2}, \\ y &= \frac{aa + a^2\beta + b \pm a\sqrt{(1 + a^2)r^2 - (aa + b - \beta)^2}}{1 + a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Hier können nun drei Fälle eintreten:

1) Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist negativ; dann werden x und y imaginär und die Gerade schneidet den Kreis nicht. Diess findet statt, wenn $(aa + b - \beta)^2 > (1 + a^2)r^2$, oder:

$$\pm \frac{\beta - aa - b}{\sqrt{1 + a^2}} > r,$$

d. h. wenn der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte grösser ist als der Halbmesser. [§. 171].

2) Der besagte Ausdruck ist positiv; in diesem Falle schneidet die Gerade den Kreis und zwar, des doppelten Vorzeichens wegen, in zwei Punkten; die Gerade heisst in diesem Falle eine Sekante des Kreises.

3) Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist $= 0$; die Gerade hat in diesem Falle nur einen Punkt mit dem Kreise gemein, dessen Coordinaten:

$$\xi = \frac{a + a\beta - ab}{1 + a^2}, \quad \eta = \frac{aa + a^2\beta + b}{1 + a^2} \quad (3)$$

sind und heisst nun eine Tangente am Kreise im Punkte ξ, η .

Die Bedingung, dass die Gerade (2) Tangente des Kreises (1) werde, wird somit durch die Gleichung:

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = r \quad (4)$$

ausgedrückt; d. h. das aus dem Mittelpunkte auf die Gerade gefällte Perpendikel muss dem Halbmesser gleich sein, woraus folgt, dass die Tangente auf dem zu dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht.

Bestimmt man aus (3) a und b , so erhält man:

$$a = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta}, b = \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\eta - \beta},$$

für jene Werthe, welche die Constanten a, b haben müssen, damit diese Gerade den Kreis im Punkte ξ, η berühre. Substituirt man daher diese Ausdrücke in (2), so erhält man:

$$y = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta} x + \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\eta - \beta}, \text{ oder:} \\ y - \eta = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta} (x - \xi) \quad (5)$$

als Gleichung der Tangente am Kreise im Punkte ξ, η , wozu eigentlich noch die Gleichung:

$$(\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = r^2$$

gehört, welche ausdrückt, dass der Punkt ξ, η dem Kreise angehört. Schreibt man (5) in der Form:

$$(y - \eta)(\eta - \beta) + (x - \xi)(\xi - \alpha) = 0,$$

und addirt hiezu die letzte Gleichung, so erhält man die Gleichung, der Tangente in folgender Form:

$$(y - \beta)(\eta - \beta) + (x - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2, \quad (6)$$

welche sich von der Gl. (1) des Kreises nur dadurch unterscheidet, dass die Rechtecke $(y - \beta)(\eta - \beta)$ und $(x - \alpha)(\xi - \alpha)$ an die Stelle der Quadrate $(y - \beta)^2$ und $(x - \alpha)^2$ getreten sind.

Ist der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Ursprung der Coordinaten, so werden die Gleichungen der Tangente am Punkte ξ, η , wie man aus (5) und (6) für $\alpha = \beta = 0$ leicht findet:

$$y - \eta = -\frac{\xi}{\eta} (x - \xi), \quad (7)$$

$$\text{oder:} \quad y\eta + x\xi = r^2. \quad (8)$$

180. Betrachten wir noch eine Sekante, welche durch einen beliebigen Punkt A in der Ebene des Kreises gezogen ist. Legen wir

den Ursprung der Coordinaten in den Mittelpunkt O des Kreises und die x -Axe durch den Punkt A ; die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte sei $= d$, der Halbmesser $= r$, so sind die Gleichungen des Kreises und der Sekante:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y = a(x - d).$$

Für die Coordinaten der zwei Durchschnittspunkte B_1 und B_2 erhalten wir aus den Gl. (k) im vorigen §., $u = \beta = 0$ und $b = -ad$ setzend:

$$x_1 = \frac{a^2 d + N}{1 + a^2}, \quad y_1 = \frac{-ad + aN}{1 + a^2},$$

$$x_2 = \frac{a^2 d - N}{1 + a^2}, \quad y_2 = \frac{-ad - aN}{1 + a^2},$$

wo Kürze halber $N = \sqrt{(1 + a^2)r^2 - a^2 d^2}$ gesetzt ist. Bezeichnet man ferner die Entfernungen AB_1 und AB_2 des Punktes A von den zwei Durchschnittspunkten mit e_1 und e_2 , so ist:

$$e_1^2 = (d - x_1)^2 + y_1^2, \quad e_2^2 = (d - x_2)^2 + y_2^2.$$

Führt man in diese Gleichungen obige Werthe der Coordinaten ein, so erhält man:

$$e_1 = \pm \frac{d - N}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad e_2 = \frac{d + N}{\sqrt{1 + a^2}},$$

somit $e_1 e_2 = \pm \frac{d^2 - N^2}{1 + a^2}$, d. i. wenn man den Werth von N wiederherstellt:

$$e_1 e_2 = \pm (d^2 - r^2).$$

wo von den doppelten Zeichen jenes zu nehmen ist, welches e_1 und $e_1 e_2$ positiv macht, also das obere oder untere, je nachdem der Punkt A ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Da vermöge der letzten Gleichung das Produkt $e_1 e_2$ von a , d. i. von der Richtung der Sekante (oder Sehne, wenn A innerhalb des Kreises) unabhängig ist, so ergiebt sich daraus folgender Satz:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt A , dessen Entfernung vom Mittelpunkte eines gegebenen Kreises $= d$ ist, Sekanten oder Sehnen, so ist das Produkt aus den Abständen der zwei Durchschnittspunkte jeder Sekante oder Sehne mit dem Kreise vom Punkte A eine constante Grösse und $=$ der Differenz der Quadrate der Entfernung d und des Halbmessers.

Das Produkt $e_1 e_2 = \pm (d^2 - r^2)$ wird die Potenz des Punktes A in Beziehung auf den Kreis genannt.

Da ferner dieser Satz gelten muss, wie nahe auch die beiden Durchschnittspunkte der Sekante einander kommen, so muss er auch für die aus dem Punkte A an den Kreis gezogene Tangente richtig bleiben, für welche $e_1 = e_2 = t$ wird, wenn wir mit t das Stück der Tangente zwischen dem Punkte A und dem Berührungspunkte bezeichnen. Es besteht daher die Gleichung $t^2 = d^2 - r^2$, woraus wieder folgt, dass die Tangente auf dem Halbmesser des Berührungspunktes senkrecht steht. Da ferner für eine beliebige aus A gezogene Sekante $e_1 e_2 = d^2 - r^2$ ist, so hat man $t^2 = e_1 e_2$, welche Gleichung den Satz ausspricht, dass die aus dem Punkte A an den Kreis gezogene Tangente t die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen den beiden Segmenten einer beliebigen durch A gezogenen Sekante.

181. Wir haben in §. 179 die Gl. der Tangente am Kreise in der Voraussetzung entwickelt, dass der Berührungspunkt ξ, η gegeben sei; nehmen wir jetzt an, es sei ein ausserhalb des Kreises:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2 \quad (1)$$

liegender Punkt x', y' gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Tangente an den Kreis ziehen.

Bezeichnen wir wieder mit ξ, η die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gl. der Tangente am Kreise im Punkte ξ, η [§. 179. Gl. 6]:

$$(y - \beta)(\eta - \beta) + (x - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2.$$

Da diese Tangente durch den Punkt x', y' gehen soll, so hat man die Bedingungs-gleichung:

$$(y' - \beta)(\eta - \beta) + (x' - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2, \quad (m)$$

welche in Verbindung mit der Gleichung:

$$(\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = r^2, \quad (n)$$

die gesuchten Werthe von ξ und η liefern wird.

Man erhält aus diesen Gleichungen durch successive Elimination, wenn man dabei $\xi - \alpha, \eta - \beta$ als unbekannte Grössen behandelt und Kürze halber die bekannten Grössen:

$$x' - \alpha = p, \quad y' - \beta = q, \quad (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = d^2$$

setzt, wo also d die Entfernung des Punktes x', y' vom Kreismittelpunkte bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} \xi - \alpha &= \frac{r^2 p \pm r q \sqrt{d^2 - r^2}}{d^2}, \\ \eta - \beta &= \frac{r^2 q \mp r p \sqrt{d^2 - r^2}}{d^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Man sieht hieraus, dass von dem Punkte x', y' zwei, oder eine oder endlich gar keine Tangente an den Kreis gezogen werden kann, je nachdem $d >, =$ oder $< r$ ist, d. h. je nachdem der Punkt x', y' ausserhalb, in oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt.

Endlich erhält man für den Neigungswinkel τ der Tangente gegen die Abscissenaxe:

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta} = -\frac{pq \pm r \sqrt{d^2 - r^2}}{r^2 - p^2} \quad (3)$$

182. Es erübrigt noch, aus vorstehender Analyse ein Verfahren zur geometrischen Construction der Berührungspunkte abzuleiten. Die Ausdrücke (2), welche sich zu diesem Zwecke unmittelbar darbieten, sind etwas verwickelt, daher wir von den geometrischen Oertern Gebrauch machen wollen. Die Coordinaten der Berührungspunkte sind nämlich jene Werthe von ξ, η , welche den Gleichungen (m) und (n) gleichzeitig Genüge leisten, daher diese Punkte die Durchschnitte der diesen Gleichungen entsprechenden geometrischen Oerter sein werden, wenn wir darin ξ, η als laufende Coordinaten betrachten.

Da aber die Construction nur von der Natur der Aufgabe, nicht aber von der Lage des bei der Analyse gebrauchten Coordinatensystemes abhängen kann, so wollen wir jetzt den Ursprung in den Mittelpunkt O des Kreises legen (Fig. 16), wodurch $\alpha = \beta = 0$ wird und die zu construirenden Gleichungen (m) und (n) folgende Form erhalten:

$$y'\eta + x'\xi = r^2 \dots (m'), \quad \eta^2 + \xi^2 = r^2 \dots (n').$$

Der Ort der Gl. (n') ist der gegebene Kreis selbst; der Ort von (m') ist eine Gerade, welche am einfachsten mit Hülfe ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen construiert wird. Aus (m') folgt nämlich:

$$\text{für } \eta = 0: \xi = OD = \frac{r^2}{x'}, \text{ und für } \xi = 0: \eta = OE = \frac{r^2}{y'};$$

construiert man daher zu x' und r , sodann zu y' und r die dritten Proportionalen OD und OE , so ergeben sich die Punkte D und E ; die durch diese Punkte gezogene Gerade LL' ist der Ort der Gl. (m') und die Durchschnittspunkte G, G' derselben mit dem Kreise sind die gesuchten Berührungspunkte.

Die Gerade LL' , welche durch die beiden Berührungspunkte der aus M an den Kreis gezogenen Tangente geht, und deren Gleichung (m') ist, heisst Berührungssehne.

Aus dem für OD gefundenen Ausdrucke ersieht man, dass die Lage des Punktes D von der Ordinate y' des Punktes M unabhängig ist; daraus folgt, dass, wenn man von beliebigen Punkten der durch M senkrecht auf OX gezogenen Geraden NN' die Tangenten an den

Kreis zieht, sämtliche Berührungssehnensich in einem und demselben Punkte D schneiden werden.

Da nun die Richtung der Abscissenaxe in Bezug auf den Kreis völlig willkürlich ist und folglich diese Axe auf jede durch den Punkt M gehende Gerade senkrecht gezogen werden kann, so ergibt sich hieraus das folgende Theorem:

Zieht man von beliebigen Punkten einer Geraden NN' Tangenten an den Kreis und verbindet die Berührungspunkte der zusammengehörigen Tangenten durch Sehnen, so schneiden sich alle diese Berührungssehnensich in einem und demselben Punkte D , welcher in dem vom Mittelpunkte auf die Gerade NN' gefällten Perpendikel liegt.

Der Punkt D heisst der Pol in Bezug auf die Gerade NN' , welche wieder ihrerseits die Polare in Bezug auf den Punkt D genannt wird.

Aus dem Ausdrucke für OD folgt, dass, wenn $x' = OP > r$ ist, $OD < r$, wird und umgekehrt; d. h. wenn die Polare ausserhalb des Kreises liegt, liegt der Pol in demselben; schneidet aber die Polare den Kreis, so liegt der Pol ausserhalb des Kreises.

Kehrt man das obige Theorem um, so erhält man folgendes:

Zieht man durch einen in oder ausser dem Kreise liegenden Punkt Sehnen oder Sekanten und zu den Durchschnittpunkten derselben mit dem Kreise Tangenten, so liegen sämtliche Durchschnittpunkte je zweier zusammengehöriger Tangenten in einer Geraden, welche auf der den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte verbindenden Geraden senkrecht steht.

Eine andere Konstruktion der Durchschnittpunkte ist folgende. Zieht man die beiden Gleichungen (m') und (n') von einander ab, so erhält man:

$$\eta^2 + \xi^2 - y'\eta - x'\xi = 0, \quad (r)$$

welche Gleichung wir statt (m') benutzen können. Der Ort der Gl. (n') ist wieder der gegebene Kreis; jener von (r) ist aber ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunktscoordinaten $\frac{1}{2} x'$ und $\frac{1}{2} y'$ sind, dessen Halbmesser

$$\frac{1}{2} \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{2} OM \text{ ist.}$$

Beschreibt man daher aus dem Halbirungspunkte I der OM mit dem Halbmesser $\frac{1}{2} OM$ einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis in den gesuchten Berührungspunkten G, G' . Diese Konstruktion wird bekanntlich in den Elementen gelehrt.

183. Die in §. 179 und 181 erhaltenen Resultate setzen uns in den Stand, Aufgaben über die Berührungen von Kreisen und Geraden aufzulösen. Hieher gehören vorzüglich folgende drei: Es ist die Gleichung eines Kreises zu suchen, welcher:

1) eine gegebene Gerade berührt, und durch zwei gegebene Punkte geht; 2) zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht; 3) drei gegebene Gerade berührt.

Die Herstellung der entwickelten Endformeln ist bei dergleichen Aufgaben immer ziemlich weitläufig; von wesentlichem Einflusse ist hiebei eine zweckmässige Anordnung des Coordinatensystemes in Bezug auf die gegebenen Stücke. Gewöhnlich führt man aber die Auflösung nur so weit fort, bis aus den gewonnenen Gleichungen eine einfache und elegante Construction sich ergibt, und die erhaltenen Resultate Anhaltspunkte für die Erforschung weiterer Eigenthümlichkeiten des in der Aufgabe vorkommenden Systems von Linien und Punkten darbieten.

So führen z. B. bei der dritten der obigen Aufgaben schon die ersten Schritte in der Analyse zur Construction, was hier noch mit einigen Worten angedeutet werden mag. Es seien:

$y = ax + b \dots (1), y = a'x + b' \dots (2), y = a''x + b'' \dots (3),$
die Gleichungen der gegebenen Geraden,

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

die Gleichung des gesuchten Kreises. Damit derselbe jede der drei Geraden berühre, müssen [§. 179, Gl. (4)] folgende Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$(\beta - a\alpha - b)^2 = r^2 (1 + a^2),$$

$$(\beta - a'\alpha - b')^2 = r^2 (1 + a'^2),$$

$$(\beta - a''\alpha - b'')^2 = r^2 (1 + a''^2),$$

aus welchen die drei Unbekannten gefunden werden können. Eliminirt man zunächst r^2 , indem man die erste dieser Gleichungen durch die zweite und dritte dividirt, so erhält man, wenn man sogleich die Wurzel auszieht:

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a'\alpha - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} \quad (4)$$

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a''\alpha - b''}{\sqrt{1 + a''^2}} \quad (5)$$

wo die Wurzelgrößen $\sqrt{1 + a^2}$ u. s. w. positiv zu nehmen sind. Des doppelten Zeichens wegen zerfallen diese zwei Doppelgleichungen in vier Paare von Gleichungen; jedes dieser vier Paare ist nach α und β vom ersten Grade, liefert also ein System von Werthen für α und β ,

so dass also die Aufgabe vier Auflösungen zulässt und somit vier Kreise gezogen werden können, welche drei gegebene Gerade berühren. In der That, wollte man fortfahren, aus (4) und (5) noch eine Unbekannte, etwa β , zu eliminiren, so würde man für α eine Gleichung vom 4^{ten} Grade erhalten. Vergleicht man aber diese Gleichungen mit Gl. (5) §. 172, so erkennt man sogleich, dass dieselben die vier Geraden zum geometrischen Orte haben, welche die von den gegebenen Geraden (1), (2) und (1), (3) gebildeten Winkel halbiren. Die Durchschnittspunkte dieser vier Geraden, welche sich leicht construiren lassen, sind daher die Mittelpunkte der vier Kreise.

VERBINDUNG MEHRERER KREISE.

184. Betrachten wir zwei Kreise; ist e die Entfernung ihrer Mittelpunkte C, C' und legen wir den Ursprung in den Mittelpunkt C des einen Kreises, die positive Halbaxe der x in die Centrilinie CC' , so sind ihre Gleichungen:

$$y^2 + x^2 = r^2 \dots (1), \quad y^2 + (x - e)^2 = r'^2 \dots (2),$$

durch deren Verbindung man folgende Werthe für die Coordinaten der Durchschnittspunkte erhält:

$$x = \frac{e^2 + r^2 - r'^2}{2e} \quad (3)$$

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{4e^2 r^2 - (e^2 + r^2 - r'^2)^2} \quad (4)$$

Der Werth von x ist, wie man sieht, immer reell, und — vorausgesetzt, dass e nicht $= 0$, d. h. die Kreise nicht concentrisch sind — bestimmt und endlich. Der Ausdruck für y wird hingegen imaginär, Null, oder erhält zwei reelle, gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe, je nachdem die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ, Null, oder positiv ist. Im ersten Falle schneiden sich die Kreise nicht; im letzten findet ein Durchschnitt statt und zwar in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten der Centrilinie in gleichen Entfernungen von derselben in einer auf der Centrilinie senkrechten Geraden liegen, da beiden vermöge (3) dieselbe Abscisse zukommt. Ist endlich die Grösse unter dem Wurzelzeichen $= 0$, so haben die beiden Kreise nur einen in der Centrilinie liegenden Punkt gemein, und die Gerade (3) wird in diesem Falle zur gemeinschaftlichen Tangente an dem besagten Punkte, in welchem sich nun die beiden Kreise berühren.

Löst man in (4) die Differenz unter dem Wurzelzeichen in Faktoren auf, so findet man:

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{\{(e + r + r')(e + r - r')(e + r' - r)(r + r' - e)\}},$$

woraus man erkennt, dass y reell wird, wenn, da $(r + r' + e)$ immer positiv ist, die übrigen drei Faktoren sämtlich positiv, oder einer positiv und zwei negativ sind. Dieser letztere Fall kann aber nicht eintreten. Denn ist einer dieser Faktoren z. B. $e + r - r'$ negativ, also $e + r < r'$, so ist $e < r'$ und $r < r'$, somit $r' - r$ und $r' - e$ positiv, wodurch aber die beiden andern Faktoren nothwendig positiv werden. Hiernach kann man folgenden Satz aussprechen:

Zwei Kreise, deren Halbmesser r, r' und Abstand der Mittelpunkte $= e$, schneiden sich in zwei Punkten, wenn von den drei Grössen r, r', d jede kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Eine Berührung der beiden Kreise tritt ein, wenn $y=0$ wird, d. h. wenn einer der obigen drei Faktoren verschwindet, wenn also $e=r'-r$, oder $e=r-r'$, oder $e=r+r'$, d. h. wenn $e = \pm (r - r')$ oder $e = r + r'$, oder wenn man diese Gleichungen in eine vereinigt, wenn

$$e^2 = (r \pm r')^2 \quad (5)$$

wird. Diese Gleichung drückt somit die Bedingung für die Berührung zweier Kreise analytisch aus, und diese tritt ein, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder der Differenz der Halbmesser gleich ist. Die Berührung wird im ersten Falle eine äussere, im zweiten eine innere genannt.

Mit Hülfe der Gl. (5) ist man nun im Stande, auch solche Aufgaben aufzulösen, bei welchen Berührungen von Kreisen gefordert werden; z. B. einen Kreis zu suchen, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt; oder welcher eine Gerade und zwei Kreise berührt u. s. w. Der Ansatz der drei Bedingungsgleichungen hat in allen diesen Fällen gar keine Schwierigkeiten; auf die weitere immer mehr oder weniger weitläufige Behandlung derselben einzugehen, gestattet der Raum nicht. Ein Ergebniss der Untersuchungen dieses Paragraphes von allgemeinerer Bedeutung wollen wir jedoch noch mit einigen Worten hervorheben, wozu uns die Gl. (3) Veranlassung giebt, welche, wie man sieht, einer zur y -Axe parallelen Geraden angehört, in welcher die Durchschnittspunkte beider Kreise, oder der Berührungspunkt liegen; welche Gerade jedoch — da die Gleichung immer reell bleibt — auch dann noch existirt, wenn die Kreise keinen Punkt gemeinschaftlich haben, und daher zu den Kreisen in einer gewissen Beziehung stehen muss.

185. Es seien allgemein:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 = K \quad (1)$$

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - r'^2 = 0 = K' \quad (2)$$

die Gleichungen zweier gegebenen Kreise; durch Subtraktion derselben erhalten wir:

$$2y(\beta' - \beta) + 2x(\alpha' - \alpha) + m^2 = 0 = K - K', \quad (3)$$

wo der Kürze wegen $(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - (\alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2) = m^2$ gesetzt ist. Der Ort der Gl. (3) ist, da dieselbe nach x und y vom ersten Grade eine gerade Linie, welche die beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punkte, wenn deren vorhanden sind, enthalten muss, weil sie durch dieselben Werthe von x und y identisch wird, welche die Gleichungen $K=0$ und $K'=0$ gleichzeitig befriedigen. [Vergl. d. Anmerk. zu §. 172]. Schneiden sich die Kreise in zwei Punkten, so ist demnach (3) die Gleichung der durch diese Punkte gehenden gemeinschaftlichen Sekante (oder unbestimmt verlängerten gemeinschaftlichen Sehne); berühren sich die Kreise, so ist (3) die Gl. der gemeinschaftlichen Tangente, da sie durch den Berührungspunkt geht, und auf der Centrilinie der beiden Kreise, deren Gleichung

$$y - \beta = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} (x - \alpha)$$

ist, senkrecht steht. Haben endlich die zwei Kreise keinen gemeinschaftlichen Punkt, so hat auch die Gerade (3) mit denselben keinen Punkt gemein, nichtsdestoweniger existirt sie aber, da ihre Gleichung unter allen Umständen reell bleibt, und hat eine bestimmte Lage gegen die gegebenen Kreise. Dass diese Gerade keine andere ist, als die (3) im vorigen §., bedarf kaum der Erinnerung.

Wir wollen diese Gerade, welche nach dem Gesagten für je zwei gegebene Kreise immer existirt, mit Plücker die Chordale derselben nennen und einige der wesentlichsten Eigenschaften derselben in Kürze anführen.

I. Die Chordale zweier Kreise steht senkrecht auf der Centrilinie derselben, wie bereits durch das Vorstehende erwiesen ist.

II. Es seien drei Kreise gegeben: $K=0$, $K'=0$, $K''=0$, und zu je zweien derselben die Chordalen gezogen; die Gleichungen der drei Chordalen sind:

$$K - K' = 0, \quad K - K'' = 0, \quad K' - K'' = 0.$$

Da nun jede dieser Gleichungen eine Folge der beiden anderen ist, so muss irgend eine derselben durch dieselben Werthe von x und y befriedigt werden, welche den beiden anderen gleichzeitig genügen; hieraus folgt der schöne Satz:

Die drei Chordalen, welche zu je zweien von drei gegebenen Kreisen gehören, schneiden sich in einem Punkte.

Dieser Satz leitet sogleich auf ein einfaches Verfahren zur Construction der Chordale zweier sich nicht schneidender Kreise, wenn man noch beachtet, dass nach Obigem die Chordale zweier sich schneidender Kreise ihre gemeinschaftliche Sekante ist. Seien (Fig. 17) K , K' die gegebenen Kreise; man ziehe einen beliebigen Hilfskreis K'' , welcher die gegebenen Kreise in $a, b; a', b'$ schneidet, so sind die unbestimmt verlängerten Geraden $ab, a'b'$ die Chordalen beziehungsweise der Kreise K, K'' und K', K'' , welche sich mit der Chordale der Kreise K und K' in einem Punkte m schneiden müssen; es ist daher m ein Punkt der gesuchten Chordale. Auf dieselbe Weise construirt man mittelst eines zweiten Hilfskreises K''' einen zweiten Punkt n , und es ist die durch m und n gezogene Gerade die Chordale der Kreise K und K' .

III. Von einem beliebigen Punkte M (Fig. 17) der Chordale seien an die beiden Kreise K, K' , deren Gleichungen die obigen (1) und (2) sein mögen, Tangenten MB und MB' gezogen; bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes M mit x, y ; seine Entfernungen von den Berührungspunkten B und B' mit t, t' ; seine Abstände von den Mittelpunkten K, K' mit d, d' ; so ist:

$$t^2 = d^2 - r^2, \quad t'^2 = d'^2 - r'^2,$$

$$d^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, \quad d'^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2;$$

durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhält man mit Rücksicht auf Gl. (3), da der Punkt x, y der Chordale angehört:

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2, \text{ oder:}$$

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2, \quad (4)$$

folglich auch:

$$t^2 = t'^2 \text{ oder } t = t'. \quad (5)$$

Die Gleichungen (4) und (5) sprechen folgende Sätze aus:

Für jeden Punkt der Chordale sind die Potenzen [S. 180] in Bezug auf beide Kreise gleich.

Zieht man von irgend einem Punkte der Chordale zweier Kreise Tangenten an dieselben, so sind die Längen derselben bis zu den Berührungspunkten gezählt, einander gleich.

Aus diesen Gründen wird von manchen Schriftstellern die Chordale die Linie der gleichen Potenzen, auch Potenz-Axe, oder die Linie der gleichen Tangenten genannt. Französische Mathematiker heissen sie Radikal-Axe.

Die angeführten Eigenschaften der Chordale führen bei Auflösung von Aufgaben, insbesondere über Berührungen von Kreisen, häufig zu sehr eleganten Konstruktionen, was noch an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Aufg. Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Kreis berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Sei (Fig. 18) K der gegebene Kreis; A, B die gegebenen Punkte. Denken wir uns den gesuchten Kreis K' construirt und ziehen wir durch A, B einen den gegebenen Kreis K in D und E schneidenden Hilfskreis C von willkürlichem Halbmesser, so sind die Geraden AB, DE die Chordalen beziehungsweise der Kreise C und K' , C und K ; ihr Durchschnittspunkt G ist daher auch (nach II) ein Punkt der Chordale der Kreise K und K' , und da diese Kreise sich berühren sollen, so ist die Chordale derselben die gemeinschaftliche Tangente. Ziehen wir daher durch den Punkt G Tangenten GH und GI an den gegebenen Kreis, so sind die Berührungspunkte derselben m und n zugleich die Berührungspunkte des gegebenen und gesuchten Kreises, woraus sogleich folgt, dass zwei Kreise gezogen werden können, welche der Aufgabe Genüge leisten. Unsere Aufgabe ist somit auf jene zurückgeführt, durch drei gegebene Punkte: A, B, m und A, B, n Kreise zu ziehen. Zieht man die Halbmesser Km und Kn und verlängert dieselben bis zu ihren Durchschnitten K', K'' mit dem im Halbirungspunkte der AB errichteten Perpendikel, so sind K', K'' die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

Aufg. Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte A, B geht und eine gegebene Gerade LL' berührt.

Ziehen wir (Fig. 19) durch die gegebenen Punkte einen beliebigen Hilfskreis C und die Gerade AB , welche die gegebene Gerade LL' in D schneidet. Es ist nun offenbar die AB die Chordale des gesuchten und des Hilfskreises und D ein Punkt dieser Chordale; construiren wir daher von D eine Tangente DE an den Hilfskreis, so muss nach III die aus D an den gesuchten Kreis gezogene Tangente dieselbe Länge $= DE$ haben. Beschreibt man daher aus D mit dem Halbmesser DE einen Kreis, so schneidet dieser die LL' in zwei Punkten m und n , welche die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit der LL' sind, woraus zugleich erhellt, dass die Aufgabe durch zwei Kreise zur Lösung gebracht wird, deren Mittelpunkte K und K' sich nun leicht ergeben, wenn man im Halbirungspunkte der AB ein Perpendikel errichtet und dieses durch die aus m und n senkrecht auf LL' gezogenen Geraden schneidet.

VIERTES KAPITEL.

UEBER DIE LINIEN ZWEITER ORDNUNG UEBERHAUPT ODER UEBER DIE
GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ALLGEMEINEN GLEICHUNG DES ZWEI-
TEN GRADES ZWISCHEN ZWEI VERAENDERLICHEN GROESSEN.

186. Da jede nach einem bestimmten Gesetze gebildete Curve durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ zwischen den Coordinaten eines ihrer Punkte dargestellt werden kann, somit alle möglichen Curven in den unendlich mannigfaltigen Formen einer solchen Gleichung enthalten sein müssen, so kann man bei der Untersuchung der Curven den analytischen Charakter, der sich in ihren Gleichungen ausspricht, zum Ausgangspunkte wählen und wird dadurch zu einer systematischen Eintheilung derselben gelangen.

Hiedurch scheiden sich zunächst die Curven in zwei Classen, die algebraischen und transcendenten, je nachdem die Gleichung derselben eine algebraische oder transcendente ist.

