universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Lehrbuch der höheren Mathematik

Die algebraische Analysis und die analytische Geometrie in der Ebene enthaltend - mit 3 Figurentafeln

Herr, Joseph

Wien, 1857

Erster Theil. Algebraische Analysis

urn:nbn:at:at-ubi:2-5838

ERSTER THEIL.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

ALGEBRAISCHE ANALYSIS.

EINLEITUNG.

1. Die höhere Mathematik oder Analysis beschäftigt sich mit der Betrachtung aller Formen, in welchen sich die zwischen Grössen, in so ferne dieselben durch Zahlen ausgedrückt sind, stattfindenden Beziehungen darbieten.

2. So mannigfaltig diese Beziehungen auch sein können, so haben sie doch alle, in so ferne sie Gegenstand der Analysis sind, das mit einander gemein, dass unter den in dieselben eintretenden Grössen solche vorkommen, welche entweder ohne alle Einschränkung oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen jeden beliebigen Werth annehmen können; man nennt solche Grössen veränderliche oder variable, im Gegensatze zu den beständigen oder constanten Grössen, deren Werthe im Laufe der ganzen Untersuchung als unveränderlich angesehen werden. Man pflegt die veränderlichen Grössen gewöhnlich durch die letzten, die constanten durch die ersten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen.

3. Die zwischen veränderlichen und constanten Grössen stattfindenden Beziehungen erscheinen immer in Form von Gleichungen, und man sieht leicht ein, dass eine derartige Gleichung mindestens zwei variable Grössen enthalten muss. Denn setzt man einen beliebigen Ausdruck, z. B. $a + bx$, in welchem x eine veränderliche Grösse bedeutet, $= y$, so ist, da der Werth von $a + bx$ mit x sich ändert, auch y veränderlich. Da jedoch zu jedem speciellen Werthe von x aus der Gleichung $y = ax + b$ ein bestimmter Werth von y sich ergibt, so erscheint y als von x abhängig. Man unterscheidet daher zwischen unabhängig und abhängig veränderlichen Grössen; die ersteren sind jene, denen man jeden beliebigen mit ihrer Natur verträglichen Werth beilegen kann, die letzteren solche, deren Werthe durch jene der unabhängig Veränderlichen bestimmt werden. Die zwischen denselben stattfindende Gleichung drückt das Gesetz der Abhängigkeit aus. — Welche der in einer Untersuchung vorkommenden veränderlichen Grössen als die unabhängige, welche als

die abhängig Veränderlichen zu nehmen sind, bestimmt sich in jedem besonderen Falle aus der Natur der Aufgabe.

4. Um auszudrücken, dass eine veränderliche Grösse u von einer oder mehreren anderen abhängig sei, sagt man, die erstere sei eine Funktion der letzteren und bezeichnet diess durch eines der Symbole

$$u = f(x)\,,\ u = F(x)\,,\ u = \varphi(x, y)\,,\ u = \psi(x, y, z) \text{ u. s. w.}$$

indem man den in Klammern eingeschlossenen und durch Beistriche getrennten unabhängig veränderlichen Grössen einen der Buchstaben f, F, φ, ψ ... (als Funktionszeichen) vorsetzt. Dabei bedeuten diese Symbole irgend einen Ausdruck, welcher aus den Veränderlichen x, oder x, y u. s. w. und constanten Grössen gebildet ist; z. B.

$$y = f(x) = a + bx^2\,;\quad z = F(x, y) = ax + b \sin y\,;$$
$$u = \psi(x, y, z) = a^{x+y}\,(1 - \log z).$$

5. Unter Form der Funktion versteht man die Art, wie die in der Funktion vorkommenden constanten und variablen Grössen mit einander verknüpft sind. Funktionen, welche sich nur durch die, die Variablen bezeichnenden Buchstaben unterscheiden, z. B.

$$z = f(x) = x^m\,(a - bx^2),\ \text{ und } u = f(y) = y^m\,(a - by^2)$$

haben einerlei Form, und werden, sobald zwei oder mehrere solche Funktionen in derselben Rechnung vorkommen, mit demselben Funktionszeichen bezeichnet. Man nennt sie ähnliche Funktionen.

Symbole, wie die folgenden:

$$f(x + y),\ f(xy),\ f\left(\frac{x}{y}\right),\ \text{u. dgl.}$$

stellen ebenfalls Funktionen der beiden Veränderlichen x und y vor; es kommt ihnen aber die besondere Form zu, dass die Grössen $x + y$, xy, $\frac{x}{y}$ wie eine einzige Veränderliche in dieselben eingehen; setzt man z. B. z an die Stelle von $x + y$, xy, $\frac{x}{y}$, ... so nehmen dieselben die Form $f(z)$ an und erscheinen sofort als Funktionen der einen Veränderlichen z.

Bei manchen Untersuchungen ist es nöthig, die Anwesenheit constanter Grössen in einer Funktion ersichtlich zu machen; diess geschieht dadurch, dass man dieselben unter das Funktionszeichen in die Klammer aufnimmt; z. B. $y = f(x, a)$.

6. Eine Funktion u einer oder mehrerer Veränderlichen kann entweder entwickelt (gesondert, explicit) oder unentwickelt (ungesondert, implicit) gegeben sein, je nachdem die Gleichung, welche das Gesetz der Abhängigkeit der Funktion u von den unabhängig Veränderlichen ausdrückt, in Bezug auf u aufgelöst ist, oder nicht. In

den obigen Beispielen (§. 4) sind hiernach y, z, u entwickelte Funktionen beziehungsweise von x; x und y; x, y und z. Hingegen ist durch die Gleichung $y^2 - 2ay + x^2 = o$, y als unentwickelte Funktion von x; durch die Gleichung: $u^3 - (x + y) \sin u + a^x = o$, u als unentwickelte Funktion von x und y dargestellt. Allgemein werden unentwickelte Funktionen durch Gleichungen von der Form

$$f(x, y) = o, \quad F(u, x, y) = o, \quad \varphi(x, y, z) = o \text{ etc. } \ldots$$

ausgedrückt.

7. Eine Funktion heisst einwerthig, wenn sie für jeden besonderen Werth der Veränderlichen nur einen Werth anzunehmen vermag; im Gegentheile vielwerthig oder vieldeutig und insbesondere zwei- dreiwerthig u. s. w., wenn jedem speciellen Werthe der unabhängig Veränderlichen zwei, drei, u. s. w. Werthe der Funktion entsprechen. So ist in obigem Beispiele: $y^2 - 2ay + x^2 = o$, y eine zweiwerthige Funktion von x; denn löst man diese Gleichung für y auf, so erhält man $y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, woraus man sogleich erkennt, dass jedem Werthe von x, zwei Werthe von y: $a + \sqrt{a^2 - x^2}$ und $a - \sqrt{a^2 - x^2}$ entsprechen. Die Funktionen $arc \sin x$, $arc \cos x$, etc. sind, wie aus der Trigonometrie bekannt, vieldeutig, da zu jedem Werthe eines Sinus, Cosinus, u. s. w. unendlich viele Bögen gehören.

8. Hat man die zwei Gleichungen $z = f(y)$ und $y = \varphi(x)$, so ist auch $z = f[\varphi(x)]$ und man sagt in diesem Falle, z sei eine Funktion einer Funktion. In gleicher Weise folgt aus

$$z = F(x, y), \; x = \varphi(t), \; y = \psi(t):$$
$$z = F[\varphi(t), \psi(t)] = f(t);$$

z erscheint hier als Funktion der zwei Veränderlichen x und y, welche selbst wieder Funktionen von t sind, so dass auch z eigentlich nur Funktion der einen Veränderlichen t ist.

9. Man theilt die Funktionen in algebraische und transcendente. Algebraische Funktionen heissen jene, in welchen die veränderlichen Grössen nur den (sogenannten algebraischen) Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzirung zu constanten Exponenten unterworfen sind; z. B.

$$y = a + bx^2 \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} - a\sqrt[3]{x^2 + y^2} + b = o;$$
$$ax^2y^{-1} - b\sqrt{x^3} = o;$$

alle anderen Funktionen heissen transcendente, unter welchen die Exponentialfunktion $y = a^x$, d. i. die Potenz mit veränderlichem Exponenten, die logarithmische Funktion $y = \log x$,

ferner die trigonometrischen Funktionen sin x, cos x, tg x, etc., und deren Umkehrungen, die cyklometrischen Funktionen: arc sin x, arc cos x; arc tg x, etc. für uns vorläufig die wichtigsten sind.

Man erkennt leicht, dass den algebraischen Funktionen, sie mögen was immer für eine Form haben, zuletzt die einfache Funktion $y = x^a$ zu Grunde liegt, wo a eine beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative, jedoch beständige Zahl bedeutet. — Nennen wir übrigens einfache Funktionen jene, welche durch eine einzige mit der Variablen vorgenommene Operation zu Stande kommen, so können wir als einfache algebraische Funktionen folgende aufführen:

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,$$

welche, wie man sieht, sämmtlich in der Form $(A + Bx^m)^n$ enthalten sind, während die oben angeführten Beispiele zusammengesetzte Funktionen darstellen. Analog hiemit haben wir als einfache transcendente Funktionen:

$$a^x,\ \log x,\ \sin x,\ \text{arc sin } x,$$

zu welchen man, ihres häufigen Gebrauches wegen, noch cos x und arc cos x zählen kann, wiewohl sich diese, so wie alle übrigen trigonometrischen Funktionen bekanntlich durch sin x, die cyklometrischen durch arc sin x ausdrücken lassen.

Die Entwickelung der Eigenschaften der verschiedenen Funktionen und ihrer Beziehungen zu einander bildet den wesentlichen Inhalt der Analysis, daher auch diese häufig die Lehre von den Funktionen genannt wird.

10. Die algebraischen Funktionen werden in rationale und irrationale, ganze und gebrochene Funktionen unterschieden.

Unter einer rationalen Funktion versteht man jene, in welcher, nachdem sie möglichst reducirt worden ist, die veränderlichen Grössen unter keinem Wurzelzeichen, oder was dasselbe ist, mit keinem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommen; im Gegentheile heisst die Funktion irrational. So sind von den Funktionen

$$y = (a + bx^2)^n,\ z = \frac{cxy}{x\sqrt{a} + y\sqrt{b}},\ y = x + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$u = \frac{x\sqrt{a} + y}{\sqrt{y}},$$

die beiden ersten rationale, die zwei letzten irrationale Funktionen.

Unter ganzen Funktionen versteht man solche, welche die veränderlichen Grössen in keinem Nenner, oder was dasselbe ist, mit keinem negativen Exponenten behaftet enthalten; ist diess hingegen

der Fall, so heisst die Funktion gebrochen. Von obigen vier Funktionen sind die erste und dritte ganze, die zweite und vierte gebrochene Funktionen.

Die allgemeine Form einer ganzen rationalen algebraischen Funktion einer veränderlichen Grösse ist

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + Mx^m,$$

wo A, B, C, ... M constante von x unabhängige Coefficienten sind. Der Exponent der höchsten in der Funktion vorkommenden Potenz von x bestimmt den Grad der Funktion. Obige Funktion ist also vom $m$ten Grad. Die Funktion des ersten Grades $y = A + Bx$ nennt man auch häufig (aus geometrischen Gründen) lineare Funktion.

Die allgemeine Form einer gebrochenen rationalen Funktion ist

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Px^m}{a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + qx^n};$$

sie heisst echt gebrochen, wenn der Nenner von höherem Grade ist, als der Zähler, im Gegentheile unecht gebrochen.

II. Unter Dimension eines Ausdruckes, welcher aus constanten und variablen Faktoren besteht, versteht man die Summe der Exponenten der veränderlichen Faktoren. So sind die Ausdrücke ax^3, $abxy^2z$, $ax^{\frac{1}{3}}y$ beziehungsweise von den Dimensionen 3, 4, $\frac{4}{3}$. Hieraus erhellt, dass nach dem Begriffe eines Quotienten und einer Wurzelgrösse die Dimension eines Bruches gefunden wird, wenn man von der Dimensionszahl des Zählers jene des Nenners abzieht; jene einer Wurzelgrösse hingegen, wenn man die Dimensionszahl des Ausdruckes unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividirt. Der Ausdruck $\frac{axy^2}{z}$ ist hiernach von der 2ten, $\sqrt{ax^3y^3}$ von der dritten Dimension.

Diess vorausgesetzt, heisst eine Funktion zweier oder mehrerer Veränderlichen homogen, wenn alle Glieder derselben von gleicher Dimension sind; im entgegengesetzten Falle wird sie heterogen genannt. Die Dimensionszahl eines Gliedes bestimmt den Grad oder die Ordnung der homogenen Funktion. So sind

$$z = x^2 + axy + y^2;\quad u = x + \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$u = \frac{ax^3 + by^2\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{x + y + z}}$$

homogene Funktionen beziehungsweise vom 2ten 1ten und $\frac{3}{2}^{\text{ten}}$ Grade.

Diese Eigenschaft der Homogeneität lässt sich leicht auf einen analytischen Ausdruck bringen. Die Funktion $f(x, y, z, \ldots.)$ ist näm-

lich homogen und vom n^{ten} Grade, wenn sie für jeden Werth von t, der Bedingung

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n . f(x, y, z, \ldots)$$

genügt, wo t eine neue von den andern unabhängige Veränderliche ist. Wie man leicht sieht, ist die frühere Definition in dieser allgemeineren eingeschlossen. Nach letzterer erkennt man z. B. dass die Funktion $f(x, y) = \log x - \log y$ homogen vom 0ten Grade ist; denn schreibt man tx, ty an die Stelle von x und y, so erhält man $f(tx, ty) = \log tx - \log ty = \log x - \log y = f(x, y) = t^0 f(x, y)$.

Periodische Funktionen werden solche genannt, welche in regelmässiger Wiederkehr immer dieselbe Reihe von Werthen durchlaufen, wenn die unabhängig Veränderliche fort und fort zunimmt, so dass allen Werthen der letzteren, welche um gleiche Intervalle von einander entfernt sind, gleiche Funktionswerthe entsprechen. Die trigonometrischen Funktionen gehören in diese Klasse; denn es ist z. B. bekanntlich

$\sin x = \sin (x + 2\pi) = \sin (x + 4\pi) = \sin (x + 6\pi) = \ldots$ u. s. w.*)

12. Eine Funktion zweier oder mehrerer Veränderlichen heisst symmetrisch, wenn dieselbe bei beliebigen Vertauschungen der Veränderlichen unter einander keine Aenderung ihres Werthes erleidet. z. B.

$u = x^2 + xy + y^2$; $u = 2xy + 2xz + 2yz$;

$u = x^y + y^x$; $u = \cos x \cos y - (\sin x^2 + \sin y^2)$.

Bemerkenswerth sind insbesondere die algebraischen rationalen symmetrischen Funktionen, in Bezug auf deren Bau sich aus obigem Begriffe folgende Eigenthümlichkeiten ergeben.

1) Besteht die Funktion nur aus einem Gliede, so müssen sämmtliche Faktoren (Elemente), von einem etwa anhaftenden Coefficienten abgesehen, gleiche Exponenten haben. z. B. $u = Ax^2y^2z^2$.

2) Besteht die symmetrische Funktion, wie gewöhnlich, aus mehreren Gliedern und ist V eines derselben, welches durch eine beliebige Vertauschung der darin vorkommenden Elemente in W übergeht, so muss das Glied W auch unter den Gliedern der symmetrischen Funktion vorkommen.

3) Alle Glieder einer s. Funktion müssen daher gleichviel Ele-

*) Mit dem Buchstaben π werden wir ausschliesslich, wie diess gewöhnlich geschieht, das Verhältniss der Kreisperipherie zum Durchmesser bezeichnen. Für den Halbmesser = 1 drückt daher $\pi = 3{,}14159265\ldots$ die Länge der halben Kreisperipherie aus, welche dem Winkel = 180° entspricht. Eben so bezeichnet $\frac{\pi}{2}$ den dem Winkel = 90° entsprechenden Bogen, 2π die ganze Peripherie = 360°, u. s. w.

mente enthalten, und diese in allen Gliedern mit denselben Exponenten behaftet sein.

4) Hieraus folgt sogleich, dass jede s. Funktion gegebener Elemente durch irgend eines ihrer Glieder, und jedes Glied — daher auch die ganze Funktion — durch die Exponenten der Elemente bestimmt ist. Hierauf gründet sich eine einfache Bezeichnung der symmetrischen Funktionen, wenn die Elemente bekannt sind; man schreibt nämlich bloss die Exponenten eines Gliedes, durch Beistriche getrennt, in eine eckige Klammer, wie folgende Beispiele zeigen, welche s. Funktionen der drei Grössen a, b, c darstellen.

$[1] = a + b + c$; $[2] = a^2 + b^2 + c^2$; $[n] = a^n + b^n + c^n$;
$[1, 1] = ab + ac + bc$; $[2, 1] = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$;
$[1, 1, 1] = abc$; $[2, 1, 1] = a^2bc + ab^2c + abc^2$.

Aus der Anzahl der Exponenten in der Klammer erkennt man die Anzahl der Grössen, welche in jedes Glied eintreten, und es erübrigt nur noch anzugeben, wie die verschiedenen Glieder gebildet werden.

Es seien a, b, c, d, ... k, l die n Grössen, aus welchen die symmetrische Funktion $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r]$ erzeugt werden soll, wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ die Exponenten, r an der Zahl, bedeuten, welche in jedem Gliede vorkommen. Man bilde zuvörderst alle Combinationen der r^{ten} Classe ohne Wiederholung aus den n Elementen $a, b, c, \ldots k, l$; sodann alle Permutationen der r Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, und verbinde endlich jede dieser Complexionen in der Form von Exponenten mit jeder einzelnen Combination der Elemente.

Z. B. Aus den Grössen a, b, c, d die s. Funktion $[3, 2, 1]$ zu bilden. Man findet:

Combinationen der 3ten Classe der Grössen a, b, c, d.	Permutationen der Exponenten 1, 2, 3.	
a, b, c	1, 2, 3	3, 1, 2
a, b, d	1, 3, 2	3, 2, 1
a, c, d	2, 1, 3	
b, c, d	2, 3, 1	

somit ist

$$[3, 2, 1] = ab^2c^3 + ab^3c^2 + a^2bc^3 + a^2b^3c + a^3bc^2 + a^3b^2c + ab^2d^3 + ab^3d^2 + a^2bd^3 + a^2b^3d + a^3bd^2 + a^3b^2d + ac^2d^3 + ac^3d^2 + a^2cd^3 + a^2c^3d + a^3cd^2 + a^3c^2d + bc^2d^3 + bc^3d^2 + b^2cd^3 + b^2c^3d + b^3cd^2 + b^3c^2d.$$

Wie leicht einzusehen, ist die Anzahl N aller Glieder gleich der Anzahl der Combinationen multiplicirt mit der Anzahl der Permutationen; also für n Elemente und r Exponenten:

$$N = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\,r} \cdot 1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\,r$$
$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1),$$

vorausgesetzt, dass die Exponenten alle verschieden sind. Befinden sich aber unter denselben mehrere Gruppen von $p, q, s \ldots$ gleichen Zahlen, so ist bekanntlich die Anzahl aller Permutationen

$$= \frac{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\,r}{1.\,2.\,3\ldots p \,.\, 1.\,2.\,3\ldots q \,.\, 1.\,2.\,3\ldots s},$$

somit

$$N = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+1)}{1.\,2.\,3\ldots p \,.\, 1.\,2.\,3\,\ldots\, q \,.\, 1.\,2.\,3\ldots s}.$$

Die Summe der Exponenten in einem Gliede bestimmt den Grad oder die Ordnung der s. Funktion. In die Klammer pflegt man die Exponenten vom grössten angefangen der Ordnung nach zu schreiben, und sagt, diejenige s. Funktion sei von einer höheren Klasse, welche in der Klammer an einer früheren Stelle einen grösseren Exponenten hat. So ist [3] von höherer Klasse als [2, 1], diese von höherer als [1, 1, 1].

Eine s. Funktion heisst zusammengesetzt, wenn sie aus mehreren Theilen besteht, die für sich symmetrisch sind. Besteht die s. Funktion aus mehreren rationalen Brüchen, so lässt sie sich, indem man dieselben auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, in einen einzigen Bruch zusammenziehen, dessen Zähler nnd Nenner für sich allein betrachtet, ganze rationale s. Funktionen sind.

13. Die unabhängig veränderliche Grösse x einer Funktion $y = f(x)$ wird immer als stetig (continuirlich) veränderlich gedacht, d. h. so, dass dieselbe von irgend einem Werthe $x = x_0$ zu einem anderen $x = x_1$ nicht übergehen kann, ohne alle zwischen liegenden Werthe zu durchlaufen. Diese Eigenschaft der Stetigkeit liegt schon im Begriffe der unabhängig veränderlichen Grösse, als einer solchen, welche entweder ohne alle Einschränkung oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen x_0, x_1 jeden beliebigen Werth annehmen kann. Bezeichnen wir nun mit y_0 und y_1 jene Werthe der Funktion $y = f(x)$, welche den Werthen x_0 und x_1 der unabhängig Veränderlichen x entsprechen, so heisst die Funktion $y = f(x)$ innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 stetig, wenn sie, während x von x_0 in x_1 also auch y von y_0 in y_1 übergeht, bei diesem Uebergange alle zwischen y_0 und y_1 liegenden Werthe durchläuft. Die Lehren des folgenden Kapitels werden uns ein einfaches Mittel darbieten, den Begriff der Stetigkeit der Funktion analytisch auszudrücken.

14. Um sich von dem Verlaufe einer Funktion $y = f(x)$ d. i. von der allmäligen Aenderung der Werthe, welche die Funktion y an-

nimmt, wenn x andere und andere Werthe erhält, eine deutliche Vorstellung zu machen, könnte man zu beliebig gewählten Werthen von x

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ldots$$

die zugehörigen Werthe von y:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ldots$$

aus der Gleichung

$$y = f(x) \ldots\ldots (\alpha)$$

berechnen; wählt man dabei die Werthe von x in gleichen Abständen, so wird man aus der Uebersicht der Werthe $y_1, y_2, y_3 \ldots$ eine genügende Vorstellung über den Verlauf der Funktion sich bilden können.

Ein viel vorzüglicheres und zugleich der Natur der Sache höchst angemessenes Mittel zu diesem Zwecke bietet uns jedoch die Geometrie durch die Construction dieser Funktionswerthe dar.

Man betrachte die Zahlenwerthe von x und y als Längen gerader Linien, ziehe eine Gerade von unbestimmter Länge, XX' (Fig. 1) als Axe (die Abscissenaxe), wähle in derselben einen festen Punkt A, den Anfangspunkt, und trage hierauf nach irgend einem beliebigen Massstabe die Werthe von x auf der Axe XX' von A aus auf, die positiven etwa in der Richtung AX, die negativen in der Richtung AX'; in den Endpunkten dieser Strecken, welche Abscissen genannt werden, errichte man Perpendikel, auf welchen sofort die zugehörigen Werthe von y, die Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \ldots$ aufgetragen werden, und zwar die positiven etwa oberhalb, die negativen unterhalb der Axe XX'. Man erhält hierdurch in der Ebene der Zeichnung eine Reihe von Punkten, deren jeder durch ein Paar zusammengehöriger Werthe von x und y bestimmt wird, welche nach einem durch die Gleichung (α) ausgesprochenen Gesetze auf einander folgen und durch einen continuirlichen Zug verbunden irgend eine gerade oder krumme Linie erzeugen, welche das geometrische Bild der Funktion $f(x)$ ist, und mit einem Blicke den Lauf der Funktion übersehen lässt. Auf diese Art ist in Fig. (1) die Funktion

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3$$

construirt, welche für

$x = 0$	$y = -3 = AM$
$x = 1 = A1$	$y = -5 = 1N$
$x = 2 = A2$	$y = +3 = 2Q$
$x = 3 = A3$	$y = +27 = 3R$
u. s. w.	u. s. w.
$x = -1 = A1'$	$y = +3 = 1'M'$
$x = -2 = A2'$	$y = +7 = 2'N'$
$x = -3 = A3'$	$y = +3 = 3'Q'$
$x = -4 = A4'$	$y = -15 = 4'R'$
u. s. w.	u. s. w.

gibt. Auf diese Art lässt sich jede Funktion einer Veränderlichen in einer Ebene construiren. Die algebraische Funktion des ersten Grades $y = ax + b$ erzeugt eine gerade Linie, wodurch sich der Name „lineare Funktion“ erklärt; alle andern Funktionen erzeugen krumme Linien.

Auch Funktionen zweier Variablen, $z = f(x, y)$ lassen sich noch geometrisch darstellen: da jedoch hier drei Veränderliche zu construiren sind, so reicht hiezu die Ebene, welche nur zwei Dimensionen hat, nicht aus, sondern die Construction muss im Raume vorgenommen werden. Denken wir uns (Fig. 2) drei auf einander senkrechte Ebenen, XAY, XAZ, YAZ, welche sich in den aufeinander senkrechten Geraden (den Axen) AX, AY, AZ und in dem gemeinschaftlichen Punkte A, dem Anfangspunkte schneiden. Trägt man nun nach einem beliebigen Massstabe zwei willkürliche Werthe von x und y, z. B. $x = a = AP$, $y = b = AQ$ auf den Axen AX und AY auf, zieht in der Ebene XAY Pm, Qm beziehungsweise zu AY und AX parallel, so bestimmt sich dadurch ein Punkt m in der genannten Ebene; in diesem Punkte errichte man eine Senkrechte auf die Ebene XAY, und trage auf derselben den den Werthen $x = a$, $y = b$ entsprechenden Werth von $z = c$, nämlich $c = f(a, b) = mM$ auf, so ist M ein durch die Funktion $z = f(x, y)$ bestimmter Punkt im Raume. Wählt man nun für x und y andere und andere Werthe, so erhält man offenbar eine Folge von Punkten im Raume, welche eine gewisse Fläche bilden werden, deren Gestalt von der Form der Funktion $z = f(x, y)$ abhängt.

Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen lassen sich nicht mehr construiren, da der Raum nur drei Dimensionen hat.

ERSTES KAPITEL.

VON DEN UNENDLICH GROSS UND UNENDLICH KLEIN WERDENDEN GROESSEN, UND DEN GRENZWERTHEN DER FUNKTIONEN.

15. Da eine veränderliche Grösse im Allgemeinen jedes beliebigen Werthes fähig ist, so kann man sich den Zahlenwerth derselben fort und fort wachsend vorstellen, so dass er endlich grösser wird als jede denkbare noch so grosse Zahl; man sagt in diesem Falle, die Grösse wachse unendlich oder sie werde unendlich gross. Eben so kann man sich vorstellen, dass der Zahlenwerth einer variablen Grösse fort und fort abnehme, so dass er endlich kleiner wird, als jede beliebige noch so kleine Zahl; die Grösse heisst in diesem Zustande eine unendlich abnehmende oder unendlich klein werdende Grösse. Der Kürze wegen nennt man gewöhnlich Grössen, welche im Zustande des unendlichen Wachsens oder Abnehmens begriffen sind, schlechthin unendlich grosse und unendlich kleine Grössen.

16. Diese Erklärungen führen unmittelbar zu folgenden Sätzen:

a) Die Summe mehrerer mit demselben Zeichen behafteter unendlich wachsender Grössen wird selbst unendlich gross; die Summe zweier mit entgegengesetzten Zeichen behafteten unendlich wachsenden Grössen hingegen kann unendlich gross werden, constant bleiben, ja selbst unendlich abnehmen.

b) Die Summe einer endlichen constanten und einer unendlich wachsenden Grösse wird unendlich gross. Daraus folgt, dass eine unendliche, d. h. im Zustande des unendlichen Wachsens begriffene Grösse durch Addition oder Subtraktion einer endlichen weder vermehrt noch vermindert wird und daher in der Summe $w \pm a$ die constante endliche Grösse a gegen die unendlich wachsende w verschwindet.

c) Die Summe einer endlichen Anzahl gleich oder entgegengesetzt bezeichneter unendlich abnehmender Grössen wird unendlich klein.

d) Das Produkt mehrerer unendlich werdender Grössen oder einer solchen mit einer constanten Grösse wird unendlich gross; das Produkt unendlich kleiner Grössen, oder solcher mit constanten Grössen nimmt unendlich ab.

e) Da der Werth eines Bruches mit constantem Zähler immer grösser oder kleiner wird, wenn der Nenner fortwährend ab- oder zunimmt, so wird ein solcher Bruch unendlich klein oder gross, je nachdem der Nenner unendlich zu- oder abnimmt.

f) Eine Potenz mit constantem positiven Exponenten wird unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem die Wurzel unendlich gross oder unendlich klein wird; das Gegentheil findet statt, wenn der Exponent negativ ist, da $w^{-n} = \frac{1}{w^n}$.

g) Ist a^w eine Potenz mit constanter Wurzel und veränderlichem Exponenten, und $a > 1$, so wird die Potenz unendlich gross, wenn w positiv ist und unendlich zunimmt; ist hingegen der Exponent negativ, so wird $a^{-w} = \frac{1}{a^w}$ bei unendlich wachsendem w unendlich klein. Ist $a < 1$, so setze man $a = \frac{1}{b}$ wo nun $b > 1$ sein wird; hiemit wird $a^w = \frac{1}{b^w}$, welcher Ausdruck mit unendlich wachsendem w unendlich klein oder gross wird, je nachdem w positiv oder negativ ist.

h) Die Verhältnisse $w^2 : w$, $w^3 : w^2$, u. s. w. ändern sich offenbar nicht und bleiben immer gleich dem Verhältnisse $w : 1$, wie gross man auch w annehmen mag; wird daher diese Grösse gegen die Einheit unendlich gross, so muss auch w^2 im Vergleiche zu w, eben so w^3 im Vergleiche zu w^2, u. s. w. unendlich gross werden. Man nennt w^2, w^3, ... unendliche Grössen der 2ten, 3ten .... Ordnung mit Bezug auf w, als eine unendlich wachsende Grösse der 1sten Ordnung. Ist umgekehrt w eine unendlich abnehmende Grösse, so wird w^2 gegen w, w^3 gegen w^2, u. s. w. unendlich klein, da die Verhältnisse $w^2 : w$, $w^3 : w^2$, u. s. w. auch bei dem unendlichen Abnehmen von w dem Verhältnisse $w : 1$ stets gleich bleiben. Man nennt w^2, w^3 ... unendlich kleine Grössen der 2ten, 3ten . .. Ordnung, wenn man w als ein unendlich kleines der ersten Ordnung betrachtet. Eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung verschwindet gegen eine unendlich kleine Grösse niedrigerer Ordnung; das umgekehrte findet bei unendlich wachsenden Grössen statt.

i) Ist

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Px + Q$$

eine ganze rationale Funktion von x, in welcher die Coefficienten A, B, C, ... P, Q von x unabhängig sind, so wird nach obigen Sätzen $f(x)$ beim unendlichen Wachsen von x selbst unendlich gross. Man kann für x immer einen hinreichend grossen endlichen Werth ange-

ben, welcher das erste Glied Ax^m numerisch grösser als die Summe aller folgenden, und somit das Zeichen des ganzen Ausdruckes von jenem des ersten Gliedes abhängig macht.

Denn es sei, ohne Rücksicht auf das Zeichen, G der numerisch grösste der Coefficienten A, B,... Q, so geschieht der Forderung

$$Ax^m > Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Px + Q$$

offenbar Genüge, wenn wir

$$Ax^m \geqq Gx^{m-1} + Gx^{m-2} + \ldots + Gx + G,$$

d. i. $$Ax^m \geqq G\left(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1\right),$$

oder da bekanntlich

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \text{ ist,}$$

$$Ax^m \geqq G\,\frac{x^m - 1}{x - 1}$$

setzen. Um so mehr wird diess der Fall sein, wenn wir

$$Ax^m \geqq \frac{Gx^m}{x-1} \quad \text{d. i.} \quad x \geqq \frac{G}{A} + 1$$

nehmen. Hiemit ist jedoch nicht behauptet, dass das erste Glied Ax^m in besonderen Fällen nicht auch schon für kleinere Werthe von x, als der eben ausgemittelte $\frac{G}{A} + 1$, grösser werden könne, als die Summe aller folgenden, was namentlich dann der Fall sein wird, wenn unter diesen Gliedern sich negative befinden.

k) Eben so folgt aus den früheren Sätzen, dass eine ganze rationale Funktion von der Form

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + \ldots + Px^{m+r}$$

beim unendlichen Abnehmen von x unendlich klein wird. Auch kann man immer für x einen so kleinen Werth angeben, welcher das erste Glied dieser Funktion oder irgend ein beliebiges grösser macht als die Summe aller folgenden. Denn die Forderung

$$Ax^m > Bx^{m+1} + Cx^{m+2} + \ldots + Px^{m+r}$$

wird gewiss erfüllt, wenn wir x so wählen, dass:

$$Ax^m \geqq Gx^{m+1} + Gx^{m+2} + \ldots + Gx^{m+r},$$

d. i. $$Ax^m \geqq Gx^{m+1}\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{r-1}\right),$$

oder

$$A \geqq Gx \cdot \frac{1 - x^r}{1 - x}$$

werde, wo wieder G der numerisch grösste der Coefficienten B, C, ... P ist. Dieser Bedingung wird aber um so mehr ein Genüge geschehen, wenn wir setzen:

$$A \geqq \frac{Gx}{1-x} \quad \text{d. i.} \quad x \leqq \frac{A}{A+G}.$$

Man kann daher in einem Ausdrucke obiger Form, welcher nach den steigenden Potenzen von x fortschreitet, x immer so klein wählen, dass das Zeichen der Summe aller Glieder mit dem Zeichen des ersten Gliedes übereinstimmt.

17. Bisher haben wir solche Funktionen betrachtet, welche bei der unendlichen Zu- oder Abnahme der variablen Grösse selbst unendlich gross oder klein werden, oder umgekehrt. Diess findet aber keineswegs immer Statt. Eine Funktion $y = f(x)$ kann bei unendlich gross oder klein werdendem x fort und fort wachsen oder abnehmen, ohne jedoch selbst unendlich gross oder klein zu werden, indem sie sich nämlich einer bestimmten Grenze mehr und mehr nähert, je grösser oder kleiner x wird. Ist z. B. $y = a \pm \frac{1}{x}$ und x eine unendlich wachsende Grösse, so wird offenbar $\frac{1}{x}$ immer kleiner und kleiner und der Werth von y nähert sich immer mehr und mehr der constanten Grösse a, ohne sie doch je zu erreichen. Man nennt daher die Grösse a die Grenze, welcher sich die Funktion $a \pm \frac{1}{x}$ für unendlich wachsende x ohne Ende nähert. Um eine solche Beziehung zu bezeichnen, bedient man sich des Zeichens: lim (von limes, die Grenze) und schreibt

$$\lim (a \pm \frac{1}{x}) = a \text{ (für wachsende } x).$$

Eine unendlich abnehmende Grösse hat offenbar die Null zur Grenze. Für eine unendlich wachsende Grösse hingegen gibt es keine Grenze, und es geschieht nur der Kürze und Bequemlichkeit des Ausdruckes wegen, wenn man auch für unendlich wachsende Grössen eine Grenze fingirt, welche durch das Zeichen ∞ vorgestellt, und geradezu eine unendlich grosse Grösse genannt wird. Ist also z. B. x eine unendlich abnehmende Grösse, so schreibt man

$$\lim \frac{1}{x} = \infty ,$$

d. h. wollte man die Grenze suchen, der sich die Funktion $\frac{1}{x}$ für unendlich abnehmende x nähert, so müsste man über jede noch so grosse angebbare Zahl hinausgehen. Hieraus folgt, dass mit dem Zeichen ∞ nicht ein bestimmter, wenn auch noch so grosser Werth bezeichnet wird, und daher mit demselben nicht nach den Regeln der Arithmetik, wie mit einer Zahl gerechnet werden kann.

Beispiele von Grenzwerthen finden sich schon in den Elementen. So ist der Bruch $\frac{1}{3}$ als die Grenze zu betrachten, welcher sich der Dezimalbruch 0,333 ...., oder die Summe der Glieder

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} \cdots\cdots$$

mehr und mehr nähert, je grösser man die Anzahl der Dezimalstellen oder der Glieder der Summe nimmt. Eben so ist die Peripherie eines Kreises die Grenze, welcher sich die Perimeter der um- und eingeschriebenen regulären Polygone bei unendlich wachsender Seitenanzahl unendlich nähern; u. s. w.

Die Aufgabe, die Grenze anzugeben, welcher sich eine Funktion bei der unendlichen Zu- oder Abnahme der Variablen nähert, bietet sich in der Analysis häufig dar, daher wir im Folgenden die wichtigsten hierher gehörigen allgemeinen Sätze anführen.

18. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen von x, welche sich bei unendlich abnehmendem x beziehungsweise den Grenzen a und b nähern, so dass

$$\lim \varphi(x) = a, \quad \lim \psi(x) = b \tag{1}$$

ist. Bezeichnet man nun mit α und β zwei mit x gleichzeitig verschwindende Grössen, so kann man

$$\varphi(x) = a + \alpha, \quad \psi(x) = b + \beta \tag{2}$$

setzen, welche Gleichungen bei dem Uebergange zur Grenze in die Gleichungen (1) übergehen, wie es sein muss.

Geht $\varphi(x)$ in eine constante Grösse c über, so folgt aus der Gleichung $\varphi(x) = \lim \varphi(x) + \alpha$, $\lim c = c$, da in diesem Falle α, wovon die Veränderlichkeit von $\varphi(x)$ abhing, $= 0$ gesetzt werden muss; die Grenze einer constanten Grösse ist also diese Grösse selbst, wie diess an und für sich klar ist.

a) Durch Addition oder Subtraktion der Gl. (2) erhält man

$$\varphi(x) \pm \psi(x) = a \pm b + (\alpha \pm \beta),$$

folglich wenn man auf die Grenze übergeht, d. h. x (somit auch α und β) unendlich abnehmen lässt:

$$\lim [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x). \tag{3}$$

Diese Gleichung, welche sich leicht durch Worte ausdrücken lässt, kann, wie leicht einzusehen, auf eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen ausgedehnt werden, gilt aber nicht mehr allgemein, wenn die Anzahl der Bestandtheile unendlich wird; da es sehr wohl sein kann, dass die Summe einer unendlichen Anzahl unendlich abnehmender Grössen sich einer von 0 verschiedenen Grenze nähert.

b) Multipliciren wir die Gl. (2), so kommt:

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

somit, da nach §. 16. *d*, $\lim (\alpha\beta + b\alpha + a\beta) = 0$ ist,

$$\lim [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = ab, \text{ d. i. [Gl. (1)]:}$$

$$\lim [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim \varphi(x) \cdot \lim \psi(x). \qquad (4)$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz gilt ebenfalls für jede beliebige endliche Anzahl Faktoren, nicht aber allgemein für eine unendliche.

c) Durch Division der Gl. (2) ergiebt sich

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

Geht man nun auf die Grenzen über, so nähert sich der Zähler des Bruches $\frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)}$ der Null, der Nenner der Grösse b^2, so dass man also hat:

$$\lim \frac{ab - \beta a}{b(b + \beta)} = \frac{0}{b^2} = 0, \text{ somit}$$

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim \varphi(x)}{\lim \psi(x)}. \qquad (5)$$

d) Ist a eine unveränderliche und x eine unendlich klein werdende Grösse, so ist

$$\lim (a^x) = 1; \qquad (6)$$

denn bezeichnet α eine positive oder negative Grösse, so kann man immer setzen:

$$a^x = 1 + \alpha, \ (n)$$

da für jeden Werth von x diese Gleichung durch gehörige Wahl von α erfüllt werden kann. Setzt man $x = \frac{1}{m}$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$a^{\frac{1}{m}} = 1 + \alpha \text{ oder } a = (1 + \alpha)^m;$$

da nun beim unendlichen Abnehmen von x, m unendlich gross wird, so muss in Folge der letzten Gleichung α mit x gleichzeitig unendlich klein werden, da sonst der Ausdruck $(1 + \alpha)^m$ [nach §. 16, *g*] unendlich wachsen würde und der constanten Zahl a nicht gleich sein könnte. Wird aber α zugleich mit x unendlich klein, so folgt aus (n): $\lim (a^x) = \lim (1 + \alpha) = 1$.

e) Es ist

$$\lim [\varphi(x)^m] = [\lim \varphi(x)]^m. \qquad (7)$$

Die erste der Gl. (2) giebt, zur m^{ten} Potenz erhoben:

$$\varphi(x)^m = (a + \alpha)^m.$$

Nimmt man von beiden Theilen dieser Gleichung die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme, dessen Basis B ist, so erhält man:

$$\log [\varphi(x)^m] = m \log (a + \alpha);$$

nun ist offenbar $\lim. [m \log (a + \alpha)] = m \log a$; man kann daher $m \log (a + \alpha) = m \log a + \delta$ setzen, wo δ eine mit x und α verschwindende Grösse ist; somit hat man:

$$\log [\varphi(x)^m] = m \log a + \delta,$$

oder

$$\varphi(x)^m = B^{m \log a + \delta} = B^{m \log a}. B^\delta$$
$$= B^{\log (a^m)}. B^\delta = a^m. B^\delta.$$

Geht man nun beiderseits auf die Grenzen über, so erhält man wegen $\lim a^m. B^\delta = \lim a^m. \lim B^\delta = a^m. 1$, und $a = \lim \varphi(x)$:

$$\lim [\varphi(x)^m] = [\lim \varphi(x)]^m.$$

f) Eben so leicht beweist man, dass

$$\lim [A^{\varphi(x)}] = A^{\lim \varphi(x)}; \tag{8}$$

denn in Folge der ersten der Gl. (2) ist

$$A^{\varphi(x)} = A^{a + \alpha} = A^a. A^\alpha,$$

woraus, da $\lim A^\alpha = 1$, durch den Uebergang zur Grenze die Gl. (8) folgt.

g) Es ist

$$\lim [\varphi(x)^{\psi(x)}] = [\lim \varphi(x)]^{\lim \psi(x)}; \tag{9}$$

denn behält man die Bezeichnung der Gl. (1) und (2) bei, so hat man

$$\varphi(x)^{\psi(x)} = (a + \alpha)^{b + \beta} = (a + \alpha)^b. (a + \alpha)^\beta;$$

beim Uebergang zur Grenze werden x, α und β gleichzeitig unendlich klein, somit nach früheren Sätzen:

$$\lim [\varphi(x)^{\psi(x)}] = \lim (a + \alpha)^b. \lim (a + \alpha)^\beta = a^b. 1 = a^b$$
$$= [\lim \varphi(x)]^{\lim \psi(x)}.$$

h) Liegt der Werth der Funktion $f(x)$ zwischen den Werthen der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so dass also

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$$

ist, und nähern sich die beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bei unendlich abnehmendem x beide derselben Grenze a, so ist auch $\lim f(x) = a$.

Denn bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der drei Funktionen kann man setzen

$$f(x) = \varphi(x) + \varrho [\psi(x) - \varphi(x)],$$

wo ϱ irgend einen positiven echten Bruch bedeutet, welche Gleichung bei dem Uebergang zur Grenze, da $\lim \psi(x) = \lim \varphi(x) = a$, die Gleichung $\lim f(x) = a$ darbietet.

19. Mit Hülfe des Begriffes der unendlich kleinen Grössen lässt sich nun auch der Begriff einer stetigen Funktion auf folgende Weise darstellen. Sei $y = f(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x, und lassen wir, von irgend einem bestimmten zwischen den Grenzen x_0 und x_1 liegenden Werthe von x ausgehend, diese Variable um die unendlich kleine Grösse δ wachsen, so nimmt die Funktion selbst um die Differenz:

$$f(x + \delta) - f(x)$$

zu, und die Funktion wird von $x = x_0$ bis $x = x_1$ stetig sein, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth von x, obige Differenz mit δ zugleich unendlich klein wird.

Für die Funktion $y = f(x) = \frac{a}{x}$ erhält man z. B.:

$$f(x + \delta) - f(x) = \frac{a}{x+\delta} - \frac{a}{x} = -\frac{a\delta}{x(x+\delta)},$$

welcher Ausdruck für jeden Werth von x mit δ unendlich klein wird, ausgenommen für den Werth $x = 0$, für welchen derselbe unendlich gross wird. Diese Funktion ist daher stetig von $x = -\infty$ bis $x = 0$, und von $x = 0$ bis $x = +\infty$, erleidet aber für $x = 0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit, indem sie für diesen Werth von x unendlich gross wird.

Man sagt: eine Funktion $y = f(x)$ ist in der Nähe eines besonderen Werthes $x = a$ stetig, wenn sie es zwischen zwei diesen Werth a einschliessenden Grenzen ist, wie enge man auch diese Grenzen zusammenziehen mag.

Eigentlich unstetige Funktionen wären solche, bei welchen sich kein Werth der unabhängig veränderlichen Grösse angeben lässt, in dessen Nähe die Funktion stetig ist. Solche Funktionen lassen sich zwar bilden (z. B. $y = (-a)^x$, wenn a wesentlich positiv), kommen jedoch in den Anwendungen der Mathematik auf Naturerscheinungen nicht vor. Im Gegentheile haben die Funktionen im Allgemeinen die Eigenschaft, in ihrem ganzen Verlaufe stetig zu bleiben, und nur gewisse Funktionen erleiden für einzelne besondere Werthe der Veränderlichen eine Unterbrechung der Stetigkeit, welche fast immer darin besteht, dass sie für diese besonderen Werthe unendlich werden.

ZWEITES KAPITEL.

VON DEN UNENDLICHEN REIHEN IM ALLGEMEINEN.

20. Eine Folge von Grössen, welche hinsichtlich ihres arithmetischen Baues nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, wird eine Reihe genannt. Die einzelnen Grössen selbst heissen Glieder der Reihe.

Um allgemein irgend eine Reihe darzustellen, bezeichnet man zweckmässig sämmtliche Glieder durch einen und denselben Buchstaben und unterscheidet die einzelnen Glieder durch diesem Buchstaben angehängte Stellenzeiger, durch welche zugleich der Ort des Gliedes in der Reihe bestimmt wird. Hiernach stellt die Folge der Symbole

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots u_n, u_{n+1}, \ldots\ldots$$

jede beliebige Reihe vor. Nach demselben Gesetze, nach welchem die Glieder der Reihe in der Richtung von u_1 gegen u_2, u_3 .... fortschreiten, kann man sich aber die Reihe auch nach entgegengesetzter Richtung fortgesetzt denken, wodurch Glieder entstehen, die folgerichtig mit u_0, u_{-1}, u_{-2} .... zu bezeichnen sind.

Im allgemeinen ist jede Reihe eine unendliche, d. h. mit unbegrenzter Anzahl der Glieder, da nichts hindert, mit der Bildung der Glieder nach dem ausgesprochenen Gesetze ins Unendliche fortzufahren. In besonderen Fällen, oder wenn die Natur der Aufgabe nur die Betrachtung einer endlichen Anzahl von Gliedern erfordert, entstehen aus den unendlichen Reihen endliche; Beispiele von solchen sind die aus den Elementen bekannte arithmetische und geometrische Progression.

21. Eine Reihe ist als bekannt anzusehen, sobald das Bildungsgesetz derselben gegeben ist. Dieses kann auf zweifache Weise dargestellt werden. Entweder ist irgend ein Glied der Reihe z. B. u_n als Funktion seines Stellenzeigers gegeben, so dass man hat

$$u_n = f(n),$$

oder als Funktion eines oder mehrerer der unmittelbar vorausgehenden Glieder, also

$$u_n = F(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots.);$$

in beiden Fällen nennt man den Ausdruck von u_n das allgemeine Glied der Reihe; im ersten Falle sagt man, es sei in independenter, im zweiten, es sei in rekurrirender Form oder durch Rekursion gegeben. So ist für die geometrische Progression

$$a, ax, ax^2, ax^3, \ldots.$$

$u_n = ax^{n-1}$ die independente, $u_n = u_{n-1} \cdot x$, oder $u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}}$ die rekurrirende Form des allgemeinen Gliedes. Wie man sieht, erfordert die Berechnung irgend eines Gliedes der Reihe mittelst der rekurrirenden Form des allgemeinen Gliedes die Kenntniss aller vorausgehenden Glieder, also zuletzt die Kenntniss so vieler Anfangsglieder, als die Rekursion überhanpt in Anspruch nimmt; während die independente Form jedes beliebige Glied der Reihe unabhängig von allen übrigen darbietet. Statt der in der rekurrirenden Form von u_n erscheinenden

vorausgehenden Glieder u_{n-1} etc. enthält die independente Form gewisse willkürliche Constanten, welche in jener fehlen.

Aus dem independenten Ausdruck des allgemeinen Gliedes lässt sich die rekurrirende Form immer mit Leichtigkeit finden, indem man in jenem $n-1$, $n-2$, etc. statt n substituirt, und aus den so erhaltenen Gleichungen eine oder mehrere Constanten eliminirt. So hat man für die obige geometrische Reihe:

$$u_n = ax^{n-1}, \quad u_{n-1} = ax^{n-2}, \quad u_{n-2} = ax^{n-3};$$

die Elimination von a aus den zwei ersten Gleichungen liefert sofort die erste, die Elimination von a und x aus allen dreien die zweite der schon oben angeführten rekurrirenden Formen des allgemeinen Gliedes.

22. Addirt man nach und nach 2, 3, 4, ... n Glieder der unendlichen Reihe

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots . u_n, \ldots .$$

so erhält man die Summen von 2, 3, 4, ... n Gliedern, welche wir mit S_2, S_3, S_4, ... S_n bezeichnen wollen, so dass also

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots . + u_n .$$

Eine Funktion des allgemeinen Stellenzeigers n, welche für jeden beliebigen Werth desselben die Summe von n Gliedern der Reihe angibt, heisst das Summenglied, das summatorische Glied oder die Summenformel der Reihe. So hat man für die geometrische Progression, wie aus den Elementen bekannt ist:

$$S_n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots . + ax^{n-1} = \frac{a(x^n - 1)}{x - 1},$$

für die arithmetische Progression:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots$$
$$+ [a + (n-1)\,d] = n\,[a + \tfrac{1}{2}(n-1)\,d].$$

Die Aufgabe, die Summenformel einer vorgelegten Reihe zu finden, nennt man die Summirung der Reihe; sie ist oft mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Ist hingegen das Summenglied einer Reihe bekannt, so ist hierdurch auch die Reihe selbst gegeben. Denn es ist

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots . + u_{n-1} + u_n,$$
$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1},$$

somit durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Setzt man also in der Summenformel S_n, $n-1$ an die Stelle von n, und subtrahirt den so erhaltenen Ausdruck von S_n, so ist die Differenz das allgemeine Glied, aus welchem die Reihe leicht construirt werden kann.

Sucht man z. B. die Reihe, deren Summenglied $S_n = \frac{n}{n+1}$, so

findet man $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$, und für die zugehörige Reihe, indem man in dem gefundenen Ausdrucke von u_n für n der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots$ substituirt:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{30}, \ldots.$$

23. Die Summenformel liefert, wie man sieht, die Summe von n Anfangsgliedern der Reihe, wo n eine ganz beliebige aber endliche Zahl bedeutet. Hieran schliesst sich ganz natürlich die Frage nach der Summe einer unendlichen Reihe, d. h. nach derjenigen Summe, die man erhalten würde, wenn man sämmtliche, unendlich viele Glieder der Reihe addiren könnte. Es handelt sich hier zunächst darum, den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe festzustellen.

So wie nun die unendliche Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots. + u_n + u_{n+1} + \ldots..$$

aus der endlichen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots. + u_n$$

dadurch entsteht, dass wir die Gliederzahl n ins Unendliche zunehmen lassen, so muss offenbar auch die Summe S der ersteren aus der Summe S_n der endlichen Reihe dadurch hervorgehen, dass wir in letzterer n unendlich wachsen lassen. Bezeichnen wir daher, gemäss den Lehren des vorhergehenden Kapitels, mit $\lim S_n$ das, was aus S_n wird, wenn n unendlich zunimmt, so haben wir

$$S = \lim S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots.. + u_n + \ldots \text{ in infin.}$$

Unter der Summe einer unendlichen Reihe verstehen wir daher die Grenze, welcher sich die Summe von n Gliedern bei dem unendlichen Wachsen von n mehr und mehr nähert.

Es entsteht nun sogleich die Frage, ob ein solcher Grenzwerth für jede unendliche Reihe existiren müsse? Diess ist offenbar nicht der Fall. So haben wir oben für die arithmetische Reihe $S_n = n\,[a + \frac{1}{2}(n-1)\,d]$ gehabt, ein Ausdruck, welcher mit n selbst unendlich gross wird, also keiner bestimmten Grenze sich nähert; eine unendliche arithmetische Reihe hat daher auch keine Summe. Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots.$$

hingegen ist summirbar, und zwar ist ihre Summe $= 1$; denn für diese Reihe ist $S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, somit für $n = \infty$, $\lim S_n = 1$. In der That findet man successive $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2, = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$,

u. s. w.; Werthe, welche sich immer mehr und mehr der Einheit nähern, je mehr Glieder man addirt.

24. Hiernach zerfallen die unendlichen Reihen in solche, deren Summe eine bestimmte endliche Grösse ist, und in solche, deren Summe nicht angebbar ist. Die ersteren werden convergent, die letzteren divergent genannt.

Convergente unendliche Reihen sind demnach immer summirbar, indem man sich dem wahren Werthe ihrer Summe um so mehr nähert, je mehr Glieder man zusammenaddirt, so dass der Fehler, welchen man begeht, indem man die Summe einer gewissen endlichen Anzahl von Anfangsgliedern der Reihe für den wahren Werth der Summe nimmt, durch Addition von hinreichend vielen Gliedern kleiner gemacht werden kann, als jede beliebige noch so kleine Grösse.

Divergente Reihen hingegen sind nicht summirbar, indem für solche die Summe von n Anfangsgliedern bei dem unendlichen Wachsen von n an keine bestimmte Grenze gebunden ist, sondern entweder selbst unendlich gross wird, oder zwischen gewissen Werthen hin und her schwankt, wie diess z. B. bei der Reihe

$$a - a + a - a + a - \ldots\ldots$$

der Fall ist, deren Summe $= + a$ oder $= 0$ ist, je nachdem die Anzahl der summirten Glieder ungerade oder gerade ist.

Da die Summe einer convergirenden Reihe mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit angegeben werden kann, so ist eine unbekannte Grösse oder Funktion als bekannt anzusehen, sobald es gelingt, sie durch eine convergirende Reihe darzustellen. Viele Funktionen, z. B. die transcendenten, lassen sich nur durch unendliche Reihen ausdrücken; häufig werden auch Funktionen, die in geschlossener Form vorliegen, der Bequemlichkeit der Berechnung wegen in unendliche Reihen aufgelöst. Dadurch kommt man auf Gleichungen von der Form

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Ist nun die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen eine convergirende, so hat sie eine Summe, und diese Summe ist eben die Funktion U, deren Werth durch Addition einer hinreichenden Anzahl von Gliedern mit jedem beliebigen Grade der Schärfe gefunden werden kann. Divergirt hingegen die Reihe, so hat sie keine bestimmte Summe, und kann daher auch der endlichen bestimmten Grösse U dem Werthe nach nicht gleich gesetzt werden. Solche Reihen sind daher zur Berechnung von Grössen oder Funktionen nicht brauchbar, sondern nur als Umformungen derselben zu betrachten, welche gewissen allgemeinen analytischen Bedingungen Genüge leisten. Hieraus geht von selbst hervor, wie wichtig es sei, beurtheilen zu können, ob eine vorgelegte Reihe con-

vergire oder divergire. Die folgenden Untersuchungen werden hierzu für die meisten Fälle ausreichende Mittel darbieten.

VON DEN KENNZEICHEN DER CONVERGENZ UND DIVERGENZ UNENDLICHER REIHEN.

25. Schon aus dem Begriffe der Convergenz folgt, dass die Glieder einer convergirenden Reihe immer kleiner und kleiner und zuletzt unendlich klein werden müssen. Soll nämlich die Summe S_n bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze S, welche die Summe der unendlichen Reihe selbst ist, immer mehr und mehr sich nähern, so muss offenbar die Differenz

$$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \qquad (1)$$

bei der unendlichen Zunahme von n unendlich klein werden, was nur dann sein kann, wenn die Glieder u_{n+1}, u_{n+2} ... selbst unendlich klein werden. Da diese Eigenschaft, welche man das Fallen der Reihe nennt, die nothwendige allgemeine Bedingung der Convergenz ist, so können wir bei den folgenden Betrachtungen die vorliegende Reihe immer als eine fallende voraussetzen.

Dass übrigens das Fallen der Reihe allein zur Convergenz nicht hinreiche, ersieht man schon aus dem obigen Ausdrucke (1), da man offenbar a priori nicht behaupten kann, dass die Summe von unendlich vielen Gliedern unendlich klein werde, wenn diess auch mit jedem einzelnen Gliede der Fall ist. Vielmehr ist es zur Convergenz der Reihe unerlässlich, dass die Summe

$$E_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots$$

welche wir die zum Zeiger $n+1$ gehörige Ergänzung der Reihe, oder die Summe der spätesten Glieder nennen und mit E_{n+1} bezeichnen werden, beim unendlichen Wachsen von n selbst unendlich klein werde. Die Bedingung der Convergenz einer unendlichen Reihe lässt sich daher auch so aussprechen: die Summe ihrer spätesten Glieder muss unendlich klein werden.

26. Um daher von einer unendlichen Reihe behaupten zu können, dass sie convergire, muss man beweisen, entweder, dass die Summe von n Anfangsgliedern beim fortwährenden Wachsen von n sich einer bestimmten Grenze nähere, oder, dass die Summe der spätesten Glieder $= 0$ sei.

Der erstere Weg lässt sich natürlich nur bei solchen Reihen betreten, deren Summenformel man kennt, was nur selten der Fall ist. Die geometrische Reihe bietet hierzu ein Beispiel dar. Für diese ist bekanntlich

$$S_n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots + ax^{n-2} + ax^{n-1} = \frac{a(x^{n-1}-1)}{x-1},$$

welche Summe man auch unter den Formen

$$S_n = \frac{ax^n}{x-1} - \frac{a}{x-1} \ldots\ldots (1), \quad S_n = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x} \ldots\ldots (2)$$

darstellen kann. Ist nun, ohne Rücksicht auf das Zeichen, der Zahlenwerth von $x < 1$, so wird x^n, somit auch $\frac{ax^n}{1-x}$ beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein [§. 16. g] und die Summe S_n nähert sich daher, wie aus (2) erhellt, immer mehr und mehr der bestimmten Grenze $\frac{a}{1-x}$; in diesem Falle ist daher die geometrische Reihe convergent und ihre Summe $S = \frac{a}{1-x}$.

Ist hingegen dem Zahlenwerthe nach $x > 1$, so wird $\frac{ax^n}{x-1}$, somit nach (1), da $\frac{a}{x-1}$ von n unabhängig also unveränderlich ist, auch S_n bei unendlicher Zunahme von n unendlich gross und die Reihe divergirt.

Für $x = +1$ geht obige Reihe über in

$$a + a + a + \ldots\ldots$$

welche Summe offenbar unendlich gross wird. Für $x = -1$ endlich erhält man die Reihe

$$a - a + a - a + a - \ldots\ldots$$

welche wegen des Schwankens ihrer Summe zwischen 0 und $+a$ ebenfalls als divergent zu betrachten ist.

Eine unendliche geometrische Reihe ist daher nur dann convergent, wenn ihr Quotient kleiner ist als die Einheit.

27. Zur Erläuterung der zweiten oben angedeuteten Beweisart wählen wir die sogenannte natürliche harmonische Reihe,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

welche Reihe wegen $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ offenbar eine fallende ist. Es ist

$$E_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots\ldots$$

also offenbar

$$E_{n+1} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n},$$

somit um so mehr

$$E_{n+1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

da der Bruch $\frac{1}{2n}$ kleiner ist, als jeder der Brüche $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}$, u. s. w. Die Anzahl der Brüche rechts vom Zeichen $>$ ist aber $= n$, somit

$$E_{n+1} > n \cdot \frac{1}{2n}, \text{ d. i. } E_{n+1} > \frac{1}{2}.$$

Die Summe der spätesten Glieder dieser Reihe wird also nicht unendlich klein, sondern bleibt immer grösser als $\frac{1}{2}$, wie gross man auch n nehmen mag, woraus die Divergenz dieser Reihe folgt. Die harmonische Reihe bietet uns sonach ein Beispiel, dass das Fallen einer Reihe die Convergenz derselben nicht nothwendig nach sich ziehe.

28. Der eben betretene Weg, nämlich die Betrachtung des Ergänzungsgliedes, führt auch noch zu folgendem allgemeinen Lehrsatze: Jede fallende Reihe, deren Glieder wenigstens von einer bestimmten Stelle an, das Zeichen regelmässig wechseln, ist convergent.

Denn es sei

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \mp u_n \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm \ldots$$

eine fallende Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel, so ist

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm u_{n+5} \mp \ldots \\ &= \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} - \ldots], \end{aligned}$$

welche Reihe von Gliedern man auch unter folgenden Formen schreiben kann:

$E_{n+1} = \pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots]$, und
$E_{n+1} = \pm [(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + (u_{n+5} - u_{n+6}) + \ldots]$

Da nun die Reihe, der Voraussetzung nach, eine fallende ist, so sind zuvörderst die in den runden Klammern stehenden Differenzen sämmtlich positiv, daher ist nothwendig dem numerischen Werthe nach

$$u_{n+1} > E_{n+1} > (u_{n+1} - u_{n+2});$$

in Folge der erwähnten Voraussetzung ist aber $\lim u_{n+1} = 0$ und $\lim (u_{n+1} - u_{n+2}) = 0$, woraus [§. 18. *h*] $\lim E_{n+1} = 0$ und hiermit die Convergenz der Reihe folgt.

Der Beweis wird auf ähnliche Weise geführt, wenn mehrere positive mit einer gleichen Anzahl negativer Glieder regelmässig wechseln.

So convergirt die fallende Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, während wir dieselbe, wenn die Glieder sämmtlich dasselbe Zeichen haben, im vorigen §. als divergirend erkannt haben.

29. Da nach dem eben bewiesenen Satze fallende Reihen mit regelmässigem Zeichenwechsel immer convergiren, so können wir uns im Folgenden auf solche beschränken, deren Glieder mit gleichem Zeichen behaftet sind. Durch die Vergleichung solcher Reihen mit anderen, deren Convergenz oder Divergenz bereits erkannt ist, gelangt man zu allgemeinen Kennzeichen der Convergenz, indem man dabei von folgendem aus dem Begriffe der Convergenz fliessenden Satze ausgeht:

a) Eine Reihe, deren Glieder, wenigstens von einer gewissen Stelle an, sämmtlich kleiner sind, als die correspondirenden, mit gleichem Zeichen versehenen Glieder einer convergirenden Reihe, convergirt ebenfalls; und eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle an gleiches Zeichen haben und grösser sind, als die correspondirenden Glieder einer divergirenden Reihe, divergirt.

Es seien nämlich die beiden Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots \quad (1)$$
$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots + t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + \ldots\ldots \quad (2)$$

und

$$E_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots\ldots$$
$$E'_{n+1} = t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots\ldots$$

Ist nun $u_{n+1} < t_{n+1}$, $u_{n+2} < t_{n+2}$, $u_{n+3} < t_{n+3}$, u. s. w. so ist, wenn die Glieder der Reihe (2) durchaus gleiches Zeichen haben, nothwendig auch $E_{n+1} < E'_{n+1}$, gleichgiltig ob die Glieder der Reihe (1) gleiches Zeichen haben oder nicht, somit, wenn die Reihe (2) convergirt, wegen $\lim E'_{n+1} = 0$, auch $\lim E_{n+1} = 0$, folglich auch die erste Reihe convergent. Ist im Gegentheile $u_{n+1} > t_{n+1}$, $u_{n+2} > t_{n+2}$, $u_{n+3} > t_{n+3}$ u. s. w. und die Reihe (2) divergent, so ist, wegen der vorausgesetzten gleichen Bezeichnung der Glieder der Reihe (1), nothwendig $E_{n+1} > E'_{n+1}$, somit, weil $\lim E'_{n+1} > 0$, auch $\lim E_{n+1} > 0$, daher auch die Reihe (1) divergent.

Man kann diesem Satze noch einen anderen, für die Anwendung bisweilen bequemeren Ausdruck verschaffen*).

Setzen wir

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \lambda_1, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = \lambda_2, \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} = \lambda_3, \text{ u. s. w.}$$
$$\frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} = \mu_1, \quad \frac{t_{n+3}}{t_{n+2}} = \mu_2, \quad \frac{t_{n+4}}{t_{n+3}} = \mu_3, \text{ u. s. w.}$$

* Schlömilch, Algebraische Analysis. 1851. p. 97.

so wird

$$u_{n+1} = u_{n+1} \qquad t_{n+1} = t_{n+1}$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} \cdot \lambda_1 \qquad t_{n+2} = t_{n+1} \cdot \mu_1$$
$$u_{n+3} = u_{n+2} \cdot \lambda_2 = u_{n+1} \cdot \lambda_1 \lambda_2 \qquad t_{n+3} = t_{n+2} \cdot \mu_2 = t_{n+1} \cdot \mu_1 \mu_2$$
$$u_{n+4} = u_{n+3} \cdot \lambda_3 = u_{n+1} \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \qquad t_{n+4} = t_{n+3} \cdot \mu_3 = t_{n+1} \mu_1 \cdot \mu_2 \mu_3$$

u. s. w. u. s. w.

somit

$$E_{n+1} = u_{n+1}\,(1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots.),$$
$$E'_{n+1} = t_{n+1}\,(1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots.).$$

Es sei nun

$$\lambda_1 < \mu_1,\ \lambda_2 < \mu_2,\ \lambda_3 < \mu_3,\ \text{u. s. w.}$$

so ist auch

$$\lambda_1 \lambda_2 < \mu_1 \mu_2,\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < \mu_1 \mu_2 \mu_3,\ \text{u. s. w., und}$$
$$1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots. < 1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots.$$

folglich auch

$$E_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{t_{n+1}} \cdot E'_{n+1} \quad (\alpha)$$

Setzt man ferner voraus, dass die Reihe (2) convergire, so ist $\lim E'_{n+1} = 0$, somit, wegen (α), auch $\lim E_{n+1} = 0$, (da der Bruch $\frac{u_{n+1}}{t_{n+1}}$, wie die aus $\lambda_1 < \mu_1$, folgende Relation $\frac{u_{n+2}}{t_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{t_{n+1}}$ lehrt, nicht unendlich werden kann), folglich auch die Reihe (1) convergent.

Auf dieselbe Weise beweist man, dass wenn die Reihe (2) divergirt und $\lambda_1 > \mu_1$, $\lambda_2 > \mu_2$, u. s. w. ist, auch die Reihe (1) divergent ist.

Es gilt daher folgender Satz:

b) die Reihe (1) convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe (2), je nachdem von einer bestimmten Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{t_{n+1}}{t_n}, \text{ oder } \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

bleibt.

30. Setzen wir an die Stelle der Reihe (2) eine geometrische Reihe,

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots.$$

deren Convergenz nach §. 26 an die Bedingung: $x < 1$ gebunden ist, und vergleichen wir damit die Reihe (1), so ist $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{ax^{n+1}}{ax^n} = x$; die Reihe (1) wird somit convergiren, wenn von irgend einer Stelle angefangen, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < x$ und $x < 1$, sie wird divergiren, wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} > x$ und $x > 1$ ist; Bedingungen, welche sich bequemer durch folgenden Satz ausdrücken lassen:

Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

convergirt, wenn bei dem unendlichen Wachsen von n $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ist; sie divergirt, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, wobei wieder, wie bei der geometrischen Reihe nur der Zahlenwerth von $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, in Betracht kommt.

Denn wenn der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zum Behufe der Convergenz von irgend einem Werthe des Stellenzeigers $n = m$ angefangen kleiner sein und auch für alle folgenden Werthe $n = m + 1, m + 2$ u. s. w. in inf. kleiner bleiben soll, als die Einheit, so muss er sich offenbar bei dem unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze nähern, die kleiner ist als 1. Ist hingegen $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, so muss nothwendig der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ früher oder später grösser werden und bleiben als die Einheit und somit die Reihe divergiren.

Beisp. 1. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3\ldots.n} + \ldots.$$

convergirt; denn es ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n} : \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{1}{n}, \text{ somit}$$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

2) Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3.2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7.2^3} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.4.6\ldots2(n-1)} \cdot \frac{1}{(2n-1)\ 2^{n-1}} + \ldots$$

convergirt; denn man findet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2}n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}}{1 + \frac{1}{2n}},$$

ein Ausdruck, welcher beim unendlichen Zunehmen von n, $\frac{1}{2}$ zur Grenze hat.

Dieses Kennzeichen, in sehr vielen Fällen anwendbar, wird un-

brauchbar, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist. Dann führt bisweilen folgender Satz zum Ziele.

31. Die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots \qquad (1)$$

convergirt oder divergirt gleichzeitig mit der daraus abgeleiteten Reihe:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots \qquad (2)$$

Der Beweis ist folgender. Da wir die Reihe (1) als fallend voraussetzen, so ist

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &> u_2 + u_3 \\ 4u_4 &> u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ 8u_8 &> u_8 + u_9 + \ldots\ldots + u_{15} \\ 16u_{16} &> u_{16} + u_{17} + \ldots\ldots + u_{31} \end{aligned}$$

u. s. w.

Durch Addition dieser Relationen erhalten wir

$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots\ldots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$ (α);

es ist daher die Summe der Reihe (1) kleiner als jene der abgeleiteten (2); ist also die letztere eine bestimmte endliche Grösse, d. h. convergirt die Reihe (2), so muss die Summe der Reihe (1) ebenfalls eine bestimmte endliche Grösse sein, und somit diese Reihe ebenfalls convergiren. Umgekehrt, wenn die Reihe (1) divergirt, so wird auch die abgeleitete Reihe (2) divergent sein, da in Folge der Relation (α) die Summe der letzteren zugleich mit jener der Reihe (1) unendlich wird. — Es ist aber auch

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &= 2u_2 \\ 4u_4 &< 2u_3 + 2u_4 \\ 8u_8 &< 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8 \\ 16u_{16} &< 2u_9 + 2u_{10} + \ldots + 2u_{16} \end{aligned}$$

u. s. w.

somit

$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots\ldots < u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots$

oder, wenn man im 2ten Theile dieser Ungleichung u_1 addirt und subtrahirt:

$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots\ldots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots) - u_1$

woraus man, ähnlich wie oben, schliesst, dass wenn die Reihe (1) convergirt, auch die abgeleitete (2) convergent ist und dass umgekehrt aus der Divergenz der abgeleiteten Reihe die Divergenz der Reihe (1) folgt. Somit sind immer beide Reihen gleichzeitig convergent oder divergent.

Beisp. 1) Sei die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \ldots\ldots$$

gegeben, so ist die daraus abgeleitete Reihe:

$$1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \frac{8}{8^r} + \frac{16}{16^r} + \ldots\ldots$$

in welcher man sogleich eine geometrische Reihe erkennt, deren Exponent $= \frac{2}{2^r}$ ist. Soll diese convergiren, so muss $\frac{2}{2^r} < 1$ d. i. $r > 1$ sein; unter derselben Bedingung convergirt daher auch die vorgelegte Reihe; für jeden anderen Werth von $r \leqq 1$ divergirt sie; für $r = 1$ geht sie in die natürliche harmonische über, deren Divergenz schon früher auf anderem Wege bewiesen wurde.

2) Die gegebene Reihe sei:

$$1 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \frac{1}{5 \log 5} + \ldots + \frac{1}{n \log n} + \ldots$$

so ist die abgeleitete Reihe:

$$1 + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 4} + \frac{1}{\log 8} + \frac{1}{\log 16} + \ldots\ldots$$

oder

$$1 + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 2} + \frac{1}{4 \log 2} + \ldots\ldots$$

d. i.

$$1 + \frac{1}{\log 2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\right);$$

die in den Klammern stehende Reihe ist die natürliche harmonische und divergirt; folglich ist auch die gegebene Reihe divergent.

3) Hingegen ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2\,(\log 2)^m} + \frac{1}{3\,(\log 3)^m} + \frac{1}{4\,(\log 4)^m} + \ldots\ldots$$

convergent, wenn $m > 1$; denn die abgeleitete Reihe ist

$$1 + \frac{1}{(\log 2)^m} + \frac{1}{(\log 4)^m} + \frac{1}{(\log 8)^m} + \ldots\ldots,$$

welche man leicht auf die Form

$$1 + \frac{1}{(\log 2)^m}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots\ldots\right)$$

bringt; da nun die Reihe in der Klammer für $m > 1$ convergirt, so gilt diess auch von der vorgelegten Reihe.

32. Die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$ convergirt, wenn der Ausdruck: $n^r u_n$, wo $r > 1$ vorausgesetzt ist, beim unendlichen Wachsen von n unendlich klein, also $\lim n^r u_n = o$ wird.

Beweis. Ist $\lim n^r u_n = 0$, so kann man für n immer eine hinreichend grosse Zahl m setzen, so dass $m^r u_m = A$ wird, wo A eine beliebig kleine Zahl, aber > 0 ist; da nun der Voraussetzung nach der Ausdruck $n^r u_n$ mit zunehmendem n immer kleiner wird, so ist nothwendig $(m+1)^r u_{m+1} < A$, $(m+2)^r u_{m+2} < A$, u. s. w.; somit haben wir:

$$u_m = \frac{A}{m^r},$$

$$u_{m+1} < \frac{A}{(m+1)^r},$$

$$u_{m+2} < \frac{A}{(m+2)^r},$$

u. s. w.

folglich, wenn man addirt:

$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots < A\left[\frac{1}{m^r} + \frac{1}{(m+1)^r} + \frac{1}{(m+2)^r} + \ldots\right].$$

Die Reihe in den Klammern ist aber, da $r > 1$, [§. 31. Beisp. 1] eine convergirende, ihre Summe daher eine bestimmte endliche Grösse; um so mehr muss daher die Summe der links stehenden Reihe, da sie kleiner ist, eine bestimmte endliche Grösse sein und diese Reihe somit convergiren.

33. Das in §. 30 entwickelte Kennzeichen reicht, wie schon bemerkt, in dem Falle nicht aus, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ist, was nicht selten und namentlich immer eintritt, wenn der Quotient $u_{n+1} : u_n$ die Form

$$\frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h}$$

annimmt. Führt nun in einem solchen Falle der in §. 31 entwickelte Satz nicht zum Ziele, so bedarf man anderer Hülfsmittel, die wir im Folgenden nach Gauss entwickeln wollen.

Es sei demnach die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \quad (1)$$

so beschaffen, dass der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h} = \frac{P}{p} \quad (2)$$

ist, wobei die Coefficienten A_1, $A_2 \ldots A_h$, a_1, $a_2 \ldots a_h$ von n unabhängig sind, und der Kürze wegen

$$n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h = P \quad (3)$$

$$n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h = p \quad (4)$$

gesetzt ist, so gelten folgende Sätze:

1) Ist die Differenz $A_1 - a_1 > 0$, also positiv, so ist die Reihe (1) eine steigende; und die spätesten Glieder werden unendlich gross.

α) Ziehen wir (4) von (3) ab, so kommt:

$$P-p = (A_1 - a_1)\, n^{h-1} + (A_2 - a_2)\, n^{h-2} + \ldots\ldots + (A_g - a_g)\, n^{h-g} + \ldots + (A_h - a_h). \quad (5)$$

Da der Voraussetzung nach $(A_1 - a_1)$ positiv ist, so wird früher oder später, wenn nur n hinreichend gross genommen wird, der ganze zweite Theil dieser Gleichung positiv, weil das erste Glied $(A_1 - a_1)\, n^{h-1}$ positiv ist, und [§. 16, i] endlich grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder. Dann ist aber auch $P-p$ positiv also $P > p$, d. h. nach (2): $u_{n+1} > u_n$, die Reihe (1) somit eine steigende.

β) Vergleichen wir ferner die Reihe (1) mit folgender:

$$u_1^k + \frac{u_2^k}{2} + \frac{u_3^k}{3} + \frac{u_4^k}{4} + \ldots\ldots + \frac{u_n^k}{n} + \ldots., \quad (6)$$

welche der Kürze wegen mit

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots. + U_n + \ldots.$$

bezeichnet werden möge, und wo k eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann nun, unter der Voraussetzung, dass $A_1 - a_1$ positiv, k immer so wählen, dass die Reihe (6) eine steigende wird. Denn man hat mit Rücksicht auf (6) und (2):

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{u_{n+1}^k}{n+1} : \frac{u_n^k}{n} = \frac{n \cdot u_{n+1}^k}{(n+1)\, u_n^k} = \frac{n(n^h + A_1\, n^{h-1} + A_2\, n^{h-2} + \ldots + A_h)^k}{(n+1)(n^h + a_1 n^{h-1} + a_2\, n^{h-2} + \ldots + a_h)^k}.$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze, der für ganze und positive Werthe des Exponenten aus den Elementen bekannt ist,

$$(n^h + A_1\, n^{h-1} + A_2\, n^{h-2} + \ldots. + A_h)^k = \{n^h + (A_1\, n^{h-1} + A_2\, n^{h-2} + \ldots.. + A_h)\}^k = n^{hk} + k n^{h(k-1)} (A_1\, n^{h-1} + \ldots. + A_h) + \ldots$$

somit, wenn man bei den zwei ersten Gliedern stehen bleibt und endlich mit n multiplicirt, der Zähler des obigen Bruches

$$= n^{hk+1} + k A_1\, n^{hk} + \ldots..$$

Entwickelt man auf gleiche Weise den Nenner, so findet man

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{hk+1} + k A_1\, n^{hk} + \ldots.}{n^{hk+1} + (a_1 k + 1)\, n^{hk} + \ldots.};$$

nach (α) ist aber die Reihe (6) eine steigende, wenn in dem Quotienten $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ die Differenz: $k A_1 - (k a_1 + 1) = k(A_1 - a_1) - 1$, positiv ist. Da nun $A_1 - a_1$ positiv vorausgesetzt ist, so kann man k immer so

wählen, dass $k(A_1 - a_1) - 1$ positiv, somit die Reihe (6) steigend ist. Sollen aber die Glieder der Reihe (6) immer grösser werden, so muss im n^{ten} Gliede $\frac{u_n^k}{n}$ beim unendlichen Wachsen des Nenners n nothwendig auch der Zähler u_n^k, somit auch $\sqrt[k]{u_n^k} = u_n$ unendlich gross werden; d. h. die spätesten Glieder der Reihe (1) müssen unendlich gross werden.

2) Ist die Differenz $A_1 - a_1 < 0$, also negativ, so ist die Reihe (1) eine fallende, und die spätesten Glieder werden unendlich klein.

γ) Der erste Theil dieses Satzes erhellt sogleich wieder aus Gl. (5), deren zweiter Theil früher oder später das Zeichen des ersten Gliedes $(A_1 - a_1)\, n^{k-1}$ annimmt, also negativ wird; daraus folgt $P < p$, d. i. $u_{n+1} < u_n$; d. h. die Glieder der Reihe (1) nehmen fort und fort ab.

δ) Vergleichen wir ferner die Reihe (1) mit folgender:

$$u_1^k + 2u_2^k + 3u_3^k + 4u_4^k + \ldots\ldots + nu_n^k + (n+1)\, u_{n+1}^k + \ldots \quad (7)$$

deren Glieder wir wieder mit $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n, \ldots$ bezeichnen wollen und wo k eine positive ganze Zahl ist. Es ist nun wieder leicht zu zeigen, dass man k immer so wählen kann, dass die Reihe (7) eine fallende werde. Denn für diese Reihe finden wir:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)\, u_{n+1}^k}{n \,.\, u_n^k} = \frac{n^{hk+1} + (A_1\, k + 1)\, n^{hk} + \ldots\ldots}{n^{hk+1} + a_1\, k \,.\, n^{hk} + \ldots\ldots};$$

es hängt somit das Steigen oder Fallen der Reihe (7) von der Differenz

$$A_1\, k + 1 - a_1\, k = 1 - k\,(a_1 - A_1)$$

ab, und man kann, da $a_1 - A_1$ der Voraussetzung nach positiv ist, k immer so wählen, dass diese Differenz negativ, somit die Reihe (7) nach γ) eine fallende werde. Sollen aber die Glieder dieser Reihe $U_n = nu_n^k$ immer kleiner werden, — gleichgültig, ob sie dabei unendlich klein werden oder sich einer bestimmten Grenze nähern, so muss nothwendig, wegen des unendlichen Zunehmens des einen Faktors n, der andere u_n^k, folglich auch $\sqrt[k]{u_n^k} = u_n$ unendlich klein werden. Ist demnach $A_1 - a_1 < 0$, so werden die spätesten Glieder der Reihe unendlich klein.

3) Ist die Differenz $A_1 - a_1 = 0$, so nähern sich die Glieder der Reihe (1) beim unendlichen Wachsen von n einer bestimmten Grenze, und zwar steigend oder fallend, je nachdem die erste nicht verschwindende Differenz zweier gleichnamigen Coefficienten im Zähler und Nen-

ner des Quotienten (2), z. B. $A_g - a_g$ positiv oder negativ ist.

Sei demnach $A_1 - a_1 = 0$, $A_2 - a_2 = 0$ u. s. w. und $A_g - a_g$ die erste nicht verschwindende Differenz, so wird aus (5)

$$P - p = (A_g - a_g)\, n^{h-g} + \ldots\ldots + (A_h - a_h)\,,$$

und es folgt nun ganz auf dieselbe Weise, wie wir unter α) und γ) geschlossen haben, dass die Reihe (1) steigend oder fallend sei, je nachdem die Differenz $A_g - a_g$ positiv oder negativ ist. Dass aber in unserem jetzigen Falle, wo $A_1 - a_1 = 0$ vorausgesetzt wurde, die spätesten Glieder nicht unendlich gross oder beziehungsweise unendlich klein werden, sondern einer bestimmten Grenze sich immer mehr und mehr nähern, erhellt aus folgenden Betrachtungen.

Sei zuerst $A_g - a_g > 0$, also die Reihe (1) steigend und vergleichen wir dieselbe mit folgender:

$$\infty, \left(\frac{2}{1}\right)^k u_2, \left(\frac{3}{2}\right)^k u_3, \left(\frac{4}{3}\right)^k u_4, \ldots\ldots \left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n, \left(\frac{n+1}{n}\right)^k u_{n+1}, \ldots \quad (8)$$

so haben wir, wenn die Glieder derselben mit U_n bezeichnet werden,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n^2-1)^k \cdot u_{n+1}}{n^{2k} \cdot u_n} = \frac{(n^2-1)^k\,(n^h + A_1\, n^{h-1} + \ldots + A_h)}{n^{2k}\,(n^h + a_1\, n^{h-1} + \ldots + a_h)},$$

somit wegen:

$$(n^2-1)^k = n^{2k} - kn^{2k-2} + \frac{k(k-1)}{1.2}\, n^{2k-4} - \ldots\ldots,$$

nach verrichteter Multiplikation im Zähler und Nenner:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k+h} + A_1\, n^{2k+h-1} + (A_2 - k)\, n^{2k+h-2} + \ldots}{n^{2k+h} + a_1\, n^{2k+h-1} + a_2\, n^{2k+h-2} + \ldots}.$$

Da nun $A_1 - a_1 = 0$, so hängt das Steigen oder Fallen der Reihe (8) von der ersten nicht verschwindenden Differenz gleichnamiger Coefficienten ab; diese ist hier:

$$A_2 - k - a_2 = (A_2 - a_2) - k,$$

und man kann k offenbar immer so gross wählen, dass diese Differenz negativ, und dadurch die Reihe (8) eine fallende wird. Nun ist aber, da n eine positive ganze Zahl, immer $\left(\frac{n}{n-1}\right)^k u_n > u_n$, d. h. die Glieder der fallenden Reihe (8) sind fort und fort grösser als die correspondirenden der steigenden Reihe (1), woraus folgt, dass die Glieder der ersteren nicht unendlich klein, die der letzteren nicht unendlich gross werden können und daher einer und derselben bestimmten Grenze sich nähern müssen.

Sei ferner $A_g - a_g < 0$, somit die Reihe (1) eine fallende und vergleichen wir dieselbe mit der Reihe:

$$0, \left(\frac{1}{2}\right)^k u_2, \left(\frac{2}{3}\right)^k u_3, \left(\frac{3}{4}\right)^k u_4, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^k u_n, \left(\frac{n}{n+1}\right)^k u_{n+1}, \ldots . (9)$$

Für diese Reihe wird

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k} \cdot u_{n+1}}{(n^2-1)^k \cdot u_n} = \frac{n^{2k}(n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)}{(n^2-1)^k (n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h)},$$

und nach gehöriger Entwickelung:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{2k+h} + A_1 n^{2k+h-1} + A_2 n^{2k+h-2} + \ldots}{n^{2k+h} + a_1 n^{2k+h-1} + (a_2 - k) n^{2k+h-2} + \ldots}.$$

Das Steigen oder Fallen der Reihe (9) hängt nun, da $A_1 - a_1 = 0$, von der Differenz $(A_2 - a_2) + k$ ab und man kann offenbar k immer so gross wählen, dass diese Differenz positiv wird. Dann ist aber die Reihe (9) eine steigende, und da $\left(\frac{n-1}{n}\right)^k u_n$ immer $< u_n$, die Glieder dieser steigenden Reihe somit immer kleiner sind als die correspondirenden Glieder der fallenden Reihe (1), so schliesst man wieder, wie im vorigen Falle, dass die Glieder beider Reihen sich einer und derselben bestimmten Grenze nähern müssen.

4) Die bisherigen Untersuchungen geben über das Steigen oder Fallen der Reihe (1) zuverlässige Auskunft, und man sieht, dass die Reihe nur dann convergiren könne, wenn $A_1 - a_1 < 0$, oder negativ ist, weil nur in diesem Falle die spätesten Glieder unendlich klein werden. Ueberdiess wird zur Convergenz der Reihe (1) noch erfordert, dass $a_1 - A_1 > +1$ sei.

Denn vergleichen wir die Reihe (1) mit der Reihe

$$u_1, 2^k u_2, 3^k u_3, 4^k u_4, \ldots . n^k u_n, (n+1)^k u_{n+1}, \ldots \quad (10)$$

in welcher wir $k > 1$ voraussetzen und deren Glieder wieder mit U_n bezeichnet werden mögen, so haben wir:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^k \cdot u_{n+1}}{n^k \cdot u_n} = \frac{(n+1)^k (n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h)}{n^k (n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h)},$$

d. i. gehörig entwickelt:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^{h+k} + (A_1 + k) n^{h+k-1} + \ldots}{n^{h+k} + a_1 n^{h+k-1} + \ldots}.$$

Soll nun die Reihe (1) convergiren, so muss nach dem in §. 32 entwickelten Satze $\lim (n^k u_n) = 0$ sein für $k > 1$; allein $n^k u_n$ ist das allgemeine Glied der Reihe (10); diese muss also eine fallende sein, deren späteste Glieder unendlich klein werden. Dazu wird erfordert, dass in dem Quotienten $U_{n+1} : U_n$ die Differenz $A_1 + k - a_1 = k - (a_1 - A_1)$ negativ, also $a_1 - A_1 > k$, folglich, da $k > 1$, auch $a_1 - A_1 > 1$ sei.

Das Resultat unserer Untersuchung ist daher einfach folgendes:

Eine Reihe: $u_1, u_2, u_3, \ldots$ für welche der Quotient $u_{n+1} : u_n$ die Form:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h}$$

annimmt, convergirt nur dann, wenn die Differenz $a_1 - A_1$ eine die Einheit überschreitende positive Zahl ist.

34. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

1) Die Reihe:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

divergirt; denn es ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}, \text{ somit } A_1 - a_1 = -1,\ a_1 - A_1 = +1;$$

die Reihe ist also zwar eine fallende, deren späteste Glieder unendlich klein werden, weil $A_1 - a_1 < 0$, wie man diess auch unmittelbar erkennt; sie divergirt aber, weil $a_1 - A_1$ die Einheit nicht übersteigt.

2) Für die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

findet man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{n^2 - n + \frac{1}{4}}{n^2 + \frac{1}{2}n};$$

da nun $a_1 - A_1 = +\frac{3}{2} > 1$, so ist die Reihe convergent.

3) Betrachten wir die Reihe der Binomialcoefficienten:

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

in welcher, damit die Reihe nicht abbreche, m keine positive ganze Zahl bedeuten soll. Man findet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} = -\frac{n-m}{n+1};$$

das negative Zeichen des Quotienten deutet an, dass die Zeichen der Glieder der Reihe früher oder später (und zwar sobald $n > m$ geworden ist) zu wechseln beginnen, daher zur Convergenz nur noch das unendliche Abnehmen der Glieder erfordert wird. Diess findet statt, wenn $A_1 - a_1 = -m - 1$ negativ ist, was immer der Fall ist, so lange m keine negative die Einheit übersteigende Zahl ist.

Für die Reihe:

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n} \mp \ldots$$

wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-m}{n+1},$$

woraus erhellt, dass der im Anfange statt findende Zeichenwechsel, sobald $n > m$ geworden, aufhört; zur Convergenz der Reihe wird daher erfordert, dass $a_1 - A_1 = 1 + m > +1$ sei; diese Reihe convergirt daher für jeden positiven Werth von m.

35. Von besonderer Wichtigkeit sind in der Analysis jene unendlichen Reihen, deren Glieder nach den steigenden mit positiven ganzen Exponenten versehenen Potenzen einer Variablen x fortschreiten, also von der Form:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots.$ (1)

sind, wobei die von x unabhängigen Coefficienten a_0, a_1, a_2 u. s. f. wieder für sich eine Reihe darstellen.

Da x eine veränderliche Grösse vorstellt, so kann nur die Frage sein, für welche Werthe von x die Reihe (1) convergirt. Hiezu wird nach dem in §. 30 entwickelten Kennzeichen erfordert, dass

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} = \lim x. \frac{a_{n+1}}{a_n} = x. \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

somit, wenn wir der Kürze wegen

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$$

setzen,

$$x < \frac{1}{A}$$

sei. Die Reihe (1) convergirt daher für alle Werthe von x, welche numerisch kleiner sind als $\frac{1}{A}$, d.h. welche zwischen den Grenzen $-\frac{1}{A}$ und $+\frac{1}{A}$ liegen. Für alle ausserhalb derselben liegenden Werthe von x divergirt sie. Das Verhalten der Reihe, wenn man darin $x = \pm \frac{1}{A}$ substituirt, muss nach den früher entwickelten Vorschriften besonders untersucht werden.

Wie man sieht, können daher solche Reihen immer convergent gemacht werden, indem man x hinreichend klein nimmt; vorausge-

setzt, dass der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ beim unendlichen Wachsen von n nicht unendlich wird, wie diess z. B. bei der Reihe: $1 + 1.2x + 1.2.3x^2 + 1.2.3.4.x^3 + \ldots$. der Fall wäre.

Beisp. 1) Für die Reihe:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots. + \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n} + \ldots.$$

ist $A = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$; die Reihe convergirt daher für alle Werthe von x, welche zwischen $-\frac{1}{0}$ und $+\frac{1}{0}$, d. h. zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen; also für jeden beliebigen positiven oder negativen Werth von x.

2) Für die Reihe:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots.. + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

hat man $A = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$; daher convergirt sie für alle Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = 1$ geht die Reihe in die divergirende natürliche harmonische über; für $x = -1$ in die wegen des unendlichen Abnehmens der Glieder und des Zeichenwechsels convergirende Reihe: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots.$

3) Für die Reihe:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots..$$

findet man $A = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(-\frac{n-m}{n+1}\right) = -1$; diese Reihe convergirt daher ebenfalls nur für Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen. Für $x = \pm 1$ selbst haben wir das Verhalten dieser Reihe im vorigen §. untersucht.

36. Wenn zwei Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_n x^n + \ldots \quad (1)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots. + b_n x^n + \ldots \quad (2)$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren, so ist auch die durch Addition oder Subtraktion dieser Reihen entstehende neue Reihe für denselben Werth von x convergent.

Denn es sei

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. + a_{n-1} x^{n-1}$$
$$T_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots. + b_{n-1} x^{n-1},$$

somit

$$S_n \pm T_n = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)\, x + (a_2 \pm b_2)\, x^2 + \ldots . \\ + (a_{n-1} \pm b_{n-1})\, x^{n-1};$$

bezeichnen wir nun mit S und T die Summen der beiden unendlichen Reihen (1) und (2), so dass also $S = \lim S_n$, $T = \lim T_n$, so geht die letzte Gleichung, wenn man in derselben n unendlich wachsen lässt, wegen $\lim (S_n \pm T_n) = \lim S_n \pm \lim T_n = S \pm T$, über in

$$S \pm T = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)\, x + \ldots . + (a_{n-1} \pm b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots . \quad (3)$$

woraus erhellt, dass die Summe der rechts stehenden Reihe an die Grenze $S \pm T$ gebunden ist, die Reihe somit convergirt.

37. Wenn die beiden Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_n x^n + \ldots . \quad (1)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots . + b_n x^n + \ldots . \quad (2)$$

für einen bestimmten Werth von x convergiren, der allen Gliedern gleiche Zeichen ertheilt, so ist das Produkt derselben wieder eine convergente Reihe, und deren Summe gleich dem Produkte der Summen der beiden Reihen.

Setzen wir für die $(n+1)$ ersten Glieder beider Reihen:

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_n x^n$$
$$T_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots . + b_n x^n,$$

so erhalten wir durch Multiplikation:

$$S_n\, T_n = a_0\, b_0 + (a_0\, b_1 + a_1\, b_0)\, x + \ldots . + (a_0\, b_n + \ldots . \\ + a_n\, b_0)\, x^n + \ldots + a_n\, b_n\, x^{2n},$$

somit ist, wenn wir die Summe der $n+1$ ersten Glieder des Produktes mit P_n bezeichnen, also

$$P_n = a_0\, b_0 + (a_0\, b_1 + a_1\, b_0)\, x + \ldots . + (a_0\, b_n + \ldots . + a_n\, b_0)\, x^n \quad (3)$$

setzen, offenbar

$$P_n < S_n\, T_n,$$

da die auf das mit x^n behaftete Glied im Produkte $S_n\, T_n$ folgenden und in P_n fehlenden Glieder der Voraussetzung nach sämmtlich positiv sind. Sei ferner m die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, also $m = \frac{n}{2}$ oder $= \frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade, und

$$S_m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . + a_m x^m$$
$$T_m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots . + b_m x^m,$$

somit

$$S_m\, T_m = a_0\, b_0 + (a_0\, b_1 + a_1\, b_0)\, x + \ldots . + a_m\, b_m\, x^{2m}, \quad (4)$$

so ist

$$P_n > S_m\, T_m,$$

wovon man sich durch Vergleichung der beiden Ausdrücke (3) und (4) leicht überzeugt. Es ist daher

$$S_m\ T_m < P_n < S_n\ T_n;$$

lassen wir nun n, folglich auch m unendlich wachsen, so nähern sich die Produkte $S_m\ T_m$ und $S_n\ T_n$ beide der Grenze ST, wenn wir wieder mit S und T die Summen der beiden unendlichen Reihen (1) und und (2) bezeichnen, somit muss auch $\lim P_n = ST$ sein, da P_n immer zwischen den Grössen $S_m\ T_m$ und $S_n\ T_n$ eingeschlossen ist; womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Haben die beiden Reihen für den besonderen Werth von x nicht durchaus gleiche Zeichen, so können in dem Produkte $S_n\ T_n$ unter den, auf das mit x^n behaftete, folgenden Gliedern auch negative vorkommen, so dass dann nicht nothwendig $P_n < S_n\ T_n$ sein muss und die folgenden Schlüsse nicht mehr zulässig sind. In einem solchen Falle muss daher das Produkt der beiden Reihen in Bezug auf seine Convergenz besonders untersucht werden.

Nur in dem Falle kann man noch der Convergenz des Produktes im Voraus versichert sein, wenn zwar die beiden Reihen (1) und (2) mit wechselnden Vorzeichen versehen aber so beschaffen sind, dass sie auch noch convergent bleiben, wenn man sämmtlichen Gliedern gleiche Zeichen ertheilt. Denn das Produkt würde dann convergent sein, wenn alle Glieder in den Faktoren gleiche Zeichen hätten, folglich um so mehr, wenn Zeichenwechsel eintreten.

38. Wenn in der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots\ldots + a_n\ x^n + \ldots.$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für jeden Werth von n kleiner ist als eine endliche, übrigens willkührliche Grösse A, so ist bei dem unendlichen Abnehmen von x die Grenze der Summe dieser Reihe $= a_0$.

Denn der Voraussetzung zufolge ist

$$a_2 < Aa_1, \text{ somit auch } a_2 < Aa_1 \text{ und } a_2x^2 < Aa_1x^2$$
$$a_3 < Aa_2 \quad - \quad - \quad a_3 < A^2a_1 \quad - \quad a_3x^3 < A^2a_1x^3$$
$$a_4 < Aa_3 \quad - \quad - \quad a_4 < A^3a_1 \quad - \quad a_4x^4 < A^3a_1x^4$$
$$\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.}$$

Addirt man diese Relationen und gibt zu beiden Seiten $a_1x = a_1x$ hinzu, so folgt

$$a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + a_4x^4 + \ldots.. < a_1\ x(1 + Ax + A^2x^2 + A^3x^3 + \ldots)$$

somit, wenn wir — was immer möglich ist — $Ax < 1$, d. i. $x < \frac{1}{A}$ wäh-

len, damit die in den Klammern stehende unendliche geometrische Reihe convergire,

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots < a_1 x . \frac{1}{1 - Ax};$$

da nun beim unendlichen Abnehmen von x, $\lim a_1 x . \frac{1}{1 - Ax} = 0$ wird, so ist auch

$\lim (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots) = 0$, folglich

$\lim (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) = a_0$.

ALLGEMEINE BEMERKUNGEN UEBER DIE ENTWICKELUNG DER FUNKTIONEN IN REIHEN. — UNBESTIMMTE COEFFICIENTEN.

39. Es sei

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

eine nach steigenden Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe, welche für alle Werthe von x, die zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$ liegen, convergirt, also eine bestimmte Summe hat. Letztere wird offenbar eine Funktion von x sein, so dass die Gleichung besteht:

$$f(x) = a_1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \quad \begin{cases} x = -A \\ x = +A \end{cases} \qquad (1)$$

Man nennt die unendliche Reihe rechts vom Gleichheitszeichen die Entwickelung der Funktion $f(x)$; der Werth der letzteren kann für jeden zwischen $-A$ und $+A$ liegenden Werth von x mit Hülfe der Reihe berechnet werden, und zwar mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, indem man eine hinreichende Anzahl von Anfangsgliedern addirt. Für Werthe von x, welche ausserhalb obiger Grenzen liegen, hört die Gleichung (1) auf, gültig zu sein; daher man die Grenzwerthe von x, innerhalb welcher die Gl. (1) zulässig ist, beizufügen pflegt, etwa auf die oben in (1) angedeutete Weise.

Eine bestimmte Funktion $f(x)$ kann nur auf eine Art in eine nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen x fortschreitende Reihe entwickelt werden. Denn hätte man z. B. nebst obiger Gleichung auch noch folgende:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \quad \begin{cases} x = -B \\ x = +B \end{cases} \qquad (2)$$

so müsste für alle innerhalb der Grenzen $-A$ und $+A$, $-B$ und $+B$ gleichzeitig liegenden Werthe von x nothwendig

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

sein, also auch für $x = 0$, woraus sogleich [§. 38] $a_0 = b_0$ folgt. Dann ist aber, für jeden Werth von x innerhalb obiger Grenzen:

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

oder

$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots)$$

folglich auch

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots$$

woraus wieder für $x = 0$: $a_1 = b_1$ folgt. Auf dieselbe Weise fortschliessend, erhält man $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, u. s. w. so dass also die beiden Entwickelungen (1) und (2) nothwendig identisch sind. Man kann daher auch folgenden Satz aussprechen:

Besteht die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegen, wo eine dieser Grenzen auch $= 0$ sein kann, so sind die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x einander gleich, d. h. es ist

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3, \text{ u. s. w.}$$

Dieser Lehrsatz ist unter dem Namen: Satz der unbestimmten Coefficienten bekannt, und bietet ein sehr bequemes Mittel zur Entwickelung der Funktionen in Reihen dar.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, dass wenn die Gleichung

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

für jeden Werth von x bestehen soll, nothwendig,

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0 \text{ sein muss.}$$

40. Zur Erläuterung der Anwendung des Satzes der unbestimmten Coefficienten mögen folgende Aufgaben dienen:

1ste Aufgabe. Die gebrochene rationale Funktion

$$f(x) = \frac{A_0}{a_0 + a_1 x}$$

in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe zu entwickeln. Man setze:

$$\frac{A_0}{a_0 + a_1 x} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n + \ldots,$$

so folgt durch Multiplikation mit $a_0 + a_1 x$:

$$A_0 = a_0 \alpha_0 + \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_1 \\ + a_1 \alpha_0 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_2 \\ + a_1 \alpha_1 \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} a_0 \alpha_n \\ + a_1 \alpha_{n-1} \end{matrix}\right\} x^n + \ldots,$$

somit, da diese Gleichung für jeden Werth von x gelten muss, nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$A_0 = a_0\, a_0$, $a_0\, a_1 + a_1\, a_0 = 0$, $a_0\, a_2 + a_1\, a_1 = 0$, u. s. w.
und allgemein

$$a_0\, a_n + a_1\, a_{n-1} = 0,$$

woraus man

$$a_0 = \frac{A_0}{a_0},\quad a_1 = a_0 \cdot -\frac{a_1}{a_0},\quad a_2 = a_1 \cdot -\frac{a_1}{a_0},\ \text{u. s. w.}$$

und allgemein:

$$a_n = a_{n-1} \cdot -\frac{a_1}{a_0} \qquad (m)$$

findet. Wie man sieht, erhält man jeden Coefficienten der Reihe, vom zweiten angefangen, indem man den vorhergehenden mit $-\frac{a_1}{a_0}$ multiplicirt.

Eine Reihe von der Form:

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots\ldots + a_n\, x^n + \ldots$$

heisst überhaupt eine rekurrente (oder rekurrirende, rücklaufende, wiederkehrende), wenn von einem bestimmten Gliede angefangen der Coefficient a_n jedes folgenden Gliedes eine lineare Funktion der Coefficienten einer bestimmten Anzahl von vorhergehenden Gliedern ist; wenn man also hat:

$$a_n = p_1\, a_{n-1} + p_2\, a_{n-2} + p_3\, a_{n-3} + \ldots\ldots + p_m\, a_{n-m}.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Coefficienten

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ p_m,$$

sind positive oder negative Zahlen, welche in ihrer bestimmten Aufeinanderfolge die sogenannte Relationsscala der Reihe bilden; die Anzahl derselben bestimmt die Ordnung der rekurrenten Reihe. Die Bildung des Coefficienten eines Gliedes einer rekurrenten Reihe der m^{ten} Ordnung nimmt daher die Coefficienten von m vorhergehenden Gliedern in Anspruch; das Bildungsgesetz kann daher erst mit dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede beginnen.

Diesen Erklärungen zufolge führt also die Entwickelung der Funktion $\frac{A_0}{a_0 + a_1\, x}$ auf eine rekurrente Reihe der ersten Ordnung, deren Relationsscala: $-\frac{a_1}{a_0}$ ist, wie aus (m) erhellt.

Entwickeln wir noch die Funktion $f(x) = \frac{A_0 + A_1\, x}{a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2}$; setzen wir

$$\frac{A_0 + A_1\, x}{a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2} = a_0 + a_1\, x + \ldots\ldots + a_{n-2}\, x^{n-2} + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n + \ldots\ldots$$

so erhalten wir durch Multiplikation mit dem Nenner:

$$A_0 + A_1 x = \left.\begin{matrix} a_0\ a_0 \\ + a_0\ a_1 \\ + a_1\ a_0 \end{matrix}\right\} x + \ldots\ldots \left.\begin{matrix} + a_0\ a_n \\ + a_1\ a_{n-1} \\ + a_2\ a_{n-2} \end{matrix}\right\} x^n + \ldots\ldots,$$

somit

$$A_0 = a_0\ a_0,\ A_1 = a_0\ a_1 + a_1\ a_0,\ \ldots\ldots\ 0 = a_0\ a_n + a_1\ a_{n-1} + a_2\ a_{n-2},$$

woraus

$$a_0 = \frac{A_0}{a_0},\quad a_1 = \frac{A_1 - a_1\ a_0}{a_0},$$

und

$$a_n = -\frac{a_1}{a_0} \cdot a_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} \cdot a_{n-2}$$

folgt. Der Ausdruck von a_n zeigt, dass die Entwickelung der vorgelegten Funktion eine rekurrente Reihe der zweiten Ordnung mit der Relationsscala:

$$-\frac{a_1}{a_0}, -\frac{a_2}{a_0}$$

ist. Das Bildungsgesetz beginnt hier mit dem 3ten Coefficienten a_2, und es ist

$$a_2 = -\frac{a_1}{a_0}\ a_1 - \frac{a_2}{a_0}\ a_0,\ a_3 = -\frac{a_1}{a_0}\ a_2 - \frac{a_2}{a_0}\ a_1 \text{ u. s. w.}$$

Allgemein lässt sich zeigen, dass die echt gebrochene rationale Funktion

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_{n-1} x^{n-1}}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n}$$

eine rekurrirende Reihe der n^{ten} Ordnung erzeugt, deren Relationsscala

$$-\frac{a_1}{a_0}, -\frac{a_2}{a_0}, -\frac{a_3}{a_0}, -\frac{a_4}{a_0}, \ldots\ldots -\frac{a_n}{a_0}$$

ist, so wie, dass umgekehrt jede nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete rekurrente Reihe, insofern dieselbe convergirt, einen rationalen Bruch zur Summe hat.

Einige Aufmerksamkeit auf den Gang der Rechnung in obigen zwei Beispielen zeigt, dass man in der angenommenen Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

nur so viele Anfangsglieder anzusetzen nöthig hat, als der Zähler Glieder besitzt, und nur so viele allgemeine Glieder, als der Nenner Glieder hat, die zwischen den äussersten Gliedern etwa fehlenden mitgezählt.

2te Aufgabe. Die unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

durch die gleichfalls unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

zu dividiren.

Da, wie schon in den Elementen gezeigt wird, das Produkt zweier Polynome

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)$

wieder ein Polynom von derselben Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ ist, so können wir den gesuchten Quotienten von der Form:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

annehmen, also

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

setzen, wo $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ noch unbestimmte Coefficienten bedeuten, welche zu bestimmen sind. Multiplicirt man zu beiden Seiten mit dem Divisor, so kommt:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) \\ &\quad (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) \\ &= a_0\ a_0 + \left.\begin{matrix} a_1\ a_0 \\ + a_0\ a_1 \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} a_2\ a_0 \\ + a_1\ a_1 \\ + a_0\ a_2 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a_3\ a_0 \\ + a_2\ a_1 \\ + a_1\ a_2 \\ + a_0\ a_3 \end{matrix}\right| x^3 + \ldots \end{aligned}$$

woraus, da die Entwickelung für jeden Werth von x gelten muss,

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0\ a_0 \\ A_1 &= a_1\ a_0 + a_0\ a_1 \\ A_2 &= a_2\ a_0 + a_1\ a_1 + a_0\ a_2 \\ A_3 &= a_3\ a_0 + a_2\ a_1 + a_1\ a_2 + a_0\ a_3 \end{aligned}$$

u. s. w.

folgt. Man erhält auf diesem Wege so viele Gleichungen, als man Coefficienten bestimmen will, aus welchen diese, da jene vom ersten Grade sind, leicht erhalten werden. Man findet nämlich:

$$a_0 = \frac{A_0}{a_0},\ a_1 = -\frac{a_1}{a_0}\ a_0 + \frac{A_1}{a_0},\ a_2 = -\frac{a_1}{a_0}\ a_1 - \frac{a_2}{a_0}\ a_0 + \frac{A_2}{a_0}$$ u. s. w.

und allgemein

$$a_n = -\frac{a_1}{a_0}\ a_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}\ a_{n-2} - \frac{a_3}{a_0}\ a_{n-3} - \ldots\ldots - \frac{a_n}{a_0}\ a_0 + \frac{A_n}{a_0}$$

nach welchem einfachen Rekursionsgesetze die Coefficienten der Reihe nach leicht gebildet werden können.

Wie man sieht, wird die Auflösung unmöglich, wenn $a_0 = 0$ und nicht gleichzeitig auch $A_0 = 0$ ist, indem dann die Coefficienten unendlich würden; dieser Umstand deutet an, dass in diesem Falle der Quotient nicht die vorausgesetzte Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ haben kann. In der That überzeugt man sich durch gewöhnliche Division

leicht, dass er für $a_0 = 0$ mit dem Gliede $\frac{A_0}{a_1 x} = \frac{A_0}{a_1} x^{-1}$ beginnen müsse, welches Glied aber in der angenommenen Form nicht vorkommt und also auch nicht erhalten werden konnte. Man sieht leicht, dass mindestens eben so viele Anfangsglieder im Dividende $= 0$ sein müssen, als deren im Divisor fehlen, wenn der Quotient die Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$ haben soll.

Wollte man übrigens z. B. den Quotienten

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.}{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.}$$

entwickeln, so setze man

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots.} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

bestimme sofort die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ wie oben, so ist:

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots}{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots} = \frac{1}{x}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)$$

Aus dem Gesagten geht demnach hervor, dass bei dem Gebrauche der Methode der unbestimmten Coefficienten zur Entwicklung der Funktionen in Reihen, die Form der zu entwickelnden Reihe zweckmässig angenommen werden muss, wozu in der Regel eine vorläufige Discussion der vorgelegten Funktion ohne Schwierigkeit führt. Ferner hat man zu untersuchen, für welche Werthe von x die gefundene Reihe convergirt; denn nur für solche ist sie zur numerischen Berechnung geeignet. — Hat man die Form der Reihe unrichtig gewählt, so gibt sich dies bei der Auflösung der Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten in den meisten Fällen wohl zu erkennen; doch gibt es auch Fälle, wo diess nicht geschieht und daher die Methode der unbestimmten Coefficienten zu unrichtigen Resultaten führt; ein Umstand, der vorzugsweise Veranlassung gab, dieser — sonst durch ihre Einfachheit namentlich dem praktischen Mathematiker sich empfehlenden Methode strengere zu substituiren, welche jener Vorwurf nicht trifft.

3te Aufgabe. Es sei die Gleichung gegeben:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \ldots. \qquad (1)$$

es soll umgekehrt x durch eine Reihe ausgedrückt werden, welche nach den steigenden Potenzen von y fortschreitet.

Man setze

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \ldots.$$

so muss dieser Ausdruck von x offenbar die Eigenschaft haben, in die Gleichung (1) substituirt, diese zu einer identischen zu machen. Entwickelt man daher die aufeinanderfolgenden Potenzen von x, indem man dabei bis zu einer gewissen Potenz von y fortschreitet, nämlich:

$$x^2 = \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y^3 + \left.\begin{matrix}\beta^2 \\ +2\alpha\gamma\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}2\alpha\delta \\ +2\beta\gamma\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots\ldots$$

$$x^3 = \alpha^3 y^3 + 3\alpha^2\beta y^4 + \left.\begin{matrix}3\alpha\beta^2 \\ +3\alpha^2\gamma\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots\ldots$$

$$x^4 = \alpha^4 y^4 + 4\alpha^3\beta y^5 + \ldots\ldots$$

$$x^5 = \alpha^5 y^5 + \ldots\ldots$$

und substituirt diese in (1), so kommt:

$$y = a\alpha y + \left.\begin{matrix}a\beta \\ +b\alpha^2\end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix}a\gamma \\ +2b\alpha\beta \\ +c\alpha^3\end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix}a\delta \\ +b\beta^2 \\ +2b\alpha\gamma \\ +3c\alpha^2\beta \\ +d\alpha^4\end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix}a\varepsilon \\ +2b\alpha\delta \\ +2b\beta\gamma \\ +3c\alpha\beta^2 \\ +3c\alpha^2\gamma \\ +4d\alpha^3\beta \\ +e\alpha^5\end{matrix}\right\} y^5 + \ldots\ldots$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von y erhält man sofort folgende Gleichungen:

$$1 = a\alpha$$

$$0 = a\beta + b\alpha^2$$

$$0 = a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3$$

$$0 = a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4$$

$$0 = a\varepsilon + 2b\alpha\delta + 2b\beta\gamma + 3c\alpha\beta^2 + 3c\alpha^2\gamma + 4d\alpha^3\beta + e\alpha^5$$

u. s. w.

aus welchen sich die Coefficienten α, β, γ, ... der Reihe nach mit Leichtigkeit ergeben. Diese Aufgabe ist, so wie die folgende, ein specieller Fall des unter dem Namen: Umkehrung oder Reversion der Reihen, bekannten Problemes.

Ist, um ein besonderes Beispiel zu geben, die Reihe:

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

umzukehren, so erhält man

$$x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots\ldots$$

Aus einigen wenigen Anfangsgliedern lässt sich übrigens mit Sicherheit kein Schluss auf das Bildungsgesetz der umgekehrten Reihe ziehen; und diess ist ein Grund, warum man auch diese wichtige Aufgabe mit Umgehung der Methode der unbestimmten Coefficienten auf anderen Wegen zu lösen suchte, wovon jedoch erst in der Folge die Rede sein kann.

Hat die umzukehrende Reihe die Form:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots\ldots,$$

in welcher auch noch ein von x freies Glied a erscheint, so bringe man

dieses zuerst auf die linke Seite der Gleichung, und hat dann, wenn man $y - a = z$ setzt, die Reihe:

$$z = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots.$$

umzukehren. Die umgekehrte Reihe hat dann die Form:

$$x = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \ldots.,$$

wo die Coefficienten nach obiger Vorschrift zu bestimmen sind. Durch Wiederherstellung des Werthes von z erhält man endlich

$$x = \alpha(y-a) + \beta(y-a)^2 + \gamma(y-a)^3 + \ldots..$$

Das Gesetz, nach welchem die Exponenten der Potenzen von y in der umgekehrten Reihe aufeinanderfolgen, hängt übrigens von jenem ab, nach welchem die Exponenten von x in der gegebenen Reihe fortschreiten. Ist diese allgemein:

$$y = ax^k + bx^{k+h} + cx^{k+2h} + dx^{k+3h} + \ldots,$$

so hat die umgekehrte Reihe folgende Form:

$$x = \alpha y^{\frac{1}{k}} + \beta y^{\frac{1+h}{k}} + \gamma y^{\frac{1+2h}{k}} + \delta y^{\frac{1+3h}{k}} + \ldots.$$

4te Aufgabe. Es ist die Gleichung gegeben

$$ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \ldots = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots.;$$

man soll y durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe ausdrücken.

Setzt man

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots.,$$

so muss dieser Werth von y die Eigenschaft haben, in die gegebene Gleichung substituirt, diese identisch zu machen. Entwickelt man daher die aufeinanderfolgenden Potenzen von y, (wie in der vorigen Aufgabe, nur x mit y vertauschend) und substituirt dieselben in die gegebene Gleichung, so erhält man zur Bestimmung von α, β, γ, ... folgende Gleichungen:

$$A = a\alpha$$
$$B = a\beta + b\alpha^2$$
$$C = a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3$$
$$D = a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4$$
$$E = a\varepsilon + 2b\alpha\delta + 2b\beta\gamma + 3c\alpha\beta^2 + 3c\alpha^2\gamma + 4d\alpha^3\beta + \varepsilon\alpha^5.$$

u. s. w.

DRITTES KAPITEL.

VON DEN IMAGINAEREN GROESSEN UND DEN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN MIT IMAGINAEREN VERAENDERLICHEN.

41. Schon in der Elementar-Mathematik begegnet man Zahlen von der Form $\sqrt[2n]{-a}$, womit nach dem Begriffe einer Wurzelgrösse, eine Zahl bezeichnet werden soll, welche zur $2n^{\text{ten}}$ (also einer geraden) Potenz erhoben, ein negatives Resultat $-a$ gibt. Eine solche Zahl existirt aber bekanntlich weder in der Reihe der positiven noch negativen Zahlen, daher man Grössen von obiger Form imaginäre Grössen genannt hat, im Gegensatze zu den reellen Grössen, deren Werth durch positive oder negative Zahlen entweder genau oder mit beliebigem Grade der Annäherung ausgedrückt werden kann.

Während man aber in den Elementen nur gelegentlich, z. B. bei Auflösung der Gleichungen des 2ten Grades Veranlassung findet, imaginäre Zahlformen zu betrachten und dort das Erscheinen solcher Grössen in dem Resultate einer Aufgabe ganz einfach als Kriterium betrachtet wird, dass der vorgelegten Aufgabe durch reelle Werthe nicht genügt werden kann, — spielen diese Grössen in der Analysis eine höchst wichtige Rolle, deren Umfang in der Folge deutlich hervortreten wird.

42. Die allgemeine Form, auf welche, wie sich später ergeben wird, jede imaginäre Grösse gebracht werden kann, ist: $p + q\sqrt{-1}$, wo p und q reelle Grössen bedeuten. Unter dieser Form ist übrigens auch jede reelle Grösse begriffen, wenn man $q = o$ denkt. Man nennt häufig Grössen dieser Form complexe Grössen, zum Unterschiede von rein imaginären, in welchen der reelle Theil fehlt. Die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ pflegt man häufig der Kürze wegen mit dem Buchstaben i zu bezeichnen und es ist mit Rücksicht auf den Begriff der Wurzelgrösse:

$$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^4 = +1,\ i^6 = -1,\ i^8 = +1\ \ldots.$$
$$i^3 = -i,\ i^5 = +i,\ i^7 = -i,\ i^9 = +i\ \ldots.$$

43. Unter Summe, Differenz, Produkt und Quotienten complexer Grössen versteht man die Resultate, welche erhalten werden, wenn man dieselben den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nach denselben Regeln unterwirft, welche die Arithmetik für reelle Grössen aufstellt. Hiernach ist:

$$(p + qi) + (p' + q'i) = (p + p') + (q + q')\,i = P + Qi$$
$$(p + qi) - (p' + q'i) = (p - p') + (q - q')\,i = P + Qi$$
$$(p + qi)\,(p' + q'i) = (pp' - qq') + (pq' + qp')\,i = P + Qi$$
$$\frac{p + qi}{p' + q'i} = \frac{(p + qi)\,(p' - q'i)}{(p' + q'i)\,(p' - q'i)} = \frac{pp' + qq' + (p'q - pq')\,i}{p'^2 + q'^2} =$$
$$= \frac{pp' + qq'}{p'^2 + q'^2} + \frac{p'q - pq'}{p'^2 + q'^2}\,i = P + Qi,$$

woraus man zugleich ersieht, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier oder mehrerer complexer Grössen wieder eine complexe Grösse von derselben Form $P + Qi$ ist.

44. Soll die Gleichung

$$p + qi = p' + q'\,i \tag{1}$$

bestehen, so muss nothwendig

$$p = p',\ q = q' \tag{2}$$

sein, weil sonst $i = \frac{p' - p}{q - q'}$ folgen würde, was ungereimt ist, da die imaginäre Grösse $i = \sqrt{-1}$ durch reelle Grössen nicht ausgedrückt werden kann.

Setzt man in (1) $p' = q' = 0$, so findet man mit Rücksicht auf (2), dass die Gleichung

$$p + qi = 0 \tag{3}$$

die Gleichungen

$$p = 0,\ q = 0 \tag{4}$$

zur nothwendigen Folge hat. Von diesen in den Gleichungen (1), (2) und (3), (4) ausgesprochenen Sätzen werden wir oft Gebrauch machen. Als eine Folge hiervon kann bemerkt werden, dass man zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, wo A und B was immer für reelle Ausdrücke bedeuten, immer in die eine: $A + Bi = 0$ zusammenziehen kann.

Zwei complexe Grössen, wie $p + qi$ und $p - qi$, welche sich nur durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheiden, heissen conjugirt. Wie man sieht, ist ihre Summe $= 2p$, so wie ihr Produkt $= p^2 + q^2$, reell.

45. Jede complexe Grösse $p + qi$ kann auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht werden, wo r eine positive Grösse und φ einen reellen Bogen bezeichnet. Denn damit

$$p + qi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

werde, muss in Folge des vorigen §.

$$p = r\cos\varphi,\ q = r\sin\varphi \tag{2}$$

sein, und die Werthe von r und φ lassen sich immer so bestimmen, dass diese zwei Gleichungen erfüllt werden. Quadrirt und addirt man

nämlich die Gl. (2), so erhält man, weil $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$, $r^2 = p^2 + q^2$, woraus

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{3}$$

folgt, welche Grösse nothwendig reell ist. Ferner folgt aus (2):

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{p}{r} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \tag{4}$$

welche Gleichungen, da $\sqrt{p^2 + q^2} \begin{matrix} > p \\ > q \end{matrix}$ ist, immer erfüllt werden können. Auch ergiebt sich durch Division der Gl. (2):

$$tg\ \varphi = \frac{q}{p}, \text{ und } \varphi = \operatorname{arc}\ tg\ \frac{q}{p}, \tag{5}$$

woraus man ebenfalls erkennt, dass, da die Tangente jedes Werthes von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist, immer ein Bogen φ existirt, welcher der in (5) ausgesprochenen Bedingung genügt.

Man nennt die Grösse $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ den Modulus der complexen Grösse $p + qi$, und nimmt, wie gesagt, denselben immer positiv. Für $q = 0$ geht die complexe Grösse $p + qi$ in die reelle p, und der Modulus in $r = \sqrt{p^2} = p$ über, d. h. der Modulus einer reellen Grösse ist diese Grösse, ihrem absoluten Werthe nach, selbst. Auch sieht man leicht, dass zwei conjugirte Ausdrücke denselben Modulus besitzen. Das Binom $\cos\varphi + i\sin\varphi$ heisst der reducirte Ausdruck. — Mit Hilfe dieser Umformung gestalten sich die Rechnungen mit imaginären Ausdrücken in der Regel weit einfacher.

46. Es sei:

$$p + qi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$p' + q'i = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

so erhalten wir durch Multiplikation:

$$(p + qi)(p' + q'i) = rr'(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi');$$

und es kommt nun nur auf die Bildung des Produktes der reducirten Ausdrücke an. Es ist aber

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi'),$$

somit nach einem bekannten goniometrischen Satze:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi'). \tag{1}$$

Multiplicirt man dieses Produkt mit einem ähnlichen dritten Faktor, so erhält man durch zweimalige Anwendung von (1):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') =$$
$$= \{\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\}(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'')$$
$$= \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'') + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi''),$$

und da wir denselben Vorgang offenbar auf beliebig viele Faktoren ausdehnen können, so ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'')\ldots\ldots = \\ = \cos(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) \quad (2)$$

woraus man sieht, dass sich die Multiplikation reducirter Ausdrücke in eine blosse Addition der Bögen verwandelt.

Setzt man in (1) $-\varphi'$ an die Stelle von φ', so kommt, weil bekanntlich $\cos(-\varphi') = \cos\varphi'$ und $\sin(-\varphi') = -\sin\varphi'$ ist,

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi') = \cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi'), \quad (3)$$

und wenn man in dieser Gleichung $\varphi' = \varphi$ setzt:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1, \quad (4)$$

woraus man erkennt, dass das Produkt zweier reducirter conjugirter Ausdrücke immer $= 1$ ist, wovon man sich auch durch unmittelbare Multiplikation leicht überzeugt.

Mit Hilfe der Gl. (4) erhält man ferner:

$$\frac{\cos\varphi' + i\sin\varphi'}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = (\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

folglich mit Rücksicht auf (3):

$$\frac{\cos\varphi' + i\sin\varphi'}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi), \quad (5)$$

welche Gleichung die Regel für die Division zweier reducirter Ausdrücke enthält.

47. Man beweist leicht folgende Sätze:

1) Der Modulus des Produktes zweier complexer Grössen ist gleich dem Produkte der Moduli der Faktoren.

Denn setzen wir

$$\begin{aligned} p + qi &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ p' + q'i &= r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'), \end{aligned} \quad (1)$$

so ist:

$$(p + qi)(p' + q'i) = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')];$$

bezeichnet nun ϱ den Modulus des Produktes, so ist

$$\varrho = \sqrt{\{(rr')^2\cos(\varphi + \varphi')^2 + (rr')^2\sin(\varphi + \varphi')^2\}} = rr'$$

d. h. = dem Produkte der Moduli r und r' der Faktoren. Dass der Satz nun auf eine beliebige Anzahl von Faktoren ausgedehnt werden kann, ist für sich klar. Setzt man diese Faktoren einander gleich, so ergiebt sich sogleich folgender Satz:

2) Der Modulus der n^{ten} Potenz einer complexen Grösse, (unter n eine positive ganze Zahl verstanden) ist gleich der n^{ten} Potenz des Modulus der Wurzel.

3) Der Modulus der Summe mehrerer von einander verschiedener complexer Grössen ist stets kleiner als die Summe der Moduli der einzelnen Summanden.

Denn es folgt aus den Gleichungen (1):

$(p + qi) + (p' + q'i) = (r\cos\varphi + r'\cos\varphi') + i\,(r\sin\varphi + r'\sin\varphi')$;

ist aber wieder ϱ der Modulus der Summe, so hat man:

$$\begin{aligned}\varrho &= \sqrt{\{(r\cos\varphi + r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi + r'\sin\varphi')^2\}}\\ &= \sqrt{\{r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 + r'^2\cos\varphi'^2 + r'^2\sin\varphi'^2\\ &\qquad + 2rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi')\}}\\ &= \sqrt{\{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi')\}}\end{aligned}$$

Da nun, so lange φ nicht $= \varphi'$, immer $\cos(\varphi - \varphi') < 1$ ist, so ist auch

$$r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi') < r^2 + r'^2 + 2rr' = (r + r')^2,$$

d. h. $$\varrho < r + r'.$$

Auch dieser Satz lässt sich, wie leicht einzusehen, auf eine beliebige Anzahl von Summanden ausdehnen.

VON DEN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN MIT IMAGINAEREN VERAENDERLICHEN. — MOIVRE'SCHE BINOMIALFORMEL.

48. Erhält die unabhängig veränderliche Grösse x einer Funktion $y = f(x)$ einen imaginären Werth $x = u + vi$, so bieten sich in Bezug auf eine solche imaginäre Funktion zunächst zwei Aufgaben dar: 1) dieselbe in zwei Theile zu zerlegen, deren einer reell, der andere mit dem Faktor $i = \sqrt{-1}$ behaftet ist; d. h. also die Funktion auf die Form:

$$f(u + vi) = \varphi(u, v) + i\,\psi(u, v)$$

zu bringen, wo $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ reelle Funktionen von u und v bedeuten; 2) zu untersuchen, ob die für reelle Werthe der Variablen statt findenden Eigenschaften der Funktionen (für die Potenz z. B. die Eigenschaft: $x^m \cdot y^m = (xy)^m$) gültig bleiben, wenn die Veränderlichen imaginäre Werthe erhalten. Wir wollen in dieser Beziehung zunächst die algebraischen Funktionen betrachten.

Diesen Funktionen liegt, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, die Funktion $y = x^m$, d. i. die Potenz mit variabler Basis und constantem Exponenten zu Grunde; setzen wir demnach $x = u + vi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, so wird

$$y = x^m = r^m(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m \qquad (a)$$

und wir haben es daher nur mit der Entwickelung der Potenz $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$ zu thun.

Nach Gl. (2), §. 46 ist:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)\ldots\ldots$$
$$= \cos(\alpha + \beta + \gamma\ldots) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma\ldots)$$

Setzt man nun $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ und die Anzahl der Faktoren $= m$, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha, \qquad (1)$$

welche wichtige Formel unter dem Namen Moivre'sche Binomialformel bekannt ist. Ihre Richtigkeit erhellt aus der gegebenen Ableitung für jeden beliebigen Werth des Bogens α, und für jeden ganzen und positiven Werth des Exponenten m. Sie gilt aber auch für gebrochene und negative Werthe von m.

Aus (1) folgt nämlich, indem man aus beiden Theilen die m^{te} Wurzel zieht und gleich transponirt:

$$(\cos m\alpha + i\sin m\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

und wenn man in dieser Gleichung $\frac{\alpha}{m}$ statt α schreibt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m};$$

erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur n^{ten} Potenz, so erhält man, wenn n eine ganze positive Zahl ist, nach (1)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}\alpha + i\sin\frac{n}{m}\alpha;$$

diese Gleichung resultirt aber aus (1), wenn man dort an die Stelle von m den Bruch $\frac{n}{m}$ treten lässt; somit gilt (1) auch für den Fall, wenn der Exponent ein rationaler positiver Bruch ist.

Nach Gl. 4, §. 46 hat man ferner:

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \text{ oder}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha);$$

erhebt man beide Theile dieser Gleichung zur m^{ten} Potenz, wo m eine ganze oder gebrochene positive Zahl, so kommt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = [\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)]^m,$$

d. i. wenn man auf den zweiten Theil die Gl. (1) anwendet:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-m} = \cos(-m\alpha) + i\sin(-m\alpha);$$

diese Gleichung geht aber auch aus (1) hervor, indem man $-m$ statt $+m$ schreibt; folglich gilt (1) auch für negative Werthe des Exponenten m.

Ist endlich m eine rationale veränderliche Zahl, welche sich der irrationalen Zahl r ohne Ende nähert, so kann man $m = r + \delta$ setzen,

wo δ eine unendlich abnehmende Grösse ist; führt man diesen Werth in (1) ein, so folgt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{r+\delta} = \cos(r+\delta)\alpha + i\sin(r+\delta)\alpha,$$

welche Gleichung, wenn man δ unendlich klein werden lässt, in

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^r = \cos r\alpha + i\sin r\alpha$$

sich verwandelt. Es gilt demnach die Gl. (1) für jeden ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Werth des Exponenten m.

Setzt man in (1) $-\alpha$ an die Stelle von α, so folgt:

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha - i\sin m\alpha,$$

welcher Ausdruck aus (1) auch dadurch hervorgeht, wenn man $-i$ an die Stelle von i setzt.

Mit Hilfe der Moivre'schen Binominalformel geht die Gleichung (α) über in

$$\begin{aligned} y = x^m &= r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) \\ &= r^m\cos m\varphi + i.r^m\sin m\varphi, \end{aligned}$$

woraus man schliesst, dass die Potenz x^m, somit auch jede zusammengesetzte algebraische Funktion von x auf die Form $p + iq$ gebracht werden kann, wenn x imaginär wird.

Ist ferner

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad y = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

so ergiebt sich, mit Rücksicht auf Gl. (1), §. 46:

$$\begin{aligned} x^m.y^m &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m.[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]^m \\ &= r^m r'^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)(\cos m\varphi' + i\sin m\varphi') \\ &= r^m r'^m[\cos m(\varphi+\varphi') + i\sin m(\varphi+\varphi')] \\ &= r^m r'^m[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]^m \\ &= [rr'\{\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\}]^m \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi).r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]^m = (x.y)^m \end{aligned}$$

so dass also die für reelle Werthe von x und y stattfindende Gleichung $x^m.y^m = (xy)^m$, somit auch die übrigen Eigenschaften der Potenzen für imaginäre Werthe der Wurzel gültig bleiben.

49. Die im vorigen §. entwickelte Moivre'sche Binomialformel führt zu wichtigen Folgerungen, mit deren Auseinandersetzung wir uns nun beschäftigen wollen.

Da bekanntlich allgemein, wenn r eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet,

$$\sin(\alpha + 2r\pi) = \sin\alpha,\ \text{und}\ \cos(\alpha + 2r\pi) = \cos\alpha \qquad (2)$$

ist, so folgt aus (1), wenn $\alpha + 2r\pi$ statt α gesetzt wird:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m(\alpha + 2r\pi) + i\sin m(\alpha + 2r\pi). \qquad (3)$$

Diese Gleichung muss als der allgemeinere Ausdruck der m^{ten} Po-

tenz des Binoms $\cos \alpha + i \sin \alpha$ betrachtet werden, während die Gl. (1) zwar für jeden Werth von m richtig, aber nur unter der Voraussetzung, dass m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, vollständig ist, wie aus folgenden Betrachtungen erhellt.

Bezeichnet in (3) m eine positive oder negative ganze Zahl, so geht diese Gleichung, weil bei dieser Voraussetzung $\sin (m\alpha + 2rm\pi) = \sin m\alpha$ und $\cos (m\alpha + 2rm\pi) = \cos m\alpha$, in die Gl. (1) über; und die Gl. (3) liefert in diesem Falle trotz der völligen Unbestimmtheit der ganzen Zahl r nur einen Werth der Potenz $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^m$.

Es sei aber nun m ein auf seine kleinste Benennung gebrachter rationaler Bruch $= \frac{p}{q}$, so ist

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{p}{q}} = \cos \frac{p}{q} (\alpha + 2r\pi) + i \sin \frac{p}{q} (\alpha + 2r\pi), \quad (4)$$

und da nun die Bögen, welche aus dem Ausdrucke

$$\frac{p}{q} (\alpha + 2r\pi) = \frac{p}{q} \alpha + \frac{p}{q} \cdot 2r\pi$$

hervorgehen, wenn man der Zahl r verschiedene Werthe beilegt, im Allgemeinen verschiedene Sinusse und Cosinusse haben, so muss man aus Gl. (4) schliessen, dass die Potenz

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{p}{q}} \quad (5)$$

mehrerer verschiedener Werthe fähig, also eine vieldeutige Grösse sei.

In der That, es lässt sich leicht zeigen, dass die Potenz $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{\frac{p}{q}}$, wo p und q relative Primzahlen bedeuten, q verschiedene Werthe besitze, weder mehr noch weniger, und dass diese erhalten werden, wenn man im zweiten Theile der Gl. (4) für r nach und nach die Zahlen: $0, 1, 2, 3, \ldots (q-1)$ substituirt.

Denken wir uns nämlich diese Zahlen in (4) wirklich substituirt, so sind:

1) die Substitutionsresultate, q an der Zahl, sämmtlich von einander verschieden. Denn wären irgend zwei darunter, etwa für $r = g$ und $r = h$ einander gleich, wo g und h zwei Zahlen der Reihe $0, 1, 2, 3 \ldots (q-1)$ vorstellen, so müsste

$$\frac{p}{q} (\alpha + 2g\pi) = \frac{p}{q} (\alpha + 2h\pi) + 2k\pi$$

sein, wo k irgend eine ganze Zahl, weil nur solche Bögen, welche um eine Anzahl ganzer Peripherieen von einander verschieden sind, gleiche Sinusse und Cosinusse haben. Aus dieser Gleichung folgt aber

$p\,(g - h) = qk$; der zweite Theil dieser Gleichung ist durch q theilbar, folglich müsste diess auch mit dem ersten Theile der Fall sein, und da der Voraussetzung nach p und q unter sich prim sind, so müsste $g - h$ durch q theilbar sein, was mit Rücksicht auf die Bedeutung der Zahlen g und h unmöglich ist. Hieraus folgt demnach, dass die Potenz (5) wirklich q verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn man in (4) für r der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots . (q - 1)$ substituirt.

2) Ausser diesen Werthen, q an der Zahl, ist aber die Potenz (5) keines anderen Werthes fähig. Denn ein solcher könnte nur aus (4) hervorgehen, indem man daselbst statt r eine andere Zahl substituirte, welche in der Reihe der Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots . (q - 1)$$

nicht schon enthalten ist. Jede solche Zahl lässt sich aber ausdrücken durch $r = \lambda q + \mu$, wo λ irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Ausschluss der 0, μ aber irgend eine Zahl der obigen Reihe bedeutet. Der im zweiten Theile der Gl. (4) vorkommende Bogen $\frac{p}{q}(\alpha + 2r\pi)$ wird dadurch

$$= \frac{p}{q}\,(\alpha + 2\mu\pi) + p\lambda \,.\, 2\pi,$$

welcher Bogen aber gleichen Sinus und Cosinus hat mit dem Bogen $\frac{p}{q}\,(\alpha + 2\mu\pi)$, der schon einmal durch die Substitution $r = \mu$ erzeugt wurde.

Die Anzahl sämmtlicher verschiedener Werthe der Potenz

$$(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^{\frac{p}{q}}$$

ist also $= q$, d. h. gleich der Anzahl der Einheiten, welche der Nenner des auf seine kleinste Benennung gebrachten Bruches $\frac{p}{q}$ enthält, und somit vom Zähler p unabhängig. — Bedeutet in (4) m eine irrationale Zahl, so kann man sich dieselbe immer in Form eines rationalen Bruches $= \frac{p}{q}$ vorstellen, dessen Zähler und Nenner unendlich gross sind; so dass also in diesem Falle die Anzahl der Werthe der Potenz $(\cos\,\alpha + i\,\sin\,\alpha)^m$ unendlich gross wird.

50. Setzt man in Gl. (4) $p = 1$ und $\alpha = 0$, so kommt:

$$(+1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{+1} = \cos\,\frac{2r\pi}{q} + i\,\sin\,\frac{2r\pi}{q} \qquad (6)$$

woraus folgt, dass die q^{te} Wurzel aus der positiven Einheit q verschiedene Werthe hat, welche aus (6) hervorgehen, wenn man der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \ldots (q-1)$ setzt. Damit einer derselben reell werde, muss $\sin \frac{2r\pi}{q} = 0$, also $\frac{2r\pi}{q} = h\pi$ oder $r = \frac{hq}{2}$ sein, wo h eine ganze Zahl, die 0 mit eingeschlossen, bedeutet, hier aber, wo r nicht grösser als $q-1$ wird, offenbar nur $= 0$ oder $= 1$ angenommen werden kann, wodurch sich für r nur die beiden Werthe: $r = 0$ und $r = \frac{q}{2}$ ergeben, welche den 2ten Theil der Gl. (6) reell machen. Der zweite ist bei ungeradem q unmöglich; daraus folgt also, dass, wenn q ungerade, unter den q Werthen von $\sqrt[q]{+1}$ nur ein reeller, $= +1$ (für $r = 0$) sich befindet; die übrigen Werthe sind imaginär. Ist aber q gerade, so hat $\sqrt[q]{+1}$ zwei reelle Werthe, nämlich $+1$ und -1, welche aus (6) für $r = 0$ und $r = \frac{q}{2}$ hervorgehen.

Ist k irgend eine aus der Reihe der Zahlen: $1, 2, 3 \ldots (q-1)$, so wird $q - k$ ebenfalls eine in dieser Reihe vorkommende Zahl sein; setzt man also k und $q - k$ statt r in die Gl. (6), so erhält man die zwei entsprechenden Werthe von $\sqrt[q]{+1}$:

$$\cos \frac{2k\pi}{q} + i \sin \frac{2k\pi}{q}, \text{ und}$$

$$\cos \frac{2(q-k)\pi}{q} + i \sin \frac{2(q-k)\pi}{q} = \cos \frac{2k\pi}{q} - i \sin \frac{2k\pi}{q},$$

welche sich demnach nur durch das Zeichen von i unterscheiden und somit conjugirt sind. Man kann daher die Gl. (6) auch in folgender für die Anwendung bequemeren Form schreiben:

$$(+1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{+1} = \cos \frac{2k\pi}{q} \pm i \sin \frac{2k\pi}{q}, \qquad (7)$$

aus welcher nun sämmtliche q Werthe hervorgehen, wenn man

bei geradem q für k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \frac{q}{2}$

- ungeradem q - - - - $0, 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}$

substituirt. Man erhält daher folgende Werthe für

$\sqrt[q]{+1}$:

$$\left.\begin{array}{c} q \text{ gerade} \\ +1 \\ \cos\frac{2\pi}{q} \pm i\sin\frac{2\pi}{q} \\ \cos\frac{4\pi}{q} \pm i\sin\frac{4\pi}{q} \\ \cos\frac{6\pi}{q} \pm i\sin\frac{6\pi}{q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{(q-2)\pi}{q} \pm i\sin\frac{(q-2)\pi}{q} \\ -1 \end{array}\right\}(8) \qquad \left.\begin{array}{c} q \text{ ungerade} \\ +1 \\ \cos\frac{2\pi}{q} \pm i\sin\frac{2\pi}{q} \\ \cos\frac{4\pi}{q} \pm i\sin\frac{4\pi}{q} \\ \cos\frac{6\pi}{q} \pm i\sin\frac{6\pi}{q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{(q-3)\pi}{q} \pm i\sin\frac{(q-3)\pi}{q} \\ \cos\frac{(q-1)\pi}{q} \pm i\sin\frac{(q-1)\pi}{q} \end{array}\right\}(9)$$

51. Setzt man in Gl. (4) $p = 1$, $\alpha = \pi$, so folgt:

$$(-1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1} = \cos\frac{(2r+1)\pi}{q} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{q}, \quad (10)$$

welcher Ausdruck sofort die Werthe, q an der Zahl, für $\sqrt[q]{-1}$ liefert, wenn man darin statt r der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, ... $(q-1)$ substituirt. Soll einer dieser Werthe reell sein, so muss für diesen $\sin\frac{(2r+1)\pi}{q} = 0$, also $\frac{(2r+1)\pi}{q} = h\pi$, d. i. $r = \frac{qh-1}{2}$ sein, wo h eine ganze Zahl bedeutet, welche jedoch hier, da r eine ganze, $(q-1)$ nicht überschreitende Zahl ist, nur $= 1$ angenommen werden kann. Der einzige Werth von r, welcher den zweiten Theil in (10) reell macht, ist demnach $= \frac{q-1}{2}$, und dieser ist nur bei ungeradem q möglich. Ist daher q eine gerade Zahl, so sind die q Werthe von $\sqrt[q]{-1}$ sämmtlich imaginär; ist aber q ungerade, so erzeugt die Substitution $r = \frac{q-1}{2}$ den einzigen reellen Werth $= -1$.

Da auch hier wieder je zwei Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, ... $(q-1)$ von der Form k, und $q-1-k$ für r in (10) substituirt, Resultate erzeugen, die sich nur durch das Zeichen von i unterscheiden, also conjugirt sind, so kann man schreiben:

$$(-1)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{q} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{q}, \quad (11)$$

welcher Ausdruck nunmehr sämmtliche q Werthe liefert, wenn man

bei geradem q für k die Werthe 0, 1, 2, ... $\left(\frac{q}{2}-1\right)$

ungeradem q - - - - 0, 1, 2, ... $\left(\frac{q-1}{2}\right)$

substituirt. Hiedurch erhält man folgende Werthe von $\sqrt[q]{-1}$:

$$\left.\begin{array}{c} q \text{ gerade} \\ \cos\frac{\pi}{q} \pm i\sin\frac{\pi}{q} \\ \cos\frac{3\pi}{q} \pm i\sin\frac{3\pi}{q} \\ \cos\frac{5\pi}{q} \pm i\sin\frac{5\pi}{q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{q-1}{q}\pi \pm i\sin\frac{q-1}{q}\pi \end{array}\right\}(12) \qquad \left.\begin{array}{c} q \text{ ungerade} \\ \cos\frac{\pi}{q} \pm i\sin\frac{\pi}{q} \\ \cos\frac{3\pi}{q} \pm i\sin\frac{3\pi}{q} \\ \cos\frac{5\pi}{q} \pm i\sin\frac{5\pi}{q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cos\frac{q-2}{q}\pi \pm i\sin\frac{q-2}{q}\pi \\ -1 \end{array}\right\}(13)$$

Die Ausdrücke (8), (9), (12), (13) lassen sich auch leicht algebraisch darstellen, wenn die Theilung des Kreises in $2q$ Theile geometrisch ausführbar ist.

So findet man für $q = 2$, aus (8): $\sqrt{+1} = +1, -1$.

Für $q = 3$, erhält man aus (9):

$\sqrt[3]{+1} = 1, = \cos 120^0 + i \sin 120^0, = \cos 120^0 - i \sin 120^0$;

Nun ist $\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

somit ergeben sich für $\sqrt[3]{+1}$ folgende drei Werthe, wenn man $i = \sqrt{-1}$ einsetzt:

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \text{ *).}$$

Nimmt man $q = 4$, so ergeben sich aus (8) für $\sqrt[4]{+1}$ folgende Werthe:

$1, \cos 90^0 + \sqrt{-1} \sin 90^0, \cos 90^0 - \sqrt{-1} \sin 90^0, -1$, d. i.

$$1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, -1.$$

Für $q = 5$ erhält man, wenn man beachtet, dass die Seite des regulären Fünfeckes $= \frac{1}{2}\sqrt{10-\sqrt{5}}$, somit $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,

*) Es ist bemerkenswerth, dass der 3te dieser Werthe aus dem 2ten entsteht, wenn man diesen zum Quadrate erhebt. Bezeichnet man also den Werth $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ mit α, so sind $1, \alpha, \alpha^2$ die drei Cubikwurzeln der positiven Einheit. Es ist diess übrigens nur ein spezieller Fall eines allgemeineren Satzes.

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ist, woraus man ferner mittelst der Formeln

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

leicht den Sinus und Cosinus der Bögen $\frac{2\pi}{5}$ und $\frac{4\pi}{5}$ entwickelt, nach (9) folgende Werthe:

$$+1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$
$$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},\ -\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

52. Die Formeln (6) und (10) lassen sich in folgende zusammen ziehen:

$$(\pm 1)^m = \cos mr\pi + i\,.\sin mr\pi, \qquad (14)$$

wo für r die geraden oder ungeraden Zahlen zu setzen sind, je nachdem in $(\pm 1)^m$ das obere oder untere Zeichen steht.

Da ferner immer $\pm A = A\,.\pm 1$, so hat man auch

$$\sqrt[q]{\pm A} = \sqrt[q]{A}\,.\sqrt[q]{\pm 1} \qquad (15)$$

aus welcher Gleichung mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit von $\sqrt[q]{\pm 1}$, folgt, dass der q^{ten} Wurzel aus jeder positiven oder negativen Zahl A, q verschiedene Werthe zukommen, welche man erhält, wenn man irgend einen derselben, z. B. die gewöhnliche oder sogenannte arithmetische Wurzel mit sämmtlichen gleichnamigen Wurzeln der Einheit der Reihe nach multiplicirt.

IMAGINAERE REIHEN.

53. Sind die Glieder einer Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

complexe Grössen, also die Reihe von der Form

$$(a_1 + b_1\,i) + (a_2 + b_2\,i) + (a_3 + b_3\,i) + \ldots + (a_n + b_n\,i) + \ldots \qquad (1)$$

so ist offenbar auch

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) + i\,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) \qquad (2)$$

und man kann demnach eine solche Reihe als die Summe zweier reeller Reihen betrachten, deren eine mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt ist. Bezeichnet S_n die Summe von n Anfangsgliedern der Reihe (1), und setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n,$$

so ist

$$S_n = A_n + i \,.\, B_n. \tag{3}$$

Die Convergenz imaginärer Reihen ist, so wie bei reellen Reihen, an die Bedingung gebunden, dass die Summe S_n von n Anfangsgliedern beim unendlichen Wachsen von n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähere, wozu nach Gl. (3) erfordert wird, dass die Summen A_n und B_n sich solchen Grenzen nähern; hiernach kann man den Satz aussprechen:

die imaginäre Reihe (1) ist convergent, wenn die beiden reellen Reihen

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots \\ &b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

convergiren; und divergent, wenn eine oder beide dieser reellen Reihen divergiren.

Bezeichnet man mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$. die Moduli der Glieder der Reihe (1), so ist wegen $\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ nothwendig

$$\varrho_n > a_n \text{ und } \varrho_n > b_n,$$

daher jedes Glied der Reihen (4) kleiner als das correspondirende Glied in der Reihe der Moduli: $\varrho_1, \varrho_1, \varrho_3, \varrho_4, \ldots\ldots$; nach §. 29, a) sind somit die Reihen (4) beide convergent, wenn die Reihe der Moduli convergirt, und man kann folglich obigen Satz auch in folgender Form ausdrücken:

die imaginäre Reihe (1) ist convergent, wenn die Moduli ihrer Glieder eine convergirende Reihe bilden.

Ist daher eine imaginäre Reihe aus der reellen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

dadurch hervorgegangen, dass man in letzterer $x = z(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ gesetzt hat, und convergirt die reelle Reihe für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$ liegen, so wird auch die imaginäre Reihe für alle Werthe des Modulus z convergiren, welche zwischen denselben Grenzen enthalten sind.

54. Die imaginären Reihen finden in der Analysis häufige Anwendung. Um an einem einfachen Beispiele zu zeigen, wie man durch dieselben zur Summirung verschiedener reeller Reihen gelangen könne, nehmen wir die geometrische Progression

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

und setzen in derselben $x = z(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, so kommt:

$$\begin{aligned} &1 + z(\cos\varphi + i \sin\varphi) + z^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \ldots. \\ &+ z^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - z^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}{1 - z (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

$$= \frac{1 - z \cos \varphi - z^n \cos n\varphi + z^{n+1} \cos (n-1)\varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2}$$

$$+ i \frac{z \sin \varphi - z^n \sin n\varphi + z^{n+1} \sin (n-1)\varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2}; \qquad (1)$$

wenn man nämlich Zähler und Nenner mit $1 - z \cos \varphi + i \,.\, z \sin \varphi$ multiplicirt und reducirt. Diese Gleichung zerfällt sofort durch Sonderung der reellen und imaginären Theile [§. 44] in folgende:

$$1 + z \cos \varphi + z^2 \cos 2\varphi + \ldots\ldots + z^{n-1} \cos (n-1)\varphi$$

$$= \frac{1 - z \cos \varphi - z^n \cos n\varphi + z^{n+1} \cos (n-1)\varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2}, \qquad (2)$$

$$z \sin \varphi + z^2 \sin 2\varphi + z^3 \sin 3\varphi + \ldots\ldots + z^{n-1} \sin (n-1)\varphi$$

$$= \frac{z \sin \varphi - z^n \sin n\varphi + z^{n+1} \sin (n-1)\varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2}, \qquad (3)$$

welche Gleichungen natürlich für jeden Werth von z bestehen, da die Reihen im ersten Theile endliche sind. Die Ausdrücke im zweiten Theile sind die Summenformeln der im ersten Theile stehenden Reihen.

Diese Reihen werden zu unendlichen, wenn wir n unendlich wachsen lassen und in Folge ihrer Ableitung aus der geometrischen Reihe ist ihre Convergenz an die Bedingung gebunden, dass z ein echter Bruch sei. Unter dieser Voraussetzung ist lim $z^n = 0$, und wir erhalten somit aus (2) und (3):

$$\left.\begin{array}{l} 1 + z \cos \varphi + z^2 \cos 2\varphi + z^3 \cos 3\varphi + \ldots\ldots \text{ in inf.} \\ \qquad = \dfrac{1 - z \cos \varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2}, \\ z \sin \varphi + z^2 \sin 2\varphi + z^3 \sin 3\varphi + \ldots\ldots \text{ in inf.} \\ \qquad = \dfrac{z \sin \varphi}{1 - 2z \cos \varphi + z^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (4) \\ \\ z > -1 \\ z < +1 \\ \\ (5) \end{array}$$

Setzt man in (2) und (3) $z = 1$, so wird zunächst, da bekanntlich:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha^2}{2} \text{ und}$$

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

ist, der zweite Theil von (2):

$$= \frac{1 - \cos \varphi - \cos n\varphi + \cos (n-1)\varphi}{2 (1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{2} + \frac{\cos (n-1)\varphi - \cos n\varphi}{2 (1 - \cos \varphi)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right) \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi^2}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right) \varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}};$$

auf ähnliche Weise wird der zweite Theil von (3) reducirt, indem man von den Formeln

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha,\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Gebrauch macht, und man erhält:

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{6}$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cos\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(n-1)\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \tag{7}$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\sin\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Mit Hülfe dieser Summenformeln findet man ferner:

$$\cos\varphi + \cos(\varphi+\alpha) + \cos(\varphi+2\alpha) + \ldots + \cos[\varphi+(n-1)\alpha]$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cos\left[\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{8}$$

$$\sin\varphi + \sin(\varphi+\alpha) + \sin(\varphi+2\alpha) + \ldots + \sin[\varphi+(n-1)\alpha]$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\left[\varphi + \frac{n-1}{2}\alpha\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{9}$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, so wird $\frac{n}{2}\alpha = \pi$ und $\sin\frac{n}{2}\alpha = \sin\pi = 0$, somit

$$\cos\varphi + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\varphi + 2.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\ldots$$
$$+ \cos\left[\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = 0 \qquad (10)$$

$$\sin\varphi + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\varphi + 2.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots.$$
$$+ \sin\left[\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] = 0. \qquad (11)$$

Beachtet man ferner, dass

$$\sin\varphi^2 = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}, \quad \cos\varphi^2 = \frac{1+\cos 2\varphi}{2},$$

so erhält man, wieder mit Anwendung von (6) und (7),

$$1 + \cos\varphi^2 + \cos 2\varphi^2 + \cos 3\varphi^2 + \ldots\ldots + \cos(n-1)\varphi^2$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{\sin n\varphi \cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi} \qquad (12)$$

$$\sin\varphi^2 + \sin 2\varphi^2 + \sin 3\varphi^2 + \ldots. + \sin(n-1)\varphi^2$$
$$= \frac{n}{2} - \frac{\sin n\varphi \cos(n-1)\varphi}{2\sin\varphi}. \qquad (13)$$

VIERTES KAPITEL.