Wir können immer annehmen, dass in der Gleichung einer algebraischen Curve, $F(x, y) = 0$, etwa vorhandene Brüche und Wurzelgrössen weggeschafft seien und folglich $F(x, y)$ eine rationale ganze Funktion der Veränderlichen x, y sei. Alle algebraischen Curven sind demnach in der Gleichung

$$Ay^n + (Bx + C)y^{n-1} + (Dx^2 + Ex + F)y^{n-2} + \dots = 0 \quad (\alpha)$$

enthalten, wo $A, B, C, \dots$ reelle constante Grössen, n aber eine positive ganze Zahl ist. Suchen wir nun nach einem weiteren Eintheilungsgrunde der algebraischen Curven, so bietet sich hiezu sogleich, aber auch allein, der Grad der Gl. (α) in Bezug auf die Veränderlichen x, y dar, und wir theilen daher die algebraischen Linien nach dem Ordnungsexponenten ihrer Gleichungen in Linien des 1^{sten}, 2^{ten}, 3^{ten}, n ^{ten} Grades oder der n ^{ten} Ordnung ein.

Die gerade Linie ist daher eine Linie der 1^{sten} Ordnung und zwar, wie bekannt, die einzige dieser Gattung. Der Kreis ist eine Curve der 2^{ten} Ordnung; da jedoch die Gleichung des 2^{ten} Grades zwischen x und y gewisse Bedingungen erfüllen muss, [§. 175] wenn sie einen Kreis bedeuten soll, so schliessen wir, dass der Kreis nicht die einzige Linie 2^{ter} Ordnung sein werde.

Diese Eintheilung der algebraischen Linien nach dem Grade ihrer Gleichungen wäre offenbar unzulässig, wenn der Ordnungsexponent der Gleichung nicht unverändert bliebe, man mag die Curve auf was immer für ein Coordinatensystem beziehen. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass der Grad der Gl. (α) und mit ihm auch die geometrische Bedeutung derselben, von der Wahl des Coordinatensystemes ganz unabhängig ist. Lassen wir nämlich die Gl. (α), deren geometrischer Ort eine gewisse Curve sein wird, auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen sein, und gehen wir von diesem auf ein neues über, so haben wir in (α) für x und y die durch die Formeln (3) [§. 159] gegebenen Ausdrücke einzusetzen, wodurch wir eine neue Gleichung erhalten, welche, da jene Ausdrücke in Bezug auf die neuen Coordinaten x' , y' vom ersten Grade sind, offenbar wieder vom n^{ten} Grade sein wird und dieselbe Curve zum geometrischen Orte hat.

Eine Linie der n^{ten} Ordnung kann von einer Geraden nicht in mehr als in n Punkten geschnitten werden.

Denn es sei $y = ax + b^{\text{te}} \dots$ (β) die Gleichung einer die Curve (α) schneidenden Geraden. Um die Durchschnittspunkte zu erhalten, eliminiren wir aus (α) und (β) etwa y und erhalten eine Eliminationsgleichung nach x , deren Wurzeln die Abscissen sämtlicher Durchschnittspunkte sein werden. Es sind aber die Gl. (α) und (β) beziehungsweise vom n^{ten} und 1^{sten} Grade; die Eliminationsgleichung kann daher [§. 131] den n^{ten} Grad nicht übersteigen und folglich nicht mehr als n Wurzeln haben.

Eine Linie der zweiten Ordnung kann daher von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden. Mit der allgemeinen Untersuchung dieser Linien wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen.

187. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y hat die Form:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0, \quad (1)$$

wobei wir, nach dem im vorigen §. Gesagten, ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetzen können, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun.

Um die geometrische Bedeutung der Gl. (1) kennen zu lernen, müssen wir trachten, sie auf eine einfachere Form zu bringen, was durch Transformation der Coordinaten bewirkt werden kann, indem wir Ursprung und Axenrichtung des neuen Coordinatensystemes so wählen, dass aus der transformirten Gleichung gewisse Glieder hinaus-

fallen. Die folgenden Betrachtungen werden hiezu die nöthigen Mittel darbieten.

Es sei M_1NM_2 , (Fig. 20) ein Theil der Curve, welche aus der Construction der Gl. (1) hervorgeht; A irgend ein Punkt in der Ebene derselben, ξ, η dessen Coordinaten; ziehen wir durch A eine beliebige Gerade, welche gegen die Axe der x unter dem Winkel φ geneigt sein mag, so ist ihre Gleichung:

$$y - \eta = m(x - \xi), \quad (2)$$

wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{tg} \varphi = m$ setzen. Durch Elimination von y aus (1) und (2) erhalten wir:

$$px^2 + 2qx + r = 0, \quad (3)$$

$$\text{wo} \quad \left. \begin{aligned} p &= A + A' m^2 + 2Bm, \\ q &= (A'm + B)(\eta - m\xi) + C + C'm, \\ r &= A'(\eta - m\xi)^2 + 2C'(\eta - m\xi) + F. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Gl. (3) wird im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Wurzeln x_1, x_2 , darbieten, welche, wenn reell, bekanntlich die Abscissen der Durchschnittspunkte der Geraden (2) und der Curve (1) sind. Es folgt hieraus, dass, wie schon oben bemerkt, eine Linie zweiter Ordnung von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

Das von den Durchschnittspunkten begrenzte Stück $M_1 M_2$ einer schneidenden Graden wollen wir eine Sehne oder Chorde der Curve nennen, und nun annehmen, dass der Punkt $A(\xi, \eta)$ die Sehne $M_1 M_2$ halbire. Als Bedingung hiefür haben wir $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ zu setzen, wenn x_1, x_2 die Wurzeln der Gl. (3) vorstellen. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen ist aber

$$x_1 + x_2 = -\frac{2q}{p}, \text{ wodurch } \xi = -\frac{q}{p}, \text{ oder } p\xi = -q$$

wird. Durch Substitution der Werthe von p und q aus (4) erhält man:

$$A\xi + B\eta + C + m(A'\eta + B\xi + C') = 0, \quad (5)$$

welche Gleichung sofort die Bedingung ausdrückt, welcher die Coordinaten ξ, η des Halbierungspunktes einer unter dem Winkel φ gegen die Axe der x geneigten Sehne Genüge leisten.

188. Untersuchen wir nun, ob es nicht möglich ist, dem Punkte ξ, η eine solche Lage anzuweisen, dass er jede durch ihn gezogene Sehne halbire. Zu diesem Behufe muss die Gl. (5) für jeden Werth von $m = \operatorname{tg} \varphi$ erfüllt sein, wodurch sie in die beiden folgenden:

$$A\xi + B\eta + C = 0, \quad A'\eta + B\xi + C' = 0, \quad (6)$$

zerfällt, aus welchen man für ξ und η die Werthe:

$$\xi = \frac{A'C - BC'}{B^2 - AA'}, \quad \eta = \frac{AC' - BC}{B^2 - AA'} \quad (7)$$

zieht. Diese Ausdrücke führen zu folgenden Ergebnissen:

a) Ist die Grösse $B^2 - AA'$ von Null verschieden, so giebt es einen, aber auch nur einen Punkt in der Ebene der Curve (1), welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbt. Sein Ort ist durch die Gleichungen (6) oder (7) gegeben *). Ein mit dieser Eigenschaft begabter Punkt wird **Mittelpunkt** oder **Centrum** der Curve genannt.

b) Ist aber $B^2 - AA' = 0$, und verschwinden nicht gleichzeitig beide Zähler in (7), so werden obige Werthe von ξ und η oder wenigstens einer von ihnen unendlich; in diesem Falle besitzt daher die Curve keinen Mittelpunkt. Man kann ihn in unendlicher Entfernung liegend annehmen.

c) Wenn endlich nebst dem Nenner $B^2 - AA'$ auch noch die Zähler in (7) sich auf Null reduciren, so nehmen diese Ausdrücke die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, woraus man auf die Existenz von unendlich vielen Mittelpunkten schliesst. Diess tritt dann ein, wenn die beiden Gl. (6) von einander nicht wesentlich verschieden sind; sie stellen dann eine Gerade vor, welche der geometrische Ort sämmtlicher Mittelpunkte ist.

Dieser Fall kann übrigens — ohne dass aus (1) eine der Coordinaten ganz verschwinde — nur dann Statt finden, wenn entweder 1) $A'C = BC'$ ist, wodurch wegen $AA' = B^2$ auch $AC' = BC$ wird; oder 2) wenn $C = C' = 0$ ist. In beiden Fällen ist aber der geometrische Ort der Gl. (1) keine Curve, sondern ein System zweier paralleler Geraden. In der That, multipliciren wir im ersten Falle (1) mit A und setzen sodann B^2 statt AA' und BC statt AC' , so erhält sie die Form:

$$(Ax + By)^2 + 2C(Ax + By) + AF = 0, \text{ woraus:} \\ Ax + By = -C \pm \sqrt{C^2 - AF} \quad (m)$$

folgt, welche Gleichung offenbar zwei parallele Gerade bedeutet. Im anderen Falle, wenn $C = C' = 0$, bringt man (1) auf die Form:

$$Ax + By = \pm \sqrt{-AF} \quad (n)$$

welche Gleichung wieder zu zwei parallelen Geraden gehört, wobei in beiden Fällen die Grösse unter dem Wurzelzeichen sich positiv erge-

*) Die Gleichungen (6) lassen sich immer leicht hinschreiben, wenn man beachtet, dass dieselben nichts anderes sind als die 1sten derivirten Functionen [s. 86] des Polynoms der Gl. (1), wenn man für die erste x , für die zweite y als Veränderliche betrachtet.

ben muss, widrigenfalls der (1) gar keine geometrische Bedeutung zukäme. Im 1^{sten} Falle reduciren sich nun die beiden Gl. (6) auf die eine: $A\xi + B\eta + C = 0 \dots (m')$, im 2^{ten} auf: $A\xi + B\eta = 0 \dots (n')$. Es ist aber (m') eine Gerade, welche in der Mitte der beiden Geraden (m) parallel zu denselben liegt und offenbar hat jeder Punkt derselben die Eigenschaft, jede durch ihn gelegte Verbindungslinie (Sehne) der beiden Geraden (m) zu halbiren. Dasselbe gilt von (n') in Bezug auf die Geraden (n) . Die beiden parallelen Geraden (m) oder (n) fallen übrigens in je eine einzige zusammen, wenn die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet.

Die durch die Gleichung (1) dargestellten Curven zweiter Ordnung zerfallen hiernach in zwei Klassen, von welchen die eine jene krummen Linien umfasst, welchen ein Mittelpunkt zukommt (wenn $B^2 - 4A'C \geq 0$), die andere aber jene, welche keinen Mittelpunkt haben.

189. Nimmt man den Mittelpunkt einer Curve, im Falle ein solcher existirt, als Ursprung an, so muss die Gleichung derselben nothwendig die Eigenschaft erhalten, sich nicht zu ändern, wenn man $-x, -y$ an die Stelle von x, y setzt. Denn es sei (Fig. 21) O der Ursprung und zugleich Mittelpunkt irgend einer Curve, und OM eine beliebige durch denselben gezogene Gerade, welche die Curve in M schneidet, so muss, wenn man auf der Verlängerung von MO , $OM' = OM$ macht, auch M' ein Punkt der Curve sein, wo nun sogleich erhellt, dass die Coordinaten der Punkte M, M' numerisch gleich aber entgegengesetzten Zeichens sind. Sind also x, y ein Paar Werthe der Coordinaten, welche der Gleichung der Curve Genüge leisten, so müssen auch die Werthe $-x, -y$ dieselbe identisch machen. Diese Eigenschaft wird der Gleichung offenbar nur dann zukommen, wenn sämmtliche von x und y abhängige Glieder derselben zugleich entweder von gerader oder ungerader Dimension nach x, y sind.

Hieraus folgt also, dass aus der Gl. (1) die linearen Glieder in x und y verschwinden müssen, wenn wir ohne Veränderung der Richtung der Axen den Ursprung in den Mittelpunkt verlegen, wenn ein solcher existirt. In der That setzen wir in (1) $x = x' + \xi, y = y' + \eta$, so geht diese Gleichung über in:

$$\left. \begin{aligned} Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' + 2(A\xi + B\eta + C)x' \\ + 2(A'\eta + B\xi + C')y' \end{aligned} \right\} = K$$

wenn Kürze halber:

$$K = -(A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + 2C\xi + 2C'\eta + F)$$

gesetzt wird. Ist nun der neue Ursprung Mittelpunkt der Curve, so

verwandelt sich diese Gleichung mit Rücksicht auf (6) in folgende einfachere:

$$Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' = K, \quad (8)$$

wo die Coefficienten A, A', B dieselben sind wie in (1), und der Ausdruck von K sich auf die einfachere Form:

$$K = - (C\xi + C'\eta + F) \quad (9)$$

bringen lässt, da in dem obigen Werthe von K der Theil:

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + C\xi + C'\eta = (A\xi + B\eta + C)\xi + (A'\eta + B\xi + C')\eta$$

in Folge der Gl. (7) verschwindet.

190. Kehren wir nun zur Gl. (5):

$$A\xi + B\eta + C + m(A'\eta + B\xi + C') = 0 \quad (5)$$

zurück, in welcher bekanntlich ξ, η die Coordinaten des Halbirungspunktes einer unter dem Winkel φ gegen die Abscissenaxe geneigten Sehne bedeutet und $m = \operatorname{tg} \varphi$ ist. Betrachten wir jetzt m als constant und ξ, η als veränderliche Coordinaten, d. h. denken wir uns eine Schaar paralleler Sehnen gezogen, so drückt die Gl. (5) offenbar die Beziehung aus, welche zwischen den Coordinaten der Halbirungspunkte aller dieser Sehnen stattfindet; sie ist also die Gleichung des geometrischen Ortes dieser Halbirungspunkte, welcher somit, da (5) nach ξ, η vom 1^{sten} Grade ist, eine gerade Linie ist. Hieraus folgt also, dass bei den Linien zweiter Ordnung die Halbirungspunkte eines Systemes paralleler Sehnen in einer Geraden liegen.

Eine gerade oder krumme Linie, welche eine Folge paralleler Sehnen einer Curve halbt, heisst ein Durchmesser oder Diameter der Curve.

Alle Linien zweiter Ordnung besitzen daher geradlinige Durchmesser.

Da die Gl. (5) des zu dem, unter dem Winkel φ gegen die Abscissenaxe geneigten Sehnensysteme gehörigen Durchmessers für jeden Werth von $m = \operatorname{tg} \varphi$ bestehen kann, so entspricht jedem Systeme paralleler Sehnen ein Durchmesser.

Durch Auflösung nach η erhält die Gl. (5) des Durchmessers die Form:

$$\eta = - \frac{A + Bm}{A'm + B} \xi - \frac{C + C'm}{A'm + B}. \quad (10)$$

Ist ψ der Neigungswinkel dieses Durchmessers gegen die Abscissenaxe, so hat man, wenn $m' = \operatorname{tg} \psi$, vermöge (10):

$$m' = - \frac{A + Bm}{A'm + B}. \quad (11)$$

Setzen wir in (1) $B^2 - AA' \gtrless 0$ voraus, so existirt bekanntlich ein Mittelpunkt, dessen Coordinaten sich aus den Gl. (6) ergeben, und — wie aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit der Gl. (5) eines Durchmessers sogleich erhellt — der letztgenannten Gleichung Genüge leisten. Hieraus folgt, dass bei jenen Linien zweiter Ordnung, welchen ein Mittelpunkt zukommt, alle Durchmesser sich in diesem Punkte schneiden. Umgekehrt ist jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne ein Durchmesser, weil in (6) $m = \operatorname{tg} \varphi$ willkürlich ist.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn $B^2 - AA' = 0$ ist; denn multiplicirt man Zähler und Nenner in (11) mit A' , und schreibt B^2 statt AA' , so erhält man $m' = -\frac{B}{A'}$, woraus folgt, dass in diesem Falle die Richtung des Durchmessers von der Sehnenrichtung unabhängig wird; die Gleichung des Durchmessers geht über in:

$$\eta = -\frac{B}{A'} \xi - \frac{C + C'm}{A'm + B},$$

und folglich entspricht zwar ebenfalls jedem Sehnensysteme ein bestimmter Durchmesser, aber alle Durchmesser werden unter sich parallel; ihr Durchschnittspunkt (der Mittelpunkt) liegt in unendlicher Entfernung.

Löst man die Gl. (11) nach m auf, so erhält man:

$$m = -\frac{A + Bm'}{A'm' + B},$$

welches Resultat aber aus (11) auch durch blosse Vertauschung von m mit m' hervorgeht. Denkt man sich daher parallel zu irgend einem Durchmesser (5) ein zweites Sehnensystem, so liegt der zu diesem gehörige Durchmesser parallel zu dem ersten Sehnensysteme. Wir erhalten hiedurch zwei Durchmesser, deren jeder das zu dem anderen parallel gezogene Sehnensystem halbirt. Man nennt ein Paar solcher Durchmesser conjugirte Durchmesser. Da hierbei eine von den Grössen m, m' willkürlich angenommen werden kann, so entspricht jedem Durchmesser ein conjugirter, und es gibt daher in den Linien 2^{ter} Ordnung unendlich viele Systeme conjugirter Durchmesser.

Der Winkel u endlich, unter welchem ein Durchmesser sein Sehnensystem schneidet, ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} u = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

gegeben, und im Allgemeinen von einem rechten Winkel verschieden.

191. Nichts hindert, einen Durchmesser als Abscissenaxe anzunehmen und die Axe der y den zugehörigen Sehnen parallel zu legen. Transformirt man sodann die Gl. (1) auf dieses neue Coordinatensystem, so entsprechen jedem Werthe von x , z. B. $= OP$, (Fig. 22.) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y : $PM = PM'$, woraus folgt, dass die transformirte Gleichung nach y rein quadratisch sein muss. Hiedurch ist also ein zweites Mittel gegeben, die Gl. (1) zu vereinfachen, indem dadurch die Glieder mit den ersten Potenzen von y hinausfallen. Da man jedoch hiebei im Allgemeinen auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem gerathen würde, so entsteht die Frage, ob die Linien zweiter Ordnung nicht solche Durchmesser besitzen, welche die zugehörigen Sehnen unter einem rechten Winkel schneiden.

Ein Durchmesser, welcher seine Sehnen senkrecht schneidet, heisst ein Hauptdurchmesser, und die zugehörige Richtung der Sehnen Hauptrichtung. Es ist klar, dass ein Hauptdurchmesser die Curve in zwei symmetrische Zweige theilt.

192. Bezeichnen wir, wie oben, mit m , m' die Tangenten der Winkel φ und ψ , welche ein System paralleler Chorden und der zugehörige Durchmesser mit der Axe der x einschliessen, so drückt bekanntlich die Gleichung $mm' + 1 = 0$ die Bedingung aus, dass der Durchmesser das Sehnensystem senkrecht schneide, welche Gleichung, wenn man mit Hülfe von (11) m' eliminirt, in folgende übergeht:

$$\frac{A'm + B}{A + Bm} = m. \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung kann man den Winkel φ , welcher jetzt eine Hauptrichtung bestimmt, auf mehr als eine Weise finden. Schreibt man $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ statt $m = \operatorname{tg} \varphi$, so erhält sie durch Wegschaffung der Brüche die Form:

$$(A' - A) \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0, \quad (13)$$

woraus, weil $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, und $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ ist:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2B}{A' - A} \quad (14)$$

folgt. Ordnet man jedoch die Gl. (12) nach der Grösse $m = \operatorname{tg} \varphi$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \varphi^2 - \frac{A' - A}{B} \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0, \quad (15)$$

aus welcher sich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A' - A \pm \sqrt{(A' - A)^2 + 4B^2}}{2B} \quad (16)$$

ergibt. Diese Gleichung, welche (so wie (14)) für $\operatorname{tg} \varphi$ zwei, jederzeit reelle Werthe darbietet, zeigt nun, dass die Linien 2^{ter} Ordnung im Allgemeinen zwei Hauptrichtungen und somit auch zwei Hauptdurchmesser zulassen.

Bezeichnet man mit φ_1, φ_2 die beiden aus (16) folgenden Werthe von φ , so sind $\operatorname{tg} \varphi_1, \operatorname{tg} \varphi_2$ die Wurzeln der Gl. (15); es ist somit nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = -1,$$

woraus folgt, dass die beiden Hauptdurchmesser auf einander senkrecht stehen. *

Diese Ergebnisse erleiden unter Umständen einige Modificationen, auf welche wir schon durch den Widerspruch aufmerksam werden, in welchem dieselben mit dem in §. 190 erhaltenen Resultate zu stehen scheinen, dass in dem Falle, wenn $B^2 - AA' = 0$, sämtliche Durchmesser zu einander parallel werden. Um hierüber ins Klare zu kommen, wollen wir zur Bestimmung der Hauptrichtung aus Gl. (12) noch einen anderen Weg einschlagen. Setzen wir den Nenner $A + Bm = s$, so erhalten wir statt (12) das System der beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A'm + B &= ms, & \text{oder} & & (A' - s)m + B &= 0, \\ A + Bm &= s, & & & A - s + Bm &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Durch Elimination von m erhält man zunächst:

$$(A - s)(A' - s) - B^2 = 0,$$

oder geordnet:

$$s^2 - (A + A')s - (B^2 - AA') = 0, \quad (18)$$

woraus:

$$s = \frac{A + A'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2} \quad (19)$$

folgt. Bezeichnet man diese beiden immer reellen Wurzeln der Gl. (18) mit s_1, s_2 , so erhält man durch Substitution derselben aus einer der Gl. (17) die gesuchten Werthe von m, m_1 und m_2 für die beiden Hauptrichtungen, wie wir sie schon in (16) dargestellt haben.

Es können nun offenbar nur folgende drei Fälle eintreten:

I. Die beiden Wurzeln s_1 und s_2 sind sowohl unter sich als von der Null verschieden. Bedingung hiefür ist:

$$\frac{A + A'}{2} > \frac{1}{2} \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2},$$

d. i. gehörig reducirt: $B^2 - AA' \gtrless 0$, also die Curve mit einem Mittelpunkte versehen. Mit s_1 und s_2 erhalten wir aus (17) zwei bestimmte Werthe für m , somit zwei Hauptrichtungen, welchen zwei auf einander senkrechte, im Centrum der Curve sich schneidende Hauptdurchmesser entsprechen.

II. Die beiden Wurzeln s_1 und s_2 sind gleich, aber von Null verschieden. Hiezu wird erfordert, dass in (19) das Radikal verschwinde, also:

$$A = A', \quad B = 0,$$

sei, wodurch $s_1 = s_2 = A = A'$ wird. Die Gl. (12) oder jene (17) sind in diesem Falle für jeden Werth von m erfüllt, d. h. jede beliebige Richtung ist eine Hauptrichtung, somit jede durch den (in diesem Falle wegen $B^2 - AA' = -A^2 < 0$ existirenden) Mittelpunkt gezogene Gerade ein Hauptdurchmesser. Daraus folgt nothwendig, dass alle Punkte der Curve vom Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. Denn es sei (Fig. 23) C der Mittelpunkt, AB ein beliebiger Durchmesser, welcher die Curve in A und B schneidet, also $AC = BC$, endlich M ein beliebiger Punkt der Curve. Man ziehe die Sehne AM und durch den Mittelpunkt C eine Gerade PQ senkrecht auf AM . Nun ist PQ , so wie jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade ein Hauptdurchmesser; folglich halbt PQ die Sehne AM , also ist $AD = MD$, woraus $MC = AC$ folgt. Die Gl. (1) bedeutet somit in diesem besonderen Falle, wenn die Quadrate von x und y gleiche Coefficienten haben und das Product xy fehlt, einen Kreis, was mit früheren Ergebnissen [§. 175.] vollkommen übereinstimmt.

III. Es ist eine der beiden Wurzeln, z. B. $s_1 = 0$; Bedingung hiefür ist, dass in (18) das absolute Glied verschwinde, also

$$B^2 - AA' = 0$$

sei. Für die 2^{te} Wurzel folgt aus (18): $s_2 = A + A'$.

Mit diesen Werthen von s erhalten wir nun aus (17) allerdings zwei bestimmte Hauptrichtungen:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'}, \quad m_2 = \frac{A'}{B} = \frac{B}{A};$$

allein nur der zweiten entspricht ein bestimmter Hauptdurchmesser. Setzen wir nämlich in der Gl. (10) eines beliebigen Durchmessers statt $A + Bm$ und $A'm + B$ die Werthe s und ms aus (17), so erhalten wir als Gleichung eines Hauptdurchmessers:

$$s(\xi + m\eta) + C + C'm = 0. \quad (20)$$

Diese Gleichung gehört nun offenbar einer vollkommen bestimmten Geraden — dem einen bestimmten Hauptdurchmesser —, wenn wir

darin obige Werthe $s = s_2$ und $m = m_2$ substituiren. Allein für den 2^{ten} Hauptdurchmesser erhält man aus (20) für:

$$s = s_1 = 0, \text{ und } m = m_1 = -\frac{B}{A'}:$$

$$0. (\xi + m_1 \eta) + C + C' m_1 = 0, \quad (21)$$

wo nun zwei Fälle zu unterscheiden sind.

1) Ist $C + C' m_1 = (CA' - BC') : A = 0$, wozu entweder $A'C = BC'$ oder $C = C' = 0$ erfordert wird, in welchem Falle [§. 188, c.] unendlich viele Mittelpunkte dem Orte der Gl. (1) zukommen, so ist die Gl. (21) identisch für jedes ξ und η erfüllt, d. h. jede Gerade, welche ich durch einen beliebigen Punkt senkrecht auf die durch m_1 bestimmte Sehnenrichtung ziehe, ist ein Hauptdurchmesser. Diess ist offenbar nur möglich, wenn jeder Punkt irgend einer von diesen Sehnen als Halbirungspunkt derselben angesehen werden kann, die Sehnen somit unendlich lang sind und weder auf der einen noch anderen Seite den geometrischen Ort der Gl. (1) treffen, was nur Statt finden kann, wenn dieser ein System zweier parallelen Geraden ist. Diess steht mit den Ergebnissen in §. 188, c, vollkommen im Einklange. Man hat also hier einen bestimmten Hauptdurchmesser und unendlich viele darauf senkrechte.

2) Ist aber $C + C' m_1$ von Null verschieden, in welchem Falle der Ort der Gl. (1) keinen Mittelpunkt hat, so lässt sich der Gl. (21) durch endliche Werthe von ξ und η nicht Genüge leisten. Schreiben wir (20) in der Form:

$$\eta = -\frac{1}{m} \xi - \frac{C + C' m}{ms},$$

setzen darin $m = m_1$ und lassen s immer kleiner werden, so drückt sie eine Gerade aus, welche parallel zu sich selbst immer weiter vom Ursprunge sich entfernt; für $s = s_1 = 0$ geht sie in den 2^{ten} Hauptdurchmesser über, welcher aber nun in unendliche Entfernung fällt, folglich nicht existirt. In diesem Falle, dem einzigen, haben wir daher nur einen Hauptdurchmesser, welcher mit der Axe einen Winkel ψ einschliesst, dessen trigonometrische Tangente $= m_1$, also:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'} \quad (22)$$

ist.

Anmerkung. Beide Wurzeln der Gl. (18) könnnn nicht $= 0$ sein; denn hiezu würde $A = A' = 0$ und $B = 0$ erfordert, wodurch aber die Gl. (1) auf den 1^{sten} Grad herabsinken würde.

193. Die bisherigen Untersuchungen bieten nun hinreichende Mittel dar, um die Gl. (1) durch Transformation der Coordinaten auf die möglichst einfachen Formen zurückzuführen.

Da, wie wir im vor. §. gesehen haben, wenigstens ein Hauptdurchmesser immer existirt, so können wir diesen als Axe der x annehmen; führt man diese Transformation aus, zu welchem Zwecke das Axensystem um den durch Gl. (16) bestimmten Winkel φ gedreht werden muss, so wird [§. 191] die Gl. (1) die Glieder mit den 1^{sten} Potenzen von y verlieren und somit die Form:

$$Mx^2 + Ny^2 + 2Rx + F = 0 \quad (23)$$

annehmen, in welcher somit noch sämmtliche Linien der 2^{ten} Ordnung enthalten sein müssen.

Entweder wird nun in Folge dieser 1^{sten} Transformation M , der Coefficient von x^2 , von 0 verschieden sein, oder es wird auch $M=0$.

Im 1^{sten} Falle kann man die Gl. (23) von dem Gliede mit der 1^{sten} Potenz von x befreien, indem man $x = x' - \frac{R}{M}$ setzt, d.h. den Ursprung auf der x -Axe um das Stück $R:M$ zurückschiebt, wodurch die Gl. (23) die Form erhält:

$$Mx'^2 + Ny^2 = K. \quad (I)$$

Im 2^{ten} Falle geht (23) wegen $M=0$ über in $Ny^2 + 2Rx + F = 0$, aus welcher Gleichung das constante Glied F weggeschafft werden kann, indem man $x = x' - \frac{F}{2R}$ setzt, d. h. den Ursprung auf der x -Axe um das Stück $-F:2R$ zurückschiebt, wodurch man:

$$Ny^2 + 2Rx = 0 \quad (II)$$

erhält.

Wie aus der Form der Gl. (I) erhellt, ist der Ursprung Mittelpunkt der Curve, dessen Coordinaten durch die Gl. (7) gegeben sind, und die beiden Coordinatenachsen sind Hauptdurchmesser. Diese Gleichung umfasst daher jene geometrischen Oerter der Gl. (1), welche einen Mittelpunkt, oder auch deren unendlich viele besitzen.

Aus der Form der Gl. (II) ersieht man, dass der Ursprung kein Mittelpunkt und nur die Axe der x ein Hauptdurchmesser ist; und da aus dieser Gleichung das lineare Glied $2Rx$ nicht weggeschafft werden kann, so begreift diese Gleichung jene geometrischen Oerter der Gl. (1), welchen kein Mittelpunkt zukommt.

Schreiten wir nun zur Discussion dieser Gleichungen.

194. Discussion der Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 = K. \quad I.$$

Da die von 0 verschiedene Grösse M immer positiv vorausgesetzt werden kann, so haben wir folgende Fälle zu betrachten:

1) N positiv.