ENTWICKELUNG DER FUNKTIONEN IN REIHEN.

I. Die Binomialreihe.

55. Aus der Elementar-Mathematik ist bekannt, dass die n^{te} Potenz des Binoms $(a + b)$, unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}a^{n-r}b^r + \ldots\ldots + b^n \qquad (1)$$

Dividiren wir diese Gleichung durch a^n, setzen $\frac{b}{a} = x$ und bezeichnen wir der Kürze wegen die Binomialcoefficienten

$$\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots\ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}$$

durch die Symbole

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots \binom{n}{r},$$

so geht obige Gleichung in folgende einfachere über:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots + x^n. \quad (2)$$

Die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen ist unter der oben für n gemachten Voraussetzung endlich, da man, wie aus dem Baue der Coefficienten erhellt, nothwendig auf einen solchen kommen muss, der, so wie alle folgenden, im Zähler den Faktor $n - n = 0$ enthält. Sobald aber n eine gebrochene oder negative Zahl bedeutet, findet diess offenbar nicht mehr statt, die Reihe wird unendlich und es entsteht nun die Frage, ob das in Gl. (2) ausgesprochene Gesetz der Entwickelung

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots \text{ in inf.} \quad (3)$$

auch für gebrochene und negative Werthe des Exponenten n Gültigkeit habe.

Die Frage reducirt sich offenbar darauf, ob für jeden beliebigen Werth von n die Funktion $(1+x)^n$ die Summe der Reihe

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots \quad (4)$$

sei? Dass dies für ganze und positive Werthe von n der Fall ist, können wir, wie oben erwähnt, als aus den Elementen bekannt voraussetzen; für jeden andern Werth von n ist die Reihe (4) eine unendliche, und damit diese eine Summe habe, ist vor allem nöthig, dass sie convergent sei, wozu [§. 35, Beisp. 3] erfordert wird, dass x ein positiver oder negativer echter Bruch sei.

Wir stellen uns daher die Aufgabe, unter der Voraussetzung, dass x ein echter Bruch sei, und n keine ganze positive Zahl bedeute, die Summe der unendlichen Reihe (4) zu suchen.

Zuvor wollen wir jedoch eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten nachweisen, von welcher wir Gebrauch machen werden.

56. Es ist nach der angenommenen Bezeichnung der Binomialcoefficienten:

$$\binom{h}{n} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

$$\binom{h}{n-1} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit n, die zweite mit

$(h-n+1)$, wodurch die zweiten Theile einander gleich werden, so erhält man

$$n\binom{h}{n} = (h-n+1)\binom{h}{n-1}, \qquad (\alpha)$$

welche Gleichung die Beziehung ausdrückt, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Coefficienten, dem $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten}, der h^{ten} Potenz des Binoms statt findet. Eben so hat man zwischen dem $(m-1)^{\text{ten}}$ und m^{ten} Binomialcoefficienten der k^{ten} Potenz die Relation

$$m\binom{k}{m} = (k-m+1)\binom{k}{m-1}. \qquad (\beta)$$

Multiplicirt man (α) mit $\binom{k}{m}$ und β mit $\binom{h}{n}$, und addirt, so kommt

$$(m+n)\binom{h}{n}\binom{k}{m} = (h-n+1)\binom{h}{n-1}\binom{k}{m} + (k-m+1)\binom{h}{n}\binom{k}{m-1},$$

aus welcher Gleichung, wenn man gleichzeitig

statt n der Reihe nach $r, r-1, r-2, r-3, \ldots\ldots 2, 1, 0$

statt m - - - $0, 1, 2, 3, \ldots r-2, r-1, r$

substituirt, folgende Gleichungen hervorgehen, wenn wir beachten, dass dem Sinne der Symbole gemäss:

$$\binom{h}{0} = \binom{k}{0} = 1, \binom{h}{-1} = \binom{k}{-1} = 0 \text{ ist:}$$

$$r\binom{h}{r}.1 = (h-r+1)\binom{h}{r-1}.1$$

$$r\binom{h}{r-1}\binom{k}{1} = (h-r+2)\binom{h}{r-2}\binom{k}{1} + k\binom{h}{r-1}.1$$

$$r\binom{h}{r-2}\binom{k}{2} = (h-r+3)\binom{h}{r-3}\binom{k}{2} + (k-1)\binom{h}{r-1}\binom{k}{1}$$

. . . . . .

$$r\binom{h}{2}\binom{k}{r-2} = (h-1)\binom{h}{1}\binom{k}{r-2} + (k-r+3)\binom{h}{2}\binom{k}{r-3}$$

$$r\binom{h}{1}\binom{k}{r-1} = h.1.\binom{k}{r-1} + (k-r+2)\binom{h}{1}\binom{k}{r-2}$$

$$r.1.\binom{k}{r} = (k-r+1).1.\binom{k}{r-1}.$$

Addirt man diese Gleichungen, sondert im zweiten Theile den gemeinschaftlichen Faktor $(h+k-r+1)$ ab und dividirt durch r, so erhält man:

$$\binom{h}{r} + \binom{h}{r-1}\binom{k}{1} + \binom{h}{r-2}\binom{k}{2} + \ldots\ldots + \binom{h}{2}\binom{k}{r-2} + \binom{h}{1}\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} =$$

$$= \frac{h+k-r+1}{r}\left[\binom{h}{r-1} + \binom{h}{r-2}\binom{k}{1} + \ldots\ldots + \binom{h}{1}\binom{k}{r-2} + \binom{k}{r-1}\right].$$

Der in den eckigen Klammern eingeschlossene Faktor geht, wie man sieht, aus dem ersten Theile der Gleichung hervor, wenn man in letzterem $r-1$ statt r schreibt. Setzt man daher in dieser Gleichung der Reihe nach $r-1$, $r-2$, $r-3$, ... 3, 2, 1 an die Stelle von r, so erhält man, obige mitgezählt, offenbar r Gleichungen von der Eigenschaft, dass der in den eckigen Klammern stehende Faktor jeder dieser Gleichungen den ersten Theil der folgenden Gleichung bildet. Multipliciren wir daher sämmtliche r Gleichungen mit einander, so erhalten wir, indem sich mit Ausnahme des ersten Theiles der ersten Gleichung die folgenden ersten Theile gegen die eingeklammerten Faktoren in den zweiten Theilen aufheben, folgende Gleichung:

$$\binom{h}{r} + \binom{h}{r-1}\binom{k}{1} + \binom{h}{r-2}\binom{k}{2} + \cdots\cdots + \binom{h}{1}\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} =$$
$$= \frac{(h+k)\ (h+k-1)\ (h+k-2) \cdots\cdots (h+k-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \cdots\cdots r};$$

der zweite Theil dieser Gleichung ist aber nichts anderes als der r^{te} Binomialcoefficient der $(h+k)^{\text{ten}}$ Potenz des Binoms und somit durch das Symbol $\binom{h+k}{r}$ darzustellen; man hat daher:

$$\binom{h}{r} + \binom{h}{r-1}\binom{k}{1} + \binom{h}{r-2}\binom{k}{2} + \cdots\cdots + \binom{h}{1}\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{h+k}{r} \quad (5)$$

welche Gleichung die gesuchte Eigenschaft der Binomialcoefficienten ausspricht, und den r^{ten} Coefficienten der $(h+k)^{\text{ten}}$ Potenz aus den r ersten Binomialcoefficienten der h^{ten} und k^{ten} Potenz finden lehrt.

Kehren wir jetzt zu unserer Aufgabe zurück.

57. Bezeichnen wir die noch unbekannte Summe der Reihe (4), da sie offenbar eine Funktion von n sein muss, mit $f(n)$, so dass

$$f(n) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots\cdots \quad (6)$$

wobei wir bemerken, dass, wenn n eine ganze positive Zahl, die Form der Funktion $f(n)$ bekannt ist; man hat nämlich für diesen Fall laut Gleichung (2):

$$f(n) = (1+x)^n. \quad (7)$$

Lassen wir in (6) die ganz willkührlichen Zahlen α und β an die Stelle von n treten, so erhalten wir:

$$f(\alpha) = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots\cdots$$

$$f(\beta) = 1 + \binom{\beta}{1}x + \binom{\beta}{2}x^2 + \binom{\beta}{3}x^3 + \cdots\cdots$$

Das Produkt dieser beiden convergenten Reihen wird nach §. 37 wieder eine convergente Reihe sein, deren Summe dem Produkte der Summen beider Reihen gleich ist; durch Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir daher:

$$f(\alpha).f(\beta) = 1 + \begin{vmatrix} \binom{\alpha}{1} \\ \binom{\beta}{1} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \binom{\alpha}{2} \\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1} \\ \binom{\beta}{2} \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} \binom{\alpha}{3} \\ \binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{1} \\ \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{2} \\ \binom{\beta}{3} \end{vmatrix} x^3 + \ldots.$$

d. i. mit Rücksicht auf (5):

$$f(\alpha).f(\beta) = 1 + \binom{\alpha+\beta}{1} x + \binom{\alpha+\beta}{2} x^2 + \binom{\alpha+\beta}{3} x^3 + \ldots.$$

Die Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung ist, wie man sieht, in Bezug auf $(\alpha + \beta)$ nach demselben Gesetze gebildet, wie die Reihe (4) in Bezug auf n; wir haben daher in Folge der Gl. (6) ihre Summe mit $f(\alpha + \beta)$ zu bezeichnen, und erhalten dadurch:

$$f(\alpha).f(\beta) = f(\alpha + \beta) \tag{8}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\beta + \gamma$ an die Stelle von β, so erhält man $f(\alpha).f(\beta + \gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma)$, d. i. weil nach (8) $f(\beta + \gamma) = f(\beta).f(\gamma)$:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma.) = f(\alpha + \beta + \gamma);$$

in dieser Gleichung wieder $\gamma + \delta$ statt γ gesetzt, und beachtet, dass $f(\gamma + \delta) = f(\gamma).f(\delta)$, kommt:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta) = f(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

u. s. w.; man sieht, dass man auf diese Weise beliebig weit fortgehen kann und dass folglich allgemein:

$$f(\alpha).f(\beta).f(\gamma).f(\delta) \ldots. = f(\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots.). \tag{9}$$

Diese Gleichung, welche ihrer Ableitung zufolge für jeden beliebigen Werth der Zahlen α, β, γ, δ .... gilt, spricht eine charakteristische Eigenschaft aus, welche der mit $f(n)$ bezeichneten Summe der Reihe (4) zukommt und in Verbindung mit der Bemerkung, dass $f(n) = (1 + x)^n$ ist, wenn n eine ganze positive Zahl, hinreicht, um die Funktion $f(n)$ für jeden beliebigen Werth von n zu finden.

Setzen wir in (9) $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots. = \frac{p}{q}$, wo p und q

ganze positive Zahlen bedeuten, und lassen die Anzahl dieser Grössen $= q$ sein, so geht diese Gleichung über in

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right) \right]^q = f(p)$$

woraus, wenn wir die q^{te} Wurzel ziehen und transponiren,

$$\left[f(p)\right]^{\frac{1}{q}} = f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nun ist nach Gl. (7), da p eine ganze Zahl, $f(p) = (1+x)^p$, somit $[f(p)]^{\frac{1}{q}} = (1+x)^{\frac{p}{q}}$; anderseits stellt das Symbol $f\left(\frac{p}{q}\right)$ nach Gl. (6) die Reihe $1 + \binom{\frac{p}{q}}{1} x + \binom{\frac{p}{q}}{2} x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3} x^3 + \ldots\ldots$ vor; somit folgt aus der letzten Gleichung:

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1 + \binom{\frac{p}{q}}{1} x + \binom{\frac{p}{q}}{2} x^2 + \binom{\frac{p}{q}}{3} x^3 + \ldots\ldots$$

womit die Richtigkeit der Gl. (3) auch für gebrochene positive Werthe des Exponenten n nachgewiesen ist.

Setzt man ferner in der Gleichung (8) $\alpha = m$, wo m eine positive ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, und $\beta = -m$, so geht diese Gleichung über in:

$$f(m) \cdot f(-m) = f(0),$$

oder da aus (6) für $n = 0, f(0) = 1$ folgt, $f(m) \cdot f(-m) = 1$, d. h.

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}$$

und wenn man statt $f(-m)$ wieder die durch dieses Symbol vorgestellte Reihe schreibt:

$$(1+x)^{-m} = 1 + \binom{-m}{1} x + \binom{-m}{2} x^2 + \binom{-m}{3} x^3 + \ldots.;$$

dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch aus (3), wenn man dort $-m$ statt m schreibt, daher die Gl. (3) auch für negative Werthe des Exponenten richtig bleibt.

Indem man endlich eine irrationale Zahl als die Grenze betrachtet, welcher sich eine rationale ohne Ende nähert, beweist man ganz

in ähnlicher Weise wie §. 48, dass die Gl. (3) auch für irrationale Werthe des Exponenten nicht aufhört, gültig zu sein.

Es folgt demnach aus dieser Untersuchung, dass die unter dem Namen Binomialreihe, binomischer Lehrsatz, Newton'sche Binomialformel bekannte Entwickelung:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots. \qquad (10)$$

für jeden beliebigen Werth des Exponenten gilt; unter der Bedingung, dass, wenn n keine positive ganze Zahl ist, x ein echter Bruch sei, damit die Reihe convergire.

Für $x = +1$ und $x = -1$ geht die Formel (10) beziehungsweise über in

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots.$$

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots.$$

zwei Reihen, deren Convergenz respektive an die Bedingung $n > -1$ und $n > 0$ gebunden ist [§. 34, 3].

Setzen wir in (10) $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x und multipliciren sodann die Gleichung mit a^n, so kommt:

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \ldots.. \qquad (11)$$

wo, wenn n keine positive ganze Zahl, $x < a$ sein muss, damit die Reihe convergire.

58. Setzt man in (10) der Reihe nach $-n$, $\frac{p}{q}$, $-\frac{p}{q}$, $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ an die Stelle von n, so erhält man folgende Reihen, welche sämmtlich x numerisch kleiner als 1 voraussetzen und des häufigen Gebrauches wegen angeführt werden mögen:

$$(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots \quad (12)$$

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{1.2}\frac{x^2}{q^2} + \frac{p(p-q)(p-2q)}{1.2.3}\frac{x^3}{q^3} + \ldots\ldots \quad (13)$$

$$(1+x)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(1+x)^p}} = 1 - \frac{p}{q}x + \frac{p(p+q)}{1.2}\frac{x^2}{q^2} - \frac{p(p+q)(p+2q)}{1.2.3}\frac{x^3}{q^3} + \ldots \quad (14)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^4}{8} + \ldots. \quad (15)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \ldots$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \ldots \quad (16)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \ldots$$

Für negative Werthe von x ändern die Glieder mit ungeraden Potenzen von x ihr Zeichen.

Setzt man in (12) $x = -y$, so erhält man:

$$(1-y)^{-n} = 1 + ny + \frac{n(n+1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}y^3 + \ldots. \; (\alpha)$$

Man setze nun $y = \frac{x}{1+x}$, wobei die Bedingung $y < 1$, an welche

die Gültigkeit der Gl. (α) geknüpft ist, für jeden positiven Werth von x erfüllt ist, so wird $1-y=\frac{1}{1+x}$, und $(1-y)^{-n}=(1+x)^n$; hiemit verwandelt sich (α) in:

$$(1+x)^n = 1 + n\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix} \qquad (17)$$

woraus wieder, wenn man $\frac{x}{a}$ an die Stelle von x setzt:

$$(a+x)^n = a^n\left\{1 + n\left(\frac{x}{a+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \ldots\right\} \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=\infty \end{matrix} \qquad (18)$$

folgt; zwei Reihen, welche für jeden positiven Werth von x convergiren.

Die Binomialreihe ist für die gesammte Analysis von der grössten Wichtigkeit. Hier mag nur noch des Gebrauches derselben zur Wurzelausziehung gedacht werden. Ist $\sqrt[q]{A}$ zu berechnen, so zerlege man die Zahl A in zwei Theile $a \pm x$, von welchen der erste $a > x$ und eine der Zahl A möglichst naheliegende vollkommene q^{te} Potenz ist, so dass $\sqrt[q]{a} = \alpha$ und α eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch wird; man hat dann:

$$\sqrt[q]{A} = \sqrt[q]{a \pm x} = \sqrt[q]{a\,(1 \pm \tfrac{x}{a})} = \sqrt[q]{a}\cdot\,(1 \pm \tfrac{x}{a})^{\frac{1}{q}}$$

somit nach (13) für $p=1$:

$$\sqrt[q]{a \pm x} = \sqrt[q]{a}\left\{1 \pm \frac{1}{q}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{q-1}{1.2.q^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \frac{(q-1)(2q-1)}{1.2.3.q^3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots\right\}$$

59. Die Betrachtungen des §. 57, mittelst deren wir zur Summirung der Reihe:

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots.$$

gelangten, bezogen sich einzig und allein auf die Beschaffenheit der Grösse n, und waren von jener der Grösse x ganz unabhängig; dieselben bleiben daher in Kraft, wenn x imaginär wird, so dass die Binomialformel auch für einen imaginären Werth von x gültig bleibt, unter der Voraussetzung, dass der Modulus desselben kleiner als 1, wenn der Exponent keine positive ganze Zahl ist.

POLYNOMISCHER LEHRSATZ.

60. Es sei:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots \quad (1)$$

ein Polynom aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern bestehend, und die Aufgabe gestellt, die m^{te} Potenz dieses Polynoms zu entwickeln, unter m eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl verstanden. Setzen wir:

$$p = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird $y = a_0 + px$, und wir erhalten unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$y^m = a_0{}^m + \binom{m}{1} a_0{}^{m-1} px + \binom{m}{2} a_0{}^{m-2} p^2 x^2 + \binom{m}{3} a_0{}^{m-3} p^3 x^3 + \ldots\ldots \quad (3)$$

und zwar für jeden Werth des Exponenten m, jedoch unter Voraussetzung der Convergenz der Reihen zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens, wenn dieselben nicht abbrechen.

Es kommt somit, wie man sieht, nur noch auf die Darstellung der aufeinanderfolgenden Potenzen des Polynoms p an, d. i. allgemein auf die Entwicklung von

$$p^n = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + \ldots\ldots)^n$$

wobei jetzt n eine positive ganze Zahl bedeutet. Hiemit wollen wir uns nun beschäftigen und dabei in dem Polynom p,

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{n-1} \ldots$$

statt

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n \ldots$$

schreiben, um die Zeiger der Coefficienten mit den Exponenten der Potenzen von x zur Uebereinstimmung zu bringen, wodurch die folgenden Betrachtungen vereinfacht werden. Setzen wir nun:

$$p^n = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots)^n =$$

$$= \overset{n}{A}_0 + \overset{n}{A}_1 x + \overset{n}{A}_2 x^2 + \overset{n}{A}_3 x^3 + \ldots\ldots, \quad (4)$$

welche Form der nach Potenzen von x geordneten Entwickelung, als einem Produkte von n Faktoren, jeder $= p$, nothwendig zukommen muss, so handelt es sich nur um die Bestimmung der Coefficienten

$$\overset{n}{A}_0, \overset{n}{A}_1, \overset{n}{A}_2, \ldots\ldots$$

Denken wir uns die Multiplikation der n Faktoren, jeder $= p$,

wirklich ausgeführt, so folgt unmittelbar aus der Regel für die Multiplikation von Polynomen, dass 1) irgend ein Glied des geordneten Produktes, z. B. $\overset{n}{A}_r\ x^r$ das Aggregat sämmtlicher Glieder ist, welche x^r als Faktor enthalten; dass 2) jedes dieser Glieder ein Produkt aus n Gliedern des Polynoms p ist, und zwar so construirt, dass die Zeigersumme der in dasselbe eingehenden Coefficienten α dem Exponenten r der in dasselbe multiplicirten Potenz von x gleich ist.

Hiernach muss der Coefficient $\overset{n}{A}_r$ nothwendig das Aggregat sämmtlicher Produkte sein, welche sich aus den Coefficienten

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ \alpha_r$$

mit der Zeigersumme $= r$ bilden lassen, wobei der Faktor α_0, welcher zur Zeigersumme nichts beiträgt, mit einem solchen Exponenten zu versehen ist, dass die Anzahl aller Faktoren $= n$ werde. Zerlegt man daher die Zahl r, so oft es angeht und ohne Wiederholung, in ihre ganzen Bestandtheile, so erhält man offenbar alle Complexionen von Zeigern, welche den einzelnen Gliedern des Coefficienten $\overset{n}{A}_r$ zukommen.

Um z. B. $\overset{n}{A}_5$ zu bilden, zerlegen wir die Zahl 5 in ihre Theile:

$$5 \mid 4, 1 \mid 3, 2 \mid 3, 1, 1 \mid 2, 2, 1 \mid 2, 1, 1, 1 \mid 1, 1, 1, 1, 1;$$

wir erhalten sofort:

$$\alpha_5,\ \alpha_4\,\alpha_1,\ \alpha_3\,\alpha_2,\ \alpha_3\,\alpha_1^2,\ \alpha_2^2\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\alpha_1^3,\ \alpha_1^5,$$

und fügen endlich jedem dieser Bestandtheile so viele Faktoren, jeder $= \alpha_0$ hinzu, dass die Anzahl aller Faktoren $= n$ werde. Die sämmtlichen Bestandtheile des Coefficienten $\overset{n}{A}_5$ sind somit:

$$\alpha_0^{n-1}\,\alpha_5,\ \alpha_0^{n-2}\,\alpha_4\,\alpha_1,\ \alpha_0^{n-2}\,\alpha_3\,\alpha_2,\ \alpha_0^{n-3}\,\alpha_3\,\alpha_1^2,\ \alpha_0^{n-3}\,\alpha_2^2\,\alpha_1,$$
$$\alpha_0^{n-4}\,\alpha_2\,\alpha_1^3,\ \alpha_0^{n-5}\,\alpha_1^5.$$

Nun überzeugt man sich aber leicht, dass irgend einer dieser Bestandtheile durch den Multiplikationsprozess mehrmals gebildet wird, woraus aber sogleich folgt, dass er überhaupt so oft erscheinen muss, als er aus den n Elementen α, aus welchen er besteht, gebildet werden kann, d. h. also so oft, als diese Faktoren, n an der Zahl, Permutationen ohne Wiederholungen zu lassen.

Von den oben dargestellten Gliedern des Coefficienten A_5 wird hiernach:

das 1. Glied $\alpha_0^{n-1}\,\alpha_5$ ..... $\dfrac{n(n-1)(n-2).....3.2.1}{1.2.3.....(n-1)} =$

$= n$ mal,

das 2. u. 3. Gl. jedes: .... $\dfrac{n(n-1)(n-2)....3.2.1}{1.2.3.....(n-2)} =$

$= n(n-1) = 2\binom{n}{2}$ mal,

das 4. u. 5. Gl. jedes: .... $\dfrac{n(n-1)(n-2)....3.2.1}{1.2.3.....(n-3).1.2} =$

$= \dfrac{n(n-1)\,(n-2)}{1.2} = 3\binom{n}{3}$ mal

das 6. Glied: . . . . . $\dfrac{n(n-1)(n-2)...3.2.1}{1.2.3...(n-4).1.2.3} =$

$= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} = 4\binom{n}{4}$ mal,

das 7. Glied: . . . . . $\dfrac{n(n-1)(n-2)...3.2.1}{1.2.3...(n-5)\,1.2.3.4.5} =$

$= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} = \binom{n}{5}$ mal

erscheinen, und somit ist:

$$\overset{n}{A}_5 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_5 + 2\binom{n}{2}\alpha_0^{n-2}(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3) + 3\binom{n}{3}\alpha_0^{n-3}(\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2) +$$
$$+ 4\binom{n}{4}\alpha_0^{n-4}\alpha_1^3\alpha_2 + \binom{n}{5}\alpha_0^{n-5}\alpha_1^5.$$

Es ist hiernach sehr leicht, den Coefficienten eines beliebigen Gliedes der n^{ten} Potenz eines Polynoms zu entwickeln, wobei wir unter n vorläufig noch eine positive ganze Zahl zu verstehen haben. Setzt man daher:

$$(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+.....)^n = \overset{n}{A}_0 + \overset{n}{A}_1 x + \overset{n}{A}_2 x^2 + \overset{n}{A}_3 x^3 + ... \quad (5)$$

so ist, wie man nach dem angegebenen Verfahren sehr leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{n}{A}_0 = \alpha_0^n \\
&\overset{n}{A}_1 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_1 \\
&\overset{n}{A}_2 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_2 + \binom{n}{2}\alpha_0^{n-2}\alpha_1^2 \\
&\overset{n}{A}_3 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_3 + 2\binom{n}{2}\alpha_0^{n-2}\alpha_1\alpha_2 + \binom{n}{3}\alpha_0^{n-3}\alpha_1^3 \\
&\overset{n}{A}_4 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_4 + \binom{n}{2}\alpha_0^{n-2}(2\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2) + 3\binom{n}{3}\alpha_0^{n-3}\alpha_1^2\alpha_2 + \\
&\qquad + \binom{n}{4}\alpha_0^{n-4}\alpha_1^4 \\
&\overset{n}{A}_5 = n\alpha_0^{n-1}\alpha_5 + ... \text{ wie oben.} \\
&\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese Entwickelung führt den Namen: Polynomial-Theorem oder polynomischer Lehrsatz und die in (6) entwickelten Coefficienten $\overset{n}{A}_0$, $\overset{n}{A}_1$, u. s. w. heissen Polynomial-Coefficienten.

Wie man sieht, so enthält die durch die Gleichungen (5) und (6) dargestellte Entwickelung bereits die Auflösung der ursprünglich für das Polynom y gestellten Aufgabe, nur mit der Einschränkung, dass der Exponent n noch eine positive ganze Zahl bedeute. Es ist aber jetzt sehr leicht zu zeigen, dass diese Entwickelung für jeden Werth des Exponenten in Kraft bleibe. In der That, setzt man in (5) und (6) der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ u. s. w., substituirt die für p, p^2, p^3, p^4 u. s. w. erhaltenen Ausdrücke in (3), wobei wieder α_0, α_1, α_2 ... durch a_1, a_2, a_3 ... zu ersetzen sind, und ordnet nach Potenzen von x, so erhält man:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^2 + ...)^{m} = \overset{m}{A}_0 + \overset{m}{A}_1 x + \overset{m}{A}_2 x^2 + \overset{m}{A}_3 x^3 + ...$$

und findet, dass die Coefficienten $\overset{m}{A}_0$, $\overset{m}{A}_1$, $\overset{m}{A}_2$ u. s. w. nach eben dem in den Gl. (6) ausgesprochenen Gesetze gebildet sind, wo aber nun an die Stelle der ganzen positiven Zahl n die jedes beliebigen Werthes fähige Zahl m getreten ist.

Zwischen den in (6) dargestellten Polynomialcoefficienten finden einfache Beziehungen statt, mit Hülfe deren sich jeder derselben aus den ihm vorangehenden Coefficienten berechnen lässt. Es ist nämlich:

$$\overset{n}{A}_0 = \alpha_0{}^n$$

$$\alpha_0 \overset{n}{A}_1 = n\alpha_1 \overset{n}{A}_0$$

$$2\,\alpha_0 \overset{n}{A}_2 = 2n\alpha_2 \overset{n}{A}_0 + (n-1)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_1$$

$$3\,\alpha_0 \overset{n}{A}_3 = 3n\alpha_3 \overset{n}{A}_0 + (2n-1)\,\alpha_2 \overset{n}{A}_1 + (n-2)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_2$$

$$4\,\alpha_0 \overset{n}{A}_4 = 4n\alpha_4 \overset{n}{A}_0 + (3n-1)\,\alpha_3 \overset{n}{A}_1 + (2n-2)\,\alpha_2 \overset{n}{A}_2 + (n-3)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_3$$

$$5\,\alpha_0 \overset{n}{A}_5 = 5n\alpha_5 \overset{n}{A}_0 + (4n-1)\,\alpha_4 \overset{n}{A}_1 + (3n-2)\,\alpha_3 \overset{n}{A}_2 + (2n-3)\,\alpha_2 \overset{n}{A}_3 + \\ + (n-4)\,\alpha_1 \overset{n}{A}_4$$

u. s. w.

Das Gesetz der Fortschreitung fällt deutlich in die Augen. Zur wirklichen Berechnung der Polynomialcoefficienten in einem praktischen Falle, namentlich wenn dieselben numerische sind, sind die Formeln (7) bequemer als die obigen (6).

Wäre die folgende Reihe von allgemeinerer Form:

$$y = a_0 x^k + a_1 x^{k+h} + a_2 x^{k+2h} + a_3 x^{k+3h} + \cdots$$

zur m^{ten} Potenz zu erheben, so hat man:

$$y^m = x^{km}\ (a_0 + a_1\, x^h + a_2\, x^{2h} + a_3\, x^{3h} + \ldots.)^m,$$

und wenn man $x^h = z$ setzt:

$$y^m = z^{\frac{km}{h}}\ (a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + a_3\, z^3 + \ldots..)^m$$

wodurch die Aufgabe wieder auf die oben behandelte zurückgeführt ist.

Wäre endlich ein Polynom von der Form $p = (a + b + c + d + \ldots)$ zur m^{ten} Potenz zu erheben, so hätte man nur in obiger Entwickelung $x = 1$ zu setzen.

II. Die Exponentialreihe.

61. Um die Exponentialfunktion a^x in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, setzen wir in der Binomialreihe:

$$(1+y)^n = 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \ldots. \begin{cases} y > -1 \\ y < +1 \end{cases}$$

$1 + y = a^\alpha$ und $n = \frac{x}{\alpha}$, so erhalten wir:

$$a^x = 1 + \frac{x}{\alpha}(a^\alpha - 1) + \frac{\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)}{1.\,2}(a^\alpha - 1)^2 + \frac{\frac{x}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{x}{\alpha} - 2\right)}{1.\,2.\,3}(a^\alpha - 1)^3 + \ldots.$$

oder

$$a^x = 1 + \frac{a^\alpha - 1}{\alpha}x + \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 \frac{x(x-\alpha)}{1.\,2} + \left(\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.\,2.\,3} + \ldots.$$

und zwar für jeden Werth des Exponenten x, und für solche Werthe von α, welche der Bedingung $y = a^\alpha - 1 \begin{matrix} > -1 \\ < +1 \end{matrix}$ genügen, wo a eine beliebige positive Zahl bedeutet. Letztere Bedingung wird um so gewisser erfüllt sein, je kleiner wir α nehmen, somit auch für $\alpha = 0$; lassen wir daher α in 0 übergehen und setzen den noch unbekannten Grenzwerth:

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = k, \qquad (1)$$

so folgt:

$$a^x = 1 + \frac{k.\,x}{1} + \frac{k^2.\,x^2}{1.\,2.} + \frac{k^3.\,x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{k^4.\,x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \ldots. \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \qquad (2)$$

wo k eine noch unbekannte bloss von a abhängige constante Grösse bedeutet, und x jedes Werthes von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig ist. Zur Kenntniss der Constante k führt die Bemerkung, dass, da k bloss eine Funktion von a ist, wohl auch ein Werth von a existiren wird, für welchen $k = 1$ ist. Bezeichnen wir diesen besonderen Werth von a mit e, so geht die Gl. (2) über in:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \quad (3)$$

setzt man aber hier $x = 1$, so folgt:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots. \quad (4)$$

Diese Reihe convergirt und liefert durch Addition einer hinreichenden Anzahl von Gliedern den gesuchten Werth von a, für welchen $k = 1$ wird, nämlich:

$$e = 2,\ 7182818284\ldots\ldots$$

Diese Zahl $2,\ 178\ldots$ welche in der Analysis, gleich der Zahl $\pi = 3,\ 15\ldots.$ eine grosse Rolle spielt, werden wir in der Folge, wie diess üblich ist, ausschliesslich mit dem Buchstaben e bezeichnen und es lässt sich zeigen, dass dieselbe eine irrationale Zahl ist.

Setzt man nun in (2) $x = 1$, in (3) $x = k$, so erhält man:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots.$$

woraus, da die im zweiten Theile dieser Gleichungen stehende Reihe für jeden Werth von k convergirt, $e^k = a$ folgt. Nimmt man von beiden Theilen dieser Gleichung die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme, so kommt $k \log e = \log a$, woraus endlich

$$k = \lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\log a}{\log e} \quad (5)$$

folgt. Hiemit geht (2) über in:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\left(\frac{\log a}{\log e}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{\log a}{\log e}\right)^3 + \ldots \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \quad (6)$$

in welcher Gleichung nun alles bestimmt ist, und die Logarithmen aus einem beliebigen Systeme genommen werden können. Nichts hindert aber, ein Logarithmensystem zu construiren, dessen Basis die Zahl e ist; bezeichnet man sodann die Logarithmen dieses Systemes, welche man natürliche nennt — im Gegensatze zu den künstlichen, deren Grundzahl eine beliebige Zahl b sein kann, und die wir wie oben mit dem Zeichen log bezeichnen wollen — mit dem Buchstaben l, so folgt aus (5), wegen $le = 1$,

$$k = \lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = la; \tag{7}$$

endlich wird:

$$a^x = 1 + \frac{x.\,la}{1} + \frac{x^2.\,(la)^2}{1.2} + \frac{x^3.\,(la)^3}{1.2.3} + \ldots. \begin{cases} x = -\infty \\ x = +\infty \end{cases} \tag{8}$$

62. Die Zahl $e = 2{,}718\ldots$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, ist durch die unendliche convergirende Reihe (4) definirt. Eine andere Bestimmung derselben ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (7):

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = la; \quad [\text{für } \alpha = 0] \tag{7}$$

setzt man nämlich $a^\alpha = 1 + \beta$, wo β eine mit α verschwindende Grösse bezeichnet, so wird:

$$\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\log_a (1+\beta)} = \frac{1}{\frac{\log_a (1+\beta)}{\beta}} = \frac{1}{\log_a \left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]}$$

somit:

$$\log_a \left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right] = \frac{1}{\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}},$$

wo mit $\log_a$ ein Logarithmus aus dem Systeme, dessen Grundzahl $= a$, bezeichnet ist. Aus der letzten Gleichung folgt nun:

$$(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{1}{\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}}},$$

und hieraus, wenn man zur Grenze übergeht, mit Rücksicht auf (7):

$$\lim (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{1}{la}},$$

d. i. weil dem Begriffe der Logarithmen zufolge $e^{la} = a$, also $e = a^{\frac{1}{la}}$ ist,

$$\lim (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e. \quad [\text{für } \beta = 0] \tag{9}$$

Die beiden Grenzgleichungen (7) und (9) finden in der Analysis häufige Anwendung. Setzt man in (9) βx an die Stelle von β, wo x eine von β unabhängige, übrigens ganz beliebige reelle oder imaginäre Zahl bedeutet, so hat man:

$$\lim (1+\beta x)^{\frac{1}{\beta x}} = e,$$

d. i. weil [§. 18, e]:

$$\lim (1+\beta x)^{\frac{1}{\beta x}} = \left\{\lim (1+\beta x)^{\frac{1}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{x}} \text{ ist},$$

$$\lim (1 + \beta x)^{\frac{1}{\beta}} = e^x, \quad [\text{für } \beta = 0] \tag{10}$$

eine Gleichung, welche die (sogenannte natürliche) Exponentialfunktion e^x als Grenzwerth darstellt.

III. Logarithmische Reihen.

63. Setzen wir in der Gl. (7) des vorigen §. $a = 1 + x$, so folgt:

$$l(1 + x) = \lim \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{\alpha} \quad [\text{für } \alpha = 0]; \tag{1}$$

lassen wir nun x eine Zahl bedeuten, welche zwischen -1 und $+1$ liegt, also einen echten Bruch, so ist:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.\,2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.\,2.\,3} x^3 + \ldots.$$

somit:

$$l(1+x) = \lim \left\{ x + \frac{\alpha-1}{1.\,2} x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.\,2.\,3} x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.\,2.\,3.\,4} x^4 + \ldots \right\}$$

woraus, wenn wir α in 0 übergehen lassen,

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \ldots. \quad \begin{cases} x = -1 \text{ *)} \\ x = +1 \end{cases} \tag{2}$$

folgt. Setzen wir $-x$ an die Stelle von x, so erhalten wir:

$$l(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \ldots \right) \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}, \tag{3}$$

welcher Gleichung wir auch die Form:

$$l\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \ldots. \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \tag{4}$$

geben können, da bekanntlich $lN = -l\frac{1}{N}$ ist. Denken wir uns in dieser Gleichung unter x einen positiven echten Bruch, so ist der

*) Ihrer Ableitung zufolge gilt die Reihe nur für Werthe von x, welche zwischen -1 und $+1$ liegen; da aber für $x = +1$ die Gleichung in: $l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ übergeht, welche Reihe noch convergirt, und für $x = -1$: $l(0) = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots) = -\infty$ [§. 27] erhalten wird, worin kein Widerspruch liegt, weil bekanntlich der Logarithmus von 0 in jedem System $= -\infty$ ist, so bleibt die Gleichung (2) auch noch für die Grenzwerthe $x = \pm 1$ richtig.

Quotient $\frac{1}{1-x}$ jedes positiven Werthes fähig, welcher > 1; wir können daher $\frac{1}{1-x} = 1 + z$ setzen, unter z irgend eine positive Zahl verstanden, wodurch $x = \frac{z}{z+1}$ wird, und die Gl. (4) sich in folgende verwandelt:

$$l(1+z) = \left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1}\right)^3 + \ldots \begin{cases} x=0 \\ z=+\infty \end{cases} \quad (5)$$

Zur wirklichen Berechnung der natürlichen Logarithmen der Zahlen sind die vorstehenden Reihen ihrer geringen Convergenz wegen nicht geeignet. Es lassen sich jedoch aus ihnen durch geeignete Umformungen viele andere rascher convergirende Reihen ableiten, von welchen wir einige anführen wollen.

64. Zieht man (3) von (2) ab, so kommt:

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots\right) \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}; \quad (6)$$

Setzen wir $\frac{1+x}{1-x} = z$; da für

$$x = -1: z = 0, \text{ für } x = +1: z = \infty$$

wird, so ist innerhalb der Grenzen $\begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}$, z jedes beliebigen positiven Werthes fähig; da ferner aus obiger Gleichung $x = \frac{z-1}{z+1}$ folgt, so erhalten wir, indem wir diese Ausdrücke in (6) substituiren:

$$lz = 2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \begin{cases} z=0 \\ z=+\infty \end{cases}, \quad (7)$$

welche Gleichung, wenn man $z = \frac{a}{b}$ setzt, folgende Form erhält:

$$l\frac{a}{b} = 2\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5 + \cdots\right] \quad (8)$$

eine Reihe, welche um so rascher convergirt, je kleiner $(a-b)$ gegen $(a+b)$ ist.

Für $a = x + \delta$, $b = x$, erhält man aus (8):

$$l(x+\delta) = lx + 2\left[\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\delta}{2x+\delta}\right)^5 + \ldots\right] \quad (9)$$

und hieraus für $\delta = 1$:

$$l(x+1) = lx + 2\left[\left(\frac{1}{2x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^5 + \ldots\right] \quad (10)$$

mittelst welcher Reihe man bereits die natürlichen Logarithmen der Zahlen berechnen könnte. Für $x > 93$ hat, wie man leicht findet, das

2te Glied der Reihe auf die 7te Dezimalstelle des Logarithmus keinen Einfluss mehr.

Eine noch rascher convergirende Reihe ergiebt sich, wenn man in (8) $a = x^2$, $b = x^2 - 1$ setzt, wodurch

$$l\frac{a}{b} = lx^2 - l(x^2-1) = 2lx - l(x-1) - l(x+1)$$

und

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{2x^2-1}$$

wird; es kommt:

$$lx = \frac{1}{2}[l(x-1)+l(x+1)] + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2x^2-1)^5} + \ldots\right] \qquad (11)$$

eine Reihe, welche zur Berechnung der Logarithmen der aufeinanderfolgenden Primzahlen, aus welchen sich die der zusammengesetzten durch blosse Addition ergeben, schon sehr geeignet ist. Setzt man nämlich den Werth der Reihe in (11):

$$\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots.\right] = S_x,$$

so hat man zunächst:

$$l2 = \frac{1}{2}\,l3 + S_2;\quad l3 = \frac{1}{2}(l2 + l4) + S_3 = \frac{3}{2}\,l2 + S_3;$$

aus beiden Gleichungen folgt:

$$l2 = 2\,(2S_2 + S_3),\quad l3 = 2\,(3\,S_2 + 2\,S_3).$$

Nun ist:

$$S_2 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3.\,7^3} + \frac{1}{5.\,7^5} + \ldots.. = 0.143841036$$

$$S_3 = \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \ldots.. = 0,058891517$$

von welchen Zahlen die erste 5, die andere 3 Glieder der Reihe in Anspruch nimmt; hiemit wird nun in 7 Dezimalen

$$l2 = 0{,}6931472,\quad l3 = 1{,}0986123$$

Weiter ist:

$$l5 = \frac{1}{2}\,l4 + \frac{1}{2}\,l6 + S_5 = \frac{3}{2}\,l2 + \frac{1}{2}\,l3 + S_5 = 1.6094379$$

$$l7 = \frac{1}{2}\,l6 + \frac{1}{2}\,l8 + S_7 = 2\,l2 + \frac{1}{2}\,l3 + S_7 = 1{,}9459101$$

u. s. w.

Man findet leicht, dass für Werthe von $x \geqq 11$ das zweite Glied der Reihe

keinen Einfluss mehr auf die 7te Dezimalstelle des Logarithmus hat; man kann daher bis auf 7 Dezimalstellen genau für alle Zahlen von 11 angefangen:

$$lx = \frac{1}{2}\,[l(x-1) + l(x+1)] + \frac{1}{2x^2-1}$$

und für $x > 3163$ einfach

$$lx = \frac{1}{2}\,[l(x-1) + l(x+1)]$$

setzen.

Auf gleiche Weise wie wir (10) und (11) aus (8) abgeleitet haben, lassen sich aus (8) noch viele sehr rasch convergirende Reihen entwickeln, indem man nämlich für a und b zwei ganze Funktionen von x von der Beschaffenheit wählt, dass sie sich leicht in einfache Faktoren zerlegen lassen und ihre Differenz eine kleine Zahl wird.

65. Die bisher angeführten Reihen geben die natürlichen Logarithmen der Zahlen, deren Grundzahl $e = 2{,}718\ldots$ ist; sie werden in der Analysis fast ausschliessend gebraucht, während man sich bei dem praktischen Rechnen bekanntlich der gemeinen oder briggischen Logarithmen bedient, deren Grundzahl 10 ist. Diese lassen sich aber aus den natürlichen leicht berechnen. Bezeichnet man überhaupt mit log die Logarithmen eines Systems, dessen Basis b ist, so hat man, wenn N eine beliebige Zahl bedeutet, nach dem Begriffe des Logarithmus $N = b^{\log N} = e^{lN}$; nimmt man von beiden Theilen der Gleichung $b^{\log N} = e^{lN}$ sowohl die natürlichen als die künstlichen Logarithmen, so kommt, da $\log b = 1$ ist,

$$\log N.\ lb = lN$$

$$\log N = lN.\ \log e;$$

durch Division beider Gleichungen erhält man:

$$\frac{1}{lb} = \log e,$$

somit, wenn man die Constante $\frac{1}{lb} = M$ setzt:

$$\log N = M.\ lN.$$

Die Constante M heisst der Modulus des auf die Basis b gebauten Logarithmensystemes und ist, wie man sieht, der reciproke Werth des natürlichen Logarithmen der Grundzahl b. Für das gemeine Logarithmensystem ist $b = 10$, und

$$l10 = l2 + l5 = 2{,}3025851,$$

somit:

$$M = \frac{1}{l10} = 0{,}4342945\ ;$$

man erhält daher die gemeinen Logarithmen, wenn man die natürlichen mit $M = 0{,}4342945$ multiplicirt. Umgekehrt folgen die natürlichen aus den gemeinen, wenn man letztere mit

$$\frac{1}{0{,}4342945} = 2{,}3025851$$

multiplicirt.

Um die Reihen (2) bis (11) für gemeine Logarithmen umzuformen, hat man nur das Zeichen l mit jenem log zu vertauschen und den Reihenausdrücken den Faktor M vorzusetzen.

66. Aus der Exponentialreihe (8), §. 61. lässt sich leicht eine Reihe ableiten, welche eine Zahl z durch den Logarithmus derselben ausdrückt. Setzt man nämlich $a^x = z$, so wird $xla = lz$, somit:

$$z = 1 + \frac{lz}{1} + \frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{(lz)^3}{1.2.3} + \frac{(lz)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \begin{cases} z = 0 \\ z = +\infty \end{cases}.$$

IV. Trigonometrische Reihen.

A. Reihen für Sinus und Cosinus vielfacher Bögen.

67. Setzt man in der Moivre'schen Binomialformel:

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi),$$

in welcher x einen beliebigen Bogen, m eine beliebige Zahl und r eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten, der Kürze halber

$$\cos x = p, \sin x = q,$$

so wird:

$$\cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi) = (p + iq)^m = p^m \left(1 + \frac{q}{p} i\right)^m;$$

nimmt man ferner an, dass $q = \sin x < p = \cos x$, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass der Bogen x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liege, so ist $\frac{q}{p}$ ein echter Bruch und das Binom $\left(1 + \frac{q}{p} i\right)^m$ kann nach dem Newton'schen Lehrsatze in eine convergirende Reihe entwickelt werden; man erhält, wenn man zugleich die reellen und imaginären Glieder zusammenfasst:

$$\begin{aligned} &\cos m(x + 2r\pi) + i \sin m(x + 2r\pi) = \\ &= p^m \left[1 - \binom{m}{2} \frac{q^2}{p^2} + \binom{m}{4} \frac{q^4}{p^4} - \ldots\right] + \\ &+ p^m \left[\binom{m}{1} \frac{q}{p} - \binom{m}{3} \frac{q^3}{p^3} + \ldots\right] . i \end{aligned} \qquad (1)$$

Bedeutet nun m eine ganze Zahl, so zerfällt [§. 44] diese Gleichung alsogleich in folgende zwei:

$$\begin{aligned}\cos mx &= p^m\left[1 - \binom{m}{2}\frac{q^2}{p^2} + \binom{m}{4}\frac{q^4}{p^4} - \ldots.\right]\\ \sin mx &= p^m\left[\binom{m}{1}\frac{q}{p} - \binom{m}{3}\frac{q^3}{p^3} + \binom{m}{5}\frac{q^5}{p^5} - \ldots.\right]\end{aligned} \qquad (2)$$

weil dann einerseits bekanntlich

$$\cos m\,(x + 2r\pi) = \cos mx,\ \sin m(x + 2r\pi) = \sin mx$$

ist, anderseits aber die Potenz p^m nur einen Werth zulässt.

Ist aber $m = \frac{h}{k}$ ein rationaler Bruch, so haben beide Theile der Gl. (1) k verschiedene Werthe [§§. 49 und 52]; es entspricht jedem der k Werthe von p^m im zweiten Theile ein bestimmter Werth von r im ersten Theile, wodurch eben bewirkt wird, dass beide Theile der Gleichung einander gleich werden. Unter den k Werthen von p^m befindet sich aber nothwendig ein reeller, da x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt, somit $p = \cos x$ immer positiv ist. Lassen wir nun in (1) p^m diesen reellen Werth bedeuten, so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$\begin{aligned}\cos m(x+2r\pi) &= p^m\left[1 - \binom{m}{2}\frac{q^2}{p^2} + \binom{m}{4}\frac{q^4}{p^4} - \ldots.\right]\\ \sin m(x+2r\pi) &= p^m\left[\binom{m}{1}\frac{q}{p} - \binom{m}{3}\frac{q^3}{p^3} + \binom{m}{5}\frac{q^5}{p^5} - \ldots.\right]\end{aligned} \qquad (3)$$

und es bedarf nun noch der Bestimmung desjenigen Werthes von r, welcher dem reellen Werthe von p^m entspricht.

Hiebei kommt uns der Umstand zu Statten, dass r von x unabhängig sein muss. Denn die zweiten Theile der Gleichungen (3) sind offenbar stetige Funktionen von x; den ersten Theilen muss daher dieselbe Eigenschaft zukommen, was nur der Fall sein wird, wenn der Bogen $m(x+2r\pi) = mx + 2mr\pi$ eine stetige Funktion von x ist. Diess kann aber nur unter zwei Bedingungen stattfinden: 1) entweder muss $2mr\pi$, also r eine constante von x unabhängige Grösse sein; oder 2) es muss r selbst eine stetige Funktion von x sein. Letzteres ist aber unmöglich, da r nur ganzer Zahlenwerthe fähig ist, somit nicht stetig, sondern nur sprungweise, immer um eine Einheit, sich ändern könnte. Hieraus folgt also, dass r von x unabhängig ist und zu allen möglichen Werthen von x derselbe Werth von r gehört.

Es genügt daher, den Werth von r für irgend einen speziellen Werth von x zu bestimmen, wozu der Werth $x = 0$ am geeignetsten ist. Für diesen Werth von x geben die Gl. (3), da

$$p = \cos 0 = 1, \; q = \operatorname{Sin} 0 = 0$$

wird:

$$\cos 2mr\pi = 1, \; \sin 2mr\pi = 0,$$

welche Gleichungen nur bestehen können, wenn mr eine ganze Zahl ist. Dann ist aber

$$\cos m(x + 2r\pi) = \cos mx, \quad \sin m(x + 2r\pi) = \sin mx,$$

wodurch aber die Gleichungen (3) wieder in jene (2) sich verwandeln. Diese bestehen daher für jeden Werth des Multiplikators m. Führt man im zweiten Theile derselben die Multiplikation mit p^m aus und stellt die Werthe von p und q wieder her, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \cos mx = \cos x^m - \binom{m}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 + \\ + \binom{m}{4} \cos x^{m-4} \sin x^4 - \ldots . \end{aligned}\right\} x > -\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \binom{m}{3} \cos x^{m-3} \sin x^3 + \\ + \binom{m}{5} \cos x^{m-5} \sin x^5 - \ldots \end{aligned}\right\} x < +\frac{\pi}{4} \quad (5)$$

Ist m eine ganze positive Zahl, so brechen diese Reihen ab und gelten dann für jeden Werth von x; für jeden andern Werth von m werden sie unendlich und gelten nur für solche Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{4}$ liegen.

Hat man den Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens x, welcher einen halben Quadranten überschreitet, in eine Reihe zu verwandeln, so bringe man diesen Bogen x durch Division mit $\frac{\pi}{2}$ auf die Form $x = n\frac{\pi}{2} + x'$, wo n immer so gewählt werden kann, dass x' zwischen die Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ fällt. Dann ist

$$\cos mx = \cos m\left(n\frac{\pi}{2} + x'\right) = \cos mn\frac{\pi}{2} \cos mx' - \sin mn\frac{\pi}{2} \sin mx',$$

$$\sin mx = \sin m\left(n\frac{\pi}{2} + x'\right) = \sin mn\frac{\pi}{2} \cos mx' + \cos mn\frac{\pi}{2} \sin mx',$$

wo nun sin mx' und cos mx' nach obigen Formeln entwickelt werden können.

Setzt man in (4) und (5) statt m der Reihe nach 2, 3, 4 ..., so erhält man:

$$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$$
$$\cos 3x = \cos x^3 - 3 \cos x \sin x^2$$
$$\cos 4x = \cos x^4 - 6 \cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4$$

u. s. w.

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$
$$\sin 3x = 3 \cos x^2 \sin x - \sin x^3$$
$$\sin 4x = 4 \cos x^3 \sin x - 4 \cos x \sin x^3$$

u. s. w.

68. Die Reihen (4) und (5), welche nach den fallenden Potenzen des Cosinus und den steigenden des Sinus gleichzeitig fortschreiten, lassen sich leicht in solche umformen, welche bloss Potenzen des Sinus enthalten. Da nämlich $\cos x = (1 - \sin x^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\sin x < 1$, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\cos x^r = (1 - \sin x^2)^{\frac{r}{2}} = 1 - \binom{\frac{r}{2}}{1} \sin x^2 + \binom{\frac{r}{2}}{2} \sin x^4 -$$
$$- \binom{\frac{r}{2}}{3} \sin x^6 + \ldots \qquad (\alpha)$$

Setzt man hier nach einander $r = m$, $m - 1$, $m - 2$ u. s. w. und führt die so erhaltenen Reihen für die Potenzen von $\cos x$ in (4) und (5) ein, so erhält man, wenn man nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ ordnet und die Coefficienten gehörig reducirt, ohne Schwierigkeit:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin x^4 -$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin x^6 + \ldots \qquad (6)$$

$$\sin mx = m \sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3} \sin x^3 +$$
$$+ \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin x^5 - \ldots. \qquad (7)$$

Die Reihen (4) und (5) lassen sich ferner auch in folgender Form darstellen:

$$\cos mx = \cos x \left[\cos x^{m-1} - \binom{m}{2} \cos x^{m-3} \sin x^2 + \right.$$
$$\left. + \binom{m}{4} \cos x^{m-5} \sin x^4 - \ldots \right]$$
$$\sin mx = \cos x \left[m \cos x^{m-2} \sin x - \binom{m}{3} \cos x^{m-4} \sin x^3 + \ldots. \right];$$

schafft man nun aus den Reihen innerhalb der Klammer mittelst (a) die Potenzen des Cosinus weg, so erhält man folgende Reihen:

$$\cos mx = \cos x \left[1 - \frac{m^2-1^2}{1.\,2}\sin x^2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4}\sin x^4 - \ldots.\right] \quad (8)$$

$$\sin mx = \cos x \left[m \sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{1.\,2.\,3}\sin x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\sin x^5 - \ldots.\right] \text{*)} \quad (9)$$

Wir haben demnach für jede der Funktionen sin mx und cos mx zwei nach Potenzen von sin x fortschreitende Entwickelungen, deren eine (6) und (9), wie aus dem Baue der Coefficienten erhellt, abbricht, wenn m eine gerade Zahl, die andere (7) und (8), wenn m eine ungerade Zahl ist. Die vier Gleichungen gelten in diesem Falle für jeden Werth von x.

Setzt man der Reihe nach $m = 2, 3, 4 \ldots$ so erhält man aus (6) und (8):

$\cos 2x = 1 - 2 \sin x^2$
$\cos 3x = (1 - 4 \sin x^2) \cos x$
$\cos 4x = 1 - 8 \sin x^2 + 8 \sin x^4$
$\cos 5x = (1 - 12 \sin x^2 + 16 \sin x^4) \cos x$
$\cos 6x = 1 - 18 \sin x^2 + 48 \sin x^4 - 32 \sin x^6$
$\cos 7x = (1 - 24 \sin x^2 + 80 \sin x^4 - 64 \sin x^6) \cos x$
u. s. w.

und aus (7) und (9):

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin x^3$
$\sin 4x = (4 \sin x - 8 \sin x^3) \cos x$
$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin x^3 + 16 \sin x^5$
$\sin 6x = (6 \sin x - 32 \sin x^3 + 32 \sin x^5) \cos x$
$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin x^3 + 112 \sin x^5 - 64 \sin x^7$
u. s. w.

Die Reihen (6) und (7) convergiren für jeden Werth von sin x, während die Reihen (8) und (9) für sin $x = 1$ divergent werden. Man überzeugt sich hievon leicht mittelst des in §. 33 vorgetragenen Satzes. Wiewohl hiernach diese vier Reihen für jeden Werth des Bogens x

*) Es lässt sich zeigen, dass die Coefficienten der Potenzen des Sinus in den Reihen (6) bis (9) nach dem oben deutlich ausgesprochenen Bildungsgesetze fortlaufen; am einfachsten, indem man sich auf gewisse Eigenschaften der Binomialcoefficienten stützt. Man kann hierüber nachsehen: Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 2te Auflage, Jena 1851.

$\left(\text{die letzten zwei mit Ausnahme der Werthe von der Form } x = \pm n\frac{\pi}{2}\right)$ convergiren, also eine bestimmte Summe haben, so folgt hieraus noch nicht, dass diese Summe für jeden Werth von x durch die links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke $\cos mx$, $\sin mx$ dargestellt werde. Dass obige Gleichungen (6) bis (9) für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{4}$ liegen, richtig sein müssen, ist klar, weil den Gleichungen (4) und (5), aus welchen sie abgeleitet wurden, diese Eigenschaft zukommt. Eben so leicht überzeugt man sich aber, dass sie für Werthe von x, welche $\frac{\pi}{2}$ überschreiten, aufhören richtig zu sein; denn da $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$ ist, so erhält der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Theil einer jeden dieser vier Gleichungen für $x = \frac{\pi}{2} - y$ und für $x = \frac{\pi}{2} + y$ denselben numerischen Werth, während, wie leicht einzusehen, keineswegs

$$\cos m\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos m\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \text{ und } \sin m\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin m\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$$

ist, ausgenommen in dem Falle, wenn in (6) und (9) m eine gerade, in (7) und (8) m eine ungerade Zahl ist. Es erübrigt also nur noch die Untersuchung für das Intervall von $x = \pm \frac{\pi}{4}$ bis $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

Substituiren wir in den Gl. (4) und (5) $2m$ statt m und $\frac{x}{2}$ statt x, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \cos mx &= \cos\frac{x}{2}^{2m} - \binom{2m}{2}\cos\frac{x}{2}^{2m-2}\sin\frac{x}{2}^{2} + \ldots\ldots \\ \sin mx &= \binom{2m}{1}\cos\frac{x}{2}^{2m-1}\sin\frac{x}{2} - \binom{2m}{3}\cos\frac{x}{2}^{2m-3}\sin\frac{x}{2}^{3} + \ldots. \end{aligned}\right\} (\beta)$$

welche Gleichungen sofort, wenn m keine ganze positive Zahl ist, erfordern, dass $\frac{x}{2}$ zwischen den Grenzen $\pm \frac{\pi}{4}$, d. h. x zwischen den Grenen $\pm \frac{\pi}{2}$ liege. Mittelst der bekannten goniometrischen Ausdrücke:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos x},\ \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos x},\ \cos x = \sqrt{1 - \sin x^2}$$

lassen sich nun sämmtliche in den Reihen (β) vorkommenden Potenzen

von $\cos\frac{x}{2}$ und $\sin\frac{x}{2}$ mit Hülfe der Binomialformel in convergirende nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ laufende Reihen auflösen; substituirt man diese in (β), so erhält man auf dem oben betretenen Wege vier Reihen, je zwei für $\sin mx$ und $\cos mx$, welche, sowie die Reihen (6) bis (9) nach Potenzen von $\sin x$ fortschreiten, jedoch von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ gelten, da sie aus (β) abgeleitet wurden, welchen dieses Gültigkeitsintervall zukommt. Diese vier neuen Reihen müssen jedoch mit jenen (6) bis (9) identisch sein, da sich eine Funktion einer Veränderlichen nur auf eine Art in eine nach steigenden Potenzen dieser Veränderlichen (hier $\sin x$) fortschreitende Reihe entwickeln lässt. Wir sind somit berechtigt, die Gleichungen (6) bis (9) für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ als richtig anzunehmen.

B. Reihen für $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, u. s. w., welche nach Potenzen des Bogens x fortschreiten.

69. Zieht man aus dem zweiten Theile der Gl. (4) und (5) $\cos x^m$ als Faktor heraus, so erhält man:

$$\cos mx = \cos x^m \left[1 - \binom{m}{2}\operatorname{tg} x^2 + \binom{m}{2}\operatorname{tg} x^4 - \ldots.\right] \Big| x > -\frac{\pi}{4} \quad (10)$$

$$\sin mx = \cos x^m \left[m \operatorname{tg} x - \binom{m}{3}\operatorname{tg} x^3 + \binom{m}{5}\operatorname{tg} x^5 - \ldots\right] \Big| x < +\frac{\pi}{4} \quad (11)$$

und wenn man $\frac{x}{m}$ statt x schreibt:

$$\cos x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[1 - \binom{m}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^2 + \binom{m}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots.\right] \Big| x > -\frac{m\pi}{4}$$

$$\sin x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[m \operatorname{tg}\frac{x}{m} - \binom{m}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots.\right] \Big| x < -\frac{m\pi}{4}$$

Der erste Theil dieser Gleichungen ist von m unabhängig; folglich muss diess auch mit dem zweiten Theile derselben der Fall sein, woraus sich auf die Möglichkeit schliessen lässt, diese Grösse aus den Gleichungen wegzuschaffen. Zu diesem Behufe bemerken wir, dass diese Gleichungen, sowie jene (4), (5), aus welchen sie abgeleitet wurden, für jeden Werth von m richtig sind, und diese Eigenschaft somit nicht verlieren werden, wenn wir m unendlich zunehmen lassen.

Führen wir nun in den letzten Gleichungen die Binomialcoefficienten statt der Symbole $\binom{m}{2}, \binom{m}{3} \ldots$ ein, so erhalten dieselben, wenn wir in jedem Gliede aus dem Coefficienten $\binom{m}{r}$ den Faktor m^r herausheben und ihn mit $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^r$ zu $\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^r$ vereinigen, folgende Form:

$$\cos x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[1 - \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1.2.3.4}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^4 - \ldots.\right] \qquad (a)$$

$$\sin x = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^m \left[\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right) - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\left(1-\frac{4}{m}\right)}{1.2.3.4.5}\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^5 - \ldots.\right]$$

wo wir nun $m = \infty$ setzen und zu diesem Zwecke die Grenzwerthe von $\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)$ und $\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$ zu bestimmen haben.

Setzt man $\frac{x}{m} = \alpha$, wo nun α einen unendlich abnehmenden Bogen bedeutet, so wird $m \operatorname{tg}\frac{x}{m} = \frac{x}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha = x.\frac{\sin\alpha}{\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}$, somit:

$$\lim\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right) = x.\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}\lim\frac{1}{\cos\alpha};$$

Bekanntlich ist aber für einen Bogen $\alpha < \frac{\pi}{2}$ immer

$$\operatorname{Sin}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha,$$

oder

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

somit auch

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$$

Der Werth von $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ liegt also immer zwischen 1 und $\cos\alpha$; somit ist, da $\lim\cos\alpha = 1$, nach §. 18. *h*,

$$\lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1;$$

da ferner auch $\lim \frac{1}{\cos \alpha} = 1$ ist, so wird $\lim \left(m \operatorname{tg} \frac{x}{m} \right) = x$.

Ferner ist für $\frac{x}{m} = \alpha$:

$$\left(\cos \frac{x}{m} \right)^m = (\cos \alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = (1 - \sin \alpha^2)^{\frac{x}{2\alpha}} = \left\{ (1 - \sin \alpha^2)^{\frac{1}{\sin \alpha^2}} \right\}^{\frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{2}}$$

somit, wenn man zur Grenze für $\alpha = 0$ übergeht, und sich erinnert, dass nach §. 62, Gl. (10), für $x = -1$ und $\beta = \sin \alpha^2$:

$$\lim (1 - \sin \alpha^2)^{\frac{1}{\sin \alpha^2}} = e^{-1}$$

ist, auch

$$\lim \left(\cos \frac{x}{m} \right)^m = (e^{-1})^{1.0.\frac{x}{2}} = 1.$$

Hiemit erhält man nun aus den Gleichungen (a), wenn man noch beachtet, dass die Brüche $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}$ .... in den Coefficienten für $m = \infty$ in Null übergehen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \quad \left| x = -\infty \right. \quad (12)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3 \ldots . 7} + \ldots . \quad \left| x = +\infty \right. \quad (13)$$

zwei für jeden Werth von x convergirende Reihen, welche den Sinus und Cosinus des Bogens x durch diesen Bogen selbst ausdrücken und für die gesammte Analysis von grösster Wichtigkeit sind.

70. Mit Hülfe der Gleichungen (12) und (13) lassen sich nun auch die übrigen trigonometrischen Funktionen ohne Schwierigkeit in Reihen entwickeln, wobei wir dem von Schlömilch (Algebraische Analysis, 2. Aufl. p. 174 ff.) eingehaltenem Gange folgen wollen.

Es ist:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (1 - \cos x)} = \left[1 - (1 - \cos x) \right]^{-1}.$$

Setzt man x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegend voraus, so ist $\cos x$ positiv, somit $(1 - \cos x)$ ein echter Bruch, und die Potenz $[1 - (1 - \cos x)]^{-1}$ lässt sich nach dem binomischen Lehrsatze in eine nach Potenzen von $(1 - \cos x)$ fortschreitende convergirende Reihe entwickeln; man erhält:

$$\sec x = 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + (1-\cos x)^3 + \ldots\ldots$$

Man hat aber nach (12):

$$(1-\cos x) = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^4}{3.4.5.6} - \ldots\ldots\right) \text{ somit:}$$

$$(1-\cos x)^2 = \frac{x^4}{4}\left(1 - \frac{x^2}{2.3} \ldots\ldots\right)$$

$$(1-\cos x)^3 = \frac{x^6}{8}\left(1 - \ldots\ldots\right)$$

folglich, wenn man substituirt und nach Potenzen von x ordnet,

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61.x^6}{6!} + \ldots\ldots \quad \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2} \\ x < +\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (14)$$

wo wir, wie üblich, die Faktorenfolge 1.2.3.4 .... n mit $n!$ bezeichnen.

Wir erfahren durch diese Ableitung jedoch nur die Form der Reihe, während das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der Potenzen von x im Zähler fortschreiten, unbekannt bleibt. Um dieses kennen zu lernen, stellen wir die Reihe (14) unter folgender Form vor:

$$\sec x = T_0 + \frac{T_2.x^2}{2!} + \frac{T_4.x^4}{4!} + \frac{T_6.x^6}{6!} + \ldots\ldots \qquad (15)$$

und substituiren die Reihen (12) und (15) in die identische Gleichung $1 = \sec x.\ \cos x$, so kommt:

$$1 = \left(T_0 + \frac{T_2.x^2}{2!} + \frac{T_4.x^4}{4!} + \ldots\ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\right)$$

und durch wirkliche Multiplikation:

$$1 = T_0 + \left(\frac{T_2}{2!} - \frac{T_0}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{T_4}{4!} - \frac{T_2}{2!}.\frac{1}{2!} + \frac{T_0}{4!}\right)x^4 +$$
$$+ \left(\frac{T_6}{6!} - \frac{T_4}{4!}\frac{1}{2!} + \frac{T_2}{2!}.\frac{1}{4!} - \frac{T_0}{6!}\right)x^6 + \ldots\ldots$$

Nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten folgt nun, dass $T_0 = 1$, und die Coefficienten der Potenzen x^2, x^4,... der Null gleich sein müssen. Bezeichnet man daher mit m eine gerade von 0 verschiedene Zahl, so hat man allgemein nach dem oben deutlich ausgesprochenen Gesetze:

$$\frac{T_m}{m!} - \frac{T_{m-2}}{(m-2)!}.\frac{1}{2!} + \frac{T_{m-4}}{(m-4)!}.\frac{1}{4!} - \frac{T_{m-6}}{(m-6)!}.\frac{1}{6!} \ldots\ldots = 0$$

oder, wenn man mit $m!$ multiplicirt, die dadurch in den Ausdruck eintretenden Binomialcoefficienten mit den bekannten Symbolen bezeichnet und noch beachtet, dass für m gerade, immer $\sin \frac{m\pi}{2} = 0$ ist,

$$T_m - \binom{m}{2} T_{m-2} + \binom{m}{4} T_{m-4} - \binom{m}{6} T_{m-6} + \ldots\ldots = \sin \frac{m\pi}{2} \quad (16)$$

Setzt man hier der Reihe nach statt m: 2, 4, 6, 8 ..., so erhält man, da $T_0 = 1$ bekannt ist, die Coefficienten in den Zählern der aufeinanderfolgenden Glieder der Sekantenreihe (15), nämlich:

$T_2 - T_0 = 0$	somit	$T_2 = T_0 = 1$
$T_4 - 6\,T_2 + T_0 = 0$.		$T_4 = 5$
$T_6 - 15\,T_4 + 15\,T_2 - T_0 = 0$		$T_6 = 61$
$T_8 - 28\,T_6 + 70\,T_4 - 28\,T_2 + T_0 = 0$		$T_8 = 1385$
u. s. w.		u. s. w.

71. Um tg x in eine Reihe zu entwickeln, hat man, wegen tg x = sin x. sec x, wenn man die Reihen (13) und (14) substituirt:

$$\text{tg } x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61\,x^6}{6!} + \ldots\right)$$

$$\text{tg } x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16\,x^5}{5!} + \frac{272\,x^7}{7!} + \ldots\ldots \quad \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2} \\ x < +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (17)$$

wo die angedeuteten Grenzen daher rühren, weil die als Faktor eingeführte Sekantenreihe an dieselben gebunden ist. Die Tangentenreihe hat somit die Form:

$$\text{tg } x = T_1 .\, x + \frac{T_3 .\, x^3}{3!} + \frac{T_5 .\, x^5}{5!} + \frac{T_7 .\, x^7}{7!} + \ldots\ldots \quad (18)$$

Um das Bildungsgesetz der Coefficienten T_1, T_3, T_5, ... kennen zu lernen, substituiren wir in die Gleichung sin x = tang x. cos x die Reihen (12), (13) und (18) und erhalten:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots = \left(T_1\, x + \frac{T_3\, x^3}{3!} + \frac{T_5\, x^5}{5!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right),$$

d. i. nach verrichteter Multiplikation:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = T_1\, x + \left(\frac{T_3}{3!} - \frac{T_1}{2!}\right)x^3 + \left(\frac{T_5}{5!} - \right.$$

$$\left. - \frac{T_3}{3!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_1}{4!}\right)x^5 + \left(\frac{T_7}{7!} - \frac{T_5}{5!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_3}{3!} \cdot \frac{1}{4!} - \frac{T_1}{6!}\right) x^7 + \ldots$$

Hieraus folgt nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten zunächst $T_1 = 1$, und allgemein durch Gleichsetzung der Coefficienten von x^m, wenn m irgend eine ungerade Zahl:

$$\frac{T_m}{m!} - \frac{T_{m-2}}{(m-2)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{m-4}}{(m-4)!} \frac{1}{4!} - \ldots\ldots = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m!};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $m!$ und beachtet, dass, wenn m ungerade, immer $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \sin\frac{m\pi}{2}$, so hat man:

$$T_m - \binom{m}{2} T_{m-2} + \binom{m}{4} T_{m-4} - \binom{m}{6} T_{m-6} + \ldots = \sin\frac{m\pi}{2}. \quad (19)$$

Diese Gleichung liefert sofort die Tangenten-Coefficienten, T_3, T_5 ...., wenn man, da $T_1 = 1$ bekannt ist, statt m der Reihe nach die Zahlen 3, 5, 7, 9, ... substituirt. Es ist bemerkenswerth, dass die Gl. (16) und (19) sich der Form nach nicht unterscheiden; setzt man daher in einer von beiden statt m die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ...., so liefert sie, da $T_0 = 1$ ist, die Zahlen T_1, T_2, T_3, T_4 ...., von welchen jene mit geradem Stellenzeiger die Sekantencoefficienten, jene mit ungeradem die Tangentencoefficienten sind.

72. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ statt $\sin x$ die Reihe (13), so erhält man:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots};$$

der zweite Faktor im zweiten Theile liefert eine Reihe von der Form $1 + Ax^2 + Bx^4 + \ldots$ [§. 40. Aufg. 2], so dass also die Reihe für $\operatorname{cosec} x$ nothwendig die Form $\frac{1}{x} + Ax + Bx^3 + \ldots$ annimmt, was mit der Natur dieser Funktion, welche für $x = 0$ unendlich wird, übereinstimmt. Aus diesem Grunde wollen wir zunächst das Produkt $x \operatorname{cosec} x$ in eine Reihe aufzulösen suchen. Es ist:

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)} = \left[1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)\right]^{-1};$$

setzen wir nun $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) < 1$ voraus, was dann der Fall sein wird, wenn $\frac{\sin x}{x}$ ein positiver echter Bruch ist, somit x zwischen die Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ fällt, so erhalten wir durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 + \ldots \qquad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases}$$

Nun ist:

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{x^2}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{4.\,5} + \frac{x^4}{4.\,5.\,6.\,7} - \ldots\right),$$

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{x^4}{(3!)^2}\left(1 - \frac{x^2}{2.\,5} - \ldots\right),$$

$$\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{(3!)^3}\left(1 - \ldots\right);$$

u. s. w.

Substituirt man diese Ausdrücke, ordnet nach Potenzen von x, und dividirt die ganze Gleichung durch x, so bringt man die Reihe für cosec x ohne Mühe auf die Form:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{3}x}{2!} + \frac{\frac{7}{15}x^3}{4!} + \frac{\frac{31}{21}x^5}{6!} + \ldots\ldots \qquad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{20}$$

oder, wenn man die Coefficienten $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{31}{21}$, ... deren Bildungsgesetz noch unbekannt ist, mit U_1, U_3, U_5 .... bezeichnet:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{U_1 x}{2!} + \frac{U_3 x^3}{4!} + \frac{U_5 x^5}{6!} + \ldots\ldots \qquad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{21}$$

Da endlich $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cos x . \operatorname{cosec} x$, so erhält man durch Multiplikation der Reihen (12) und (20):

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{\frac{2}{3}x}{2!} - \frac{\frac{8}{15}x^3}{4!} - \frac{\frac{32}{21}x^5}{6!} - \ldots. \qquad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{22}$$

oder, wenn wir die Coefficienten $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{32}{21}$, mit V_1, V_3, V_5, ... bezeichnen:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{V_1 x}{2!} - \frac{V_3 x^3}{4!} - \frac{V_5 x^5}{6!} - \ldots. \qquad \begin{cases} x > -\pi \\ x < +\pi \end{cases} \tag{23}$$

Die in den Reihen für cosec x und cotg x vorkommenden Coefficienten U und V lassen sich durch die aus dem vorigen §. bekannten Tangentencoefficienten ausdrücken. Bekanntlich ist

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x^2},$$

oder

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg} x^2}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

somit:

$$\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} x;$$

führt man in diese Gleichung die Reihen (23) und (18) ein, so kommt:

$$-\frac{V_1 x}{2!}-\frac{V_3 x^3}{4!}-\frac{V_5 x^5}{6!}-\ldots\ldots+\frac{2^2 V_1 x}{2!}+\frac{2^4 V_3 x^3}{4!}+\frac{2^6 V_5 x^5}{6!}+\ldots.$$

$$=T_1 x+\frac{T_3 x^3}{3!}+\frac{T_5 x^5}{5!}+\ldots.$$

oder:

$$\left(\frac{2^2 V_1}{2!}-\frac{V_1}{2!}\right)x+\left(\frac{2^4 V_3}{4!}-\frac{V_3}{4!}\right)x^3+\left(\frac{2^6 V_5}{6!}-\frac{V_5}{6!}\right)x^5+\ldots.. =$$

$$=T_1 x+\frac{T_3 x^3}{3!}+\frac{T_5 x^5}{5!}+\ldots$$

somit nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\frac{2^{2n} V_{2n-1}}{(2n)!}-\frac{V_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{T_{2n-1}}{(2n-1)!},$$

d. i. weil $(2n)! = (2n-1)!\,2n$,

$$V_{2n-1}=\frac{2n}{2^{2n}-1}\,T_{2n-1}\,. \tag{24}$$

Ferner hat man:

$$2\operatorname{cosec} 2x=\frac{2}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\sin x^2+\cos x^2}{\sin x\cos x}=\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x,$$

somit:

$$2\operatorname{cosec} 2x-\operatorname{cotg} x=\operatorname{tg} x,$$

und nach Einführung der entsprechenden Reihen:

$$\frac{2^2 U_1 x}{2!}+\frac{2^4 U_3 x^3}{4!}+\frac{2^6 U_5 x^5}{6!}+\ldots..+\frac{V_1 x}{2!}+\frac{V_3 x^3}{4!}+$$

$$+\frac{V_5 x^5}{6!}+\ldots.=T_1 x+\frac{T_3 x^3}{3!}+\frac{T_5 x^5}{5!}+\ldots..;$$

hieraus folgt nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten:

$$\frac{2^{2n} U_{2n-1}}{(2n)!}+\frac{V_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{T_{2n-1}}{(2n-1)!};$$

setzt man nun in diese Gleichung für V_{2n-1} den Werth aus (24), so folgt:

$$U_{2n-1}=\frac{2n}{2^{2n}}\cdot\frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1}\,T_{2n-1}\,. \tag{25}$$

Da nun die Tangentencoefficienten T_1, T_3, T_5, ... sich nach (19) berechnen lassen, so sind durch die Gleichungen (24) und (25) auch die Coefficienten der Cotangenten- und Cosekanten-Reihe gegeben, wenn man daselbst der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ substituirt.

C. Cyklometrische Reihen.

73. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir uns damit beschäftiget, die Funktionen $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. in Reihen aufzulösen, welche nach den steigenden Potenzen des Bogens x fortschreiten; stellen wir uns jetzt die umgekehrte Aufgabe, den Bogen durch Reihen auszudrücken, welche nach den steigenden Potenzen des Sinus, Cosinus u. s. w. dieses Bogens laufen.

Man bezeichnet bekanntlich überhaupt mit arc sin x, arc cos x, arc tg x, u. s. w. den Bogen, zu welchem x als Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. gehört. Da jedem Werthe von x, als Sinus etc. betrachtet, unendlich viele verschiedene Bögen entsprechen, so sind die Symbole arc sin x, arc cos x u. s. w. vieldeutige, und wir werden darunter im Folgenden den kleinsten Bogen verstehen, zu welchem x als Sinus, Cosinus etc. gehört. Unter dieser Voraussetzung folgt aus

$$\left.\begin{array}{l} \text{arc sin } x = z \\ \text{arc cos } x = z \end{array}\right| \begin{array}{l} x = \sin z, \\ x = \cos z \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Dividiren wir Gl. (7) §. 68 durch m, so erhalten wir:

$$\frac{\sin mx}{m} = \sin x - \frac{m^2-1^2}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \ldots.;$$

lassen wir in dieser Gleichung m unendlich klein werden, so kommt:

$$\lim\frac{\sin mx}{m} = \sin x + \frac{1}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{1.3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^5 +$$

$$+ \frac{1.3^2.5^2}{1.2.\ldots.7}\sin x^7 + \ldots.$$

Es ist aber, $mx = \alpha$ gesetzt, wo also α mit m unendlich abnimmt,

$$\lim\frac{\sin mx}{m} = \lim x\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = x\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = x,$$

somit:

$$x = \sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin x^7}{7} + \ldots. \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = +\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (26)$$

oder, wenn man $\sin x = z$, also $x =$ are sin z setzt:

$$\text{arc}\sin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^7}{7} + \ldots. \quad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \quad (27)$$

Da ferner arc sin z + arc cos $z = \frac{\pi}{2}$ ist, wie aus der Bedeutung dieser Symbole unmittelbar erhellt, so hat man:

$$\text{arc cos} z = \frac{\pi}{2} - z - \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} - \cdots \quad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \quad (28)$$

Die Gleichung (11) im §. 69 nimmt, wenn man sie durch m dividirt, die Form an:

$$\frac{\sin mx}{m} = \cos x^m \left[\text{tg}\, x - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3} \text{tg}\, x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \text{tg}\, x^5 - \ldots \right].$$

Lässt man hier m unendlich klein werden, so folgt:

$$x = \text{tg}\, x - \frac{1}{3} \text{tg}\, x^3 + \frac{1}{5} \text{tg}\, x^5 - \frac{1}{7} \text{tg}\, x^7 + \ldots \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = +\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (29)$$

oder, wenn tg $x = z$, also $x =$ arc tg z gesetzt wird:

$$\text{arc tg}\, z = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + \ldots \quad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} . \quad (30)$$

Setzt man in dieser Reihe $\frac{1}{z}$ an die Stelle von z, so kommt:

$$\text{arc tg}\, \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{z^7} + \ldots \quad \begin{cases} z = +1 \\ z = +\infty \end{cases} ;$$

aus der bekannten Relation $\text{tg}\, x = \frac{1}{\text{cotg}\, x}$ folgt aber:

$$\text{arc tg}\, \frac{1}{z} = \text{arc cotg}\, z = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\, z ;$$

folglich wird:

$$\text{arc tg}\, z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{z^7} - \ldots \quad \begin{cases} z = +1 \\ z = +\infty \end{cases} , \quad (31)$$

welche Reihe für Werthe von z, welche die Einheit übersteigen, anzuwenden kommt, da für solche die Reihe (30) nicht mehr convergirt.

Reihen zur Berechnung der Zahl π.

74. Die im vorigen §. entwickelten Reihen bieten ein sehr bequemes Mittel zur Berechnung der Zahl π dar. Man benutzt hiezu am vortheilhaftesten die Reihe (29) oder (30). Setzt man $x = \frac{\pi}{4}$, so erhält man, weil tg $\frac{\pi}{4} = 1$ ist:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

die sogenannte Leibnitz'sche Reihe, welche jedoch ihrer geringen Convergenz halber zur Berechnung von π unbrauchbar ist.

Eine besser convergirende Reihe erhält man für $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, wodurch $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wird; man findet:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right).$$

Das wirksamste Mittel indessen, um stark convergirende Reihen zu erhalten, besteht darin, dass man einen aliquoten Theil von π, z. B. $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{6}$ in zwei oder mehrere Bögen zerlegt, deren Tangenten durch einfache Brüche ausdrückbar sind.

Man setze z. B. $\frac{\pi}{4} = p + q$ und $\operatorname{tg} p = \frac{1}{2}$, so wird:

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

also auch:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3};$$

somit nach (30):

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right),$$

welche Reihe von Euler herrührt, und zur Berechnung sehr bequem ist. Legt man die Rechnung auf 10 Dezimalstellen an, wobei von der ersten Reihe 15, von der zweiten 10 Glieder in Anspruch genommen werden, so erhält man:

$$\pi = 3,1415926532$$

wobei die neun ersten Dezimalstellen richtig sind.

Setzt man $\frac{\pi}{4} = 2p + q$ und $\operatorname{tg} p = \frac{1}{3}$, so wird:

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{2 \operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg} p^2} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2p\right) = \frac{1}{7}$$

und somit:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7};$$

also:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \ldots\right).$$

D. Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens ausgedrückt durch Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen.

75. Man setze:

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = p, \quad \cos x - \sqrt{-1}\sin x = q,$$

so wird:

$$2\cos x = p + q \ldots\ldots (\alpha), \quad 2\sqrt{-1}\sin x = p - q \qquad (\beta)$$

$$pq = \cos x^2 + \sin x^2 = 1. \qquad (\gamma)$$

Erheben wir nun die Gl. (α) zur m^{ten} Potenz, wo m eine positive ganze Zahl bedeuten soll, so erhalten wir.

$$(2\cos x)^m =$$

$$p^m + mp^{m-1}q + \binom{m}{2}p^{m-2}q^2 + \ldots\ldots + \binom{m}{2}p^2q^{m-2} + mpq^{m-1} + q^m,$$

oder mit Rücksicht auf (γ):

$$(2\cos x)^m = p^m + mp^{m-2} + \binom{m}{2}p^{m-4} + \ldots + \binom{m}{2}q^{m-4} + mq^{m-2} + q^m.$$

Zufolge der Moivre'schen Binomialformel hat man aber:

$$p^r = \cos rx + \sqrt{-1}\sin rx, \quad q^r = \cos rx - \sqrt{-1}\sin rx,$$

wodurch die letzte Gleichung in folgende übergeht:

$$(2\cos x)^m =$$

$$\left[\cos mx + m\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + m\cos(m-2)x + \cos mx\right]$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\sin mx + m\sin(m-2x) + \binom{m}{2}\sin(m-4)x + \ldots - \right.$$

$$\left. - \binom{m}{2}\sin(m-4)x - m\sin(m-2)x - \sin mx\right].$$

In jeder der beiden im zweiten Theile stehenden Reihen sind je zwei vom Anfang und Ende gleichweit abstehende Glieder einander gleich, und in der ersten Reihe mit gleichem, in der zweiten mit entgegengesetztem Zeichen versehen.

Ist nun m ungerade, so ist die Anzahl der Glieder in beiden Reihen $= m + 1$ eine gerade, welche sich in der ersten paarweise addiren, in der zweiten paarweise aufheben; daher folgt:

Für m ungerade: $2^{r-1}.\ \cos x^m =$

$$\cos mx + \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \ldots + \binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos x \qquad (32)$$

Ist m gerade, so ist die Anzahl der Glieder in beiden Reihen ungerade und es existirt in diesem Falle ein mittleres Glied; in der ersten Reihe hat dasselbe: $\binom{m}{\frac{m}{2}}\cos(m-n)x = \binom{m}{\frac{m}{2}}$, in der zweiten: $\binom{m}{\frac{m}{2}}\sin(m-m)x = 0$ zum Ausdruck, und da sich die übrigen Glieder der zweiten Reihe wieder paarweise aufheben, so wird:

Für m gerade: $2^{m-1}.\ \cos x^m =$

$$\cos mx + \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} \qquad (33)$$

Erhebt man in gleicher Weise die Gl. (β) zur m^{ten} Potenz, unter m wieder eine positive ganze Zahl verstanden, so erhält man mit Rücksicht auf (γ):

$$(-1)^{\frac{m}{2}}(2\sin x)^m = p^m - \binom{m}{1}p^{m-2} + \binom{m}{2}p^{m-4} - \ldots \pm \pm \binom{m}{2}q^{m-4} \mp \binom{m}{1}q^{m-2} \pm q^m,$$

d. i.

$$(-1)^{\frac{m}{2}}(2\sin x)^m =$$

$$\left[\cos mx - \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \ldots \mp \binom{m}{1}\cos(m-2)x \pm \cos mx\right]$$
$$+\sqrt{-1}\left[\sin mx - \binom{m}{1}\sin(m-2)x + \ldots \pm \binom{m}{1}\sin(m-2)x \mp \sin mx\right]$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Man hat daher:

Für m ungerade: $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,2^{m-1}.\ \sin x^m =$

$$\sin mx - \binom{m}{1}\sin(m-2)x + \binom{m}{2}\sin(m-4)x - \ldots \pm \pm \binom{m}{\frac{m-1}{2}}\sin x \qquad (34)$$

Für m gerade: $(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \sin x^m =$

$$\cos mx - \binom{m}{1} \cos (m-2)\, x + \binom{m}{2} \cos (m-4)\, x - \ldots\ldots \pm$$

$$\pm \left(\binom{m}{\frac{m}{2}} - 1\right) \cos 2x \mp \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} \qquad (35)$$

Man sieht leicht, das diese vier Formeln (32) bis (35) bequem in folgender Weise geschrieben werden können:

Für m gerade oder ungerade:

$$2^{m-1} \cdot \cos x^m = \cos mx + \binom{m}{1} \cos (m-2)\, x + \binom{m}{2} \cos (m-4)\, x + \ldots.$$

Für m ungerade:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \sin x^m = \sin mx - \binom{m}{1} \sin (m-2)\, x +$$

$$+ \binom{m}{2} \sin (m-4)\, x - \ldots.$$

Für m gerade:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{m-1} \sin x^m = \cos mx - \binom{m}{1} \cos (m-2)\, x +$$

$$+ \binom{m}{2} \cos (m-4)\, x - \ldots.$$

welche drei Reihen mit jenem Gliede schliessen, welches, das letzte, unter dem Zeichen Sinus oder Cosinus einen positiven Bogen erhält (wobei ein Bogen $= 0$ als positiv genommen wird), und wo vom letzten Gliede bloss die Hälfte zu nehmen ist, wenn m eine gerade Zahl.

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man:

$$2 \cos x^2 = \cos 2x + 1$$
$$4 \cos x^3 = \cos 3x + 3 \cos x$$
$$8 \cos x^4 = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3$$
$$16 \cos x^5 = \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x$$

u. s. w.

$$-2 \sin x^2 = \cos 2x - 1$$
$$-4 \sin x^3 = \sin 3x - 3 \sin x$$
$$+8 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3$$
$$+16 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x$$

u. s. w.

FÜNFTES KAPITEL.

VON DEN TRANSCENDENTEN FUNKTIONEN MIT IMAGINAEREN VERAENDERLICHEN.

76. Setzen wir in der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \cdots\cdots$$

wo $e = 2,718281\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, $x\sqrt{-1}$ an die Stelle von x, so erhalten wir, wenn der Kürze halber $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird:

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdot\right]$$

woraus durch Vergleichung mit den Reihen (12) und (13) in §. 69 folgt:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \tag{1}$$

Durch Aenderung des Zeichens von x ergiebt sich hieraus:

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x. \tag{2}$$

Wenn man ferner diese beiden Gleichungen einmal addirt und dann subtrahirt, so erhält man:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \tag{3}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \tag{4}$$

Diese vier Gleichungen, von welchen die beiden ersten in die eine

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

zusammengefasst werden können, sind wieder Fundamentalformeln für die gesammte Analysis. Durch sie wird, wie man sieht, ein Zusammenhang zwischen den Exponential- und trigonometrischen Funktionen hergestellt. Mit Hülfe der beiden ersten bringt man die Exponentielle e^x auf die Form $u + vi$, wenn x imaginär wird, während die Gl. (3) und (4) den Sinus und Cosinus eines reellen Bogens x durch Exponentialfunktionen ausdrücken. Dass diese Ausdrücke imaginär ausfallen, liegt in der Natur der Sache, da sin x und cos x als periodische Funktionen von x, deren mögliche Werthe zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen, durch die Exponentielle $e^{\pm x}$ mit reellem Exponenten, welche bei wachsendem x fortwährend zu- oder abnimmt, unmöglich

ausgedrückt werden kann. Obige Gleichungen sind eben nur sogenannte symbolische Gleichungen; setzt man in ihnen statt der Symbole: $\sin x$, $\cos x$, e^{xi}, e^{-xi} dasjenige, was diese Symbole eigentlich bedeuten, nämlich die entsprechenden unendlichen Reihen, so verschwindet das Imaginäre und die Gleichungen werden augenscheinlich identisch.

Bei der Wichtigkeit der Gl. (1) wird es nicht unpassend sein, dieselbe noch auf einem zweiten von der Anwendung der Reihen unabhängigen Wege abzuleiten.

Nach §. 62, Gl. (10) ist:

$$e^z = \lim (1 + \alpha z)^{\frac{1}{\alpha}} \quad [\text{für } \alpha = 0].$$

Setzen wir in dieser Gleichung, welche wir als die analytische Definition der natürlichen Exponentialfunktion e^z betrachten können und deren Ableitung a. a. O. von der Beschaffenheit der Grösse z ganz unabhängig war, $z = y + x\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$e^{y+xi} = \lim (1 + \alpha y + \alpha x . i)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Um diesen Grenzwerth auszumitteln, sei:

$$1 + \alpha y + \alpha x . i = r(\cos q + i \sin q) \qquad (m)$$

so wird:

$$e^{y+xi} = \lim r^{\frac{1}{\alpha}} . \lim \left(\cos \frac{q}{\alpha} + i \sin \frac{q}{\alpha}\right). \qquad (n)$$

Aus (m) folgt aber:

$$1 + \alpha y = r \cos q, \quad \alpha x = r \sin q \qquad (p)$$

somit, wenn man quadrirt und addirt:

$$r = [1 + 2\alpha y + \alpha^2 (x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2}};$$

setzt man nun noch Kürze halber $2\alpha y + \alpha^2 (x^2 + y^2) = \beta$, wo also β eine mit α unendlich klein werdende Grösse ist, so wird:

$$\lim r^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \left\{[1 + 2\alpha y + \alpha^2 (x^2 + y^2)]^{\frac{1}{2\alpha}}\right\} = \lim \left\{[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{\frac{\beta}{2\alpha}}\right\} =$$

$$= \lim \left\{[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)}\right\} = \lim [(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{\lim \left[y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right]};$$

es ist aber:

$$\lim (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e, \quad \lim \left[y + \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right] = y,$$

somit:

$$\lim r^{\frac{1}{\alpha}} = e^y. \qquad (q)$$

Aus den Gl. (p) erhält man ferner durch Division:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha x}{1 + \alpha y},$$

woraus zuvörderst erhellt, dass φ ein mit α unendlich abnehmender Bogen ist. Multipliciren wir diese Gleichung mit der offenbar identischen:

$$\frac{\varphi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi,$$

so erhalten wir:

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{x}{1 + \alpha y},$$

und wenn wir α und somit auch φ unendlich klein werden lassen, wegen $\lim \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1$, $\lim \cos \varphi = 1$, $\lim \frac{x}{1+\alpha y} = x$:

$$\lim \frac{\varphi}{\alpha} = x;$$

hiemit wird nun $\lim \left(\cos \frac{\varphi}{\alpha} + i \sin \frac{\varphi}{\alpha}\right) = \cos x + i \sin x$, welcher Werth, sammt jenem von $\lim r^{\frac{1}{\alpha}}$ aus (q) in (n) substituirt,

$$e^{y+x\sqrt{-1}} = e^y (\cos x + i \sin x) \qquad (5)$$

giebt. Aus dieser, allgemeineren, Gleichung geht die Gl. (1) wieder hervor, wenn man $y = 0$ setzt.

Diese Ergebnisse lassen sich auch leicht auf die Exponentielle a^z übertragen, wo a eine beliebige, jedoch reelle und positive Zahl bedeutet. Denn da dem Begriffe der Logarithmen zufolge $a = e^{la}$ ist, so hat man $a^z = e^{zla}$; setzt man in dieser Gleichung $z = y + xi$, so wird nach (5):

$$a^{y+xi} = e^{yla + xla \cdot i} = e^{yla} [\cos (xla) + i \sin (xla)]$$

und folglich, da $e^{yla} = (e^{la})^y = a^y$ ist:

$$a^{y+xi} = a^y [\cos (xla) + i \sin (xla)]. \qquad (6)$$

Mit Hülfe der Gl. (5) beweist man nun leicht, dass die in der Gleichung $e^u \cdot e^{u'} = e^{u+u'}$ ausgesprochene für reelle Exponenten geltende Eigenschaft auch für imaginäre Exponenten gültig bleibt. Denn zufolge der Gl. (5) ist:

$$\begin{aligned} e^{y+xi} \cdot e^{y'+x'i} &= e^y (\cos x + i \sin x) \cdot e^{y} (\cos x' + i \sin x') \\ &= e^{y+y'} [\cos (x + x') + i \sin (x + x')], \end{aligned}$$

d. i. wenn man für den 2ten Theil die Gl. (5) nochmals von rückwärts in Anspruch nimmt:

$$e^{y+xi} \cdot e^{y'+x'i} = e^{y+y'+(x+x')i}.$$

77. Setzt man in (1) $x + 2r\pi$ an die Stelle von x, wo r eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten soll, so erhält man:

$$\cos x + i \sin x = e^{(x+2r\pi)i}; \tag{7}$$

aus dieser Gleichung folgen, wenn man der Reihe nach statt x die Werthe 0, π und $\frac{\pi}{2}$ setzt, die Relationen:

$$+1 = e^{2r\pi i}, \tag{8}$$

$$-1 = e^{(2r+1)\pi i}, \tag{9}$$

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{4r+1}{2}\pi i}; \tag{10}$$

die letzte dieser Gleichungen führt noch, wenn man beide Theile derselben zur Potenz mit dem Exponenten $\sqrt{-1} = i$ erhebt, auf den merkwürdigen Ausdruck:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{4r+1}{2}\pi};$$

die Grösse: i^i hat daher unendlich viele reelle Werthe, deren einfachster (für $r = 0$) $= e^{-\frac{1}{2}\pi}$ ist.

78. Sind u, v, reelle Grössen, welche der Gleichung $e^u = v$ Genüge leisten, wo $e = 2{,}718\ldots$, so heisst bekanntlich u der natürliche Logarithmus von v. Diese Definition wird unverändert beibehalten, wenn u und somit auch v imaginäre Grössen sind, so dass also die Gleichung

$$e^{y+xi} = p + qi$$

unmittelbar die folgende:

$$y + xi = l(p + qi)$$

nach sich zieht und umgekehrt. Hieraus folgt sogleich, dass die Gleichung $lz + lz' = l(z.\,z')$, so wie alle daraus folgenden Eigenschaften der Logarithmen gültig bleiben, wenn z und z' imaginär werden.

Nehmen wir von beiden Theilen der Gleichungen (8) und (9) des vorigen §. die natürlichen Logarithmen, so erhalten wir:

$$l(+1) = 2r\pi\sqrt{-1} \tag{11}$$

$$l(-1) = (2r+1)\,\pi\sqrt{-1}, \tag{12}$$

wo r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Diese Gleichungen zeigen, dass dem Logarithmus der positiven Einheit unendlich viele Werthe zukommen, welche bis auf einen, $= 0$, welcher dem Werthe $r = 0$ entspricht, sämmtlich imaginär sind. Eben so

hat der Logarithmus von — 1 unendlich viele, jedoch bloss imaginäre Werthe.

Da ferner $+a = (+1).a$, $-a = (-1).a$ ist, wo das a im zweiten Theile dieser Gleichungen den Zahlenwerth der im ersten Theile derselben stehenden Grösse $\pm a$ vorstellt, so hat man:

$$\begin{aligned} l(+a) &= l(a) + l(+1) \\ l(-a) &= l(a) + l(-1), \end{aligned} \qquad (13)$$

woraus mit Rücksicht auf die Gl. (11) und (12) hervorgeht, dass jeder positiven oder negativen Zahl a unendlich viele Logarithmen zugehören; unter diesen befindet sich ein reeller, wenn a positiv ist; ist a negativ, so sind sie sämmtlich imaginär.

Betrachten wir jetzt den Logarithmus einer complexen Zahl. Da

$$y \pm x\sqrt{-1} = (+1)(y \pm x\sqrt{-1})$$

und

$$-y \pm x\sqrt{-1} = (-1)(y \mp x\sqrt{-1}),$$

so hat man:

$$\left.\begin{aligned} l(y \pm x\sqrt{-1}) &= l(y \pm xi) + l(+1) \\ l(-y \pm x\sqrt{-1}) &= l(y \mp xi) + l(-1), \end{aligned}\right\} (m)$$

so dass es also nur darauf ankommt, $l(y \pm xi)$ zu finden, wo y eine reelle positive Zahl bedeutet.

Setzen wir nun:

$$y \pm xi = \varrho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi), \qquad (n)$$

so wird:

$$l(y \pm xi) = l\varrho + l(\cos\varphi \pm i \sin\varphi) = l\varrho + l.e^{\pm\varphi i},$$

d. i.

$$l(y \pm xi) = l\varrho \pm \varphi i;$$

aus (n) folgt aber $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{x}{y}$; somit hat man:

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2+y^2} \pm i \text{ arc tg}\,\frac{x}{y}.$$

Setzt man diesen Werth in (m), so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (11) und (12):

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2+y^2} \pm i \text{ arc tg}\,\frac{x}{y} + 2r\pi i \qquad (14)$$

$$l(-y \pm xi) = l\sqrt{x^2+y^2} \mp i \text{ arc tg}\,\frac{x}{y} + (2r+1)\pi i. \qquad (15)$$

Für $r = 0$ folgt aus (14):

$$l(y \pm xi) = l\sqrt{x^2+y^2} \pm i \text{ arc tg}\,\frac{x}{y} \qquad (16)$$

in welcher Form der Ausdruck des Logarithmus einer imaginären

Zahl gewöhnlich angewendet wird, jedoch nur für positive Werthe von y gültig ist.

79. Setzt man in den Gl. (3) und (4) §. 76, $\alpha + \beta i$ an die Stelle von x, so erhält man:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\alpha i - \beta} + e^{-\alpha i + \beta}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\alpha i - \beta} - e^{-\alpha i + \beta}}{2i};$$

zerlegt man die in den Zählern erscheinenden Exponentialgrössen in Faktoren, setzt also $e^{\alpha i - \beta} = e^{\alpha i} \cdot e^{-\beta}$, u. s. w. und führt für $e^{\alpha i}$, $e^{-\alpha i}$ die Werthe nach Gl. (1) und (2) ein, so erhält man:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha - i \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha, \qquad (17)$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha + i \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha. \qquad (18)$$

Hieraus folgt für $\alpha = 0$:

$$\cos\beta i = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \qquad (19)$$

$$\sin\beta i = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}, \qquad (20)$$

und wenn man diese Werthe in die Formeln (17) und (18) zurücksetzt:

$$\cos(\alpha + \beta i) = \cos\alpha \cdot \cos\beta i - \sin\alpha \sin\beta i, \qquad (21)$$

$$\sin(\alpha + \beta i) = \sin\alpha \cos\beta i + \cos\alpha \sin\beta i. \qquad (22)$$

Mit Hülfe der Gl. (17) und (18) bringt man die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ auf die Form $u + vi$, wenn x imaginär wird; die Gl. (21) und (22) hingegen zeigen, dass die für reelle Werthe der Bögen a, b geltenden Fundamentalformeln der Goniometrie:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

und mit diesen alle andern goniometrischen Formeln auch für imaginäre Werthe der Bögen in Kraft bleiben.

Aus den Gl. (17) und (18) übersieht man sogleich, dass auch die Funktionen arc cos x und arc sin x sich auf die Form $u + vi$ bringen lassen, wenn x imaginär wird. Denn setzt man in (17):

$$\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha = u, \quad \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha = v \qquad (m)$$

so erhält man $\cos(\alpha + \beta i) = u - vi$, woraus

$$\text{arc cos}(u - vi) = \alpha + \beta i$$

folgt, wo nun die reellen Grössen α und β mittelst der Gl. (m) durch u und v ausgedrückt werden können. Dasselbe gilt für $\sin(u + vi)$.

Fasst man die Resultate der vorstehenden Paragraphen zusammen, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass

1) die Funktionen: a^x, lx, sin x, cos x, arc sin x, arc cos x und somit auch die aus diesen zusammengesetzten, sich immer auf die Form $u + vi$ bringen lassen, wenn die Variable x imaginär wird;

2) die wesentlichen Eigenschaften, welche diesen Funktionen für reelle Werthe der Veränderlichen zukommen, unverändert in Geltung bleiben, wenn diese imaginär werden.

Da wir in §. 48 in Bezug auf algebraische Funktionen zu demselben Resultate gelangt sind, so schliessen wir, dass überhaupt jede wie immer gestaltete Funktion imaginärer Veränderlichen auf die Form $u + vi$ gebracht werden kann.

80. Aus den bisher gewonnenen Formeln lassen sich noch andere Gleichungen entwickeln, welche in der Analysis häufige Anwendung finden. So ist klar, dass sich mittelst der Gl. (3) und (4) jede trigonometrische Funktion durch Exponentialgrössen ausdrücken lässt. Man erhält z. B. durch Division derselben:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2xi} - 1}{e^{2xi} + 1}, \tag{23}$$

woraus wieder:

$$e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}, \tag{24}$$

und hieraus, wenn man zu beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$x = \frac{1}{2i} \, l \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x} \tag{25}$$

folgt. Die letztere Gleichung führt, wenn man den Logarithmus nach Gl. (6), §. 64, in eine Reihe entwickelt, wieder auf die Reihe (29), §. 73 zurück.

Setzt man in (25) $\operatorname{tg} x = z$, so wird $x = \operatorname{arc\,tg} z$, somit:

$$\operatorname{arc\,tg}\ z = \frac{1}{2i} \, l \frac{1 + zi}{1 - zi}, \tag{26}$$

und wenn wir hier $zi = -y$, daher $z = \frac{-y}{i} = yi$ setzen:

$$\operatorname{arc\,tg}\, yi = \frac{1}{2i} \, l \frac{1 - y}{1 + y}. \tag{27}$$

Diese und ähnliche Formeln dienen dazu, um von Funktionen der einen Gattung auf Funktionen einer andern Gattung überzugehen. Es ereignet sich sehr häufig, dass ein Ausdruck unter gewissen Umständen

eine imaginäre Form erhält, die jedoch nur scheinbar ist, und mit Hülfe obiger Relationen beseitigt werden kann. Es sei z. B.

$$z = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\, x \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

So lange die Grössen a und b gleiche Zeichen haben, kann der Werth dieses Ausdruckes für jeden Werth von x berechnet werden; giebt man aber z. B. der einen dieser Grössen, etwa b, einen negativen Werth, während a positiv bleibt, so erhält der Ausdruck eine imaginäre Form:

$$z = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{arc\,tg}\, x \sqrt{-\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{ab}.\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,tg}\, x \sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1},$$

hat aber nichtsdestoweniger einen reellen Werth, welcher jedoch aus dieser Form nicht gefunden werden kann. Setzt man aber in Gl. (27) $y = x\sqrt{\frac{b}{a}}$, so findet man:

$$\operatorname{arc\,tg}\, x \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l \frac{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}},$$

welcher Werth in dem letzten Ausdrucke von z substituirt das reelle Resultat:

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l\, \frac{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}$$

liefert.

Eine andere nützliche Anwendung gestatten die Formeln (1) bis (4) bei der Summirung von Reihen, welche nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortlaufen, wenn die Coefficienten der Sinusse oder Cosinusse mit den Coefficienten bekannter Potenzreihen übereinstimmen, indem man die Sinusse oder Cosinusse mittelst der Gleichungen (3) und (4) durch Exponentiellen ausdrückt. Folgende Beispiele werden das Verfahren deutlich machen, und zugleich einige häufig vorkommende Reihenentwickelungen liefern.

1) Die Reihe

$$y = 1 + z\cos\varphi + \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \cos 3\varphi + \ldots.$$

zu summiren. Nun hat man nach (3):

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}),\ \cos 2\varphi = \frac{1}{2}(e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}),\ \text{u. s. w.};$$

setzt man diese Ausdrücke in die gegebene Reihe, so erhält man:

$$2y = \left[1 + ze^{\varphi i} + \frac{1}{1.2}(ze^{\varphi i})^2 + \frac{1}{1.2.3}(ze^{\varphi i})^3 + \ldots.\right]$$
$$+ \left[1 + ze^{-\varphi i} + \frac{1}{1.2}(ze^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{1.2.3}(ze^{-\varphi i})^3 + \ldots..\right];$$

beide Reihen gehen aus der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

hervor, wenn man statt x beziehungsweise $ze^{\varphi i}$ und $ze^{-\varphi i}$ setzt; folglich ist:

$$2y = e^{z \cdot e^{\varphi i}} + e^{z \cdot e^{-\varphi i}} = e^{z(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + e^{z(\cos\varphi - i\sin\varphi)} =$$
$$= e^{z\cos\varphi}\{e^{z\sin\varphi . i} + e^{-z\sin\varphi . i}\} = 2e^{z\cos\varphi} . \cos(z\sin\varphi).$$

Man hat daher:

$$1 + z\cos\varphi + \frac{1}{1.2}z^2\cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3}z^3\cos 3\varphi + \ldots. =$$
$$= e^{z\cos\varphi} . \cos(z\sin\varphi). \qquad (28)$$

Für $z = 1$ folgt hieraus:

$$1 + \cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{1.2} + \frac{\cos 3\varphi}{1.2.3} + \ldots.. = e^{\cos\varphi} . \cos(\sin\varphi). \qquad (29)$$

2) Durch eine ganz ähnliche Rechnung findet man:

$$z\sin\varphi + \frac{z^2}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3}\sin 3\varphi + \ldots. = e^{z\cos\varphi} . \sin(z\sin\varphi) \qquad (30)$$

und für $z = 1$:

$$\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{1.2} + \frac{\sin 3\varphi}{1.2.3} + \ldots.. = e^{\cos\varphi} . \sin(\sin\varphi). \qquad (31)$$

Die Gleichungen (28) bis (31) gelten für jeden Werth von φ und z von $-\infty$ bis $+\infty$. Denn die vorgelegten Reihen wurden dadurch summirt, dass wir in der Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots,$$

welche für jeden Werth von x von $-\infty$ bis $+\infty$ convergirt,

$$ze^{\pm\varphi i} = z(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

an die Stelle von x treten liessen; aus den in §. 53 angeführten Gründen convergiren aber die dadurch entstehenden Reihen für jeden Werth des Modulus z, wobei es auf den Werth von φ nicht weiter ankommt, wodurch die obige Behauptung gerechtfertiget wird.

3) Um die Reihe

$$y = z\sin\varphi + \frac{1}{2}z^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}z^3\sin 3\varphi + \ldots.$$

zu summiren, bringt man sie zunächst durch Umsetzung der Sinusse in Exponentialgrössen auf die Form:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = \left[ze^{\varphi i} + \frac{1}{2}(ze^{\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(ze^{\varphi i})^3 + \ldots\ldots\right]$$
$$-\left[ze^{-\varphi i} + \frac{1}{2}(ze^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(ze^{-\varphi i})^3 + \ldots\ldots\right]$$

Nun ist [§. 63, Gl. 3]:

$$l(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right) \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

somit:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = -\,l(1 - ze^{\varphi i}) + l(1 - ze^{-\varphi i}) =$$
$$= l\frac{1 - ze^{-\varphi i}}{1 - ze^{\varphi i}} = l\frac{1 - z\cos\varphi + iz\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi - iz\sin\varphi}$$
$$= l\frac{1 + i\dfrac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}}{1 - i\dfrac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}},$$

und wenn man auf den im 2ten Theile stehenden Logarithmus Gl. (27) in Anwendung bringt:

$$2\sqrt{-1}\,.\,y = 2\sqrt{-1}\,.\,\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}$$

Man hat also:

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi} = z\sin\varphi + \frac{1}{2}z^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}z^3\sin 3\varphi + \ldots. \qquad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \qquad (32)$$

wobei sich die angesetzten Grenzen auf ähnliche Weise wie oben rechtfertigen lassen.

Hiedurch ist, wie man sieht, die häufig vorkommende Aufgabe gelöst, eine Grösse y, welche durch eine Gleichung von der Form:

$$\operatorname{tg} y = \frac{z\sin\varphi}{1 - z\cos\varphi}$$

gegeben ist, in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den Sinussen der Vielfachen des Bogens φ fortschreitet.

4) Eben so findet man für die Reihe:

$$y = z\cos\varphi - \frac{1}{2}z^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}z^3\cos 3\varphi - \frac{1}{4}z^4\cos 4\varphi + \ldots.$$

$$2y = \left[ze^{\varphi i} - \frac{1}{2}(ze^{\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(ze^{\varphi i})^3 - \ldots\ldots\right]$$
$$+\left[ze^{-\varphi i} - \frac{1}{2}(ze^{-\varphi i})^2 + \frac{1}{3}(ze^{-\varphi i})^3 - \ldots\ldots\right]$$

d. i. mit Rücksicht auf Gl. (2), §. 63:

$$2y = l(1 + ze^{\varphi i}) + l(1 + ze^{-\varphi i})$$
$$= l[1 + z\,(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}) + z^2] = l(1 + 2z\cos\varphi + z^2);$$

folglich:

$$l\sqrt{1 + 2z\cos\varphi + z^2} = z\cos\varphi - \frac{1}{2}z^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}z^3\cos 3\varphi - \ldots. \qquad \begin{cases} z = -1 \\ z = +1 \end{cases} \quad (33)$$

5) Mit Hülfe der Entwickelung (32) lässt sich auch die häufig vorkommende Aufgabe auflösen, wenn eine Gleichung von der Form

$$\operatorname{tg} y = n \operatorname{tg} \varphi$$

gegeben ist, y in eine Reihe zu entwickeln, welche nach Sinussen der Vielfachen des Bogens φ fortschreitet. Denn es ist:

$$\operatorname{tg}(y - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg} y.\operatorname{tg}\varphi} = \frac{(n-1)\operatorname{tg}\varphi}{1 + n\operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{(n-1)\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos\varphi^2 + n\sin\varphi^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n-1)\sin 2\varphi}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi)} = \frac{(n-1)\sin 2\varphi}{(n+1) - (n-1)\cos 2\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{n-1}{n+1}\sin 2\varphi}{1 - \frac{n-1}{n+1}\cos 2\varphi};$$

wendet man nun auf die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(y - \varphi) = \frac{\frac{n-1}{n+1}\sin 2\varphi}{1 - \frac{n-1}{n+1}\cos 2\varphi}$$

die Entwickelung (32) an, so erhält man:

$$y = \varphi + \frac{n-1}{n+1}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\sin 4\varphi + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3\sin 6\varphi + \ldots. \qquad \begin{cases} n = 0 \\ n = \infty \end{cases} \quad (34)$$

SECHSTES KAPITEL.

THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

A. Gleichungen mit einer Unbekannten.

81. Es hat im Allgemeinen keine Schwierigkeit, den Werth anzugeben, welchen eine Funktion von x, $y = f(x)$ für einen bestimmten Werth von x annimmt; es bedarf hiezu nur der Substitution des gegebenen Werthes von x in den Ausdruck $f(x)$, wobei es in vielen Fällen von Vortheil, oft auch nothwendig sein kann, denselben vorher in eine unendliche Reihe umzuformen.

Mit bei weitem grösseren Schwierigkeiten ist im Allgemeinen die umgekehrte Aufgabe verknüpft, nämlich:

den Werth, oder wenn deren mehrere existiren sollten, die Werthe von x zu finden, welche einer gegebenen Funktion von x, $f(x)$ den Werth Null ertheilen, oder mit anderen Worten, welche der Gleichung

$$f(x) = 0$$

Genüge leisten*).

Durch diese Gleichung ist, wenn sie nicht identisch für jeden Werth von x erfüllt ist, welche Voraussetzung jetzt ausgeschlossen bleibt, der Werth von x bestimmt; diesen Werth finden, heisst die Gleichung auflösen. Die Grösse x hat hiebei den Charakter einer Veränderlichen verloren und tritt als Unbekannte auf.

Die Gleichung $f(x) = 0$ wird eine algebraische oder transcendente genannt, je nachdem $f(x)$ eine algebraische oder transcendente Funktion von x ist. — Mit der Theorie der algebraischen Gleichungen, einem der wichtigsten Theile der Analysis, werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen; sie entwickelt eine Reihe der merkwürdigsten Eigenschaften dieser Gleichungen und gründet darauf verschiedene Auflösungsmethoden derselben. Eine Theorie der transcendenten Gleichungen in demselben Sinne besitzen wir nicht, was aus der Natur dieser Gattung von Funktionen und ihrer unendlich mannigfaltigen

*) Anmerkung. Die Aufgabe, einen Werth von x zu finden, für welchen die Funktion $f(x)$ einen beliebigen Werth $= a$ erhält, lässt sich immer auf die oben ausgesprochene zurückführen, wenn man $f(x) - a = \varphi(x)$ setzt, und nun die Gleichung $\varphi(x) = 0$ behandelt.

Form sich erklärt; wohl aber Methoden zur Auflösung derselben, auf deren einfachste wir am geeigneten Orte zu sprechen kommen.

I. ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

82. Eine jede algebraische Gleichung mit einer Unbekannten x kann, indem man die Brüche, in deren Nenner x vorkommt und die Wurzelgrössen, welche x unter dem Wurzelzeichen enthalten, wegschaft, auf die Form:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \quad (1)$$

gebracht werden, und heisst dann geordnet. Der Exponent m der höchsten Potenz von x ist eine positive ganze Zahl und bestimmt den Grad der Gleichung. Die von x unabhängigen Grössen $A_1, A_2, \ldots. A_m$ heissen die Coefficienten der Gleichung und können im Allgemeinen reelle positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale oder auch complexe Zahlen und zum Theil auch $= 0$ sein.

Das in der Gl. (1) links vom Gleichheitszeichen stehende Polynom ist, wie man sieht, eine ganze rationale Funktion von x und wird das Gleichungspolynom genannt und in der Folge häufig der Kürze halber mit $f(x)$ oder X bezeichnet werden. Eine Gleichung vom m^{ten} Grade kann höchstens $m + 1$ Glieder haben und heisst dann eine vollständige; fehlen mehrere Glieder, d. h. sind einige der Coefficienten $= 0$, so nennt man sie unvollständig.

Jeder Werth, welcher für x in das Gleichungspolynom substituirt, dasselbe auf Null reducirt, also der Gl. (1) Genüge leistet, oder sie identisch macht, heisst eine Wurzel der Gleichung.

So ist 5 eine Wurzel der Gleichung $x - 5 = 0$ und zugleich die einzige Wurzel dieser Gleichung vom 1ten Grade. Die Gleichung vom 2ten Grade:

$$x^2 + A_1 x + A_2 = 0$$

hat, wie aus den Elementen bekannt ist, zwei Wurzeln, welche durch die Formel:

$$x = -\frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

gegeben sind. Wir schliessen hieraus, dass eine Gleichung von höherem Grade überhaupt mehrere Wurzeln haben kann. Sie können reell sein, wie in obiger Gleichung $x - 5 = 0$, oder imaginär, wie z. B. die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 2x + 4 = 0$, für welche man $x = 1 \pm \sqrt{-3}$ findet.

Die Wurzeln einer vorgelegten Gleichung bestimmen, heisst die Gleichung auflösen. Die Auflösung der algebraischen Gleichungen eines beliebigen Grades ist das eigentliche Problem dieses Kapitels. Bevor wir jedoch zur Darstellung der zu diesem Zwecke erfundenen Methoden schreiten, müssen wir einige der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften dieser Gleichungen kennen lernen und vor allem die Frage beantworten, ob überhaupt jede Gleichung mit einer Unbekannten eine — wenn auch imaginäre Wurzel — haben müsse.

Anmerkung. Setzt man das Gleichungspolynom $f(x) = y$, und betrachtet x und y als veränderliche Grössen, so kann man nach §. 14 die Funktion $y = f(x)$ construiren, indem man die Werthe von x als Abscissen, jene von $y = f(x)$ als Ordinaten behandelt. So oft die entstehende Curve die Abscissenaxe schneidet, eben so viele reelle Wurzeln hat die Gleichung $f(x) = 0$, und es sind die reellen Wurzeln durch die Abscissen der Durchschnittspunkte gegeben, da für jeden solchen Punkt die Ordinate $y = f(x) = 0$ ist. — Fig. (1) ist [§. 14] die geometrische Darstellung der Funktion:

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3;$$

die Curve schneidet die Abscissenaxe in den drei Punkten a, b, c und die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = 0$ sind demnach:

$$x_1 = Aa = +1{,}8; \quad x_2 = Ab = -0{,}5; \quad x_3 = Ac = -3{,}2,$$

wo die Zahlen genäherte Werthe sind, welche sich ergeben, wenn man die Strecken Aa, Ab, Ac mittelst der angenommenen Längeneinheit $A1$ misst. — Die Curve, auf welche die Construktion der Gleichung:

$$y = x^2 - 2x + 4 = 0$$

führt, schneidet die Abscissenaxe nicht, daher auch dieser Gleichung keine reellen Wurzeln zukommen.

83. Jede Gleichung vom m^{ten} Grade:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

deren Coefficienten beliebige reelle oder imaginäre Grössen sind, hat wenigstens eine Wurzel von der Form $x = p + q\sqrt{-1}$, wo p und q bestimmte reelle Grössen sind, und q auch $= 0$ sein kann.

Beweis. Substituiren wir in dem Gleichungspolynom an die Stelle von x die Grösse $p + q\sqrt{-1}$, wo p und q noch unbestimmte reelle Grössen bezeichnen, so erhalten wir:

$$f(p+q\sqrt{-1}) = (p+q\sqrt{-1})^m + A_1(p+q\sqrt{-1})^{m-1} + \ldots\ldots + A_m. \qquad (2)$$

Entwickelt man die angezeigten Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze, wodurch man eine Anzahl theils reeller, theils imaginärer Glieder erhält, und bezeichnet die Summe aller reellen Glieder mit M, jene der imaginären, unter Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1}$ mit $N\sqrt{-1}$, so nimmt Gl. (2) die Form an:

$$f(p + q\sqrt{-1}) = M + N\sqrt{-1}, \qquad (3)$$

wo M und N offenbar reelle Funktionen von p und q sind. Sei R der Modulus der imaginären Grösse $M + N\sqrt{-1}$, so ist [§. 45]:

$$R = \sqrt{M^2 + N^2}$$

und demnach R ebenfalls eine Funktion von p und q.

Denken wir uns nun den Grössen p und q alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beigelegt und diese Werthe auf alle möglichen Weisen zu zweien combinirt, so wird offenbar auch der Modulus R unendlich viele verschiedene Werthe erhalten, unter welchen — da derselbe immer positiv genommen wird — nothwendig einer der kleinste sein muss. Bezeichnen wir mit p_0 und q_0 jene besonderen Werthe von p und q, welche diesen kleinsten Modulus erzeugen, diesen selbst mit R_0, und setzen wir:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1}) = M_0 + N_0\sqrt{-1} \qquad (4)$$

also:

$$R_0 = \sqrt{M_0^2 + N_0^2} \qquad (5)$$

wo demnach $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ das Resultat der Substitution der Grösse $p_0 + q_0\sqrt{-1}$ in das Gleichungspolynom bezeichnet.

Wir behaupten nun, dass dieser nothwendig existirende kleinste Modulus $R_0 = 0$ sein muss.

Um dieses zu beweisen, werden wir zeigen, dass die Voraussetzung, der kleinste Modulus R_0 sei von der Null verschieden, auf einen Widerspruch führe, indem man nämlich in diesem Falle für x immer einen Werth $p_0 + q_0\sqrt{-1} + z$ substituiren und das z so wählen könnte, dass das Substitutionsresultat einen kleineren Modulus als R_0 bekäme.

In der That, nehmen wir an, der kleinste Modulus R_0 sei nicht $= 0$, so wird auch die Grösse $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ einen von 0 verschiedenen Werth haben; setzen wir also $x = p_0 + q_0\sqrt{-1} + z$, wo z im Allgemeinen von der Form $\lambda + \mu\sqrt{-1}$ ist, so erhalten wir:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = (p_0 + q_0\sqrt{-1} + z)^m + A_1(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z)^{m-1} + \ldots + A_m,$$

und wenn wir die Potenzen entwickeln und nach den steigenden Potenzen von z ordnen:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = T_0 + T_1 z + T_2 z^2 + \ldots + T_{m-1} z^{m-1} + z^m \qquad (6)$$

Setzt man in dieser Gleichung $z = 0$, so kommt:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1}) = T_0,$$

und somit wegen Gl. (5):

$$T_0 = M_0 + N_0 \sqrt{-1};$$

die übrigen Coefficienten $T_1, T_2, \ldots T_{m-1}$ sind ebenfalls Funktionen von p_0, q_0, und der Coefficienten der Gl. (1) und von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, auf deren Werthe es weiter nicht ankommt, und die mit $M_1 + N_1\sqrt{-1}$, $M_2 + N_2\sqrt{-1}$ u. s. w. bezeichnet werden mögen, so dass also die Gl. (6) folgende Form erhält:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = M_0 + N_0\sqrt{-1} + (M_1 + N_1\sqrt{-1})z + \\ + (M_2 + N_2\sqrt{-1})z^2 + \ldots + z^m, \qquad (7)$$

oder, wenn man im zweiten Theile $M_0 + N_0\sqrt{-1}$ als Faktor heraushebt:

$$f(p_0 + q_0\sqrt{-1} + z) = (M_0 + N_0\sqrt{-1})\left\{1 + \frac{M_1 + N_1\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z + \right. \\ \left. + \frac{M_2 + N_2\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z^2 + \ldots + \frac{z^m}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\right\}. \qquad (8)$$

Bezeichnen wir nun mit R' den Modulus des zweiten Theiles dieser Gleichung, mit ϱ den Modulus des Faktors:

$$\left\{1 + \frac{M_1 + N_1\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z + \frac{M_2 + N_2\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z^2 + \ldots + \frac{z^m}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\right\} \qquad (9)$$

so ist, da R_0 der Modulus des andern Faktors $M_0 + N_0\sqrt{-1}$, [nach §. 47]:

$$R' = R_0 . \varrho. \qquad (10)$$

Ueber die Grösse z können wir nach Belieben verfügen; bestimmen wir sie also aus der Gleichung:

$$\frac{M_1 + N_1\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}z = -\varepsilon, \text{ so dass } z = -\varepsilon\frac{M_0 + N_0\sqrt{-1}}{M_1 + N_1\sqrt{-1}}$$

wird, wo ε eine kleine reelle positive Grösse sein soll, und substituiren wir diesen Werth von z in dem Ausdrucke (9), dessen Modulus ϱ ist, so erhält derselbe die Form:

$$1 - \varepsilon + \varepsilon^2 k + \varepsilon^3 k_1 + \varepsilon^4 k_2 + \ldots + \varepsilon^m k_{m-2},$$

wo $k, k_1, k_2, \ldots k_{m-2}$ Coefficienten von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ sind, auf deren Werthe es weiter nicht ankommt.

Bezeichnen wir ferner mit $r, r_1, r_2, \ldots r_{m-2}$ die Moduli dieser Coefficienten, so sind [§. 45]:

$$1 - \varepsilon, \varepsilon^2 r, \varepsilon^3 r_1, \varepsilon^4 r_2, \ldots \varepsilon^m r_{m-2}$$

die Moduli der Grössen:

$$1 - \varepsilon, \varepsilon^2 k, \varepsilon^3 k_1, \varepsilon^4 k_2, \ldots\ldots \varepsilon^m k_{m-2},$$

und man hat, da [§. 47] der Modulus der Summe mehrerer Grössen kleiner als die Summe der Moduli derselben ist,

$$\varrho < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 r + \varepsilon^3 r_1 + \varepsilon^4 r_2 + \ldots + \varepsilon^m r_{m-2}$$

oder:

$$\varrho < 1 - (\varepsilon - \varepsilon^2 r - \varepsilon^3 r_1 - \varepsilon^4 r_2 - \ldots - \varepsilon^m r_{m-2}). \qquad (11)$$

Nun kann man aber [§. 16, k] ε immer so klein wählen, dass:

$$\varepsilon > \varepsilon^2 r + \varepsilon^3 r_1 + \varepsilon^4 r_2 + \ldots\ldots + \varepsilon^m r_{m-2};$$

dann ist aber

$$\varepsilon - \varepsilon^2 r - \varepsilon^3 r_1 - \varepsilon^4 r_2 - \ldots\ldots - \varepsilon^m r_{m-2}$$

eine positive Grösse, folglich wegen (11):

$$\varrho < 1.$$

Ist aber $\varrho < 1$, so ist in Folge der Gl. (10) auch $R' < R_0$.

Es ist aber R' der Modulus des Substitutionsresultates von:

$$x = p_0 + q_0 \sqrt{-1} + z,$$

und nach dem eben bewiesenen kann, wenn R_0 nicht $= 0$ ist, z immer so gewählt werden, dass $R' < R_0$ wird; dann wäre aber R_0 nicht der kleinste Modulus. Die Voraussetzung, dass der kleinste Modulus R_0 von 0 verschieden ist, führt also auf einen Widerspruch; derselbe muss also $= 0$ sein.

Ist aber $R_0 = 0$, so ist auch $R_0^2 = M_0^2 + N_0^2 = 0$, somit, weil die Summe zweier wesentlich positiver Grössen nur dann $= 0$ sein kann, wenn jede für sich der Null gleich ist, auch $M_0 = 0$ und $N_0 = 0$, und folglich auch:

$$M_0 + N_0 \sqrt{-1} = 0;$$

es ist aber $M_0 + N_0 \sqrt{-1}$ das Resultat der Substitution von:

$$x = p_0 + q_0 \sqrt{-1}$$

in die Gl. (1), somit $p_0 + q_0 \sqrt{-1}$ eine Wurzel dieser Gleichung.

Es könnte der Fall eintreten, dass $M_1 + N_1 \sqrt{-1}$ und auf gleiche Weise mehrere Coefficienten der folgenden Potenzen von z in (8) verschwinden. Bedenkt man nun, dass die Coefficienten sämmtlicher Potenzen von z in (8) nicht $= 0$ sein können, weil in diesem Falle

$$f(p_0 + q_0 \sqrt{-1} + z)$$

der constanten Grösse $M_0 + N_0 \sqrt{-1}$ gleich würde, also wegen der Unbestimmtheit von z das Gleichungspolynom $f(x)$ für jeden Werth von x denselben Werth erhielte, was ungereimt ist; so sei

$$\frac{M_n + N_n \sqrt{-1}}{M_0 + N_0 \sqrt{-1}} z^n$$

das erste nicht verschwindende unter den Gliedern des Faktors (9), und man setze:

$$\frac{M_n + N_n\sqrt{-1}}{M_0 + N_0\sqrt{-1}}\, z^n = -\varepsilon^n, \text{ also } z = \varepsilon \sqrt[n]{-\frac{M_0 + N_0\sqrt{-1}}{M_n + N_n\sqrt{-1}}},$$

wo ε abermals eine kleine reelle positive Grösse bedeutet. Substituirt man nun diesen Werth von z in den Faktor (9), so erhält derselbe die Form:

$$1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} k_{n+1} + \varepsilon^{n+2} k_{n+2} + \ldots\ldots + \varepsilon^m . k_m.$$

Bezeichnen wir den Modulus dieser Summe, wie oben, mit ϱ, mit $r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots\ldots r_m$ aber die Moduli der Coefficienten, $k_{n+1}, k_{n+2}, \ldots k_m$, so ist:

$$\varrho < 1 - \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} r_{n+1} + \varepsilon^{n+2} r_{n+2} + \ldots\ldots + \varepsilon^m r_m,$$

wo man nun wieder ε so klein wählen kann, dass das erste Glied ε^n das Zeichen der Reihe bestimmt, und somit $\varrho < 1$ wird. Man kann demnach auch in diesem Falle z so wählen, dass $R' < R_0$ wird, wonach die weiteren oben gezogenen Schlüsse in Kraft bleiben.

84. Ist α eine Wurzel der Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$$

so ist das Gleichungspolynom durch $x - \alpha$ theilbar.

Denn wenn man das Polynom nach den gewöhnlichen Divisionsregeln dividirt, so erhält man bekanntlich zum Quotienten ein ähnliches Polynom vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade:

$$f_1(x) = x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots\ldots + B_{m-1},$$

und wenn ein Rest R bleibt, so kann dieser x nicht enthalten, da der Divisor $x - \alpha$ vom 1sten Grade ist. Es besteht also die identische Gleichung:

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x) + R;$$

setzt man darin $x = \alpha$, so kommt:

$$f(\alpha) = R \qquad (1)$$

und da α eine Wurzel der Gleichung, so ist $f(\alpha) = R = 0$, somit der Rest $= 0$ und $f(x)$ durch $x - \alpha$ theilbar. Der Faktor $(x - \alpha)$ wird Wurzelfaktor genannt.

Die Gl. (1) lehrt zugleich die Beschaffenheit des Restes für den Fall kennen, wenn α keine Wurzel der Gleichung ist; der Rest ist dann jener Werth, welchen das Gleichungspolynom für $x = \alpha$ annimmt.

Da man bei der Auflösung der Gleichungen häufig in die Lage kommt, das Gleichungspolynom durch ein Binom von der Form $x - \alpha$

theilen zu müssen, so wollen wir noch eine Methode entwickeln, welche den Quotienten und Rest mit Leichtigkeit darbietet.

Sei zu diesem Zwecke das gegebene Gleichungspolynom:

$$A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + A_2\, x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m, \qquad (2)$$

wo wir der grösseren Allgemeinheit wegen auch dem ersten Gliede einen Coefficienten beilegen.

Dividirt man dieses Polynom durch $x - \alpha$, so erhält man zum Quotienten:

$$B_0\, x^{m-1} + B_1\, x^{m-2} + B_2\, x^{m-3} + \ldots\ldots + B_{m-2}\, x + B_{m-1}$$

und zum Reste B_m, wo die Grössen B_0, B_1, B_2, ... B_m folgende Werthe haben, wie man durch wirkliche Division leicht findet:

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0\\
B_1 &= A_0\,\alpha + A_1\\
B_2 &= A_0\,\alpha^2 + A_1\,\alpha + A_2\\
B_3 &= A_0\,\alpha^3 + A_1\,\alpha^2 + A_2\,\alpha + A_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B_{m-1} &= A_0\,\alpha^{m-1} + A_1\,\alpha^{m-2} + A_2\,\alpha^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-2}\,\alpha + A_{m-1}\\
B_m &= A_0\,\alpha^m + A_1\,\alpha^{m-1} + A_2\,\alpha^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}\,\alpha + A_m;
\end{aligned}$$

der Rest B_m ist, wie man sieht, das Resultat der Substitution $x = \alpha$ im gegebenen Polynome (2), übereinstimmend mit dem oben Gesagten Das Gesetz, nach welchem die Grössen B gebildet sind, fällt leicht in die Augen, wird aber noch ersichtlicher, wenn man sie in rekurrirender Form darstellt. Substituirt man nämlich den Werth jedes dieser Coefficienten in den Ausdruck des nächstfolgenden, so erhält man:

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0\\
B_1 &= B_0\,\alpha + A_1\\
B_2 &= B_1\,\alpha + A_2\\
B_3 &= B_2\,\alpha + A_3\\
&\ldots\ldots\\
B_{m-1} &= B_{m-2}\,\alpha + A_{m-1}\\
B_m &= B_{m-1}\,\alpha + A_m.
\end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass der erste Coefficient des Quotienten gleich ist dem ersten des Dividendes; jeder folgende, z. B. der r^{te} Coefficient des Quotienten wird aber erhalten, wenn man den vorhergehenden mit α multiplicirt und zu dem Produkte den r^{ten} Coefficienten des Dividendes addirt. Man kann die Zahl α den Operationsfaktor nennen. Bei der Bildung der Coefficienten $B_0 \ldots B_m$ verfährt man am bequemsten nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rl}
 & A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ A_m\\
\alpha] & B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots\ldots\ B_m;
\end{array}$$

man schreibt nämlich die Coefficienten des gegebenen Polynoms der Reihe nach in eine Zeile; unter A_0 kommt $B_0 = A_0$ zu stehen und jede folgende Zahl in der zweiten Zeile wird erhalten, wenn man die vorhergehende mit a multiplicirt und zu dem Produkte die darüberstehende der ersten Zeile addirt.

Beisp. 1. Sei das Polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11$ durch $x - 3$ zu dividiren, so ist $+3$ der Operationsfaktor und man hat nach obigem Schema:

$$1, -2, +5, +7, -11$$
$$3]\ 1, +1, +8, +31, (+82);$$

der Quotient ist daher: $x^3 + x^2 + 8x + 31$, und die in Klammern eingeschlossene Zahl $+82$ ist der Rest $= f(3)$. Hieraus erkennt man zugleich, dass $x = 3$ keine Wurzel der Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11 = 0$$

ist, da das Gleichungspolynom durch $x - 3$ nicht theilbar ist, sondern 82 zum Reste giebt.

Beispiel 2. Man bestimme Quotienten und Rest der Division des Polynoms: $f(x) = 2x^6 - 2x^4 + 12x^3 - 21x - 226530$ durch das Binom $x + 7$. Der Operationsfaktor ist hier -7, und man hat:

$$2, \quad 0, \quad -2, \quad +12, \quad 0, \quad -21, \quad -226530$$
$$-7]\ 2, -14, +96, -660, +4620, -32361, (-3);$$

der Quotient ist also:

$$2x^5 - 14x^4 + 96x^3 - 660x^2 + 4620x - 32361,$$

der Rest $= -3$; zugleich ist -3 das Resultat der Substitution von $x = -7$ im Polynom $f(x)$.

85. Jede Gleichung vom m^{ten} Grade hat m Wurzeln, und weder mehr noch weniger.

Denn es sei α_1 die nach §. 83 der Gleichung:

$$X_m = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \quad (1)$$

nothwendig zukommende Wurzel, so ist das Gleichungspolynom X_m durch $x - \alpha_1$ theilbar und man hat, wenn X_{m-1} den Quotienten vorstellt:

$$X_m = (x - \alpha_1) X_{m-1} = 0 \quad (2)$$

wo, wie aus dem vorigen §. bekannt, X_{m-1} ein dem obigen ganz ähnliches Polynom vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Hieraus erhellt, dass das Gleichungspolynom X_m nicht bloss für $x = \alpha_1$ verschwindet, sondern auch für einen solchen Werth von x, welcher die Gleichung $X_{m-1} = 0$ erfüllt. Ein solcher Werth existirt nothwendig, da das Polynom X_{m-1} von derselben Form ist, wie X_m; er sei α_2, so ist wieder X_{m-1} durch

$x - \alpha_2$ theilbar, und somit, wenn wir den Quotienten vom Grade $(m - 2)$ durch X_{m-2} bezeichnen:

$$X_{m-1} = (x - \alpha_2)\, X_{m-2}. \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt wieder, dass das Polynom X_{m-1} nicht bloss für $x = \alpha_2$ Null wird, sondern auch dann, wenn wir $X_{m-2} = 0$ setzen; sei also α_3 die Wurzel dieser Gleichung, so ist X_{m-2} durch $x - \alpha_3$ theilbar und somit:

$$X_{m-2} = (x - \alpha_3)\, X_{m-3}, \tag{4}$$

wo X_{m-3} den Quotienten bezeichnet, der nothwendig vom Grade $m - 3$ sein wird. Auf dieselbe Weise wird:

$$X_{m-3} = (x - \alpha_4)\, X_{m-4} \tag{5}$$

u. s. w.

und man muss endlich nothwendig auf einen Quotienten X_1 kommen, welcher in Bezug auf x vom ersten Grade ist, also die Form $x + k$ hat, so dass:

$$X_2 = (x - \alpha_{m-1})\, X_1 \tag{6}$$

$$X_1 = x + k = x - \alpha_m \tag{7}$$

wird, wenn man der Gleichförmigkeit wegen $k = -\alpha_m$ setzt. Somit ist, wenn man successive substituirt:

$$\begin{aligned}
X_m &= (x - \alpha_1)\, X_{m-1} = 0 \\
&= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, X_{m-2} = 0 \\
&= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\, X_{m-3} = 0 \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{m-1})\, X_1 = 0 \\
&= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m) = 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) lässt sich daher auch in folgender Form darstellen:

$$X_m = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m) = 0. \tag{8}$$

Da nun dieses Produkt für jeden der m Werthe von

$$x = \alpha_1\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_m$$

verschwindet, so muss dasselbe auch von dem Polynome X_m der Gl. (1) gelten, mit welchem es identisch ist; woraus hervorgeht, dass die Gl. (1) m Wurzeln hat. Ausser diesen m Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ kann aber der Gleichung keine andere Wurzel zukommen; denn wäre β noch eine von den obigen verschiedene Wurzel, so würde man $X_m = (x - \beta)\, X'$ setzen können und demnach wäre mit Rücksicht auf (8):

$$(x - \beta)\, X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_{m-1})(x - \alpha_m),$$

somit, wenn man in dieser Gleichung $x = \beta$ setzt:

$$0 = (\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta - \alpha_3) \ldots\ldots (\beta - \alpha_{m-1})(\beta - \alpha_m),$$

was ungereimt ist, da ein Produkt, von dessen Faktoren keiner $= 0$ ist, nicht 0 werden kann.

Unter den m Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der Gl. (1) können mehrere einander gleich sein; wiewohl dann die Gleichung weniger als m verschiedene Wurzeln besitzt, so spricht man doch auch in diesem Falle, im Einklange mit Gl. (8), der Gleichung m Wurzeln zu, unter denen sich jedoch mehr oder weniger gleiche oder wiederholte Wurzeln befinden.

Beachtet man, dass X_m eine ganze algebraische rationale Funktion von x vom m^{ten} Grade ist, so ergiebt sich noch aus (8) der folgende höchst wichtige Lehrsatz:

Jede algebraische ganze rationale Funktion des m^{ten} Grades kann in m einfache Faktoren vom ersten Grade aufgelöst werden.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Gleichung $X_{m-1} = 0$, welche entsteht, wenn man den aus der Division von X_m durch $x - \alpha_1$ entstehenden Quotienten $= 0$ setzt, alle übrigen Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ der Gl. $X_m = 0$ zu Wurzeln hat.

Zugleich sieht man, dass es sehr leicht ist, eine Gleichung zu bilden, welche gegebene Zahlen zu Wurzeln hat. Die Gleichung z. B. welcher die Wurzeln $+1$, $+2$ und -3 zukommen, ist:

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 + 7x + 6 = 0.$$

86. Das Polynom der Gleichung:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \quad (1)$$

ist eine stetige Funktion von x.

Denn setzen wir in (1) $x + \delta$ statt x, so kommt:

$$f(x + \delta) = A_0 (x + \delta)^m + A_1 (x + \delta)^{m-1} + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1} (x + \delta) + A_m;$$

entwickelt man die Potenzen mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes und ordnet nach den steigenden Potenzen von δ, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$f(x + \delta) = f(x) + f'(x).\delta + f''(x).\delta^2 + f'''(x).\delta^3 + \ldots + f^{(m)}(x).\delta^m \quad (2)$$

wo der Kürze wegen:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1} x + A_m$$

$$f'(x) = \frac{m}{1} A_0 x^{m-1} + \frac{m-1}{1} A_1 x^{m-2} + \frac{m-2}{1} A_2 x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1}$$

$$f''(x) = \frac{m(m-1)}{1.\,2} A_0\, x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2} A_1\, x^{m-3} +$$

$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{1.\,2} A_2\, x^{m-4} + \ldots\ldots + A_{m-2}$$

$$f'''(x) = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3} A_0 x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3} A_1 x^{m-4} +$$

$$+ \ldots\ldots + A_{m-3}$$

u. s. w.

$$f^{(m-1)}(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3\ldots(m-1)} A_0 x +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots 4.3.2.1}{1.2.3.4\ldots(m-1)} A_1 = m\, A_0\, x + A_1$$

$$f^{(m)}(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 4.\,3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3.\,4\ldots m} A_0 = A_0$$

gesetzt ist. Aus (2) folgt nun:

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta \left\{ f'(x) + f''(x).\delta + f'''(x).\delta^2 + \ldots\ldots + f^{(m)}(x).\delta^{m-1} \right\}$$

woraus man ersieht, dass die Aenderung, welche die Funktion $f(x)$ erleidet, wenn sich x um δ ändert, beim unendlichen Abnehmen von δ ebenfalls unendlich klein wird, und zwar für jeden Werth von x, da keine der Funktionen $f'(x), f''(x), \ldots. f^{(m)}(x)$ für irgend einen endlichen Werth von x unendlich wird. Die Funktion $f(x)$ ist somit stetig von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

Das Gesetz, nach welchem die Funktionen $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots. f^{(m)}(x)$ gebildet sind, ist leicht zu übersehen. $f'(x)$ wird aus dem Polynom $f(x)$ gebildet oder abgeleitet (derivirt), indem man jedes Glied mit dem Exponenten von x multiplicirt und den Exponenten sodann um eine Einheit vermindert. Auf dieselbe Art entsteht $f''(x)$ aus $f'(x)$, wenn man noch ausserdem jedes Glied durch 2 dividirt; $f'''(x)$ aus $f''(x)$, wenn man noch jedes Glied durch 3 dividirt; u. s. w. Diese Funktionen heissen aus diesem Grunde auch Ableitungen, abgeleitete oder derivirte Funktionen der Funktion $f(x)$, und zwar $f'(x)$ die 1te, $f''(x)$ die 2te u. s. w.

Ist z. B. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 21x^2 + 12\,x - 32$, so findet man für die abgeleiteten Funktionen der Reihe nach:

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 42x + 12$$
$$f''(x) = 6x^2 - 21x + 21$$
$$f'''(x) = 4x - 7$$
$$f^{IV}(x) = 1$$

Anmerkung. Gewöhnlich pflegt man die Funktionen:

$$f'(x),\ 1.2.f''(x),\ 1.2.3f'''(x),\ \ldots.\ 1.2.3.\ldots.nf^{(n)}(x)$$

die Ableitungen des Polynoms (1) zu nennen, welche Bezeichnung mit Rücksicht auf den in der Differentialrechnung aufgestellten Begriff der Ableitung die richtige ist. Für unseren gegenwärtigen Zweck haben wir jedoch die im Texte gegebene Bezeichnung als einfacher vorgezogen.

Denkt man sich die Funktion $y=f(x)$ geometrisch construirt, so lässt sich auch den abgeleiteten Funktionen eine geometrische Bedeutung abgewinnen; wir wollen diess hier nur für die erste Ableitung $f'(x)$ nachweisen.

Sei in fig. 3 MN ein Theil der Curve, deren Gleichung

$$y=f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m$$

ist, und $AP=x$ irgend ein Werth von x; $PP'=\delta$; so ist:

$$Pm=f(x),\ P'm'=f(x+\delta)=f(x)+\delta f'(x)+\delta^2f''(x)+\ldots+\delta^mf^{(m)}(x)$$

somit, wenn wir mR parallel zu AX ziehen:

$$Rm'=P'm'-Pm=f(x+\delta)-f(x)=\delta f'(x)+\delta^2f''(x)+\ldots+\delta^mf^{(m)}(x),$$

woraus durch Division mit $Rm=\delta$:

$$\frac{Rm'}{Rm}=f'(x)+\delta f''(x)+\ldots.+\delta^{m-1}f^{(m)}(x) \qquad (\alpha)$$

folgt. Ziehen wir die Sekante mm', welche mit der Achse AX den Winkel $mQX=\sigma$ einschliesst, so ist:

$$\operatorname{tg}\sigma=\operatorname{tg}m'mR=\frac{Rm'}{Rm},$$

somit:

$$\operatorname{tg}\sigma=f'(x)+\delta\left\{f''(x)+\delta f'''(x)+\ldots+\delta^{m-2}f^{(m)}(x)\right\} \qquad (\beta)$$

Lässt man nun δ unendlich klein werden, so fällt endlich der Punkt m' mit m zusammen, die Sekante Qmm' geht in die Tangente Tmt am Punkte m der Curve über, und wenn man den Winkel, welchen diese mit der Achse AX einschliesst, mit τ bezeichnet, so erhält man aus (β), zur Grenze übergehend, wegen $\lim \operatorname{tg}\sigma=\operatorname{tg}\tau$:

$$\operatorname{tg}\tau=f'(x);$$

d. h. die erste abgeleitete Funktion $f(x)$ ist der Ausdruck der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die an dem der Abscisse x entsprechenden Punkte der Curve $y=f(x)$ gezogene geometrische Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst.

87. Die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots.+A_m=0 \qquad (1)$$

sind symmetrische Funktionen der Wurzeln, und zwar ist A_1 die Summe aller Wurzeln, mit entgegengesetztem Zeichen genommen; A_2 die Summe aller Combinationen zu zweien, mit ungeändertem Zeichen; A_3 die Summe aller Combinationen zu dreien, mit entgegengesetztem Zeichen

u. s. f.; endlich A_m (das letzte von x freie Glied) die Summe aller Combinationen der Wurzeln zur m^{ten} Classe, also das Produkt derselben und zwar mit ungeändertem oder entgegengesetztem Zeichen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Produkt aller mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Wurzeln.

Betrachten wir, um diesen Satz zu beweisen, zuerst die Gleichung vom zweiten Grade: $x^2 + A_1 x + A_2 = 0$, deren Wurzeln wir mit α_1, α_2, bezeichnen, so ist [nach §. 85] identisch:

$$x^2 + A_1 x + A_2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) x + \alpha_1 \alpha_2,$$

somit, da die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x einander gleich sein müssen, $A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $A_2 = +\alpha_1 \alpha_2$, übereinstimmend mit dem ausgesprochenen Satze.

Eben so finden wir für die Gleichung des 3ten Grades:

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

deren Wurzeln α_1, α_2, α_3 sein mögen:

$$\begin{aligned} x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \\ &= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) x^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \\ &\quad + \alpha_2 \alpha_3) x - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \end{aligned}$$

folglich:

$$A_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),\ A_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3,\ A_3 = -\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass der Satz für eine Gleichung des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades wahr sein müsse, wenn er für eine Gleichung des m^{ten} Grades gilt. In der That, nehmen wir das letztere an, und bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung mit α_1, α_2, α_3, ... α_m, so lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} &x^m - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m) x^{m-1} + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \ldots + \\ &+ \alpha_{m-1} \alpha_m) x^{m-2} - (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \ldots.) x^{m-3} + \ldots + \\ &+ (-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m = 0, \end{aligned}$$

oder, wenn wir Kürze halber mit $\underset{1,m}{C^r}$ die Summe aller Combinationen zur r^{ten} Classe der m Elemente α_1, α_2, α_3, ... α_m bezeichnen:

$$\begin{aligned} x^m - \underset{1,m}{C^1}\, x^{m-1} + \underset{1,m}{C^2}\, x^{m-2} - \underset{1,m}{C^3}\, x^{m-3} + \ldots + (-1)^{m-1} \underset{1,m}{C^{m-1}}\, x + \\ + (-1)^m \underset{1,m}{C^m} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Faktoren $(-1)^{m-1}$, $(-1)^m$ nur zur Bestimmung des Zeichens des Gliedes dienen. Multipliciren wir diese Gleichung mit $x - \alpha_{m+1}$, wodurch dieselbe noch die Wurzel α_{m+1} erhält und in eine Gleichung des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades übergeht, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} - C^1_{1,m}\, x^m + C^2_{1,m}\, x^{m-1} - C^3_{1,m}\, x^{m-2} + \ldots\ldots + \\ \qquad + (-1)^m\, C^m_{1,m}\, x \\ - \alpha_{m+1}\, x^m + \alpha_{m+1}\, C^1_{1,m}\, x^{m-1} - \alpha_{m+1}\, C^2_{1,m}\, x^{m-2} + \ldots\ldots - \\ -(-1)^{m-1}\, \alpha_{m-1}\, C^{m-1}_{1,m}\, x - (-1)^m\, \alpha_{m+1}\, C^m_{1,m} \end{array}\right\} = 0$$

d. i. wenn wir die mit gleichen Potenzen von x behafteten Glieder vereinigen und beachten, dass nach den ersten Sätzen der Combinationslehre:

$$C^1_{1,m} + \alpha_{m+1} = C^1_{1,m+1}, \quad C^2_{1,m} + \alpha_{m+1}\, C^1_{1,m} = C^2_{1,m+1}, \quad C^3_{1,m} + \alpha_{m+1}\, C^2_{1,m} = C^3_{1,m+1}$$

u. s. w.

ist, und dass wir statt $-(-1)^{m-1}$ auch $+(-1)^m$, so wie $+(-1)^{m+1}$ statt $-(-1)^m$ schreiben können:

$$x^{m+1} - C^1_{1,m+1}\, x^m + C^2_{1,m+1}\, x^{m-1} - C^3_{1,m+1}\, x^{m-2} + \ldots\ldots + (-1)^{m+1}\, C^{m+1}_{1,m+1} = 0;$$

die Coefficienten dieser Gleichung vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade, deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m+1}$ sind, befolgen aber genau das in der Gl. (2) des m^{ten} Grades ausgesprochene Bildungsgesetz; unser Satz gilt daher für eine Gl. vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade, wenn er für eine Gleichung vom m^{ten} Grade richtig ist. Da wir nun die Richtigkeit desselben für eine Gleichung vom 2ten und 3ten Grade unmittelbar erprobt haben, so ist hiemit die allgemeine Gültigkeit nachgewiesen.

Es folgt hieraus, dass, wenn in einer Gleichung das zweite Glied fehlt, die Summe der Wurzeln $= 0$ sein muss; fehlt das von x freie Glied, so ist $x = 0$ eine Wurzel der Gleichung.

Die bisher entwickelten Sätze gelten, die Coefficienten der Gleichung mögen reell oder imaginär sein. Wir wollen von nun an dieselben als reell voraussetzen.