$\alpha)$ K positiv. Der geometrische Ort der Gl. I ist in diesem Falle eine Curve, deren Gestalt sich leicht durch folgende Discussion ergibt. Für $y = 0$ folgt $x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$; die Curve schneidet daher die Axe der x in zwei Punkten A, A' , (Fig. 34), deren Entfernung vom Ursprunge (Mittelpunkt der Curve) $= \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$ ist. Eben so findet man für $x = 0, y = \pm \sqrt{\frac{K}{N}}$ als Ordinaten der zwei Durchschnittspunkte B, B' der Curve mit der Axe der y . Aus I. folgt ferner:

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N} \left(\frac{K}{M} - x^2 \right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N}{M} \left(\frac{K}{N} - y^2 \right)},$$

woraus man ersieht, dass y imaginär wird für Werthe von x , welche numerisch $> \sqrt{\frac{K}{M}}$ sind; eben so entspricht jedem Werthe von $y > \sqrt{\frac{K}{N}}$ ein imaginärer Werth von x ; es liegt daher kein Punkt der Curve ausserhalb des durch die vier Geraden gebildeten Rechteckes, welche durch die Punkte A, A', B, B' parallel zu den zwei coordinirten Axen gezogen werden. Hingegen entsprechen jedem positiven oder negativen x , dessen Zahlenwerth die Grösse $\sqrt{\frac{K}{M}}$ nicht überschreitet, zwei reelle, gleiche und entgegengesetzte Werthe von y ; unsere Curve ist daher eine geschlossene, nach allen Richtungen begrenzte. Ihren grössten Werth erreicht die Ordinate y für $x = 0$, in den Punkten B und B' ; sie nimmt für (positiv und negativ) wachsende x fort und fort ab, und wird $= 0$, für $x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Diess genügt, um sich eine deutliche Vorstellung dieser Curve, welche Ellipse genannt wird, bilden zu können.

Die von der Curve begrenzten Stücke AA' und BB' der beiden Hauptdurchmesser heissen die Axen der Ellipse, die eine die grosse, die andere die kleine. Setzen wir die Hälften derselben $OA = a$, $OB = b$, so ist $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{K}{N}}$, durch deren Einführung die Gl. I. in folgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad (24)$$

übergeht. Die Endpunkte der beiden Axen: A, A', B, B' heissen die Scheitel der Ellipse.

In dem besonderen Falle, dass $M = N$ sich ergibt, wird auch $a = b$ und die Gl. I und (24) gehen über in:

$$x^2 + y^2 = \frac{K}{M}, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

welche einem Kreise vom Halbmesser $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$ angehören. Der Kreis ist daher als ein specieller Fall der Ellipse zu betrachten.

β) K negativ. Da die Summe zweier wesentlich positiver Grössen Mx^2 und Ny^2 nicht negativ sein kann, so kommt in diesem Falle der Gl. I. keine geometrische Bedeutung zu. (Imaginäre Curve).

γ) $K = 0$. Die Gl. I. reducirt sich in diesem Falle auf:

$$Mx^2 + Ny^2 = 0$$

und wird nur durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ erfüllt. Diese Gleichung, somit auch jene (1) bedeutet daher in diesem Falle einen Punkt, den jetzigen Ursprung, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche Axensystem durch die Gleichungen (7) gegeben sind.

2) N negativ.

Setzen wir, um das Zeichen des Coefficienten von y^2 ersichtlich zu machen, $N = -N'$, so haben wir es mit der Gleichung:

$$Mx^2 - N'y^2 = K \quad (25)$$

zu thun, in welcher N' eine wesentlich positive Grösse.

α) K positiv. Aus (25) findet man:

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N'} \left(x^2 - \frac{K}{M} \right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N'}{M} \left(y^2 + \frac{K}{N'} \right)}.$$

Da für $x = 0$, y imaginär ausfällt, so wird die Axe der y von der Curve nicht geschnitten, wohl aber die Abscissenaxe in zwei Punkten A , A' (Fig. 38), für deren Abscissen OA und OA' man die Werthe $\pm \sqrt{\frac{K}{M}}$ findet. Weil ferner für jeden positiven oder negativen Werth von x , welcher numerisch $< \sqrt{\frac{K}{M}}$ ist, y imaginär wird, so liegt kein Punkt der Curve zwischen den zwei Geraden, welche durch die zwei Punkte A , A' senkrecht auf die x -Axe gezogen werden. Hingegen entsprechen jedem positiven oder negativen Werthe von x , welcher absolut $> \sqrt{\frac{K}{M}}$ ist, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y , welche mit x fort und fort bis ins Unendliche zunehmen. Die durch die Gl. (25) dargestellte Curve besteht daher aus zwei getrennten, auf beiden Seiten der Ordinatenaxe liegenden Aesten, deren jeder wie-

der symmetrisch zu beiden Seiten der x -Axe sich ins Unendliche erstreckt.

Diese Curve führt den Namen Hyperbel. Sie wird nur von einem der beiden Hauptdurchmesser in den Punkten A, A' getroffen, welche die Scheitel der Hyperbel genannt werden. Das zwischen beiden Scheiteln liegende Stück AA' des einen Hauptdurchmessers heisst die erste Axe (auch Queraxe, reelle Axe); bezeichnet man die Hälfte $OA = OA'$ derselben mit a , so ist $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$; setzt man überdiess noch $b = \sqrt{\frac{K}{N'}}$, so nimmt die Gl. (25) der Hyperbel die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, \quad (26)$$

welche Gleichungen, wie man sieht, aus jenen der Ellipse (24), hervorgehen, wenn man dort $-b^2$ statt b^2 oder $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Da aus (26) für $x = 0$, $y = \pm b\sqrt{-1}$ als Ordinate des (imaginären) Durchschnittspunktes der Hyperbel mit der Axe der y sich ergibt, so nennt man der Analogie mit der Ellipse zufolge bei der Hyperbel die Grösse $2b$ die zweite oder imaginäre Axe, deren halbe Länge $b = OB = OB'$ zu beiden Seiten des Mittelpunktes auf dem zweiten Hauptdurchmesser aufgetragen wird.

Für $M = N' = -N$ wird $a = b$ und die Hyperbel heisst dann eine gleichseitige.

β) K negativ. Durch Aenderung sämmtlicher Zeichen geht in diesem Falle die Gl. (25) in folgende über:

$$N'y^2 - Mx^2 = K,$$

welche von derselben Form ist, wie (25) und folglich wieder eine Hyperbel bedeutet, mit dem Unterschiede, dass im jetzigen Falle die erste Axe derselben auf der Axe der y liegt.

γ) $K = 0$. Hiefür folgt aus (25): $y = \pm x \sqrt{\frac{N'}{M}}$, eine Gleichung, deren geometrischer Ort ein System zweier sich im Ursprunge schneidenden Geraden ist.

$$3) N = 0.$$

In diesem Falle folgt aus (I):

$$x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}},$$

eine Gleichung, deren geometrischer Ort ein System zweier paralleler Geraden ist, welche reell oder imaginär sind, je nachdem

K positiv oder negativ ist, und sich zu einer einzigen reellen Geraden vereinigen, wenn $K = 0$ sich ergibt.

195. Discussion der Gleichung:

$$Ny^2 + 2Rx = 0 \quad (\text{II})$$

Diese Gleichung bietet zu keiner Unterscheidung Veranlassung, da N immer positiv angenommen werden kann und das Zeichen des anderen Gliedes von keinem Einflusse ist; denn wäre dasselbe negativ, so dürfte man nur $-x$ mit $+x$, d. i. die beiden Halbaxen der x mit einander vertauschen, um die obige Form wieder zu erhalten. Setzt man $-\frac{2R}{N} = p$, so erhält obige Gleichung die einfache Form:

$$y^2 = px, \quad (27)$$

woraus $y = \pm \sqrt{px}$ folgt. Diese Gleichung liefert nur für solche Werthe von x , welche mit p gleiches Zeichen haben, reelle Werthe von y , daher die durch dieselbe dargestellte Curve nur auf einer Seite der y -Axe liegt. Für $x = 0$ wird $y = 0$, die Curve geht also durch den Ursprung. Für jeden mit p gleiches Zeichen habenden Werth von x folgen aus (27) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y , welche mit x bis ins Unendliche zunehmen. Die Curve (Fig. 27) besteht daher aus zwei vom Ursprunge aus nach der positiven oder negativen Seite der x -Axe (jenachdem p positiv oder negativ) sich erstreckenden, gegen diese Axe symmetrisch liegenden und sich von ihr immer mehr und mehr entfernenden unendlichen Aesten, und wird Parabel genannt.

Der Punkt A , in welchem die Parabel von ihrem Hauptdurchmesser geschnitten wird, heisst der Scheitel, der Hauptdurchmesser AX die Axe, die Constante p , welche in der auf den Hauptdurchmesser als Abscissenaxe und den Scheitel als Ursprung sich beziehenden Gleichung (27) als Coefficient von x erscheint, der Parameter der Parabel.

Fasst man die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphe zusammen, so gelangt man zu dem Schlusse, dass aus einer Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen nur drei verschiedene krumme Linien hervorgehen: die Ellipse, Hyperbel und Parabel, welche somit die einzigen krummen Linien zweiter Ordnung sind, wobei der Kreis als specieller Fall der Ellipse mit eingeschlossen ist.

Uebrigens kann die Gleichung auch jeder geometrischen Bedeutung ermangeln, sie kann einen Punkt, eine gerade Linie, zwei parallele Gerade, oder endlich zwei sich durchschneidende gerade Linien zum geometrischen Orte haben.

Die obigen Curven heissen bekanntlich auch Kegelschnittslinien, weil sie durch den Durchschnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen.

196. Die Beantwortung der Frage, welche von den drei Curven der Ort einer gegebenen Gleichung des 2^{ten} Grades mit bestimmten Coefficienten sei, lässt sich auf sehr einfache Merkmale zurückführen.

Soll die Gl. (1) einer Parabel angehören, so muss $B^2 - AA' = 0$ sein, weil einerseits nur unter dieser Bedingung der Ort der Gl. (1) keinen Mittelpunkt zulässt [§. 188, b], anderseits die Parabel die einzige Curve 2^{ter} Ordnung ist, welche keinen Mittelpunkt besitzt. — Ist ausserdem noch $A'C = BC'$, oder $C = C' = 0$, so bedeutet die Gl. (1) zwei parallele, oder eine einzige Gerade [§. 188, c], daher diese Oerter auch als Varietäten der Parabel betrachtet werden, in welche diese Curve auch geometrisch leicht übergeführt werden kann.

Soll aber Gl. (1) einer Ellipse oder Hyperbel angehören, so muss $B^2 - AA'$ von 0 verschieden sein, weil nur unter dieser Bedingung ein einziger Mittelpunkt existirt. Beide Curven unterscheiden sich dadurch, dass erstere zwei reelle Axen, letztere nur eine solche besitzt; wir wollen daher diese Axen durch die Coefficienten der Gl. (1) unmittelbar ausdrücken.

Diese Gleichung nimmt bekanntlich [§. 189], wenn wir den Ursprung in den Mittelpunkt versetzen, die Form an:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy = K,$$

wo der Werth von K mittelst der Gl. (9) und (7) berechnet werden kann.

Verbindet man diese Gl. mit der Gleichung $y = mx$ einer durch den Ursprung (Mittelpunkt) gezogenen Geraden, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte die Ausdrücke:

$$x^2 = \frac{K}{A + A'm^2 + 2Bm}, \quad y^2 = \frac{m^2 K}{A + A'm^2 + 2Bm},$$

und für deren Entfernung vom Mittelpunkte:

$$R^2 = x^2 + y^2 = \frac{K(m^2 + 1)}{A + A'm^2 + 2Bm}. \quad (a)$$

Offenbar wird nun R zu einer der Halbachsen, wenn wir die Gerade $y = mx$ mit einem der Hauptdurchmesser zusammenfallen lassen, also die Grösse m , von welcher die Richtung von R abhängt, so bestimmen, dass sie den Gl. (17):

$$A'm + B = ms, \quad A + Bm = s$$

Genüge leiste. Multiplicirt man aber die 1^{te} dieser Gleichungen mit m , und addirt sie zur zweiten, so erhält man:

$$A + A'm^2 + 2Bm = s(m^2 + 1),$$

womit aus (a)

$$R = \sqrt{\frac{K}{s}} \quad (28)$$

folgt. Diese Gleichung liefert sofort die Werthe der zwei Halbaxen, wenn man die aus (17) durch Elimination von m sich ergebenden zwei Werthe der Hilfsgrösse s :

$$s = \frac{1}{2} (A + A') \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2}$$

substituiert; und zwar, wie man sieht, in reeller oder imaginärer Form, je nachdem der Quotient $K : s$ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt nun sogleich, dass für die Ellipse beide Werthe von s mit gleichen, für die Hyperbel mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sein müssen; da ferner der dem oberen Zeichen entsprechende Werth von s nothwendig positiv ist, so muss für die Ellipse:

$$\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2} < A + A', \text{ d. i. } B^2 - AA' < 0$$

oder negativ, für die Hyperbel aber $B^2 - AA' > 0$ oder positiv sein.

Die Ellipse wird übrigens imaginär, wenn K negativ ist, weil dann beide Werthe von R imaginär ausfallen; sie degenerirt in einen Kreis, wenn beide Werthe von s gleich, also $A = A'$ und $B = 0$ ist; endlich in einen Punkt, wenn $K = 0$. Kreis und Punkt sind daher Varietäten der Ellipse.

Ist $B^2 = AA' > 0$, so ist, K mag positiv oder negativ sein, der Ort der Gl. (1) eine Hyperbel, welche jedoch für $K = 0$ in ein System zweier sich schneidenden Geraden degenerirt.

Wir werden das Binom $B^2 - AA'$ das charakteristische Binom einer Gleichung des 2^{ten} Grades nennen.

197. Die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel nehmen eine bemerkenswerthe Form an, wenn man dieselben auf einen Scheitel als Ursprung bezieht, und den durch diesen Scheitel gehenden Durchmesser als Abscissenaxe annimmt, wie diess bei der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$ der Fall ist.

Für die Ellipse hatten wir als Mittelpunktsgleichung:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

legen wir nun den Ursprung in den linken Scheitel A (Fig. 25), so haben wir in dieser Gleichung $x - a$ statt x zu setzen und erhalten dadurch als Scheitelgleichung der Ellipse:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (29)$$

Für die Hyperbel versetzen wir den Ursprung in den rechten Scheitel A (Fig. 26), zu welchem Zwecke wir in der Mittelpunkts Gleichung derselben: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, $x + a$ an die Stelle von x treten lassen, und finden als Scheitelgleichung der Hyperbel:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2. \quad (30)$$

Setzt man $\frac{2b^2}{a} = p$, so nehmen beide Gleichungen die Form an:

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a}x^2, \quad (31)$$

wo das obere Zeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel entspricht.

Lässt man in dieser Gleichung, während p unverändert bleibt, a unendlich gross werden (wodurch, wegen $b = \sqrt{\frac{ap}{2}}$, auch b unendlich zunimmt), so verwandelt sich dieselbe in $y^2 = px$, d. i. in die Scheitelgleichung der Parabel, woraus folgt, dass die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden kann, deren grosse, beziehungsweise reelle Axe unendlich gross geworden ist.

Wird noch $\mp \frac{b^2}{a^2} = \mp \frac{p}{2a} = q$ gesetzt, so sieht man, dass alle drei Curven durch eine und dieselbe Gleichung:

$$y^2 = px + qx^2 \quad (32)$$

dargestellt werden, und dass diese Gleichung einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel angehört, je nachdem $q = 0$, negativ oder positiv ist.

Die Grösse $p = \frac{2b^2}{a}$ führt auch in der Ellipse und Hyperbel, der Analogie mit der Parabel gemäss, den Namen Parameter; er ist die dritte geometrische Proportionale zu $2a$ und $2b$, da:

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \cdot 2b}{2a}.$$

Endlich zieht man aus der Gl. (31) der Ellipse und Hyperbel noch den Schluss, dass diese beiden Curven in der Nähe ihres Scheitels mit einer Parabel von gleichem Parameter p um so mehr zusammenfallen, je grösser a ist, d. i. je gestreckter sie sind, indem für kleine Werthe von x das Glied $\frac{px^2}{2a}$ gegen px um so unmerklicher wird, je grösser a ist.

198. Eine krumme Linie der zweiten Ordnung kann bekanntlich von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

Hieraus folgt, dass man sich eine solche Curve durch den Durchschnitt einer beweglichen Geraden mit einem Kreise entstanden denken kann, dessen Halbmesser sich stetig ändert. Versuchen wir, auf Grund dieser Erzeugungsart der Linien zweiter Ordnung, diese analytisch auszudrücken.

Denken wir uns zu diesem Zwecke die Curve (1) construiert, und aus einem beliebigen Punkte α , β als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser R ,

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2 \quad (m)$$

beschrieben; dieser wird die Curve im allgemeinen in vier Punkten schneiden, von welchen jedoch nur jene zwei in Betracht kommen, durch welche wir die schneidende Gerade

$$y = ax + c \quad (n)$$

legen. Es ist klar, dass jedem mit einem bestimmten Halbmesser beschriebenen Kreise eine bestimmte Lage der beweglichen Geraden entspricht, woraus folgt, dass a und c Funktionen dieses Halbmessers R sein müssen.

Da die Coordinaten α , β des Kreismittelpunktes willkürlich sind, so wollen wir die Lage dieses Punktes so annehmen, (dass diess möglich, wird aus dem Folgenden von selbst hervorgehen), dass die bewegliche Gerade immer zu sich selbst parallel bleibe, wodurch einerseits der Punkt α , β eine gegen die Curve vollkommen bestimmte Lage erhält, anderseits in der Gl. der Geraden (n) bloss c veränderlich und von R abhängig wird. Setzen wir also $c = \psi(R)$, so wird die Gleichung der Geraden: $y = ax + \psi(R)$, und wenn wir aus dieser Gleichung und jener (m) des Kreises R eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung $y - ax = \psi(\sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2})$ oder:

$$\varphi(y - ax) = \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2} \quad (p)$$

zwischen x und y , welche offenbar den Durchschnittspunkten aller aus α , β beschriebenen Kreise mit der beweglichen Geraden angehört.

Zur Kenntniss der Form der Funktion φ führt die Bedingung, dass der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte eine Linie der 2^{ten} Ordnung, folglich die Gl. (p) algebraisch vom 2^{ten} Grade sein muss, woraus folgt, dass φ nur eine algebraische lineare Funktion von $y - ax$ sein kann, und somit die Form:

$$\varphi(y - ax) = m(y - ax) + n$$

haben muss, wo m und n zwei willkürliche Constanten sind. Führen wir statt derselben zwei andere Constanten b , k ein, welche mit m und n durch die Gleichungen:

$$m = \frac{k}{\sqrt{1+a^2}}, n = -mb$$

verbunden sind, so verwandelt sich (p) in

$$k \cdot \frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{(y-\beta)^2 + (x-a)^2}. \quad (33)$$

Diess ist eine Gleichung vom 2^{ten} Grade mit 5 willkürlichen Constanten, folglich die allgemeinste Gleichung des 2^{ten} Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen; denn auch die Gl. (1) enthält nur fünf willkürliche Constanten, wie sogleich erhellt, wenn man die ganze Gleichung durch einen der Coefficienten, etwa durch F , dividirt.

Hieraus geht nun einerseits hervor, dass sämmtliche Linien der zweiten Ordnung auf die angenommene Weise wirklich erzeugt werden können; anderseits spricht sich durch die Form der Gl. (33) eine merkwürdige Eigenschaft dieser Linien aus. Setzt man nämlich:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = d, \sqrt{(y-\beta)^2 + (x-a)^2} = r,$$

so folgt aus (33):

$$kd = r, \text{ d. i. } r:d = k:1;$$

nun ist r die Entfernung des Punktes x, y der Curve vom festen Punkte a, β ; d der senkrechte Abstand desselben Punktes x, y der Curve von einer festen Geraden, deren Gleichung $y = ax + b$; es folgt demnach aus obiger Proportion der Satz:

Die Linien der zweiten Ordnung haben die Eigenschaft, dass die Entfernung eines jeden Punktes derselben von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem constanten Verhältnisse $k:1$ stehen.

Man nennt die feste Gerade Richtlinie (Directrix), den festen Punkt, den Brennpunkt der Curve; die Entfernung r eines beliebigen Punktes M der Curve vom Brennpunkte heisst der Radiusvector oder Leitstrahl dieses Punktes.

Entwickelt man die Gl. (33) und bringt sie auf die Form der Gl. (1), so findet man das charakteristische Binom:

$$B^2 - AA' = 4(k^2 - 1)(a^2 + 1)^2,$$

ein Ausdruck, dessen Zeichen bloss von jenem des Faktors $k^2 - 1$ abhängt; hieraus folgt, dass die Gl. (33) einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel angehört, je nachdem die Verhältnisszahl $k < 1, > 1$ oder $= 1$ ist.

Die Gl. (33) gestattet eine sehr einfache Construction. Sind (Fig. 24) OX, OY die Coordinatenaxen, so construiren man zunächst die Richtlinie UU' ($y = ax + b$) und den Brennpunkt $F, (a, \beta)$. Durch

F ziehe man DV senkrecht auf UU' , theile den Abstand DF des Brennpunktes von der Richtlinie im Punkte A so, dass $AF:AD = k:1$, so ist A ein Punkt der Curve. Um noch andere Punkte zu erhalten, ziehe man durch einen beliebigen Punkt a der DV die Gerade zz' senkrecht auf DV , suche zu 1, k und $Da = d$ die 4^{te} geom. Proportionale $= r$ und beschreibe mit r als Halbmesser einen Kreis, welcher die zz' in zwei Punkten M, M' der Curve schneidet.

Aus der Symmetrie der Ellipse und Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt folgt übrigens, dass diese Curven zwei Richtlinien und zwei Brennpunkte besitzen, welche zu beiden Seiten des Mittelpunktes symmetrisch liegen.

199. Die Gl. (33) wird einfacher, wenn man eine Richtlinie UU' zur Ordinatenaxe und die durch den Brennpunkt senkrecht darauf gezogene Gerade DV zur Abscissenaxe nimmt, wodurch offenbar $b = \beta = 0$ und $a = \infty$ wird; hiedurch verwandelt sich (33), wenn man sogleich quadriert, in folgende:

$$k^2 x^2 = y^2 + (x - a)^2, \quad (34)$$

wo a der Abstand des Brennpunktes von der Richtlinie.

Man kann diese Gleichung dazu benützen, um über die Lage der Richtlinien und Brennpunkte Aufschluss zu erhalten. Da nämlich in (34) die 1^{te} Potenz von y fehlt, so ist die Abscissenaxe ein Hauptdurchmesser; die Richtlinien stehen demnach senkrecht auf einem Hauptdurchmesser der Curve, in welchem zugleich die Brennpunkte liegen. Dieser Hauptdurchmesser ist in der Parabel selbstverständlich die Axe derselben; in der Hyperbel aber deren erste Axe, weil derselbe von der Curve in zwei Punkten, den Scheiteln, geschnitten wird, für welche man aus (34), $y = 0$ setzend, die reellen Abscissenwerthe:

$$x_1 = \frac{a}{1+k} \text{ und } x_2 = \frac{a}{1-k}$$

findet. Was die Ellipse betrifft, so ist $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{ak}{1-k^2}$ die Länge der einen Halbaxe, welche auf dem die Brennpunkte enthaltenden Hauptdurchmesser liegt; ferner ist $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{a}{1-k^2}$ die Abscisse des Mittelpunktes, welche statt x in (34) substituirt, für die andere Halbaxe den Werth $\frac{ak}{\sqrt{1-k^2}}$ darbietet; dieser ist aber, weil $1-k^2 < 1$, offenbar $< \frac{ak}{1-k^2}$. Die Brennpunkte liegen daher auf der grossen Axe der Ellipse.

Für $x = 0$, folgt aus (34): $y = \sqrt{-a}$, zum Beweise, dass die Richtlinien von der Curve nicht geschnitten werden; sie liegen also bei der Ellipse ausserhalb derselben, bei der Hyperbel zwischen den Scheiteln und zwar je eine Richtlinie mit dem zugehörigen Brennpunkte auf jeder Seite des Mittelpunktes.

200. Verlegen wir den Ursprung in den einen Scheitel A und setzen zu diesem Zwecke in (34) $x + x_1 = x + \frac{a}{1+k}$ statt x , so erhält man als Scheitelgleichung der Curven 2^{ter} Ordnung:

$$y^2 = 2akx + (k^2 - 1)x^2, \quad (35)$$

welche genau dieselbe Form hat, wie die Gleichungen (29) bis (32) [S. 197], und sich, wie wir im vor. §. gesehen haben, auf dasselbe Coordinatensystem bezieht. Diese Gleichungen sind daher unmittelbar mit einander vergleichbar und man hat:

$$ak = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}, \quad 1 - k^2 = \pm \frac{b^2}{a^2},$$

wo p der Parameter ist, und das obere Zeichen (so wie im folgenden immer) auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel sich bezieht. Hieraus findet man:

für die Ellipse, Kürze halber $\sqrt{a^2 - b^2} = e$ setzend:

$$a = \frac{b^2}{e}, \quad k = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad a = \frac{ak}{1-k^2}, \quad b = \frac{ak}{\sqrt{1-k^2}};$$

für die Hyperbel, Kürze halber $\sqrt{a^2 + b^2} = e$ setzend:

$$a = \frac{b^2}{e}, \quad k = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad a = \frac{ak}{k^2-1}, \quad b = \frac{ak}{\sqrt{k^2-1}}.$$

1) Sowohl für die Ellipse als Hyperbel (Fig. 25 und 26) hat man $AF = k \cdot AD = k(a - AF)$, somit $AF = \frac{ak}{1+k}$. Setzt man diesen Werth für x in (35), so kommt $y = ak = \frac{p}{2}$; die bei beiden Curven unter dem Namen Parameter eingeführte Grösse $p = \frac{2b^2}{a}$ ist daher der im Brennpunkte errichteten Doppelordinate EE' gleich.

2) Man hat ferner $CF = AC \mp AF = a \mp AF$; aber $AF = \frac{ak}{1+k} = \frac{b^2}{a+e} = \frac{\pm(a^2 - e^2)}{a+e} = \pm(a - e)$, somit $CF = e$. Die oben eingeführte Grösse $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$ ist daher die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte und heisst Excentri-

cität. Sie ist, wie man sieht, in der Ellipse immer kleiner, in der Hyperbel grösser als a , die halbe grosse oder beziehungsweise erste Axe. In Folge der Relation $e^2 = a^2 \mp b^2$ bilden die beiden Halbaxen und die Excentricität ein rechtwinkliges Dreieck, so dass jede dieser Grössen leicht construirt werden kann, wenn die beiden anderen gegeben sind.

3) Es ist $CD = CF \pm DF = e \pm a = e \pm \frac{b^2}{e} = \frac{a^2}{e}$; der Abstand der Richtlinie vom Centrum ist daher in beiden Curven die 3^{te} geometrische Proportionale zu e und a .

4) Sei M ein beliebiger Punkt der Ellipse oder Hyperbel, $CP = x$ dessen Abscisse, vom Mittelpunkte C aus gezählt, $FM = r$, $F'M' = r'$ seine Radienvektoren, so ist $FM = k$, PD , $F'M = k$, PD' ; d. i.:

$$r = k(x \pm CD), r' = k(CD \mp x).$$

Setzt man für k und CD die Werthe $\frac{e}{a}$ und $\frac{a^2}{e}$, so kommt:

$$\text{für die Ellipse: } r = a + \frac{e}{a}x, r' = a - \frac{e}{a}x; \quad (36)$$

$$\text{für die Hyperbel: } r = \frac{e}{a}x - a, r' = \frac{e}{a}x + a; \quad (37)$$

Gleichungen, durch welche die Leitstrahlen eines Punktes der Curve durch die vom Mittelpunkte gezählte Abscisse desselben rational ausgedrückt werden.

5) Durch Addition der Gl. (36) folgt $r + r' = 2a$; d. h. die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist constant und der grossen Axe gleich.

Vermöge dieser Haupteigenschaft ist daher die Ellipse der geometrische Ort der Scheitelpunkte sämtlicher Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundlinie $= 2c$ so construirt werden, dass die Summe der beiden anderen Seiten eine constante Grösse $= 2a$ ist.

6) Durch Subtraktion der Gl. (37) erhält man $r' - r = 2a$; d. h. die Differenz der Leitstrahlen eines beliebigen Punktes der Hyperbel ist constant und der ersten Axe gleich.

In Folge dieser Grundeigenschaft ist daher die Hyperbel der geometrische Ort der Scheitelpunkte sämtlicher Dreiecke, welche über einer gegebenen Grundlinie $= 2e$ so construirt werden, dass die Differenz der beiden anderen Seiten eine constante Grösse $= 2a$ ist.

Es ist sehr leicht, aus diesen beiden Haupteigenschaften die Gleichungen der beiden Curven abzuleiten.

7) Die Grösse $k = \frac{e}{a}$ ist, wie man sieht, nichts anderes, als das Verhältniss der Excentricität e zur halben grossen oder ersten Axe, und der Ausdruck der Excentricität selbst, wenn $a = 1$ angenommen wird; sie mag die numerische Excentricität heissen, im Gegensatze zur linearen e . Es ist $b^2 = \pm (a^2 - e^2) = \pm a^2 (1 - k^2)$; führt man diesen Werth von b^2 in die Mittelpunktsgleichungen (24) und (26) der Ellipse und Hyperbel ein, in die erstere mit dem oberen, in die letztere mit dem unteren Zeichen, so kommt:

$$y^2 = (1 - k^2) (a^2 - x^2) \quad (38)$$

als Mittelpunktsgleichung der Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $k < 1$ oder > 1 ist.