88. Wenn eine Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1\, x^{m-1} + A_2\, x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

in welcher sämmtliche Coefficienten reelle Grössen sind, eine imaginäre Wurzel $p + q\sqrt{-1}$ besitzt, so kommt ihr nothwendig auch die Wurzel $p - q\sqrt{-1}$ zu, welche sich von jener bloss durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheidet.

Denn substituirt man in obige Gleichung $x = p + q\sqrt{-1}$, so erhält man ein Resultat von der Form $P + Q\sqrt{-1}$, und es muss, da

$p+q\sqrt{-1}$ der Voraussetzung nach eine Wurzel ist, $P+Q\sqrt{-1}=0$, somit $P=Q=0$ sein. Setzt man aber in derselben Gleichung $x=p-q\sqrt{-1}$, welcher Werth sich von dem früheren nur durch das Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheidet, so wird diess auch bei dem Substitutionsresultate der Fall sein, und dieses demnach $=P-Q\sqrt{-1}$ werden, wo P und Q dieselben Werthe haben, wie oben. Da nun $P=Q=0$, so ist auch $P-Q\sqrt{-1}=0$, somit $p-q\sqrt{-1}$ ebenfalls eine Wurzel der Gleichung.

Ganz auf dieselbe Weise beweist man, dass wenn die Coefficienten reell und rational sind, und $p+q\sqrt{r}$ eine Wurzel der Gleichung ist, unter $\sqrt{r}$ eine irrationale Zahl verstanden, auch $p-q\sqrt{r}$ der Gleichung als Wurzel zukommen müsse.

Die imaginären Wurzeln kommen demnach einer Gleichung immer paarweise zu; je zwei, die sich nur durch das Zeichen des imaginären Theiles unterscheiden, heissen conjugirte Wurzeln. Es folgt daraus, dass eine Gleichung mit reellen Coefficienten nur eine gerade Anzahl imaginärer Wurzeln haben könne; daher muss eine Gleichung von ungerader Ordnung wenigstens eine reelle Wurzel besitzen, oder wenn mehrere, in ungerader Anzahl. Einer Gleichung von gerader Ordnung hingegen kommen reelle Wurzeln immer in gerader Anzahl zu, können aber auch gänzlich fehlen.

Sind $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der Gl. (1), so ist das Gleichungspolynom sowohl durch $x-p-q\sqrt{-1}$ als auch durch $x-p+q\sqrt{-1}$ theilbar, somit auch durch das Produkt:

$$(x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})=(x-p)^2+q^2,$$

welches, wie man sieht, reell vom zweiten Grade ist. Hieraus folgt der wichtige Lehrsatz:

Jede algebraische ganze rationale Funktion $f(x)$ mit reellen Coefficienten kann immer in lauter reelle Faktoren zerlegt werden, die theils vom ersten, theils vom zweiten Grade sein können; jede reelle Wurzel liefert einen Faktor vom 1sten, je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln einen Faktor vom 2ten Grade.

89. Da nach §. 87 das letzte von x freie Glied der Gleichung das Produkt aller mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln ist, und je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln immer ein positives Produkt:

$(p + q\sqrt{-1})\ (p - q\sqrt{-1}) = p^2 + q^2$ geben, so hängt das Zeichen des letzten Gliedes bloss von der Anzahl der positiven Wurzeln ab, und ist + oder —, je nachdem diese Anzahl gerade oder ungerade ist. Hieraus ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

a) Jede Gleichung von ungerader Ordnung hat nothwendig eine reelle Wurzel, deren Zeichen jenem des letzten Gliedes entgegengesetzt ist. Denn nach §. 88 lässt eine solche Gleichung reelle Wurzeln nur in ungerader Anzahl zu. Ist nun das letzte Glied positiv, so müssen die positiven Wurzeln in gerader Anzahl, folglich mindestens eine negative Wurzel existiren; ist aber das letzte Glied negativ, so muss die Gleichung eine ungerade Anzahl positiver Wurzeln, also mindestens eine solche besitzen.

b) Jede Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, hat nothwendig wenigstens zwei reelle Wurzeln, deren eine positiv, die andere negativ ist. Denn das letzte Glied kann nur dadurch negativ werden, dass reelle positive Wurzeln in ungerader Anzahl und mindestens eine solche vorhanden seien; und weil einer Gleichung von gerader Ordnung die reellen Wurzeln in gerader Anzahl zukommen, so müssen daher auch negative Wurzeln in ungerader Anzahl, also mindestens eine solche existiren.

c) Ein gänzlicher Mangel an reellen Wurzeln kann nur dann eintreten, wenn die Gl. von gerader Ordnung und ihr absolutes Glied positiv ist. Wenn sämmtliche Wurzeln imaginär sind, so lässt sich das Polynom in lauter quadratische Faktoren von der Form $(x-p)^2+q^2$ zerlegen, bleibt demnach für jeden reellen Werth von x positiv. Wird also das Polynom einer Gleichung für irgend einen reellen Werth von x negativ, so kann man hieraus mit Sicherheit auf das Vorhandensein reeller Wurzeln schliessen.

90. Wenn man in der Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

— x statt x setzt, so erhält man eine Gleichung $f(-x)=0$, deren Wurzeln den Wurzeln der gegebenen Gleichung numerisch gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind.

Denn sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ die Wurzeln der Gl. (1), so ist:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_m)$$

und folglich, wenn man $-x$ an die Stelle von x setzt:

$f(-x) = (-x-\alpha_1)(-x-\alpha_2)(-x-\alpha_3)\ldots\ldots(-x-\alpha_m)$, welche Gleichung offenbar $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \ldots -\alpha_m$ zu Wurzeln hat. Man überzeugt sich leicht, dass diese Umänderung am einfachsten durch Aenderung des Zeichens jener Glieder bewerkstelligt wird, welche ungerade Potenzen von x enthalten, oder auch, indem man die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Gliedes der Gl. ändert, wobei jedoch die etwa fehlenden Glieder der Gleichung mitgezählt werden müssen.

So hat von den beiden Gleichungen $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = 0$ und $x^3 + 2x^2 - 19x - 20 = 0$ die erste die Wurzeln $+1, -4, +5$; die zweite: $-1, +4, -5$.

91. Wenn in einem vollständigen oder unvollständigen Gleichungspolynome zwei Glieder mit entgegengesetztem Zeichen aufeinanderfolgen, so sagt man, es bestehe an dieser Stelle ein Zeichenwechsel; haben aber zwei benachbarte Glieder gleiche Zeichen, so nennt man dieses eine Zeichenfolge.

Da eine vollständige Gleichung des m^{ten} Grades $m+1$ Glieder hat, so ist in einer solchen Gleichung die Summe aus der Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen $= m$. Aus den in §. 87 entwickelten Ausdrücken der Coefficienten der Gleichung als symmetrischer Funktionen der Wurzeln folgt unmittelbar, dass eine Gleichung, welche nur reelle positive Wurzeln hat, nur Zeichenwechsel und keine Zeichenfolge, eine Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln reell und negativ sind, nur Zeichenfolgen darbieten kann.

Jede Gleichung mit reellen Coefficienten, sie sei vollständig oder nicht, hat höchstens so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel.

Beweis. Es sei $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion von x mit reellen Coefficienten:

$$\varphi(x) = x^m + \ldots + - \ldots - + \ldots + - \ldots - + \ldots + , \quad (1)$$

in welcher wir, da es nur auf die Zeichenstellungen ankommt, auch nur diese ansetzen und das letzte Glied positiv nehmen wollen. Multipliciren wir dieses Polynom mit $x - \alpha$, wo α eine reelle positive Zahl bedeuten soll, so lässt sich zeigen, dass das Produkt $(x-\alpha)\varphi(x)$ mindestens um einen Zeichenwechsel mehr besitzen müsse, als die Funktion $\varphi(x)$.

In der That, verrichten wir die Multiplikation nach den Regeln der Arithmetik, so erhalten wir:

x^m + ... + — ..... — + ... + — ..... — + ... +

x — α

x^{m+1} + ... + — ..... — + ... + — ..... — + ... +

— ..... — — + ... + + — ... — — + ... + + — ... — —

somit: $(x - \alpha)\, q(x) =$

x^{m+1} ± ..... ± — ± .... ± + ± .... ± — ± ..... ± + ± ... ± —

als Produkt, in welchem die doppelten Zeichen andeuten, dass man das Zeichen der entsprechenden Glieder nicht kennt. Betrachtet man nun die Zeichenstellung im Produkte, so bemerkt man, dass auf das erste Glied mit positivem, also bestimmtem Zeichen mehrere Glieder mit unbestimmten Zeichen folgen, auf welche wieder ein Glied mit bestimmtem aber negativem Zeichen folgt; hierauf kommen wieder Glieder mit unbestimmten Zeichen, bis zu dem nächsten Gliede mit bestimmtem Zeichen, welches positiv ist u. s. w. Man sieht also, dass im Produkte die bestimmten Zeichen regelmässig abwechseln und erkennt leicht, dass diess in Folge des Vorganges der Multiplikation nothwendig so sein muss, und dass nicht zwei aufeinanderfolgende mit bestimmten Zeichen versehene Glieder gleichbezeichnet sein können. Vergleicht man ferner die Zeichenstellung im Produkte mit jener im Multiplikand, so bemerkt man, dass jedem Zeichenwechsel in letzterem, ein Glied mit bestimmtem Zeichen im Produkte entspreche. Besitzt also das Polynom $\varphi(x)$ r Zeichenwechsel, so wird das Produkt, da auch das erste und letzte Glied derselben bestimmte Zeichen tragen, nothwendig $r + 2$ Glieder mit bestimmten Zeichen haben, welche regelmässig abwechseln. Nun muss aber von einem Gliede mit bestimmtem Zeichen bis zum nächstfolgenden mindestens ein Zeichenwechsel stattfinden (es können deren auch mehrere in ungerader Anzahl eintreten), indem irgendwo + in — oder umgekehrt übergehen muss; folglich müssen im Produkte mindestens $r + 1$ Zeichenwechsel erscheinen. Hieraus folgt also, dass das Polynom $\varphi(x)$ durch Multiplikation mit dem Faktor $(x - \alpha)$ mindestens Einen Zeichenwechsel gewonnen haben müsse. Der Beweis bleibt ganz derselbe, wenn in dem Polynome $\varphi(x)$ die letzten Glieder negativ sind.

Es seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$ die positiven Wurzeln, i an der Zahl, $-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3, \ldots -\beta_h$ die negativen Wurzeln, endlich $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots, \gamma_{2k}$ die imaginären Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, so ist:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_i)(x + \beta_1)(x + \beta_2) \ldots (x + \beta_h)(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_{2k}),$$

und wenn man:

$(x + \beta_1)(x + \beta_2) \ldots (x + \beta_h)(x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_{2k}) = q(x)$ setzt,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_i) \cdot \varphi(x).$$

Multiplicirt man nun das Polynom $\varphi(x)$ der Reihe nach mit den Faktoren $(x - \alpha_1)$, $(x - \alpha_2)$, ... $(x - \alpha_i)$, so gewinnt es durch jede dieser Multiplikationen mindestens einen Zeichenwechsel und das Produkt $f(x)$ hat daher mindestens um i Zeichenwechsel mehr, als das Polynom $\varphi(x)$. Hieraus folgt also, dass eine Gleichung mindestens so viele Zeichenwechsel als positive Wurzeln besitzen müsse. Kehren wir diesen Satz um, so erhalten wir demnach das folgende Theorem:

I. Eine Gleichung kann nicht mehr positive Wurzeln besitzen, als Zeichenwechsel, wohl aber weniger.

Setzt man in der Gl. $f(x) = 0$, $-x$ an die Stelle von x, so ändern sämmtliche Wurzeln ihr Zeichen [§. 90]; bringt man hiemit den eben bewiesenen Satz in Verbindung, so erhält man folgendes Theorem:

II. Eine Gleichung $f(x) = 0$ kann höchstens so viele negative Wurzeln haben, als die Gleichung $f(-x) = 0$ Zeichenwechsel darbietet.

Ist das Polynom der Gleichung $f(x) = 0$ vollständig, so muss offenbar jedem Zeichenwechsel in $f(x)$ eine Zeichenfolge in $f(-x)$, und jeder Zeichenfolge in $f(x)$ ein Zeichenwechsel in $f(-x)$ entsprechen; mit Rücksicht auf diesen Umstand folgt aus obigen Sätzen das folgende unter dem Namen des Cartesischen oder Harriot'schen Satzes bekannte Theorem:

III. Eine jede *vollständige* Gleichung hat höchstens so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel, und höchstens so viele negative Wurzeln als Zeichenfolgen.

Berücksichtigt man noch, dass in einer vollständigen Gleichung die Summe der Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen dem Ordnungsexponenten der Gleichung, also auch der Anzahl der Wurzeln gleich ist, so gelangt man mit Hülfe des letzten Satzes allsogleich zu Folgendem:

IV. Eine jede *vollständige* Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln *reell* sind, hat eben so viele positive Wurzeln als Zeichenwechsel und eben so viele negative als Zeichenfolgen.

Beispiele: 1) Die Gleichung $f(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^2 + 5 = 0$ enthält 2 Zeichenwechsel, besitzt daher höchstens 2 positive Wurzeln; bildet man daraus die Gl. mit entgegengesetzten Wurzeln $f(-x) = x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 5 = 0$, so hat diese nur 1 Zeichenwechsel, somit höchstens 1 positive, die gegebene Gleichung daher höchstens 1 nega-

tive Wurzel, welche ihr zugleich nothwendig zukommt, da die Gl. von ungerader Ordnung und das letzte Glied positiv ist; [§. 89, *a*]. Daraus schliesst man ferner, dass diese Gleichung mindestens 2, möglicherweise auch 4 imaginäre Wurzeln besitze, in welch letzterem Falle ihr keine positive Wurzel zukäme.

2) Die Gl. $f(x) = x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 21x^3 - 48x^2 + 12x - 20 = 0$ ist eine vollständige mit 5 Zeichenwechseln und 1 Folge, hat daher höchstens 5 positive und höchstens 1 negative Wurzel. Mit Zuziehung des Satzes [§. 89, *b*] kann man daher behaupten, dass diese Gleichung eine, und nur eine negative Wurzel und mindestens eine positive Wurzel habe.

3) Die Gleichung $f(x) = x^7 - 7 = 0$ hat, weil 1 Zeichenwechsel, höchstens 1 positive Wurzel, die ihr aber auch [§. 89, *a*] nothwendig zukommt; da ferner die Gl. $f(-x) = x^7 + 7 = 0$ eines Zeichenwechsels ermangelt, so hat die vorgelegte Gl. keine negative Wurzel; daher sind 6 Wurzeln imaginär.

4) Eben so findet man, dass die Gl. $x^6 + x^4 + x^2 - 3 = 0$ höchstens 1 positive und höchstens 1 negative Wurzel haben könne; da ihr diese ferner nach [§. 89, *b*] nothwendig zukommen, so sind 4 Wurzeln imaginär.

V. Fehlt in einer Gleichung ein Glied zwischen zwei mit gleichen Vorzeichen behafteten Gliedern, so hat die Gl. nothwendig imaginäre Wurzeln. Denn denkt man sich die Gl. dadurch vervollständigt, dass man das fehlende Glied mit dem Coefficienten 0 einfügt, und legt man demselben, da sein Zeichen unbestimmt ist, einmal das Zeichen +, dann das Zeichen — bei, so entstehen an dieser Stelle in dem einen Falle zwei Zeichenwechsel, in dem andern zwei Zeichenfolgen, und es müssten, wenn alle Wurzeln reell wären, zufolge IV zwei Wurzeln zugleich positiv und negativ sein, was unmöglich ist; daher können nicht alle Wurzeln reell sein, und es ist durch das eine fehlende Glied mindestens 1 Paar imaginärer Wurzeln angezeigt.

Fehlt jedoch ein Glied zwischen zwei ungleichbezeichneten Gliedern, so entsteht, man mag sich dieses mit + oder mit — eingeschaltet denken, immer 1 Zeichenwechsel und 1 Zeichenfolge, so dass obiger Widerspruch wegfällt und sämmtliche Wurzeln reell sein können.

In der Gl. des ersten Beispiels fehlt das Glied mit x^3 und x, und zwar ersteres zwischen zwei gleichbezeichneten Gliedern, woraus man auf die Anwesenheit eines Paares imaginärer Wurzeln schliesst. Aus dem fehlenden Gliede in x lässt sich hingegen nichts abnehmen, da die Nachbarglieder ungleiche Zeichen haben.

In der Gl. des vierten Beispieles fehlen die drei Glieder mit den ungeraden Potenzen von x, und zwar die beiden ersten zwischen gleichbezeichneten Gliedern, wodurch zwei Paare imaginärer Wurzeln angezeigt werden, wie wir bereits oben gefunden haben.

Complicirter werden die Regeln für die Grenzen der Anzahl der imaginären Wurzeln, wenn die Gleichung eine oder mehrere Gruppen von fehlenden Gliedern enthält.

II. TRANSFORMATION DER GLEICHUNGEN.

Eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ transformiren, heisst, aus derselben eine neue Gleichung, die transformirte $f(y) = 0$, ableiten, deren Wurzeln gegebene Funktionen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind. Wir werden uns hier auf die einfachsten Transformationen beschränken, welche später bei der Auflösung der Gleichungen Anwendung finden.

92. Die Gleichung:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \quad (1)$$

in eine andere, $f(y) = 0$ zu transformiren, deren Wurzeln sämmtlich um die Grösse a kleiner sind, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Bezeichnet man mit y die Unbekannte oder die Wurzeln der neuen Gleichung, so hat man $y = x - a$, somit $x = y + a$ zu setzen. Die Substitution dieses Werthes von x in die Gl. (1) liefert sofort die transformirte Gleichung:

$$f(y) = A_0 y^m + f^{(m-1)}(a)\, y^{m-1} + f^{(m-2)}(a)\, y^{m-2} + \ldots + f''(a)\, y^2 + f'(a)\, y + f(a) = 0, \quad (2)$$

wo die Coefficienten: $f'(a), f''(a), f'''(a), \ldots f^{(m-1)}(a)$ beziehungsweise die 1ste, 2te, 3te, ... $(m-1)^{\text{te}}$ abgeleitete Funktion von $f(x)$ sind, wenn man darin x durch a ersetzt. Es erhellt diess unmittelbar aus §. 86, da offenbar hier dieselbe Entwickelung vorzunehmen ist, wie dort, indem man nur a statt x und y statt δ schreibt.

Beisp. Die Gleichung $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$, deren Wurzeln $+1, +2, -3, -4$ sind, in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln um 5 kleiner sind.

Man findet:

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24,$	somit	$f(5) = 864$
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 14x - 22$		$f'(5) = 708$
$f''(x) = 6x^2 + 12x - 7$		$f''(5) = 203$
$f'''(x) = 4x + 4$		$f'''(5) = 24$
$f^{IV}(x) = 1$		$f^{IV}(5) = 1$

Die transformirte Gleichung ist daher:

$$y^4 + 24\,y^3 + 203\,y^2 + 708\,y + 864 = 0,$$

deren Wurzeln, wie man sich leicht überzeugt: $-4, -3, -8, -9$ sind.

Da diese Transformation für die Auflösung der Gleichungen von grosser Wichtigkeit ist, so wollen wir ein von Budan herrührendes Verfahren entwickeln, welches die Coefficienten der transformirten Gleichung, $f(a), f'(a), f''(a)$.... mit Leichtigkeit finden lässt. Was zunächst den letzten Coefficienten $f(a)$ betrifft, so ist dieser nichts anderes als das Resultat der Substitution von $x = a$ in das Gleichungspolynom $f(x)$, also nach §. 84, der Rest, welchen man erhält, wenn man $f(x)$ durch $x - a$ dividirt, kann also durch das dort gelehrte Horner'sche Divisionsverfahren leicht gefunden werden. Allein durch dasselbe Verfahren, auf die successiven Quotienten wiederholt angewendet, ergeben sich auch die übrigen Coefficienten, wie folgende Betrachtung zeigt.

Führt man in Gl. (2), welche aus (1) dadurch entstanden ist, dass $x = y + a$ gesetzt wurde, für y wieder seinen Werth $x - a$ ein, so muss offenbar wieder die Gl. (1) zum Vorschein kommen. Es ist daher die Gleichung:

$$f^{(m)}(a)(x-a)^m + f^{(m-1)}(a)(x-a)^{m-1} + f^{(m-2)}(a)(x-a)^{m-2} + \ldots + f''(a)(x-a)^2 + f'(a)(x-a) + f(a) = 0 \qquad (3)$$

identisch mit der Gl. (1), und jedes Resultat, das wir durch irgend ein Verfahren aus (3) ableiten können, muss sich folglich durch dasselbe Verfahren auch aus (1) gewinnen lassen.

Dividirt man aber das Polynom (4), oder was dasselbe sagen will, das Polynom der Gl. (1), durch $(x - a)$, den sich ergebenden Quotienten wieder durch $(x - a)$, den dadurch erhaltenen Quotienten abermals durch $(x - a)$ u. s. w., so sind, wie diess aus der Form des Polynoms (4) sogleich erhellt, die bei diesen successiven Divisionen, $(m+1)$ an der Zahl, sich ergebenden Reste die Grössen:

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots f^{(m)}(a).$$

Wenden wir dieses Verfahren auf das obige Beispiel an, so haben wir durch $x - 5$ wiederholt zu dividiren; der Operationsfaktor ist $+5$, und die Rechnung steht [§. 84.] so:

	1,	+ 4,	− 7,	− 22,	+ 24
+ 5]	1,	+ 9,	+ 38,	+ 168,	(+ 864)
	1,	+ 14,	+ 108,	+(708)	
	1,	+ 19,	(+ 203)		
	1,	(+ 24)			
	(1)				

wo die eingeklammerten Zahlen die Reste sind. Somit ist:
$f(a) = 864, f'(a) = 708, f''(a) = 203, f'''(a) = 24, f^{IV}(a) = 1$
und die transformirte Gleichung heisst:

$$y^4 + 24y^3 + 203y^2 + 708y + 864 = 0$$

wie oben.

Sollen die Wurzeln der Gl. um a vergrössert werden, so hat man nur das Zeichen von a zu vertauschen. Um z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

deren Wurzeln $+1, -2, +3$ sind, in eine andere zu transformiren, deren Wurzeln um 4 grösser sind, hat man durch $x + 4$ zu dividiren; Operationsfaktor ist -4, und es kommt:

$$\begin{array}{rl} & 1, \ -2, \ -5, \ +6 \\ -4] & 1, \ -6, \ +19, (-70) \\ & 1, \ -10, (+59) \\ & 1, \ (-14) \\ & (1) \end{array}$$

Die transformirte Gleichung ist somit $x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0$, deren Wurzeln in der That 5, 2, 7 sind.

Mittelst dieser Transformation kann man aus einer gegebenen Gleichung (1) irgend ein Glied wegschaffen; es genügt hiezu, die Grösse a so zu bestimmen, dass der Coefficient derjenigen Potenz von x, welche in der transformirten Gleichung fehlen soll, $= 0$ werde. Man wird daher diesen Coefficienten, indem man vorläufig a unbestimmt lässt, gleich 0 setzen und dadurch eine Gleichung erhalten, welche den gesuchten Werth von a liefert. Mit Vortheil wird dieses Verfahren jedoch nur auf das zweite Glied angewendet, da die Wegschaffung eines der folgenden Glieder die Auflösung einer höheren Gleichung erfordern würde, wie aus den Ausdrücken der Coefficienten dieser Glieder sogleich erhellt.

Um nun das 2te Glied wegzuschaffen, hat man in Gl. (2) $f^{(m-1)}(a) = 0$ zu setzen, d. i. mit Rücksicht auf die Bedeutung von $f^{(m-1)}(a)$ [§. 86], a aus der Gleichung $m A_0 a + A_1 = 0$ zu bestimmen, woraus

$$a = -\frac{A_1}{m A_0}$$

folgt, und endlich

$$x = y - \frac{A_1}{m A_0}$$

zu setzen.

Um z. B. obige Gleichung $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ vom zweiten Gliede zu befreien, hat man

$$a = -\frac{A_1}{m A_0} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3},$$

und somit:

$$x = y + \frac{2}{3}$$

zu setzen, d. i. die Wurzeln um $\frac{2}{3}$ zu verkleinern; man findet für die transformirte Gleichung:

$$x^3 - \frac{57}{9}x + \frac{56}{27} = 0,$$

deren Wurzeln $\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{7}{3}$ sind.

93. Die Gleichung:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0 \quad (1)$$

soll in eine andere transformirt werden, deren Wurzeln $a$mal so gross sind, als die Wurzeln der Gl. (1).

Ist wieder y das Symbol der Unbekannten in der transformirten Gleichung, so ist $y = ax$, also $x = \frac{y}{a}$. Wird dieser Werth in (1) substituirt, so erhält man:

$$\frac{A_0 y^m}{a^m} + \frac{A_1 y^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{A_2 y^{m-2}}{a^{m-2}} + \ldots\ldots + \frac{A_{m-1} y}{a} + A_m = 0,$$

und wenn man mit a^m multiplicirt:

$$A_0 y^m + A_1 a y^{m-1} + A_2 a^2 y^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} a^{m-1} y + A_m a^m = 0$$

als transformirte Gleichung, welche, wie man sieht, aus (1) entsteht, wenn man die Glieder der Gl. (1) der Reihe nach mit den Gliedern der geometrischen Progression $1, a, a^2, a^3, \ldots\ldots a^m$ multiplicirt, wobei jedoch auf die etwa fehlenden Glieder der Gleichung Rücksicht zu nehmen ist.

Mit Hülfe dieser Transformation kann man das erste Glied der Gl. (1) vom Coefficienten A_0 befreien, ohne dass dadurch die übrigen Coefficienten aufhören, ganze Zahlen zu sein, indem man $a = A_0$ nimmt, weil dann sämmtliche Glieder der Gl. durch A_0 theilbar werden.

Sind mehrere oder alle Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$$

rationale Brüche, so kann man mittelst dieser Transformation eine neue Gleichung ableiten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind und zwar so, dass der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$ bleibt. Wie aus (2) erhellt, wird diess immer erreicht, wenn

man für die Grösse a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämmtlicher Nenner wählt, wiewohl in besonderen Fällen schon ein kleinerer Werth hiezu genügen kann. Um z. B. die Gl.:

$$x^3 - \frac{57}{9}x + \frac{56}{27} = 0$$

[§. 92] von den Brüchen zu befreien, setze man $a = 3$ und hat sofort:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{57}{9} & +\frac{56}{27} \\ 1 & 3 & 9 & 27, \end{array}$$

somit $y^3 - 57y + 56 = 0$ als transformirte Gleichung, deren Wurzeln daher $1, -8, 7$ sind, wie man sich leicht überzeugt.

Auch kann man hiedurch bisweilen die Coefficienten einer gegebenen Gleichung vereinfachen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen ist. Die Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 112x - 208 = 0$$

transformire man in eine andere, deren Wurzeln die Hälfte der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind; es ist also hier $a = \frac{1}{2}$ zu setzen, womit man $x^4 - x^3 - 3x^2 - 14x - 13 = 0$ als transformirte Gl. findet, welche der kleineren Coefficienten wegen leichter zu behandeln ist.

94. Aus Gl. (1) im vorigen §. eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die reciproken Werthe der Gl. (1) sind.

Man hat hier $y = \frac{1}{x}$ zu setzen, folglich $x = \frac{1}{y}$; führt man diesen Werth in die Gl. (1) ein, so erhält man, wenn man sogleich mit y^m multiplicirt:

$$A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \ldots + A_1 y + A_0 = 0,$$

welche Gleichung die verlangte Eigenschaft besitzt, und wie man sieht, aus der gegebenen Gleichung hervorgeht, wenn man die Coefficienten in umgekehrter Ordnung aufeinanderfolgen lässt.

III. VON DEN WIEDERHOLTEN WURZELN DER GLEICHUNGEN.

95. Da die Anwesenheit wiederholter oder gleicher Wurzeln in einer Gleichung bei der Auflösung derselben Schwierigkeiten in den Weg legt, so wollen wir uns nun damit beschäftigen, Mittel aufzusuchen, um dieselben zu entdecken und aus der Gleichung wegzuschaffen.

Es sei α_1, eine der Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

p mal zukommende Wurzel, so ist identisch:

$$f(x) = (x - \alpha_1)^p . F(x), \tag{2}$$

wo $F(x)$ das Produkt der übrigen Wurzelfaktoren vorstellt, welche wir als sämmtlich von einander verschieden voraussetzen wollen. Setzen wir $x + \delta$ an die Stelle von x, so folgt aus (2):

$$f(x + \delta) = (x + \delta - \alpha_1)^p . F(x + \delta). \tag{3}$$

Entwickelt man diese Gleichung, und zwar den Faktor:

$$\{(x - \alpha_1) + \delta\}^p$$

nach dem binomischen Lehrsatze, die Funktionen $f(x + \delta)$ und $F(x + \delta)$ nach §. 86, so erhält man:

$$f(x) + \delta f'(x) + \delta^2 f''(x) + ... + \delta^m f^{(m)}(x) =$$

$$= \left\{(x - \alpha_1)^p + p(x - \alpha_1)^{p-1}\delta + ... + \delta^p\right\}\left\{F(x) + \delta F'(x) + ... + \right.$$

$$\left. + \delta^{m-p} F^{(m-p)}(x)\right\},$$

d. i. wenn man die Multiplikation im 2ten Theile ausführt und nach Potenzen von δ ordnet:

$$f(x) + \delta f'(x) + \delta^2 f''(x) + ... = (x - \alpha_1)^p F(x) +$$

$$+ \delta\left\{(x - \alpha_1)^p F'(x) + p(x - \alpha_1)^{p-1} F(x)\right\} + ...$$

Da diese Gleichung als eine identische für jeden Werth von δ besteht, so müssen nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von δ gleich sein; somit hat man:

$$f'(x) = (x - \alpha_1)^{p-1}[p F(x) + (x - \alpha_1) F'(x)], \tag{4}$$

woraus man erkennt, dass die erste abgeleitete Funktion $f'(x)$ den Faktor $(x - \alpha_1)$, $p - 1$ mal enthält, aber auch nicht öfter, da derselbe der Voraussetzung nach in $F(x)$ nicht vorkommt. Bezeichnet man den in den eckigen Klammern stehenden Ausdruck mit $F_1(x)$, so wird:

$$f'(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} . F_1(x). \tag{5}$$

So wie aber diese Gleichung aus (2) entstand, eben so wird aus (5):

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) = (x - \alpha_1)^{p-2} F_2(x), & \text{hieraus} \\ f'''(x) = (x - \alpha_1)^{p-3} F_3(x), & \text{hieraus} \\ f^{IV}(x) = (x - \alpha_1)^{p-4} F_4(x), & \\ \text{u. s. w.} & \\ \text{endlich} \quad f^{(p-1)}(x) = (x - \alpha_1) . F_{p-1}(x), & \\ f^{(p)}(x) = F_p(x) & \end{array}\right\} \tag{6}$$

sich ergeben. In diesen Gleichungen ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von $F_1(x)$:

$$F_1(x) = pF(x) + (x - \alpha_1) F'(x)$$

somit:

$$F_2(x) = (p-1) F_1(x) + (x - \alpha_1) F_1'(x)$$
$$F_3(x) = (p-2) F_2(x) + (x - \alpha_1) F'_2(x)$$

u. s. w.

$$F_{p-1}(x) = 2F_{p-2}(x) + (x - \alpha_1) F'_{p-2}(x)$$
$$F_p(x) = F_{p-1}(x) + (x - \alpha_1) F'_{p-1}(x),$$

woraus folgt, dass, weil $F(x)$ den Faktor $(x - \alpha_1)$ nicht enthält, keine der Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_p(x)$ diesen Faktor enthalten kann.

Die Gleichungen (5) und (6) lassen somit erkennen, dass die der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ p mal zukommende Wurzel α_1 die Eigenschaft besitzt, sämmtliche derivirte Funktionen, von $f'(x)$ bis einschliesslich zur $(p-1)^{\text{ten}}$, statt x gesetzt, auf 0 zu reduciren, d. h. diese Wurzel ist auch Wurzel der Gleichungen:

$$f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) = 0, \ldots\ldots f^{(p-1)}(x) = 0;$$

und zwar kommt sie der Gl. $f'(x) = 0$ $(p-1)$ mal, der Gl. $f''(x) = 0$ $(p-2)$ mal u. s. w. endlich der Gl. $f^{(p-1)}(x) = 0$ 1 mal zu.

Die Gleichungen (2) und (5) zeigen, dass der Faktor $(x - \alpha_1)^{p-1}$ ein gemeinschaftlicher Theiler der beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ ist. Er ist aber auch der grösste gemeinschaftliche Theiler dieser Funktionen. Diess wird bewiesen sein, wenn man zeigen kann, dass die beiden Funktionen $F(x)$ und $F_1(x) = pF(x) + (x - \alpha_1) F'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, was wieder dann der Fall sein wird, wenn die Funktion $F(x)$ und ihre Derivirte $F'(x)$ eines solchen ermangeln. Setzt man aber in den Gleichungen (2) und (5), $p=1$, d. h. nimmt man an, dass die Gleichung $f(x) = 0$ keine wiederholten Wurzeln besitze, so ist:

$$f(x) = (x - \alpha_1) F(x)$$
$$f'(x) = F(x) + (x - \alpha_1) F'(x).$$

Hieraus sieht man, dass, wenn der Wurzelfaktor $x - \alpha_1$ der Gl. $f(x) = 0$ nur einmal zukommt, dieser Faktor in der ersten derivirten Funktion $f'(x)$ fehlt. Da nun das Produkt $F(x)$ der Voraussetzung nach lauter verschiedene Faktoren enthält, so kann keiner derselben Faktor von $F'(x)$ sein; somit haben $F(x)$ und $F'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler.

Da nun alles, was wir bisher von der wiederholten Wurzel α_1 gezeigt haben, von jeder andern der Gleichung $f(x) = 0$ mehrmals zukommenden Wurzel gelten muss, so gelangen wir leicht zu folgenden Schlüssen:

a) Jede der Gl. $f(x) = 0$ $p$mal zukommende Wurzel α erzeugt in der 1sten derivirten Funktion $f'(x)$ den Faktor $(x - \alpha)^{p-1}$.

b) Die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ haben ausser den von den gleichen Wurzeln herrührenden Wurzelfaktoren keinen gemeinschaftlichen Faktor.

Nehmen wir also jetzt an, die Gleichung $f(x) = 0$ besitze etwa die Wurzel α_1 $p$mal, die Wurzel α_2 $q$mal, die Wurzel α_3 $r$mal, ausser diesen aber nur ungleiche Wurzeln, so ist:

$$f(x) = (x - \alpha_1)^p (x - \alpha_2)^q (x - \alpha_3)^r . F(x)$$
$$f'(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} (x - \alpha_3)^{r-1} . F_1(x).$$

wo $F(x)$ und $F_1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Sucht man daher den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ der zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ und setzt diesen $= 0$, so bietet die Gleichung:

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{p-1} (x - \alpha_2)^{q-1} (x - \alpha_3)^{r-1} = 0$$

sämmtliche wiederholte Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und nur diese dar.

Meistens wird die Funktion $\varphi(x)$ von so niedrigem Grade sein, dass es keine Schwierigkeiten hat, dieselbe durch Auflösung der Gl. $\varphi(x) = 0$ in ihre einfachen Faktoren zu zerlegen. Hätte man z. B. $\varphi(x) = x^2 - 3x + 2$ gefunden, so wäre $\varphi(x) = (x - 1)(x - 2)$, woraus man sofort schliesst, dass die gegebene Gl. die Wurzeln 1 und 2, jede zweimal besitzt. Ist aber das Polynom $\varphi(x)$ von höherem Grade, und überschreiten die Zahlen p, q, r oder auch nur eine derselben die Einheit, so bietet die Auflösung der Gl. $\varphi(x) = 0$ dieselben Schwierigkeiten dar, welche überhaupt die Anwesenheit wiederholter Wurzeln mit sich bringt. Man kann aber leicht Gleichungen darstellen, welche sämmtliche Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$ nur einmal oder auch bloss die gleichen Wurzeln, jede nur einmal enthält. Dividirt man nämlich $f(x)$ durch $\varphi(x)$, bezeichnet den Quotienten mit $\psi(x)$ und setzt $\psi(x) = 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\psi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) . F(x) = 0, \qquad (7)$$

welche offenbar alle Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, jede nur einmal enthält. Sucht man endlich den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi_1(x)$ der Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und setzt diesen $= 0$, so erhält man die Gleichung:

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0 \qquad (8)$$

welche nur die wiederholten Wurzeln der Gleichung, jede nur einmal besitzt. Man kann auch noch $\psi(x)$ durch $\varphi_1(x)$ dividiren; der

Quotient $F(x) = 0$ gesetzt, giebt die der Gleichung nur einmal zukommenden Wurzeln.

Der Ordnungsexponent der Gleichung $\varphi_1(x) = 0$ ist, wie man sieht, der Anzahl der wiederholten Wurzeln gleich; es bleibt dann noch zu entscheiden, wie oft jede derselben der Gleichung angehöre. Wiewohl es keine Schwierigkeiten hat, Gleichungen darzustellen, welchen nur die zweifachen, nur die dreifachen Wurzeln u. s. w. der Gl. $f(x)=0$ zukommen, so ist es doch am einfachsten, diess durch unmittelbare Versuche mit einem beliebigen Verfahren zu entscheiden. Hat man z. B. durch Auflösung der Gl. (8) α_1 als eine wiederholte Wurzel erkannt, so transformire man die Gl. $\varphi(x) = 0$ in eine andere, deren Wurzeln um α_1 kleiner zind; fehlen in der transformirten Gleichung h Endglieder, so kommt diese Wurzel der Gl. $f(x) = 0$ $(h + 1)$mal zu.

Leider macht die sehr weitläufige Rechnung, welche mit der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers $\varphi(x)$ der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ verbunden ist, wenn das Polynom $f(x)$ von etwas höherem Grade und die Coefficienten grössere Zahlen sind, die Anwendung dieser Theorie sehr unbequem. In praktischen Fällen kommt übrigens der Fall gleicher Wurzeln nur selten vor.

IV. UEBER DIE BERECHNUNG SYMMETRISCHER FUNKTIONEN DER WURZELN.

96. Wir haben in §. 87 gesehen, dass die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \quad (1)$$

symmetrische Funktionen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m$ sind, und zwar mit Anwendung der in §. 12 angenommenen Bezeichnung:

$[1] = -A_1$, $[1, 1] = A_2$, $[1, 1, 1] = -A_3$, $[1, 1, 1, 1] = A_4$ u. s. w.

also symmetrische Funktionen der niedrigsten Classe von der ersten angefangen bis zur m^{ten} Ordnung.

Schon hieraus lässt sich schliessen, dass sich auch andere symmetrische Funktionen der Wurzeln, ohne diese selbst zu kennen, durch die Coefficienten der Gleichung werden ausdrücken lassen; in der That kommt den algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten folgende höchst merkwürdige Eigenschaft zu:

Jede symmetrische Funktion der Wurzeln der Gl. (1) kann, ohne diese selbst zu kennen, durch die Coefficienten der Gleichung ausgedrückt werden.

Da bei irrationalen symmetrischen Funktionen offenbar die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen rationale symmetrische Funktionen, ferner bei gebrochenen symmetrischen Funktionen Zähler und Nenner ganze symmetrische Funktionen sein müssen, so können wir uns darauf beschränken, den Beweis des Satzes für ganze rationale Funktionen zu führen und wollen noch folgende Bemerkungen voranschicken.

1) Das Produkt zweier symmetrischer Funktionen ist wieder eine symmetrische Funktion. Denn seien U, V die beiden Faktoren, ihr Produkt $= P$; denken wir uns in den Faktoren irgend eine Vertauschung der Elemente vorgenommen und dieselben neuerdings multiplicirt; sei P' das Produkt, so muss dieses $= P$ sein, da die Faktoren durch die vorgenommene Vertauschung der Elemente sich nicht geändert haben; anderseits muss offenbar P' aus P durch dieselbe Vertauschung hervorgehen, das Produkt P ändert sich also nicht durch diese und eben so wenig durch jede andere beliebige Vertauschung, ist also symmetrisch.

2) Hieraus folgt, dass das Produkt einer beliebigen Anzahl symmetrischer Funktionen, mithin auch jede Potenz mit ganzen Exponenten wieder eine symmetrische Funktion ist. Man übersieht ohne Schwierigkeit, dass eine solche Potenz von symmetrischen Funktionen aus mehreren symmetrischen Funktionen bestehen wird, welche sämmtlich von derselben Ordnung aber von verschiedenen Classen sein werden.

Bilden wir z. B. die zweite Potenz der s. Funktion:

$$[1] = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

wir finden:

$[1]^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = [2] + 2[1, 1]$; es ist also $[1]^2$ durch die zwei sym. Funktionen $[2]$ und $[1, 1]$ ausgedrückt, welche beide von der 2ten Ordnung sind, die zweite aber von niedrigerer Classe als die erste. Eben so findet man für dieselben drei Elemente:

$$[1]^3 = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) + 3(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_2) + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$= [3] + 3[2, 1] + 6[1, 1, 1].$$

Kehren wir nun zu dem Beweise unseres Satzes zurück. Es sei:

$$U = [a, b, c, d, e, \ldots\ldots h, k],$$

die durch die Coefficienten der Gleichung auszudrückende sym. Funktion, welche demnach aus Gliedern von der Form:

$$\alpha_1^a\,\alpha_2^b\,\alpha_3^c\,\alpha_4^d \ldots\ldots \alpha_{n-1}^h\,\alpha_n^k$$

bestehen wird; wir nehmen dabei an, dass die Exponenten $a, b, c, d \ldots h, k$

ganze positive Zahlen, n an der Zahl, und in der Klammer nach ihrer Grösse in absteigender Ordnung geordnet seien, so dass b nicht grösser als a, c nicht grösser als b u. s. w. sei. Bilden wir aus den ersten n Coefficienten der Gleichung das Produkt:

$$P=(-A_1)^{a-b}\,(A_2)^{b-c}\,(-A_3)^{c-d}\,(A_4)^{d-e}\ldots\ldots(\pm A_{n-1})^{h-k}(\mp A_n)^k \quad (2)$$

welches Produkt demnach eine durch die n Anfangscoefficienten der Gleichung gegebene, bekannte Grösse ist.

Durch Substitution der Werthe von A_1, A_2, A_3, ... A_n in das Produkt (2) erhalten wir:

$$P=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^{a-b}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots.)^{b-c}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots.)^{c-d}\times\ldots$$
$$\times(\alpha_1\alpha_2\ldots.\alpha_{n-1}+\ldots.)^{h-k}(\alpha_1\alpha_2\ldots.\alpha_n+\ldots.)^k.$$

Um die Bildung dieses Produktes nach verrichteter Multiplikation leichter zu übersehen, betrachten wir zuerst irgend einen der Faktoren, etwa den ersten; es ist:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_m)^{a-b}=[1]^{a-b}=\alpha_1{}^{a-b}+$$
$$+\binom{a-b}{1}\alpha_1{}^{a-b-1}(\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_m)$$
$$+\binom{a-b}{2}\alpha_1{}^{a-b-2}(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)^2$$
$$+\binom{a-b}{3}\alpha_1{}^{a-b-3}(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)^3$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(\alpha_2+\alpha_3+\ldots.+\alpha_m)^{a-b}$$

oder nach weiterer Entwickelung der Potenzen von $(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_m)$:

$$[1]^{a-b}=\alpha_1{}^{a-b}+\binom{a-b}{1}\left\{\alpha_1{}^{a-b-1}\alpha_2+\alpha_1{}^{a-b-1}\alpha_3+\ldots.\right\}$$
$$+\binom{a-b}{2}\left\{\alpha_1{}^{a-b-2}\alpha_2^2+\alpha_1{}^{a-b-2}\alpha_3^2+\ldots.\right\}$$
$$+2\binom{a-b}{2}\left\{\alpha_1{}^{a-b-2}\alpha_2\alpha_3+\alpha_1{}^{a-b-2}\alpha_2\alpha_4+\ldots.\right\}$$
$$+\binom{a-b}{3}\left\{\alpha_1{}^{a-b-3}\alpha_2^3+\alpha_1{}^{a-b-3}\alpha_3^3+\ldots.\right\}$$

u. s. w.

Wie man sieht, sind die Glieder sämmtlich von der Ordnung $(a-b)$; da ferner der Ausdruck symmetrisch ist, so müssen darin alle Glieder vorkommen, welche durch Vertauschung der Grössen α_1, α_2, α_3, ... α_m aus den Gliedern $\alpha_1{}^{a-b}$, $\alpha_1{}^{a-b-1}\alpha_2$, $\alpha_1{}^{a-b-2}\alpha_2^2$ u. s. w. hervorgehen, folglich die diesen Gliedern entsprechenden sym. Funktionen, so dass demnach kommt:

$$[1]^{a-b} = [a-b] + B_1\,[a-b-1,1] + B_2\,[a-b-2,2] + \\ + B_3\,[a-b-2,1,1] \\ + B_4\,[a-b-3,3] + B_5\,[a-b-3,2,1] + \\ + B_6\,[a-b-3,1,1,1] \\ + B_7\,[a-b-4,4] + \ldots \text{ etc.}$$

Es ist daher der erste Faktor des obigen Produktes eine Summe von mit gewissen Coefficienten behafteten sym. Funktionen, sämmtlich von der $(a-b)^{\text{ten}}$ Ordnung aber verschiedenen Classen, und es ist insbesondere

$$[a-b] = \alpha_1{}^{a-b} + \alpha_2{}^{a-b} + \alpha_3{}^{a-b} + \ldots + \alpha_m{}^{a-b} \qquad (3)$$

jene der höchsten Classe.

Eben so liefert der 2te Faktor eine Reihe sym. Funktionen von der $2(b-c)^{\text{ten}}$ Ordnung und verschiedenen Classen, unter denen die Funktion:

$$[b-c,\ b-c] = \alpha_1{}^{b-c}\,\alpha_2{}^{b-c} + \alpha_1{}^{b-c}\,\alpha_3{}^{b-c} + \ldots + \alpha_{m-1}{}^{b-c}\,\alpha_m{}^{b-c} \qquad (4)$$

jene der höchsten Classe sein wird u. s. w.

Der vorletzte Faktor liefert als sym. Funktion der höchsten Classe von der $(n-1)\ (h-k)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\alpha_1{}^{h-k}\ \alpha_2{}^{h-k}\ \alpha_3{}^{h-k}\ \ldots\ \alpha_{n-2}{}^{h-k}\ \alpha_{n-1}{}^{h-k} + \\ + \alpha_1{}^{h-k}\,\alpha_2{}^{h-k}\,\alpha_3{}^{h-k} \ldots \alpha_{n-2}{}^{h-k}\,\alpha_n{}^{h-k} + \ldots; \qquad (6)$$

Endlich ist unter den symmetrischen Funktionen der nk^{ten} Ordnung, welche aus dem letzten Gliede hervorgehen, jene

$$\alpha_1^k\,\alpha_2^k\,\alpha_3^k \ldots \alpha_{n-1}^k\,\alpha_n^k + \alpha_1^k\,\alpha_2^k\,\alpha_3^k \ldots \alpha_{n-1}^k\,\alpha_{n+1}^k + \ldots \qquad (7)$$

von der höchsten Classe.

Denkt man sich nun alle aus den einzelnen Faktoren des Produktes P hervorgehenden Reihen symmetrischer Funktionen wirklich multiplicirt, so wird dieses aus einem Aggregate sym. Funktionen bestehen, welche sämmtlich von der Ordnung:

$$(a-b) + 2(b-c) + 3(c-d) + 4(d-e) + \ldots + (n-2)(g-h) + \\ + (n-1)(h-k) + nk = a + b + c + d + e + \ldots + h + k = r$$

und verschiedenen Classen sein werden; die sym. Funktion der höchsten Classe des Produktes muss offenbar durch die Multiplikation der sym. Funktionen höchster Classe der Faktoren entstehen; wir erhalten sie daher, wenn wir die Ausdrücke (3) (4), (5), ... (6), (7) mit einander multipliciren; und da jede sym. Funktion durch irgend eines ihrer Glieder gegeben ist, so erhalten wir durch Multiplikation der ersten Glieder der genannten Ausdrücke:

$$\alpha_1^a\ \alpha_2^b\ \alpha_3^c\ \alpha_4^d \ldots \alpha_{n-1}^h\ \alpha_n^k$$

für das 1ste Glied der sym. Funktion der höchsten Classe des Produk-

tes, welche demnach keine andere, als die gesuchte Funktion U ist. Bezeichnen wir demnach die Summe aller übrigen sym. Funktionen der niedrigeren Classen des Produktes mit S, so ist $P = U + S$, woraus

$$U = P - S$$

folgt; hiedurch ist zunächst erwiesen, dass jede ganze rationale sym. Funktion der Wurzeln der Gl. (1) ausgedrückt werden kann durch eine gewisse Anzahl von Anfangscoefficienten der Gleichung und symmetrische Funktionen derselben Ordnung aber niedrigerer Classen.

Hebt man nun aus dem Aggregate sym. Funktionen S jene der höchsten Classe heraus, so kann diese abermals durch Anfangscoefficienten der Gleichung und sym. Funktionen derselben Ordnung, aber niedrigerer Classen ausgedrückt werden und man sieht leicht ein, dass man auf diese Weise fortfahrend, endlich U durch eine gewisse Anzahl Anfangscoefficienten der Gleichung und sym. Funktionen der niedrigsten Classe ausgedrückt haben wird, welche letztere aber nichts anderes als die Coefficienten selbst sind. Hiemit ist aber der aufgestellte Lehrsatz erwiesen.

Der Gang dieses Beweises lässt sich leicht an beliebig gewählten Beispielen verfolgen. Man bilde z. B. die durch das Symbol [2, 1] dargestellte sym. Funktion der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ der Gl. (1). Hier ist $a = 2, b = 1, c = d = \ldots = k = 0$; $n = 2$; wir haben daher das Produkt $P = (-A_1)^{2-1}(A_2)^{1-0}$ zu entwickeln. Es ist aber:

$$\begin{aligned}(-A_1).A_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_3 + \ldots)\\ &= \alpha_1^2\,\alpha_2 + \alpha_1^2\,\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\,\alpha_2^2 + \ldots\\ &\quad + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 + \ldots\end{aligned}$$

Man übersieht auf der Stelle, dass in diesem Produkte keine anderen Glieder vorkommen können, als solche von der Form $\alpha_1^2\,\alpha_2$ und $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ und zwar jedes Glied der 1sten Form nur einmal, jedes der letzteren dreimal; da nun die Summe aller Glieder von der Form: $\alpha_1^2\,\alpha_2$ nichts anderes ist als die Funktion [2, 1], die Summe der Glieder von der Form: $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ aber die sym. Funktion [1, 1, 1] bildet, so ist:

$$-A_1.A_2 = [2, 1] + 3\,[1, 1, 1],$$

folglich, da $[1, 1, 1] = -A_3$ ist:

$$[2, 1] = 3A_3 - A_1\,A_2.$$

2tes Beispiel. Man suche den Werth von [4], d. i. der Summe der 4ten Potenzen der Wurzeln. Wir haben:

$$a = 4,\ b = c = \ldots = k = 0,\ n = 1,$$

somit das Produkt $P = (-A_1)^4$ zu entwickeln.

$$(-A_1)^4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m)^4 =$$
$$= \left\{\begin{matrix}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_m^2 \\ + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_2\alpha_3 + \ldots\end{matrix}\right\}^2$$

Ohne die weitere Potenzirung vorzunehmen, lehrt eine leichte Ueberlegung, dass man erhält:

Glieder von der Form	α_1^4	jedes	1mal
- - - -	$\alpha_1^3\,\alpha_2$	-	4 -
- - - -	$\alpha_1^2\,\alpha_2^2$	-	6 -
- - - -	$\alpha_1^2\,\alpha_2\,\alpha_3$	-	12 -
- - - -	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	-	24 - ,

somit:

$$(-A_1)^4 = [4] + 4\,[3,1] + 6\,[2,2] + 12\,[2,1,1] + 24\,[1,1,1,1],$$

woraus:

$$[4] = A_1^4 - 4\,[3,1] - 6\,[2,2] - 12\,[2,1,1] - 24\,[1,1,1,1]$$

folgt. Auf dieselbe Weise findet man:

aus dem Produkte $(-A_1)^2\,A_2$: $[3,1] = A_1^2\,A_2 - 2\,[2,2] -$
$- 5\,[2,1,1] + 12\,[1,1,1,1]$

- - - $(-A_1)^0\,A_2^2 = A_2^2$: $[2,2] = A_2^2 - 2\,[2,1,1] -$
$- 6\,[1,1,1,1]$

- - - $(-A_1)\,A_2^0\,(-A_3) = (-A_1)\,(-A_3)$: $[2,1,1]$
$= A_1\,A_3 - 4\,[1,1,1,1]$;

endlich ist $[1,1,1,1] = A_4$; somit hat man nach successiver Substitution:

$$[4] = A_1^4 - 4A_1^2\,A_2 + 2A_2^2 + 4A_1\,A_3 - 4A_4.$$

97. Aus dem Gange des Beweises im vorhergehenden §. erhellt, dass in den Ausdruck einer sym. Funktion U der r^{ten} Ordnung nicht mehr als die ersten r Coefficienten der Gleichung: $A_1, A_2, \ldots A_r$ eingehen können, da die folgenden A_{r+1} ... bis A_m schon sym. Funktionen höherer Ordnungen sind.

Hieraus folgt, dass wenn zwei Gleichungen von gleichem oder verschiedenem Grade die r ersten Coefficienten gleich haben, alle möglichen sym. Funktionen der Wurzeln von der 1sten bis einschliesslich zur r^{ten} Ordnung für beide Gleichungen einerlei Werth haben.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Summen gleichnamiger Potenzen der Wurzeln mit ganzem Exponenten (Potenzsummen), welche durch die Symbole [1], [2], [3] u. s. w. bezeichnet sind.

Jede beliebige sym. Funktion der Wurzeln lässt sich durch blosse Potenzsummen derselben ausdrücken.

Denn sei $U = [a, b, c, d, \ldots h, k]$ eine beliebige sym. Funktion der r^{ten} Ordnung, somit $a + b + c + \ldots + k = r$ und n die Anzahl der Exponenten in der Klammer, so besteht dieselbe aus Gliedern von der Form:

$$\alpha_1^a \, \alpha_2^b \, \alpha_3^c \ldots \alpha_{n-1}^h \, \alpha_n^k;$$

bilden wir aber das Produkt:

$$P = [a]\,[b]\,[c]\,\ldots\ldots\,[h]\,[k]$$

wo

$$[a] = \alpha_1^a + \alpha_2^a + \alpha_3^a + \ldots + \alpha_m^a$$

$$[b] = \alpha_1^b + \alpha_2^b + \alpha_3^b + \ldots + \alpha_m^b$$

$$[c] = \alpha_1^c + \alpha_2^c + \alpha_3^c + \ldots + \alpha_m^c$$

u. s. w.

so werden, wie leicht einzusehen, in dem Produkte die Glieder

$$\alpha_1^{\,a+b+c+\ldots+k} = \alpha_1^r \text{ und } \alpha_1^a \, \alpha_2^b \, \alpha_3^c \ldots\ldots \alpha_n^k,$$

somit auch die entsprechenden sym. Funktionen vorkommen, so dass wir die Gleichung haben:

$$[a]\,[b]\,[c]\,\ldots\,[h]\,[k] = [r] + [a, b, c, d, \ldots h, k] + S,$$

woraus folgt:

$$U = [a, b, c, d, \ldots h, k] = [a]\,[b]\,[c]\,\ldots\,[h]\,[k] - [r] - S,$$

wo S ein Aggregat von anderen sym. Funktionen derselben Ordnung ist, auf welche nun dasselbe Verfahren wieder angewendet werden kann.

Beispiel. Es ist die Funktion [3, 2, 1] durch Potenzsummen auszudrücken. Zu diesem Zwecke entwickeln wir das Produkt:

$$[3][2][1] = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$$

$$= \alpha_1^6 + \alpha_1^5 \, \alpha_2 + \alpha_1^4 \, \alpha_2^2 + \alpha_1^3 \, \alpha_2^3 + \alpha_1^3 \, \alpha_2^2 \, \alpha_3 + \ldots \text{ u. s. w.}$$

und haben somit, da Glieder einer anderen Form nicht entstehen können, jedes Glied von der Form $\alpha_1^3 \, \alpha_2^3$ aber sich zweimal bildet:

$$[3]\,[2]\,[1] = [6] + [5, 1] + [4, 2] + 2\,[3, 3] + [3, 2, 1],$$

woraus:

$$[3, 2, 1] = [3]\,[2]\,[1] - [6] - [5, 1] - [4, 2] - 2\,[3, 3] \quad (m)$$

folgt. Ferner ist:

$$[5]\,[1] = (\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \ldots)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots.) = \alpha_1^6 + \alpha_1^5\,\alpha_2 + \ldots.$$
$$= [6] + [5, 1],$$

somit:

$$[5, 1] = [5]\,[1] - [6];$$
$$[4][2] = (\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + \ldots.)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots) = \alpha_1^6 + \alpha_1^4\,\alpha_2^2 + \ldots.$$
$$= [6] + [4, 2],$$

somit: $[4, 2] = [4]\,[2] - [6]$;

$$[3][3] = (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots.)^2 = \alpha_1^6 + \ldots. + 2\alpha_1^3\,\alpha_2^3 + \ldots. =$$
$$= [6] + 2[3, 3],$$

somit:

$$2[3, 3] = [3]\,[3] - [6];$$

folglich, wenn man in (m) substituirt:

$$[3, 2, 1] = [3]\,[2]\,[1] - [5]\,[1] - [4]\,[2] - [3]^2 + 2[6].$$

Der folgende §. wird uns die Mittel liefern, die Potenz-Summen der Wurzeln mit Leichtigkeit zu berechnen.

98. Multipliciren wir die Gleichung:

$$A_0\,x^m + A_1\,x^{m-1} + A_2\,x^{m-2} + A_3\,x^{m-3} + \ldots.. + A_{m-1}\,x + A_m = 0, \qquad (1)$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_m$ sein mögen, mit x^r, so erhalten wir:

$$A_0\,x^{m+r} + A_1\,x^{m+r-1} + A_2\,x^{m+r-2} + \ldots. + A_{m-1}\,x^{r+1} + A_m\,x^r = 0. \qquad (2)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung werden dieselben sein, wie jene der Gl. (1); durch Substitution derselben in (2) erhalten wir daher die identischen Gleichungen:

$$A_0\,\alpha_1^{m+r} + A_1\alpha_1^{m+r-1} + A_2\alpha_1^{m+r-2} + \ldots.. + A_{m-1}\alpha_1^{r+1} + A_m\alpha_1^r = 0$$
$$A_0\,\alpha_2^{m+r} + A_1\alpha_2^{m+r-1} + A_2\alpha_2^{m+r-2} + \ldots. + A_{m-1}\alpha_2^{r+1} + A_m\alpha_2^r = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_0\alpha_m^{m+r} + A_1\alpha_m^{m+r-1} + A_2\alpha_m^{m+r-2} + \ldots. + A_{m-1}\alpha_m^{r+1} + A_m\alpha_m^r = 0$$

durch deren Addition sich folgende Gleichung ergiebt:

$$A_0[m+r] + A_1[m+r-1] + A_2[m+r-2] + \ldots. + A_{m-1}[r+1] + A_m[r] = 0, \qquad (I)$$

welche sofort in rekurrirender Form die sym. Funktion $[m+r]$, d. i. die Summe der $(m+r)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln darbietet, wenn die Werthe der niedrigeren Potenzsummen bis zur r^{ten} herunter gegeben sind.

Setzt man in (I) $r = 0$, so erhält man, da

$$[0] = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 + \ldots. + \alpha_m^0 = m$$

ist:

$$A_0[m] + A_1[m-1] + A_2[m-2] + A_3[m-3] + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1}[1] + m\,A_m = 0. \qquad \text{(II)}$$

Diese Gleichung liefert $[m]$, d. i. die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gl. (1) vom m^{ten} Grade, wenn die niedrigeren Potenzsummen gegeben sind, so dass es also nur noch auf diese ankommt.

Setzt man nun in (II) der Reihe nach $m = 2, 3, 4, \ldots$ so ergeben sich Ausdrücke, welche der Reihe nach die Summe der 2ten, 3ten, 4ten .... Potenzen der Wurzeln von Gleichungen beziehungsweise des 2ten, 3 , 4ten .... Grades darstellen, deren Coefficienten vom ersten angefangen, der Reihe nach mit jenen der Gl. (1) übereinstimmen, welche Ausdrücke aber nach dem im Eingange des vorigen §. Gesagten auch allgemein für die Gl. (1) gelten müssen. Substituiren wir also in (II) der Reihe nach $1, 2, 3, 4, \ldots m$ statt m, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} A_0[1] + A_1 = 0 \\ A_0[2] + A_1[1] + 2A_2 = 0 \\ A_0[3] + A_1[2] + A_2[1] + 3A_3 = 0 \\ A_0[4] + A_1[3] + A_2[2] + A_3[1] + 4A_4 = 0 \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ A_0[m] + A_1[m-1] + A_2[m-2] + \ldots\ldots + A_{m-1}[1] \\ \qquad + m\,A_m = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

aus welchen Gleichungen die Funktionen $[1]$, $[2]$, $[3]$ u. s. w. successive berechnet werden können. An die letzte derselben schliesst sich unmittelbar die Gl. (I) an, wenn in derselben für r der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 .... gesetzt werden. Die Formeln (III) sind unter dem Namen des Newton'schen Satzes bekannt.

99. Lassen wir die Coefficienten der Gleichung:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0 \qquad (1)$$

in umgekehrter Ordnung aufeinanderfolgen, so sind nach §. 94 die Wurzeln der neuen Gleichung:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0 \qquad (2)$$

die reziproken Werthe der Wurzeln der Gl. (1), somit:

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3} \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_m},$$

oder auch:

$$\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \ldots\ldots \alpha_m^{-1}.$$

Wendet man daher die Formeln des vorigen §. auf die Gl. (2) an, so geben dieselben unmittelbar die Summen der reciproken Potenzen, oder der Potenzen mit negativen ganzen Exponenten der Wurzeln der Gl. (1). Bezeichnet man diese daher mit:

$$[-1] = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_m} = \alpha_1^{-1} + \alpha_2^{-1} + \alpha_3^{-1} + \\ + \ldots + \alpha_m^{-1},$$

$$[-2] = \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_m^2} = \alpha_1^{-2} + \alpha_2^{-2} + \alpha_3^{-2} + \\ + \ldots + \alpha_m^{-2},$$

so gehen die Formeln (III), (II), (I) in folgende über:

$$A_m [-1] + A_{m-1} = 0$$
$$A_m [-2] + A_{m-1} [-1] + 2A_{m-2} = 0$$
$$A_m [-3] + A_{m-1} [-2] + A_{m-2} [-1] + 3A_{m-3} = 0$$

u. s. w.

$$A_m [-m] + A_{m-1} [-(m-1)] + A_{m-2} [-(m-2)] + \ldots + \\ + A_1 [-1] + m A_0 = 0$$
$$A_m [-(m+r)] + A_{m-1} [-(m+r-1)] + A_{m-2} [-(m+r-2)] + \\ + \ldots + A_1 [-(r+1)] + A_0 [-r] = 0,$$

welche zur Berechnung der Werthe der Summe der reciproken Potenzen der Wurzeln der Gl. (1) dienen.

V. AUFLOESUNG DER ALLGEMEINEN GLEICHUNGEN DES DRITTEN UND VIERTEN GRADES, DER RECIPROKEN UND BINOMISCHEN GLEICHUNGEN.

100. Unter allgemeinen Gleichungen verstehen wir solche, deren Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ allgemeine, durch Buchstaben vorgestellte Zahlengrössen sind. Die Wurzeln derselben sind nothwendig Funktionen der Coefficienten und es besteht das Problem der Auflösung einer solchen Gleichung in der Herstellung eines geschlossenen Ausdruckes von der Form:

$$x = f(A_1, A_2, A_3, \ldots A_m)$$

welcher jede der m Wurzeln aus den Coefficienten finden lässt. Da man aber im Allgemeinen nicht angeben kann, welche von den m Wurzeln man haben will, so muss obiger Ausdruck nothwendig die Eigenschaft haben, sämmtliche Wurzeln zu liefern, wozu erfordert wird, dass dieser Ausdruck m verschiedener Werthe fähig sei. Ein Beispiel hiezu giebt uns die schon aus den Elementen bekannte Gleichung des 2ten Grades: $x^2 + A_1 x + A_2 = 0$, für welche man:

$$x = -\frac{A_1}{2} + \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

findet, ein Ausdruck, welcher, da jede Quadratwurzel sowohl positiv als negativ genommen werden kann, sofort beide Wurzeln der Gleichung darbietet. Solche Wurzelformen lassen sich jedoch, nach Ruffini's und Abel's Untersuchungen, nur noch für allgemeine Gleichungen des 3ten und 4ten Grades aufstellen; und allgemeine Gleichungen, welche den 4ten Grad übersteigen, gestatten nur in besonderen Fällen eine weitere Behandlung, wo schon aus dem Baue der Gleichung ein Schluss auf die Natur der Wurzeln gezogen werden kann, wie z. B. bei den reciproken, binomischen, trinomischen und einigen anderen Gleichungen.

a) Gleichungen des dritten Grades.

101. Jede Gleichung vom dritten Grade (cubische Gl.) hat gehörig geordnet die Form $x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$ .... (1) und lässt sich durch Wegschaffung des zweiten Gliedes, indem man:

$$x = y - \frac{A_1}{3}$$

setzt, auf die Form:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

bringen; die Wurzeln dieser Gleichung, jede um $\frac{A_1}{3}$ vermindert, sind sofort die Wurzeln der Gl. (1).

Um die Gl. (2) aufzulösen, setzen wir $y = u + v$, wo u und v noch unbestimmte Grössen bedeuten. Man hat nun:

$$y^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 3uv\,(u + v) + u^3 + v^3,$$

oder wenn man statt $u + v$ wieder y schreibt:

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0, \qquad (3)$$

eine Gleichung, welche mit (2) von gleicher Form und von welcher eine Wurzel $= u + v$ bekannt ist. Bestimmen wir nun, was immer möglich, die Grössen u und v so, dass (3) mit (2) identisch wird, so haben wir hiemit auch eine Wurzel der Gl. (2). Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q;$$

aus der ersten dieser Gleichungen folgt $v = -\frac{p}{3u}$, welcher Werth in die zweite substituirt, die Gleichung:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

liefert. Diese Gleichung vom 6ten Grade lässt sich aber nach Art der quadratischen Gleichungen auflösen und giebt zunächst:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

woraus:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

folgt. Substituirt man ferner diesen Werth von u in die Gleichung $v^3 = -q - u^3$, so kommt:

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf die Gl. $y = u + v$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (4)$$

eine Wurzel der Gl. (2), wo wir von dem doppelten Zeichen nur die oberen beibehalten haben, da die unteren dasselbe Resultat geben. Dieser Ausdruck, welcher unter dem Namen der Cardan'schen Formel bekannt ist, liefert aber in Folge der Vieldeutigkeit der darin enthaltenen Cubikwurzeln sämmtliche drei Wurzeln der Gl. (2), wie sogleich gezeigt werden soll. Setzt man:

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = A, \quad -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = B,$$

so hat man: $y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Nun ist aber, wenn man Kürze halber

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha, \text{ folglich } \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha^2$$

setzt, und die arithmetischen Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$ mit a und b bezeichnet, bekanntlich [§. 51 und 52]:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{A} &= a, & \sqrt[3]{B} &= b \\ &= \alpha a & &= \alpha b \\ &= \alpha^2 a & &= \alpha^2 b \end{aligned}$$

so dass sich also durch Combination dieser Werthe von $\sqrt[3]{A}$ und $\sqrt[3]{B}$, 9 Werthe für y ergeben, von welchen jedoch nur jene Wurzeln der Gl. (2) sind, für welche das Produkt $uv = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ reell wird, wie es obige Gleichung $3uv = -p$ verlangt. Berücksichtigt man daher, dass α und α^2 imaginär sind, $\alpha^3 = -1$ aber reell, so erhält man für die drei Wurzeln der Gl. (2) folgende Werthe:

$$y_1 = a + b,\ y_2 = \alpha a + \alpha^2 b;\ y_1 = \alpha^2 a + \alpha b. \qquad (5)$$

102. Um die Beschaffenheit dieser drei Wurzeln kennen zu lernen, müssen wir drei Fälle unterscheiden.

1) Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ also positiv, so sind A und B, also auch a und b reelle Grössen; die Gl. (2) hat daher, wie aus (5) zu ersehen, in diesem Falle 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

2) Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, so wird $A = B = -\frac{q}{2}$, $a = b = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$, somit:

$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},\ y_2 = y_3 = -(\alpha + \alpha^2)\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = +\sqrt[3]{\frac{q}{2}};$$

in diesem Falle sind daher alle drei Wurzeln reell und zwei davon einander gleich, deren Zeichen mit dem Zeichen von q übereinstimmt, und jenem der dritten Wurzel entgegengesetzt ist.

3) Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, also negativ, so werden A und B, somit auch a und b imaginär und es erscheinen daher sämmtliche Wurzeln unter imaginärer Form; da jedoch die Gleichung, weil von ungerader Ordnung, eine reelle Wurzel haben muss, so müssen sich wenigstens in einer der Wurzeln die imaginären Bestandtheile aufheben; es lässt sich aber leicht zeigen, dass in diesem Falle alle drei Wurzeln reell sind.

Es sei nämlich $y_1 = w$ die in diesem Falle nothwendig existirende eine reelle Wurzel, so ist die Gl. (2) durch $y - w$ theilbar und der Quotient $= 0$ gesetzt, liefert die zwei andern Wurzeln. Man erhält aber als Quotienten $y^2 + yw + p + w^2$, und somit aus der Gl.:

$$y^2 + yw + p + w^2 = 0:$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}w + \sqrt{-\frac{3}{4}w^2 - p},\ y_3 = -\frac{1}{2}w - \sqrt{-\frac{3}{4}w^2 - p},$$

oder, wenn man Kürze halber $-\frac{3}{4}w^2 - p = k$ setzt:

$$y_2 = -\frac{1}{2}w + \sqrt{k},\ y_3 = -\frac{1}{2}w - \sqrt{k},$$

wo sich nun leicht zeigen lässt, dass k eine positive Grösse ist und daher auch diese beiden Wurzeln reell sind. Denn da w eine Wurzel der Gl. (2) ist, so hat man $w^3 + pw + q = 0$, woraus $q = -w^3 - pw$,

oder weil $p = -\frac{3}{4} w^2 - k$ ist, $q = -\frac{1}{4} w^3 + wk$ folgt. Mit diesen beiden Werthen von p und q wird nun:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{3}{4} k \left\{ \frac{1}{4} w^4 - \frac{2}{9} w^2 k + \frac{4}{81} k^2 \right\} =$$

$$= -\frac{3}{4} k \left\{ \frac{1}{2} w^2 - \frac{2}{9} k \right\}^2.$$

Hieraus folgt, dass, da der Faktor $\left\{ \frac{1}{2} w^2 - \frac{2}{9} k \right\}^2$ wesentlich positiv ist, das Zeichen von k jenem der Grösse $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ entgegengesetzt und folglich positiv ist, wenn, wie im jetzigen Falle, die Grösse $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ einen negativen Werth hat.

Es sind also alle drei Wurzeln reell und die cardan'sche Formel, welche sie in imaginärer Form giebt, wird in diesem Falle (dem casus irreducibilis der älteren Algebraisten) zur Berechnung derselben unbrauchbar. Selbst im ersten Falle ist ihre Anwendung zur Berechnung der reellen Wurzel, der mühsamen Wurzelausziehungen wegen, höchst unbequem. Durch Einführung von trigonometrischen Funktionen lässt sich derselbeu eine zur Rechnung bequemere Gestalt geben, wobei wir nur den 1ten und 3ten Fall zu betrachten haben, da im 2ten die Wurzeln schon unter sehr einfacher Form erscheinen. Da, wie leicht einzusehen, bei positivem p immer der erste Fall, bei negativem aber der 1ste oder 3te Platz greift, je nachdem der Zahlenwerth von $\frac{p^3}{27} <$ oder $> \frac{q^2}{4}$ ist, so wollen wir im Folgenden nach dem Zeichen von p unterscheiden.

103. I. p positiv. Bringen wir den Ausdruck (4) auf die Form:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}}, \quad (6)$$

und setzen wir, da die Grösse $\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}$ jedes positiven Werthes fähig ist:

$$\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = \operatorname{tg} \varphi^2, \quad (7)$$

so erhalten wir aus (6), wenn wir zugleich für $\frac{q}{2}$ den aus (7) folgen-

den Werth: $\operatorname{cotg} q \sqrt{\frac{p^3}{27}}$ einführen und beachten, dass $\sqrt{1+\operatorname{tg} q^2} =$

$= \sec q = \frac{1}{\cos q}$ ist:

$$y_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{1-\cos q}{\sin q}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos q}{\sin q}}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2} q} - \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{1}{2} q}\right],$$

somit, wenn man noch:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2} q} = \operatorname{tg} \psi \tag{8}$$

setzt:

$$y_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{tg}\psi - \operatorname{cotg}\psi\right] = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\sin\psi^2 - \cos\psi^2}{\sin\psi\cos\psi}\right] =$$

$$= -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{\cos 2\psi}{\sin 2\psi},$$

d. i.

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cotg} 2\psi. \tag{9}$$

Hat man daher aus (7) und (8) die beiden Hülfswinkel q und ψ berechnet, so findet man aus (9) die reelle Wurzel der Gl. (2); die zwei andern sind in diesem Falle imaginär und da jetzt

$$a = \sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{tg}\psi, \; b = -\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{cotg}\psi$$

ist, so findet man für dieselben nach Gl. (5) die Werthe:

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{cotg} 2\psi \pm \operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} y_1 \pm \sqrt{p} \cdot \operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{-1} \tag{9*}$$

II. p negativ und $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$.

Die Gl. (2) hat jetzt, wenn p den Zahlenwerth des Coefficienten von y bezeichnet, die Form:

$$y^3 - py + q = 0$$

und es ist:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2}}};$$

aus der Relation $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$ folgt aber $\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} < 1$; setzen wir also:

$$\frac{4}{27}\frac{p^3}{q^2} = \sin \varphi^2 \tag{10}$$

so wird, wenn wir noch für $\frac{q}{2}$ den aus (10) folgenden Werth:

$$\frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

einführen:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} + \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi}\right].$$

Setzt man noch:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi \tag{11}$$

so kommt:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{tg}\psi + \operatorname{cotg}\psi\right] = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi\cos\psi}\right],$$

d. i.

$$y_1 = -2\operatorname{cosec} 2\psi \sqrt{\frac{p}{3}}. \tag{12}$$

Für die beiden imaginären Wurzeln findet man:

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{cosec} 2\psi \mp \operatorname{cotg} 2\psi \sqrt{-3}\right] = -\frac{1}{2} y_1 \pm \sqrt{p}.\operatorname{cotg} 2\psi \sqrt{-1}$$

III. Sei endlich p negativ und $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, welche Annahme dem irreduciblen Falle entspricht; lassen wir wieder p den Zahlenwerth des Coefficienten der ersten Potenz von y in Gl. (2) sein, wodurch dieselbe wie in II. die Form:

$$y^3 - py + q = 0$$

erhält, so können wir den Ausdruck (4) auf die Form bringen:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27}{4}\frac{q^2}{p^3} - 1}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27}}\sqrt{\frac{27}{4}\frac{q^2}{p^3} - 1}}$$

Da jetzt $\frac{27}{4} \cdot \frac{q^2}{p^3} < 1$, so setze man:

$$\frac{27}{4} \cdot \frac{q^2}{p^3} = \cos q^2 \qquad (13)$$

wodurch $\frac{q}{2} = \cos q \sqrt{\frac{p^3}{27}}$ wird, und der Ausdruck von y in folgenden:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\cos q - \sqrt{-1}\sin q)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{p}{3}}\,(\cos q + \sqrt{-1}\sin q)^{\frac{1}{3}}$$

übergeht. Wendet man hierauf die Moivre'sche Binomialformel an [§. 49. Gl. 3], so kommt:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{1}{3}(q + 2r\pi) - \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}(q + 2r\pi)\right]$$

$$-\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{1}{3}(q + 2r\pi) + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{3}(q + 2r\pi)\right]$$

d. i. nach Aufhebung der imaginären Glieder:

$$y = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{1}{3}(q + 2r\pi)$$

wo r eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man erhält aber sämmtliche verschiedene Werthe, deren dieser Ausdruck fähig ist, wenn man für r: $0, +1, -1$ substituirt, und hat daher für die drei Wurzeln der Gleichung folgende Werthe:

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{q}{3}$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{q}{3} + 120^0\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{q}{3} - 60^0\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{q}{3} - 120^0\right) = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{q}{3} + 60^0\right),$$

welche demnach, wie schon oben gezeigt wurde, sämmtlich reell sind.