8) Für die Parabel folgt aus (35) wegen $k=1$, die Gl. $y^2=2ax$, welche mit Gl. (32), wo $q = 0$ zu setzen ist, verglichen, die Relation $p = 2a$ darbietet. Der Parameter p der Parabel ist daher gleich dem doppelten Abstände des Brennpunktes von der Richtlinie, oder auch dem 4fachen Abstände des Brennpunktes vom Scheitel, weil, wegen $k = 1$, $AF = AD = \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} p$ ist. (Fig. 27).

Setzt man in $y^2 = 2ax$, $x = AF = \frac{1}{2} a$, so kommt:

$$y = \pm \frac{1}{2} p,$$

woraus folgt, dass auch in der Parabel der Parameter gleich ist der im Brennpunkte errichteten Doppelordinate EE' .

Endlich hat man für den Leitstrahl $FM = r$ irgend eines Punktes M der Parabel: $FM = PD = AD + AP$, d. i.:

$$r = \frac{1}{4} p + x. \quad (39)$$

Die Parabel ist der geometrische Ort sämtlicher Punkte, welche von einer festen Geraden, der Richtlinie, und einem festen Punkte, dem Brennpunkte, gleich weit entfernt sind, mittelst welcher Eigenschaft sich die Gleichung der Curve sehr leicht ableiten lässt.

FÜNFTES KAPITEL.

UEBER EINIGE DER VORZUEGLICHSTEN EIGENSCHAFTEN DER LINIEN
ZWEITER ORDNUNG.

I. Die Ellipse.

201. Zur Entwicklung der Eigenschaften dieser Curve werden wir uns im Folgenden ihrer Mittelpunktsleichung:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

bedienen, wo a und b die halbe grosse und kleine Axe bedeuten, und auf ersterer die Abscissen gezählt sind.

Bezeichnet man die lineare Excentricität, d. i. den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte, $CF = CF'$ (Fig. 25), mit e , das Verhältniss derselben zur grossen Axe, die numerische Excentricität mit ε , so ist bekanntlich:

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad b^2 = a^2 - e^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2),$$

und man hat für die Leitstrahlen $FM = r$, $F'M = r'$ eines Ellipsenpunktes M , dessen Abscisse $CP = x$, die Ausdrücke:

$$r = a - \frac{e}{a} x, \quad r' = a + \frac{e}{a} x,$$

deren Summe $= 2a$ d. i. der grossen Axe gleich ist. Auf diese Eigenschaft gründet sich das bekannte Verfahren, die Ellipse durch Punkte zu beschreiben.

Schreibt man die Gl. (1) in der Form $a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$, oder:

$$\frac{y^2}{(a - x)(a + x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

und beachtet, dass $a - x = A'P$ und $a + x = AP$ die Segmente sind, in welche die grosse Axe durch die Ordinate y getheilt wird, so spricht selbe den Satz aus: das Quadrat der Ordinate eines Punktes der Ellipse steht zu dem Rechtecke aus den Abständen des Fusspunktes derselben von den Endpunkten der grossen Axe in einem constanten Verhältnisse $= b^2 : a^2$.

Von den beiden Kreisen, welche über der grossen und kleinen Axe der Ellipse als Durchmesser beschrieben werden können, wollen wir den ersteren den umschriebenen, letzteren den eingeschriebenen Kreis nennen. Sind (Fig. 28) $y = MP$, $y' = M'P$ die zu einer beliebigen Abscisse $OP = x$ gehörigen Ordinaten der Ellipse und des

umschriebenen Kreises, so ist $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$, somit $y:y' = b:a$; d. h. die zu derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des umschriebenen Kreises stehen in dem constanten Verhältnisse $= b:a$.

Eben so findet man, dass die zu gleichen Ordinaten gehörigen Abscissen der Ellipse und des eingeschriebenen Kreises in dem constanten Verhältnisse $a:b$ stehen.

Hieraus folgt, dass man Punkte der Ellipse erhält, wenn man die Ordinaten des umschriebenen Kreises in dem Verhältnisse $a:b$ verkürzt, oder die Abscissen des eingeschriebenen in dem Verhältnisse $b:a$ verlängert, worauf sich folgende Construction der Ellipse gründet. Zieht man zu einem beliebigen Punkte M' des umschriebenen Kreises den Halbmesser OM' , welcher den eingeschriebenen Kreis im Punkte N schneidet, und durch diesen Punkt eine Parallele zur grossen Axe, so schneidet diese die Ordinate des Punktes M' in einem Punkte M der Ellipse.

202. Aufgabe. Eine gerade Linie DE (Fig. 28) von gegebener Länge bewege sich so, dass ihre Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels XOY fortrücken; man suche die Gl. der Curve, welche ein fester Punkt M der Geraden beschreibt.

Nimmt man die Schenkel des rechten Winkels als Axen der x und y , setzt die constanten Entfernungen $DM = a$, $EM = b$, ferner $OP = MG = x$, $MP = y$, so ist für jede Lage der Geraden DE :

$$MP^2 : ME^2 = GD^2 : DM^2 \text{ d. i. } y^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : a^2, \text{ somit:}$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Der Punkt M beschreibt daher eine Ellipse, deren Halbaxen a und b sind. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass auch von irgend einem Punkte in der Verlängerung der DE eine Ellipse beschrieben wird.

Hierauf gründet sich folgendes Verfahren, die Ellipse durch Punkte zu construiren. Aus einem, in einer der beiden Axen, z. B. BB' gewählten Punkte D , beschreibe man mit einem Halbmesser $DE = a + b$ einen Kreis, welchen die andere Axe in zwei Punkten E, E' schneidet; zieht man DE und DE' , und macht $DM = DM_1 = a$, so sind M, M_1 Punkte der Ellipse.

Auch ist hiedurch ein Mittel geboten, die Ellipse durch einen stetigen Zug zu beschreiben. Lassen wir ein Lineal sich so bewegen, dass zwei feste Punkte D und E desselben auf den Schenkeln eines

rechten Winkels fortgleiten, so beschreibt irgend ein in der DE liegender fester Punkt des Lineals, in welchem ein schreibender Stift angebracht ist, eine Ellipse (Ellipsograph).

VON DER TANGENTE AN DER ELLIPSE.

203. Verbinden wir die Gl. einer Geraden:

$$y = mx + n \quad (1)$$

mit der Gl. der Ellipse: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, so erhalten wir durch Elimination von y die Gleichung:

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

aus welcher für die Abscissen der Durchschnittspunkte die Werthe:

$$x = \frac{-a(amn \pm b\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2})}{a^2m^2 + b^2}$$

folgen. Die Ellipse wird daher von der Geraden in zwei Punkten oder gar nicht geschnitten, je nachdem $a^2m^2 + b^2 - n^2 >$ oder < 0 ist. Die Sekante wird zur Tangente, wenn die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen, wozu erfordert wird, dass in obigem Ausdrücke von x das Radikal verschwinde.

Es ist demnach:

$$a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0 \quad (2)$$

die Bedingungsgleichung für die Berührung der Geraden (1) und der Ellipse. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir als Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}.$$

Bestimmt man aber aus diesen Gleichungen m und n , so erhält man

$$m = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}, \quad n = \frac{b^2}{\eta},$$

als diejenigen Werthe, welche die Constanten m und n haben müssen, damit die Gerade (1) die Ellipse in einem gegebenen Punkte ξ, η berühre. Durch Substitution dieser Werthe in (1) erhält man:

$$y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta},$$

oder, wenn man von dieser Gleichung jene: $\eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta} \cdot \xi + \frac{b^2}{\eta}$ abzieht, welche ausdrückt, dass ξ, η ein Punkt der Tangente ist,

$$y - \eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - \xi) \quad (3)$$

als Gleichung der Tangente an der Ellipse im Punkte ξ, η . Verbindet man diese Gleichung (nach Wegschaffung des Nenners $a^2\eta$) mit

der Gleichung $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2$, welche ausdrückt, dass ξ, η ein Punkt der Ellipse ist, so erhält man:

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2, \quad (4)$$

eine mehr symmetrische Form der Gleichung der Tangente, welche sich von der Gl. der Ellipse nur dadurch unterscheidet, dass die Quadrate x^2 und y^2 durch die Rechtecke ξx und ηy ersetzt sind. Der Winkel τ , welchen die Tangente am Punkte ξ, η mit der Abscissenaxe einschliesst, bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \quad (5)$$

Die im Berührungspunkte M senkrecht auf die Tangente errichtete Gerade heisst Normale der Curve im Punkte M . Mit Rücksicht auf (3) wird die Gleichung der Normale der Ellipse im Punkte ξ, η :

$$y - \eta = \frac{a^2\eta}{b^2\xi} (x - \xi). \quad (6)$$

204. Es seien (Fig. 29) MT und MN die Tangente und Normale am Punkte $M(\xi, \eta)$; die Stücke PT und PN der Abscissenaxe, welche zwischen dem Fusspunkte der Ordinate des Berührungspunktes und ihren Durchschnittspunkten mit der Tangente und Normale liegen, werden Subtangente und Subnormale genannt. Die Stücke MT und MN der Tangente und Normale zwischen dem Berührungspunkte und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Axe der x , pflegt man im engeren Sinne Tangente und Normale zu nennen.

Um Ausdrücke für die Längen dieser 4 Stücke zu erhalten, setzen wir in den Gl. (3) und (6) der Tangente und Normale [§. 203] $y = 0$, wodurch x die Abscisse beziehungsweise der Punkte T und N wird, und erhalten, da $\xi = OP$:

$$x - \xi = PT = \text{Subtangente} = \frac{a^2\eta^2}{b^2\xi} = \frac{a^2 - \xi^2}{\xi},$$

$$x - \xi = PN = \text{Subnormale} = -\frac{b^2\xi}{a^2},$$

wo die entgegengesetzten Zeichen dieser Ausdrücke daher rühren, dass die Subtangente und Subnormale immer auf entgegengesetzten Seiten der Ordinate liegen, von welcher aus sie gezählt werden. Mit Hülfe dieser Ausdrücke findet man ferner aus den rechtwinkligen Dreiecken MPT und MPN :

$$MT = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2\xi} \sqrt{b^4\xi^2 + a^4\eta^2} = \frac{a\eta}{b\xi} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2\xi^2},$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2} \sqrt{b^4\xi^2 + a^4\eta^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2\xi^2}.$$

Aus der Bemerkung, dass der Ausdruck der Subtangente von b und η unabhängig ist und somit für einerlei ξ denselben Werth erhält in allen über derselben grossen Axe beschriebenen Ellipsen, folgt eine einfache Construction der Tangente. Man beschreibe über der grossen Axe einen Kreis, verlängere die Ordinate des Berührungspunktes M bis zum Durchschnitte M' mit dem Kreise, und ziehe an diesen in M' eine Tangente; der Durchschnittspunkt T derselben mit der Abscissenaxe, mit dem Punkte M verbunden, gibt die Tangente an der Ellipse im Punkte M .

Während die Subtangente, wie aus ihrem Ausdrucke leicht erhellt, aller Werthe von 0 bis $\pm \infty$ fähig ist, findet diess bei der Subnormale nicht Statt; ihr Ausdruck wird Null für $\xi = 0$, weil in diesem Falle die Normale mit der kleinen Axe, die Punkte P und N somit im Mittelpunkte zusammenfallen; mit zunehmendem ξ wird die Subnormale immer grösser, erreicht aber für $\xi = a$ ihren grössten Werth $\frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ = dem halben Parameter, als Grenze, welche sie nicht überschreitet.

205. Es sei nun ausserhalb der Ellipse ein Punkt $K(x', y')$, (Fig. 30) gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Tangente an die Ellipse gezogen werden. — Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes mit ξ, η , so ist:

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2$$

die Gleichung der Tangente, und wir erhalten zur Bestimmung von ξ, η die beiden Bedingungsgleichungen:

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2 \dots (1), \quad a^2\eta y' + b^2\xi x' = a^2b^2 \dots (2)$$

von welchen die erste ausdrückt, dass der Punkt ξ, η in der Ellipse liegen, die zweite, dass x', y' ein Punkt der Tangente sein soll. Aus beiden folgt durch successive Elimination:

$$\xi = \frac{a^2(b^2x' \pm y' \sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2}, \quad \eta = \frac{b^2(a^2y' \mp x' \sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2}$$

wo Kürze halber $N = a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2$ gesetzt ist, und die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Vorausgesetzt, dass N positiv ist, d. h. dass der Punkt x', y' ausserhalb der Ellipse liegt, können somit, der doppelten Zeichen wegen, durch den genannten Punkt zwei Tangenten an die Ellipse gezogen werden. Für den Neigungswinkel τ derselben gegen die Abscissenaxe findet man:

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{b^2\xi}{a^2\eta} = - \frac{x'y' \pm \sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}}{a^2 - x'^2}.$$

Für $N = 0$ reduciren sich obige Werthe ξ und η auf $\xi = x', \eta = y'$,

wie es sein muss, weil in diesem Falle der gegebene Punkt x', y' in der Ellipse liegt, und somit selbst zum Berührungspunkte wird.

Zur Construction der Tangente bedient man sich am einfachsten der geometrischen Oerter der Gl. (1) und (2), deren Durchschnittspunkte ja eben die Berührungspunkte sind.

Nun ist der geometrische Ort der Gl. (1) die gegebene Ellipse selbst; jener der Gl. (2) eine gerade Linie, deren Durchschnittspunkte D und E mit den beiden Axen leicht zu construiren sind, da aus (2):

$$\text{für } \eta = 0 : \xi = OD = \frac{a^2}{x'}, \text{ für } \xi = 0 : \eta = OE = \frac{b^2}{y'}$$

folgt; zieht man sodann durch die Punkte D und E eine Gerade, so schneidet diese die Ellipse in den gesuchten Berührungspunkten G, G' .

Die Gerade GG' , welche durch die beiden Berührungspunkte G und G' geht, heisst Berührungsschne. Aus dem Umstande, dass der Werth von OD von der Ordinate $RK = y'$ des Punktes K unabhängig ist, folgt der Satz:

Wenn man von beliebigen Punkten K, K' etc. einer auf die Richtung der grossen Axe senkrechten Geraden NN' Tangenten an die Ellipse zieht, so schneiden sich sämtliche Berührungsschnen in einem und demselben Punkte D der grossen Axe.

Der Punkt D und die Gerade NN' heissen (so wie beim Kreise) mit Beziehung auf einander Pol und Polare.

Auf dieselbe Weise folgt aus dem Ausdrucke von OE , dass der Punkt E der Pol ist in Bezug auf die durch den Punkt K senkrecht auf die kleine Axe gezogene Gerade QQ' als Polare. Wie obiger Satz umgekehrt werden kann, ist von selbst einleuchtend; zu einer Verallgemeinerung desselben werden wir später [§. 215] gelangen.

206. Zieht man (Fig. 29) den Halbmesser OM des Berührungspunktes $M(\xi, \eta)$, so ist, wenn sein Neigungswinkel gegen die Axe der x mit ψ bezeichnet wird, $\text{tg } \psi = \frac{\eta}{\xi}$, welche Gleichung mit Gl. (5) [§. 203] verglichen:

$$\text{tg } \psi \cdot \text{tg } \tau = - \frac{b^2}{a^2}$$

gibt, woraus folgt, dass das Produkt $\text{tg } \psi \text{ tg } \tau$ eine constante Grösse ist. — Ist $\lambda = OMT$ der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Berührungspunktes die Tangente schneidet, so hat man, wegen $\lambda = \tau - \psi$:

$$\text{tg } \lambda = \frac{\text{tg } \tau - \text{tg } \psi}{1 + \text{tg } \psi \text{ tg } \tau} = - \frac{a^2 b^2}{\eta \xi (a^2 - b^2)} = - \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 \cdot \eta \xi}.$$

Wie man sieht, wird $\operatorname{tg} \lambda = \infty$, d. i. $\lambda = 90^\circ$ nur in dem Falle, wenn entweder ξ oder η Null ist; die Endpunkte der Axen sind daher die einzigen Punkte, in welchen die Tangente auf den zugehörigen Halbmessern senkrecht steht.

207. Es seien an einen Punkt M der Ellipse (Fig. 31) die Tangente, Normale und die beiden Leitstrahlen gezogen. Für die Abscisse ON des Durchschnittspunktes N der Normale mit der Axe der x findet man, in der Gleichung derselben, [(6), §. 203] $y = 0$ setzend:

$$x = ON = \frac{e^2}{a^2} \xi.$$

Lässt man in diesem Ausdrucke ξ von 0 bis a zunehmen, so wächst $x = ON$ von 0 bis $\frac{e^2}{a} < e$, woraus erhellt, dass die grosse Axe von der Normale immer zwischen den Brennpunkten geschnitten wird. Nun ist:

$$FN = OF - ON = e - \frac{e^2}{a^2} \xi = \frac{e}{a} \left(a - \frac{e}{a} \xi \right) = \frac{er}{a},$$

$$F'N = OF' + ON = e + \frac{e^2}{a^2} \xi = \frac{e}{a} \left(a + \frac{e}{a} \xi \right) = \frac{er'}{a},$$

folglich:

$$FN : F'N = r : r' = FM : F'M;$$

bringt man diese Proportion in Verbindung mit dem $\triangle FMF'$, so folgt daraus nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie, dass der von den beiden Leitstrahlen eines Punktes gebildete Winkel durch die Normale dieses Punktes halbt wird.

Hieraus ergeben sich sogleich noch folgende Sätze:

1) die Tangente bildet mit den beiden Leitstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

2) Die Tangente halbt den von einem Leitstrahle, z. B. FM und der Verlängerung des anderen gebildeten Winkel FME .

3) Verlängert man einen Radiusvector, z. B. $F'M$, und macht die Verlängerung $ME = FM$ dem anderen Leitstrahle, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck EMF , dessen Grundlinie EF durch die Tangente im Punkte K senkrecht geschnitten und halbt wird.

4) Verbindet man den Punkt K mit dem Mittelpunkte O , so ist, weil die KO die EF und FF' in den Punkten K und O halbt, KO parallel zu $F'E$; somit $KO : EF' = OF : FF'$, d. i. wegen $F'E = F'M + ME = 2a$, $KO = a$; eben so beweist man, dass $K'O = a$, wenn $F'K'$

senkrecht auf die Tangente gezogen wird. Daraus folgt, dass die Entfernung der Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel vom Mittelpunkte constant und der halben grossen Axe gleich ist; oder mit anderen Worten: der geometrische Ort der Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Perpendikel ist der umschriebene Kreis.

5) Setzt man $\angle FTK = \tau'$, so ist $FK = FT \cdot \sin \tau'$, und $F'K' = F'T \cdot \sin \tau' = (2e + FT) \sin \tau'$. Nun folgt aus der Gl. der Tangente für $y = 0$: $OT = \frac{a^2}{\xi}$, folglich $FT = \frac{a^2}{\xi} - e$ und $F'T = \frac{a^2}{\xi} + e$; ferner ist, wegen $\text{tg } \tau' = \text{tg } (180 - \tau) = -\text{tg } \tau$:

$$\sin \tau' = \frac{\text{tg } \tau'}{\sqrt{1 + \text{tg } \tau'^2}} = \frac{b^2 \xi}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, \text{ somit:}$$

$$FK = \frac{b^2(a^2 - e\xi)}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, F'K' = \frac{b^2(a^2 + e\xi)}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}, \text{ folglich:}$$

$$FK \cdot F'K' = \frac{b^4(a^4 - e^2 \xi^2)}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2} = \frac{b^4 \{a^4 - (a^2 - b^2) \xi^2\}}{b^2 \{a^4 - (a^2 - b^2) \xi^2\}} = b^2;$$

d. h. das Produkt der aus den beiden Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Perpendikel ist constant und dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich.

Aus dem Satze Nr. 3 folgt ein bequemes Verfahren zur Construction der Tangente.

a) wenn der Berührungspunkt M gegeben ist. Man verlängere (Fig. 31) den einen Radiusvector $F'M$ des Berührungspunktes um das Stück $ME = MF$ und beschreibe aus den zwei Punkten E und F' Kreisbogen, welche sich in einem Punkte L der Tangente schneiden.

b) Durch einen ausserhalb der Ellipse gegebenen Punkt L eine Tangente zu ziehen. Denkt man sich (Fig. 31) die Tangente LMT construirt, so bemerkt man sogleich, dass der Berührungspunkt M bekannt wird, wenn sich der Punkt E finden lässt, indem die EF' die Ellipse im Punkte M schneidet. Der Punkt E ist aber durch die bekannten Entfernungen $EL = FL$ und $EF' = MF + MF' = 2a$ bestimmt. Man beschreibe daher (Fig. 32) aus einem der Brennpunkte, z. B. F' mit dem Halbmesser $= 2a$ einen Kreisbogen oo' , und aus dem gegebenen Punkte L mit dem Abstände desselben vom anderen Brennpunkte als Halbmesser einen zweiten Kreisbogen nn' , welcher den ersteren in zwei Punkten E, E' schneiden wird; verbindet man diese Punkte mit F' durch Gerade, so schneiden diese die Ellipse in den gesuchten Berührungspunkten M und M' .

208. Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ist bekannt, dass in der Ellipse, als einer Curve der zweiten Ordnung, a) für jedes System paralleler Sehnen ein Durchmesser existirt, welcher sie sämmtlich halbt; b) dass alle Durchmesser gerade Linien sind, welche durch den Mittelpunkt gehen; c) dass umgekehrt jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade ein Durchmesser ist, welchem ein System paralleler Chorden entspricht, das von ihm halbt wird.

Ist die Ellipse mit ihrem Mittelpunkte gegeben, so lässt sich der zu einer bestimmten Sehnenrichtung gehörige Durchmesser leicht construiren. Man halbire eine der gegebenen Sehnen und ziehe durch den Halbirungspunkt und den Mittelpunkt eine Gerade, welche der gesuchte Durchmesser ist.

Sei nun φ der Neigungswinkel einer der parallelen Sehnen gegen die Axe der x , so ist $y = x \operatorname{tg} \varphi + n$ die Gleichung derselben, welche mit der Gleichung der Ellipse: $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, verbunden, durch Elimination von y die Gleichung:

$$(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2) x^2 + 2a^2 n \operatorname{tg} \varphi \cdot x + a^2 (n^2 - b^2) = 0$$

darbietet, deren Wurzeln x_1, x_2 die Abscissen der Durchschnittspunkte der Sehne und der Ellipse sind. Bezeichnet man daher mit α, β die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehne, so hat man:

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 n \operatorname{tg} \varphi}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}; \quad \beta = \alpha \operatorname{tg} \varphi + n = \frac{b^2 n}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}.$$

Die Gleichung des zugehörigen Durchmessers, als einer durch den Ursprung und den Punkt α, β gehenden Geraden, ist $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, d. h. wenn man für α und β obige Werthe substituirt:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x. \quad (1)$$

Ist ψ der Neigungswinkel dieses Durchmessers gegen die Axe der x , so ist $\operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi}$, woraus:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2} \quad (2)$$

folgt. Das Produkt der Tangenten der Winkel, welche ein Durchmesser und das zugehörige Sehnensystem mit der grossen Axe einschliessen, ist somit eine constante Grösse und $= -\frac{b^2}{a^2}$.

Aus der Symmetrie der Gl. (2) in Bezug auf die Winkel φ und ψ erhellt sogleich, dass, wenn man einen zweiten Durchmesser unter dem Winkel φ gegen die grosse Axe zieht, das zu diesem gehörige Sehnensystem diese Axe unter dem Winkel ψ schneiden werde.

Diese zwei Durchmesser haben somit die Eigenschaft, dass jeder von ihnen das zu dem anderen parallele Sehnensystem halbirt. Zwei solche Durchmesser werden conjugirte Durchmesser genannt. Man bemerkt von selbst, wie diese Eigenschaft benützt werden kann, um zu einem gegebenen Durchmesser den conjugirten zu construiren.

Die Gl. (2) drückt offenbar die Bedingung aus, welcher die Neigungswinkel φ und ψ zweier Durchmesser gegen die grosse Axe Genüge leisten müssen, damit dieselben ein System conjugirter Durchmesser bilden.

Da vermöge der Gl. (2) das Produkt $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi$ immer negativ ist, so folgt, dass von den beiden Winkeln φ und ψ , welche zwei conjugirte Durchmesser mit der grossen Axe einschliessen, der eine immer spitz, der andere stumpf ist und folglich jeder der beiden Durchmesser in zwei anderen elliptischen Quadranten liegt. Lassen wir φ den spitzen Winkel bedeuten, so ist $\psi - \varphi = u$ der von der kleinen Axe durchschnittene Winkel der beiden Durchmesser und man hat:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} = - \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi + b^2 \operatorname{cotg} \varphi}{a^2 - b^2},$$

woraus erhellt, dass dieser Winkel immer stumpf und folglich der von der grossen Axe durchschnittene Nebenwinkel immer spitzig ist. Letzterer wird gewöhnlich der Conjugationswinkel genannt.

Sollen die beiden Durchmesser auf einander senkrecht stehen, so muss $u = 90^\circ$, somit $\operatorname{tg} u = \infty$ sein, welchen Werth $\operatorname{tg} u$ vermöge des obigen Ausdruckes nur für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^\circ$ erhält, da in der Ellipse $a^2 - b^2$ von 0 verschieden ist. Die Axen der Ellipse bilden daher das einzige System rechtwinkliger conjugirter Durchmesser (Hauptdurchmesser). Für den Kreis folgt jedoch aus obiger Gleichung, wegen $a = b$, für jeden Werth von φ , $u = 90^\circ$, daher im Kreise jedes System conjugirter Durchmesser ein rechtwinkliges ist.

209. Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers DD' (Fig. 33) mit einem beliebigen Punkte M der Ellipse, so heissen die so entstehenden Sehnen MD und MD' Supplementarsehnen. Bezeichnet man mit x', y' die Coordinaten des Punktes M , mit x'', y'' jene des Punktes D , so sind $-x'', -y''$ jene von D' , und man hat als Gleichungen der beiden Sehnen MD und MD' :

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x'); \quad y - y' = \frac{y' + y''}{x' + x''} (x - x').$$

Sind nun φ und ψ die Winkel derselben mit der als Abscissenaxe angenommenen grossen Axe, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}.$$

Da aber die Punkte D , D' und M auf der Ellipse liegen, so hat man $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$, $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2$, woraus durch Subtraktion $a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0$ folgt, womit die obige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (n)$$

Das Produkt $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$ ist also, wie man sieht, constant, und nicht bloss von der Lage des Punktes M gegen den Durchmesser DD' , sondern auch von der Richtung des letzteren unabhängig. Hieraus folgt der Satz:

1) Zieht man durch die Endpunkte eines beliebigen Durchmessers Parallele zu einem Paare Supplementarsehnen, so schneiden sich dieselben in einem Punkte der Ellipse und bilden demnach ebenfalls ein Paar Supplementarsehnen.

Aus der Uebereinstimmung obiger Gl. (n) mit Gl. (2) im vorigen Paragraphen folgt ferner:

2) Zwei Durchmesser, welche zu zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, sind conjugirt.

Auch dieser Satz bietet ein Mittel dar, zu einem gegebenen Durchmesser DD' den conjugirten zu construiren. Durch den Endpunkt eines beliebigen anderen Durchmessers z. B. AA' ziehe man die Sehne $A'N$ parallel mit DD' , verbinde N mit A , und ziehe EE' parallel zu AN , so ist EE' der gesuchte, zu DD' conjugirte Durchmesser.

Suchen wir noch den von zwei Supplementarsehnen AN , $A'N$ (Fig. 34) eingeschlossenen Winkel ANA' zu bestimmen, wobei wir dieselben über der grossen Axe construirt annehmen. Sind x , y die Coordinaten des Punktes N , so hat man:

$$\operatorname{tg} NAX = -\frac{y}{a-x}, \quad \operatorname{tg} NA'X = \frac{y}{a+x},$$

somit wegen $ANA' = NAX - NA'X$:

$$\operatorname{tg} ANA' = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y}, \quad (1)$$

wenn man für x^2 den aus der Gl. der Curve folgenden Werth sub-

stituirt. Mit Rücksicht auf den in Rede stehenden Winkel kann y positiv angenommen werden; es ist somit $\text{tg } ANA'$ wesentlich negativ, und somit der von zwei über der grossen Axe construirten Supplementarsehnen eingeschlossene Winkel immer stumpf. Er erreicht seinen grössten Werth für $y = b$, wenn die beiden Sehnen im Endpunkte der kleinen Axe zusammenlaufen, und man hat für dieses Maximum:

$$\text{tg } ABA' = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \quad (2)$$

Mit abnehmendem y wird der Winkel ANA' immer kleiner und hat für $y = 0$ den rechten Winkel zur Grenze.

Eben so findet man für den von zwei über der kleinen Axe construirten Supplementarsehnen gebildeten Winkel BNB' :

$$\text{tg } BNB' = \frac{2a^2b}{(a^2 - b^2)x}; \quad (3)$$

dieser Winkel ist somit immer spitzig und erreicht für $x = a$ seinen kleinsten Werth BAB' , für welchen

$$\text{tg } BAB' = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \quad (4)$$

wird. Mit abnehmendem x wird $\angle BNB'$ immer grösser und hat für $x = 0$ den rechten Winkel zur Grenze.

Bringt man hiemit die obigen beiden Sätze in Verbindung, so gelangt man zu dem Schlusse, dass der Winkel, welchen zwei Supplementarsehnen oder zwei conjugirte Durchmesser miteinander bilden, nicht grösser als ABA' und nicht kleiner als BAB' werden kann.

Aus den Gl. (1) und (3) erhellt übrigens, dass über beiden Axen, also auch über jedem Durchmesser zwei Paare Supplementarsehnen construiert werden können, welche gleiche Winkel einschliessen. Daher giebt es auch immer zwei Systeme conjugirter Durchmesser von gleichem Conjugationswinkel, mit Ausnahme des Systems der conjugirten Hauptdurchmesser oder Axen.

210. Aufgabe 1. Es ist eine Ellipse gegeben; man soll ein System conjugirter Durchmesser construiren, welche sich unter einem gegebenen Winkel γ schneiden. (Fig. 35.)

Man ziehe zwei parallele Sehnen und durch deren Halbierungspunkte den Durchmesser kk' ; durch Halbierung desselben erhält man zuvörderst den Mittelpunkt O . Ueber kk' als Sehne beschreibe man einen Kreis, so dass der eine über kk' stehende Kreisbogen kBk' den gegebenen Winkel γ als Peripheriewinkel enthalte. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt B dieses Kreisbogens und der Ellipse mit den

Punkten k und k' , und zieht durch den Mittelpunkt O parallel zu Bk und Bk' die Durchmesser DD' und EE' , so sind diess die gesuchten Durchmesser.

Der Kreis schneidet die Ellipse noch in einem zweiten Punkte B' , und es ist bekanntlich $kB'k' = 180^\circ - \gamma$; zieht man daher kB' und $k'B'$ und damit parallel die Durchmesser FF' und GG' , so bilden diese offenbar das zweite System conjugirter Durchmesser, welche sich ebenfalls unter dem Winkel γ schneiden.

Hiemit ist also zugleich die Aufgabe gelöst, zu einem gegebenen Systeme conjugirter Durchmesser das zweite von gleichem Conjugationswinkel zu construiren.

Aufgabe 2. Es ist eine Ellipse gegeben; man soll die Axen derselben construiren.

Diese Aufgabe ist nur ein specieller Fall der vorhergehenden, für $\gamma = 90^\circ$. Der Kreis ist, wie leicht einzusehen, aus dem Mittelpunkte der Ellipse über einem beliebigen Durchmesser derselben zu beschreiben, und sonst wie oben zu verfahren.

211. Zieht man an einen beliebigen Punkt $M(x, y)$ der Ellipse die Tangente TT' , (Fig. 36) und den Durchmesser MN , so hat man für den Neigungswinkel τ der Tangente gegen die als Abscissenaxe angenommene grosse Axe: $\operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ [Gl. (5) §. 203] und, wenn φ der

Neigungswinkel des Durchmessers gegen die grosse Axe ist, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$; folglich, wenn beide Gleichungen multiplicirt werden:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2}{a^2},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (2), §. 208 folgt, dass die Tangente an einem beliebigen Punkte der Ellipse parallel liegt zu jenem Durchmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt gezogenen conjugirt ist.

Da hiernach die an den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten parallel sind, so bilden die vier an den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser MN und PQ construirten Tangenten ein Parallelogramm $SS'TT'$.

DIE ELLIPSE BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER DURCHMESSER.

212. Wir haben bisher die Gleichung der Ellipse in der Form:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

angewendet, welche Form bekanntlich davon herrührt, dass der Coor-

dinatenanfang Mittelpunkt der Curve ist, wodurch die Abwesenheit der linearen Glieder bedingt wird, und jede der Coordinatenaxen die zur anderen parallelen Sehnen halbirt, in Folge dessen das Glied mit dem Produkte xy fehlen muss. Hieraus folgt aber, dass die Gleichung der Curve obige Form nicht verändern wird, wenn man mit Beibehaltung des Mittelpunktes als Ursprung, irgend ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen wählt.

Sei nun (Fig. 37) OX, OY ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatensystem angenommen; α, α' die Winkel, welche die neuen Axen OX, OY mit der grossen Axe bilden, so haben wir zum Behufe der Transformation in (1) $x \cos \alpha + y \cos \alpha'$ statt $x, x \sin \alpha + y \sin \alpha'$ statt y zu schreiben [Gl. (4), §. 160.], und erhalten dadurch:

$$(a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha') y^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x^2 + 2(a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha') xy = a^2 b^2.$$

Es ist aber der Coefficient von xy :

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = a^2 \cos \alpha \cos \alpha' \left(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' + \frac{b^2}{a^2} \right) = 0,$$

vermöge der zwischen den Winkeln α, α' bestehenden Relation:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

[Gl. (2), §. 208], wodurch sich obige Gleichung in folgende verwandelt:

$$(a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha') y^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x^2 = a^2 b^2. \quad (2)$$

Setzt man noch:

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = m^2, \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} = n^2 \quad (3)$$

so erhält man:

$$m^2 y^2 + n^2 x^2 = m^2 n^2 \quad (4)$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\text{für } y = 0: x^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OD'}^2 = m^2,$$

$$\text{für } x = 0: y^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = n^2;$$

es sind also m und n die Hälften der conjugirten Durchmesser, auf welche die Ellipse bezogen ist.

213. Zwischen den sechs Stücken $a, b, m, n, \alpha, \alpha'$ bestehen nach Obigem die drei Gleichungen:

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = m^2 \quad (1), \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} = n^2 \quad (2)$$

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0, \quad (3)$$

deren letzte mit

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad (3')$$

identisch ist.

1) Durch Multiplikation von (1) und (2) erhält man:

$$a^4 b^4 = m^2 n^2 [a^2 b^2 \sin \alpha'^2 \cos \alpha^2 + a^4 \sin \alpha^2 \sin \alpha'^2 + b^4 \cos \alpha^2 \cos \alpha'^2 + a^2 b^2 \sin \alpha^2 \cos \alpha'^2],$$

und wenn man (3) zum Quadrate erhebt:

$$a^4 \sin \alpha^2 \sin \alpha'^2 + b^4 \cos \alpha^2 \cos \alpha'^2 = -2a^2 b^2 \sin \alpha \sin \alpha' \cos \alpha \cos \alpha',$$

womit die vorhergehende Gleichung übergeht in:

$$a^2 b^2 = m^2 n^2 (\sin \alpha' \cos \alpha - \cos \alpha' \sin \alpha)^2 = m^2 n^2 \sin (\alpha' - \alpha)^2,$$

woraus

$$ab = mn \sin (\alpha' - \alpha) \quad (4)$$

folgt.

Zieht man (Fig. 37) ED und ED' , ferner EF senkrecht auf DD' , so ist im $\triangle EFO$: $EF = n \sin (\alpha' - \alpha)$, somit:

$$\triangle DED' = mn \sin (\alpha' - \alpha) = ab;$$

anderseits drückt ab offenbar den Flächeninhalt des Dreieckes aus, dessen Grundlinie die grosse Axe $= AA' = 2a$ und Höhe die halbe kleine Axe $= b$ ist; die Gl. (4) spricht daher folgenden Satz aus:

Das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser verbindet, ist dem Rhombus gleich, dessen Ecken die Endpunkte der beiden Axen sind.

Zieht man ferner an den Endpunkten der beiden conjugirten Durchmesser DD' , EE' die Tangenten, so ist der Flächeninhalt des von denselben eingeschlossenen Parallelogrammes $GHIK$ offenbar dem doppelten Flächeninhalte des Parallelogrammes $DED'E'$ gleich, somit:

$$GHIK = 2ED'E'D = 4mn \sin (\alpha' - \alpha) = 4ab,$$

woraus sich noch folgender Satz ergibt:

Die Fläche des Parallelogrammes, welches von den vier an den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser gezogenen Tangenten gebildet wird, ist eine constante Grösse und dem Rechtecke aus den beiden Axen gleich.

2) Nach bekannten goniometrischen Formeln findet man aus (3'):

$$\begin{aligned} \sin \alpha^2 &= \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha'^2}, & \cos \alpha^2 &= \frac{a^4 \operatorname{tg} \alpha'^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha'^2}, \\ \sin \alpha'^2 &= \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha^2}, & \cos \alpha'^2 &= \frac{a^4 \operatorname{tg} \alpha^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha^2}, \end{aligned}$$

welche Werthe, in (1) und (2) substituirt:

$$m^2 = \frac{a^4 \sin \alpha'^2 + b^4 \cos \alpha'^2}{a^2 \sin \alpha'^2 + b^2 \cos \alpha'^2} \dots (5) \quad n^2 = \frac{a^4 \sin \alpha^2 + b^4 \cos \alpha^2}{a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2} \dots (6)$$

geben. Durch Addition von (1) und (6) oder (2) und (5) erhält man:

$$m^2 + n^2 = \frac{a^4 \sin \alpha^2 + a^2 b^2 + b^4 \cos \alpha^2}{a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2} = \frac{a^4 \sin \alpha'^2 + a^2 b^2 + b^4 \cos \alpha'^2}{a^2 \sin \alpha'^2 + b^2 \cos \alpha'^2},$$

woraus, wenn die Division verrichtet wird,

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 \quad (7)$$

folgt. Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist daher eine constante Grösse und der Summe der Quadrate der Axen gleich.

Wir bemerken noch, dass, wenn von den 6 Grössen $a, b, m, n, \alpha, \alpha'$ drei gegeben sind, die anderen drei mittelst der Gleichungen (1), (2), (3) oder (3') gefunden werden können, von welchen übrigens die beiden ersteren auch durch die Gleichungen (4) und (7) vertreten werden können. Hieher gehören z. B. folgende Aufgaben: 1) Zwei conjugirte Durchmesser und der Conjugationswinkel sind gegeben, die Axen zu berechnen. 2) Die Axen sind gegeben; man sucht ein System conjugirter Durchmesser, welche einen gegebenen Winkel $\alpha' - \alpha$ einschliessen.

214. Unter den unzähligen Systemen conjugirter Durchmesser der Ellipse ist noch dasjenige bemerkenswerth, dessen Durchmesser den die Endpunkte der beiden Axen verbindenden Sehnen parallel sind, und, wie aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf ihre Hauptaxen sogleich erhellt, gleiche Längen haben. Bezieht man die Ellipse auf dieses System conjugirter Durchmesser, so wird ihre Gleichung (wegen $m = n$ in Gl. (4) §. 212):

$$x^2 + y^2 = m^2$$

und hat, wie man sieht, mit der auf rechtwinklige Axen bezogenen Mittelpunkts-Gleichung des Kreises gleiche Form. Jede Gleichung von dieser Form, bezogen auf ein schiefwinkliges Axensystem ist daher die Gleichung einer auf das System der gleichen conjugirten Durchmesser bezogenen Ellipse. Bezeichnen, wie oben, α und α' die Winkel der zwei gleichen Durchmesser gegen die Abscissenaxe, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b}{a}$$

und vermöge der Gl. (7): $m^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$.

215. Aus der vollkommenen Uebereinstimmung der Formen, welche die Gl. der Ellipse annimmt, wenn dieselbe auf die Axen oder auf ein beliebiges System conjugirter Durchmesser bezogen wird, folgt,

dass alle bisher entwickelten Eigenschaften dieser Curve, welche von der Richtung der Durchmesser unabhängig sind, auch dann bestehen, wenn dieselben auf ein System conjugirter Durchmesser bezogen wird. So namentlich die Gleichungen der Tangente und die Formeln und Constructionen des §. 205 über die Aufgabe, von einem ausserhalb der Ellipse gegebenen Punkte eine Tangente an die Curve zu ziehen.

Was insbesondere die Ergebnisse des letztgenannten Paragraphes anbelangt, so können wir jetzt, wenn wir bedenken, dass zu jeder in der Ebene der Ellipse gegebenen Geraden ein paralleler Durchmesser gezogen werden kann, und die dort entwickelten Formeln sich nicht ändern, wenn statt der Axen irgend ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatensystem angenommen wird, (nur dass dann selbstverständlich unter a und b die Hälften dieser conjugirten Durchmesser zu verstehen sind) folgenden Satz aussprechen:

Wenn von beliebigen Punkten irgend einer in der Ebene der Ellipse gezogenen Geraden (*Polare*) Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so schneiden sich sämtliche Gerade, welche die zu je zwei von demselben Punkte ausgehenden Tangenten gehörigen Berührungspunkte verbinden, in einem Punkte (*Pol*), welcher auf jenem Durchmesser liegt, der zu dem der gegebenen Geraden parallelen Durchmesser conjugirt ist.

Und umgekehrt:

Zieht man durch irgend einen in der Ebene der Ellipse gegebenen Punkt (*Pol*) Sehnen oder Sekanten und zu je zwei Punkten, in denen die Ellipse von jeder Sehne oder Sekante geschnitten wird, die Tangenten, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier zusammengehöriger Tangenten auf einer zu jenem Durchmesser parallelen Geraden (*Polare*), welcher dem durch den gegebenen Punkt gezogenen conjugirt ist.

II. Die Hyperbel.

216. Die Gleichung der Hyperbel, auf ihren Mittelpunkt und ihre Hauptdurchmesser bezogen, ist:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad (1)$$

wo $2a$ die erste oder reelle, $2b$ die zweite oder imaginäre Axe bezeichnet, und erstere als Abscissenaxe angenommen ist.

Für $a = b$ verwandelt sich obige Gleichung in $y^2 - x^2 = -a^2$, und die Hyperbel heisst in diesem Falle eine gleichseitige; diese ist unter den Hyperbeln das, was der Kreis unter den Ellipsen.

Bezeichnet man die lineare Excentricität, d. i. den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte mit e , die numerische Excentricität mit ε , so ist bekanntlich [§. 200]:

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad b^2 = e^2 - a^2 = a^2 (\varepsilon^2 - 1),$$

und man hat für die Leitstrahlen $FM = r$, $F'M = r'$ (Fig. 26) eines beliebigen Hyperbelpunktes M , dessen vom Mittelpunkte gezählte Abscisse $CP = x$ ist, die Ausdrücke:

$$r = \frac{e}{a} x - a, \quad r' = \frac{e}{a} x + a,$$

deren Differenz constant und gleich ist der ersten Axe $2a = AA'$. Auf diese Eigenschaft gründet sich eine einfache Construction der Hyperbel durch Punkte, bei welcher zu verweilen nicht nöthig sein wird.

Die Gl. (1) in der Form:

$$\frac{y^2}{(x - a)(x + a)} = \frac{b^2}{a^2}$$

geschrieben, spricht den Satz aus, dass das Quadrat der Ordinate zu dem Rechtecke aus den Abständen ihres Fusspunktes von beiden Scheiteln der Hyperbel in einem constanten Verhältnisse $= b^2 : a^2$ stehe.

Construirt man über der ersten Axe der Hyperbel (1) eine gleichseitige Hyperbel, und bezeichnet mit y, y' die zu derselben Abscisse x gehörigen Ordinaten beider Curven, so hat man:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \pm \sqrt{x^2 - a^2},$$

somit $y : y' = b : a$; der in dieser Proportion ausgesprochene Satz ist, so wie der vorhergehende, den beiden [§. 201] für die Ellipse bewiesenen analog; der letztere kann jedoch zur Construction der Hyperbel nicht benützt werden, da eine gleichseitige Hyperbel nicht leichter als irgend eine andere zu construiren ist.

Aus der Vergleichung der Mittelpunktsleichungen der Hyperbel und der Ellipse geht hervor, dass diese in jene übergeht, wenn man $-b^2$ statt b^2 , oder $b\sqrt{-1}$ statt b schreibt. Aus diesem Grunde können die aus der Gleichung der Ellipse abgeleiteten Gleichungen und Formeln durch Aenderung des Zeichens von b^2 unmittelbar in die entsprechenden auf die Hyperbel sich beziehenden umgewandelt werden. In Folge dieser Aehnlichkeit besitzen beide Curven auch analoge

Eigenschaften, namentlich ist die Ableitung derselben häufig so übereinstimmend, dass wir im Folgenden in solchen Fällen bloss die Resultate anführen, und behufs der Ableitung auf die entsprechenden vorhergehenden Paragraphen verweisen werden.

VON DER TANGENTE AN DER HYPERBEL.

217. Verbinden wir die Gleichung der Hyperbel: $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mit jener einer beliebigen Geraden:

$$y = mx + n, \quad (1)$$

so erhalten wir durch Elimination von y die Gleichung:

$$x^2(a^2m^2 - b^2) + 2a^2mnx + a^2(b^2 + n^2) = 0, \quad (\alpha)$$

welche sofort die Abscissen der Durchschnittspunkte liefert und anzeigt, dass die Hyperbel von der Geraden in zwei Punkten geschnitten wird, den Fall ausgenommen, wenn $a^2m^2 - b^2 = 0$, d. i. $m = \pm \frac{b}{a}$ ist, in welchem Falle die Gerade die Hyperbel nur in einem Punkte schneidet, weil dann (α) auf den 1^{sten} Grad herabsinkt. Schliessen wir vorerst diesen besonderen Fall aus, so erhalten wir durch Auflösung von (α) als Abscissen der Durchschnittspunkte:

$$x = \frac{-a \{amn \pm b \sqrt{b^2 + n^2 - a^2m^2}\}}{a^2m^2 - b^2}. \quad (\beta)$$

Damit die Sekante zur Tangente werde, müssen die beiden Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen; es muss demnach in diesem Ausdrucke die Wurzelgrösse verschwinden, wodurch wir als Bedingungsgleichung für die Berührung:

$$a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0 \quad (2)$$

erhalten. Dem bei der Ellipse betretenen Wege folgend, finden wir:

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 - b^2}, \quad \eta = -\frac{b^2n}{a^2m^2 - b^2}$$

als Coordinaten des Berührungspunktes, und:

$$y - \eta = \frac{b^2\xi}{a^2\eta} (x - \xi), \quad (3)$$

oder

$$a^2\eta y - b^2\xi x = -a^2b^2, \quad (4)$$

als Gleichung der Tangente im Punkte ξ, η . Bezeichnen wir mit τ den Winkel, welchen die Tangente am Punkte ξ, η der Hyperbel mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \quad (5)$$

Als Gleichung der Normale im Punkte ξ, η der Hyperbel hat man nun:

$$y - \eta = -\frac{a^2 \eta}{b^2 \xi} (x - \xi). \quad (6)$$

Ferner findet man (Fig. 38):

$$PT = \text{Subtangente} = -\frac{a^2 \eta^2}{b^2 \xi} = -\frac{\xi^2 - a^2}{\xi},$$

$$PN = \text{Subnormale} = \frac{b^2 \xi}{a^2},$$

$$MT' = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2 \xi} \sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}.$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}.$$

Wie man sieht, ist auch in der Hyperbel, wie in der Ellipse, die Subtangente von η und b unabhängig; beschreibt man daher über derselben ersten Axe eine Reihe von Hyperbeln, und zieht an dieselben in Punkten, denen derselbe Werth der Abscisse ξ entspricht, Tangenten, so schneiden sich diese in einem und demselben Punkte der ersten Axe.

Die Subnormale erhält für $\xi = a$, d. h. im Scheitel der Hyperbel, ihren kleinsten Werth $\frac{b^2}{a}$ = dem halben Parameter, und wächst mit zunehmendem ξ bis ins Unendliche. Während also in der Ellipse der Werth der Subnormale immer zwischen den Grenzen 0 und $\frac{p}{2}$ eingeschlossen ist, liegt derselbe in der Hyperbel zwischen den Grenzen $\frac{p}{2}$ und ∞ .

218. Der Ausdruck (5) für $\text{tg } \tau$ verdient noch eine nähere Erörterung. In der Ellipse kann die Tangente alle möglichen Neigungen gegen die Axe der x annehmen; diess ist bei der Hyperbel nicht der Fall. Denn eliminirt man mit Hülfe der Gleichung der Curve η aus (5), so erhält man:

$$\text{tg } \tau = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}}}.$$

Es ist nun $\xi = a$ der (numerisch) kleinste mögliche Werth von ξ , für welchen $\text{tg } \tau = \pm \infty$, somit $\tau = 90^\circ$ wird; d. i. in den Scheiteln steht die Tangente senkrecht auf der ersten Axe. Lässt man nun ξ grösser und grösser werden, so wird, da $\frac{a^2}{\xi^2}$ fortwährend abnimmt, $\text{tg } \tau$ immer kleiner und hat für $\xi = \infty$ die Grösse $\pm \frac{b}{a}$ zur Grenze, unter welche sie nicht herabsinken kann.

Errichtet man daher im Scheitel A (Fig. 38) eine Senkrechte und macht $AH = -AH' = b$, zieht durch den Mittelpunkt O und die Punkte H und H' die Geraden VV' , WW' so ist:

$$\operatorname{tg} VOX = + \frac{b}{a}, \operatorname{tg} WOX = - \frac{b}{a},$$

woraus in Verbindung mit dem oben Gesagten hervorgeht, dass die Tangente an der Hyperbel mit der x -Axe keinen kleineren spitzen Winkel als VOX , keinen grösseren stumpfen als WOX bilden kann.

Setzt man ferner in Gl. (4) der Tangente $y = 0$, so wird:

$$x = OT = \frac{a^2}{\xi};$$

hieraus folgt, dass der Durchschnittspunkt der Tangente mit der x -Axe immer zwischen dem Mittelpunkte und einem der beiden Scheitel liegt, und ersterem um so näher kommt, je grösser ξ wird; rückt nun der Berührungspunkt in unendliche Entfernung, d. i. wird $\xi = \infty$, so hat man gleichzeitig: $\operatorname{tg} \tau = \pm \frac{b}{a}$, $OT = 0$. Je weiter sich daher der Berührungspunkt entfernt, desto mehr nähert sich die Tangente MT einer der beiden Geraden VV' , WW' , deren Gleichung:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

ist, und fällt für $\xi = 0$ mit einer derselben zusammen.

Bezeichnet man mit y und y' die zu derselben Abscisse $OP = x$ gehörigen Ordinaten der Hyperbel und der Geraden VV' , so ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2), \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2;$$

durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man:

$$(y' - y)(y' + y) = b^2.$$

Das Produkt $(y' - y)(y' + y) = MQ \cdot MQ$ ist demnach eine constante Grösse und es folgt hieraus, dass, wenn x , und somit auch y und y' grösser und grösser werden, die Differenz $y' - y = MQ$ fortwährend abnehmen und unendlich klein werden muss, wenn x unendlich gross wird. Die Hyperbel nähert sich daher immer mehr und mehr den Geraden VV' , WW' , ohne jemals mit ihnen völlig zusammenzufallen.

Man nennt eine Gerade oder krumme Linie, an welche sich ein unendlicher Curvenast immer mehr und mehr anschmiegt, ohne jedoch mit ihr je zusammenzufallen, eine Asymtote der Curve. Die Hyperbel besitzt daher zwei geradlinige Asymptoten, welche sich im Mittelpunkte schneiden, und deren Gleichungen:

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x$$

sind.

Es ergibt sich nun auch leicht die geometrische Bedeutung des im Eingange des §. 217 erwähnten besonderen Falles, dass eine Gerade $y = mx + n$ eine Hyperbel nur in einem Punkte schneidet, wenn $m = \pm \frac{b}{a}$ ist; die Gerade ist nämlich dann einer Asymtote parallel. Hieraus folgt zugleich, dass es unmöglich ist, in einer Hyperbel eine zu einer Asymtote parallele Sehne zu ziehen.

Für die Durchschnittspunkte einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden $y = mx$ mit der Hyperbel findet man, (in (a) $n = 0$ setzend):

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, y = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}},$$

woraus folgt, dass ein Durchschnitt statt findet oder nicht, je nachdem m numerisch kleiner oder grösser ist als $\frac{b}{a}$, d. h. je nachdem die Gerade zwischen einer Asymtote und der ersten, oder zweiten Axe der Hyperbel liegt.

219. Die Aufgabe, von einem ausserhalb der Hyperbel liegenden Punkte x', y' eine Tangente an dieselbe zu ziehen, wird auf dieselbe Weise zur Lösung gebracht, wie bei der Ellipse. [§. 205.] In sämtlichen dort entwickelten Formeln hat man nur das Zeichen von b^2 zu verändern, um sie für die Hyperbel umzugestalten, und die daraus gezogenen Folgerungen und Sätze gelten unverändert auch für diese Curve.

220. Da der Durchschnittspunkt T einer Tangente MT (Fig. 39) mit der ersten Axe immer zwischen den Scheiteln, folglich um so mehr zwischen den Brennpunkten liegt, und $OT = \frac{a^2}{\xi}$ ist [§. 218], so hat man, wenn $r = FM$, $r' = F'M$ die Leitstrahlen des Berührungspunktes M sind:

$$FT = e - \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi} \left(\frac{e\xi}{a} - a \right) = \frac{ar}{\xi},$$

$$F'T = e + \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi} \left(\frac{e\xi}{a} + a \right) = \frac{ar'}{\xi},$$

woraus:

$$FT : F'T = r : r'$$

folgt. Diese Proportion, auf das Dreieck $FF'M$ bezogen, spricht den Satz aus: die Tangente halbiert den von den Leitstrahlen des Berührungspunktes eingeschlossenen Winkel.

Dieses stimmt vollkommen mit der analogen Eigenschaft der Ellipse überein, daher auch alle dort [§. 207] gezogenen Folgerungen, so wie die daraus abgeleiteten Constructionen unmittelbar auf die Hyperbel übertragen werden können. In Bezug auf letztere, welche in Fig. 39 ausgeführt sind, entstehen aus dem Umstande, dass in der Hyperbel die Tangente zwischen den beiden Leitstrahlen, in der Ellipse ausserhalb derselben liegt, ganz geringe Modificationen, welche sogleich in die Augen fallen.

VON DEN DURCHMESSERN DER HYPERBEL.

221. Schliesst man die Richtung der Asymptoten aus, zu welchen bekanntlich keine parallelen Sehnen existiren, so entspricht auch in der Hyperbel jedem Systeme paralleler Sehnen ein geradliniger durch den Mittelpunkt gehender Durchmesser. Bezeichnen wir daher, wie §. 208, mit φ den Neigungswinkel der parallelen Sehnen gegen die als Abscissenaxe angenommene erste Axe, so finden wir als Gleichung des zugehörigen Durchmessers:

$$y = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x,$$

folglich, wenn ψ der Winkel ist, welchen der Durchmesser mit der x -Axe einschliesst:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2}. \quad (1)$$

Hieraus folgt, dass — wie in der Ellipse — jedem Durchmesser ein conjugirter entspricht, deren jeder die zu dem anderen parallel gezogenen Sehnen halbt.

Weil das Produkt $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$ stets positiv ist, so sind beide Winkel φ und ψ gleichzeitig spitz oder stumpf; in der Hyperbel liegen demnach zwei conjugirte Durchmesser immer in demselben Quadranten, und zwar, weil, wenn $\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} \varphi' > \frac{b}{a}$ sein muss, auf entgegengesetzten Seiten der Asymptote, so dass der eine Durchmesser zwischen der ersten Axe und der Asymptote, der conjugirte zwischen der Asymptote und der zweiten Axe liegt.

Nach dem am Schlusse des §. 218 Gesagten trifft nur der erste dieser beiden Durchmesser, nicht aber der zweite, die Hyperbel, welche Eigenschaft daher jedes System conjugirter Durchmesser mit dem Axensysteme gemein hat. Analog mit letzterem wollen wir jenen von zwei conjugirten Durchmessern den ersten nennen, welcher die Hyperbel schneidet, den anderen den zweiten.

Auch geht aus dem Gesagten hervor, dass die Zunahme des Winkels φ die Abnahme von ψ zur Folge hat, so dass zwei conjugirte Durchmesser sich immer näher rücken, je mehr sich der erste von der ersten Axe entfernt, und endlich in der Asymtote zusammenfallen.

In der gleichseitigen Hyperbel ist wegen $a = b$, $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = 1$, d. h. die Winkel, welche zwei conjugirte Durchmesser mit der ersten Axe einschliessen, ergänzen einander zu 90° .

222. Verbindet man die Endpunkte eines ersten Durchmessers DD' (Fig. 40) mit einem beliebigen Punkte M der Hyperbel, so hat man ein Paar Supplementarsehnen, für welche man auf dem in §. 209 betretenen Wege die Relation:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2}$$

findet, wenn φ , ψ die von denselben mit der ersten Axe eingeschlossenen Winkel bedeuten. Die Uebereinstimmung derselben mit der auf ein System conjugirter Durchmesser sich beziehenden Gleichung (1) im vorigen §. führt zu denselben Folgerungen, welche wir [§. 209] für die Ellipse erhalten haben. Um daher zu einem gegebenen Durchmesser DD' die Richtung des conjugirten zu construiren, ziehe man AN parallel zu DD' und verbinde N mit A , so ist EE' durch den Mittelpunkt zu AN parallel gezogen, die Richtung des conjugirten Durchmessers. Auch werden die Aufgaben, ein System conjugirter Durchmesser zu construiren, welche einen gegebenen Winkel einschliessen; und die Axen einer gegebenen Hyperbel zu construiren, in ähnlicher Weise wie bei der Ellipse [§. 210] aufgelöst.

Eben so, wie für die Ellipse, wird auch für die Hyperbel der Satz bewiesen, dass eine an die Curve gezogene Tangente parallel ist zu jenem Durchmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt gezogenen conjugirt ist.

DIE HYPERBEL BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER DURCHMESSER.

223. Nehmen wir ein System conjugirter Durchmesser, OX , OY (Fig. 41) der Hyperbel als Coordinatenaxen, und sind α , α' die Winkel, welche beziehungsweise der erste als Axe der x angenommene und der zweite Durchmesser mit der ersten Axe bilden, so haben wir in der Mittelpunkts-Gleichung $x \cos \alpha + y \cos \alpha'$ statt x und $x \sin \alpha + y \sin \alpha'$ statt y zu substituiren und erhalten dadurch als transformirte Gleichung:

$$y^2 (a^2 \sin \alpha'^2 - b^2 \cos \alpha'^2) + 2xy (a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha') - x^2 (b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2) = -a^2 b^2,$$

aus welcher zunächst in Folge der zwischen den Winkeln α , α' stattfindenden Bedingungsgleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = \frac{b^2}{a^2} \\ \text{oder} \quad & a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

das Glied mit xy verschwindet. Da ferner $\operatorname{tg} \alpha^2 < \frac{b^2}{a^2}$, und $\operatorname{tg} \alpha'^2 > \frac{b^2}{a^2}$, so sind die beiden Coefficienten von x^2 und y^2 wesentlich positiv; setzen wir daher:

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2}, \quad n^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 - b^2 \cos \alpha'^2}, \quad (2)$$

so erhalten wir als Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser:

$$m^2 y^2 - n^2 x^2 = -m^2 n^2, \quad (3)$$

welche, wie man sieht, mit der Mittelpunkts Gleichung der Form nach vollkommen übereinstimmt.