Beispiele. 1. Die gegebene Gleichung sei: $x^3 + 2x - 5 = 0$, so ist $p = +2$ also positiv und die Rechnung steht nach den Formeln (7), (8), (9) in I. so:

$$\log \frac{p}{3} = 9,8239087$$

$$\log \sqrt{\frac{p}{3}} = 9,9119543$$

$$\lg\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 = 9,7358630$$

$$\log \frac{2}{q} = 9.6020600\,n$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 9,3379230\,n$$

$$\varphi = -12^0 17' 0,''36$$

$$\frac{\varphi}{2} = -\ 6\ \ 8\ 30,18$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 9,0318351\,n$$

$$\log \operatorname{tg} \psi = 9,6772784\,n$$

$$\psi = -25^0 26' 15,''47$$

$$2\psi = -50\ 52\ 30,\ 94$$

$$\lg \operatorname{cotg} 2\psi = 9,9103016\,n$$

$$\log \sqrt{\frac{p}{3}} = 9,9119543$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log(-x_1) = 0,1232859\,n$$

$$x_1 = +1,328269$$

Zur Berechnung der imaginären Wurzeln hat man:

$$\log p = 0,3010300$$

$$\log \sqrt{p} = 0.1505150$$

$$\log \operatorname{cosec} 2\psi = 0,1102648\,n$$

$$\lg \sqrt{p} \operatorname{cosec} 2\psi = 0,2607798\,n$$

somit nach (9*):

$$\left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = -0,664134 \pm 1,822971\,\sqrt{-1}$$

2) Es sei die Gleichung: $x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ gegeben; setzt man, um das 2te Glied wegzuschaffen, $x = y + \frac{4}{3}$, so erhält man als transformirte Gleichung:

$$y^3 - \frac{22}{3}y - \frac{92}{27} = 0;$$

da

$$p = -\frac{22}{3}$$

negativ und:

$$\frac{q^2}{4} = \left(\frac{46}{27}\right)^2 < \frac{p^3}{27} = \left(\frac{22}{9}\right)^3,$$

so findet hier der dritte Fall statt und die Rechnung ist folgende:

$$\log \frac{p}{3} = 0{,}3881802 \qquad \log 2\sqrt{\frac{p}{3}} = 0{,}4951201$$

$$\log \sqrt{\frac{p}{3}^3} = 0.1940901 \qquad \log \cos \frac{1}{3}\varphi = 9{,}8915765$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 = 0{,}5822703 \qquad \log \cos \left(\frac{1}{3}\varphi - 60\right) = 9{,}9696387$$

$$\log \frac{q}{2} = 0{,}2313940\, n \qquad \log \cos \left(\frac{1}{3}\varphi + 60\right) = 9{,}1858484\, n$$

$$\log \cos \varphi = 9{,}6491237\, n \qquad \log (-y_1) = 0{,}3866966$$

$$\varphi = 116^0\, 28'\, 24{,}''44 \qquad \log y_2 = 0{,}4647588$$

$$\frac{1}{3}\varphi = 38\ 49\ 28,\ 15 \qquad \log y_3 = 9{,}6809685\, n$$

$$\frac{1}{3}\varphi - 60^0 = 21\ 10\ 31,\ 85$$

$$\frac{1}{3}\varphi + 60^0 = 98\ 49\ 28,\ 15$$

$$y_1 = -2{,}436108 \qquad \text{endlich wegen} \qquad x_1 = -1{,}102775$$

$$y_2 = +2{,}915807 \qquad x = y + \frac{4}{3} \qquad x_2 = +4{,}249140$$

$$y_3 = -0{,}479699 \qquad\qquad x_3 = +0{,}853634$$

b) Gleichungen des vierten Grades.

104. Zum Behufe der Auflösung der Gl. des vierten Grades:

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0$$

schaffe man zuerst mittelst der Substitution $x = y - \frac{A_1}{4}$ das zweite Glied weg, wodurch man eine Gleichung von der Form:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (1)$$

erhält, deren Wurzeln um $\frac{A_1}{4}$ vermindert, die Wurzeln obiger Gleichung geben. Man setze nun:

$$y = t + u + v, \qquad (2)$$

so wird $y^2 = t^2 + u^2 + v^2 + 2\,(tu + tv + uv)$, und wenn man nochmals quadrirt:

$$y^4 = (t^2 + u^2 + v^2)^2 + 4\,(t^2 + u^2 + v^2)\,(tu + tv + uv) + \\ + 4\,(t^2u^2 + t^2v^2 + u^2v^2) + 8\,tuv\,(t + u + v);$$

substituirt man diese Werthe von y^2 und y^4 in (1), so kommt:

$$\left.\begin{array}{l}(t^2+u^2+v^2)^2+4(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)+p(t^2+u^2+v^2)+r\\ \quad+[4(t^2+u^2+v^2)+2p](tu+tv+uv)\\ \quad+(8tuv+q)(t+u+v)\end{array}\right\}=0 \quad (3)$$

Da die drei noch unbestimmten Grössen t, u, v erst an eine in (2) ausgesprochene Bedingung gebunden sind, so ist es gestattet, deren noch zwei aufzustellen, wofür wir folgende:

$$4(t^2+u^2+v^2)+2p=0, \quad 8tuv+q=0$$

wählen, aus welchen Gleichungen

$$t^2+u^2+v^2=-\frac{p}{2} \ldots\ldots (4) \quad t^2u^2v^2=\frac{q^2}{64} \ldots\ldots (5)$$

folgen; hiedurch geht (3) über in:

$$\frac{p^2}{4}+4(t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2)-\frac{p^2}{2}+r=0,$$

woraus man:

$$t^2u^2+t^2v^2+u^2v^2=\frac{p^2-4r}{16} \quad (6)$$

findet. In Folge der Gleichungen (4), (5), (6) sind nun [§. 87] die Grössen t^2, u^2, v^2 die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0, \quad (7)$$

welche nach dem vorigen §. aufgelöst werden kann. Findet man z_1, z_2, z_3 als Wurzeln derselben, so ist:

$$t=\pm\sqrt{z_1}, \quad u=\pm\sqrt{z_2}, \quad v=\pm\sqrt{z_3}$$

und somit:

$$y=\pm\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3}.$$

Macht man nun alle möglichen Combinationen der Zeichen, so erhält man folgende 8 Werthe für y:

$$\left.\begin{array}{ll}y_1=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3} & y_5=+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\\ y_2=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3} & y_6=+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\\ y_3=+\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3} & y_7=-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}\\ y_4=+\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3} & y_8=-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}\end{array}\right\} \quad (8) \quad (9)$$

welche zu je vieren in zwei Partieen so zusammengestellt sind, dass das Produkt tuv in jeder Partie dasselbe Zeichen erhält, wie es die oben aufgestellte Bedingungsgleichung: $tuv=-\frac{q}{8}$ verlangt, welche zeigt, dass das Produkt tuv negativ sein muss, wenn in (1) q positiv ist, und umgekehrt. Das System (8) stellt daher die 4 Wurzeln der

Gl. (1) dar, während das System (9) die Wurzeln der Gl.:

$$y^4 + py^2 - qy + r = 0$$

enthält. Dass wir hier die Wurzeln dieser beiden Gleichungen zugleich erhalten, hat darin seinen Grund, dass beiden Gleichungen dieselbe reducirte Gleichung (7) zugehört, da diese nur das Quadrat von q enthält.

c) Reciproke Gleichungen.

105. Gleichungen von der Form:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0 \quad (1)$$

in welchen das letzte Glied dem Coefficienten des ersten Gliedes gleich ist und je zwei vom ersten und letzten gleichweit abstehende Glieder gleiche Coefficienten haben, heissen reciproke Gleichungen. Sie haben die Eigenschaft, dass wenn α eine Wurzel derselben ist, auch der reciproke Werth $\frac{1}{\alpha}$ eine Wurzel der Gleichung darstellt. Denn setzt man in (1) $x = \alpha$, so hat man identisch:

$$\alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots\ldots + A_2 \alpha^2 + A_1 \alpha + 1 = 0; \quad (2)$$

substituirt man aber $x = \frac{1}{\alpha}$, so erhält der erste Theil der Gleichung den Werth:

$$\frac{1}{\alpha^m} + A_1 \frac{1}{\alpha^{m-1}} + A_2 \frac{1}{\alpha^{m-2}} + \ldots\ldots + \frac{A_2}{\alpha^2} + \frac{A_1}{\alpha} + 1$$

oder wenn man mit α^m multiplicirt und dividirt:

$$\frac{1}{\alpha^m}(\alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots\ldots + A_2 \alpha^2 + A_1 \alpha + 1),$$

welcher in Folge von (2) ebenfalls $= 0$ ist.

Die Gleichung (1) verliert übrigens, wie leicht einzusehen, diese Eigenschaft nicht, wenn sämmtliche gleichnamige Coefficienten entgegengesetzte Zeichen haben, nur muss in diesem Falle, wenn sie von gerader Ordnung ist, das mittlere Glied fehlen, weil dasselbe sonst gleichzeitig positiv und negativ sein müsste, was ungereimt ist.

Jede reciproke Gleichung von ungerader Ordnung hat die Wurzel -1 oder $+1$, je nachdem die gleichnamigen Coefficienten mit gleichen oder entgegengesetzten Zeichen versehen sind. So haben die Gleichungen:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0$$

und

$$x^5 - A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_2 x^2 - A_1 x + 1 = 0$$

die Wurzel -1; den Gleichungen:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0$$

und

$$x^5 - A_1 x^4 + A_2 x^3 - A_2 x^2 + A_1 x - 1 = 0$$

entspricht hingegen die Wurzel $+1$, wie man sich durch Substitution leicht überzeugt. Jede reciproke Gl. von ungerader Ordnung ist daher durch $x + 1$ oder $x - 1$ theilbar und setzt man den Quotienten $= 0$, so hat man eine neue Gleichung von gerader Ordnung, welcher alle übrigen Wurzeln zukommen und die demnach wieder reciprok ist.

Da wir also jede reciproke Gl. von ungerader Ordnung durch Division mit $x + 1$ oder $x - 1$ auf eine solche von gerader Ordnung zurückführen können, so haben wir uns nur mit letzteren zu beschäftigen. Sei demnach:

$$x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0. \quad (3)$$

eine reciproke Gl. von gerader Ordnung; dividirt man dieselbe durch x^m und nimmt je zwei Glieder mit gleichen Coefficienten zusammen, so erhält man:

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + A_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + A_2\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots +$$

$$+ A_{m-2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + A_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_m = 0. \quad (4)$$

Man setze nun:

$$x + \frac{1}{x} = y \quad (5)$$

so lassen sich alle Binome von der Form $x^r + \frac{1}{x^r}$ durch y rational ausdrücken; denn es ist:

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) y = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}},$$

folglich:

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = \left(x^r + \frac{1}{x^r}\right) y - \left(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\right),$$

woraus zugleich erhellt, dass der Ausdruck von $x^r + \frac{1}{x^r}$ nach y vom r^{ten} Grade sein wird, da die Gl. (5) nach y vom 1sten Grade ist. Setzt man in der letzten Gleichung der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man:

für $r = 1$: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$,

- $r = 2$: $x^3 + \frac{1}{x^3} = (y^2 - 2)\, y - y = y^3 - 3y$,

- $r = 3$: $x^4 + \frac{1}{x^4} = (y^3 - 3y)\, y - (y^2 - 2) = y^4 - 4y^2 + 2$,

u. s. w.

Entwickelt man also diese Binome bis zu jenem:

$$x^m + \frac{1}{x^m},$$

und substituirt ihre Werthe in (4), so erhält man eine Gleichung vom m^{ten}, also halb so hohen Grade, als die gegebene Gl. (3) war. Lassen sich die m Wurzeln derselben, $y_1, y_2, \ldots y_m$ finden, so liefert für jede derselben die Gl. (5) zwei zu einander reciproke Werthe von x, nämlich:

$$x_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 - 4}} \qquad (6)$$

wodurch die $2m$ Wurzeln der Gl. (3) gegeben sind.

Man kann demnach reciproke Gleichungen bis zum 9ten Grade allgemein auflösen.

Beispiel. Es sei die reciproke Gl. vom 7ten Grade gegeben:

$$x^7 - 2x^6 - x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0;$$

da die mit gleichen Coefficienten versehenen Glieder gleiche Zeichen haben, so ist -1 eine Wurzel dieser Gleichung. Durch Division mit $x + 1$ erhält man:

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0, \qquad (\alpha)$$

oder durch x^3 dividirt:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0,$$

woraus, wenn $x + \frac{1}{x} = y$ gesetzt wird: $y^3 - 3y^2 + 2 = 0$ folgt;

dieser Gleichung entsprechen die Wurzeln:

$$y_1 = -1, y_2 = +1, y_3 = +2,$$

mit welchen man aus (6) folgende 6 Wurzeln der Gl. (α) erhält:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad x_5 = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2}{-1 + \sqrt{-3}}, \quad x_4 = \frac{2}{1 + \sqrt{-3}}, \quad x_6 = \frac{2}{2 + 0} = 1$$

d) Binomische und trinomische Gleichungen.

106. Jede Gleichung von der Form:

$$x^m \pm a = 0 \qquad (1)$$

heisst eine binomische Gleichung. Eine solche Gleichung lässt sich immer auf die einfachere:

$$z^m \pm 1 = 0$$

bringen, indem man $x = z \sqrt[m]{a}$ setzt, daher wir uns nur mit dieser zu beschäftigen haben. Betrachten wir zuerst die Gleichung:

$$z^m - 1 = 0 \qquad (2)$$

so hat man, weil aus derselben $z = \sqrt[m]{+1}$ folgt, mit Rücksicht auf Gl. 7 §. 50, sofort:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m}, \qquad (3)$$

welcher Ausdruck sämmtliche m Wurzeln der Gl. (2) darstellt, wenn man darin statt k der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$ setzt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die a. a. O. entwickelten Ausdrücke (8) und (9) stellen diese Wurzeln in beiden Fällen dar.

Die, zwei conjugirten Wurzeln der Gl. (2), wie:

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m} \text{ und } \cos\frac{2k\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m}$$

entsprechenden Wurzelfaktoren:

$$z - \cos\frac{2k\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m} \text{ und } z - \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m}$$

geben, mit einander multiplicirt, das reelle Produkt:

$$z^2 - 2z\,\cos\frac{2k\pi}{m} + 1, \qquad (4)$$

aus welchem Ausdrucke sämmtliche quadratische Faktoren des Binoms $z^m - 1$ hervorgehen, wenn man für k obige Werthe der Reihe nach setzt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass für $k = 0$, für welchen Werth (4) in $z^2 - 2z + 1 = (z-1)(z-1)$ übergeht, der Faktor $z - 1$ nur einmal zu setzen ist, weil die Wurzel $+1$ der Gl. (2) nur einmal zukommt, da in (3) für $k = 0$, $\sin\frac{2k\pi}{m} = 0$ wird. Aus

demselben Grunde ist, wenn m gerade, aus dem für $k = \frac{m}{2}$ aus (4) entstehenden Ausdrucke $z^2 + 2z + 1 = (z + 1)\,(z + 1)$, der Faktor $(z + 1)$ nur einmal zu nehmen. Man hat daher:

für m gerade:

$$z^m - 1 = (z-1)(z+1)(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{m} + 1) \times \ldots$$

$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1). \qquad (5)$$

Für m ungerade:

$$z^m - 1 = (z-1)(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{m} + 1) \times \ldots$$

$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1) \qquad (6)$$

107. Eben so hat man für die Gleichung:

$$z^m + 1 = 0 \qquad (7)$$

wenn man beachtet, dass aus derselben $z = \sqrt[m]{-1}$ folgt, mit Rücksicht auf Gl. (11), §. 51, sogleich:

$$z = \cos\frac{2k+1}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{m}\pi \qquad (8)$$

wo für k der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, ... bis $\frac{m}{2} - 1$, oder $\frac{m-1}{2}$ zu setzen sind, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Die Ausdrücke (12) und (13), §. 51, stellen in beiden Fällen die m Wurzeln der Gl. (7) entwickelt dar.

Je zwei conjugirte Wurzelfaktoren liefern hier den reellen quadratischen Wurzelfaktor:

$$z^2 - 2z\cos\frac{2k+1}{m}\pi + 1$$

und es ist daher für ein gerades m:

$$z^m + 1 = (z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{5\pi}{m} + 1) \times \ldots$$

$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1) \qquad (9)$$

und für ein ungerades m: $z^m + 1 =$

$$(z+1)(z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{3\pi}{m} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{5\pi}{m} + 1) \times$$

$$\ldots \times (z^2 - 2z\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1) \qquad (10)$$

Die Ergebnisse dieser beiden §§. lassen sich nun leicht auf die allgemeinere Gleichung (1) übertragen, indem man allenthalben $\sqrt[m]{a}$ an die Stelle von z setzt.

Anmerkung. Will man den Werth von $\sqrt[m]{\pm 1}$ noch nicht als bekannt voraussetzen, so gelangt man zur Auflösung der Gleichungen $z^m \pm 1 = 0$ auf folgende Weise. Man setze:

$$z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

welche Form den unbekannten Wurzeln unserer Gleichung jedenfalls zukommen wird, und suche r und φ so zu bestimmen, dass dieser Werth von z der gegebenen Gleichung Genüge leiste. Substituirt man denselben zu diesem Ende in die Gleichung $z^m - 1 = 0$, so erhält man:

$$r^m \cos m\varphi - 1 + \sqrt{-1}.\, r^m \sin m\varphi = 0,$$

welche Gleichung, da r von 0 verschieden sein muss, in folgende zwei zerfällt:

$$r^m \cos m\varphi - 1 = 0 \ldots (\alpha) \qquad \sin m\varphi = 0 \ldots . (\beta)$$

Aus (β) folgt sogleich $m\varphi = h\pi$; berücksichtigt man jedoch, dass in Folge der Gl. (1) $\cos m\varphi$ positiv sein muss, so kann $m\varphi$ nur ein gerades Vielfaches von π sein; wir haben daher $m\varphi = 2k\pi$, und hiemit aus (α), $r = 1$, somit:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{m},$$

welcher Ausdruck sofort die m Wurzeln der Gl. $z^m - 1 = 0$ darbietet, wenn man darin der Reihe nach $m = 0, 1, 2, \ldots . m - 1$ setzt und aus den in §. 50 angeführten Gründen mit (3) übereinstimmt. — In gleicher Weise lässt sich die Gl. $z^m + 1 = 0$ behandeln.

108. Aus den Wurzelformeln (3) und (8) der Gleichungen: $z^m \mp 1 = 0$ ersieht man, dass je zwei conjugirte imaginäre Wurzeln zu einander reciprok sind. Denn bezeichnet man Kürze halber den Bogen $\frac{2k\pi}{m}$ oder $\frac{2k+1}{m}\pi$ mit Θ, so sind $\cos\Theta + \sqrt{-1}\,\sin\Theta$ und $\cos\Theta - \sqrt{-1}\sin\Theta$ zwei conjugirte Wurzeln; es ist aber nach der Moivre'schen Formel:

$$\cos\Theta \pm \sqrt{-1}\sin\Theta = \frac{1}{(\cos\Theta + \sqrt{-1}\sin\Theta)^{-1}} = \frac{1}{\cos\Theta - \sqrt{-1}\,\sin\Theta}.$$

In der That erhält man auch reciproke Gleichungen, wenn man die Gleichungen, $z^m - 1 = 0$ und $z^m + 1 = 0$ durch ihre reellen Wurzelfaktoren $z^2 - 1$ oder $z - 1$, oder $z + 1$ dividirt.

109. Die sogenannten trinomischen Gleichungen haben die Form:

$$x^{2m} + px^m + q = 0 \qquad (1)$$

und lassen sich ebenfalls durch Kreisfunktionen allgemein auflösen. Man erhält daraus zunächst:

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

ist nun $\frac{p^2}{4} - q > 0$, die Wurzelgrösse somit reell, so hat man nur noch die binomische Gleichung:

$$x^m + \left(\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0$$

aufzulösen. Ist aber $\frac{p^2}{4} - q < 0$, obige Wurzelgrösse also imaginär, welcher Fall q positiv voraussetzt, so setze man zur Vereinfachung: $x = z \sqrt[2m]{q}$, wodurch Gl. (1) in folgende übergeht:

$$z^{2m} \pm \frac{p}{\sqrt{q}} z^m + 1 = 0,$$

indem das zweite Glied sowohl positiv als negativ sein kann; diese Gleichung verwandelt sich, wenn man $\frac{p}{\sqrt{q}} = 2 \cos \Theta$ setzt, in folgende:

$$z^{2m} \pm 2 \cos \Theta . z^m + 1 = 0.$$

Betrachten wir zuerst die Gleichung:

$$z^{2m} - 2 \cos \Theta . z^m + 1 = 0 \qquad (2)$$

und setzen:

$$z = r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi);$$

dieser Werth in (2) substituirt, giebt:

$$r^{2m} \cos 2m\varphi - 2r^m \cos \Theta \cos m\varphi + 1 + \sqrt{-1} (r^{2m} \sin 2m\varphi - 2r^m \cos \Theta \sin m\varphi) = 0,$$

welche Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$r^{2m} \cos 2m\varphi - 2r^m \cos \Theta \cos m\varphi + 1 = 0 \qquad (\alpha)$$

$$r^m \sin 2m\varphi - 2 \cos \Theta \sin m\varphi = 0. \qquad (\beta)$$

Aus (β) folgt nun, wegen $\sin 2m\varphi = 2 \sin m\varphi \cos m\varphi$:

$$\cos m\varphi = \frac{\cos \Theta}{r^m},$$

somit auch:

$$\cos 2m\varphi = 2 \cos m\varphi^2 - 1 = 2 \frac{\cos \Theta^2}{r^{2m}} - 1,$$

welche Werthe in (α) substituirt: $r^{2m} = 1$, somit $r = 1$ geben. Hiemit wird $\cos m\varphi = \cos \Theta$, woraus $m\varphi = 2k\pi \pm \Theta$, also $\varphi = \frac{2k\pi \pm \Theta}{m}$

folgt. Setzt man endlich die gefundenen Werthe von r und q in den Ausdruck von z, so erhält man:

$$z = \cos\frac{2k\pi \pm \Theta}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi \pm \Theta}{m}$$

als Ausdruck für die Wurzeln der Gl. (2), in welcher statt k alle Zahlen von 0 bis $m - 1$ zu setzen sind.

Für die Gleichung:

$$z^{2m} + 2\cos\Theta . z^m + 1 = 0$$

erhält man auf demselben Wege:

$$z = \cos\frac{(2k+1)\pi \pm \Theta}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\pi \pm \Theta}{m} .$$

VI. AUFLOESUNG DER NUMERISCHEN GLEICHUNGEN.

110. Sind die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ einer Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

in bestimmten Zahlen gegeben, so heisst die Gleichung eine numerische oder Zahlengleichung. Das Problem der Auflösung dieser Gleichungen ist von jenem der Auflösung allgemeiner Gleichungen wesentlich verschieden. Bei diesen ist man darauf angewiesen, Formeln zu suchen, welche die Wurzeln der Gleichung als Funktionen der Coefficienten geben; ist es aber gelungen, auf diesem Wege eine Wurzel zu finden, so sind damit auch alle gefunden; denn da wir kein Mittel besitzen, die verschiedenen Wurzeln einer solchen Gleichung zu individualisiren und der Analysis eine bestimmte Wurzel und gerade nur diese abzuverlangen, so antwortet sie uns dadurch, dass sie in Einer Form alle Wurzeln giebt, wenn diess überhaupt mit Hülfe der bekannten Funktionen möglich ist. — Die Wurzeln von Zahlengleichungen hingegen sind wieder bestimmte reelle oder imaginäre Zahlen, und man ist, wie wir sehen werden, immer im Stande, dadurch, dass man jede Wurzel in beliebig enge Grenzen einschliesst, die Stelle in der natürlichen Zahlenreihe anzugeben, welche die verschiedenen Wurzeln einnehmen und auf diese Weise eine bestimmte Wurzel, die wir suchen wollen, zu bezeichnen. Dann bietet die Analysis aber auch mehr als ein Mittel dar, diese bestimmte Wurzel zu finden. Mit dieser wichtigen Aufgabe werden wir uns nun beschäftigen und dabei uns auf die Bestimmung der reellen Wurzeln beschrän-

ken, da die Berechnung der imaginären Wurzeln mehr ein bloss theoretisches als praktisches Interesse hat.

III. Man kann immer voraussetzen, dass die Coefficienten der Gl. (1) rationale Zahlen sind; denn wären einige davon irrational, so müssen dieselben zum Behufe der Auflösung näherungsweise durch rationale Brüche ausgedrückt werden, was bekanntlich immer mit beliebiger Genauigkeit möglich ist. Sind aber die Coefficienten rational, so kann man mittelst der in III. gelehrten Transformationen jede Gl. vom m^{ten} Grade auf die Form der obigen Gleichung (1) bringen, wobei sämmtliche Coefficienten ganze Zahlen sind und jener des ersten Gliedes $= 1$ ist.

Bei dieser Beschaffenheit der Gl. (1) können die reellen Wurzeln derselben nur ganze oder irrationale Zahlen nicht aber rationale Brüche sein.

Denn wäre $x = \frac{p}{q}$ eine Wurzel der Gl. (1), wo p und q ganze Zahlen bedeuten, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so müsste:

$$\frac{p^m}{q^m} + A_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \frac{p^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots\ldots + A_{m-1} \frac{p}{q} + A_m = 0$$

sein, d. h. wenn man mit q^{m-1} multiplicirt:

$$\frac{p^m}{q} + A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} q + A_3 p^{m-3} q^2 + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1} p q^{m-2} + A_m q^{m-1} = 0,$$

was ungereimt ist, da ein Bruch gegen eine Summe ganzer Zahlen sich nicht aufheben kann.

112. Sind a und b zwei Zahlen, welche in das Gleichungspolynom $f(x)$ substituirt, Resultate $f(a) = +A$ und $f(b) = -B$ mit entgegengesetztem Zeichen erzeugen, so liegt zwischen a und b nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Denn da [§. 86] $f(x)$ eine stetige Funktion von x ist, so kann dieselbe, während x von a bis b sich stetig ändert, von dem Werthe $f(a) = +A$ zu dem Werthe $f(b) = -B$ nicht übergehen, ohne alle zwischen $+A$ und $-B$ liegenden Werthe zu durchlaufen; unter diesen befindet sich aber auch der Werth 0; folglich muss zwischen a und b ein Werth von x liegen, für welchen die Funktion $f(x)$ verschwindet, d. h. eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$.

Wie leicht einzusehen, kann $f(x)$ bei dem Uebergange von $+A$ zu $-B$ oder umgekehrt, auch 3, 5, ... $(2n+1)$mal durch 0 gehen, so dass also unter der gemachten Voraussetzung zwischen a und b auch 3, 5 u. s. w. überhaupt mehrere Wurzeln, aber in ungerader Anzahl liegen können.

Haben aber $f(a)$ und $f(b)$ gleiche Zeichen, so liegt zwischen a und b entweder keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln.

Anmerkung. Zu demselben Ergebnisse führt die geometrische Betrachtung der der Gleichung $y = f(x)$ entsprechenden Curve. Ist nämlich $y = f(a) = +A$, $y = f(b) = -B$, so liegen die den beiden Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden Punkte der Curve auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, weil die zugehörigen Ordinaten $+A$, $-B$ entgegengesetzte Zeichen haben; daher muss die Curve auf ihrem Zuge von dem einen dieser Punkte zum anderen die Abscissenaxe mindestens einmal schneiden, doch kann diess auch 3, 5, ... $(2n+1)$mal stattfinden; jedem Durchschnitte entspricht aber eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$. Haben hingegen die beiden zu den Abscissen a und b gehörigen Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ gleiche Zeichen, so liegen die beiden entsprechenden Punkte der Curve auf derselben Seite der Abscissenaxe, und die Curve führt von einem dieser Punkte zum andern, entweder ohne die Axe zu schneiden, oder wenn diess geschieht, in einer geraden Anzahl von Punkten.

113. Bei der Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung ist die Kentniss von Grenzen, innerhalb welcher diese Wurzeln liegen müssen, von Wichtigkeit, da man dadurch oft viele unnütze und mühsame Versuche erspart.

Unter der oberen und unteren Grenze der positiven Wurzeln versteht man zwei Zahlen, von denen die erstere grösser als die grösste, die zweite kleiner als die kleinste positive Wurzel ist, wobei es wünschenswerth ist, dass das Intervall dieser Grenzen das möglichst kleinste sei.

Zur oberen Grenze der positiven Wurzeln gelangt man auf folgendem von Newton angegebenen Wege. Man transformire die gegebene Gleichung mittelst der Substitution $x = y + a$, wo a eine noch unbestimmte Zahl bedeutet, in eine andere:

$$y^m + f^{(m-1)}(a)\, y^{m-1} + f^{(m-2)}(a)\, y^{m-2} + \ldots + f'(a)\, y + f(a) = 0,$$

deren Wurzeln $y = x - a$ sämmtlich um die Zahl a kleiner sind als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Wählt man nun die Zahl a so, dass die Coefficienten $f(a)$, $f'(a)$, ... $f^{(m-1)}(a)$ der transformirten Gleichung sämmtlich positiv werden, so entspricht dieser Gl. keine positive Wurzel, weil sie keine Zeichenwechsel hat und der gewählte Werth von a muss demnach grösser sein als jede positive Wurzel der

gegebenen Gleichung. Die kleinste Zahl a, welche die genannten Funktionen sämmtlich positiv macht, ist demnach die obere Grenze der positiven Wurzeln.

Um die untere Grenze zu erhalten, transformire man die gegebene Gleichung mittelst der Substitution $x = \frac{1}{y}$ in eine andere, deren grösste positive Wurzel offenbar der reciproke Werth der kleinsten Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Sucht man nun auf die eben gelehrte Weise die obere Grenze b der positiven Wurzeln der transformirten Gleichung, so ist offenbar $\frac{1}{b}$ kleiner, als die kleinste Wurzel der gegebenen Gleichung und demnach eine untere Grenze.

Die Grenzen der negativen Wurzeln verschafft man sich dadurch, dass man die gegebene Gleichung, indem man $-x$ an die Stelle von x setzt, in eine andere transformirt, deren Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen haben und für diese Gleichung nun die Grenzen der positiven Wurzeln sucht, welche sofort mit entgegengesetzten Zeichen genommen, die Grenzen der negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung sein müssen.

In der Regel genügt es, für die untere Grenze der positiven sowohl als negativen Wurzeln die Null zu nehmen.

Beispiel. Sei die Gleichung:

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - 76x^2 + 31x + 294 = 0$$

gegeben, so hat man:

$$\begin{aligned} f(a) &= a^4 + 6a^3 - 76a^2 + 31a + 294 \\ f'(a) &= 4a^3 - 18a^2 - 152a + 31 \\ f''(a) &= 6a^2 + 18a - 76 \\ f'''(a) &= 4a + 6 \end{aligned}$$

und man findet nach wenigen Versuchen $a = 6$ für den kleinsten Werth, welcher diese Funktionen sämmtlich positiv macht; es ist daher 6 die obere Grenze der positiven Wurzeln. Durch dasselbe Verfahren, auf die Gleichung der reciproken Wurzeln:

$$294y^4 + 31y^3 - 76y^2 + 6y + 1 = 0$$

angewendet, findet man $\frac{1}{2}$ als die obere Grenze der positiven Wurzeln dieser Gl., somit 2 als die untere Grenze der pos. Wurzeln der gegebenen Gleichung. Mittelst der Gleichung:

$$f(-x) = x^4 - 6x^3 - 76x^2 - 31x + 294 = 0$$

erhält man endlich -1 und -13 für die beiden Grenzen der negativen Wurzeln.

114. Das eben erklärte Verfahren zur Erfindung der oberen Grenze der positiven Wurzeln kann man auch in der Art ausführen, dass man die Wurzeln der gegebenen Gleichung successive immer um Eins vermindert, bis man auf eine transformirte Gleichung mit durchaus positiven Gliedern kommt; die Anzahl der vorgenommenen Transformationen ist offenbar die gesuchte obere Grenze. Wendet man dieses Verfahren auf die Gleichung des obigen Beispiels an, so erhält man als transformirte Gleichungen der Reihe nach:

$$1 + 10 - 52 - 99 + 256 \quad (1)$$
$$1 + 14 - 16 - 169 + 116 \quad (2)$$
$$1 + 18 + 32 - 155 - 54 \quad (3)$$
$$1 + 22 + 92 - 33 - 158 \quad (4)$$
$$1 + 26 + 164 + 221 - 76 \quad (5)$$
$$1 + 30 + 248 + 631 + 336 \quad (6)$$

wo nur die Coefficienten angesetzt sind und die eingeklammerten Zahlen anzeigen, um wie viel Einheiten die Wurzeln der nebenstehenden Gleichung kleiner sind, als die der gegebenen. Die 6te Gl. hat nur positive Glieder, folglich ist 6 die obere Grenze der positiven Wurzeln. Dasselbe Verfahren, auf die Gl. $f(-x) = 0$ angewendet, liefert die obere Grenze der negativen Wurzeln.

Ist die obere Grenze eine grössere Zahl, was bei einiger Uebung leicht erkannt wird, so kann man, um die Anzahl der vorzunehmenden Transformationen zu verringern, nach einem grösseren Intervalle fortschreiten.

Dieses Verfahren bietet einige Vortheile dar. Da die letzten von x freien Glieder der transformirten Gleichungen nichts anderes sind, als die Resultate der Substitution der Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. in die gegebene Gleichung, so ist offenbar r eine Wurzel der Gleichung, wenn das absolute Glied der r^{ten} transformirten Gleichung $= 0$ wird. Man erhält also dadurch unmittelbar die rationalen Wurzeln. — Aus demselben Grunde geben sich aus den Zeichenwechseln der letzten Glieder irrationale Wurzeln zu erkennen [§. 108], welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen in ungerader Anzahl liegen. So hat obige Gleichung eine positive Wurzel zwischen 2 und 3, eine andere zwischen 5 und 6. — Wird endlich ein mittleres Glied einer transformirten Gleichung $= 0$ und haben die zwei Nachbarglieder gleiche Zeichen, so hat diese, somit auch die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln [§. 91].

Es ist übrigens einleuchtend, dass man durch successive Verminderung der Wurzeln einer Gleichung immer nothwendig zuletzt eine

transformirte Gleichung mit lauter positiven Gliedern erhalten muss, da die Zahl, um welche die Wurzeln vermindert werden, immer so gross gewählt werden kann, dass sämmtliche reelle Wurzeln sowohl, als auch die reellen Theile aller imaginären Wurzeln negativ werden und daher das Gleichungspolynom nur mehr Faktoren von der Form $(x + a)$ und $(x + p - q\sqrt{-1})(x + p + q\sqrt{-1}) = (x + p)^2 + q^2$ enthält, die offenbar keinen Zeichenwechsel hervorbringen können. Daher können auch bei den obigen successiven Transformationen wohl Zeichenwechsel verloren gehen, aber keine gewonnen werden, und man kann folgenden Satz aussprechen:

Sind p und q zwei beliebige Zahlen und $q > p$, so kann die Gleichung $f(x + q) = 0$ nicht mehr Zeichenwechsel haben, als die Gleichung:

$$f(x + p) = 0,$$

wo $f(x + p) = 0$ und $f(x + q) = 0$ zwei Gleichungen sind, deren Wurzeln beziehungsweise um p und q kleiner sind, als die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

115. Wenn für jeden Werth von $x \geqq g$ das Gleichungspolynom einen positiven Werth erhält, so kann nach §. 108 zwischen g und $+\infty$ keine Wurzel liegen und es ist daher g eine obere Grenze der positiven Wurzeln. Nach §. 16, *i* kann man daher den Werth $g = A_r + 1$ immer als eine obere Grenze der positiven Wurzel nehmen, wenn A_r den Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten der Gleichung bezeichnet, indem der Fall offenbar der ungünstigste ist, wenn alle auf das erste folgenden Glieder mit diesem grössten negativen Coefficienten behaftet sind. Nur ist diese Grenze häufig viel zu gross. Für obiges Beispiel würde sie $= 77$ werden.

Eine genauere Grenze erhält man in den meisten Fällen, wenn man $g = 1 + \sqrt[k]{A_r}$ nimmt, wo wieder A_r der Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten ist und k die Anzahl der Glieder — die etwa fehlenden mitgezählt — bedeutet, welche dem ersten negativen Coefficienten vorangehen. Es wird hiebei noch vorausgesetzt, dass der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit sei.

Denn es sei die vorgelegte Gleichung:

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots - A_k x^{m-k} \pm A_{k+1} x^{m-k-1} \pm \ldots + \pm A_m = 0,$$

in welcher $A_k x^{m-k}$ das erste negative Glied ist, und A_r der Zahlenwerth des grössten negativen Coefficienten sein soll; so wird offenbar $f(x)$ für alle Werthe von x positiv, für welche:

$$x^m \geqq A_r \{x^{m-k} + x^{m-k-1} + \ldots + 1\}$$

d. i.

$$x^m \geqq A_r \frac{x^{m-k+1} - 1}{x - 1}$$

ist. Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn man

$$x^m \geqq A_r \frac{x^{m-k+1}}{x - 1},$$

d. i.

$$(x - 1)\, x^{k-1} \geqq A_r$$

setzt, folglich um so mehr, wenn man $(x - 1)(x - 1)^{k-1} \geqq A_r$, oder:

$$(x - 1)^k \geqq A_r \text{ d. h. } x \geqq 1 + \sqrt[k]{A_r}$$

nimmt. Hiemit würde man für obiges Beispiel $1 + \sqrt{76} = 9.\ 7$ oder 10 als obere Grenze finden.

Das Aufsuchen der rationalen Wurzeln.

116. Sind die Coefficienten der Gleichung:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

ganze Zahlen und der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten $= 1$, so können [§. 107] die rationalen Wurzeln wieder nur ganze Zahlen sein, welche sich, da das letzte Glied A_m das Produkt sämmtlicher Wurzeln ist, unter den Faktoren von A_m vorfinden müssen. Um daher die rationalen Wurzeln der Gleichung aufzufinden, wird man das absolute Glied A_m in seine einfachen und zusammengesetzten Faktoren zerlegen und diese, sowohl positiv als negativ genommen in die Gleichung substituiren; jene, welche die Gleichung identisch machen, sind Wurzeln derselben.

Hiebei bleiben selbstverständlich jene Faktoren ausgeschlossen, welche ausserhalb der oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln liegen.

Diese Versuche werden bequem nach folgendem von Newton herrührenden Verfahren vorgenommen. Es sei α eine rationale Wurzel der Gl. (1), also eine ganze Zahl, so hat man, wenn man α statt x substituirt und zugleich transponirt, identisch:

$$A_m = -A_{m-1}\,\alpha - A_{m-2}\,\alpha^2 - A_{m-3}\,\alpha^3 - \ldots - A_1\,\alpha^{m-1} - \alpha^m,$$

folglich, wenn man durch α dividirt:

$$\frac{A_m}{\alpha} = -A_{m-1} - A_{m-2}\,\alpha - A_{m-3}\,\alpha^2 - \ldots - A_1\,\alpha^{m-2} - \alpha^{m-1};$$

da der Voraussetzung nach sowohl die Coefficienten als auch α ganze

Zahlen sind, so muss auch $\frac{A_m}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein; setzt man diese $= B_1$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{B_1 + A_{m-1}}{\alpha} = - A_{m-2} - A_{m-3}\,\alpha - \ldots - A_1\,\alpha^{m-3} - \alpha^{m-2};$$

aus obigen Gründen ist nun auch $\frac{B_1 + A_{m-1}}{\alpha}$ eine ganze Zahl; bezeichnet man sie mit B_2, so hat man ferner:

$$\frac{B_2 + A_{m-2}}{\alpha} = - A_{m-3} - \ldots\ldots - A_1\,\alpha^{m-4} - \alpha^{m-3},$$

so dass auch $\frac{B_2 + A_{m-2}}{\alpha}$ eine ganze Zahl sein muss. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Gleichung:

$$\frac{B_{m-2} + A_2}{\alpha} = - A_1 - \alpha,$$

(wo B_{m-2} eine ganze Zahl), aus welcher man schliesst, dass auch

$$\frac{B_{m-2} + A_2}{\alpha}$$

eine ganze Zahl sein muss; bezeichnet man diese mit B_{m-1}, so folgt $\frac{B_{m-1} + A_1}{\alpha} = - 1$, und wenn man diesen letzten Quotienten, welcher wieder eine ganze Zahl sein muss (und zwar $= - 1$) $= B_m$ setzt, endlich $B_m + 1 = 0$, wo die Einheit den Coefficienten des ersten Gliedes der Gl. (1) vorstellt. Umgekehrt wird daher α eine Wurzel der Gleichung sein, wenn die successiven Quotienten:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_m$$

ganze Zahlen und $B_m + 1 = 0$ ist. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn das erste Glied der Gleichung einen Coefficienten A_0 hat; es müsste sich dann zuletzt $B_m + A_0 = 0$ ergeben.

Man schreibe daher die zu untersuchenden Divisoren neben einander, setze unter jeden derselben den Quotienten aus dem letzten Gliede getheilt durch den Divisor; zu diesem Quotienten addire man den vorletzten Coefficienten, dividire die Summe wieder durch den Divisor und addire zu dem erhaltenen Quotienten den nächsten Coefficienten u. s. w. Kann mit einem Divisor diese Operation fortgesetzt werden, bis alle Coefficienten der Gleichung an die Reihe gekommen sind, und ergiebt sich als letzte Summe die Null, so ist dieser Divisor eine Wurzel. Sobald aber bei einer der auszuführenden Divisionen ein gebrochener Quotient zum Vorschein kommt, wird die Operation mit

dem betreffenden Divisor abgebrochen, da dieser keine Wurzel sein kann.

Beispiel. Es sei die Gl. $x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 102x + 90 = 0$ gegeben. Man findet als Divisoren des letzten Gliedes:

$$1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, \ldots\ldots 90;$$

als obere Grenze der positiven und negativen Wurzeln $+ 7, - 3$; man hat demnach die Divisoren $+ 2, + 3, + 5, + 6, - 2, - 3$ zu versuchen, da, wie man sich leicht durch unmittelbare Substitution überzeugt, $+ 1, - 1$ keine Wurzeln sind.

$-3,$	$-2.$	$+2,$	$+3,$	$+5$	$+6$
-30	-45	$+45$	$+30$	$+18$	$+15$
$+102$	$+102$	$+102$	$+102$	$+102$	$+102$
$+72$	$+57$	$+147$	$+132$	$+120$	$+117$
-24			$+44$	$+24$	
-9			-9	-9	
-33			$+35$	$+15$	
$+11$				$+3$	
-8				-8	
$+3$				-5	
-1				-1	
$+1$				$+1$	
0				0	

Es sind demnach nur $+ 5$ und $- 3$ Wurzeln der Gleichung. Da unsere Gleichung nur vom 4ten Grade, so ergeben sich die beiden andern Wurzeln, wenn man das Gleichungspolynom durch $(x-5)(x+3)$ dividirt, und den Quotienten $x^2 - 6x - 6 = 0$ setzt. Man erhält hieraus $x = 3 \pm \sqrt{15}$.

117. Hat das letzte Glied A_m eine grosse Anzahl von Divisoren, so bieten sich verschiedene Wege dar, um schon in voraus solche auszuscheiden, welche nicht Wurzeln sein können und hiedurch die Versuche abzukürzen. Einer der einfachsten ist folgender. Man substituire in dem Gleichungspolynome $f(x)$ statt x sowohl $+ 1$ als $- 1$ und bemerke sich die Substitutionsresultate $f(+ 1)$ und $f(- 1)$; beachtet man nun, dass diese beiden Zahlen nichts anderes sind als die absoluten Glieder zweier Gleichungen, deren Wurzeln beziehungsweise um 1 kleiner und grösser sind als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so erkennt man sogleich, dass nur jene Faktoren von A_m Wurzeln sein können, welche, wenn positiv genommen, um 1 vermindert in

$f(+1)$, und um 1 vermehrt in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind; negativ genommen können aber nur jene Faktoren Wurzeln sein, welche um 1 vermehrt in $f(+1)$ und um 1 vermindert in $f(-1)$ ohne Rest enthalten sind. Faktoren, welche diesen Bedingungen nicht entsprechen, sind nicht weiter zu berücksichtigen und nur die übrigbleibenden der obigen Prüfung zu unterwerfen.

So findet man für obiges Beispiel:

$$f(+1) = 176, f(-1) = -12,$$

und von den Faktoren des letzten Gliedes haben nur folgende:

$$+2, +3, +5, -3$$

die obenerwähnte Eigenschaft, daher nur diese weiter zu prüfen sind.

Bisweilen kann man dadurch jeden Versuch ersparen. So z. B. findet man für die Gleichung:

$$x^4 - 143x^3 + 721x^2 - 82x + 360 = 0,$$

143 als obere Grenze der positiven Wurzeln; es wären demnach alle Faktoren von 360, mit Ausnahme von 180, 23 an der Zahl, der Probe zu unterziehen. Sucht man jedoch $f(+1) = 157, f(-1) = 607$, so erkennt man sogleich, dass diese Gl. keine rationalen Wurzeln hat, weil diese Zahlen, als Primzahlen, durch keinen der um 1 vermehrten oder verminderten Faktoren theilbar sind.

Hat man auf diese Weise die rationalen Wurzeln einer Gleichung gefunden, so können die übrigen Wurzeln, wenn sie deren noch besitzt, nur irrational oder imaginär sein und man wird, bevor man zu deren Berechnung schreitet, das Gleichungspolynom durch die den rationalen Wurzeln entsprechenden Wurzelfaktoren dividiren, wodurch man es mit einer leichter zu behandelnden Gleichung von niedrigerem Grade zu thun bekömmt.

Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln.

118. Bevor man zur Berechnung der irrationalen Wurzeln einer vorgelegten Gleichung schreitet, ist es nöthig, die Stelle in der natürlichen Zahlenreihe anzugeben, an welcher dieselben liegen, indem man jede zwischen zwei Grenzen einschliesst. Man kann diese Untersuchung die Analyse der Gleichung nennen.

Ein erstes einfaches Mittel hiezu bietet uns der in §. 108 ausgesprochene Satz dar. Sind $+g$ und $-g'$ die oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln und substituirt man in dem Gleichungspolynome der Reihe nach die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots g$ und ebenso

$0, -1, -2, \ldots -g'$, so liegt zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden dieser Zahlen gewiss mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung, wenn die diesen zwei Zahlen entsprechenden Substitutionsresultate mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind. So findet man für die Gleichung:

$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0, f(0) = +1, f(1) = -5, f(2) = -5,$
$f(3) = +7, f(-1) = +8, f(-2) = +7, f(-3) = -5;$

es liegt demnach eine Wurzel zwischen 0 und 1; eine zweite zwischen 2 und 3; eine dritte zwischen — 2 und — 3, womit auch sämmtliche Wurzeln der Gleichung entdeckt und getrennt sind.

Allein sehr häufig geben sich auf diesem Wege nicht so viele reelle Wurzeln zu erkennen, als der Ordnungsexponent der Gleichung Einheiten enthält, oder so viele, als nach den in §. 96 vorgetragenen Sätzen der Gleichung möglicherweise zukommen können, und es wäre voreilig zu schliessen, dass die fehlenden Wurzeln, wenn ihre Anzahl gerade, sämmtlich imaginär seien. Denn haben die den beiden Werthen $x = a$ und $x = a + 1$ entsprechenden Substitutionsresultate $f(a)$ und $f(a + 1)$ entgegengesetzte Zeichen, so können nach §. 108 zwischen a und $a + 1$ auch mehrere Wurzeln in ungerader Anzahl liegen. Hingegen kann eine gerade Anzahl von Wurzeln, oder auch gar keine zwischen a und $a + 1$ liegen, wenn $f(a)$ und $f(a + 1)$ gleiche Vorzeichen haben. Kommt eine zwischen a und $a + 1$ liegende Wurzel der Gleichung mehrmals z. B. $p$mal zu, so wird sich diese nur verrathen, wenn p eine ungerade Zahl ist. Indessen können und werden wir im Folgenden vorläufig annehmen, dass die Gleichung keine gleichen Wurzeln besitze, da die in §. 95 gelehrten Vorschriften uns die Mittel liefern, dieselben zu entdecken und die Gleichung davon zu befreien.

Man sieht nun leicht ein, dass mehrere zwischen a und $a + 1$ liegende Wurzeln sich sogleich trennen würden, wenn man statt x nach und nach a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, ... $a + 1$ substituiren und dabei δ kleiner als die kleinste Differenz der dazwischen liegenden Wurzeln wählen würde. Allein davon abgesehen, dass die von Lagrange gelehrte Bestimmung einer solchen Zahl δ sehr weitläufige Rechnungen erfordert, wenn die Gleichung den dritten Grad übersteigt, so wird dieses Verfahren der vielen vorzunehmenden Substitutionen wegen geradezu unausführbar, wenn die Wurzeln einander sehr nahe liegen. Der folgende Lehrsatz führt in den meisten dieser ohnehin in der Praxis selten vorkommenden schwierigeren Fälle, einfacher und — was ihm einen besonderen Werth verleiht, immer sicher und ohne alles Probiren zum Ziele.

119. Sturms Lehrsatz. Es sei $f(x) = 0$ die gegebene Gleichung vom m^{ten} Grade, deren Wurzeln wir sämmtlich von einander verschieden voraussetzen wollen und $f'(x)$ die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$. Wenden wir auf die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ das bekannte Verfahren zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers an, mit dem Unterschiede, dass wir die bei den aufeinanderfolgenden Divisionen sich ergebenden Reste mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, so bestehen, wenn diese Reste mit

$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_{m-1},$$

die zugehörigen Quotienten mit

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_{m-1}$$

bezeichnet werden, offenbar folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= Q_1 f'(x) - R_1 \\ f'(x) &= Q_2 R_1 - R_2 \\ R_1 &= Q_3 R_2 - R_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{m-3} &= Q_{m-1} R_{m-2} - R_{m-1}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Betrachten wir die Reihe der Funktionen:

$$f(x), f'(x), R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots R_{m-1} \quad (2)$$

deren jede, wie leicht einzusehen, im Allgemeinen immer von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als die vorhergehende und deren letzte R_{m-1} vom 0ten Grade oder von x unabhängig ist (weil der Voraussetzung nach die Gl. $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln, folglich $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen), so lässt sich folgender Satz erweisen:

Substituirt man in der Funktionenreihe (2) für x nach einander zwei Zahlen p und q, von welchen $p < q$ sein soll, so erhält man, indem man von den Zahlenwerthen der Substitutionsresultate ganz abstrahirt und nur auf die Zeichen derselben sieht, zwei Zeichenreihen, die eine für $x = p$, die andere für $x = q$; die letztere Zeichenreihe kann nie mehr Zeichenwechsel haben, als die erstere, wohl aber weniger, und es liegen zwischen p und q genau so viele reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, als die zweite Zeichenreihe (für $x = q > p$) weniger Zeichenwechsel hat als die erstere.

Zum Behufe des Beweises müssen wir folgende zwei Hülfssätze voranschicken.

1. Hülfssatz. Ist die Funktion $f(x)$ in der Nähe irgend eines Werthes von $x = a$ im Zustande des Wachsens, so

ist für diesen Werth von x, $f'(x)$ positiv; ist aber $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ im Zusande des Abnehmens, so ist $f'(x)$ für $x = a$ negativ. Umgekehrt: die Funktion $f(x)$ ist in der Nähe des besonderen Werthes $x = a$ im Zustande des Wachsens oder Abnehmens, je nachdem $f'(a)$ positiv oder negativ ist.

Denn es ist, wenn man in $f(x)$, $a + \delta$ an die Stelle von x setzt, [§. 86]:

$$f(a + \delta) = f(a) + \delta f'(a) + \delta^2 f''(a) + \delta^3 f'''(a) + \ldots.$$

oder:

$$f(a + \delta) - f(a) = \delta f'(a) + \delta^2 f''(a) + \delta^3 f'''(a) + \ldots$$

aus welcher Gleichung unmittelbar die Richtigkeit des Satzes erhellt, wenn man bedenkt, dass einerseits $f(x)$ in der Nähe von $x = a$ (also für sehr kleine Werthe von δ) im Zustande des Wachsens oder Abnehmens ist, jenachdem die Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ positiv oder negativ ist; anderseits für hinreichend kleine Werthe von δ das Zeichen des zweiten Theiles der Gleichung bloss von dem Zeichen von $f'(a)$ abhängt. [§. 16, *k.*]

Ist übrigens a eine Wurzel der Gl. $f(x) = 0$, so ist $f(a) = 0$ und es folgt somit aus der letzten Gleichung:

$$f(a + \delta) = \delta f'(a) + \delta^2 f''(a) + \delta^3 f'''(a) + \ldots.$$

und wenn man hierin $-\delta$ statt δ schreibt:

$$f(a - \delta) = -\delta f'(a) + \delta^2 f''(a) - \delta^3 f'''(a) + \ldots.$$

woraus man sieht, dass die Funktion $f(x)$ vor dem Durchgange durch die Null mit $f'(a)$ entgegengesetztes Zeichen, nach dem Durchgange gleiches Zeichen besitzt; was für die Folge bemerkt zu werden verdient.

2. Hülfssatz. Wenn irgend eine aus der Reihe der Funktionen (2), z. B. R_k, für einen besonderen Werth von $x = c$ verschwindet, so haben die beiden benachbarten Funktionen R_{k-1} und R_{k+1} für diesen Werth von $x = c$ entgegengesetzte Zeichen; nie können aber zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Funktionen für denselben Werth von x zugleich verschwinden.

Denn betrachtet man drei benachbarte Funktionen:

$$R_{k-1},\ R_k \text{ und } R_{k+1}$$

so besteht zwischen ihnen die identische Gleichung:

$$R_{k-1} = Q_{k-1} \cdot R_k - R_{k+1}; \qquad (3)$$

setzt man in dieser Gleichung $x = c$ und nimmt man an, dass für diesen Werth von x, $R_k = 0$ wird, so folgt aus (3) sogleich $R_{k-1} =$

$-R_{k+1}$, wodurch der erste Theil des Satzes gerechtfertigt ist. Würde aber nebst R_k auch noch R_{k+1} für $x = c$ verschwinden, so müsste in Folge der Gl. (3) auch R_{k-1} für diesen Werth von x sich auf 0 reduciren; dann würden aber in Folge der Gl. (1) auch alle vorhergehenden und nachfolgenden Funktionen für $x = c$ verschwinden, was nicht möglich ist, weil der Voraussetzung nach die Gl. $f(x) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat.

Denken wir uns nun in die Funktionenreihe (2) nicht nur die Zahlen p und q, sondern auch alle zwischenliegenden substituirt und die resultirenden Zeichenreihen aufgeschrieben. Da jede dieser Funktionen ihr Zeichen nur dann ändern kann, wenn sie durch 0 geht, so wird die Anzahl und Lage der Zeichenwechsel, welche die aus der Substitution $x = p$ hervorgehende Zeichenreihe darbietet, in den folgenden Zeichenreihen so lange unverändert bleiben, bis x einen zwischen p und q liegenden Werth erreicht, welcher eine dieser Funktionen $= 0$ macht. Wir behaupten nun:

I. dass die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändert, wenn für irgend einen zwischen p und q liegenden Werth von x eine oder mehrere der Funktionen $f'(x)$, R_1, R_2, ... R_{m-1} der Null gleich werden.

II. Dass jedesmal ein Zeichenwechsel, aber nur einer verloren geht, so oft die erste Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von $x = p$ bis $x = q$ durch 0 geht.

ad I. Es sei c ein zwischen p und q liegender Werth von x, für welchen eine der Zwischenfunktionen z. B. R_k verschwindet, und δ eine so kleine Zahl, dass innerhalb des Intervalles $x = c - \delta$ bis $x = c + \delta$ keine der benachbarten Funktionen $= 0$ wird, so genügt es offenbar, das Verhalten der Zeichenreihe bloss für die drei Funktionen R_{k-1}, R_k und R_{k+1} zu untersuchen; berücksichtigt man nun den Hülfssatz 2), so ist klar, dass für die drei Werthe $x = c - \delta$, $x = c$, $x = c + \delta$ bloss folgende vier Zeichenstellungen möglich sind:

	R_{k-1}, R_k, R_{k+1}	R_{k-1}, R_k, R_{k+1}	R_{k-1}, R_k, R_{k+1}	R_{k-1}, R_k, R_{k+1}
für $x = c - \delta$	$+ \; + \; -$	$- \; + \; +$	$+ \; - \; -$	$- \; - \; +$
- $x = c$	$+ \; 0 \; -$	$- \; 0 \; +$	$+ \; 0 \; -$	$- \; 0 \; +$
- $x = c + \delta$	$+ \; - \; -$	$- \; - \; +$	$+ \; + \; -$	$- \; + \; +$

Vergleicht man die den Werthen $x = c - \delta$ und $x = c + \delta$ entsprechenden Zeichenreihen, so sieht man, dass nur die Lage nicht aber die Anzahl der Zeichenwechsel sich geändert hat. Da sich nun dasselbe von jeder anderen der Funktionen $f'(x)$ bis R_{m-2} zeigen lässt, so wird demnach ein Zeichenwechsel weder verloren noch gewonnen,

wie viele der zwischen der ersten und letzten liegenden Funktionen (2) und wie oft dieselben auch durch 0 gehen mögen, während x von dem Werthe p zu jenem q übergeht.

ad II. Nehmen wir nun aber an, dass für $x = c$ die erste Funktion $f(x)$ verschwinde, also c eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sei. Da die Gl. der Voraussetzung nach keine gleichen Wurzeln hat, so kann $f'(x)$ für $x = c$ nicht verschwinden, und da nach dem oben Bewiesenen die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändert, wenn eine der folgenden Funktionen für $x = c$ verschwindet, so genügt es, die beiden ersten Glieder der Zeichenreihen zu betrachten. Mit Rücksicht auf den Hülfssatz (1) können hier nur folgende zwei Fälle eintreten:

	$f(x)$, $f'(x)$			$f(x)$, $f'(x)$
für $x = c - \delta$	$+$	$-$		$-$ $+$
- $x = c$	0	$-$	oder	0 $+$
- $x = c + \delta$	$-$	$-$		$+$ $+$

woraus man ersieht, dass bei dem Uebergange von $x = c - \delta$ zu $x = c + \delta$ ein Zeichenwechsel verloren gegangen ist, aber auch nur einer; und zwar derjenige, welchen die beiden ersten Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ unmittelbar vor dem Durchgange durch die Wurzel $x = c$ darbieten.

Aus vorstehenden Sätzen ergeben sich nun folgende Schlüsse. Es seien a, b, c, ... reelle Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, welche zwischen den Zahlen p und q liegen, nach ihrer Grösse geordnet, so dass a die kleinste. Setzt man in der Reihe der Funktionen:

$$f(x), f'(x), R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{m-1}$$

p an die Stelle von x, so erhält man eine Zeichenreihe mit einer gewissen Anzahl von Zeichenwechseln. Lassen wir nun x stetig wachsen, so kann von $x = p$ bis $x = a - \delta$ die Anzahl der Zeichenwechsel sich nicht ändern, weil $f(x)$ in diesem Intervalle nicht durch 0 geht; höchstens können sie ihren Ort verändern, wenn eine der Zwischenfunktionen $f'(x)$ bis R_{m-2} verschwindet. Unmittelbar vor dem Durchgange durch 0, also für $x = a - \delta$ haben $f(x)$ und $f'(x)$ entgegengesetzte Zeichen, nach dem Durchgange gleiche Zeichen und der an dieser Stelle vorhandene Zeichenwechsel ist (nach II) bei diesem Durchgange verloren gegangen, oder mit anderen Worten, die Zeichenreihe für $x = a + \delta$ hat um einen Zeichenwechsel weniger als jene für $x = p$. Lassen wir nun x weiter von a gegen b hin wachsen. Von $x = a + \delta$ bis $x = b - \delta$ kann $f(x)$ sein Zeichen nicht ändern; die Zeichenfolge, welche die zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ für $x = a + \delta$

darbieten, muss aber an der Stelle $x = b - \delta$ wieder in einen Zeichenwechsel sich verwandelt haben (weil diese beiden Funktionen vor dem Durchgange durch 0 entgegengesetzte Zeichen haben); dieser Zeichenwechsel kann aber nur dadurch entstanden sein, dass $f'(x)$ von $x = a + \delta$ bis $x = b - \delta$ sein Zeichen geändert hat, also in diesem Intervalle durch 0 gegangen ist, wodurch jedoch (nach I) die Gesammtzahl der Zeichenwechsel, welche die Zeichenreihe für $x = a + \delta$ besitzt, keine Aenderung erfährt; es ist nur ein bereits vorhandener Zeichenwechsel an diese Stelle hingerückt. Wir haben demnach unmittelbar vor dem Durchgange durch die zweite Wurzel genau so viele Zeichenwechsel, als unmittelbar nach dem Durchgange durch die erste Wurzel; zugleich sind die zwei Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ vor dem Durchgange durch die zweite Wurzel wieder entgegengesetzten Zeichens. Dieser Zeichenwechsel geht bei dem Durchgange durch die zweite Wurzel (nach II) wieder verloren, folglich hat die Zeichenreihe für $x = b + \delta$ schon um zwei Zeichenwechsel weniger als jene für $x = p$. Diese Schlüsse gelten offenbar für jeden folgenden Durchgang von $f(x)$ durch 0, so dass bei jedem solchen Durchgange ein Zeichenwechsel verloren geht. Liegen demnach k reelle Wurzeln zwischen p und q, so muss die Zeichenreihe für $x = q$ genau um k Zeichenwechsel weniger haben, als jene für $x = p$.

Hat die Gl. $f(x) = 0$ auch gleiche Wurzeln, so entdeckt sich diess von selbst, wenn man auf die beiden Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ das Verfahren des grössten gemeinschaftlichen Divisors anwendet, indem dabei einer der Reste, z. B. $R_{k+1} = 0$ wird. Der vorhergehende, R_k ist das grösste gemeinschaftliche Maass der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ und die Gl. $f(x) : R_k = \psi(x) = 0$ enthält bekanntlich sämmtliche Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$, jede nur einmal; es kann nun die Gl. $\psi(x) = 0$, wenn es nöthig sein sollte, nach dem Sturm'schen Lehrsatze analysirt werden.

In Bezug auf die praktische Anwendung der Sturm'schen Methode zur Analyse der Gleichungen mögen noch folgende Bemerkungen eine Stelle finden.

1) Man substituire in der Funktionenreihe (2) zuerst die Werthe $-\infty$, 0, $+\infty$; haben die drei dadurch entstehenden Zeichenreihen beziehungsweise α, β, γ Zeichenwechsel, so ist $\alpha - \gamma$ die Gesammtzahl der reellen Wurzeln, unter denen sich $\alpha - \beta$ negative und $\beta - \gamma$ positive befinden. Hierauf kann man statt x successive die Werthe $+1, +2, +3 \ldots, -1, -2, -3 \ldots$ setzen, bis man zwei Zeichenreihen erhält, die eine für $x = +g$, die andere für $x = -g'$, welche beziehungsweise mit jenen für $x = +\infty$ und $= -\infty$ über-

einstimmen; so kann offenbar zwischen $+ g$ und $+ \infty$, und zwischen $- g'$ und $- \infty$ keine reelle Wurzel mehr liegen; es sind g und $- g'$ die oberen Grenzen der positiven und negativen Wurzeln und die Substitutionen brauchen nicht weiter fortgesetzt zu werden; die Vergleichung der verschiedenen aufeinanderfolgenden Zeichenreihen giebt sofort den Ort jeder einzelnen reellen Wurzel.

2) Das Mühsamste bei diesem Verfahren bleibt immer die Entwickelung der Funktionen R_1 bis R_{m-1}, weil dabei, namentlich wenn die Gleichung von höherem Grade ist und grosse Coefficienten hat, oft sehr grosse Zahlen zu multipliciren kommen. Einige Erleichterung verschafft bisweilen die Bemerkung, dass, wenn man auf einen Rest R_k kommt, welcher innerhalb der Grenzen p, q sein Zeichen nicht ändert, die Operation hiebei abgebrochen und die folgende Untersuchung auf die Funktionen:

$$f(x), f'(x), R_1, R_2, \ldots R_k$$

beschränkt werden kann. Der Grund erhellt leicht, wenn man bedenkt, dass unter der gemachten Voraussetzung in der Reihe der Funktionen $R_k, R_{k+1}, \ldots R_{m-1}$ von $x = p$ bis $x = q$ keine Aenderung in der Zahl der Zeichenwechsel eintreten kann. Diese Bemerkung lässt sich mit Vortheil auf den Rest R_{m-3} vom 2ten Grade anwenden, welcher,

$$p = - \infty, \quad q = + \infty$$

voraussetzend, innerhalb dieser Grenzen sein Zeichen nicht ändert, wenn das Quadrat des 2ten Coefficienten kleiner ist als das vierfache Produkt des ersten und letzten, weil in diesem Falle die zwei Wurzeln der Gleichung $R_{m-3} = 0$ imaginär sind.

3) Da der letzte Rest von x unabhängig ist, so braucht man seinen Zahlenwerth nicht zu entwickeln; es genügt die Kenntniss seines Zeichens; dieses ist aber nach dem Hülfssatze 2) das entgegengesetzte von jenem, welches der Rest vom 2ten Grade für jenen Werth von x erhält, welcher den Rest vom 1sten Grade auf Null reducirt.

Zur Erläuterung des Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1. Beispiel. Sei die Gl.:

$$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$$

gegeben, so ist:

$$f'(x) = 3x^2 - 7,$$

und man findet:

$$R_1 = 14x - 9, \; R_2 = + 1129;$$

man erhält daher folgende Zeichenreihen:

					Anz. d. Zeich.-Wechs.
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x = -3$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$x = -2$	$+$	$+$	$-$	$+$	2
$x = -1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x = 0$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$x = +1$	$-$	$-$	$+$	$+$	1
$x = +2$	$-$	$+$	$+$	$+$	1
$x = +3$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Es sind daher alle drei Wurzeln reell; und sie liegen zwischen -2 und -3; 0 und 1; $+2$ und $+3$, wie bereits §. 118 gefunden wurde.

2. Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 4x - 1 = 0$$

zur Analyse vorgelegt, so erhalten wir:

$$f(x) = x^5 - 8x^3 + 4x - 1; \quad f'(x) = 5x^4 - 24x^2 + 4;$$
$$R_1 = 16x^3 - 16 + 5; \quad R_2 = 304x^2 + 25x - 64;$$
$$R_3 = 14467x - 5456; \quad R_4 = +$$

der Werth von R_4 wurde nicht gerechnet, sondern nur sein Zeichen bestimmt, welches $+$ sein muss, da für den aus $R_3 = 0$ folgenden Werth von x, R_2 negativ wird. Man findet:

						Anz. der Zeich.-Wechs.
für $x = -\infty$:	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	5
$x = -3$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	5
$x = -2$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
$x = -1$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	4
$x = 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	3
$x = +1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1
$x = +2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1
$x = +3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Die Gleichung besitzt daher 5 reelle Wurzeln, von denen 2 negativ in den Intervallen $\{-2; -3\}$ und $\{0; -1\}$ und 2 positiv sind; von letzteren liegen zwei in dem Intervalle $\{0; 1\}$ und eine in dem Intervalle $\{2; 3\}$.

Um die zwei in dem Intervalle $\{0; 1\}$ liegenden Wurzeln zu trennen, versuchen wir zuerst, ob diess nach §. 108 gelingt, indem wir in $f(x)$ der Reihe nach die Werthe 0,1; 0,2; 0,3 u. s. w. substituiren; wir erhalten:

$f(0) = -1$
$f(0,1) = -0{,}608$
$f(0,2) = -0{,}264$
$f(0,3) = -0{,}014$
$f(0,4) = +0{,}098$
$f(0,5) = +0{,}031$
$f(0,6) = -0{,}250$
u. s. w.

und schliessen sofort aus den Zeichenwechseln, dass eine dieser Wurzeln zwischen 0,3 und 0,4, die andere zwischen 0,5 und 0,6 liege. Hiemit sind sämmtliche Wurzeln der Gl. getrennt, und können nun nach den später zu erklärenden Näherungsmethoden berechnet werden.

3tes Beispiel. Die gegebene Gl. sei:

$$x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0;$$

es kommt:

$$f(x) = x^4 + 40x^3 + 185\,x^2 - 198x + 48$$
$$f'(x) = 2x^3 + 60x^2 + 185x - 99$$
$$R_1 = 415x^2 + 2147x - 1086$$
$$R_2 = 11478077x - 5327841$$
$$R_3 = +$$

für $x = -\infty$	$+ - + - +$	4 Zeich.-W.	
- $x = -40$	$+ - + - +$	4	- -
- $x = -30$	$- - + - +$	3	- -
- $x = -10$	$- + + - +$	3	- -
- $x = 0$	$+ - - - +$	2	- -
- $x = 1$	$+ + + + +$	0	- -

Die Gl. hat daher vier reelle Wurzeln, wovon 2 negative in den Intervallen $\{0; -10\}$, $\{30; -40\}$ (deren Grenzen nach §. 108 leicht enger zusammengezogen werden) und zwei positive in dem Intervalle $\{0; 1\}$ liegen.

Zur Trennung der letzteren haben wir zuerst wieder nach §. 108:

$f(0) = +48$
$f(0,1) = +30{,}0901$
$f(0,2) = +16{,}1216$
$f(0,3) = +6{,}3381$
$f(0,4) = +0{,}9856$
$f(0,5) = +0{,}3125$
$f(0,6) = +4{,}5696$
u. s. w.

Da die Substitutionsresultate das Zeichen nicht ändern, so liegen die Wurzeln zwischen zwei aufeinanderfolgenden dieser nur um 0,1 verschiedenen Werthe von x und zwar, wie man aus dem Gange dieser Resultate vermuthet, zwischen 0,4 und 0,5. Um uns hievon zu überzeugen, substituiren wir diese beiden Werthe in die Reihe der Sturm'schen Funktionen und erhalten:

für $x = 0{,}4$	$+ - - - +$	2 Zeich.-W.
- $x = 0{,}5$	$+ + + + +$	0 - -

wo nun der Verlust von zwei Zeichenwechseln andeutet, dass in der That zwischen 0,4 und 0,5 zwei reelle Wurzeln liegen, deren gemeinschaftliche Anfangsziffern somit 0,4 sind.

Man könnte nun auf diese Weise fortfahren und zunächst nach §. 112 versuchen, ob sich die beiden Wurzeln in der zweiten Dezimalstelle trennen und wo nicht, die denselben gemeinschaftliche zweite Dezimalstelle nach Sturm bestimmen u. s. w. Wir werden jedoch später [§. 127] ein Verfahren kennen lernen, nach welchem die weitere Trennung solcher nahe gleichen Wurzeln gleichzeitig mit der Berechnung derselben mit Leichtigkeit ausgeführt wird, so dass es immer genügt, durch die hier vorgetragene Analyse die den nahe gleichen Wurzeln gemeinschaftliche Ziffer an der ersten Dezimalstelle zu bestimmen.

120. Auch von dem folgenden, von Budan herrührenden Lehrsatze, kann man zum Behufe der Trennung der Wurzeln öfter vortheilhaften Gebrauch machen.

Es seien a und b zwei beliebige Zahlen und $b > a$; man bilde aus der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ die Gleichungen:

$$f(x + a) = 0 \ldots (1) \qquad f(x + b) = 0 \ldots (2)$$

deren Wurzeln beziehungsweise um a und b kleiner sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Hat nun die Gl. $f(x) = 0$ h zwischen a und b liegende reelle Wurzeln, so besitzt die Gleichung $f(x + b) = 0$ mindestens um h Zeichenwechsel weniger als die Gl. $f(x + a) = 0$.

Beweis. Setzen wir zuvörderst voraus, die Gl. $f(x) = 0$ habe nur eine reelle Wurzel innerhalb der Grenzen a und b, so müssen die letzten von x freien Glieder in den Gleichungen (1) und (2) nach §. 112 entgegengesetzte Zeichen, daher diese beiden Gleichungen selbst eine ungleiche Anzahl von Zeichenwechseln haben, indem, wie man sich leicht überzeugt, eine Gleichung, deren erstes und letztes Glied mit gleichen Zeichen behaftet sind, nur eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln zulässt, diese Anzahl hingegen ungerade sein muss, wenn das erste und letzte Glied entgegengesetzte Zeichen haben. Da solchergestalt die Gleichungen (1) und (2) nicht gleichviel Zeichenwechsel haben können, anderseits aber nach dem am Schlusse des §. 114 angeführten Satze die Gl. (2) nicht mehr Zeichenwechsel haben kann, als die (1), so muss sie deren weniger und zwar mindestens um einen Wechsel weniger besitzen.

Diess vorausgesetzt seien die h zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gl. $f(x) = 0$ von der kleinsten angefangen nach ihrer Grösse geordnet:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_h;$$

ferner seien

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{h-1}$$

Zahlen, welche beziehungsweise zwischen α_1 und α_2, α_2 und α_3, α_3 und α_4, ... α_{h-1} und α_h liegen, und denken wir uns endlich der Reihe nach die Gleichungen:

$$f(x + \alpha) = 0, f(x + \beta_1) = 0, f(x + \beta_2) = 0, f(x + \beta_3) = 0, \ldots$$
$$f(x + \beta_{h-1}) = 0, f(x + b) = 0,$$

$h + 1$ an der Zahl, gebildet, so hat nach Obigem die 2te dieser Gleichungen mindestens um einen Zeichenwechsel weniger als die 1ste; die 3te mindestens um einen Wechsel weniger als die 2te, somit mindestens um zwei weniger als die erste u. s. w., endlich die $(h+1)^{\text{te}}$, $f(x+b)=0$, mindestens um h Wechsel weniger als die erste $f(x + \alpha) = 0$; womit der aufgestellte Satz erwiesen ist.

Umgekehrt: Gehen bei dem Uebergange von der Gl. (1) zur Gl. (2) h Zeichenwechsel verloren, so liegen höchstens h reelle Wurzeln zwischen a und b.

Wiewohl dieser Satz uns nicht lehrt, wie viele reelle Wurzeln zwischen zwei Grenzen a und b liegen müssen, sondern nur, wie viele höchstens dazwischen liegen können, da der Verlust von Zeichenwechseln auch von den der Gleichung zukommenden imaginären Wurzeln herrühren kann, so leistet er doch selbst in der oben ausgesprochenen einfachen Form oft erspriessliche Dienste. Zur Erleichterung der Anwendung dienen noch folgende Bemerkungen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen wird:

1) Geht beim Uebergange von (1) zu (2) eine ungerade Anzahl $(2n + 1)$ von Zeichenwechseln verloren, so liegen zwischen a und b mindestens eine und höchstens $(2n + 1)$, jedenfalls aber eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln.

2) Gehen jedoch Zeichenwechsel in gerader Anzahl $2r$ verloren, so liegt zwischen a und b entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln.

3) Hat die Gleichung $f(x) = 0$ bloss reelle Wurzeln, so ist die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln genau gleich dem Unterschiede der Anzahl der Zeichenwechsel in den Gl. (1) und (2). [Vergl. §. 91, IV).

Näherungsmethoden zur Berechnung der irrationalen Wurzeln.

Die in den vorhergehenden §§. entwickelten Methoden setzen uns in den Stand, jede reelle irrationale Wurzel einer Gl. $f(x) = 0$ zwi-

schen zwei Grenzen a und $a + y$ einzuschliessen, wo y eine kleine Zahl bedeutet, so dass also a ein genäherter Werth der gesuchten Wurzel ist. Wir setzen im Folgenden voraus, dass zwischen diesen Grenzen nur eine Wurzel liege. Auch können wir uns auf die Berechnung der positiven Wurzeln beschränken, da sich jene der negativen auf die Berechnung der positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$ zurückführen lässt.

121. Newton's Näherungsmethode. Bezeichnen wir mit x_1 die zu berechnende Wurzel der Gleichung:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0 \quad (1)$$

und mit a einen genäherten Werth derselben, so zwar, dass:

$$x_1 - a < \frac{1}{10}$$

sein soll. Setzen wir in (1) $x = a + y$ so erhalten wir [§. 92] die neue Gleichung:

$$A_0 y^m + f^{(m-1)}(a)\, y^{m-1} + \ldots\ldots + f''(a)\, y^2 + f'(a)\, y + f(a) = 0, \quad (2)$$

deren Wurzeln sämmtlich um a kleiner sind als die Wurzeln der Gl. (1) und welche demnach nothwendig eine Wurzel $y = x_1 - a$ besitzt, welche kleiner ist als $\frac{1}{10}$; aber auch nur eine solche Wurzel, weil, wenn deren mehrere existiren würden, die Gl. (1) eben so viele zwischen a und $a + \frac{1}{10}$ liegende Wurzeln haben müsste, was gegen die Voraussetzung streitet. Wir finden diese Wurzel näherungsweise aus der Gleichung: $f'(a)\, y + f(a) = 0$, indem wir in (2) die höheren Potenzen von y vernachlässigen, und erhalten daraus:

$$y = -\frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ und somit } x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

als genaueren Werth der gesuchten Wurzel. Diesen betrachten wir als neuen Näherungswerth a_1, setzen also:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \text{ und } x_1 = a_1 + y_1,$$

so ergiebt sich auf demselben Wege:

$$y_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \text{ und } x_1 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

welcher Werth von x_1 wieder genauer sein wird, als der frühere und mit welchem, als neuem Näherungswerthe, die Operation wiederholt wird, bis eine genügende Anzahl richtiger Dezimalstellen gefunden ist.

Bezeichnet man den Fehler des angenommenen Näherungswerthes a mit f, mit $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Fehler der successive berechneten Näherungswerthe und ist $f < \delta$, so ist im Allgemeinen $f_1 < \delta^2$, $f_2 < \delta^4$, $f_3 < \delta^8$, $f_4 < \delta^{16}$ u. s. w. Hat man daher die Wurzel x_1 zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, deren Unterschied nur $\frac{1}{10}$ beträgt und nimmt man für a das arithmetische Mittel aus beiden, so ist $f < 0,05$; und es wird daher der erste berechnete Näherungswerth im Allgemeinen in der 2ten oder 3ten Dezimalstelle, der zweite in der 4ten oder 5ten, der dritte in der 9ten bis 10ten Dezimalstelle u. s. w. noch richtig sein. Meistens wird die Näherung noch rascher erfolgen und zwar um so rascher, je grösser $f'(a)$ gegen $f(a)$ ist.

Da jedoch bei einer gewissen Beschaffenheit der Wurzeln die nach einander erhaltenen Näherungswerthe der Wurzel, statt dem wahren Werthe immer näher zu kommen, sich von demselben auch entfernen können (welcher Fall übrigens sehr selten eintritt), so kann man sich von dem Grade der Annäherung, welchen man erreicht hat, wenn man bei einem gewissen Näherungswerthe a_r stehen bleibt, leicht dadurch überzeugen, dass, wenn a_r in der k^{ten} Dezimalstelle noch richtig sein soll, $f(a_r)$ und $f(a_r')$ entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wenn a_r' den in der k^{ten} Dezimalstelle um eine Einheit erhöhten Werth von a_r bezeichnet.

Beispiel. Es sei die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

gegeben; durch Anwendung des Satzes §. 112 findet man, dass die Wurzeln derselben in den Intervallen $\{-1; -2\}$, $\{0, 1\}$ und $\{4, 5\}$ liegen. Soll nun z. B. die letzte Wurzel berechnet werden, so ist weiter $f(4) = -4$, $f(4,1) = -2,519$, $f(4,2) = -0,872$, $f(4,3) = +0,947$; die Wurzel liegt also zwischen 4, 2 und 4, 3 und wir nehmen als genäherten Werth $a = 4.25$ an. Da nun $f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$, so steht die Rechnung so:

$$a = 4,25, \text{ giebt } f(a) = +0,015625, f'(a) = +18,1875,$$
$$y = -0,000859$$

somit:

$$x = a + y = 4,249141$$

als erster nach (3) berechneter Näherungswerth. Da dieser im Allgemeinen in der 3ten Dezimalstelle nicht sicher ist, so hätten wir eigentlich $f(a)$ und $f'(a)$ nur in so viel Dezimalstellen zu entwickeln gebraucht, dass sich in y die 3te Dezimale noch richtig ergiebt; aus dem Umstande, dass $f(a)$ so klein ist, schliessen wir jedoch, dass $a = 4,25$ der Wahr-

heit schon sehr nahe kommt und daher in diesem Falle diese erste Näherung schon zu einem Werthe der Wurzel geführt haben wird, der mindestens in der 4ten oder 5ten Stelle noch richtig ist, wovon uns die nächste Näherung sogleich überzeugen wird. Wir setzen nun:

$$a_1 = 4,249141;\ \text{diess giebt}\ f(a_1) = +\ 0,000008393325$$
$$f'(a_1) = +\ 18,17247;\ \text{somit}\ y_1 = -\ 0,00000046187$$

und $$x = a_1 + y_1 = 4,2491405381,$$

ein Werth, welcher in der 9ten Dezimalstelle noch richtig ist. Auf gleiche Weise findet man für die beiden andern Wurzeln 0,853634511 und — 1,102775049, deren letzte als positive Wurzel der Gleichung $f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ berechnet ist.

122. Horner's Methode. Es sei:

$$f(x) = A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + A_2\, x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung; transformiren wir dieselbe in eine andere, deren Wurzeln um a kleiner sind, als die Wurzeln der Gl. (1) und wählen wir für a einen solchen Werth, dass das letzte Glied der transformirten Gleichung:

$$A_0\, y^m + f^{(m-1)}(a)\, y^{m-1} + \ldots\ldots + f'(a) = 0 \qquad (2)$$

so klein wird, dass wir es näherungsweise als 0 ansehen können, so ist offenbar $y = 0$ eine Wurzel der Gl. (2), somit $x = a$ eine Wurzel der Gl. (1). Auf diese Bemerkung gründet sich folgendes Verfahren:

Es sei:

$$x_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots\ldots \qquad (3)$$

die zu berechnende Wurzel und $x = a_0 + \frac{a_1}{10}$ ein genäherter Werth derselben, d. i. die untere von zwei nur um 0,1 auseinander liegenden Grenzen, zwischen welchen die Wurzel liegt; vermindern wir die Wurzeln der Gl. (1) um $a_0 + \frac{a_1}{10}$, so erhalten wir die transformirte Gleichung:

$$V_0\, x^m + V_1\, x^{m-1} + V_2\, x^{m-2} + \ldots\ldots + V_{m-2}\, x^2 + V_{m-1}\, x + V_m = 0 \qquad (4)$$

in welcher der Kürze wegen:

$$V_0,\quad V_1,\quad V_2, \ldots\ldots V_{m-2},\quad V_{m-1},\quad V_m$$

statt:

$$A_0, f^{(m-1)}\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right),\ f^{(m-2)}\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) \ldots\ldots f''\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right),$$
$$f'\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right),\ f\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)$$

gesetzt ist. Die Gleichung (4) besitzt nun eine Wurzel:

$$x = \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots\ldots \qquad (5)$$

welche $< \frac{1}{10}$ ist; aber auch nur eine von dieser Eigenschaft, weil wir auch hier die in der Vorerinnerung zu §. 121 gemachte Voraussetzung festhalten, dass zwischen $a_0 + \frac{a_1}{10}$ und $a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$ nur eine Wurzel der Gl. (1) liege. Da nun die Wurzel (5) der Gl. (4) $< \frac{1}{10}$ ist, so wird man einen genäherten Werth derselben $= \frac{a_2}{100}$ erhalten, wenn man in (4) die höheren Potenzen von x vernachlässigt und

$$V_{m-1}\, x + V_m = 0$$

setzt, woraus:

$$x = \frac{a_2}{100} = -\frac{V_m}{V_{m-1}} \qquad (6)$$

folgt. Wir erhalten daher die zweite Dezimalstelle a_2 der Wurzel (oder allgemeiner die nächste auf a_1 folgende von 0 verschiedene Dezimalstelle), indem wir das letzte Glied der Gl. (4) durch den Coefficienten des vorletzten dividiren und dabei nur die erste bedeutende Stelle des Quotienten suchen.

Sofort vermindern wir die Wurzeln der Gl. (4) um $\frac{a_2}{100}$, so besitzt die neue transformirte Gleichung:

$$V_0'\, x^m + V_1'\, x^{m-1} + \ldots\ldots + V'_{m-2}\, x^2 + V'_{m-1}\, x + V'_m = 0 \qquad (7)$$

eine Wurzel $x = \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \ldots\ldots$ welche $< \frac{1}{100}$ ist, und sich demnach wieder näherungsweise aus der Gleichung:

$$V'_{m-1}\, x + V'_m = 0 \text{ ergiebt, woraus } x = \frac{a_3}{1000} = -\frac{V'_m}{V'_{m-1}} \qquad (8)$$

folgt. Die dritte, oder allgemeiner die nächste auf a_2 folgende bedeutende Dezimalstelle der Wurzel ergiebt sich also abermals durch Division des letzten Gliedes der Gl. (7) durch den Coefficienten des vorletzten Gliedes.

Hierauf vermindere man die Wurzeln der Gl. (7) um $\frac{a_3}{1000}$, so erhalten wir eine neue transformirte Gleichung:

$$V_0''\, x^m + V_1''\, x^{m-1} + \ldots\ldots + V''_{m-2}\, x^2 + V''_{m-1}\, x + V''_m = 0 \qquad (9)$$

deren eine Wurzel $x = \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \ldots$ sich näherungsweise aus:

$$V''_{m-1}\, x + V''_m = 0, \text{ d. i. } x = \frac{a_4}{10000} = -\frac{V''_m}{V''_{m-1}} \quad (10)$$

ergiebt. Auf diese Weise wird fortgefahren, bis eine genügende Anzahl von Dezimalstellen der Wurzel entwickelt ist. Der ganze Rechnungsmechanismus ist, wenn man dabei das in §. 92 gelehrte Budan'sche Transformationsverfahren in Anwendung bringt, höchst einfach und gleichförmig. Die absoluten Glieder der aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen werden immer kleiner und im Verlaufe der Rechnung nur mit so viel Dezimalstellen (oder höchstens um eine mehr) entwickelt, als man in der Wurzel verlangt. Dabei haben die absoluten Glieder von V_m an immer dasselbe Zeichen, weil der wahre Werth der Wurzel immer auf derselben Seite der successiven Näherungswerthe $a_0 + \frac{a_1}{10}$, $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$, u. s. w. liegt, nämlich grösser ist als diese. Das absolute Glied V_m der ersten transformirten Gleichung hingegen hat mit A_m gleiches oder entgegengesetztes Zeichen, je nachdem zwischen 0 und $a_0 + \frac{a_1}{10}$ eine gerade (die 0 mit einbegriffen) oder ungerade Anzahl von Wurzeln liegt.

Was die Sicherheit betrifft, mit welcher die Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$, $-\frac{V'_m}{V'_{m-1}}$ u. s. w. die aufeinanderfolgenden Dezimalstellen $a_2, a_3, \ldots$ ergeben, so ist zu bemerken, dass es allerdings namentlich zu Anfang der Rechnung in Folge der vernachlässigten Glieder geschehen kann, dass sich eine oder die andere derselben zu klein oder zu gross ergiebt. Diess zeigt sich jedoch in der folgenden transformirten Gleichung. Wäre z. B. $-\frac{V_m}{V_{m-1}} = \frac{a_2}{100}$ zu klein, so würde die folgende transformirte Gleichung $-\frac{V'_m}{V'_{m-1}} = \frac{a_3}{1000}$ und $a_3 > 9$ ergeben, was nicht sein kann. Man wird daher a_2 um eine Einheit erhöhen und die Operation wiederholen. Wäre jedoch a_2 zu gross, so würde in der folgenden transformirten Gleichung das absolute Glied sein Zeichen ändern, weil die Wurzel in diesem Falle zwischen $a_0 + \frac{a_1}{10}$ und $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$ läge und bekanntlich:

$$V_m = f\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right) \text{ und } V'_m = f\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}\right)$$

ist.

Auch ist leicht einzusehen, dass die zwei letzten Glieder in den transformirten Gleichungen immer entgegengesetzte Zeichen haben müssen, wodurch sich das negative Vorzeichen in (6), (8), (10) erklärt. Denn da der Zahlenwerth des letzten Gliedes in den aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen immer kleiner und kleiner wird, so ist das Polynom $f(x)$ in der Nähe des Werthes:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_3}{100} + \ldots$$

im Zunehmen oder Abnehmen begriffen, je nachdem das letzte Glied der transformirten Gleichungen negativ oder positiv ist. Im ersten Falle muss aber [§. 119, 1. Hülfssatz] der Coefficient des vorletzten Gliedes, als die erste abgeleitete Funktion von $f(x)$, für eben diesen Werth von x, somit auch für die genäherten Werthe:

$$a_0 + \frac{a_1}{10},\ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100},$$

u. s. w. positiv, im zweiten negativ sein.

123. Zur Erläuterung dieser Methode, welche unter allen bekannten ohne Zweifel den grössten praktischen Werth hat, mögen folgende Beispiele dienen. Es ist schon oben bemerkt worden, dass man die absoluten Glieder mit so vielen Dezimalstellen entwickelt und bis zu Ende fortführt, als man in der Wurzel sichere Dezimalstellen verlangt. Hingegen werden in den übrigen Gliedern der transformirten Gleichungen nur immer so viele Stellen beibehalten, als auf die letzte Stelle des absoluten Gliedes von Einfluss sind.

1. Beispiel. Nehmen wir die bereits oben behandelte Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

vor, deren Wurzeln in den Intervallen $\{0; 1\}$, $\{4; 5\}$, $\{-1; -2\}$ liegen und berechnen wir die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel mit 9 Dezimalstellen. Sie liegt, wie man leicht findet, zwischen 0,8 und 0,9; es ist also:

$$x = 0,8\left(= a_0 + \frac{a_1}{10}\right)$$

ein genäherter Werth und wir vermindern die Wurzeln der Gl. um 0,8 und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -4 & -2 & +4 \\ 0{,}8] & 1 & -3{,}2 & -4{,}56 & +0{,}352 \\ & & -2{,}4 & -6{,}48 & \\ & & -1{,}6. & & \end{array}$$

Die erste transformirte Gleichung ist sonach:

$$x^3 - 1{,}6\,x^2 - 6{,}48x + 0{,}352 = 0,$$

woraus man:

$$\frac{a_2}{100} = -\frac{0{,}352}{-6{,}48} = 0{,}05$$

findet; somit ist $x = 0{,}85$. Wir vermindern jetzt die Wurzeln dieser Gleichung um $0{,}05$ und haben:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -1{,}6 & -6{,}48 & +0{,}352 \\ 0{,}05] & 1 & -1{,}55 & -6{,}5575 & +0{,}024125 \\ & & -1{,}50 & -6{,}6325 & \\ & & -1{,}45 & & \end{array}$$

Es ist daher die zweite transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1{,}45x^2 - 6{,}6325x + 0{,}024125 = 0,$$

woraus man:

$$\frac{a_3}{1000} = -\frac{0{,}0241\ldots}{-6{,}63\ldots} = 0{,}003$$

findet, wodurch $x = 0{,}853$ wird. Wir vermindern sofort die Wurzeln der letzten Gleichung um $0{,}003$ und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1, & -1{,}45 & -6{,}6325 & +0{,}024125 \\ {\scriptstyle 2}\,0{,}03] & & -1{,}447 & -6{,}636841 & +0{,}004214477 \\ & & -1{,}444 & -6{,}641173 & \\ & & -1{,}441 & & \end{array}$$

die 3te transformirte Gleichung ist also:

$$x^3 - 1{,}441x^2 - 6{,}641173x + 0{,}004214477 = 0,$$

welche die 4te Dezimalstelle:

$$\frac{a_4}{10000} = -\frac{0{,}0042\ldots}{-6{,}64\ldots} = 0{,}0006$$

liefert; diess giebt $x = 0{,}8536$ und wenn wir die Wurzeln der letzten Gleichung wieder um $0{,}0006$ vermindern,

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & -1{,}441 & -6{,}641173 & +0{,}004214477 \\ {\scriptstyle 3}\,0{,}06] & & -1{,}441 & -6{,}642038 & +0{,}000229254 \\ & & -1{,}44 & -6{,}64290 & \\ & & -1{,}44 & & \end{array}$$

als transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1,4x^2 - 6,64290x + 0,000229254 = 0,$$

aus welcher die 5te Dezimalstelle:

$$\frac{a_5}{100000} = -\frac{0,000229\ \ldots}{-\ 6,64\ \ldots} = 0,00003$$

folgt; es ist also $x = 0,85363$.

Wir haben hier im 2ten und 3ten Coefficienten bereits Dezimalstellen weggelassen; denn da wir im letzten Gliede 9 richtige Dezimalstellen brauchen, der nächste Operationsfaktor 0,00003 jedoch schon 5 Dezimalstellen hat, so bedürfen wir im vorletzten Faktor nur 9—5=4 Stellen und eine zur Correctur, also im ganzen nur 5, im 2ten Coefficienten daher 5 — 5 + 1 = 1 Stelle. Vermindern wir jetzt die Wurzeln der letzten Gleichung um 0,00003, so folgt:

$$\begin{array}{rrrr} 1, & -1,4 & -6,64290 & +0,000229254 \\ 0,03] & -1,4 & -6,64294 & +0,000029966 \\ & & -6,6430 & \end{array}$$

somit als nächste transformirte Gleichung:

$$x^3 - 1,4\,x^2 - 6,6430x + 0,000029966 = 0$$

in welcher, da der nächste Operationsfaktor 6 Dezimalstellen hat, der vorletzte Coefficient nur mit 4, der zweite eigentlich mit 4—6 + 1 = —1 Stellen anzusetzen ist, so dass wir in diesem auch die Einheiten nicht mehr brauchen. Daraus folgt, dass der vorletzte Coefficient keine Aenderung mehr erleidet, und von jetzt an verwandelt sich das Aufsuchen der noch fehlenden vier letzten Dezimalstellen der Wurzel, wie eine leichte Ueberlegung, oder der Versuch, die folgenden Transformationen wirklich vorzunehmen, lehrt, in eine einfache Division:

$$\begin{array}{rl} 0,000029966 : 6,643 = & 0,0000045\,11 \\ 3394 & \\ 73 & \\ 7 & \end{array}$$

Die Wurzel ist somit auf 9 Dezimalstellen richtig: $x = 0,853634511$.

Berechnen wir eben so die zweite in dem Intervalle $\{4; 5\}$ liegende positive Wurzel. Wenn, wie es hier der Fall ist, die Wurzel einen ganzen Bestandtheil hat, so ist es kaum nöthig, sie in engere Grenzen einzuschliessen und die Zehntel noch nach §. 112 zu suchen, da sich diese immer schon wenigstens sehr nahe durch die Horner'sche Methode ergeben. Die folgende Rechnung wird nun ohne weitere Bemerkung verständlich sein; die successiven Transformationen sind durch einen Horizontalstrich getrennt; die letzten zunächst über einem Strich stehenden Zahlen jeder Verticalcolumne sind die Coefficienten der transformirten Gleichung und für die folgende Transformation nicht neuerdings angesetzt.

	1 — 4	— 2	+ 4	$x = 4{,}249140538$
4]	0	— 2	— 4*)	
	+ 4	+ 14		
	+ 8		4 : 14 = 0,2	
0,2]	+ 8,2	+ 15,64	— 0,872	
	8,4	17,32		
	8,6		0,872 : 17, .. = 0,04	
0,04]	+ 8,64	+ 17,6656	— 0,165376	
	8,68	18,0128		
	8,72		0,165 .. : 18 = 0,009	
2 0,09]	+ 8,729	+ 18,091361	— 0,002553751	
	8,738	18,170003		
	8,747		0,00255 .. : 18 = 0,0001	
3 0,01]	+ 8,747	+ 18,170878	— 0,000736662	
		18,17175		
			0,000736 .. : 18 = 0,00004	
4 0,04	+ 8,7	+ 18,17210	— 0,000009778	
		18,1724		

0,000009778 : 18,17 = 0,000000538
693
148

Die Wurzel ist demnach $x = 4{,}249140538$.

Die dritte in dem Intervalle $\{-1, -2\}$ liegende Wurzel berechnen wir endlich aus der Gleichung $f(-x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ wie folgt:

	1 + 4	— 2	— 4	$x = 1{,}102775049$
1]	5	+ 3	— 1	
	6	9		
	7		1 : 9 = 0,1	
0,1]	7,1	9,71	— 0,029	
	7,2	10,43		
	7,3		0,029 : 10 = 0,002	
2 0,02]	7,302	10,444604	— 0,008110792	
	7,304	10,459212		
	7,306		0,0081 : 10,4 = 0,0007	
3 0,07]	7,307	10,464327	— 0,000785763	
	7,31	10,46944		
			0,00078 : 10 = 0,00007	
4 0,07]		10,46995	— 0,000052867	
		10,4705		

0,000052867 : 10,4705 = 0,000005049
5145
957

*) Dieser Zeichenwechsel rührt von der zwischen 0 und 4 liegenden Wurzel 0,8 ... her.

somit die dritte Wurzel $x = -1,102775049$. Die Summe der drei Wurzeln ist $= 4$, wie es sein soll.

124. Die Regula falsi. Man versteht hierunter eine Auflösungsmethode der Gleichungen, welche aus zwei bekannten genäherten Werthen der Wurzel und den Substitutionsresultaten derselben einen genaueren Werth finden lehrt. Es seien:

$$f(x) = A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + \ldots + A_m = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, x_1 die gesuchte Wurzel und a_1, a_2 zwei genäherte Werthe derselben (die Hypothesen) so kann man $x_1 = a_1 + \delta_1$ und $x_2 = a_2 + \delta_2$ setzen, wo also δ_1, δ_2 die Fehler der Hypothesen sind und kleiner als 1 angenommen werden. Substituiren wir $a_1 = x_1 - \delta_1$ und $a_2 = x_1 - \delta_2$ in die gegebene Gleichung, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} f(a_1) &= f(x_1 - \delta_1) = f(x_1) - \delta_1 f'(x_1) + \delta_1^2 f''(x_1) - \ldots \pm \delta_1^m f^{(m)}(x_1) \\ f(a_2) &= f(x_1 - \delta_2) = f(x_1) - \delta_2 f'(x_1) + \delta_2^2 f''(x_1) - \ldots \pm \delta_2^m f^{(m)}(x_1). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Beachtet man nun, dass, weil x_1 die gesuchte Wurzel, $f(x_1) = 0$ ist, und dass δ_1, δ_2 kleine Grössen sind, deren höhere Potenzen wir, da es sich bloss um eine Näherung handelt, vernachlässigen können, so gehen die letzten Gleichungen über in:

$$f(a_1) = -\delta_1 f'(x_1) \text{ und } f(a_2) = -\delta_2 f'(x_1)$$

aus welchen durch Division:

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \qquad (3)$$

folgt, eine Gleichung, welche zeigt, dass die Substitutionsresultate zweier genäherter Werthe der Wurzel sich näherungsweise verhalten, wie die Fehler dieser Werthe, eine Regel, welche man gewöhnlich so ausspricht: die Fehler der Resultate verhalten sich wie die Fehler der Hypothesen.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass dieser Satz immer nur näherungsweise gilt und um so richtiger ist, je kleiner die Fehler δ_1, δ_2 der Hypothesen sind. Aus (3) folgt nun:

$$\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = \frac{x_1 - a_1}{x_1 - a_2}$$

woraus man:

$$x_1 = \frac{a_2 f(a_1) - a_1 f(a_2)}{f(a_1) - f(a_2)} = a_1 + \frac{(a_2 - a_1) f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)} \qquad (4)$$

als genaueren Werth der Wurzel zieht. Verbindet man diesen mit einem der früheren Näherungswerthe, a_1 oder a_2, je nachdem nume-

risch $f(a_1) <$ oder $> f(a_2)$ ist, oder auch mit einem anderen plausibleren Werthe und wiederholt die Rechnung nach Formel (4), so erhält man abermals einen genaueren Werth u. s. f. Für den Praktiker ist diese Methode ihrer Einfachheit wegen und namentlich desshalb von grossem Werthe, weil sie auch auf transcendente Gleichungen unverändert Anwendung findet, was darin seinen Grund hat, dass, wie wir später sehen werden, jede Funktion $f(x)$ in die Form der Gl. (2) entwickelt werden kann, nur mit dem hier nicht in Betracht kommenden Unterschiede, dass der rechte Theil der Gl. (2) eine unendliche Reihe wird, wenn $f(x)$ eine transcendente Funktion ist.

1. Beispiel. Berechnen wir die zwischen 4 und 5 liegende Wurzel der Gleichung $x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$, so erhalten wir:

für $a_1 = 4$	$f(a_1) = -4$		
$a_2 = 5$	$f(a_2) = +19$,	somit	$x_1 = 4,2$
für $a_1 = 4$	$f(a_1) = -4$		
$a_2 = 4,2$	$f(a_2) = -0,872$		$x_1 = 4,25$
für $a_1 = 4,2$	$f(a_1) = -0,872$		
$a_2 = 4,25$	$f(a_2) = +0,015625$		$x_1 = 4,2491$
für $a_1 = 4,2491$	$f(a_1) = -0,00073667$		
$a_2 = 4,25$	$f(a_2) = +0,015625$		$x_1 = 4,24914052$
für $a_1 = 4,2491$	$f(a_1) = -0,00073667$		
$a_2 = 4,24914052$	$f(a_2) = -0,00000033$		$x_1 = 4,249140538$

so wie oben. Um auch die Anwendung dieser Methode auf transcendente Gleichungen zu erläutern, wählen wir als

2tes Beispiel die Gleichung $f(x) = x \log x - 17 = 0$, unter log briggische Logarithmen verstanden. Man findet mit Hülfe der Logarithmentafeln sehr leicht, dass x zwischen 14 und 15 liegt und setzt also:

$a_1 = 14$	$f(a_1) = -0,954$	
$a_2 = 15$	$f(a_2) = +0,641$	$x = 14,6$
$a_1 = 14,6$	$f(a_1) = -0,000448$	
$a_2 = 14,7$	$f(a_2) = +0,159564$	$x = 14,600280.$

Für diesen Werth von x reducirt sich der Ausdruck $x \log x - 17$ in den ersten 6 Dezimalstellen schon auf 0 und die Näherung lässt sich daher, wenn man nur mit siebenstelligen Logarithmen rechnet, nicht weiter treiben, da mit solchen der Werth von $x \log x$ sich nur mit 6 Dezimalstellen richtig ergiebt.

3tes Beispiel. Man suche den Bogen x aus der Gleichung:

$$f(x) = x - 0,2 \sin x - \text{arc } (82^0\ 24'\ 37,''85) = 0.$$

Aus einer Tafel, welche die Längen der Kreisbogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt enthält, findet man zunächst:

$$\text{arc}\,(82^0\ 24'\ 37,''85) = 1,4383348,$$

so dass die Gleichung eigentlich lautet:

$$f(x) = x - 0,2\sin x - 1,4383348 = 0;$$

beachtet man nun, dass $x > 82^0$ sein muss und in dieser Gegend $\sin x$ nahe $= 1$ ist, so ersieht man sogleich aus derselben Tafel, dass x zwischen 93^0 und 94^0 liegen muss, da $\text{arc}\ 93^0 = 1.623\ldots.$, und $\text{arc}\ 94^0 = 1.641\ldots$ ist. Man setze also:

$$a_1 = 93^0 \text{ so wird } f(a_1) = -0,01490$$
$$a_2 = 94^0 \qquad f(a_2) = +0,00277$$

und man erhält, da $a_2 - a_1 = 1^0$ ist, nach (4) als genaueren Werth:

$$x = 93^0 + 1^0 \cdot \frac{-0,01490}{-0,01767} = 93^0 + 0^0,843 = 93^0\ 50,'6$$

Setzen wir ferner:

$$a_1 = 93^0\ 50', \text{ so wird } f(a_1) = -0,0001867$$
$$a_2 = 93^0\ 51' \qquad f(a_2) = +0,0001080 \text{ und hiemit:}$$
$$x = 93^0\ 50' + 1' \cdot \frac{-0,0001867}{-0,0002947} = 93^0\ 50'\ 38,''01,$$

welcher Werth bis auf eine Einheit in der 7ten Dezimalstelle der Gleichung Genüge leistet.

Berechnung gleicher und nahe gleicher Wurzeln.

125. Enthält eine Gleichung wiederholte Wurzeln, so kann man nach der in §. 95 entwickelten Theorie aus derselben andere Gleichungen ableiten, welche entweder alle Wurzeln, aber jede nur einmal, oder bloss die ungleichen Wurzeln, oder bloss die wiederholten Wurzeln, jede nur einmal enthält und welche sofort nach den in den vorhergehenden §§. dargestellten Methoden aufgelöst werden können. Man kann jedoch auch die Aufgabe stellen, eine wiederholte Wurzel unmittelbar aus der gegebenen Gleichung zu berechnen. Dass die obigen Methoden nicht ohne Weiteres auch auf solche Wurzeln angewendet werden können, ist leicht einzusehen. Sowohl bei Newton's als Horner's Methode wird die Verbesserung eines schon genäherten Werthes a einer Wurzel x_1 durch den Quotienten $-f(a):f'(a)$ gegeben; ist nun diese Wurzel eine wiederholte, so ist nebst $f(x_1)$ auch $f'(x_1)=0$ und in den successiven Näherungen convergiren sowohl Zähler als

Nenner jenes Quotienten gegen die Null, wodurch derselbe unfähig wird, die gesuchte Verbesserung auszudrücken. Die Regula falsi würde, wie diess aus den Gl. (2), §. 124 hervorgeht, die Auflösung einer Gleichung vom r^{ten} Grade erfordern, wenn die Wurzel in der gegebenen Gleichung $r$mal vorkommt, wodurch diese Methode auch unbrauchbar wird. Die Horner'sche Methode lässt sich hingegen mit geringen Modifikationen auch auf diesen Fall anwenden.

Sei nämlich $x = a + w$ eine wiederholte Wurzel der gegebenen Gleichung und a ein genäherter Werth derselben. Vermindern wir die Wurzeln der gegebenen Gleichung um a, so erhalten wir als transformirte Gleichung:

$$\varphi(w) = V_0 w^m + V_1 w^{m-1} + \ldots + V_{m-4} w^4 + V_{m-3} w^3 + V_{m-2} w^2 + V_{m-1} w + V_m = 0, \quad (1)$$

welche nun die Wurzel w mehrmals enthält.

Ist nun diese Wurzel eine doppelte, so ist nebst $\varphi(w)$ auch noch $\varphi'(w) = 0$, d. h. es besteht die Gleichung:

$$\varphi'(w) = m V_0 w^{m-1} + \ldots + 3 V_{m-3} w^2 + 2 V_{m-2} w + V_{m-1} = 0,$$

in welcher wohl $V_{m-1} = f'(a)$, nicht aber $V_{m-2} = f''(a)$ gegen Null convergirt, weil die Wurzel nur als zweifache vorausgesetzt wurde und somit der Gl. $\varphi'(w) = 0$ nur einmal zukommt. Man kann daher näherungsweise $2 V_{m-2} w + V_{m-1} = 0$ setzen, woraus als genäherter Werth:

$$w = -\frac{V_{m-1}}{2 V_{m-2}}$$

folgt. Dieser Ausdruck tritt daher bei einer doppelten Wurzel an die Stelle des Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$ in §. 122. Um daher die successiven Dezimalstellen einer doppelten Wurzel zu erhalten, wird man in den aufeinanderfolgenden transformirten Gleichungen den vorletzten Coefficienten durch den vorvorletzten dividiren und vom Quotienten die Hälfte nehmen.

Ist die Wurzel eine dreifache, so besteht nebst der Gl. (2) auch noch die folgende:

$$\varphi''(w) = m(m-1) V_0 w^{m-2} + \ldots + 2.3 V_{m-3} w + 2 V_{m-2} = 0,$$

aus welcher sofort näherungsweise $2.3 V_{m-3} w + 2 V_{m-2} = 0$, d. i.

$$w = -\frac{V_{m-2}}{3 V_{m-3}}$$

folgt; die successiven Dezimalstellen einer dreifachen Wurzel ergeben

sich daher, wenn man den drittvorletzten Coefficienten durch den viertvorletzten dividirt und vom Quotienten ein Drittel nimmt.

Auf diese Weise fortfahrend kommt man zu dem Schlusse, dass sich bei Anwendung des Horner'schen Verfahrens die successiven Dezimalstellen der Wurzel aus den Quotienten:

$$-\frac{V_m}{V_{m-1}}, -\frac{1}{2}\frac{V_{m-1}}{V_{m-2}}, -\frac{1}{3}\frac{V_{m-2}}{V_{m-3}}, \ldots\ldots -\frac{1}{p}\frac{V_{m-p+1}}{V_{m-p}}, \qquad (2)$$

ergeben, je nachdem die Wurzel eine 1, 2, 3, ... oder $p$fache ist.

Ein ausgeführtes Beispiel dürfte bei der Einfachheit der Sache unnöthig sein, man kann z. B. das Verfahren auf die Gleichung:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

anwenden, welche 2 Paare gleicher Wurzeln enthält, das eine zwischen 1, 6 und 1, 7, das andere zwischen — 0, 6 und — 0, 7, (nämlich $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$).

126. Man kann die obigen Ausdrücke (2) noch in einer anderen Form darstellen. Nehmen wir zuerst an, die fragliche Wurzel sei eine doppelte, so enthält auch die Gl. (1) im vor. §. die Wurzel w zweimal; betrachten wir nun w als eine kleine Grösse erster Ordnung, so sind die drei letzten Glieder der Gl. (1) von der 2ten, die übrigen jedoch von höherer Ordnung, so dass wir mit Vernachlässigung dieser Glieder, w aus der Gleichung:

$$V_{m-2}\, w^2 + V_{m-1}\, w + V_m = 0$$

näherungsweise bestimmen können. Nebst dieser besteht aber noch, weil w eine doppelte Wurzel, näherungsweise die Gleichung:

$$2\, V_{m-2}\, w + V_{m-1} = w$$

aus welcher der bereits oben für w gefundene Werth $-\frac{V_{m-1}}{2\, V_{m-2}}$ folgt; eliminirt man aber aus beiden letzten Gleichungen die Grösse V_{m-2}, so erhält man $w = -\frac{2\, V_m}{V_{m-1}}$, so dass sich also aus beiden Ausdrücken:

$$-\frac{V_{m-1}}{2\, V_{m-2}} \text{ und } -\frac{2\, V_m}{V_{m-1}}$$

nahe derselbe genäherte Werth für w ergeben muss und zwar werden die beiden Werthe einander um so näher kommen, je kleiner w ist.

Ist die Wurzel eine dreifache, so bestehen näherungsweise die Gleichungen:

$$V_{m-3}\, w^3 + V_{m-2}\, w^2 + V_{m-1}\, w + V_m = 0$$
$$3\, V_{m-3}\, w^2 + 2\, V_{m-2}\, w + V_{m-1} = 0$$
$$6\, V_{m-3}\, w + 2\, V_{m-2} = 0$$

deren letzte den schon oben gefundenen Ausdruck für $w = -\frac{V_{m-2}}{3\, V_{m-3}}$ liefert; aus den beiden andern erhält man durch successive Elimination von V_{m-3} und V_{m-2} noch die Ausdrücke:

$$w = -\frac{V_{m-1}}{V_{m-2}} \text{ und } w = -\frac{3\, V_m}{V_{m-1}}.$$

Bei einer 4fachen Wurzel würde man auf demselben Wege für w die Ausdrücke:

$$-\frac{V_{m-3}}{4\, V_{m-4}}, -\frac{2\, V_{m-2}}{3\, V_{m-3}}, -\frac{3\, V_{m-1}}{2\, V_{m-2}}, -\frac{4\, V_m}{V_{m-1}}$$

finden u. s. w. und immer kommen die numerischen Werthe dieser verschiedenen Ausdrücke einander um so näher, je kleiner w schon ist.

127. Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, die Horner'sche Methode auch auf die Trennung und gleichzeitige Berechnung nahe gleicher Wurzeln mit Vortheil anzuwenden.

Nehmen wir an, eine Gleichung besitze zwei nahe gleiche Wurzeln, welche den ganzen Bestandtheil a_0 und die r ersten Dezimalstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ gemeinschaftlich haben, so dass sich dieselben erst in der $(r+1)^{\text{ten}}$ Stelle trennen. Hat man sich nun durch die Analyse der Gleichung, etwa nach dem Sturm'schen Lehrsatze den gemeinschaftlichen Näherungswerth $a_0 + \frac{a_1}{10}$ verschafft, so vermindere man zuerst die Wurzeln der Gleichung um diese Grösse und erhält sofort die übrigen gemeinschaftlichen Wurzelziffern aus den successiven transformirten Gleichungen mittelst des Quotienten $-\frac{V_{m-1}}{2\, V_{m-2}}$, indem in Bezug auf diese Stellen die beiden Wurzeln offenbar als Gleiche zu betrachten sind; die so erhaltenen Dezimalziffern müssen mit jenen übereinstimmen, welche der Quotient $-\frac{2\, V_m}{V_{m-1}}$ giebt, was als Probe gilt, dass dieselben beiden Wurzeln angehören. Auf diese Weise fährt man fort bis zu jener Dezimalstelle, an welcher sich beide Wurzeln trennen; diese wird sich dadurch verrathen, dass sie sich nicht gleichlautend aus den beiden obigen Quotienten ergiebt, oder wenn diess bisweilen noch der Fall ist, die aus $-\frac{V_{m-1}}{2\, V_{m-2}}$ sich ergebende Dezi-

malziffer einen Zeichenwechsel des letzten Gliedes bewirkt, was offenbar andeutet, dass man über die kleinere Wurzel bereits hinweggegangen ist. Die folgenden ungleichen Dezimalstellen beider Wurzeln ergeben sich nun auf gewöhnliche Weise aus dem Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$, wobei nur die ersten ungleichen Ziffern a_{r+1} und a'_{r+1} beider Wurzeln einige Versuche erfordern werden; für a_{r+1} ist offenbar die grösste Zahl zu nehmen, für welche das Zeichen des letzten Gliedes der transformirten Gleichung, welche auf jene folgt, die die letzte gemeinschaftliche Dezimalstelle geliefert hat, noch ungeändert bleibt; für a'_{r+1} die grösste Zahl, für welche dieses Glied noch einen Zeichenwechsel erleidet.

Aehnlich ist der Vorgang, wenn die Gleichung in einem bestimmten Intervalle mehr als zwei, z. B. p nahe gleiche Wurzeln besitzt. Bezeichnet wieder $a_0 + \frac{a_1}{10}$ einen gemeinschaftlichen Näherungswerth und hat man zunächst die Wurzeln der Gl. um $a_0 + \frac{a_1}{10}$ vermindert, so ergeben sich die folgenden gemeinschaftlichen Wurzelziffern aus dem Quotienten $-\frac{V_{m-p+1}}{p \cdot V_{m-p}}$ und müssen mit den aus dem Quotienten $-\frac{p\ V^m}{V_{m-1}}$ abgeleiteten stimmen. Die Wurzeln trennen sich an der Stelle, bei welcher diese Uebereinstimmung aufhört oder ein Zeichenwechsel im letzten Gliede andeutet, dass die kleinste Wurzel überschritten ist, welche sodann aus der letzten transformirten Gleichung mittelst des gewöhnlichen Quotienten $-\frac{V_m}{V_{m-1}}$ weiter entwickelt werden kann. Aus derselben transformirten Gleichung erhält man die übrigen Wurzeln ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die im letzten Gliede eintretenden Zeichenwechsel, wenn sämmtliche p Wurzeln an der ersten auf die letzte gemeinschaftliche Ziffer folgenden Stelle verschiedene Ziffern haben. Haben aber einige dieser Wurzeln an der genannten Stelle wieder gemeinschaftliche Ziffern, so wird sich die Abtrennung der einzelnen Gruppen durch den Verlust mehrerer Zeichenwechsel — übereinstimmend mit dem Budan'schen Lehrsatze — verrathen und es ist dann das Verfahren der nahe gleichen Wurzeln wieder auf eine jede solche einzelne Gruppe anzuwenden. — Da übrigens dieser Fall in der Praxis nicht leicht vorkommt, so möge diese kurze Andeutung hier genügen, indem einige die Rechnung abkürzende Kunstgriffe dem aufmerksamen Rechner sich theils selbst darbieten, theils nur bei grösserer Uebung geläufig bleiben.

Als Beispiel wollen wir die bereits in §. 119 analysirte Gleichung $x^4 + 40x^3 + 185x^2 - 198x + 48 = 0$ wählen, welche zwei nahe gleiche Wurzeln in dem Intervalle $\{0, 4$ und $0, 5\}$ besitzt; vermindern wir daher zunächst die Wurzeln der Gleichung um 0, 4 und verfahren sodann nach obiger Vorschrift, so steht die Rechnung so:

	$1 + 40$	$+ 185$	$- 198$	$+ 48$
$0, 4]$	$40,4$	$201,16$	$117,536$	$0,9856$
	$40,8$	$217,48$	$30,544$	
	$41,2$	$233,96$	$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,06$,	$\frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,06$
	$41,6$			
$0,06]$	$1 + 41,66$	$+ 236,4596$	$- 16,356424$	$+ 0,00421456$
	$41,72$	$238,9628$	$2,018656$	
	$41,78$	$241,4696$	$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,004$,	$\frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,004$
	$41,84$			
$0,04]^2$	$1 + 41,85$	$+ 241,6370$	$- 1,052108$	$+ 0,00000613$
		$241,8044$	$0,084890$	
		$241,9718$		
			$\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}} = 0,0001$,	$\frac{2V_m}{V_{m-1}} = 0,00007$

Bis zur 3ten Dezimalstelle geben die beiden Quotienten $\frac{V_{m-1}}{2V_{m-2}}$ und $\frac{2V_m}{V_{m-1}}$ dieselbe Ziffer; es sind daher 0,464 die gemeinschaftlichen Anfangsziffern beider Wurzeln, welche sich in der 4ten Dezimalstelle trennen. Vermindert man nun die Wurzeln der letzten transformirten Gleichung um 0,0001, so bleibt das letzte Glied positiv; vermindert man um 0,0002, so wird es negativ und wird abermals positiv, wenn man um 0,0003 vermindert. Daher ist 1 die vierte Stelle der einen, 2 die der andern Wurzel, welche somit jetzt getrennt sind und nach dem gewöhnlichen Verfahren weiter entwickelt werden können.

Für die kleinere Wurzel hat man:

1	$+ 42$	$+ 241,972$	$- 0,08489$	$+ 0,00000613$
		$+ 241,98$	$- 0,06069$	$+ 0,00000006$
			$- 0,03649$	

Das letzte Glied durch das vorletzte dividirt, giebt 0,000002 und die Wurzel heisst also auf 6 Dezimalstellen genau: 0, 464102.

Für die andere Wurzel steht die Rechnung wie folgt:

$0,02]^3$	$1 + 42$	$+ 241,972$	$- 0,08489$	$+ 0,00000613$
		$241,98$	$- 0,03649$	$- 0,00000117$
		$241,99$	$+ 0,01191$	
		242		
$0,04^4$		242	$+ 0,0216$	$- 0,00000031$
			$0,0313$	

Die Wurzel ist demnach $= 0, 464249$.

B. Gleichungen mit zwei und mehreren Unbekannten.

128. Wenn zwischen zwei Unbekannten x, y zwei algebraische Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grade gegeben sind, so können dieselben, indem man sie nach Potenzen der einen Unbekannten ordnet, immer von folgender Form vorausgesetzt werden:

$$P = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \quad (1)$$

$$Q = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + B_3 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} x + B_m = 0 \quad (2)$$

wo die Coefficienten A und B ganze rationale Funktionen der zweiten Unbekannten y sind. Der Grad einer solchen Gleichung bestimmt sich durch die höchste vorkommende Exponentensumme der in einem Gliede multiplicirten Potenzen von x und y, wobei auch einer der Exponenten Null sein kann. Eine vollständige Gleichung des n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten, wie (1), enthält daher alle Potenzen von x und y, welche diesen Grad nicht übersteigen, so wie alle Produkte dieser Unbekannten, in welchen die Summe ihrer Exponenten die Zahl n nicht überschreitet. Fehlen einige dieser Glieder, so heisst die Gleichung unvollständig.

Sollen demnach die Gleichungen (1) und (2), wie vorausgesetzt wurde, beziehungsweise vom n^{ten} und m^{ten} Grade sein, so dürfen die Coefficienten A_0, B_0, y nicht enthalten; ferner sind A_1, B_1 ganze Funktionen von y höchstens vom 1sten; A_2, B_2 höchstens vom 2ten; A_3, B_3 höchstens vom 3ten u. s. w., A_n, B_m beziehungsweise höchstens vom n^{ten} und m^{ten} Grade. Da A_0, B_0 von y unabhängig sind, so können wir die Gleichungen durch diese Coefficienten dividirt denken, was wir in der Folge als geschehen annehmen wollen.

Jedes System von Werthen der beiden Unbekannten, $x = \alpha$, $y = \beta$, welche in (1) und (2) substituirt, diesen Gleichungen Genüge leisten, heisst eine Auflösung oder ein Wurzelpaar. Ueberschreiten diese Gleichungen den ersten Grad, so lassen sie immer mehrere Auflösungen zu, deren Anzahl jedoch, wie später gezeigt werden wird, nicht grösser sein kann, als das Produkt mn Einheiten hat. Man gelangt zu diesen Auflösungen, indem man aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, etwa x, eliminirt, d. h. aus ihnen eine neue Gleichung ableitet, welche nur y enthält und aus welcher sofort die Werthe dieser Unbekannten gefunden werden können, welche in Verbindung mit den korrespondirenden Werthen von x die Gleichungen (1) und (2) identisch machen. Diese Gleichung in y, die sogenannte Eliminationsgleichung, muss offenbar die Eigenschaft besitzen, dass sie nicht durch mehr und nicht durch weniger Werthe von y erfüllt wird, als die Gleichungen (1), (2) Auflösungen zulassen.

Sei $x = \alpha$, $y = \beta$ ein Wurzelpaar der Gl. (1), (2), und denken wir uns den Werth $y = \beta$ aus der Eliminationsgleichung bereits gefunden und in beide Gleichungen substituirt, so enthalten dieselben nur mehr die Unbekannte x und müssen offenbar für $x = \alpha$ beide identisch werden, somit den gemeinschaftlichen Wurzelfaktor $(x - \alpha)$ besitzen. Hieraus folgt, dass man die zu irgend einem Wurzelwerthe β von y gehörigen Werthe von x finden wird, wenn man β statt y in den Polynomen (1) und (2) substituirt, zwischen beiden den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ sucht und die Gl. $\varphi(x) = 0$ auflöst. Jede Wurzel der Gl. $\varphi(x) = 0$ giebt in Verbindung mit $y = \beta$ eine Auflösung der Gleichungen (1) und (2). Beachtet man die oben angeführte wesentliche Eigenschaft der Eliminationsgleichung, so folgt aus dem eben Gesagten, dass, wenn die Gl. $\varphi(x) = 0$ vom k^{ten} Grade ist, die Wurzel β der Eliminationsgleichung $k$mal zukommen muss; und umgekehrt.

Wie man sieht, kommt es daher nur noch auf die Bildung der Eliminationsgleichung an, wozu wir verschiedene Methoden besitzen.

129. Das aus den Elementen unter dem Namen der Substitutionsmethode bekannte Verfahren, aus zwei Gleichungen des ersten Grades eine Unbekannte zu eliminiren, lässt sich auch auf höhere Gleichungen mit gutem Erfolge anwenden. Es besteht bekanntlich darin, aus der einen Gleichung, etwa (1), den Werth von x in Funktion von y ausgedrückt zu nehmen und in (2) zu substituiren, wodurch man eine Gleichung in y erhält, welche sämmtliche Werthe dieser Unbekannten darbieten wird, für welche beide Gleichungen zusammen bestehen können.

Da aber die Gleichung (1), nach x aufgelöst, n Werthe für diese Unbekannte liefert, etwa:

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y), \ldots\ldots x_n = \varphi_n(y),$$

so haben wir jede dieser Wurzeln in (2) zu substituiren; wir erhalten dadurch n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
Y_1 &= x_1^m + B_1 x_1^{m-1} + B_2 x_1^{m-2} + \ldots\ldots + B_m = 0 \\
Y_2 &= x_2^m + B_1 x_2^{m-1} + B_2 x_2^{m-2} + \ldots\ldots + B_m = 0 \\
Y_3 &= x_3^m + B_1 x_3^{m-1} + B_2 x_3^{m-2} + \ldots\ldots + B_m = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_n &= x_n^m + B_1 x_n^{m-1} + B_2 x_n^{m-2} + \ldots\ldots + B_m = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und jeder Werth von y, welcher irgend eine dieser Gleichungen identisch macht, liefert eine Auflösung der Gleichungen (1), (2); und zugleich kann kein anderer Werth von y, der nicht eine Wurzel irgend

einer dieser Gleichungen ist, eine Auflösung sein. Multipliciren wir daher die Gleichungen (3), so erhalten wir eine neue Gleichung in y:

$$Y_1 . Y_2 . Y_3 ..... Y_n = 0 \qquad (4)$$

welche offenbar für alle Werthe von y identisch wird, welche irgend einer der Gl. (3) genügen, aber auch nur für diese und somit die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Nun lassen sich zwar die Wurzeln x_1, x_2, ... x_n der Gl. (1), welche in (4) erscheinen, allgemein nicht finden; es ist aber die linke Seite der Gl. (4) eine symmetrische Funktion dieser Wurzeln, da durch Vertauschung der Grössen x_1, x_2, x_3, ... x_n unter einander die Faktoren wechselseitig in einander übergehen, wodurch nur die Ordnung derselben, nicht aber der Werth des Produktes geändert wird. Dieses wird daher gehörig entwickelt, verschiedene in die Coefficienten B_1, B_2, ... B_m multiplicirte symmetrische Funktionen der Wurzeln x_1, x_2, ... x_n der Gl. (1) enthalten, welche sofort ohne diese Wurzeln zu kennen, durch die Coefficienten A_1, A_2, ... A_n der Gl. (1) nach den in §§. 96, 97 und 98 entwickelten Vorschriften rational ausgedrückt werden können.

Das Verfahren ist so einfach, dass ein Beispiel zur Verdeutlichung genügen wird. Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x^2 + (2y - 10)\, x + y^2 - 10y + 21 = 0 \qquad (\alpha)$$
$$x^2 - (2y - 6)\, x + y^2 - 6y + 5 = 0 \qquad (\beta)$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gl. (α), da sie nach x vom 2ten Grade ist, mit x_1, x_2 und substituiren wir selbe in (β), so kommt:

$$Y_1 = x_1^2 - (2y - 6)\, x_1 + y^2 - 6y + 5 = 0,$$
$$Y_2 = x_2^2 - (2y - 6)\, x_2 + y^2 - 6y + 5 = 0;$$

durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2\, x_2^2 - (2y-6)(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1) + (y^2 - 6y + 5)(x_1^2 + x_2^2) + \\ + (2y - 6)^2\, x_1\, x_2 \\ - (2y - 6)(y^2 - 6y + 5)(x_1 + x_2) + \\ + (y^2 - 6y + 5)^2 \end{aligned}\right\} = 0. \qquad (\gamma)$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -(2y - 10) \\ x_1\, x_2 &= y^2 - 10y + 21 \end{aligned}\right\} \text{ nach §. 87.}$$

folglich:

$$x_1^2\, x_2^2 = y^4 - 20y^3 + 142y^2 - 420y + 441,$$
$$x_1^2\, x_2 + x_2^2\, x_1 = x_1\, x_2\, (x_1 + x_2) = -2y^3 + 30y^2 - 142y + 210$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1\, x_2 = 2y^2 - 20y + 58.$$

Diese Ausdrücke in (γ) substituirt und reducirt, erhält man als Eliminationsgleichung:

$$y^4 - 16y^3 + 92y^2 - 224y + 192 = 0.$$

Als Wurzeln derselben findet man:

$$y = 2,\ 6,\ 4,\ 4$$

und als zugehörige Werthe von x nach dem im vorigen §. angegebenen Verfahren:

$$x = 1,\ 1,\ 3,\ -1.$$

Diese Methode wird leider ziemlich beschwerlich, wenn die Gleichungen den zweiten Grad übersteigen; sie ist übrigens die einzige, welche immer, ohne besondere Vorsicht, die richtige Eliminationsgleichung liefert.

130. Es kann der Fall eintreten, dass die Eliminationsgleichung (4) identisch wird für jeden Werth von y, wenn nämlich einer oder mehrere der Faktoren Y, d. h. eine oder mehrere der Gleichungen (3) für jeden Werth von y identisch $= 0$ werden. Hiezu wird erfordert, dass einer oder mehrere der Wurzelwerthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gl. (1) auch die Gl. (2) identisch machen, d. h. dass die beiden Gleichungspolynome P und Q einen oder mehrere gemeinschaftliche Faktoren von der Form $x - x_0$ besitzen, wo x_0 im Allgemeinen eine Funktion von y ist, jedoch auch eine constante Grösse sein kann; die gegebenen Gleichungen (1), (2) haben dann die Form:

$$F.\ P' = 0,\quad F.\ Q' = 0,$$

wo F eine Funktion von x und y oder bloss von x ist, und werden erfüllt, wenn man $F = 0$ setzt, woraus in jedem Falle eine unendliche Anzahl von Auflösungen hervorgeht. Ausser diesen lassen die gegebenen Gleichungen noch jene Auflösungen in beschränkter Anzahl zu, welche aus dem Systeme der Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$ resultiren; welche Gleichungen demnach für sich zu behandeln sind, nachdem man den gemeinschaftlichen Faktor F, welcher offenbar den Coefficienten sämmtlicher Potenzen von x in beiden Gleichungen zukommen muss, durch Division weggeschafft hat.

Auch kann es geschehen, dass man als Eliminationsgleichung erhält $N = 0$, wo N eine von y unabhängige Grösse; in diesem Falle widersprechen sich die gegebenen Gleichungen und lassen keine Auflösung zu, da eine bestimmte Grösse N nicht $= 0$ sein kann.

Hat endlich eine der gegebenen Gleichungen, z. B. (2) einen bloss von y abhängigen Faktor, ist also von der Form $Q = F(y).\ Q' = 0$, so wird man zur Vereinfachung der Rechnung dieselbe zuerst durch

$F(y)$ dividiren, aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q' = 0$ die Unbekannte x eliminiren, und sodann die gefundene Eliminationsgleichung noch mit $[F(y)]^n$ multipliciren, da letztere das Produkt der Gleichungen (3) sein soll, welche in diesem Falle offenbar sämmtlich die Form $F(y)$. $Q' = 0$ haben.

131. Die Eliminationsgleichung, welche aus zwei Gleichungen des m^{ten} und n^{ten} Grades zwischen zwei Unbekannten hervorgeht, ist höchstens vom mn^{ten} Grade.

Diess wird bewiesen sein, wenn gezeigt werden kann, dass kein Glied der Eliminationsgleichung den mn^{ten} Grad überschreiten kann. Nun ist irgend ein Glied derselben, da sie durch Multiplikation der Gleichungen (3) entsteht, offenbar:

$$B_{\mathfrak{a}} . B_{\mathfrak{b}} . B_{\mathfrak{c}} . B_{\mathfrak{d}} \ldots\ldots B_{\mathfrak{n}} . x_1^{m-\mathfrak{a}} . x_2^{m-\mathfrak{b}} . x_3^{m-\mathfrak{c}} . x_4^{m-\mathfrak{d}} \ldots\ldots x_{\mathfrak{n}}^{m-\mathfrak{n}} = M . N.$$

Es sind aber die Coefficienten $B_{\mathfrak{a}}$, $B_{\mathfrak{b}}$, $B_{\mathfrak{c}}$, ... $B_{\mathfrak{n}}$ ganze Funktionen von y beziehungsweise höchstens vom $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$, $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$, $\mathfrak{c}^{\text{ten}}$, ... $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Grade; folglich ist das Produkt M derselben eine ganze Funktion von y höchstens vom μ^{ten} Grade, wenn wir:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \ldots\ldots + \mathfrak{n} = \mu$$

setzen, wo die Zahl μ den Werth mn nicht überschreiten kann, da keine der Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\ldots \mathfrak{n}$ grösser als m und ihre Anzahl nicht grösser als n ist. Der zweite Faktor N ist in Bezug auf die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ von der Ordnung:

$$m - \mathfrak{a} + m - \mathfrak{b} + m - \mathfrak{c} + \ldots\ldots + m - \mathfrak{n} = nm - \mu,$$

gehört also einer symmetrischen Funktion von derselben Ordnung an, welche sich wieder nach §. 97 durch Summen der verschiedenen Potenzen der Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, von der 1sten bis zur $(mn-\mu)^{\text{ten}}$ Potenz ausdrücken lässt. Berücksichtigt man nun, dass die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_m$ der Gleichung (1) Funktionen von y respective höchstens vom 1sten, 2ten, 3ten, ... m^{ten} Grade sind, so folgt sogleich aus den Gleichungen (III) und (I) des §. 98, dass diese Potenzsummen, durch die eben erwähnten Coefficienten ausgedrückt, Funktionen von y sein werden, welche den $(mn-\mu)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen können. Da solchergestalt der eine Faktor M des in Rede stehenden Gliedes höchstens vom μ^{ten}, der zweite höchstens vom $(mn-\mu)^{\text{ten}}$ Grade ist, so kann das Glied selbst höchstens vom $(mn-\mu+\mu)^{\text{ten}}$, d. i. höchstens vom mn^{ten} Grade sein.

Sind beide Gleichungen vollständig, so ist die Eliminationsgleichung genau vom mn^{ten} Grade, wie aus dem eben geführten Beweise leicht gefolgert werden kann.

132. Eine andere Eliminationsmethode ist folgende.

Die gegebenen Gleichungen seien:

$$A_0\,x^m + A_1\,x^{m-1} + A_2\,x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}\,x + A_m = 0 \quad (1)$$

$$B_0\,x^m + B_1\,x^{m-1} + B_2\,x^{m-2} + \ldots\ldots + B_{m-1}\,x + B_m = 0 \quad (2)$$

wo wir beide von demselben Grade annehmen, was immer gestattet ist, da sie im Gegentheile durch Multiplikation der niedrigeren mit einer passenden Potenz von x leicht auf gleichen Grad gebracht werden können. Multiplicirt man (1) mit B_0 und (2) mit A_0 und subtrahirt, so erhält man eine neue Gleichung vom $(m-1)^{\text{ten}}$ also niedrigeren Grade:

$$C_1\,x^{m-1} + C_2\,x^{m-2} + C_3\,x^{m-3} + \ldots\ldots + C_m = 0, \quad (3)$$

wo, wie leicht einzusehen:

$$C_1 = A_1\,B_0 - A_0\,B_1, \quad C_2 = A_2\,B_0 - A_0\,B_2,$$

u. s. w. ist.

Wird aber (1) mit B_m und (2) mit A_m multiplicirt und wieder subtrahirt, so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Faktors x eine zweite Gleichung vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade:

$$D_1\,x^{m-1} + D_2\,x^{m-2} + D_3\,x^{m-3} + \ldots\ldots + D_m = 0. \quad (4)$$

Wir haben somit die gegebenen Gleichungen auf zwei andere, (3) und (4), von einem um eine Einheit niedrigeren Grade reducirt, auf welche nun dieselbe Operation wieder angewendet wird, wodurch sich zwei Gleichungen ergeben, die nach x vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade sein werden. Auf diese Weise fortfahrend muss man schliesslich zu zwei Gleichungen vom 1sten Grade nach x gelangen, aus welchen man zwei Werthe von x in Funktion von y zieht, welche, einander gleichgesetzt, die gesuchte Gleichung in y liefern. Es ist aber nicht zu übersehen, dass diese Gleichung, welche man hier passender die Final- oder Endgleichung nennen kann, zwar immer die Eliminationsgleichung enthalten muss, in Folge der eingeführten Faktoren jedoch auch Wurzeln aufgenommen haben kann und im Allgemeinen auch aufgenommen haben wird, welche den gegebenen Gleichungen fremd sind.

Beispiel. Die gegebenen Gleichungen seien:

$$x^2 - (2y + 5)\,x + (y^2 + 5y + 6) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 4yx \qquad + (4y^2 - 1) \qquad = 0 \quad (2)$$

Beide Gleichungen subtrahirt, geben:

$$x\,(2y - 5) - 3y^2 + 5y + 7 = 0;$$

hieraus:

$$x = \frac{3y^2 - 5y - 7}{2y - 5} \quad (3)$$

Die 1ste Gleichung mit $(4y^2 - 1)$, die zweite mit $(y^2 + 5y + 6)$ multiplicirt und subtrahirt, erhält man:

$$x(3y^2 - 5y - 7) - 4y^3 + 26y + 5 = 0,$$

und hieraus:

$$x = \frac{4y^3 - 26y - 5}{3y^2 - 5y - 7}; \qquad (4)$$

beide Werthe von x gleichgesetzt, geben, nach y geordnet:

$$y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24 = 0$$

als Eliminationsgleichung in y, deren Wurzeln 1, 2, 3, 4 sind. Substituirt man diese Werthe in (3) oder (4), so erhält man die zugehörigen Werthe von x, nämlich für:

$$y = 1, 2, 3, 4$$
$$x = 3, 5, 5, 7.$$

133. Ist $x = \alpha$, $y = \beta$ ein Wurzelpaar der Gleichungen (1), (2) [§. 128], und man substituirt β statt y in die Gleichungspolynome, so haben dieselben [§. 128] den gemeinschaftlichen Faktor $x - \alpha$, welcher zum Vorschein kommt, wenn man auf beide das Verfahren des grössten gemeinschaftlichen Theilers anwendet, wobei man offenbar zuletzt einen Rest $= 0$ erhält. Hierauf gründet sich eine dritte Eliminationsmethode, die wir noch in Kürze anführen wollen. Man wende auf die beiden Gleichungspolynome das Verfahren des g. g. Theilers an, so wird man zuletzt zu einem Reste $= R$ gelangen, welcher nur mehr y enthält und offenbar für $y = \beta$ verschwinden muss, da für diesen Werth von y die beiden Gleichungs-Polynome einen gemeinschaftlichen Faktor $x - \alpha$ besitzen; aus demselben Grunde muss aber dieser Rest für jeden Werth von y verschwinden, welcher zu einer Auflösung der gegebenen Gleichungen gehört. Setzt man daher diesen Rest $= 0$, so drückt man dadurch die Bedingung aus, welche die Werthe von y erfüllen müssen, für welche beide Gleichungen zusammen bestehen können. Die Gleichung $R = 0$ ist daher die gesuchte Endgleichung in y. Aus dieser erhält man sofort die den Gl. (1), (2) genügenden Werthe von y, welche sodann in den vorletzten Rest, welcher von der Form $x\varphi(y) + \psi(y)$ sein wird und $= 0$ zu setzen ist, substituirt, die zugehörigen Werthe von x geben.

Zur Erzielung ganzer Quotienten pflegt man bekanntlich bei dem Verfahren des g. g. Theilers eines oder das andere der Dividende mit einem Faktor F zu multipliciren, welcher in unserem Falle eine Funktion von y sein wird; hiedurch können aber in die Finalgleichung fremde, den gegebenen Gleichungen nicht zukommende Wurzeln ein-

geführt werden. Hat ferner irgend ein Divisor einen von y abhängigen Faktor F', so pflegt man diesen zur Vereinfachung der Rechnung zu unterdrücken, wodurch aber aus der Endgleichung Wurzeln abhanden kommen können. In beiden Fällen ist dann diese nicht die wahre Eliminationsgleichung. Ohne in ein weiteres Detail einzugehen, wird man an der Hand eines leicht zu entwerfenden Schema ohne Schwierigkeit zu folgenden Schlüssen gelangen:

a) Hat man ein Dividend D mit einem von y abhängigen Faktor F multiplicirt und ist T der zugehörige Divisor, so schliesst die Final-Gleichung auch die Auflösungen des Systems der Gleichungen $F=0$, $T=0$ in sich, welche demnach, wenn solche existiren, aus der Finalgleichung zu entfernen sind.

b) Hat man aber in einem Divisor einen von y abhängigen Faktor F unterdrückt und ist D der zugehörige Dividend, so werden im Allgemeinen die aus dem Systeme der Gleichungen $F=0$, $D=0$ sich ergebenden Auflösungen, die den gegebenen Gleichungen noch zukommen, in der Finalgleichung fehlen, und diese ist, um die Eliminationsgleichung zu erhalten, mit F^r zu multipliciren, wenn D in Bezug auf x vom r^{ten} Grade ist.

Es ist kaum nöthig zu erinnern, dass die in §. 130 angeführten Bemerkungen bei den zwei letzten Methoden unverändert Anwendung finden.

134. Kann eines von beiden Gleichungspolynomen oder beide in Faktoren zerlegt werden, so wird man die einzelnen Faktoren combiniren und dadurch einfacher zum Ziele gelangen. Sind z. B. die Gleichungen gegeben:

$$(xy-3)(x-2)=0 \quad \text{und} \quad (2xy^2+6)(y+x)=0,$$

so erhält man:

$$\begin{array}{llll}
\text{aus: } xy-3=0 & \text{und } 2xy^2+6=0 & \text{als Elim.-Gl. } & y+1=0 \\
\text{- } xy-3=0 & \text{- } y+x=0 & \text{- - - } & y^2+3=0 \\
\text{- } x-2=0 & \text{- } 2xy^2+6=0 & \text{- - - } & 2y^2+3=0 \\
\text{- } x-2=0 & \text{- } y+x=0 & \text{- - - } & y+2=0
\end{array}$$

und die vollständige Eliminationsgleichung ist daher:

$$(y+1)(y^2+3)(2y^2+3)(y+2)=0.$$

Was endlich die Auflösung von Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten betrifft, so lässt sich diese immer auf die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen zurückführen. Wären z. B. $A=0$, $B=0$, $C=0$ drei Gleichungen zwischen drei Unbekannten x, y, z, so eliminire man zuerst etwa x aus $A=0$, $B=0$ und aus

$B = 0$, $C = 0$, wodurch man zwei neue Gleichungen erhält: $D = 0$, $E = 0$, welche nur mehr y und z enthalten, aus welchen wieder etwa y eliminirt werden kann, wodurch sich endlich die Eliminationsgleichung in z ergiebt.

SIEBENTES KAPITEL.

UEBER DIE DIFFERENZ- UND SUMMENREIHEN, DIE ARITHMETISCHEN REIHEN UND UEBER DIE INTERPOLATION DER REIHEN.

135. Es sei:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1}\ \ldots \qquad (1)$$

eine Reihe von Grössen, welche nach irgend einem bekannten oder unbekannten Gesetze auf einander folgen; zieht man jede Grösse von der nächstfolgenden ab, so erhält man eine Reihe von Differenzen:

$$u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2,\ \ldots\ u_{n+1} - u_n,$$

welche man die Differenzreihe und zum Unterschiede von den folgenden die erste Differenzreihe der Hauptreihe (1) nennt. Man bezeichnet diese Differenzen dadurch, dass man dem abgezogenen Gliede die Charakteristik Δ vorsetzt; es ist demnach:

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0,\ u_2 - u_1 = \Delta u_1,\ \ldots\ u_{n+1} - u_n = \Delta u_n,$$

und somit:

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3,\ \ldots\ \Delta u_n,\ \ldots \qquad (2)$$

die erste Differenzreihe.

Mit dieser verfahren wir auf gleiche Weise, indem wir jedes Glied von dem folgenden abziehen und dadurch eine neue Reihe:

$$\Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta u_3 - \Delta u_2,\ \ldots\ \Delta u_{n+1} - \Delta u_n,\ \ldots$$

erhalten, welche sofort die erste Differenzreihe der Reihe (2) und die zweite Differenzreihe der Hauptreihe (1) sein wird. Gemäss der oben eingeführten Bezeichnung haben wir nun $\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta . \Delta u_0$ zu setzen, wofür man Kürze halber $\Delta^2 u_0$ schreibt; so dass also:

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0,\ \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1,\ \ldots\ \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta^2 u_n$$

ist. Dasselbe Verfahren auf die zweite Differenzreihe:

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \Delta^2 u_3,\ \ldots\ldots\ \Delta^2 u_n,\ \ldots \qquad (3)$$

angewendet, liefert die dritte Differenzreihe:

$$\Delta^3 u_0,\ \Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \Delta^3 u_3,\ \ldots\ldots\ \Delta^3 u_n,\ldots \qquad (4)$$

in welcher $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 \ldots\ \Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n$ ist. Man sieht, wie man auf diese Weise fortfahren und im Allgemeinen eine beliebige Anzahl von Differenzreihen aus der Hauptreihe (1) ableiten kann. Der Gang der Ableitung erhellt am deutlichsten aus folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_0, & & u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4, \quad u_5, \quad u_6 \ldots\ldots \\
& \Delta u_0 & & \Delta u_1 & & \Delta u_2 & & \Delta u_3 & \Delta u_4 \quad \Delta u_5 \ldots\ldots \\
& & \Delta^2 u_0 & & \Delta^2 u_1 & & \Delta^2 u_2 & & \Delta^2 u_3 \quad \Delta^2 u_4 \ldots\ldots \\
& & & \Delta^3 u_0 & & \Delta^3 u_1 & & \Delta^3 u_2 & \Delta^3 u_3 \ldots\ldots \\
& & & & \Delta^4 u_0 & & \Delta^4 u_1 & & \Delta^4 u_2 \ldots\ldots \\
& & & & & \text{u. s. w.} & & &
\end{array}$$

wo irgend ein Glied gefunden wird, wenn man von den zwei darüber stehenden das vorhergehende von dem folgenden abzieht.

Zwischen den Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ der Hauptreihe und den Gliedern der aufeinanderfolgenden Differenzreihen bestehen gewisse allgemeine Beziehungen, welche von der Beschaffenheit der Grössen:

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots.$$

ganz unabhängig sind und die wir daher zunächst entwickeln wollen.

136. Es ist:

$$\begin{aligned}
\Delta u_0 &= u_1 - u_0, \\
\Delta^2 u_0 &= \Delta u_1 - \Delta u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0, \\
\Delta^3 u_0 &= \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = \Delta u_2 - \Delta u_1 - \Delta^2 u_0 \\
&= u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0) \\
&= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0, \\
\Delta^4 u_0 &= \Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0, \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

In den Coefficienten dieser Ausdrücke der Differenzen:

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_0,\ \Delta^4 u_0 \ldots$$

spricht sich das Gesetz der Binomialcoefficienten aus; wir schliessen daher, dass man allgemein haben wird:

$$\Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \binom{n}{3} u_{n-3} + \ldots\ldots + \left(-1\right)^n u_0 \qquad (5)$$

Dass diese Gleichung in der That für jeden Werth von n gelte, lässt sich durch den bekannten Induktionsbeweis leicht nachweisen, indem man zeigt, dass, wenn dieselbe für irgend einen Werth $n = r$ gelte, sie auch für den folgenden Werth $n = r + 1$ richtig sein müsse. Es ist aber:

$$\Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0. \qquad (\alpha)$$

Nimmt man nun die Gl. (5) für $n = r$ als richtig an und beachtet, dass $\Delta^r u_1$ aus den Grössen $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{r+1}$ auf dieselbe Art gebildet sein muss, wie $\Delta^r u_0$ aus den Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_r$, so ist:

$$\Delta^r u_1 = u_{r+1} - \binom{r}{1} u_r + \binom{r}{2} u_{r-1} - \binom{r}{3} u_{r-2} + \ldots + (-1)^r u_1$$

$$\Delta^r u_0 = \quad u_r - \binom{r}{1} u_{r-1} + \binom{r}{2} u_{r-2} - \ldots + (-1)^r r u_1 +$$

$$+ (-1)^r u_0;$$

substituirt man diese Werthe in (α), so erhält man, da allgemein:

$$\binom{r}{m+1} + \binom{r}{m} =$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(r-m)}{1.\,2.\,3 \ldots m(m+1)} + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.\,2.\,3 \ldots m}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(r-m) + r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)(m+1)}{1.\,2.\,3 \ldots m(m+1)}$$

$$= \frac{[r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1)][(r-m)+(m+1)]}{1.\,2.\,3 \ldots m(m+1)}$$

$$= \frac{(r+1)\,r(r-1)\,(r-2)\ldots(r-m+1)}{1.\,2.\,3 \ldots m(m+1)} = \binom{r+1}{m+1} \text{ ist,}$$

$$\Delta^{r+1} u_0 = u_{r+1} - \binom{r+1}{1} u_r + \binom{r+1}{2} u_{r-1} - \binom{r+1}{3} u_{r-2} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{r+1} u_0.$$

Allein dieselbe Gleichung ergiebt sich auch aus (5), wenn man daselbst $n = r + 1$ setzt, woraus folgt, dass diese Gleichung für $n = r + 1$ richtig ist, wenn sie es für $n = r$ ist. Da nun das in (5) ausgesprochene Gesetz sich für $n = 1, 2, 3, 4$, bewährt, so muss es nothwendig auch für alle folgenden Werthe von n gelten.

Die Gl. (5) drückt das erste Glied der n^{ten} Differenzreihe durch die $(n+1)$ ersten Glieder der Hauptreihe aus.

Eben so lässt sich aber ein beliebiges Glied, z. B. das r^{te} Glied der n^{ten} Differenzreihe, $\Delta^n u_r$, durch Glieder der Hauptreihe ausdrücken. Denkt man sich nämlich die Hauptreihe mit dem Gliede u_r anfangend, so muss offenbar $\Delta^n u_r$ aus den Gliedern $u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots u_{r+n}$ so gebildet sein, wie $\Delta^n u_0$ aus:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n;$$

man hat daher nach (5):

$$\Delta^n u_r = u_{r+n} - \binom{n}{1} u_{r+n-1} + \binom{n}{2} u_{r+n-2} - \ldots + (-1)^n u_r. \qquad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen sich symbolisch in folgender Form darstellen:

$$\Delta^n u_0 = (u - 1)^n \tag{7}$$

$$\Delta^n u_r = u_r (u - 1)^n \tag{8}$$

wenn man nur nach geschehener Entwickelung des Binoms die Exponenten in Stellenzeiger verwandelt und in (8) die Rechnungsregeln für Potenzen auf die mit Stellenzeigern versehenen Buchstaben überträgt.

137. Jedes Glied der Hauptreihe lässt sich durch das erste Glied derselben und die Anfangsglieder Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... der auf einander folgenden Differenzreihen ausdrücken.

In der That ist:

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$$

$$= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$

$$= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$

$$u_4 = u_3 + \Delta u_3 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0,$$

u. s. w.

und allgemein:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0 \tag{9}$$

wo u_n das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Hauptreihe ist.

Von der Richtigkeit dieses Gesetzes kann man sich auf ähnliche Weise wie oben leicht überzeugen. Symbolisch lässt sich die Gl. (9) in folgender Weise schreiben:

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0 \tag{10}$$

wenn man nach der Entwickelung des Binoms die Exponenten von Δ als Wiederholungszeiger betrachtet.