Aus (3) folgt für $y = 0$: $x^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OD'}^2 = m^2$, so dass m die Hälfte des ersten Durchmessers darstellt. Für $x = 0$ erhält man $y = \pm n \sqrt{-1}$; der zweite Durchmesser wird also, wie ohnehin bekannt, von der Hyperbel nicht geschnitten; der aus (2) folgende Werth von n wird der Analogie nach, als Länge des zweiten Durchmessers auf diesem aufgetragen ($OE = OE' = n$).

Die Gleichung der Asymptoten, bezogen auf die Hauptachsen, ist bekanntlich: $y = \pm \frac{b}{a} x$, und nimmt durch Erhebung zum Quadrate die Form $a^2 y^2 - b^2 x^2 = 0$ an. Transformiren wir dieselbe auf das obige System conjugirter Durchmesser OD , OE , so erhalten wir:

$y^2 (a^2 \sin \alpha'^2 - b^2 \cos \alpha'^2) - x^2 (b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2) = 0$,
woraus mit Rücksicht auf (2):

$$y = \pm \frac{n}{m} x \quad (4)$$

folgt. Also behält auch die Gl. der Asymptoten dieselbe Form, man mag was immer für ein System conjugirter Durchmesser als Coordinatenachsen wählen.

Setzt man in (4) $x = m = OD$, so wird $y = n = DG$, woraus folgt, dass die Asymptoten mit den Diagonalen des aus zwei beliebigen conjugirten Durchmessern construirten Parallelogrammes zusammenfallen; und umgekehrt: die Eckpunkte des aus zwei beliebigen Durchmessern construirten Parallelogrammes liegen auf den Asymptoten.

Sind daher die Hyperbel und ihre Asymptoten gegeben, so ist es mit Hülfe dieses Satzes leicht, die Länge des zu einem beliebigen ersten Durchmesser conjugirten zweiten Durchmessers zu construiren; oder die Asymptoten zu construiren, wenn ein Paar conjugirter Durchmesser der Richtung und Länge nach gegeben sind; oder unter derselben Voraussetzung die Richtung der beiden Axen der Hyperbel zu construiren, wenn man noch beachtet, dass diese die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbiren.

Die sechs Stücke a, b, m, n, a', a'' sind durch die 3 Gleichungen (1) und (2) verbunden, mit deren Hülfe daher aus drei gegebenen Stücken die anderen gefunden werden können. Auf dem in §. 213 betretenen Wege erhalten wir aus diesen Gleichungen.

$$ab = mn \sin (a' - a), \quad (5)$$

$$m^2 - n^2 = a^2 - b^2. \quad (6)$$

Es ist somit in der Hyperbel: 1) das aus zwei conjugirten Durchmessern construirte Parallelogramm constant und dem Rechtecke der Axen gleich, (wie in der Ellipse); 2) die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist eine constante Grösse und gleich der Differenz der Quadrate der beiden Axen.

Aus (6) folgt, dass m nicht $= n$ werden kann, wenn a von b verschieden ist; in der Hyperbel existirt also kein System conjugirter Durchmesser von gleicher Länge; ist hingegen $a = b$, so wird auch $m = n$, d. h. in der gleichseitigen Hyperbel haben je zwei conjugirte Durchmesser immer gleiche Länge.

Das in §. 215 Gesagte gilt unverändert auch von der Hyperbel.

DIE HYPERBEL BEZOGEN AUF IHRE ASYMTOTEN.

224. Bringt man die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel auf die Form:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right), \quad (1)$$

so erkennt man sogleich, dass derselben zwei geradlinigte Asymptoten zukommen, welche in der Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (2)$$

begriffen sind. Denn beim fortwährenden Wachsen von x nähert sich der aus (1) folgende Werth von y immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit dem aus (2) resultirenden

Ordinatenwerthe, d. h. mit anderen Worten, die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr den durch (2) dargestellten Geraden, ohne aber je mit ihnen zusammenzufallen; letztere sind daher Asymptoten der Hyperbel.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Hyperbel auf ihre Asymptoten als Coordinatenachsen bezogen, aufsuchen. Bezeichnen wir mit 2λ den Asymptotenwinkel, d. h. jenen von beiden Asymptoten gebildeten Winkel, in welchem die erste Axe liegt, so haben wir zum Behufe der Transformation der Mittelpunkts Gleichung von den Formeln (4) §. 160 Gebrauch zu machen und daselbst $\alpha = -\lambda$, $\alpha' = +\lambda$ zu setzen, somit in der Mittelpunkts Gleichung statt x und y die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x \cos \lambda + y \sin \lambda &= (y + x) \cos \lambda, \\ -x \sin \lambda + y \cos \lambda &= (y - x) \sin \lambda, \end{aligned}$$

zu substituiren. Nun ist $\operatorname{tg} \lambda = \frac{b}{a}$, somit $\cos \lambda^2 = \frac{a^2}{e^2}$, $\sin \lambda^2 = \frac{b^2}{e^2}$, wenn $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ die lineare Excentricität bedeutet. Hiemit geht die Mittelpunkts Gleichung über in:

$$a^2 (y - x)^2 \frac{b^2}{e^2} - b^2 (y + x)^2 \frac{a^2}{e^2} = -a^2 b^2,$$

woraus nach einfacher Reduktion:

$$xy = \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad (3)$$

als Asymptotengleichung der Hyperbel folgt.

Umgekehrt gehört jede auf recht- oder schiefwinklige Coordinaten bezogene Gleichung von der Form $xy = k^2$ einer (bei rechtwinkligen Coordinaten gleichseitigen) Hyperbel an, deren Excentricität $e = 2k$ ist. Die Grösse $k^2 = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ heisst die Potenz der Hyperbel.

Aus (3) folgt, dass das Rechteck aus den zu den Asymptoten parallelen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Hyperbel constant und dem Quadrate der halben Excentricität gleich, somit letztere die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden Coordinaten ist.

Sind daher die Asymptoten und ein Punkt der Hyperbel gegeben, so ist die Excentricität $e = 2\sqrt{xy}$ leicht zu construiren, wodurch, da die Richtung der ersten Axe den Asymptotenwinkel halbirt, die Brennpunkte und mit diesen die Längen der beiden Axen gefunden werden können, da (Fig. 38) $OH = OH' = \sqrt{a^2 + b^2} = e = OF$ ist.

Die Aufgabe, wenn ein System conjugirter Durchmesser der Richtung und Grösse nach gegeben ist, die Axen zu construiren, lässt sich jetzt ebenfalls leicht auflösen, indem man die Asymptoten und die Richtung der Axen nach dem vorigen §. construirt und beachtet, dass man in den Endpunkten des ersten Durchmessers zwei der Hyperbel angehörige Punkte hat.

225. Zieht man eine beliebige Sekante GH (Eig. 42), welche auf den beiden als Coordinatenaxen angenommenen Asymptoten die Stücke $OG = a$, $OH = \beta$ abschneidet, so ist die Gleichung derselben:

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{a} = 1. \quad (1)$$

Eliminirt man aus dieser und der Asymptotengleichung der Hyperbel y , so erhält man:

$$x^2 - ax + \frac{ae^2}{4\beta} = 0, \quad (2)$$

eine Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2 die Abscissen der Durchschnittspunkte M, M' der Hyperbel und Sekante sind. Ist nun L der Halbierungspunkt der Sehne MM' und sind ξ, η dessen Coordinaten, so hat man:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2}, \text{ womit aus (1) } \eta = \frac{\beta}{2}$$

sich ergibt. Hieraus folgt, dass der Punkt L auch die GH halbt. Da also $GL = HL$ und $LM = LM'$, so ist $HM = GM'$, d. h. die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Abschnitte einer beliebigen Sekante oder Sehne sind gleich. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass der Satz auch für eine solche Sehne (wie z. B. RS) gelte, welche zwei Punkte der beiden Hyperbeläste verbindet.

Hierauf gründet sich ein sehr einfaches Verfahren zur Construction der Hyperbel, wenn ein Punkt derselben und die Asymptoten gegeben sind. Sei M der gegebene Punkt der Hyperbel; man ziehe durch denselben eine beliebige Sekante, welche die Asymptoten in G und H schneidet und mache $GM' = HM$, so ist M' ein Punkt der Hyperbel. Jede andere durch M gezogene Sekante liefert einen neuen Punkt; jeder so erhaltene Punkt kann wieder als Ausgangspunkt genommen werden, wodurch die vier Zweige der Curve leicht erhalten werden.

Aus (2) folgt:

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a \left(a - \frac{e^2}{\beta} \right)}$$

soll die Sekante GH zur Tangente TT' werden, so müssen die beiden Durchschnittspunkte M, M' in einen einzigen Punkt I zusammenfallen, wozu erfordert wird, dass die Wurzelgrösse verschwinde; es ist also:

$$\alpha\beta = e^2$$

die Bedingungsgleichung für die Berührung, und für die Coordinaten $OP = \xi, PI = \eta$ des Berührungspunktes I erhält man:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}, \eta = \frac{\beta}{2};$$

somit ist $\alpha = OT = 2\xi, \beta = OT' = 2\eta$, mit welchen Werthen (1) in die Asymptotengleichung der Tangente:

$$\frac{y}{2\eta} + \frac{x}{2\xi} = 1$$

übergeht. Aus den so eben erhaltenen Werthen der von der Tangente auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken:

$$OT = 2\xi = 2OP, \quad OT' = 2\eta = 2PI$$

folgt:

1) $IT = IT'$; d. h. der Berührungspunkt halbirte das zwischen den Asymptoten enthaltene Stück der Tangente, welcher Satz übrigens in dem obigen von einer Sekante bewiesenen als specieller Fall enthalten ist.

2) Ein einfaches Verfahren zur Construction der Tangente an einem gegebenen Punkt der Hyperbel. Ist I dieser Punkt, so ziehe man IP parallel zu einer Asymptote, und mache $PT = PO$, so ist IT die gesuchte Tangente.

Multipliziert man die Asymptotengleichung der Hyperbel mit $\sin 2\lambda$, wo 2λ wie oben den Asymptotenwinkel bezeichnet, so kommt:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{e^2}{4} \sin 2\lambda;$$

nun ist:

$$\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda \cos \lambda = \frac{2ab}{e^2},$$

somit:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{1}{2} ab;$$

der Ausdruck $xy \sin 2\lambda$ stellt aber die Fläche des Parallelogrammes $IKOP$ vor, welches über den zu den Asymptoten parallelen Coordinaten IP, OP eines beliebigen Hyperbelpunktes construirt ist, diese Fläche ist also constant und dem 8^{ten} Theile des aus den beiden Axen $2a$ und $2b$ construirtes Rechteckes gleich.

III. Die Parabel.

226. Diese Curve unterscheidet sich von der Ellipse und Hyperbel wesentlich dadurch, dass sie keinen Mittelpunkt, folglich nur einen Hauptdurchmesser und nur einen Brennpunkt besitzt. Nimmt man den Hauptdurchmesser, die Axe der Parabel, als Abscissenaxe, den Durchschnittspunkt desselben mit der Curve (den Scheitel) als Ursprung, so ist bekanntlich die Gleichung der Parabel:

$$y^2 = px,$$

wo die Constante p der Parameter der Parabel genannt wird.

Man definiert die Parabel gewöhnlich nach der [aus §. 200] bekannten Eigenschaft derselben, dass jeder ihrer Punkte von einer festen Geraden (der Richtlinie) und einem festen Punkte (dem Brennpunkte) gleichweit entfernt ist. Der Parameter ist bekanntlich das Doppelte des Abstandes des Brennpunktes von der Richtlinie und folglich gleich der im Brennpunkte errichteten Doppelordinate.

Wie mit Hülfe obiger Eigenschaft die Parabel durch Punkte construirt werden kann, wenn Brennpunkt und Richtlinie gegeben sind, fällt sogleich in die Augen. Aus der Gleichung der Curve erhellt übrigens, dass die Ordinate jedes Punktes derselben die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen seiner Abscisse und dem Parameter, woraus folgt, dass jedes Verfahren der Elementar-Geometrie, zu zwei gegebenen Strecken die 3^{te} geometrische Proportionale zu finden, zur Construction der Parabel benützt werden kann.

VON DER TANGENTE AN DER PARABEL.

227. Verbinden wir die Gleichung der Parabel $y^2 = px$, mit der Gleichung $y = ax + b$ einer Geraden, so erhalten wir zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a^2x^2 - (p - 2ab)x + b^2 &= 0, \\ y &= ax + b. \end{aligned} \quad (a)$$

Ist $a = 0$, d. h. die Gerade parallel zur x -Axe, so sinkt die Gl. (a) auf den 1^{ten} Grad herab, woraus folgt, dass eine zur x -Axe parallele Gerade die Parabel nur in einem Punkte schneidet. Ist aber a von Null verschieden, so zieht man aus (a) den Werth:

$$x = \frac{p - 2ab \pm \sqrt{p(p - 4ab)}}{2a^2},$$

woraus erhellt, dass die Gerade die Parabel nicht trifft, wenn $p < 4ab$, und in zwei Punkten schneidet, wenn $p > 4ab$. Sollen die beiden

Durchschnittspunkte in einen einzigen zusammenfallen, die Secante also zur Tangente werden, so muss die Bedingung

$$p = 4ab \quad (\beta)$$

erfüllt werden, und man erhält als Coordinaten des Berührungspunktes:

$$\xi = \frac{p - 2ab}{2a^2}, \quad \eta = \frac{p}{2a},$$

woraus, da $\eta^2 = p\xi$ ist, $a = \frac{p}{2\eta}$, $b = \frac{\eta}{2}$ folgt. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Geraden, so erhält man als Gleichung der Tangente am Punkte ξ, η :

$$y = \frac{p}{2\eta} x + \frac{\eta}{2},$$

welche, indem man beiderseits η abzieht und aus dem zweiten Theile den Faktor $\frac{p}{2\eta}$ heraushebt, mit Rücksicht auf die Gl. $\eta^2 = p\xi$, die bequemerer Formen:

$$y - \eta = \frac{p}{2\eta} (x - \xi), \quad (1)$$

oder

$$y\eta = \frac{p}{2} (x + \xi) \quad (2)$$

annimmt. Der Winkel τ , welchen die Tangente im Punkte ξ, η mit der x -Axe einschliesst, ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\xi}} \quad (3)$$

bestimmt. Für $\eta = 0$ wird $\tau = 90^\circ$, d. h. die Tangente am Scheitel steht auf der Axe senkrecht; je grösser η oder ξ wird, d. h. je weiter sich der Berührungspunkt vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird τ und folglich die Tangente immer mehr und mehr zur Axe parallel.

Für die Gleichung der Normale im Punkte ξ, η erhält man aus (1):

$$y - \eta = -\frac{2\eta}{p} (x - \xi). \quad (4)$$

Setzt man in der Gl. (1) der Tangente und jener (4) der Normale, $y = 0$, so stellt $x - \xi$ beziehungsweise die Subtangente PT (Fig. 43) und Subnormale PN vor; man erhält daher:

$$\text{Subtangente } PT = -2\xi, \text{ Subnormale } PN = \frac{p}{2}.$$

In der Parabel ist daher die Subtangente gleich der doppelten vom Scheitel aus gezählten Abscisse des Berührungspunktes, die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

Wie diese beiden Eigenschaften zu einer sehr einfachen Construction der Tangente oder Normale an einem gegebenen Parabelpunkte benützt werden können, fällt sogleich in die Augen.

Da $PT = 2\xi$, so ist auch $AT = \xi$, somit $FT = \xi + \frac{p}{4} = FM$ und das Dreieck MFT gleichschenkelig; zieht man daher noch durch den Berührungspunkt M die RD senkrecht auf die Richtlinie UU' , so ist:

$$\angle FMT = MTF = DMT = RMT';$$

beachtet man nun noch, dass wegen $MF = MD$ das $\triangle MDF$ gleichschenkelig ist, so ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Winkel, welche die Tangente mit dem Radiusvektor des Berührungspunktes und einer durch letzteren parallel zur Axe gezogenen Geraden bildet, sind gleich; folglich wird auch der von dieser Geraden und dem Leitstrahle gebildete Winkel durch die Normale halbiert.

2) Die Gerade, welche den Brennpunkt mit dem Fusspunkte des vom Berührungspunkte auf die Richtlinie gefällten Perpendikels verbindet, wird von der Tangente senkrecht geschnitten und halbiert.

Man sieht von selbst, wie auch diese Eigenschaften in mehr als einer Weise zur Construction der Tangente oder Normale an einem gegebenen Punkte der Parabel benützt werden können.

Da die FD im Punkte K , die BF im Scheitelpunkte A halbiert wird, so ist AK parallel zu UU' , somit senkrecht auf die Axe; bemerkt man nun, dass K der Fusspunkt des aus dem Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels ist, so ergibt sich der Satz: der geometrische Ort der Fusspunkte der aus dem Brennpunkte auf die Tangenten gefällten Perpendikel ist die durch den Scheitel senkrecht auf die Axe gezogene Gerade.

228. Um von einem ausserhalb der Parabel gelegenen Punkte G (Fig. 44) eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beachte man, dass nach Obigem jeder Punkt der Tangente GM von den beiden Punkten F und D gleichweit entfernt ist und folglich auch die Tangente die FD senkrecht durchschneidet. Beschreibt man daher aus G mit dem Halbmesser GF einen Kreis, welcher die Richtlinie in zwei Punkten D und D' schneidet, so sind die aus G auf DF und $D'F$ gefällten Perpendikel die gesuchten Tangenten. Oder man ziehe durch D und D' Parallele zur Axe, deren Durchschnittspunkte mit der Parabel die Berührungspunkte M, M' geben.

Um die Aufgabe analytisch aufzulösen, seien x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten ξ, η des Berührungspunktes die beiden Gleichungen:

$$y'\eta = \frac{p}{2} (x' + \xi) \text{ und } \eta^2 = p\xi, \quad (m)$$

deren erste ausdrückt, dass die Tangente durch den Punkt x', y' geht, die zweite, dass der Berührungspunkt auf der Parabel liegt. Durch Elimination von ξ erhält man:

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 - px'},$$

woraus folgt, dass durch den Punkt x', y' zwei Tangenten, eine oder gar keine gezogen werden kann, je nachdem $y'^2 >, =$ oder $< px'$ ist, d. h. jenachdem der Punkt x', y' ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt. Zur Construction der Berührungspunkte bedient man sich am einfachsten der geometrischen Oerter der Gleichungen (m). Der Ort der zweiten Gleichung ist die gegebene Parabel selbst; jener der ersten eine Gerade, die Berührungssehne, welche die Coordinatenaxen in den Punkten E und H schneidet, für welche man, einmal η , dann $\xi = 0$ setzend:

$$\xi = AE = -x', \quad \eta = AH = \frac{px'}{2y'}$$

findet, welche Punkte daher leicht construirt werden können. Zieht man dann die EH , so schneidet diese die Parabel in den gesuchten Berührungspunkten M und M' .

Da die Abscisse $AE = -x'$ des Punktes, in welchem die Berührungssehne die Axe schneidet, von der Ordinate y' des gegebenen Punktes unabhängig ist, so gilt auch in der Parabel der Satz: Wenn von beliebigen Punkten einer auf der Axe der Parabel senkrecht stehenden Geraden (Polare) Tangenten an die Curve gezogen werden, so schneiden sich sämtliche Berührungssehnen in einem und demselben auf der Axe gelegenen Punkte (Pol); und umgekehrt.

Ein beachtenswerthes Resultat ergibt sich noch, wenn man den Punkt x', y' auf der Direktrix annimmt, wodurch $x' = -\frac{p}{4}$ und die Ordinate η der Berührungspunkte

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4} p^2}$$

wird. Bezeichnet man nun mit τ, τ' die Neigungswinkel der beiden Tangenten gegen die Axe der x , so hat man [Gl. (3), §. 227]:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\left(y' + \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4} p^2}\right)}, \quad \operatorname{tg} \tau' = \frac{p}{2\left(y' - \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4} p^2}\right)},$$

woraus $\operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \tau' = -1$ folgt, d. h. die beiden Tangenten stehen auf einander senkrecht.

Die Gleichung der Berührungssehne wird:

$$\eta = \frac{p}{2y'} \left(\xi - \frac{p}{4} \right), \quad (n)$$

woraus für $\eta = 0 : \xi = \frac{p}{4}$ folgt; d. h. die Berührungssehne geht durch den Brennpunkt.

Die Gleichung der Geraden, welche den Brennpunkt mit dem Punkte $x' = -\frac{p}{4}, y'$ verbindet, ist endlich:

$$y - y' = -\frac{2y'}{p} \left(x + \frac{p}{4} \right),$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (n) folgt, dass diese Gerade auf der Berührungssehne senkrecht steht.

VON DEN DURCHMESSERN DER PARABEL.

229. Es sei SS' (Fig. 45) eine unter dem Winkel φ gegen die Axe geneigte Sehne, folglich $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$ ihre Gleichung, so erhalten wir durch Verbindung derselben mit der Gleichung der Parabel, $y^2 = px$, zur Bestimmung der Ordinaten der Durchschnittspunkte die Gleichung:

$$y^2 - p \cotg \varphi \cdot y + pb \cotg \varphi = 0,$$

wobei wir φ von 0 verschieden voraussetzen, weil sonst [§. 227] die Gerade die Parabel nur in einem Punkte schneiden, folglich keine Sehne darstellen könnte. Sind dann y_1, y_2 die Ordinaten der Durchschnittspunkte S, S' , so ist $y_1 + y_2 = p \cotg \varphi$, und wenn mit β die Ordinate des Halbirungspunktes C der Sehne bezeichnet wird:

$$\beta = \frac{1}{2} p \cotg \varphi. \quad (1)$$

Da dieser Werth von β bloss von dem Neigungswinkel φ der Sehne abhängig ist, so folgt, dass in der Parabel der geometrische Ort der Halbirungspunkte eines Systems paralleler Sehnen, d. h. der zu diesem Sehnensysteme gehörige Durchmesser eine zur Axe parallele Gerade ist, wie aus den allgemeinen Untersuchungen des vorigen Kapitels bereits bekannt ist. Mit Hülfe der Gl. (1) findet man den zu einem gegebenen Chordensysteme zugehörigen Durchmesser und umgekehrt; indem, wenn β , d. i. der Abstand des Durchmessers $A'X'$ von der Axe gegeben ist, aus (1):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{2\beta} \quad (2)$$

sich ergibt. Zieht man in dem Punkte A' , in welchem der Durchmesser die Parabel schneidet, eine Tangente an dieselbe, so hat man, da β die Ordinate von A' , für den Neigungswinkel τ derselben gegen die Axe den Ausdruck $\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\beta}$ [Gl. (3), §. 227], somit wegen (2): $\tau = \varphi$.

Es ist somit die Tangente parallel zu jenen Sehnen, welche von dem durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser halbt werden.

Diese Eigenschaft hat also die Parabel mit der Ellipse und Hyperbel gemein; in den zwei letztgenannten Curven existirt aber ein zur Tangente paralleler, dem Durchmesser des Berührungspunktes conjugirter Durchmesser, welcher in der Parabel, da dieselbe keinen Mittelpunkt hat, fehlt. Der Analogie nach wird in der Parabel eine Tangente und der Durchmesser des Berührungspunktes ein System conjugirter Durchmesser oder besser conjugirter Axen genannt. Die Scheiteltangente und die Axe der Parabel, welche beide der Gleichung $y^2 = px$ als Coordinatenachsen zu Grunde liegen, bilden, wie man sieht, ebenfalls ein solches System conjugirter Axen und zwar das einzige rechtwinklige, weil nur für $\beta = 0$ aus (2) $\varphi = 90^\circ$ sich ergibt.

DIE PARABEL, BEZOGEN AUF EIN SYSTEM CONJUGIRTER AXEN.

230. Sei $A'X', A'Y'$ (Fig. 45), ein System conjugirter Axen, auf welche wir nun die Parabel beziehen wollen; $\angle X'A'Y' = \varphi$; α, β die Coordinaten des neuen Ursprunges A' , bezogen auf die Hauptachsen AX, AY . Um die Gleichung $y^2 = px$ auf das neue Coordinatensystem zu transformiren, haben wir von den Formeln (4), §. 160, Gebrauch zu machen und statt a, b, α, α' beziehungsweise $\alpha, \beta, 0, \varphi$ zu setzen, wodurch dieselben in $x = \alpha + x' + y' \cos \varphi, y = \beta + y' \sin \varphi$ übergehen. Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung $y^2 = px$ kommt:

$$y'^2 \sin^2 \varphi + y' (2\beta \sin \varphi - p \cos \varphi) + \beta^2 - p\alpha = px'.$$

Es ist aber in Folge der Gl. (2) des vorigen §.:

$$2\beta \sin \varphi - p \cos \varphi = 0;$$

ferner, da der Punkt α, β in der Parabel liegt, $\beta^2 = p\alpha$; hiedurch verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$y'^2 = p \operatorname{cosec}^2 \varphi \cdot x', \quad (1)$$

und diese ist die Gleichung der Parabel vom Parameter $= p$,

bezogen auf ein System conjugirter Axen, welche den Winkel φ einschliessen. Setzt man:

$$p \operatorname{cosec} \varphi^2 = m, \quad (2)$$

so nimmt sie die mit der Scheitelgleichung der Parabel vollkommen übereinstimmende Form:

$$y^2 = mx \quad (3)$$

an. Jede Gleichung von dieser Form, welche sich auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem vom Coordinatenwinkel φ bezieht, gehört demnach einer Parabel an, deren Parameter $p = m \sin \varphi^2$ ist.

Aus (2) [§. 229] folgt: $\sin \varphi^2 = \frac{p^2}{4\beta^2 + p^2} = \frac{p}{4a + p}$, weil $\beta^2 = ap$; hiemit wird $m = p + 4a$. Nun ist aber der Radiusvektor r des Punktes A' : $r = a + \frac{p}{4}$, somit $m = 4r$, woraus die geometrische Bedeutung der Constante m in (3) erhellt. Dieselbe ist, wie man sieht, das Vierfache des Abstandes des Ursprunges A' vom Brennpunkte.

Aus der Uebereinstimmung der Form der Gl. (3) der Parabel, bezogen auf ein System conjugirter Axen, mit der Scheitelgleichung folgt, dass alle früher entwickelten Eigenschaften, welche von dem Coordinatenwinkel unabhängig sind, auf das neue System übertragen werden können.

So erkennt man aus (3), dass in jedem Systeme conjugirter Axen die Ordinaten die mittleren geometrischen Proportionalen sind zwischen den Abscissen und dem Parameter m . Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren zur Construction der Parabel $y^2 = mx$, wenn die Axen OX , OY , (Fig. 46) und m gegeben sind. Man errichte in O das Perpendikel OY' auf OX und construire mit dem Parameter m über OX als Axe die Parabel BOC . Zieht man sodann aus verschiedenen Punkten P , P' , ... der OX -Parallele zu OY' und OY , von welchen die ersten die Parabel BOC in den Punkten m , m' , ... schneiden, und macht $PM = Pm$, $P'M' = P'm'$, u. s. w., so erhält man Punkte M , M' , ... welche der Parabel $y^2 = mx$ angehören.

Uebrigens kann man auch zuerst Brennpunkt und Richtlinie der Parabel construiren. Sind nämlich OX , OY (Fig. 47) die gegebenen conjugirten Axen und zwar OX der Durchmesser, so ist OY eine Tangente an der Parabel im Punkte O ; macht man daher $\angle TOu = XOY$, so geht Ou durch den Brennpunkt; nimmt man ferner $OF = \frac{1}{4} m$, so ist F der Brennpunkt, und die durch F parallel zu OX gezogene Gerade FX' die Axe. Wird endlich OX über O hinaus verlängert und $OD = OF$ gemacht, so ist UU' durch D senkrecht auf FX' gezogen, die Richtlinie.

Durch ein ähnliches Verfahren findet man die Elemente einer Parabel, welche schon construirt gegeben ist. Durch Halbierung zweier parallel gezogener Sehnen ergibt sich zunächst ein Durchmesser OX und die Richtung der Tangente OY , womit die Richtung Ou construirt werden kann, in welcher der Brennpunkt liegen muss. Wiederholt man diese Construction unter Anwendung eines anderen Paares paralleler Sehnen, so ergibt sich der Brennpunkt und hiemit die Richtlinie und Axe.

Die auf die Tangente sich beziehenden Gleichungen (1) (2) und (3), [§. 227] gelten auch für ein System conjugirter Axen, wenn man nur den Parameter p durch die Constante m der Gl. (3) ersetzt; daher ist auch in einem schiefwinkligem Coordinatensysteme die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes.

Da ferner auch die Formeln des §. 228 unverändert bleiben, so kann der letzte a. a. O. ausgesprochene Satz nun allgemeiner folgendermassen ausgedrückt werden: Wenn von beliebigen Punkten irgend einer in der Ebene der Parabel gelegenen Geraden (Polare) Tangenten an die Curve gezogen werden, so schneiden sich sämmtliche Berührungssehnen in einem Punkte (Pol), welcher auf jenem Durchmesser liegt, dessen conjugirter der gegebenen Geraden parallel liegt. Dieser Satz lässt sich auf bekannte Weise umkehren und gilt demnach für alle Linien zweiter Ordnung.

SECHSTES KAPITEL.

UEBER DIE POLARGLEICHUNGEN DER LINIEN ZWEITER ORDNUNG, UND UEBER DIE BESTIMMUNG DIESER CURVEN NACH GEGEBENEN BEDINGUNGEN.

I. Polargleichungen der Linien zweiter Ordnung.

231. Bekanntlich kann die Lage eines Punktes M in einer Ebene durch seine Entfernung von einem festen Punkte, dem Pole, und den Winkel bestimmt werden, welchen diese Entfernung mit einer durch den Pol gelegten festen Geraden, der Polaraxe, einschliesst. Man nennt diese Bestimmungsstücke Polarcoordinaten; die eine dieser Coordinaten, die Entfernung des Punktes M vom Pole führt den Namen Radiusvector; die andere, der obenerwähnte Winkel, kann Polarwinkel genannt werden. Ist nun M ein Punkt einer nach einem

bestimmten Gesetze gebildeten Curve, so muss sich dieses Gesetz durch eine zwischen den Polarcoordinaten r , θ dieses Punktes der Curve stattfindende Gleichung $\varphi(r, \theta) = 0$ oder $r = f(\theta)$ ebenso ausdrücken lassen, wie diess durch Parallelcoordinaten bisher geschehen ist. Die Gleichung $r = f(\theta)$ heisst die Polargleichung der Curve.

Ist die auf Parallelcoordinaten bezogene Gleichung der Curve, $y = f(x)$, gegeben, so erhält man die Polargleichung, indem man in der Gl. $y = f(x)$ die Werthe von x und y , in Funktion von r und θ ausgedrückt, einsetzt, wozu die Formeln (1) oder (3), [§. 157] dienen. Eben so kann man umgekehrt durch Anwendung der Formeln (2) oder (4) a. a. O. aus der Polargleichung die Gl. $y = f(x)$ ableiten.

Im Folgenden wollen wir die Polargleichungen der Linien zweiter Ordnung entwickeln, und zwar — was hier bequemer ist — mit Benützung bereits bekannter Eigenschaften derselben, ohne von der oben erwähnten Transformation Gebrauch zu machen. Wir werden dabei einen Brennpunkt als Pol und die durch denselben gehende Axe der Curve als Polaraxe annehmen; den Polarwinkel werden wir von jenem Theile der Axe aus zählen, in welchem bei der Parabel und Hyperbel die Scheitel, und bei der Ellipse der dem Pole nähere Scheitel liegt.

I. Ellipse. Sei (Fig. 31) F der Pol, FX die Polaraxe, M ein Punkt der Curve, $FM = r$, $\angle MFX = \theta$, so hat man, wenn wir die vom Mittelpunkt gezählte Abscisse $OP = x$ und die numerische Excentricität $\frac{e}{a} = \varepsilon$ setzen, bekanntlich $r = a - \varepsilon x$; somit, weil:

$x = OF - PF = a\varepsilon + r \cos \theta$ ist, $r = a(1 - \varepsilon^2) - r\varepsilon \cos \theta$,
woraus die gesuchte Polargleichung der Ellipse:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (1)$$

folgt. Durch Einführung des Parameters $p = \frac{2b^2}{a} = 2a(1 - \varepsilon^2)$ erhält dieselbe die Form:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)} \quad (2)$$

In der Ellipse ist bekanntlich $\varepsilon < 1$, daher auch $\varepsilon \cos \theta$ immer numerisch kleiner als 1, und r kann weder negativ noch unendlich werden. Verfolgt man die Werthe, welche der Radiusvektor r annimmt, während θ von 0 bis 360° wächst, so findet man leicht, dass die Gl. (1) oder (2), indem r immer positiv bleibt, die ganze Ellipse darstellen, wenn man θ alle Werthe von 0 bis 360° durchlaufen lässt.

II. Hyperbel. Sei (Fig. 39) F der Pol, FX' die Polaraxe, $FM = r$, $\angle MFX' = \theta$, so ist $r = \varepsilon x - a$ und $x = OP = OF + FP = a\varepsilon - r \cos \theta$, somit $r = a(\varepsilon^2 - 1) - r\varepsilon \cos \theta$, woraus als Polargleichung der Hyperbel:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (3)$$

folgt, welche durch Einführung des Parameters $p = \frac{2b^2}{a} = 2a(\varepsilon^2 - 1)$ die Form:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)} \quad (4)$$

annimmt. Da in der Hyperbel $\varepsilon > 1$, so kann r unendlich und negativ werden. Verfolgt man die Werthe von r , während θ von 0 bis 360 wächst, und bezeichnet mit θ' jenen zwischen 90° und 180° liegenden Werth von θ , für welchen:

$$\cos \theta' = -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ also } \operatorname{tg} \theta' = -\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = -\frac{b}{a}$$

ist, und welcher $r = \infty$ macht; so findet man leicht, dass der Radiusvektor den Hyperbelast $M'A'M''$ beschreibt, während θ von θ' bis 360° — θ' wächst, wenn man die für diese Werthe von θ aus (4) folgenden negativen Werthe von r auf dem rückwärts über den Pol hinaus verlängerten Radiusvektor aufträgt. Von $\theta = 0$ bis $\theta = \theta'$, und von $\theta = 360^\circ - \theta'$ bis 360° ist r positiv, und beschreibt in dem ersteren Intervalle den Zweig AM , in letzterem den Zweig AM'' desjenigen Hyperbelastes, dessen Brennpunkt der Pol ist.

III. Parabel. Für diese Curve hat man:

$$r = x + \frac{p}{4},$$

und wenn (Fig. 27) $\angle AFM = \theta$ ist, $x = AP = AF + FP = \frac{p}{4} - r \cos \theta$; somit:

$$r = \frac{p}{2(1 + \cos \theta)} = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} \theta^2}. \quad (5)$$

Man überzeugt sich ohne Mühe, dass diese Gleichungen die ganze Parabel darstellen, wenn man θ alle Werthe von 0 bis 360° durchlaufen lässt, wobei r immer positiv bleibt.

232. Die Vergleichung der Gleichungen (3), (4) und (5) lehrt, dass die Polargleichung:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)} \quad (m)$$

alle drei Curven umfasst, und einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel angehört, je nachdem ε kleiner, grösser oder gleich 1 ist.

Es tritt wohl selten eine Veranlassung ein, einen anderen Punkt, als den Brennpunkt, als Pol anzunehmen; wohl kann aber der Fall vorkommen, dass die Polaraxe nicht mit der durch die Brennpunkte gehenden Axe zusammenfällt, wie diess obige Gleichungen voraussetzen, sondern unter einem Winkel α gegen dieselbe geneigt ist. Man hat

dann, wie man leicht findet, nur $\theta + \alpha$ an die Stelle von θ zu setzen, wodurch man allgemeiner:

$$r = \frac{p}{2[1 + \varepsilon \cos(\alpha + \theta)]} \quad (n)$$

für die Polargleichung der Linien 2^{ter} Ordnung erhält.

Die Polargleichung der Hyperbel giebt uns noch zur folgenden Bemerkung über Polarcoordinaten überhaupt Veranlassung. So lange es sich bloss um die Bestimmung der Lage einzelner Punkte in der Ebene handelt, kann der Radiusvektor immer als eine wesentlich positive Grösse betrachtet werden, wenn man den Polarwinkel von 0 bis 360° nimmt. Diess ist nicht immer so, wenn man eine Curve durch eine Polargleichung darstellen will. Die Hyperbel bot ein Beispiel, wo wir negative Werthe des Radiusvector zulassen mussten, damit eine und dieselbe Gleichung beide Aeste der Hyperbel gebe. Um für den links liegenden Ast der Hyperbel ebenfalls positive Werthe von r zu erhalten, müssten wir die Gleichung:

$$r = \frac{p}{2(1 - \varepsilon \cos \theta)}$$

anwenden, welche aus der früheren hervorgeht, wenn man $180^\circ + \theta$ statt θ schreibt, unter θ wieder den Winkel verstanden, welcher von einem zu dem in Rede stehenden Aste gezogenen Radiusvektor mit dem durch die Scheitel gehenden Theile der Polaraxe eingeschlossen wird.

Bei den bisher betrachteten Polargleichungen genügte es ferner, den Polarwinkel θ zwischen den Grenzen 0 und 360° sich bewegen zu lassen. Auch diess ist bei manchen Curven (z. B. den Spiralen) unzulässig; offenbar immer dann, wenn die Polargleichung nicht bloss periodische Functionen von θ , wie $\sin$, $\cos$ etc., sondern den Bogen θ selbst enthält, welcher dann im Allgemeinen aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig betrachtet werden muss. Es ist dann überhaupt der Natur der Sache angemessen, beide Polarcoordinaten r und θ (gleich den Parallelcoordinaten) als lineare Coordinaten aufzufassen; mit dem Unterschiede, dass r eine geradlinige Länge, θ aber die Länge eines Bogens bezeichnet, welcher auf einem mit dem Halbmesser $= 1$ aus dem Pole als Mittelpunkt beschriebenen Kreise aufgetragen wird, und zwar von einem der beiden Punkte aus, in welchen der Kreis von der Polaraxe geschnitten wird, nach der einen oder anderen Richtung, je nachdem θ positiv oder negativ genommen wird.

II. Ueber die Bestimmung der Linien des zweiten Grades nach gegebenen Bedingungen.

233. Man kann die Aufgabe stellen, eine Linie der zweiten Ordnung zu suchen, sei es auf dem Wege der Analyse oder durch Con-

struction, welche gewissen Bedingungen Genüge leistet; z. B. durch eine Anzahl gegebener Punkte geht, oder gegebene Gerade berührt, u. dgl. Die allgemeine Gleichung dieser Linien ist bekanntlich:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0$$

und nimmt durch Division mit F die Form:

$$ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cx + 2c'y + 1 = 0 \quad (1)$$

an, in welcher dieselbe noch fünf unbestimmte Constanten enthält, zu deren Bestimmung daher im Allgemeinen fünf von einander unabhängige Bedingungen erfordert werden und hinreichend sind.

Soll die gesuchte Curve eine Parabel sein, so genügen vier Bedingungen zu deren Bestimmung, da für diesen Fall noch die Bedingungsgleichung $b^2 - aa' = 0$ erfüllt werden muss.

Ob die Aufgabe nun eine oder mehrere Auflösungen zulasse, d. h. ob es nur eine oder mehrere Curven 2^{ter} Ordnung gibt, welche den gegebenen Bedingungen Genüge leisten, hängt von der Natur der letzteren ab, je nachdem sie auf Gleichungen führen, welche nach a, b, c, d, e vom ersten oder von höherem Grade sind.

Eine der einfachsten Aufgaben ist jene, durch fünf gegebene Punkte eine Linie der 2^{ten} Ordnung zu legen. Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines dieser Punkte, so müssen dieselben der Gl. (1) Genüge leisten, wodurch sich die Bedingungsgleichung:

$$ax_1^2 + a'y_1^2 + 2bx_1y_1 + 2cx_1 + 2c'y_1 + 1 = 0$$

ergibt; jeder der vier anderen Punkte liefert eine Gleichung von derselben Form; die so erhaltenen 5 Bedingungsgleichungen sind, wie man sieht, in Bezug auf die Unbekannten a, a' , u. s. w. vom ersten Grade und geben daher für jede derselben nur einen reellen Werth, daher auch die Aufgabe nur eine Auflösung zulässt. Werden die gefundenen Werthe von a, a' , u. s. w. in (1) substituirt, so hat man die Gleichung der gesuchten Curve, welche durch die gegebenen 5 Punkte geht, und eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein wird, je nachdem $b^2 - aa' < 0, > 0$ oder $= 0$ sich ergibt. Hieraus folgt zugleich, dass zwei Linien zweiter Ordnung, ohne zusammenzufallen, nicht mehr als 4 Punkte gemeinschaftlich haben können.

Soll die gesuchte Curve eine Parabel sein, so sind nur 4 Punkte zur Bestimmung derselben erforderlich, weil zu den durch diese gelieferten 4 Bedingungsgleichungen noch die Gleichung $b^2 - aa' = 0$ hinzutritt, deren quadratische Form übrigens zur Folge hat, dass durch 4 Punkte im Allgemeinen zwei Parabeln gelegt werden können, und unter Umständen auch gar keine, wenn die Auflösung auf imaginäre Resultate führt.

Da übrigens eine Curve 2^{ter} Ordnung von einer Geraden in nicht mehr als 2 Punkten geschnitten werden kann, so ist von selbst einleuchtend, dass von den gegebenen Punkten nicht 3 in einer Geraden liegen dürfen. Wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würde man durch die Auflösung wohl eine Gleichung 2^{ten} Grades finden, welche jedoch keiner Curve, sondern zweien oder einer Geraden angehört, auch wohl unbestimmt werden kann.

Die analytische Auflösung ist auf dem oben angedeuteten Wege, in Folge der auszuführenden Eliminationen, ziemlich weitläufig, selbst wenn man die Coordinatenachsen so legt, dass 4 von den 10 Coordinaten der 5 Punkte = 0 werden. Einfacher gelangt man auf folgendem Wege zum Ziele, wobei man von der in der Anmerkung zu §. 172 gemachten Bemerkung Gebrauch macht. Seien M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 die gegebenen Punkte. Lassen wir vorläufig einen derselben, z. B. M_5 ganz beiseite; durch die 3 übrigen lassen sich 6 gerade Linien ziehen, aus welchen wir vier wählen mit der Bedingung, dass nicht 3 derselben durch einen und denselben Punkt gehen. Seien z. B. (1, 2), (3, 4), (1, 4), (2, 3) die gewählten Geraden, deren Gleichungen durch:

$$(1, 2) = 0, (3, 4) = 0, (1, 4) = 0, (2, 3) = 0$$

dargestellt werden mögen. Man bilde durch Multiplikation die Gleichungen 2^{ten} Grades nach x, y :

$$(1, 2) \cdot (3, 4) = 0, (1, 4) \cdot (2, 3) = 0,$$

so stellt die erste derselben das System der zwei Geraden (1, 2) und (3, 4) vor, und wird daher durch die Coordinaten der 4 Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 befriedigt; die zweite hat die beiden Geraden (1, 4) und (2, 3) zum geometrischen Orte, daher ihr dieselben Coordinaten Genüge leisten. Multipliciren wir daher eine dieser Gleichungen mit einer unbestimmten Constanten λ , und addiren wir sie zur anderen, so erhalten wir die Gleichung:

$$(1, 2) \cdot (3, 4) + \lambda (1, 4) \cdot (2, 3) = 0 \quad (\alpha)$$

welche offenbar durch die Coordinaten derselben 4 Punkte identisch wird, und daher, weil sie vom 2^{ten} Grade ist, die allgemeine Gleichung aller Linien der zweiten Ordnung sein wird, welche durch die 4 Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 , gelegt werden können.

Damit nun die Curve auch noch den Punkt M_5 enthalte, wird man die Coordinaten dieses Punktes statt x und y in (α) substituiren, wodurch sich eine Bedingungsgleichung ergibt, aus welcher λ gefunden wird. Soll die Curve eine Parabel sein, so bestimmt sich λ aus (α) selbst durch die Bedingung $b^2 - aa' = 0$.

Wenn die Curve, statt durch den Punkt M_3 zu gehen, eine gegebene Gerade berühren soll, so wird man aus (α) mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Geraden, $y = mx + n$, eine Veränderliche eliminiren und ausdrücken, dass die Eliminationsgleichung zwei gleiche Wurzeln besitze, wodurch sich wieder eine Bedingungs-gleichung zur Bestimmung von λ ergibt.

Befinden sich unter den gegebenen Stücken gewisse ausgezeichnete, den Linien zweiter Ordnung zukommende Punkte oder Linien, so wird dadurch die Anzahl der zur Bestimmung der Curve nöthigen Bedingungen vermindert. Ist z. B. der Mittelpunkt gegeben, wenn es sich um eine Ellipse oder Hyperbel handelt, so sind nur noch 3 Bedingungen erforderlich, da dann die Gleichung, wenn der Mittelpunkt als Ursprung genommen wird, nothwendig die Form:

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2 + 1 = 0$$

haben muss, welche nur 3 unbestimmte Constanten enthält.

Eben so verhält es sich, wenn ein Brennpunkt gegeben ist. Denn wird dieser als Pol und eine beliebige durch denselben gelegte Gerade als Polaraxe angenommen, so ist die Polargleichung der Linien 2^{ter} Ordnung:

$$r = \frac{p}{2[1 + \varepsilon \cos(\alpha + \theta)]},$$

welche nur 3 unbestimmte Constanten, p , ε und α enthält. Die zur Bestimmung derselben erforderlichen 3 Bedingungen reduciren sich auf zwei, wenn die Curve eine Parabel sein soll, weil für diese $\varepsilon = 1$.

Nehmen wir z. B. an, es seien nebst dem Brennpunkte 3 Punkte gegeben, durch welche die Curve gehen soll; bringt man die obige Gleichung auf die Form:

$$r + r\varepsilon \cos(\alpha + \theta) = \frac{p}{2},$$

so nimmt dieselbe durch Auflösung von $\cos(\alpha + \theta)$ und Einführung zweier neuen Constanten:

$$h = \varepsilon \cos \alpha, \quad k = \varepsilon \sin \alpha,$$

die Form an:

$$r + h \cdot r \cos \theta - k \cdot r \sin \theta = \frac{p}{2}.$$

Es seien nun x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines der gegebenen Punkte, bezogen auf den Pol als Ursprung und die Polaraxe als Abscissenaxe, so ist:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

wodurch sich die letzte Gleichung in folgende verwandelt:

$$r + hx - ky = \frac{1}{2} p,$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jeder der drei Punkte liefert nun eine solche Gleichung, aus welchen sofort der Parameter p und die beiden Constanten h und k gefunden werden. Endlich hat man:

$$\varepsilon = \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{h}.$$

Ist die Lage eines Systemes conjugirter Durchmesser gegeben, so bedarf man zur Bestimmung einer Ellipse oder Hyperbel nur noch zweier, einer Parabel nur einer Bedingung, wie aus den auf ein System conjugirter Durchmesser bezogenen Gleichungen dieser Curve unmittelbar erhellt.

Ist zur Bestimmung einer Hyperbel eine Asymtote gegeben, so vertritt dieses Datum die Stelle von zwei Bedingungen, einer Tangente nämlich mit gegebenem (in unendlicher Entfernung liegenden) Berührungspunkte. Sind beide Asymptoten gegeben, so ist nur noch eine Bedingung erforderlich, da die Asymptotengleichung nur eine Constante enthält.

SIEBENTES KAPITEL.

UEBER EINIGE ALGEBRAISCHE LINIEN HÖHERER ORDNUNG UND EINIGE TRANSCENDENTE CURVEN.

I. Algebraische Linien höherer Ordnung.

234. Eine erschöpfende Untersuchung der algebraischen Curven von höherer als der zweiten Ordnung, durch Analyse der allgemeinen Gleichungen des 3^{ten}, 4^{ten}, u. s. w. Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, ist in Folge der damit verbundenen Weitläufigkeit und der Unzulänglichkeit der analytischen Hilfsmittel nicht leicht durchführbar. Die Anzahl der in einer Gleichung höheren Grades zwischen zwei Veränderlichen enthaltenen geometrischen Gebilde wächst mit dem Grade ausserordentlich rasch. Schon Newton hat die Linien 3^{ten} Grades untersucht und 72 Arten derselben in 14 Gattungen unterschieden, zu denen Stirling und Cramer noch 6 Arten hinzugefügt haben; Euler theilt sie in 16 Geschlechter. Letzterer hat auch noch die Linien 4^{ter} Ordnung betrachtet und 146 Geschlechter derselben unterschieden, welche wieder eine noch viel grössere Zahl von Arten unter sich begreifen. Bei der geringen praktischen Wichtigkeit fast aller dieser Curven hat man sich daher darauf beschränkt, einzelne

derselben, welche sich bei Gelegenheit besonderer Aufgaben dargeboten haben, näher zu untersuchen. Einige der bemerkenswertheren wollen wir im folgenden betrachten.

Unter den Curven höherer Ordnung gehören jene zu den einfachsten, bei welchen die Ordinate durch eine algebraische, ganze, rationale Function der Abscisse ausgedrückt ist, deren Gleichung daher die Form hat:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_m x^m.$$

Man nennt diese Curven überhaupt parabolische Curven des m^{ten} Grades, wenn die Function rechter Hand vom m^{ten} Grade*). Da jedem Werthe von x nur ein Werth von y entspricht, welcher gleichzeitig mit x , letzteres sowohl positiv als negativ genommen, unendlich wächst, so bestehen diese Curven aus einem ununterbrochenen, nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckenden Zuge. Wir sind diesen Curven schon in der Theorie der algebraischen Gleichungen begegnet, wo sie von besonderer Wichtigkeit sind.

Eine parabolische Curve des m^{ten} Grades enthält im allgemeinen $m + 1$ Constanten, und erfordert daher zu ihrer Bestimmung $m + 1$ von einander unabhängige Bedingungen. Die wichtigste hieher gehörige Aufgabe ist, die Curve so zu bestimmen, dass sie durch $m + 1$ gegebene Punkte gehe; eine Aufgabe, welche mit derjenigen identisch ist, welche in §. 150 aufgelöst wurde.

Parabeln höherer Ordnung nennt man insbesondere Curven, deren Gleichungen die Form $y^n = px^m$ haben; die sogenannte gemeine, conische oder appolonische Parabel: $y^2 = px$, ist hiervon ein spezieller Fall. Die Curve, deren Gleichung $y^2 = px^3$ ist, heisst insbesondere Neil'sche oder cubische Parabel, und steht mit der gemeinen Parabel in einem nahen Zusammenhang, auf welchen wir später zurückkommen werden. Was überhaupt die Gestalt der Parabeln höherer Ordnung betrifft, so hängt diese wesentlich davon ab, ob die Exponenten m und n , welche immer ganze positive Zahlen sind, beide gerade oder ungerade, oder der eine gerade, der andere ungerade ist.

235. Aufgabe. Eine Curve von der Beschaffenheit zu

*) Die Gl. vom 2ten Grade: $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$, hat die gemeine Parabel zum geometrischen Orte, deren Axe parallel liegt zur Axe der y , deren Scheitel die Grösse $-\frac{A_1}{2A_2}$ zur Abscisse, die Grösse $\frac{4A_0 A_2 - A_1^2}{4A_2}$ zur Ordinate hat und deren Parameter $= \frac{1}{A_2}$ ist, wie man mit Hülfe der im IV. Kapitel, §. 193 vorgetragenen Lehren leicht findet.

finden, dass das Produkt der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten einer gegebenen Constanten a^2 gleich sei.

Nehmen wir die Verbindungslinie der festen Punkte F, F' (Fig. 48) zur Abscissenaxe, den Halbirungspunkt O der $FF' = 2e$ zum Ursprung, so ist $\overline{FM}^2 = y^2 + (e - x)^2$, $\overline{F'M}^2 = y^2 + (e + x)^2$, und der Bedingung der Aufgabe gemäss $FM \cdot F'M = a^2$, somit:

$$[y^2 + (e - x)^2][y^2 + (e + x)^2] = a^4,$$

woraus nach leichter Reduktion:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = a^4 - e^4 \quad (1)$$

als Gleichung der gesuchten Curve gefunden wird. Sie ist, wie man sieht, vom 4^{ten} Grade und führt den Namen Cassini'sche Curve.

Da die Gl. (1) sich nicht ändert, wenn man $-x, -y$ statt x, y schreibt, so ist der Ursprung ein Mittelpunkt der Curve, welcher jede durch ihn gezogene Sehne halbt. Addirt man zur Gleich. (1) ein Mal $4e^2x^2$, das andere Mal $-4e^2y^2$, so kann sie auf folgende Formen gebracht werden:

$$y^2 = -e^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4e^2x^2}, \quad (2)$$

$$x^2 = e^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 + 4e^2y^2}, \quad (3)$$

woraus zunächst hervorgeht, dass die Curve die Coordinatenachsen zu Hauptdurchmessern hat, daher von denselben in symmetrische Theile getheilt wird und in einen begrenzten Raum eingeschlossen ist, also keine unendlichen Aeste besitzt.

Sind x', y' die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit den beiden Axen, so findet man:

$$x' = \pm \sqrt{e^2 \pm a^2}, \quad y' = \pm \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Zur weiteren Diskussion sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $a > e$; in diesem Falle ist in dem Ausdrücke von x' unter dem Wurzelzeichen nur das Zeichen $+$ zulässig, daher die Curve jede der beiden Axen nur in zwei Punkten schneidet. Jedem Werthe von x , welcher numerisch kleiner ist als $x' = \sqrt{e^2 + a^2}$, entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von y ; für jeden grösseren Werth von x wird y imaginär: denn ist $x^2 < e^2 + a^2$, so hat man $a^2 > x^2 - e^2$, $a^4 > (x^2 - e^2)^2$ oder $a^4 > x^4 - 2e^2x^2 + e^4$, oder $a^4 + 4e^2x^2 > (x^2 + e^2)^2$, d. i. $\sqrt{a^4 + 4e^2x^2} > x^2 + e^2$, somit in (2) y^2 positiv und umgekehrt. Die Curve schliesst daher einen länglichen Raum ein, hat übrigens eine ovale oder ellipsenförmige Gestalt (Fig. 48) wenn $a > e\sqrt{2}$, und eine an den Punkten B, B' eingedrückte (Fig. 49), wenn a zwischen $e\sqrt{2}$ und e liegt.

2. $a = e$. Die Gleichung der Curve ist in diesem Falle:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2 (y^2 - x^2) = 0 \quad (4)$$

oder: $y^2 = -e^2 - x^2 + e\sqrt{e^2 + 4x^2},$

aus welcher für $y = 0$:

$$x' = 0 \text{ und } x' = \pm e\sqrt{2}$$

folgt. Die Curve schneidet daher die Abscissenaxe im Ursprunge und in zwei Punkten, welche zu beiden Seiten desselben im Abstände $e\sqrt{2}$ liegen. Für jeden Werth von x , welcher numerisch $> e\sqrt{2}$, wird y imaginär, während jedem numerisch kleineren Werthe von x zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe von y entsprechen. Hieraus folgt, dass die Curve (Fig. 50) eine schleifenförmige Gestalt hat, wovon sie den Namen Lemniscate oder Schleifenlinie führt. Der Punkt O ist ein sogenannter doppelter Punkt, weil er von der Curve zweimal geschnitten wird. Den grössten Werth erreicht die Ordinate in dem Abstände $x = \pm \frac{1}{2} e\sqrt{3}$ und die entsprechenden Punkte der Curve liegen in einem Kreise, welcher aus dem Punkte O mit dem Halbmesser $OF = e$ beschrieben wird. In der Figur ist $OF = OF' = e$, die halbe Axe $OA = OA' = e\sqrt{2}$ und für jeden Punkt M der Curve:

$$FM \cdot F'M = \overline{OF^2}.$$

3) $a < e$. In diesem Falle wird $y' = \pm \sqrt{a^2 - e^2}$ imaginär, daher die y -Axe von der Curve nicht geschnitten. Sie schneidet die x -Axe in 4 Punkten, welchen die Abscissen $x_1 = \pm \sqrt{e^2 - a^2}$ und $x_2 = \pm \sqrt{e^2 + a^2}$ zugehören; für jeden Werth von x , welcher numerisch kleiner als x_1 oder grösser als x_2 ist, fällt y imaginär aus, erhält aber für jedes x , dessen Zahlenwerth zwischen x_1 und x_2 liegt, zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe, daher die Curve in diesem Falle aus zwei getrennten, die festen Punkte F, F' umschliessenden Theilen besteht (Fig. 51).

Unter diesen verschiedenen Formen ist die Lemniscate die bemerkenswertheste Curve. Die Gleichung derselben wird sehr einfach, wenn man sie durch Polarcoordinaten ausdrückt. Setzt man in (4) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, so erhält man als Polargleichung der Lemniscate:

$$r = \pm e\sqrt{2 \cos 2\theta},$$

woraus man zugleich schliessen kann, dass die beiden Tangenten im Punkte O (wo $r = 0$) mit der x -Axe die Winkel $= \pm 45^\circ$ einschliessen.

Die Lemniscate erscheint auch als der geometrische Ort der Fusspunkte der aus dem Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die

Tangenten gefällten Perpendikel. Ist nämlich überhaupt:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung einer Hyperbel, $y = mx + n \dots (\alpha)$ die Gleichung einer Tangente an derselben, so ist [§. 217] $a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0 \dots (\beta)$

die Bedingungsgleichung für die Berührung und $y = -\frac{1}{m}x \dots (\gamma)$

die Gleichung des aus dem Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels. Durch Elimination von m und n aus den Gleichungen (α) , (β) , (γ) erhält man:

$$(y^2 + x^2)^2 + b^2y^2 - a^2x^2 = 0$$

als Gleichung der Fusspunktcurve, welche für $a = b$, d. i. für die gleichseitige Hyperbel in die Gleichung der Lemniscate:

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$$

übergeht, deren halbe Axe $= a =$ der $\downarrow$ Halbaxe der $\uparrow$ 1^{sten} Hyperbel ist.

236. Aufgabe. Die Fusspunktcurve der aus dem Scheitel einer Parabel $y^2 = px$ auf die Tangenten gefällten Perpendikel zu finden.

Ist $y = mx + n$ die Gleichung der Tangente, so hat man $p = 4mn$ [§. 227, Gl. (β)] als Bedingung der Berührung und $y = -\frac{1}{m}x$

als Gleichung des aus dem Scheitel auf die Tangente gefällten Perpendikels. Durch Elimination von m und n aus diesen 3 Gleichungen findet man als Gleichung der gesuchten Curve, welche den Namen Cissois oder Cissoide führt:

$$y^2 = -\frac{4x^3}{p + 4x},$$

woraus sogleich erhellt, dass y nur für solche negative Werthe von x reell wird, welche zwischen 0 und $-\frac{p}{4}$ liegen. Die Curve liegt daher

gänzlich zwischen der Directrix UU' (Fig. 52) der Parabel, und der im Scheitel derselben errichteten Tangente OY . Vertauscht man die beiden Halbaxen der x , schreibt also $-x$ statt $+x$, so geht obige Gleichung, wenn man Kürze halber $p = 4q$ setzt, über in:

$$y^2 = \frac{x^3}{q - x}.$$

Jedem zwischen 0 und q liegenden Werthe von x entsprechen zwei gleiche, entgegengesetzte Werthe von y , daher die Curve zu beiden Seiten der x -Axe symmetrisch ist. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$, die Curve geht daher durch den Ursprung; mit zunehmendem x wächst auch y und wird unendlich gross für $x = q$. — Der Nenner $q - x$

gibt den Abstand eines Punktes der Cissoide von der Directrix; da nun $q - x = \frac{x^3}{y^2}$, so sieht man, dass dieser Abstand mit wachsendem y immer kleiner wird und der Null sich unendlich nähert; die Directrix ist daher eine Asymtote unserer Curve.

Beschreibt man über $OD = q$ als Durchmesser einen Kreis, so ist $y^2 = qx - x^2$ dessen Gleichung; zieht man nun durch den Ursprung O eine beliebige Gerade OB , deren Gleichung $y = ax$ sein mag, so schneidet diese den Kreis und die Cissoide in den Punkten N und M , und man findet für die Abscissen dieser Punkte:

$$OR = \frac{q}{1 + a^2}, \quad OP = \frac{a^2 q}{1 + a^2},$$

somit auch $DP = OD - OP = \frac{q}{1 + a^2} = OR$, folglich $BM = ON$; wodurch ein sehr einfaches Mittel gegeben ist, die Cissoide durch Punkte zu construiren.

II. Transcendente Curven.

237. Im Allgemeinen wird jede Curve, deren Gleichung sich nicht in Form einer algebraischen rationalen Funktion der Parallelkoordinaten x, y darstellen lässt, eine transcendente genannt. Es gehören daher auch solche Curven in diese Classe, in deren Gleichungen x oder y , oder beide Coordinaten zu Potenzen mit irrationalem Exponenten erhoben vorkommen, z. B. $y = x^{\sqrt{2}}$. Wir wollen jedoch hier nur solche betrachten, bei welchen die eine Coordinate durch eine transcendente Function der anderen bestimmt ist.

Logarithmische Linie (Logistik).

Bezeichnet e die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist die Gleichung dieser Curve in ihrer einfachsten Gestalt:

$$y = ae^{\frac{x}{a}}, \quad \text{oder} \quad x = al \frac{y}{a}, \quad (1)$$

oder, wenn a als Längeneinheit angenommen wird:

$$y = e^x, \quad x = ly, \quad (2)$$

so dass also die Abscissen die natürlichen Logarithmen der Ordinaten darstellen. Aus (1) folgt $y = a$ für $x = 0$; die Curve schneidet also die Ordinatenaxe in dem Abstände $OA = a$ vom Ursprunge (Fig. 53). Mit zunehmendem x wird auch y immer grösser und wächst mit x ins Unendliche. Für negative Werthe von x bleibt y positiv, wird jedoch um so kleiner, je grösser der Zahlenwerth von x wird, und unendlich

klein für $x = -\infty$; die x -Axe ist daher eine Asymtote der Curve, welche gänzlich oberhalb der x -Axe liegt. Unterhalb dieser Axe liegen nur einzelne, isolirte Punkte in unendlicher Anzahl, welche zwar obigen Gleichungen Genüge leisten, aber keine stetige Folge bilden, daher der Curve nicht angehören. Ein solcher isolirter Punkt ergibt sich nämlich für jeden Werth von x , welcher einen Bruch mit geradem Nenner zum Ausdrucke hat. Denn setzt man $x = \frac{p}{2q} = ly$, so kann man die Gl. (2) auf die Form:

$$\frac{p}{q} = ly^2, \text{ oder } y^2 = e^{\frac{p}{q}} \text{ d. i. } y = \pm \sqrt[e^{\frac{p}{q}}]{}$$

bringen; der positive dieser beiden Werthe ist der zur Abscisse $x = \frac{p}{2q}$ gehörige Ordinatenwerth der Curve, der negative liefert einen isolirten Punkt.

Eine allgemeinere Form der Gleichung der logarithmischen Linie ist: $y = mb^{\frac{x}{n}}$, wo b eine positive absolute Zahl, m und n lineare Grössen von beliebigem Zeichen bedeuten. Sie lässt sich leicht auf die Form (1) bringen. Man setze zuerst:

$$b^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{a}}, \text{ somit } a = \frac{n}{lb},$$

so wird $y = me^{\frac{x}{a}}$. Verrückt man nun den Ursprung auf der Abscissenaxe um das noch unbestimmte Stück ξ , setzt also $x + \xi$ statt x , so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$y = me^{\frac{x}{a} + \frac{\xi}{a}} = me^{\frac{\xi}{a}} \cdot e^{\frac{x}{a}},$$

woraus, wenn man ξ so bestimmt, dass $me^{\frac{\xi}{a}} = a$ wird, d. i. wenn man $\xi = al \frac{a}{m}$ setzt, $y = ae^{\frac{x}{a}}$ folgt.

Denkt man sich die logarithmische Linie BAC (Fig. 54), deren Gleichung $y = ae^{\frac{x}{a}}$, um die Axe der y gedreht, so kommt sie in die Lage $B'AC'$ und hat zur Gleichung $y = ae^{-\frac{x}{a}}$. Irgend eine zur y -Axe in dem Abstände $OP = x$ parallele Gerade schneidet diese beiden Curven in den Punkten M und M' ; ist nun N der Halbierungspunkt der MM' , so hat man $PN = \frac{1}{2} (PM + PM')$, und folglich ist:

$$y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

die Gleichung des geometrischen Ortes *DAE* dieser Halbierungspunkte, welcher somit ebenfalls eine transcendente Curve ist. Sie führt den Namen Kettenlinie, weil, wie in der Mechanik gezeigt wird, eine Kette, oder vielmehr ein vollkommen biegsamer, undehnbarer Faden, welcher in allen Punkten durch gleiche Gewichte belastet ist, die Gestalt dieser Curve annimmt.

238. Rolllinien. Wenn sich eine gegebene Curve auf einer anderen festen Curve, ohne zu gleiten, wälzt, so wird ein in der Ebene der ersten Curve liegender, mit ihr fest verbundener Punkt eine Curve beschreiben, welche eine Rolllinie genannt wird. Unter den mannigfaltigen Curven dieser Art wollen wir folgende betrachten.

1. Die gemeine Cycloide.

Lässt man einen Kreis auf einer festen Geraden rollen, so beschreibt irgend ein bestimmter Punkt der Peripherie des Kreises eine Curve, welche gemeine Cycloide, oder auch schlechthin Cycloide genannt wird. Um die Gleichung dieser Curve zu erhalten, sei (Fig. 55) *XX'* die feste Gerade, Grundlinie, *MBN* der wälzende Kreis, (Erzeugungskreis) in irgend einer seiner Lagen; *M* der beschreibende Punkt, also ein Punkt der Cycloide, und *O* ein Punkt in der *XX'*, mit welchem der beschreibende Punkt *M* in einer früheren Lage des Kreises zusammenfiel. Nehmen wir die *XX'* als Abscissenaxe, die im Punkte *O* darauf Senkrechte *OY* als Ordinatenaxe, so ist *OP* = *x*, *MP* = *y*. Setzt man nun den Winkel *BCM*, den sogenannten Wälzungswinkel = *q*, so ist arc. *BM* = *aq*, wenn *a* der Halbmesser des Kreises und *q* im Bogenmaass für den Halbmesser = 1 ausgedrückt ist. Ferner folgt aus der Natur der Wälzung *OB* = arc *BM* = *aq*; da nun *OP* = *x* = *OB* — *BP* = *OB* — *MR*, und *MR* = *a* sin *q*, ferner *MP* = *y* = *CB* — *CR*, und *CR* = *a* cos *q* ist, so hat man:

$$x = a (\varphi - \sin \varphi), \quad y = a (1 - \cos \varphi). \quad (1)$$

Durch Elimination von *q* erhält man die Gleichung der Cycloide; es folgt nämlich aus der 2^{ten} dieser Gleichungen: $\cos q = \frac{a - y}{a}$, somit:

$$q = \arccos \frac{a - y}{a}, \quad \sin q = \frac{1}{a} \sqrt{2ay - y^2},$$

folglich:

$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}. \quad (2)$$

In den meisten Fällen bedient man sich jedoch statt dieser Gleichung (2) mit Vortheil des Systems der Gleichungen (1), welche die

Coordinaten x, y eines Punktes der Cycloide durch eine dritte Veränderliche φ ausdrücken, welche aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist.

Für jeden Werth von φ , von der Form $\pm 2n\pi$, wo n eine positive ganze Zahl, wird $y = 0$, während die zugehörigen Werthe von x durch den Ausdruck $\pm 2na\pi$ gegeben sind; die Cycloide trifft also die x -Axe in unendlich vielen Punkten $\dots O, O' \dots$, welche in der Entfernung $2a\pi$ auf einander folgen, und die Curve besteht aus unendlich vielen congruenten Bögen, wie OAO' , von welchen in der Regel nur einer in Betracht gezogen wird. Die Ordinate erreicht ihren grössten Werth $= 2a$ für $\cos \varphi = -1$, d. i. für $\varphi = \pi$, (oder allgemein $\varphi = \pm (2n+1)\pi$), zu welchem Werthe von φ die Abscisse $x = OD = a\pi = \frac{1}{2} OO'$ gehört. Der entsprechende höchste Punkt A der Cycloide heisst der Scheitel. Die zu beiden Seiten des Scheitels liegenden Hälften OD und DO' der Cycloide sind congruent, da bekanntlich $\cos(\pi - \psi) = \cos(\pi + \psi)$ ist. Das aus dem Scheitel senkrecht auf die feste Gerade XX' gefällte Perpendikel AD heisst die Axe der Cycloide.

In den Anwendungen ist es meistens bequemer, den Scheitel A zum Ursprung zu nehmen; werden die neuen Abscissen auf der Axe AD gezählt, so ist $AQ = x'$, $MQ = y'$ und $x = OD - MQ = a\pi - y'$; $y = AD - AQ = 2a - x'$, wodurch die Gleichungen (1) übergehen in:

$$x' = a + a \cos \varphi, \quad y' = a(\pi - \varphi) + a \sin \varphi,$$

oder wenn man $\pi - \varphi = \psi$ setzt:

$$x' = a(1 - \cos \psi), \quad y' = a(\psi + \sin \psi), \quad (3)$$

aus welchen man noch durch Elimination von ψ :

$$y' = a \arccos \frac{a - x'}{a} + \sqrt{2ax' - x'^2} \quad (4)$$

findet.

2. Die gedehnte und die verkürzte Cycloide.

239. Wenn der beschreibende Punkt M nicht in der Peripherie des Erzeugungskreises sondern innerhalb oder ausserhalb desselben liegt, so entsteht im ersten Falle die sogenannte gedehnte oder geschweifte Cycloide (Fig. 56) im zweiten die verkürzte oder verschlungene Cycloide (Fig. 57). Wählt man wieder die Grundlinie als Abscissenaxe und als Ursprung einen Punkt derselben, in welchem sie den Erzeugungskreis berührt bei einer jener Lagen desselben, wo der beschreibende Punkt vertikal unter dem Mittelpunkte liegt; bezeichnet man ferner mit a den Halbmesser des Erzeugungskreises, mit b den Abstand des beschreibenden Punktes M vom Mittelpunkte des

selben, mit q den Wälzungswinkel MCB (Fig. 56 und 57) und setzt $OP = x$, $MP = y$, so erhält man auf dem für die Cycloide betretenen Wege:

$$x = aq - b \sin q, \quad y = a - b \cos q,$$

oder durch Elimination von q :

$$x = a \arccos \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2}$$

als Gleichung der gedehnten oder verkürzten Cycloide, je nachdem $b <$ oder $> a$ ist. Für $a = b$ gehen diese Gleichungen in jene der gemeinen Cycloide über. Nimmt man den Scheitel A als Ursprung und zählt die Abscissen x' auf der Axe AD , so erhält die letzte Gleichung die einfachere Form:

$$y' = a \arccos \frac{b - x'}{b} + \sqrt{2bx' - x'^2}.$$

3. Die Epicycloide und Hypocycloide.

240. Wenn ein Kreis (der Erzeugungskreis) auf der convexen Seite der Peripherie eines anderen festen Kreises, des Grundkreises, fortrollt, so beschreibt ein fester Punkt in der Peripherie des Erzeugungskreises die Epicycloide.

Nehmen wir zuerst an, die Berührung der beiden Kreise sei eine äussere, und ABA' (Fig. 58) der Grundkreis; BMN der Erzeugungskreis in einer beliebigen Lage; M der beschreibende Punkt, welcher in einer früheren Lage des letztgenannten Kreises mit dem Punkte A des Grundkreises zusammenfiel. Nehmen wir den Mittelpunkt O des Grundkreises zum Ursprung, den durch A gehenden verlängerten Durchmesser desselben als Abscissenaxe, und fällen wir die Perpendikel MP , CQ und MR , so sind die Coordinaten des Punktes M der Epicycloide:

$$x = OP = OQ + MR; \quad y = MP = CQ - CR;$$

bezeichnen wir nun mit R , r die Halbmesser des Grund- und Erzeugungskreises, mit q und q' die Winkel AOB und BCM , so ist zunächst

$$\text{arc } AB = \text{arc } BM, \text{ d. i. } Rq = rq', \text{ somit } q' = \frac{R}{r} q;$$

$$\text{ferner} \quad OQ = (R + r) \cos q, \quad MR = r \sin MCR$$

$$CQ = (R + r) \sin q, \quad CR = r \cos MCR,$$

$$\text{und, da } \angle MCR = q' - (90 - q) = - [90 - (q + q')] = - [90 - \frac{R + r}{r} q] \text{ ist:}$$

$$\sin MCR = - \cos \frac{R + r}{r} q, \quad \cos MCR = \sin \frac{R + r}{r} q;$$

durch Substitution dieser Werthe in obige Ausdrücke von x und y erhält man für die Epicycloide das System der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - r \cos \frac{R + r}{r} \varphi, \\ y &= (R + r) \sin \varphi - r \sin \frac{R + r}{r} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wenn der Erzeugungskreis aus einer bestimmten Lage z. B. jener, bei welcher M mit A in Berührung war, zu rollen beginnt, so wird, nachdem die Länge des auf dem Grundkreise durchlaufenen Bogens AEA' der Peripherie des Erzeugungskreises gleich geworden ist, der Punkt M wieder in A' auf den Grundkreis fallen, wobei dieser Punkt den epicycloidischen Bogen ADA' beschrieben hat. Bei fortgesetzter Bewegung des Erzeugungskreises wird der Punkt M einen zweiten, dem ersteren völlig congruenten Bogen beschreiben, u. s. f. Ist das Verhältniss der beiden Halbmesser $R:r$ irrational, so leuchtet ein, dass keiner der folgenden Bögen mit einem früheren zusammenfallen kann; in diesem Falle besteht die Epicycloide aus unendlich vielen congruenten Bögen. Ist aber das Verhältniss $R:r$ rational, so wird der Punkt M nach einem oder mehreren Umläufen wieder mit A zusammenfallen und von hier an die schon einmal beschriebenen Bögen fort und fort wieder durchlaufen. In diesem Falle besteht also die Epicycloide aus einer endlichen Anzahl von Bögen.

Im letzteren Falle, wenn nämlich das Verhältniss $R:r$ rational ist, führt die Elimination von φ aus den Gleichungen (1) zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y , so dass in diesem Falle die Epicycloide aufhört eine transcendente Curve zu sein. Denn ist $R:r = m:n$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, so gehen die Gl. (1) über in:

$$x = (R + r) \cos \varphi - r \cos (m + n) \frac{\varphi}{n},$$

$$y = (R + r) \sin \varphi - r \sin (m + n) \frac{\varphi}{n};$$

oder, wenn man $\varphi = n\psi$, $m + n = k$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r) \cos n\psi - r \cos k\psi, \\ y &= (R + r) \sin n\psi - r \sin k\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nun lassen sich aber bekanntlich, wenn n und k ganze Zahlen sind, $\cos n\psi$, $\sin n\psi$, $\cos k\psi$, $\sin k\psi$ durch Potenzen von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ rational ausdrücken [§. 67]; substituirt man diese Ausdrücke in (2), so können mit Hülfe der Gleichung $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$, $\sin \psi$ und $\cos \psi$ eliminirt werden, wodurch man offenbar zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y gelangt.

Der einfachste Fall dieser Art ist der, wenn $R = r$ angenommen wird; die Gleichungen der Epicycloide werden dadurch:

$x = 2r \cos q - r \cos 2q$, $y = 2r \sin q - r \sin 2q$,
und verwandeln sich mit Hülfe der bekannten Relationen:

$\sin 2q = 2 \sin q \cos q$, $\cos 2q = 2 \cos^2 q - 1$
in folgende:

$$x = r (2 \cos q - 2 \cos^2 q + 1), y = 2r \sin q (1 - \cos q).$$

Verlegen wir den Ursprung, indem wir $x + r$ statt x schreiben, in den Punkt A , (Fig. 59), so kommt:

$$x = 2r \cos q (1 - \cos q), y = 2r \sin q (1 - \cos q).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man sie quadriert und addirt:

$$x^2 + y^2 = 4r^2 (1 - \cos q)^2,$$

und durch Division derselben:

$$\operatorname{tg} q = \frac{y}{x}, \text{ woraus } \cos q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

welcher Werth in die vorige Gleichung substituirt:

$$x^2 + y^2 = 2r (\sqrt{x^2 + y^2} - x),$$

oder $(x^2 + y^2)^2 + 4rx(x^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0$

als Gleichung der gesuchten Epicycloide gibt; diese Curve führt von ihrer herzförmigen Gestalt den Namen Cardioide. Setzt man:

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

so erhält man als Polargleichung der Cardioide:

$$\rho = 2r (1 - \cos \theta) = 4r \sin \frac{1}{2} \theta^2.$$

Zieht man durch den Punkt A eine beliebige Gerade MM' , welche den Grundkreis in P schneidet, und setzt $\angle MAX = \theta$, so ist:

$$AM = 2r - 2r \cos \theta, AM' = 2r + 2r \cos \theta,$$

somit:

$$AM + 2r \cos \theta = AM' - 2r \cos \theta = 2r;$$

aus dem $\triangle ABP$ folgt aber $AP = 2r \cos \theta$; folglich ist $PM = PM' = 2r$, welche Eigenschaft der Cardioide ein sehr einfaches Mittel zur Construction derselben darbietet.

241. Wenn der Erzeugungskreis auf der inneren, concaven Seite der Peripherie des Grundkreises rollt, wobei sein Halbmesser kleiner sein muss, als jener des Grundkreises), so beschreibt ein fester Punkt des ersteren Kreises die Hypocycloide.

Die Gleichungen dieser Curve werden auf dieselbe Weise abgeleitet, wie jene der Epicycloide, wozu die Fig. (60) entworfen ist. Einfacher ergeben sie sich aus jenen der Epicycloide, indem man den

Halbmesser des Erzeugungskreises mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Dadurch erhält man für die Hypocycloide das System der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R - r}{r} \varphi, \\ y &= (R - r) \sin \varphi - r \sin \frac{R - r}{r} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Hypocycloide besteht ebenfalls aus unendlich vielen, dem Bogen ADA' gleichen Zügen, wenn das Verhältniss $R:r$ irrational ist. Sind aber diese Halbmesser commensurabel, so ist die Anzahl der Bögen eine endliche, und die Hypocycloide in diesem Falle eine algebraische Curve, da man durch Elimination von φ aus den Gl. (1) zu einer algebraischen Gleichung zwischen x und y gelangt.

Ein bemerkenswerthes Resultat ergibt sich für die Annahme $R = 2r$; damit gehen die Gl. (1) über in:

$$x = 2r \cos \varphi, \quad y = 0,$$

welche offenbar dem durch den Anfangspunkt A der Bewegung gezogenen Durchmesser des Grundkreises angehören. Die Hypocycloide ist also in diesem Falle eine gerade Linie und zwar der besagte Durchmesser des Grundkreises.

Ist der Halbmesser r des Erzeugungskreises grösser als jener des Grundkreises, so erfolgt offenbar die Wälzung — bei innerer Berührung der Kreise — auf der convexen Seite des Grundkreises, und die erzeugte Rolllinie ist wieder eine Epicycloide. Denn setzen wir in obigen Gleichungen (1) $r = R + \varrho$, so nehmen sie die Form an:

$$x = (R + \varrho) \cos \frac{\varrho}{R + \varrho} \varphi - \varrho \cos \varphi,$$

$$y = (R + \varrho) \sin \frac{\varrho}{R + \varrho} \varphi - \varrho \sin \varphi,$$

und verwandeln sich, wenn man noch:

$$\frac{\varrho}{R + \varrho} \varphi = \psi, \quad \text{also } \varphi = \frac{R + \varrho}{\varrho} \psi$$

setzt, in folgende:

$$x = (R + \varrho) \cos \psi - \varrho \cos \frac{R + \varrho}{\varrho} \psi$$

$$y = (R + \varrho) \sin \psi - \varrho \sin \frac{R + \varrho}{\varrho} \psi,$$

welche einer Epicycloide angehören, deren Erzeugungskreis vom Halbmesser ϱ den Grundkreis vom Halbmesser R von aussen berührt.

Man sieht hieraus, dass jede Epicycloide auf zweifache Weise erzeugt werden kann; entweder wenn auf dem Grundkreise vom Halbmesser R der Erzeugungskreis vom Halbmesser r so rollt, dass die

Kreise sich von aussen berühren; oder wenn sich auf demselben Grundkreise vom Halbmesser R ein Erzeugungskreis vom Halbmesser $R + r$ wälzt, und dabei die Kreise sich von innen berühren.

4. Die Kreisevolvente.

242. Wenn eine gerade Linie, die erzeugende Gerade, an der Peripherie eines Kreises, des Grundkreises, sich, ohne zu gleiten, so bewegt, dass sie mit dem Kreise beständig in Berührung bleibt, so beschreibt ein fester Punkt der Geraden eine Curve, welche den Namen Kreisevolvente führt.

Sei (Fig. 61) ABN der Grundkreis, UM die erzeugende Gerade in einer beliebigen Lage, in welcher sie den Kreis im Punkte B berührt, M der beschreibende Punkt, welcher in einer früheren Lage der Geraden mit dem Punkte A des Kreises zusammenfiel; R der Halbmesser des Kreises, $\angle AOB = \varphi$. Nimmt man O als Ursprung, und den verlängerten Durchmesser OA als Abscissenaxe, so ist für den Punkt M der Curve:

$$OP = x = OQ + MR; \quad MP = y = BQ - BR.$$

$$OQ = R \cos \varphi, \quad MR = BM \sin \varphi,$$

$$BQ = R \sin \varphi, \quad BR = BM \cos \varphi,$$

endlich $BM = \text{arc } AB = R\varphi$. Durch Substitution dieser Werthe erhält man für die Kreisevolvente das System der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= R (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \\ y &= R (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Man kann die Kreisevolvente als Epicycloide betrachten, bei welcher der Halbmesser des Erzeugungskreises unendlich gross ist, wodurch dieser in eine gerade Linie degenerirt. In der That gehen die Gl. (1) der Epicycloide [§. 240] in jene der Kreisevolvente über, wenn man $r = \infty$ setzt. Aus der ersten derselben folgt nämlich durch Auflösung des Cosinus:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi + r \cos \varphi - r \cos \frac{R}{r} \varphi \cdot \cos \varphi + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi, \\ &= R \cos \varphi + r \cos \varphi \left(1 - \cos \frac{R}{r} \varphi \right) + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi, \\ &= R \cos \varphi + 2r \cos \varphi \left(\sin \frac{R}{2r} \varphi \right)^2 + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Setzen wir $\frac{R}{2r} \varphi = \alpha$, also $r = \frac{R\varphi}{2\alpha}$, so kommt:

$$x = R \cos \varphi + R\varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} + R\varphi \sin \varphi \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

Lassen wir nun r unendlich zunehmen, so wird α unendlich klein, folglich, weil:

$$\lim \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} = \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha = 0 \text{ und } \lim \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 1 \text{ ist,}$$

$$x = R (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi).$$

Dieselbe Behandlung gestattet die Gleichung für y .

Will man die Curve durch Polarcoordinaten ausdrücken, so hat man, wenn $OM = \varrho$, $\angle MOP = \theta$ gesetzt wird, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ somit:

$$\varrho = R \sqrt{1 + \varphi^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \varphi}.$$

Wie man sieht, nimmt ϱ mit φ unendlich zu; die Curve zieht sich demnach in unendlich vielen schneckenförmigen, sich immer erweiternden Windungen um den Kreis herum, und schliesst sich in Folge dieser Eigenschaft an die Familie der Spirallinien an, von welchen wir die bemerkenswerthesten noch kurz betrachten wollen.

Spirallinien.

243. Spirallinie oder Spirale heisst jede Curve, welche sich in unendlich vielen, sich immer erweiternden oder verengernden Windungen um einen festen Punkt herumzieht, in welchem sie entweder ihren Anfang hat, oder welchem sie sich ohne Ende nähert. Es liegt in der Natur dieser Curven, dass ihre Gleichungen durch Anwendung von Polarcoordinaten die einfachste Form erhalten, wobei das am Schlusse des §. 232 Gesagte zu berücksichtigen ist.

1) Die archimedische Spirale. (Fig. 62.) Ihre Gleichung ist:

$$r = a\theta, \quad (1)$$

wo r den Radiusvector OM eines beliebigen Punktes der Curve, θ den Polarwinkel MOX bedeutet, im Bogenmaas für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt, (also den Bogen AP des mit dem Halbmesser $= 1$ aus O beschriebenen Kreises APN), und a eine lineare Constante. Die Gleichung zeigt, dass die Radienvektoren den von denselben beschriebenen Winkeln proportional sind. Man kann sich daher diese Spirale auf folgende Weise durch eine stetige Bewegung erzeugt denken. Eine bewegliche Gerade OU von unbegrenzter Länge drehe sich um den Punkt O , und auf derselben bewege sich ein Punkt M dergestalt, dass die von demselben durchlaufenen Wege den von dem beweglichen Radiusvector beschriebenen Winkeln proportional sind; der Punkt M beschreibt dann die archimedische Spirale.

Ertheilt man in (1) dem Bogen θ negative Werthe, so drückt diese Gleichung dieselbe Spirale, aber in entgegengesetzter Lage aus, welche man erhält, wenn man die in der Figur gezeichnete um OV dreht.

Beide Spiralzüge sind in derselben Gleichung enthalten, wiewohl in der Regel bloss der eine in Betracht gezogen wird.

Sind r, r' die Vectoren zweier Punkte M, M' der Spirale, welche zu zwei um 360° verschiedenen Polarwinkeln gehören, so ist $r' = a(\theta + 2\pi)$, wenn $r = a\theta$, somit $r' - r = 2a\pi$, woraus folgt, dass der Abstand MM' der einzelnen Windungen von einander, auf dem Radiusvector gezählt, in der archimedischen Spirale constant ist.

2) Die hyperbolische Spirale, (Fig. 63); ihre Gleichung ist:

$$r\theta = a, \quad (2)$$

von deren Aehnlichkeit mit der Asymptotengleichung der Hyperbel der Name dieser Spirale herrührt. Für $\theta = 0$ ist $r = \infty$; mit zunehmendem θ wird r immer kleiner, ohne je $= 0$ zu werden. Die Curve macht daher nach der einen Seite unendlich viele immer kleiner und kleiner werdende Windungen um den Pol, ohne ihn je zu erreichen, wobei zugleich der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen immer kleiner wird. Der Pol bildet hier einen sogenannten asymptotischen Punkt.

Ist M ein Punkt der Curve, $OM = r$, $\angle MOP = \theta$, $MP = y$, so hat man $r = \frac{a}{\theta}$ und $y = r \sin \theta$, somit:

$$y = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Für jedes $\theta > 0$, ist $\frac{\sin \theta}{\theta} < 1$, folglich $y < a$; je kleiner aber θ wird, desto mehr nähert sich (weil $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$) die Ordinate y der Grösse a , wobei gleichzeitig r unendlich zunimmt. Hieraus folgt, dass die hyperbolische Spirale nach der anderen Seite die Gerade UV , welche in dem Abstände $= a$ zur Polaraxe parallel läuft, zur Asymptote hat.

3. Die logarithmische Spirale geht aus der logarithmischen Linie hervor, wenn man die Coordinaten x, y in der Gl. der letzteren Curve [Gl. (1), §. 237] als Polarcoordinaten betrachtet; die Gleichung der logarithmischen Spirale ist daher:

$$r = ae^{\frac{\theta}{a}} \quad \text{oder} \quad \theta = al \frac{r}{a},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Für $\theta = 0$ wird $r = a$ und für jeden positiven Werth von θ ergibt sich ein mit θ fort und fort wachsender Werth von r ; für $\theta = \infty$ wird auch $r = \infty$. Für negative Werthe von θ wird r (von $r = a$ angefangen, entsprechend $\theta = 0$) immer

kleiner, je grösser der Zahlenwerth von θ wird, und unendlich klein für $\theta = -\infty$. Die logarithmische Spirale macht daher unendlich viele Windungen um den Pol herum, welche nach der einen Seite ins Unendliche sich fortsetzen, dabei ihren Abstand immer vergrößernd, nach der anderen Seite, sich immer mehr und mehr verengernd, dem Pole sich unendlich nähern, ohne ihn je zu erreichen. Der Pol ist daher auch hier ein asymptotischer Punkt. Negative Werthe von r sind nur für solche Werthe von θ möglich, welche einen Bruch mit geradem Nenner zum Ausdrucke haben; solchen Werthen von θ entsprechende Punkte existiren daher wohl unendlich viele, bilden aber keine stetige Folge.

LEIPZIG,

DRUCK VON GIESECKE & DEVRIENT.