138. Bildet man der Reihe nach die Summen von 1, 2, 3, ... n Gliedern der Hauptreihe (1) und setzt:

$$S_1 = u_0,\ S_2 = u_0 + u_1,\ S_3 = u_0 + u_1 + u_2,\ \ldots.$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots. + u_{n-1},$$

so erhält man eine neue Reihe:

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ \ldots\ldots S_n,\ S_{n+1},\ \ldots. \tag{11}$$

welche die Summenreihe und zwar die erste Summenreihe der Hauptreihe (1) heisst. Wie man sieht, ist:

$$S_n = S_{n-1} + u_{n-1} \tag{12}$$

folglich:

$$u_{n-1} = S_n - S_{n-1} = \Delta S_{n-1} \tag{13}$$

woraus erhellt, dass die Hauptreihe die erste Differenzreihe der ersten Summenreihe ist, vorausgesetzt, dass man letzterer ein Glied $= 0$ vorausschickt; indem (13) für $n = 1$ in $u_0 = S_1 - S_0$ übergeht, woraus wegen $S_1 = u_0$, $S_0 = 0$ folgt.

In gleicher Weise kann man aus der ersten Summenreihe durch successives Summiren der Glieder derselben eine zweite Summenreihe, aus dieser eine dritte u. s. w. ableiten, und man überzeugt sich leicht, dass die Hauptreihe die r^{te} Differenzreihe der r^{ten} Summenreihe ist, wenn man die letztere mit r Gliedern, jedes $= 0$, beginnen lässt.

Mittelst dieser Bemerkung ist es leicht, mit Hülfe der Gl. (9) ein beliebiges Glied einer beliebigen Summenreihe der Hauptreihe, durch das erste Glied der letzteren und die Anfangsglieder ihrer aufeinanderfolgenden Differenzreihen auszudrücken.

Um nämlich das n^{te} Glied der r^{ten} Summenreihe S_n^r zu finden, betrachten wir die r^{te} Summenreihe als Hauptreihe, deren r^{te} Differenzreihe die Reihe (1) ist, zu welchem Zwecke wir der r^{ten} Summenreihe r Glieder jedes $= 0$ voransetzen, wodurch also das gesuchte Glied S_n^r eigentlich das $(n+r)^{\text{te}}$ dieser Reihe wird; wenden wir sodann auf diese neue Hauptreihe die Formel (9) an, so erhalten wir, da das erste Glied der Hauptreihe, sowie die Anfangsglieder der $(r-1)$ ersten Differenzreihen verschwinden, somit die Gl. (9) erst mit dem $(r+1)^{\text{sten}}$ Gliede beginnt, sogleich:

$$S_n^r = \binom{r+n-1}{r} u_0 + \binom{r+n-1}{r+1} \Delta u_0 + \binom{r+n-1}{r+2} \Delta^2 u_0 + \\ + \ldots + \Delta^{n-1} u_0 \tag{14}$$

Setzt man in dieser Gleichung $r = 1$, so erhält man als Ausdruck für das n^{te} Glied S_n der ersten Summenreihe:

$$S_n = n u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^{n-1} u_0, \tag{15}$$

womit auch die Summenformel oder das summatorische Glied der Reihe (1) gegeben ist, da:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}.$$

In Bezug auf die Gleichungen (9) und (15), welche sehr häufige Anwendung finden, muss jedoch bemerkt werden, dass dieselben, falls

nicht von einer gewissen Differenz $\Delta^k u_0$ angefangen, alle folgenden $\Delta^{k+1}u_0$, $\Delta^{k+2}u_0$, ... verschwinden, nichts finden lassen, was nicht schon bekannt sein müsste. Denn um aus (9) u_n zu erhalten, müssen die Grössen u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... $\Delta^n u_0$ gegeben sein, wozu die Kenntniss von u_0, u_1 u. s. w. bis u_n erfordert wird. Dasselbe ist bei Gl. (15) der Fall. Es sprechen diese Gleichungen eben nur ein unter allen Umständen stattfindendes Bildungsgesetz aus.

VON DEN ARITHMETISCHEN REIHEN.

139. Eine arithmetische Reihe ist eine Folge von Grössen, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Glieder einer ihrer Differenzreihen sämmtlich einander gleich werden und daher alle folgenden Differenzreihen verschwinden. Sie ist vom k^{ten} Range oder der k^{ten} Ordnung, wenn die Glieder der k^{ten} Differenzreihe einander gleich sind.

Lassen wir daher jetzt in den vorhergehenden Entwickelungen die Hauptreihe (1):

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_{n-1}, u_n \ldots\ldots \qquad (1)$$

eine arithmetische Reihe vom k^{ten} Range sein, so ist $\Delta^k u_0$ das constante Glied der k^{ten} Differenzreihe, $\Delta^{k+1}u_0 = \Delta^{k+2}u_0 = \ldots = 0$ und es folgt somit als Ausdruck des allgemeinen (unserer Bezeichnung gemäss des $(n+1)^{\text{ten}}$) Gliedes der arithmetischen Reihe vom k^{ten} Range aus (9):

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{k}\Delta^k u_0 \qquad (16)$$

und als Ausdruck des summatorischen Gliedes aus (15):

$$S_n = nu_0 + \binom{n}{2}\Delta u_0 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{4}\Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{k+1}\Delta^k u_0 \qquad (17)$$

Jeder dieser Ausdrücke besteht, wie man sieht, aus $(k+1)$ Gliedern und nimmt zu seiner Bildung $(k+1)$ Glieder der Reihe (1) in Anspruch. Von einer arithmetischen Reihe des 1sten Ranges werden demnach zwei, des 2ten Ranges drei Anfangsglieder u. s. w. erfordert, um die Ausdrücke des allgemeinen und summatorischen Gliedes bilden zu können.

Aus den Formeln (16) und (17) erhält man:

für arithmetische Reihen der 1ten Ordnung:

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0,$$

$$S_n = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta u_0;$$

für arithmetische Reihen der 2ten Ordnung:

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\Delta^2 u_0,$$

$$S_n = n u_0 + \frac{n(n-1)}{1.\,2}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\Delta^2 u_0.$$

u. s. w.

140. Entwickelt man in (16) und (17) die Coefficienten und ordnet nach den Potenzen von n, so erhält man offenbar:

$$u_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots\ldots + A_k n^k, \qquad (18)$$

$$S_n = B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + \ldots\ldots + B_{k+1} n^{k+1}; \qquad (19)$$

wo die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_k$; $B_1, B_2, \ldots B_{k+1}$ bloss von den Grössen $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots\ldots \Delta^k u_0$ abhängen und $A_0 = u_0$ ist. Hieraus folgt, dass jede ganze rationale Funktion von n von der Form:

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k$$

als das allgemeine Glied und jede ganze rationale Funktion von der Form:

$$B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + \ldots + B_{k+1} n^{k+1}$$

als das Summenglied einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung betrachtet werden kann.

Man sieht leicht, dass das letzte Glied $A_k n^k$ in (18) bloss aus dem letzten Gliede in (16) hervorgeht, da bloss dieses Glied k Faktoren enthält, deren jeder in Bezug auf n vom ersten Grade ist. Es muss daher:

$$A_k n^k = \frac{n^k}{1.\,2.\,3\ldots.\,k}\Delta^k u_0$$

sein, woraus:

$$\Delta^k u_0 = 1.\,2.\,3\ldots\ldots k.\,A_k \qquad (20)$$

folgt, welche Gleichung sogleich die constante Differenz einer arithmetischen Reihe giebt, deren allgemeines Glied als Funktion von n in der Form (18) gegeben ist. Hat man z. B. $u_n = 1 - 3n + 4n^2$, so ist $\Delta^2 u_0 = 1.\,2.\,4 = 8$; und in der That liefert dieser Ausdruck, wenn man der Reihe nach, 0, 1, 2 ... statt n setzt, die arithmetische Reihe der 2ten Ordnung: 1, 2, 11, 28, 53, 86, ..., deren zweite Differenzreihe 8 zum constanten Gliede hat.

141. Eine unmittelbare Folge des Ausdruckes (18) des allgemeinen Gliedes einer arithmetischen Reihe der $k$ten Ordnung ist, dass, wenn die correspondirenden Glieder zweier oder mehrerer arithmetischer Reihen addirt oder subtrahirt werden, die resultirende Reihe

wieder eine arithmetische ist, deren Ordnungsexponent gleichnamig ist mit dem höchsten der verbundenen Reihen. — Werden hingegen mehrere arithmetische Reihen Glied für Glied multiplicirt, so ist die dadurch entstehende Reihe ebenfalls eine arithmetische, deren Ordnungsexponent gleich ist der Summe der Ordnungsexponenten der verbundenen Reihen. — Erhebt man hingegen jedes Glied einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung zur r^{ten} Potenz, so erhält man eine arithmetische Reihe der $(kr)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Hiernach bilden die k^{ten} Potenzen der Reihe der natürlichen Zahlen, 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, ... n^k ... eine arithmetische Reihe der k^{ten} Ordnung, deren constante Differenz, da das allgemeine Glied $u_n = (1+n)^k = 1 + kn + ... + n^k$, somit in (18) $A_k = 1$ ist, nach (20):

$$\Delta^k u_0 = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ .....\ k$$

wird. Es lässt sich daher nach (17) die Summe:

$$S(n^k) = 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + ... + n^k$$

für die verschiedenen Werthe von k leicht finden. Man hat für:

$$k = 1\text{:}\ u_0 = 1,\ \Delta u_0 = 1,\ \Delta^2 u_0 = \Delta^3 u_0 = ... = 0,$$

somit:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} = \frac{n(1+n)}{1.\ 2}.$$

Für $k = 2$: $u_0 = 1$, $\Delta u_0 = 3$, $\Delta^2 u_0 = 2$,

$$S(n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = n + \binom{n}{2}\cdot 3 + \binom{n}{3}\cdot 2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3}.$$

Für $k = 3$: $u_0 = 1$, $\Delta u_0 = 7$, $\Delta^2 u_0 = 12$, $\Delta^3 u_0 = 6$,

$$S(n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

u. s. w.

Zu einem allgemeinen Ausdrucke von $S(n^k)$ werden wir an einem späteren Orte gelangen.

142. Bildet man, von einer arithmetischen Reihe der k^{ten} Ordnung ausgehend, die auf einander folgenden Summenreihen, so sind diese nach §. 138 wieder arithmetische Reihen bezüglich der $(k+1)^{\text{ten}}$, $(k+2)^{\text{ten}}$ u. s. w. Ordnung, deren allgemeine und summatorische Glieder sich ohne Schwierigkeit nach dem bisher Gesagten finden lassen. Lässt man insbesondere die Stammreihe eine arithmetische Reihe der 1sten Ordnung sein,

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ \ldots\ldots\ 1+nd, \qquad (\alpha)$$

so ist deren erste Summenreihe:

$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d,\ \ldots \qquad (\beta)$$

für welche als arithmetische Reihe der zweiten Ordnung:

$$u_n = \frac{1}{2}(1+n)(2+nd),\quad S_n = \frac{1}{6}n(n+1)[(n-1)d+3]$$

gefunden wird. Als 2te Summenreihe erhält man:

$$1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d,\ 15+20d,\ \ldots \qquad (\gamma)$$

für welche, als arithmetische Reihe der 3ten Ordnung:

$$u_n = \frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+nd)$$

$$S_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[(n-1)\ d+4]$$

sich ergiebt u. s. w. Diese aufeinanderfolgenden Summenreihen, (β), (γ), ... sind unter dem Namen figurirte Zahlenreihen beziehungsweise der 1sten, 2ten u. s. w. Ordnung bekannt; insbesondere heisst (β) die Reihe der Polygonal- oder Vieleckszahlen, (γ) die Reihe der Pyramidalzahlen. Setzt man in diesen Reihen nach einander:

$$d=1,\ d=2,\ d=3,\ \ldots\ d=m-2,$$

so ergeben sich aus (β) die besonderen Reihen der Dreiecks-, Vierecks-, Fünfecks-, ... m Ecks-Zahlen; aus (γ) jene der dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, ... m seitigen Pyramidalzahlen.

143. Unter den mannigfaltigen Anwendungen der Differenzreihen wollen wir noch den Gebrauch derselben zur Berechnung von Tafeln in Kürze erläutern.

Es sei:

$$y = f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Mx^m \qquad (\alpha)$$

eine ganze rationale Funktion von x und eine Tafel zu berechnen, welche die Werthe der Funktion $y=f(x)$ für nach gleichen Intervallen fortschreitende Werthe von x, z. B. $x=1, 2, 3, \ldots$ enthält. Die aufeinanderfolgenden Werthe von y werden eine Reihe bilden, deren allgemeines Glied für den Stellenzeiger x offenbar der Ausdruck (α) ist; woraus nach §. 140 folgt, dass die Werthe von y eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung bilden werden und es genügt daher, $m+1$ Anfangsglieder derselben zu kennen, um mit Hülfe der Differenzen alle folgenden Glieder durch einfache Addition bilden zu können.

Gesetzt z. B., es handle sich um die Berechnung einer Tafel für die 3ten Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... bis 1000;

bezeichnen wir irgend eine dieser Zahlen mit x, den Cubus derselben mit y, so haben wir $y = x^3$ zu setzen, woraus sogleich folgt, dass die 3ten Potenzen der Zahlen 1, 2, 3,... eine arithmetische Reihe der 3ten Ordnung bilden, wie wir diess schon oben gefunden haben. Wir berechnen nun die vier ersten Glieder der Reihe, für $x = 1, 2, 3, 4$ und erhalten:

x	y	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		
4	64			

und die weitere Rechnung steht nun, wie folgt:

3. Diff.	2. Diff.	1. Diff.	$y = x^3$	x
			1	1
		7	8	2
	12	19	27	3
6	18	37	64	4
6	24	61	125	5
6	30	91	216	6
6	36	127	343	7
6	42	169	512	8
6	48	217	729	9

u. s. w.

Um sich gegen Rechnungsfehler zu schützen, wird man von Zeit zu Zeit einen Werth von y unmittelbar aus der Formel rechnen. Lassen sich die Werthe von y nur näherungsweise ausdrücken, wie diess z. B. der Fall ist, wenn einer oder mehrere der Coefficienten in (α) irrationale Zahlen sind, oder rationale Brüche, welche sich durch Dezimalbrüche nicht genau darstellen lassen, so muss die Rechnung mit einigen Dezimalstellen mehr angelegt werden, als man am Ende beizubehalten gesonnen ist, weil sonst, wie leicht einzusehen, durch das wiederholte Addiren in Folge der vernachlässigten Dezimalstellen die gesuchten Werthe sich mehr und mehr von der Wahrheit entfernen würden.

Dieser Vorgang findet mit geringen Modifikationen selbst dann noch Anwendung, wenn die Funktion $y = f(x)$, für welche eine Tafel berechnet werden soll, keine ganze rationale Funktion von x ist. Die aufeinanderfolgenden Werthe von y bilden dann zwar keine arithmetische Reihe mehr im strengen Sinne, können jedoch näherungsweise dafür genommen werden, indem im Allgemeinen die Differenzreihen von einer bestimmten angefangen aus so kleinen Gliedern bestehen werden, dass dieselben als verschwindend angenommen werden können, und die Rechnung kann dann immer so angeordnet werden, dass

die Vernachlässigung derselben keinen Einfluss auf die letzte Dezimalstelle nimmt, welche man noch sicher zu erhalten wünscht.

Denken wir uns nämlich die Funktion $y = f(x)$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickelt, was im Allgemeinen immer möglich ist; sei also:

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_m x^m + ...$$

und $x = x_0$ ein besonderer Werth von x, für welchen die Reihe convergirt und das Glied $A_{m+1} x^{m+1}$ und um so weniger die folgenden, auf die n^{te} Dezimalstelle keinen Einfluss mehr nehmen, so ist klar, dass für Werthe von x, welche in der Nähe von x_0 liegen, bis auf n Dezimalstellen genau:

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_m x^m$$

ist, vorausgesetzt, dass die Funktion in dieser Gegend stetig ist. Hieraus folgt sogleich, dass die Werthe von y, welche den in der Nähe von x_0 liegenden Werthen von x entsprechen, bis zur n^{ten} Dezimalstelle eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung bilden.

Da obige Reihe für verschiedene Werthe von x ungleich stark convergiren wird, so wird sich hiedurch auch der Rang der arithmetischen Reihe, somit auch die Anzahl der in Rechnung zu nehmenden Differenzreihen successive ändern. Man wird daher die Rechnung in Partieen theilen und in gehörigen Intervallen die erforderliche Anzahl von Gliedern der Reihe sammt den zugehörigen Differenzen aus der Formel $y = f(x)$ unmittelbar rechnen.

VON DER INTERPOLATION.

144. Eine der wichtigsten Anwendungen der Lehre von den Differenzreihen ist das Interpoliren oder Einschalten. Man versteht hierunter folgende Aufgabe:

Es sei $u = \varphi(x)$ eine ihrer Form nach unbekannte Funktion von $\varphi(x)$ und man kenne eine gewisse Anzahl Werthe derselben:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, ... u_n, \qquad (1)$$

welche den gleichfalls bekannten Werthen von x:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_n$$

entsprechen, (so dass $u_0 = \varphi(x_0)$ u. s. w.); es soll für irgend einen anderen zwischen x_0 und x_n gelegenen Werth von x, z. B. x', der zugehörige Werth von u, $= u'$ gefunden werden.

Offenbar kommt es hier darauf an, eine Funktion $f(x)$ zu finden, welche wir zur Berechnung statt der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ be-

nützen können. Diese Funktion $f(x)$ muss nothwendig die Eigenschaft haben, dass sie für $x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ die Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ annimmt; es ist diess aber zugleich die einzige Bedingung, welche uns zur Auffindung dieser Funktion zu Gebote steht. Hat man eine solche gefunden, so wird die Gleichung $u = f(x)$ das Gesetz der Abhängigkeit der unbekannten Funktion $\varphi(x)$ offenbar um so genauer darstellen, je grösser die Anzahl der gegebenen zusammengehörigen Werthe von x und u ist, je näher dieselben einander liegen und je regelmässiger sie aufeinanderfolgen.

Die Grösse x, von welcher die Funktion u abhängt, pflegt man bei Interpolationsrechnungen das Argument zu nennen.

Es ist leicht zu übersehen, dass diese Aufgabe eigentlich eine unbestimmte ist, d. h. dass es unendlich viele Funktionen geben wird, welche die Eigenschaft haben, für $x = x_0, x_1, \ldots x_n$ die Werthe $u_0, u_1, \ldots u_n$ anzunehmen, was durch eine einfache geometrische Betrachtung am anschaulichsten wird. Denkt man sich die gegebenen Werthe von x als Abscissen, die zugehörigen Werthe von u als Ordinaten [§. 14], so werden durch die zusammengehörigen Werthe:

$$x_0, u_0;\ x_1, u_1;\ \ldots x_n, u_n$$

offenbar $n + 1$ Punkte in der Ebene bestimmt, welche zu einer krummen Linie gehören, deren unbekannte Gleichung $u = \varphi(x)$ ist. Aber durch dieselben Punkte lassen sich unzählige, bestimmten Gesetzen unterworfene Curven ziehen und jede derselben ist eine Auflösung unserer Aufgabe. Erst durch Hinzufügung anderer Bedingungen, z. B. dass die Funktion $f(x)$ eine rationale ganze Funktion vom n^{ten} Grade sein soll, wird die Aufgabe eine bestimmte.

In den meisten Fällen liegen die gegebenen Werthe des Argumentes x in gleichen Abständen von einander, so dass:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

u. s. w. ist, welchen Fall wir zuerst betrachten wollen.

145. Bezeichnen wir mit $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots \Delta^n u_0$ die Anfangsglieder der aufeinanderfolgenden Differenzreihen der Reihe (1), so ist [§. 137]:

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

Setzen wir nun $u = f(x)$, das constante Intervall des Argumentes, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$, so wird $u_0 = f(x_0)$, $u_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$, $u_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h)$, $\ldots$ $u_n = f(x_0 + nh)$, und wir haben:

$$f(x_0+nh)=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\Delta^2u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3u_0+\ldots$$

oder, wenn wir:

$$x_0+nh=x,\quad nh=k,\quad \text{somit } n=\frac{k}{h}\ \text{setzen:}$$

$$f(x_0+k)=f(x)=u_0+\frac{k}{h}\Delta u_0+\frac{k(k-h)}{1.2.h^2}\Delta^2u_0+\frac{k(k-h)(k-2h)}{1.\ 2.\ 3.\ h^3}\Delta^3u_0+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{k(k-h)(k-2h)\ldots.[k-(n-1)h]}{1.\ 2.\ 3\ldots n.\ h^n}\Delta^nu_0. \qquad (2)$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist eine ganze rationale Funktion von x vom m^{ten} Grade, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt k seinen Werth $x-x_0$ einführt, und nimmt der Reihe nach die Werthe u_0, u_1, u_2, ... u_n an, wenn man darin x_0, x_1, x_2, ... x_n an die Stelle von x setzt. Man erhält nämlich [vergl. §. 137]:

für $x=x_0$, wegen $k=0$, $f(x_0)=u_0$,
- $x=x_1$, - $k=h$, $f(x_1)=u_0+\Delta u_0=u_1$,
- $x=x_2$, - $k=2h$, $f(x_2)=u_0+2\Delta u_0+\Delta^2u_0=u_2$;

u. s. w.

Diese Funktion $f(x)$ kann demnach, in Ermangelung von $\varphi(x)$, als ein genäherter Ausdruck des Gesetzes der Abhängigkeit der Grösse u von x betrachtet und zur Interpolation benutzt werden. Setzt man nämlich statt x irgend einen zwischen x_0 und x_n fallenden Werth x', so wird dieselbe einen Werth u' liefern, welcher dem wahren Werthe $\varphi(x')$ so nahe kommen wird, als es die gegebenen Daten überhaupt erlauben. Dabei ist h das Intervall, nach welchem das Argument fortschreitet und $k=x'-x_0$ zu setzen, wo x_0 jenen Werth des Argumentes bedeutet, welcher dem Werthe u_0 entspricht, von welchem die Formel (2) ausgeht.

146. Die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen in (2) bricht ab, wenn die gegebenen Werthe von u eine arithmetische Reihe bilden und ist in diesem Falle nichts anderes als der Ausdruck des allgemeinen, dem Stellenzeiger x_0+k entsprechenden Gliedes der Reihe (1); in diesem Falle ist natürlich der Ausdruck völlig genau und kann auch für solche Werthe des Argumentes angewendet werden, welche ausserhalb der Grenzen x_0 und x_n liegen.

Ist aber die Reihe der u keine arithmetische (und diess ist der gewöhnlichere Fall), so ist die Reihe in (2) unendlich und zur Berechnung nur geeignet, wenn sie convergirt, wozu erfordert wird, dass die aufeinanderfolgenden Differenzen Δu_0, Δ^2u_0, Δ^3u_0, ... immer kleiner

werden, so dass man die folgenden Glieder mit Rücksicht auf den verlangten Grad der Genauigkeit vernachlässigen kann.

Ist das Intervall des Argumentes $h = 1$, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit, $x_0 = 0$, folglich $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ u. s. w. annehmen; die Gleichung (2) liefert sodann, wie leicht einzusehen, dasjenige Glied der Reihe, dessen Stellenzeiger k ist; schreibt man daher t statt k, so geht (2) über in:

$$u_t = u_0 + tu_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \ldots, \quad (3)$$

eine andere Form der allgemeinen Interpolationsformel, welche übrigens, wie leicht einzusehen ist, auch dann gebraucht werden kann, wenn h nicht $= 1$ ist; es ist dann $t = \frac{k}{h}$ zu setzen. Der Kürze wegen mögen die Coefficienten von Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... in (2) oder (3) mit c_1, c_2, c_3, ... bezeichnet werden.

147. Soll zwischen je zwei Glieder der Reihe:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

eine gegebene Anzahl von Gliedern eingeschaltet werden, welche nach demselben Gesetze fortschreiten, wie die ersteren und ist $r - 1$ die Anzahl der einzuschaltenden Glieder, so betrachte man $0, r, 2r, 3r, \ldots$ als die Stellenzeiger der Glieder der gegebenen Reihe und man erhält die zwischen u_0 und u_1 einzuschaltenden Glieder, wenn man in (2) $h = r$ und k der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots (r - 1)$ setzt. Will man Formel (3) gebrauchen, so hat man der Reihe nach:

$$t = \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \frac{3}{r}, \ldots \frac{r-1}{r}$$

zu setzen. Die zwischen u_1 und u_2 fallenden Glieder erhält man am bequemsten auf dieselbe Weise, indem man mit Weglassung von u_0, u_1 als das erste Glied betrachtet, wo dann nur andere Differenzen, nämlich jene von u_1 ausgehend, in Rechnung zu nehmen sind, die Werthe der Coefficienten c_1, c_2, c_3, ... aber dieselben bleiben.

148. Wir wollen nun den Gebrauch der Interpolationsformel an einigen Beispielen erläutern.

1. Es ist gegeben:

$$\begin{aligned} x_0 &= 30^0\ 0', & u_0 &= \operatorname{tg} x_0 = 0,5773503 \\ x_1 &= 30\ 30 & u_1 &= \operatorname{tg} x_1 = 0,5890450 \\ x_2 &= 31\ \ 0 & u_2 &= \operatorname{tg} x_2 = 0,6008606 \\ x_3 &= 31\ 30 & u_3 &= \operatorname{tg} x_3 = 0,6128008 \\ x_4 &= 32\ \ 0 & u_4 &= \operatorname{tg} x_4 = 0,6248694. \end{aligned}$$

Man suche tg $30^0\ 15'$.

Man bilde die Differenzen nach folgendem Schema:

$u = \text{tg}\ x$	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.
0,5773503				
	+ 116947			
0,5890450		+ 1209		
	118156		+ 37	
0,6008606		1246		+ 1
	119402		38	
0,6128008		1284		
	120686			
0,6248694				

Es ist nun $u_0 = 0{,}5773503$, $\Delta u_0 = + 0{,}0116947$, $\Delta^2 u_0 = + 0{,}0001209$, $\Delta^3 u_0 = + 0{,}0000037$, $\Delta^4 u_0 = + 0{,}0000001$, wo die letzte dieser Differenzen von keinem Einflusse mehr ist; ferner $h = 30'$, $k = 15'$; somit, nach (2) rechnend:

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{2} = c_1\ ;\ c_2 = \frac{15.-15}{1.\,2.\,30^2} = -\frac{1}{8},\ c_3 = +\frac{1}{16};$$

folglich:

$$\begin{aligned} \text{tg}\ 30^0\ 15' = &\quad 0{,}5773503 \\ &+ 0{,}00584735 \\ &- 0{,}00001511 \\ &+ 0{,}00000023 \\ = &\quad 0{,}5831828. \end{aligned}$$

2) Man berechne $\log \pi = \log 3{,}1415926536$ mit 10 Stellen, vorausgesetzt, dass man eine zehnstellige Logarithmentafel aller Zahlen von 1 bis 1000 besitzt. Man hat nun:

x	$\log x$	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.
3,14	0,4969296481				
		+ 13809057			
3,15	0,4983105538		— 43769		
		13765288		+ 277	
3,16	0,4996870826		43492	274	— 3
		13721796			
3,17	0,5010592622		43218		
		13678578			
3,18	0,5024271200				

Es ist folglich:

$$\begin{aligned} u_0 = &\quad 0{,}4969296481,\ \Delta u_0 = +0{,}0013809057, \\ \Delta^2 u_0 = &-0{,}0000043769,\ \Delta^3 u_0 = +0{,}0000000277, \\ \Delta^4 u_0 = &-0{,}0000000003. \end{aligned}$$

$h = 0{,}01$, $k = 0{,}0015926536$.

Berechnet man mit diesen Werthen von h und k, oder mit dem Werthe $t = \frac{k}{h} = 0{,}15926536$ die Coefficienten c_1, c_2, c_3, c_4, und zwar nur mit so viel Dezimalstellen, dass mit Rücksicht auf die Anzahl der bedeutenden Dezimalstellen in den Differenzen jedes Glied sich mit 11 Dezimalstellen ergiebt, wovon die 11te zur Versicherung der 10ten dient, so findet man:

$$c_1 = \frac{k}{h} = t = 0{,}15926536,\ c_2 = -\ 0{,}06695,\ c_3 = +\ 0{,}041,$$
$$c_4 = -\ 0{,}03;$$

somit:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0{,}4969296481 \\ c_1 \Delta u_0 &= +\ 0{,}00021993042 \\ c_2 \Delta^2 u_0 &= +\ 0{,}00000029301 \\ c_3 \Delta^3 u_0 &= +\ 0{,}00000000114 \\ c_4 \Delta^4 u_0 &= +\ 0{,}00000000001 \\ \hline \log \pi &= 0{,}4971498727. \end{aligned}$$

149. Bei dem Gebrauche der mathematischen Tafeln aller Art findet das Interpoliren fortwährende Anwendung. Eine jede solche Tafel hat zum Zwecke, die numerischen Werthe einer gewissen Funktion, welche häufige Anwendung findet, für eine Reihe von Werthen derjenigen Grösse, von welcher die Funktion abhängt (des Argumentes), ein für alle Mal berechnet zu enthalten, wobei das Argument immer nach einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung fortläuft. Bei Tafeln von besonders häufigem Gebrauche, wie z. B. Logarithmentafeln, lässt man das Arument nach so kleinen Intervallen fortschreiten, dass innerhalb einer gewissen Ausdehnung die ersten Differenzen constant und somit jene der höheren Ordnungen $= 0$ werden, wodurch die Interpolation nach der Formel:

$$u_t = u_0 + t\Delta u_0$$

auf die Berechnung der sogenannten Proportionaltheile zurückgeführt ist.

Bei der Berechnung von Tafeln selbst leistet das Interpoliren die wesentlichsten Dienste. Man wird nämlich die Funktionswerthe nur für weiter abstehende Werthe des Argumentes berechnen und die zwischenliegenden durch Interpolation suchen, wodurch man um so mehr gewinnt, je complicirter die zu berechnende Funktion ist.

Bei dem Gebrauche von Tafeln tritt auch die umgekehrte Aufgabe ein, nämlich zu einem gegebenen Werthe der Tafelgrösse den zugehörigen Werth des Argumentes zu finden. Hiezu dient ebenfalls Formel (3), nur ist u_t gegeben und t die gesuchte Grösse. Ist schon die 2te Differenz sammt den folgenden unmerklich, so hat man unmittelbar:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0}$$

wo u_0 der dem gegebenen u_t unmittelbar vorangehende in den Tafeln enthaltene Werth der Funktion ist, so dass u_t zwischen den Tafelwer-

then u_0 und u_1 liegend, angenommen wird. Sind dann x_0, x_t die zu u_0 und u_t gehörigen Argumente, so ist $x_t = x_0 + t$.

Sind aber auch noch die höheren Differenzen zu berücksichtigen, so würde die Bestimmung von t aus (3) die Auflösung einer höheren Gleichung erfordern, welcher Uebelstand, wenn die Differenzen rasch genug abnehmen, durch ein Näherungsverfahren umgangen werden kann. Aus (3) folgt nämlich:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{t-1}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots};$$

vernachlässigt man zuerst die höheren Differenzen, so hat man als ersten genäherten Werth $t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0} = \tau$; substituirt man diesen im 2ten Gliede des Nenners, so erhält man als 2ten genäherten Werth:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{\tau - 1}{1.2}\Delta^2 u_0} = \tau';$$

hiemit als 3ten:

$$t = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0 + \frac{\tau' - 1}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{(\tau'-1)(\tau'-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0} = \tau''$$

u. s. w.

Beispiel. Man suche mittelst der im ersten Beispiele, §. 148, enthaltenen kleinen Tafel der Tangenten den Winkel x, für welchen $\operatorname{tg} x = 0{,}5812753$ ist.

Man hat $u_0 = 0{,}5773503$; $u_t = 0{,}5812753$; folglich: $u_t - u_0 = 0{,}0039250$, und findet demnach mit den, §. 148, angeführten Differenzen:

$$\tau = \frac{u_t - u_0}{\Delta u_0} = \frac{0.003925}{0.01169} = \frac{1}{3},$$

$$\tau' = \frac{0.0039250}{0{,}0116947 - \frac{1}{3}.\,0{,}0001209} = 0{,}337, \text{ und hiemit:}$$

$$\tau'' = 0{,}33676.$$

Es ist demnach $t = 0{,}33676$, welcher Zahl das Intervall des Argumentes, d. i. 30′ als Einheit zu Grunde liegt. Daher wird: $t = 0{,}33676 \times 30 = 10'{,}1028 = 10'\ 6''{,}17$ und $x = 30^0\ 10'\ 6''{,}17$.

150. Betrachten wir jetzt den Fall, wenn die gegebenen Werthe des Argumentes, $n+1$ an der Zahl:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$$

zu welchen die gleichfalls bekannten Funktionswerthe:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$$

gehören, nicht in gleichen Intervallen aufeinanderfolgen.

Man setze:

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^n, \qquad (\alpha)$$

so kommt es darauf an, die Coefficienten $A, B, \ldots M$ so zu bestimmen, dass diese Funktion für $x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ der Reihe nach die Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ annehme. Hiezu erhalten wir folgende $n + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_0 &= A + Bx_0 + Cx_0^2 + \ldots + Mx_0^n \\ u_1 &= A + Bx_1 + Cx_1^2 + \ldots + Mx_1^n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= A + Bx_n + Cx_n^2 + \ldots + Mx_n^n, \end{aligned}$$

welche zur Bestimmung der $n + 1$ Coefficienten hinreichen. Ohne jedoch diese Elimination auszuführen, erkennt man aus der linearen Form dieser Gleichungen, dass jeder Coefficient, z. B. A, die Form:

$$A = u_0 P_0 + u_1 P_1 + u_2 P_2 + \ldots + u_n P_n$$

haben werde, wo $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$ Funktionen von $x_0, x_1, \ldots x_n$ sind. Denkt man sich sodann diese Coefficienten in (α) substituirt und den Ausdruck nach den u geordnet, so nimmt derselbe die Form an:

$$u = u_0 X_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n, \qquad (\beta)$$

wo die Coefficienten $X_0, X_1, \ldots X_n$ ganze rationale Funktionen des n^{ten} Grades von x sein werden. Der Bedingung der Aufgabe gemäss muss nun der 2te Theil dieser Gleichung sich auf u_0 reduciren, wenn $x = x_0$ gesetzt wird; diess erfordert, dass:

für $x = x_0$: $X_0 = 1$, und $X_1 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = 0$

werde; aus gleichem Grunde muss:

für $x = x_1$: $X_1 = 1$, und $X_0 = X_2 = X_3 = \ldots = X_n = 0$

werden u. s. w. Irgend einer dieser Coefficienten, z. B. X_g, ist also durch die beiden Bedingungen bestimmt, dass derselbe $= 1$ werde für $x = x_g$, für alle übrigen Werthe von x aber sich auf 0 reducire. Der letzteren Bedingung genügen wir, indem wir setzen:

$$X_g = m(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{g-1})(x - x_{g+1}) \ldots (x - x_n), \qquad (\gamma)$$

wo m eine von x unabhängige Constante ist, welche sich durch die Bedingung bestimmt, dass $X_g = 1$ werde für $x = x_g$; setzt man daher in (γ) $x = x_g$, so erhält man:

$$1 = m(x_g - x_0)(x_g - x_1) \ldots (x_g - x_{g-1})(x_g - x_{g+1}) \ldots (x_g - x_n)$$

und wenn man (γ) durch diese Gleichung dividirt:

$$X_g = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{g-1})(x - x_{g+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_g - x_0)(x_g - x_1) \ldots (x_g - x_{g-1})(x_g - x_{g+1}) \ldots (x_g - x_n)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke der Reihe nach 0, 1, 2, ... n statt g und substituirt in (β), so erhält man:

$$\begin{aligned} u = {} & u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_n)} \\ & + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} \\ & + u_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}, \end{aligned} \tag{4}$$

welches die von Lagrange gegebene Interpolationsformel ist. Entwickelt man die Brüche und ordnet nach x, so erhält der zweite Theil die Form (α).

ACHTES KAPITEL.

I.

UEBER DIE CONVERGENZ UNENDLICHER FACTORENFOLGEN.

§. **151.** Es seien u_0, u_1, u_2, ... u_n Grössen, welche in Bezug auf ihren arithmetischen Bau nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten und

$$P_n = u_0 . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots\ldots u_{n-1} \tag{1}$$

das Produkt von n solchen Faktoren, welches offenbar einen bestimmten endlichen Werth haben wird, so lange keiner dieser Faktoren unendlich gross wird. Lassen wir nun, woran im Allgemeinen nichts hindert, n unendlich wachsen und setzen $\lim P_n = P$, so geht (1) über in:

$$P = u_0 . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 . u_5 \ldots\ldots \text{ in inf.} \tag{2}$$

Das Produkt rechts vom Gleichheitszeichen besteht jetzt aus einer unendlichen Anzahl von Faktoren und wird ein unendliches Produkt oder eine unendliche Faktorenfolge genannt. Ist nun $\lim P_n = P$ eine bestimmte endliche Grösse, so sagt man, das unendliche Produkt sei convergent; P ist dann der Werth des unendlichen Produktes, welchem man sich um so mehr und bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit nähern kann, je mehr Faktoren vom ersten angefangen

miteinander multiplicirt werden. Das unendliche Produkt heisst im Gegentheile divergent, wenn $P = \lim P_n$ unendlich oder unbestimmt wird.

Die Untersuchung, ob eine vorgelegte Faktorenfolge convergire, kann auf die über die Convergenz der Reihen vorgetragenen Sätze zurückgeführt werden. Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, so hat man $u_0 = e^{lu_0}$, $u_1 = e^{lu_1}$, $u_2 = e^{lu_2}$ u. s. w. folglich:

$$P = e^{lu_0 + lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots} \tag{3}$$

und es kommt nun offenbar nur auf das Verhalten der Reihe:

$$lu_0 + lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots \tag{4}$$

an, wobei wir folgende drei Fälle unterscheiden können:

a) Ist die Reihe (4) convergent und s ihre Summe, so ist $P = e^s$ offenbar eine bestimmte endliche Grösse und somit die Faktorenfolge convergent; der Werth derselben $= e^s$ ist dabei nothwendig von Null verschieden.

b) Divergirt die Reihe (4), jedoch so, dass ihre Summe $= -\infty$ wird, so wird $P = e^{-\infty} = 0$; das Produkt $u_0 . u_1 . u_2 . u_3 \ldots$ ist daher convergent und sein Werth $= 0$.

c) Ist jedoch die Reihe (4) divergent und ihre Summe $= +\infty$ oder unbestimmt, so wird $P = e^{+\infty} = \infty$ oder unbestimmt, in welchem Falle daher das unendliche Produkt $u_0 . u_1 . u_2 . u_3 \ldots$ ebenfalls divergirt.

Die unmittelbare Anwendung der im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze auf die Reihe (4) ist jedoch in den meisten Fällen nicht einfach genug, daher wir die Bedingung der Convergenz derselben auf einen einfacheren Ausdruck bringen wollen.

Die Reihe (4) wird offenbar convergiren oder divergiren, wenn sie von irgend einem Gliede lu_r an convergirt oder divergirt, so dass wir statt (4) die folgende:

$$lu_r + lu_{r+1} + lu_{r+2} + lu_{r+3} + \ldots \tag{5}$$

betrachten können, welche, wenn wir die Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ auf die Form:

$u_0 = 1 + v_0$, $u_1 = 1 + v_1$, $u_2 = 1 + v_2$, $\ldots\ldots u_n = 1 + v_n$, $\ldots$

bringen, was immer möglich ist, folgende Form erhält:

$$l(1 + v_r) + l(1 + v_{r+1}) + l(1 + v_{r+2}) + l(1 + v_{r+3}) + \ldots \tag{6}$$

Die Convergenz der Reihe (4) ist aber zunächst an die Bedingung gebunden, dass $\lim (lu_n) = \lim \{l(1 + v_n)\} = 0$, d. i. $\lim u_n = \lim (1 + v_n) = 1$, somit $\lim v_n = 0$ sei, woraus folgt, dass die Grössen v eine unendlich abnehmende Reihe bilden und r immer so gross gewählt werden kann, dass v_r und um so mehr v_{r+1}, v_{r+2} u. s. w. kleiner sind als eine beliebige gegebene Zahl.

Nun ist bekanntlich:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \ldots.\right);$$

aber:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \ldots. < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 + \ldots. < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 + \ldots.$$

d. i. weil $x < 1$:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \ldots. < \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-x},$$

und folglich für jedes x, dessen Zahlenwerth $< \frac{2}{3}$ ist:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x^2 - \ldots. < 1;$$

bezeichnen wir daher mit ϱ einen positiven echten Bruch, so besteht für jeden Werth von x, welcher numerisch $< \frac{2}{3}$ ist, die Gleichung:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \varrho x^3. \tag{7}$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man auf demselben Wege, wenn man von $l(1-x)$ ausgeht, so dass daher (7) für jeden Werth von x gilt, welcher zwischen $-\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}$ liegt.

Diess vorausgesetzt, lassen wir in (6) v_r die erste aus der Reihe der unendlich abnehmenden Grössen v sein, deren Zahlenwerth $< \frac{2}{3}$ ist, so erhalten wir unter Anwendung der Gl. (7):

$$\left.\begin{aligned} &l(1+v_r) + l(1+v_{r+1}) + l(+v_{r+2}) + l(1+v_{r+3}) + \ldots. = \\ &\qquad = v_r + v_{r+1} + v_{r+2} + v_{r+3} + \ldots.. \\ &-\frac{1}{2}(v^2{}_r + v^2{}_{r+1} + v^2{}_{r+2} + v^2{}_{r+3} + \ldots..) \\ &+ \varrho_r v^3{}_r + \varrho_{r+1} v^3{}_{r+1} + \varrho_{r+2} v^3{}_{r+2} + \varrho_{r+3} v^3{}_{r+3} + \ldots.. \\ &\qquad = V_1 - \frac{1}{2}V_2 + V_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wo die ϱ positive echte Brüche sind und der Kürze halber die drei Reihen rechts vom Gleichheitszeichen mit V_1, V_2, V_3 bezeichnet werden.

Aus (8) erhellt sofort, dass die Convergenz oder Divergenz der Reihe (6) und somit auch jener (4) von dem Verhalten der Reihen

V_1, V_2, V_3 abhängig ist. Nun ist klar, dass die Convergenz der Reihe V_1 nothwendig auch jene von V_3 nach sich zieht, weil die Glieder der letzteren Reihe sämmtlich kleiner sind als die entsprechenden in V_1 und ein in V_1 etwa stattfindender Zeichenwechsel auch in V_3 erscheint. Hingegen lässt sich aus der Convergenz von V_1 die Convergenz von V_2 nur dann folgern, wenn die Glieder in V_1 durchaus gleiche Zeichen haben; findet aber in V_1 ein Zeichenwechsel statt, so ist zwar diese Reihe wegen der unendlichen Abnahme ihrer Glieder nothwendig convergent, aber die Reihe V_2 kann in Folge der gleichen Bezeichnung ihrer Glieder auch divergiren.

Verbindet man mit diesen Bemerkungen das oben unter *a*), *b*), *c*) gesagte, so gelangt man sogleich zu folgenden Sätzen:

1) das unendliche Produkt:

$$(1 + v_0)(1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3)(1 + v_4) \ldots\ldots$$

convergirt gegen eine von 0 verschiedene Grenze, wenn die beiden Reihen:

$$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots\ldots$$
$$v_0^2, v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2, \ldots\ldots$$

gleichzeitig convergiren. Denn unter dieser Voraussetzung convergirt, vermöge (8), auch die Reihe (4).

2) Das Produkt convergirt gegen die Grenze 0, wenn die erste dieser Reihen convergirt und die zweite divergirt; oder wenn die erste Reihe divergirt, ihre unendlich wachsende Summe aber negativ wird. Denn in beiden Fällen divergirt, in Folge (8), die Reihe (4) gegen $-\infty$.

3) Das unendliche Produkt divergirt, wenn die erste Reihe divergirt und ihre unendlich wachsende Summe positiv ist. Denn in diesem Falle divergirt auch (4) gegen $+\infty$.

Die Anwendung dieser Regeln unterliegt keinen weiteren Schwierigkeiten. So findet man z. B., dass die Faktorenfolgen:

$$\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4^2}\right) \ldots\ldots$$
$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right) \ldots\ldots$$

gegen einen von 0 verschiedenen Werth convergiren. Die Faktorenfolgen:

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{4}}\right) \ldots$$
$$\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right) \ldots$$

convergiren gegen den Werth Null; das Produkt:

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{4}\right)\ldots..$$

ist hingegen divergent.

II.

DARSTELLUNG DER SINUS UND COSINUS DURCH PRODUKTE.

152. Lassen wir in den Formeln (6), (7), (8), (9) des §. 68, m eine ganze Zahl bedeuten, so ist:

wenn m gerade:

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2 \sin x^2}{1.2} + \ldots.. +$$

$$+ (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m^2(m^2-2^2)\ldots..[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots.m} \sin x^m, \qquad (1)$$

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = m - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3} \sin x^2 + \ldots. +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{m(m^2-2^2)\ldots..[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots(m-1)} \sin x^{m-2}; \qquad (2)$$

wenn m ungerade:

$$\frac{\cos mx}{\cos x} = 1 - \frac{m^2-1^2}{1.2} \sin x^2 + \ldots. +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots.(m-1)} \sin x^{m-1}, \qquad (3)$$

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = m - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3} \sin x^2 + \ldots. +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.2.3.4\ldots.m} \sin x^{m-1}. \qquad (4)$$

Die zweiten Theile dieser Gleichungen sind, wie man sieht, ganze rationale Funktionen von $\sin x$. Ist nun überhaupt:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots.. + A_r z^r$$

eine solche Funktion von z des r^{ten} Grades und sind $z_1, z_2, z_3, \ldots. z_r$ Werthe von z, r an der Zahl, welche diese Funktion auf 0 reduciren, also Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, so ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen:

$$f(z) = A_r (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots.. (z-z_r).$$

Hiedurch ist nun ein leichtes Mittel geboten, obige Reihen in Produkte umzuformen. Betrachten wir zunächst die Gleichung (1). Setzen wir Kürze halber $\sin x = z$ und seien $z_1, z_2, z_3, \ldots. z_m$ die

Sinus solcher Bögen, m an der Zahl, welche den zweiten Theil dieser Gleichung $= 0$ machen, so haben wir:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} C(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \ldots\ldots (z-z_m),$$

wo Kürze halber:

$$C = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2) \ldots\ldots [m^2-(m-2)^2]}{1.\,2.\,3.\,4 \ldots\ldots m}$$

gesetzt ist. Durch Auflösung eines jeden der binomischen Faktoren im Zähler von C erhält man aber leicht:

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.4.6 \ldots\ldots (m-4)(m-2)m(m+2)(m+4) \ldots\ldots (2m-4)(2m-2)(2m)}{1.\,2.\,3.\,4 \ldots\ldots m.}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist das Produkt aller geraden Zahlen von 2 bis $2m$, deren Anzahl $= m$ ist; sondert man daher aus jeder dieser Zahlen den Faktor 2 ab, so wird der Zähler $= 2^m . 1.2.3.4 \ldots\ldots m$, folglich $C = 2^{m-1}$. Es erübrigt nun noch, jene Werthe von x auszumitteln, welche den zweiten Theil der Gl. (1) auf Null bringen; da aber diese Werthe auch den ersten Theil $\cos mx$ auf 0 reduciren müssen, so finden wir sie aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} mx &= +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots +\frac{(m-1)\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots -\frac{(m-1)\pi}{2} \end{aligned}$$

nämlich:

$$\begin{aligned} x &= +\frac{\pi}{2m}, +\frac{3\pi}{2m}, +\frac{5\pi}{2m}, \ldots\ldots +\frac{(m-1)\pi}{2m} \\ &= -\frac{\pi}{2m}, -\frac{3\pi}{2m}, -\frac{5\pi}{2m}, \ldots\ldots -\frac{(m-1)\pi}{2m}; \end{aligned}$$

die Sinus dieser Bögen, m an der Zahl, sind nun die gesuchten Werthe von $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_m$ und wir erhalten somit:

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \times$$

$$\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin\frac{3\pi}{2m}\right) \ldots\ldots \left(\sin x - \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$

$$\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x + \sin\frac{3\pi}{2m}\right) \ldots\ldots \left(\sin x + \sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right).$$

Vereinigt man endlich je zwei übereinanderstehende dieser einfachen Faktoren in einen quadratischen, wodurch die Anzahl derselben $= \frac{m}{2}$ wird und multiplicirt jeden derselben mit einer der in $(-1)^{\frac{m}{2}}$ enthaltenen negativen Einheiten, so erhält man für m gerade:

$$\cos mx = 2^{m-1}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right] \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left[\left(\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right] \qquad (5)$$

Eben so folgt aus (2):

$$\frac{\sin mx}{\cos x \sin x} = (-1)^{\frac{m-2}{2}} C(z-z_1)\,(z-z_2) \ldots\ldots (z-z_{m-2}),$$

wo wieder $z = \sin x$ und $z_1, z_2, \ldots\ldots z_{m-2}$ die Sinus jener Bögen sind, für welche beide Theile der Gl. (2) verschwinden. Diese Bögen ergeben sich daher aus der Gleichung $\sin mx = 0$ und sind, $m-2$ an der Zahl:

$$+\frac{2\pi}{2m}, +\frac{4\pi}{2m}, +\frac{6\pi}{2m}, \ldots\ldots +\frac{(m-2)\pi}{2m}$$

$$-\frac{2\pi}{2m}, -\frac{4\pi}{2m}, -\frac{6\pi}{2m}, \ldots\ldots -\frac{(m-2)\pi}{2m}.$$ *)

Es ist ferner:

$$C = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots\ldots[m^2-(m-2)^2]}{1.\,2.\,3\ldots\ldots(m-1)}$$

$$= \frac{2.4.6\ldots(m-2)\,m(m+2)\ldots(2m-4)(2m-2)}{1.\,2.\,3\ldots(m-1)}$$

$$= 2^{m-1},$$

folglich, wenn man sogleich je zwei der binomischen Faktoren in einen quadratischen vereinigt, wodurch die Anzahl derselben $\frac{m-2}{2}$ wird, und jeden derselben mit einer der in $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$ enthaltenen negativen Einheiten multiplicirt, für m gerade:

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\cos x\left[\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left[\left(\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]. \qquad (6)$$

Eben so findet man aus (3) und (4) ohne alle Schwierigkeit für m ungerade:

*) Der aus $\sin mx = 0$ folgende Werth $x = 0$ ist unstatthaft, weil er den ersten Theil von (2) nicht $= 0$ macht. Man hat nämlich für ein unendlich abnehmendes x:

$$\lim\frac{\sin mx}{\sin x\cos x} = \lim\frac{\sin mx}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = m.1.1 = m.$$ [Vergl. §. 73].

$$\cos mx = 2^{m-1} \cos x \left[\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right] \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left[\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right] \qquad (7)$$

$$\sin mx = 2^{m-1} \sin x \left[\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]\left[\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right] \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \left[\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2 - \sin x^2\right]. \qquad (8)$$

Lässt man in diesen vier Formeln x unendlich klein werden und dividirt zu diesem Behufe zuvor die Gl. (6) durch $\sin x \cos x$, (7) durch $\cos x$, (8) durch $\sin x$, so ergeben sich, da:

$$\lim \cos mx = 1, \lim \frac{\sin mx}{\sin x . \cos x} = m, \lim \frac{\cos mx}{\cos x} = 1,$$

ist, folgende bemerkenswerthe Gleichungen:

für m ungerade:

$$1 = 2^{m-1} \left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{5\pi}{2m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2 \qquad (9)$$

$$m = 2^{m-1} \left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{6\pi}{2m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2, \qquad (10)$$

für m ungerade:

$$1 = 2^{m-1} \left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{5\pi}{2m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2 \qquad (11)$$

$$m = 2^{m-1} \left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2 \left(\sin \frac{6\pi}{2m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2. \qquad (12)$$

Dividirt man nun die Gleichungen (5), (6), (7), (8) beziehungsweise durch (9), (10), (11), (12), so erhält man:

für m gerade:

$$\cos mx =$$

$$\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right] \ldots\ldots \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right] \qquad (13)$$

$$\sin mx = m \sin x \cos x \times$$

$$\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right] \ldots\ldots \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right] \qquad (14)$$

für m ungerade:

$$\cos mx = \cos x \times$$

$$\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right] \ldots\ldots \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right] \qquad (15)$$

$$\sin mx = m \sin x \times$$

$$\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right].....\left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right] \quad (16)$$

Setzen wir in diesen vier Gleichungen $\frac{x}{m}$ an die Stelle von m, so erhalten wir:

für m gerade:

$$\cos x =$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right].....\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right] \quad (17)$$

$$\sin x = m \sin \frac{x}{m} \cos \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]....\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right] \quad (18)$$

für m ungerade:

$$\cos x = \cos \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right].....\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-2)\pi}{2m}\right)^2}\right] \quad (19)$$

$$\sin x = m \sin \frac{x}{m} \times$$

$$\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]....\left[1 - \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2}\right]. \quad (20)$$

153. Mit Hülfe der letzten Formeln lassen sich nun die Funktionen cos x und sin x leicht durch unendliche Faktorenfolgen ausdrücken, indem man m unendlich wachsen lässt, was offenbar gestattet ist, da diese Formeln für jeden Werth von m gelten, wie gross man denselben auch annehmen mag. Es kommt dabei nur auf die Ausmittelung des Grenzwerthes:

$$\lim \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{r\pi}{2m}\right)^2} = \left(\lim \frac{\sin \frac{x}{m}}{\sin \frac{r\pi}{2m}}\right)^2 = G^2$$

für ein unendlich wachsendes m an. Setzt man $\frac{1}{m} = \alpha$, wo also α eine unendlich abnehmende Grösse bedeutet und Kürze halber $\frac{r\pi}{2} = y$, so wird:

$$G = \lim \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha y} = \lim \frac{\alpha}{\frac{\sin \alpha y}{\alpha}} = \lim \frac{\sin \alpha x}{\alpha} : \lim \frac{\sin \alpha y}{\alpha} = \frac{x}{y},$$

somit:

$$\lim \frac{\left(\sin \frac{x}{m}\right)^2}{\left(\sin \frac{r\pi}{2m}\right)^2} = \frac{4x^2}{r^2\pi^2};$$

beachtet man nun noch, dass bekanntlich $\lim \cos \frac{x}{m} = \lim \cos \alpha x = 1$, $\lim m \sin \frac{x}{m} = \lim \frac{\sin \alpha x}{\alpha} = x$ ist, so erhält man sogleich aus (19) und (20):

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2 . \pi^2}\right) \ldots\ldots \quad (21)$$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2 . \pi^2}\right)\ldots\ldots \quad (22)$$

zwei Formeln, welche, wie man sich nach den in §. 151 aufgestellten Kriterien leicht überzeugt, für jeden Werth von x gelten. Setzt man $x = k\pi$, wo also k eine beliebige Zahl bedeuten kann, so nehmen sie folgende Form an:

$$\cos k\pi = \left(1 - \frac{4k^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2}{5^2}\right) \ldots\ldots \quad (23)$$

$$\sin k\pi = k\pi\left(1 - \frac{k^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{3^2}\right) \quad (24)$$

Man übersieht leicht, dass mittelst dieser Formeln auch die übrigen trigonometrischen Funktionen durch unendliche Produkte dargestellt werden können. Schreibt man (24) in der Form:

$$\sin k\pi = k\pi\left(1 - \frac{k}{1}\right)\left(1 + \frac{k}{1}\right)\left(1 - \frac{k}{2}\right)\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(1 - \frac{k}{3}\right)\left(1 + \frac{k}{3}\right)\ldots\ldots (25)$$

und setzt $k = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \ldots\ldots$$

oder:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots\cdots \qquad (26)$$

eine merkwürdige von Wallis gefundene Entwickelung von $\frac{\pi}{2}$ in Faktoren.

III.

VERWANDLUNG DER REIHEN IN KETTENBRUECHE.

154. Nebst den unendlichen Reihen und Produkten bietet die Analysis in den Kettenbrüchen noch eine bemerkenswerthe Form dar, um Grössen oder Funktionen darzustellen und deren Werthe näherungsweise zu berechnen. Wir wollen daher noch in Kürze ein Verfahren zur Verwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch kennen lernen, da man sich dieses Mittels in vielen Fällen mit Vortheil bedienen kann, um den Werth der Summe einer unendlichen Reihe näherungsweise zu finden, wenn diese nur schwach convergirt, oder wohl gar divergirt.

Man kann zu diesem Zwecke dieselbe, aus der Arithmetik bekannte, Methode anwenden, nach welcher man einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch verwandelt. Bezeichnen wir nämlich mit S die gegebene Reihe, so ist:

$$S = \frac{1}{1:S}, \text{ somit, wenn } \frac{1}{S} = v_0 + \frac{R_0}{S} \text{ gesetzt wird,}$$

$$S = \frac{1}{v_0 + \frac{R_0}{S}} = \frac{1}{v_0 + \frac{1}{S:R_0}}.$$

Sei ferner $S:R_0 = v_1 + \frac{R_1}{R_0}$, so wird:

$$S = \frac{1}{v_0 + \frac{1}{v_1 + \frac{R_1}{R_0}}} = \frac{1}{v_0 + \frac{1}{v_1 + \frac{1}{R_0:R_1}}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, immer den letzten Divisor durch den letzten Rest dividirend, so erhält man, wenn die bei den folgenden Divisionen erscheinenden Quotienten mit $v_2, v_3, v_4, \ldots$ bezeichnet werden:

$$S = \frac{1}{v_0 + \frac{1}{v_1 + \frac{1}{v_2 + \frac{1}{v_3 + \frac{1}{v_4 + \ldots}}}}} \qquad (I)$$

Zur Entwickelung der Quotienten $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ist folgendes schematische Verfahren bequem, welches wir einer gütigen Mittheilung des Hrn. Prof. S. Stampfer verdanken. Es sei:

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots\ldots \qquad (1)$$

die gegebene Reihe, so erhält man, die Einheit durch dieselbe dividirend:

$$1 : (u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots) = \frac{1}{u_0} = v_0,$$

$$\begin{array}{rl} & 1 - u_1 v_0 + u_2 v_0 - u_3 v_0 + u_4 v_0 - \ldots \\ \hline R_0 = & u_1 v_0 - u_2 v_0 + u_3 v_0 - u_4 v_0 + \ldots \\ = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \end{array}$$

wenn Kürze halber:

$$u_1 v_0 = a_0,\ u_2 v_0 = a_1,\ u_3 v_0 = a_2,\ \ldots.$$

gesetzt wird. Dividirt man mit diesem Reste in den Divisor, so kommt:

$$(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots) : (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots) = \frac{u_0}{a_0} = v_1,$$

$$\begin{array}{rl} & u_0 - a_1 v_1 + a_2 v_1 - a_3 v_1 + \ldots \\ \hline R_1 = & (a_1 v_1 - u_1) - (a_2 v_1 - u_2) + (a_3 v_1 - u_3) - \ldots \\ = & b_0 - b_1 + b_2 - \ldots \end{array}$$

wenn wir wieder:

$$a_1 v_1 - u_1 = b_0,\ a_2 v_1 - u_2 = b_1,\ a_3 v_1 - u_3 = b_2,\ \ldots.$$

setzen. Ferner:

$$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots) : (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots) = \frac{a_0}{b_0} = v_2,$$

$$\begin{array}{rl} & a_0 - b_1 v_2 + b_2 v_2 - b_3 v_2 + \ldots \\ \hline R_2 = & (b_1 v_2 - a_1) - (b_2 v_2 - a_2) + (b_3 v_2 - a_3) - \ldots \\ = & c_0 - c_1 + c_2 - \ldots \end{array}$$

$$(b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots) : (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots) = \frac{b_0}{c_0} = v_3,$$

u. s. w.

Wie man sieht, kommt es nur auf die successive Bildung der Reihen:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \\ b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

u. s. w.

aus der gegebenen Reihe (1) an, indem dann:

$$v_0 = \frac{1}{u_0}, v_1 = \frac{u_0}{a_0}, v_1 = \frac{a_0}{b_0}, v_3 = \frac{b_0}{c_0}, \ldots$$

ist. Diese Reihen ergeben sich aber einfach mit Hülfe des folgenden Schema, wie aus der Vergleichung mit der vorstehenden Rechnung sogleich erhellt:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
u_0 & & & & & \\
u_1 & u_1 v_0 = a_0 & & & & \\
u_2 & u_2 v_0 = a_1 & a_1 v_1 - u_1 = b_0 & & & \\
u_3 & u_3 v_0 = a_2 & a_2 v_1 - u_2 = b_1 & b_1 v_2 - a_1 = c_0 & & \\
u_4 & u_4 v_0 = a_3 & a_3 v_1 - u_3 = b_2 & b_2 v_2 - a_2 = c_1 & c_1 v_3 - b_1 = d_0 & \\
u_5 & u_5 v_0 = a_4 & a_4 v_1 - u_4 = b_3 & b_3 v_2 - a_3 = c_2 & c_2 v_3 - b_2 = d_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \text{u. s. w.} \\
v_0 = \dfrac{1}{u_0} & v_1 = \dfrac{u_0}{a_0} & v_2 = \dfrac{a_0}{b_0} & v_3 = \dfrac{b_0}{c_0} & v_4 = \dfrac{c_0}{d_0} &
\end{array}
$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Bildungsgesetze der Reihen (2) immer leicht in die Augen fallen, wenn man sie nicht durch voreilige Reduktionen stört, so dass dann nur sehr wenig zu schreiben übrig bleibt.

Bezeichnen wir mit $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}$ u. s. w. die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche des Kettenbruches (I), so ist bekanntlich:

$$
\begin{array}{ll}
Z_1 = 1, & N_1 = v_0, \\
Z_2 = v_1 Z_1, & N_2 = v_1 N_1 + 1, \\
Z_3 = v_2 Z_2 + Z_1, & N_3 = v_2 N_2 + N_1, \\
Z_4 = v_3 Z_3 + Z_2, & N_4 = v_3 N_3 + N_2, \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
Z_n = v_{n-1} Z_{n-1} + Z_{n-2}. & N_n = v_{n-1} N_{n-1} + N_{n-2}.
\end{array}
$$

Wendet man den bekannten Satz, dass der Werth eines Kettenbruches unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner eines Gliedes und den Zähler des darauf folgenden mit einer und derselben Grösse multiplicirt oder dividirt, auf den Kettenbruch (I) an, so bringt man ihn leicht auf die Form:

$$
S = \cfrac{w_0}{1 + \cfrac{w_1}{1 + \cfrac{w_2}{1 + \cfrac{w_3}{1 + \ldots}}}} \qquad \text{(II)}
$$

wo:

$$
w_0 = \frac{1}{v_0}, \; w_1 = \frac{1}{v_0 v_1}, \; w_2 = \frac{1}{v_1 v_2}, \; w_3 = \frac{1}{v_2 v_3}, \; \ldots\ldots \; w_n = \frac{1}{v_{n-1} v_n},
$$

ist, und die Grössen w häufig einen einfacheren Ausdruck gestatten, als die Grössen v. Für diese Form hat man als reducirte Brüche:

$$
\frac{Z_1}{N_1} = \frac{w_0}{1}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{w_0}{1 + w_1},
$$

und vom 3ten angefangen;

$$
\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} + w_{n-1} Z_{n-2}}{N_{n-1} + w_{n-1} N_{n-2}}.
$$

Wenden wir nun das obige Verfahren auf einige Beispiele an.

1) Es sei:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln. Der Deutlichkeit wegen möge hier die Rechnung ausführlich stehen, wobei die zulässigen Abkürzungen von selbst in die Augen fallen.

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\underbrace{}_{u} & \underbrace{}_{a} & & \underbrace{}_{b} & \underbrace{}_{c} \\
1 & -x & -\frac{x}{2!} + x = \frac{x}{2!} & & \\
-x & +\frac{x^2}{2!} & +\frac{x^2}{3!} - \frac{x^2}{2!} = -\frac{2x^2}{3!} & +\frac{2\cdot 2x^2}{3!} - \frac{x^2}{2!} = \frac{1\cdot x^2}{3!} & \\
+\frac{x^2}{2!} & -\frac{x^3}{3!} & -\frac{x^3}{4!} + \frac{x^3}{3!} = +\frac{3x^3}{4!} & -\frac{2\cdot 3x^3}{4!} + \frac{x^3}{3!} = -\frac{2x^3}{4!} & \\
-\frac{x^3}{3!} & +\frac{x^4}{4!} & +\frac{x^4}{5!} - \frac{x^4}{4!} = -\frac{4x^4}{5!} & +\frac{2\cdot 4x^4}{5!} - \frac{x^4}{4!} = +\frac{3x^4}{5!} & \\
+\frac{x^4}{4!} & -\frac{x^5}{5!} & -\frac{x^5}{6!} + \frac{x^5}{5!} = +\frac{5x^5}{6!} & -\frac{2.5.x^5}{6!} + \frac{x^5}{5!} = -\frac{4x^5}{6!} & \\
-\frac{x^5}{5!} & +\frac{x^6}{6!} & \vdots & \vdots & \\
+\frac{x^6}{6!} & \vdots & & & \\
\vdots & & & & \\
v_0 = 1 & v_1 = -\frac{1}{x} & v_2 = -x : \frac{x}{2!} = -2 & v_3 = \frac{x}{2!} : \frac{x^2}{3!} = \frac{3}{x} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
\underbrace{}_{d} & & \underbrace{}_{e} \\
-\frac{3\cdot 2x^2}{4!} + \frac{2x^2}{3!} = +\frac{1\cdot 2x^2}{4!} & & \\
+\frac{3\cdot 3x^3}{5!} - \frac{3x^3}{4!} = -\frac{2\cdot 3x^3}{5!} & -\frac{2\cdot 2\cdot 3x^3}{5!} + \frac{2x^3}{4!} = -\frac{1\cdot 2\cdot x^3}{5!} & \\
-\frac{3\cdot 4x^4}{6!} + \frac{4x^4}{5!} = +\frac{3\cdot 4x^4}{6!} & +\frac{2\cdot 3\cdot 4x^4}{6!} - \frac{3x^4}{5!} = +\frac{2\cdot 3x^4}{6!} & \\
\vdots & \vdots & \\
v_4 = \frac{1\cdot x^2}{3!} : \frac{1\cdot 2x^2}{4!} = 2 & v_5 = \frac{1\cdot 2x^2}{4!} : -\frac{1\cdot 2x^3}{5!} = -\frac{5}{x} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\underbrace{}_{f} & \\
-\frac{5\cdot 2\cdot 3x^3}{6!} + \frac{2\cdot 3x^3}{5!} = +\frac{1\cdot 2\cdot 3x^3}{6!} & \\
\vdots & \text{u. s. w.} \\
v_6 = -\frac{1\cdot 2x^3}{5!} : \frac{1\cdot 2\cdot 3x^3}{6!} = -2 &
\end{array}$$

Das Fortschreitungsgesetz der Grössen:

$$v_0 = 1, \qquad v_1 = -\frac{1}{x}$$

$$v_2 = -2 \qquad v_3 = \frac{3}{x}$$

$$v_4 = 2 \qquad v_5 = -\frac{5}{x}$$

$$v_6 = -2 \qquad v_7 = \frac{7}{x}$$

u. s. w.

ist ersichtlich und man hat daher:

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{7}{x} + \ldots}}}}}$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + \frac{x}{2 - \frac{x}{3 + \frac{x}{2 - \frac{x}{5 + \frac{x}{2 - \frac{x}{7 + \ldots}}}}}}}$$

Setzt man $x = 1$, so erhält man die Basis e der natürlichen Logarithmen durch einen Kettenbruch ausgedrückt; für den 10ten reducirten Bruch desselben, welcher das Glied $-\frac{x}{9}$ als letztes in Anspruch nimmt, findet man $\frac{23225}{8544} = 2{,}718281835 \ldots$, welcher Werth in der 7ten Dezimalstelle noch richtig ist.

2) Es ist $l(1 + x) = x\,(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \ldots)$;

durch Anwendung des obigen Verfahrens auf die eingeklammerte Reihe findet man:

$$v_0 = 1,\ v_1 = \frac{2}{1.x},\ v_2 = 3,\ v_3 = \frac{2}{2x},$$

$$v_4 = 5,\ v_5 = \frac{2}{3x},\ v_6 = 7,\ v_7 = \frac{2}{4x} \text{ u. s. w.}$$

Es ist daher:

$$l(1+x) = \frac{x}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1.x} + \cfrac{1}{3} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2x} + \cfrac{1}{5} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{3x} + \ldots}}} = \frac{x}{1} + \cfrac{x}{\cfrac{2}{1} + \cfrac{x}{3} + \cfrac{x}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{x}{5} + \cfrac{x}{\cfrac{2}{3} + \ldots}}}$$

Die Reihe für $l(1+x)$ convergirt bekanntlich nur für Werthe von $x < 1$, während der Kettenbruch auch noch für grössere Werthe von x zu einem genäherten Werthe von $l(1+x)$ führt. Bezeichnen wir Kürze halber den n^{ten} reducirten Bruch mit $\{n\}$, so findet man z. B., $x = 3$ setzend, für $l4$ folgende Werthe:

$$\{10\} = \frac{7971}{5750} = 1,386261\ldots$$

$$\{11\} = \frac{93957}{67775} = 1,386308\ldots$$

$$\{12\} = \frac{1158177}{835450} = 1,386291\ldots$$

$$\{13\} = \frac{21445377}{15469550} = 1,38629611\ldots$$

Der wahre Werth ist $l4 = 1,38629436\ldots$, mit welchem $\{13\}$ in 5 Dezimalstellen stimmt.

3) Für arc tg $x = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots.\right)$

findet man:

$$w_0 = 1,\ w_1 = \frac{1^2.x^2}{1.3},\ w_2 = \frac{2^2.x^2}{3.5},\ w_3 = \frac{3^2.x^2}{5.7},\ w_4 = \frac{4^2.x^2}{7.9} \text{ u. s. w.}$$

Hiemit erhält man, unter Anwendung der Form (II), nach leichter Reduktion:

$$\text{arc tg } x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \cfrac{25x^2}{11 + \ldots}}}}}}$$

Für $x = 1$ folgt hieraus:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \ldots}}}}}}$$

Dieser Kettenbruch für $\frac{\pi}{4}$ convergirt ziemlich rasch; man findet:

$\{6\} = 0{,}785366\ldots$, $\{7\} = 0{,}7854035\ldots$, $\{8\} = 0{,}7853972\ldots$;

der wahre Werth ist $\frac{\pi}{4} = 0{,}7853981633\ldots$, so dass der 8te reducirte Bruch schon 5 richtige Stellen giebt.

4) Wendet man dasselbe Verfahren auf die Binomialreihe:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^3 + \ldots.$$

an, so findet man:

$$w_0 = 1, \quad w_1 = -nx, \quad w_2 = \frac{(n+1)x}{1.\,2}, \quad w_3 = -\frac{(n-1)x}{2.\,3},$$

$$w_4 = \frac{(n+2)x}{2.\,3}, \quad w_5 = -\frac{(n-2)x}{2.\,5}, \quad w_6 = \frac{(n+3)x}{2.\,5}, \quad w_7 = -\frac{(n-3)x}{2.\,7},$$

$$w_8 = \frac{(n+4)x}{2.\,7}, \quad w_9 = -\frac{(n-4)x}{2.\,9}, \ldots;$$

folglich kommt nach Hebung der Brüche:

$$(1+x)^n =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{nx}{1} + \frac{(n+1)x}{2} - \frac{(n-1)x}{3} + \frac{(n+2)x}{2} - \frac{(n-2)x}{5} + \frac{(n+3)x}{2} - \frac{(n-3)x}{7} + \ldots$$

Schreibt man aber die Binomialreihe in der Form:

$$(1+x)^n = 1 + nx\left(1 + \frac{(n-1)}{1.\,2}x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^2 + \ldots.\right)$$

und verwandelt nun die Reihe in den Klammern in einen Kettenbruch, so erhält man:

$$(1+x)^n =$$

$$1 + \frac{nx}{1} - \frac{(n-1)x}{2} + \frac{(n+1)x}{3} - \frac{(n-2)x}{2} + \frac{(n+2)x}{5} - \frac{(n-3)x}{2} + \frac{(n+3)x}{7} - \ldots.$$

Da $(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, so kann hiernach auch $(a+b)^n$ in einen Kettenbruch verwandelt werden; man hat zu diesem Behufe in obigen Kettenbrüchen nur $x = \frac{b}{a}$ zu setzen und dieselben mit a^n zu multipliciren.

Setzt man $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ so erhält man specielle Ausdrücke, welche mit Vortheil zur Wurzelausziehung benutzt werden können. Für $n = \frac{1}{2}$ findet man z. B. aus der zweiten der obigen Formen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2+\frac{x}{2+\frac{x}{2+\ldots}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{\frac{1}{2}+\ldots}}}}.$$

Ist nun aus irgend einer Zahl A die Quadratwurzel zu ziehen, so setze man $A = a^2 + b$, wo a^2 ein der Zahl A möglichst nahe liegendes vollständiges Quadrat ist, so wird $\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b} = a\left(1+\frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, und folglich:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{b}{\frac{1}{2a}+\frac{\frac{1}{2a}}{\frac{b}{\frac{1}{2a}+\ldots}}}}.$$

Dieser Kettenbruch ist periodisch, welcher Umstand daherrührt, dass überhaupt der Werth eines jeden unendlichen periodischen Kettenbruches durch eine Gleichung des 2ten Grades gegeben ist. In der That, es sei:

$$x = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots.+\frac{1}{a_n+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots.+\frac{1}{a_n+\ldots}}}}}}}$$

ein unendlicher Kettenbruch mit $n$gliedriger Periode, so ist offenbar:

$$x = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots+\frac{1}{a_n+x}}}};$$

sucht man nun die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche dieses endlichen Kettenbruches und bezeichnet den $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} (von welchen der letztere noch das Glied $\frac{1}{a_n}$ in Anspruch nimmt, mit $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$, so hat man für den Werth des $(n+1)^{\text{ten}}$ reducirten Bruches, wel-

cher zugleich den Werth x des vollständigen Kettenbruches darstellt:

$$x = \frac{Z_n + x\,Z_{n-1}}{N_n + x\,N_{n-1}},$$

welche Gleichung, gehörig geordnet, in Bezug auf x quadratisch ist.

5) Für die Reihe:

$$S = 1 - 1.x + 1.3\,x^2 - 1.3.5.x^3 + 1.3.5.7\,x^4 - \ldots.$$

findet man:

$$w_0 = 1,\ w_2 = x,\ w_3 = 2x,\ w_4 = 3x,\ \ldots.\ w_n = (n-1)x,$$

folglich ist:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{3x}{1} + \frac{4x}{1} + \ldots.$$

Obige Reihe ist, wie wir in der Integralrechnung finden werden, die Entwickelung einer gewissen Funktion, welcher für einen bestimmten Werth von x auch ein bestimmter Werth zukommt, der jedoch mittelst obiger Reihe nicht gefunden werden kann, da sie für jeden Werth von x divergirt. Mit Hülfe des Kettenbruches lässt sich hingegen die Summirung (wenigstens für kleine Werthe von x; für grössere steht eine andere Entwickelung zu Gebote, welche wieder bei kleinen Werthen von x unbrauchbar wird) bewerkstelligen. Setzt man z. B. $x = 0,1$, so geben die ersten zehn Näherungsbrüche folgende Werthe des Kettenbruches, welche, wie man sieht, rasch convergiren:

$\{1\} = 1$ $\qquad$ $\{6\} = 0,9207420\ldots$

$\{2\} = 0,909090\ldots$ $\qquad$ $\{7\} = 0,9207990\ldots$

$\{3\} = 0,923077\ldots$ $\qquad$ $\{8\} = 0,9207804\ldots$

$\{4\} = 0,920244\ldots$ $\qquad$ $\{9\} = 0,9207870\ldots$

$\{5\} = 0,920930\ldots$ $\qquad$ $\{10\} = 0,9207844\ldots$

6) Die Reihe:

$$S = x - 1.2\,x^2 + 1.2.3\,x^3 - 1.2.3.4\,x^4 + \ldots.$$

auf dieselbe Weise behandelt, liefert folgenden Kettenbruch:

$$S = \frac{x}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{x}{1} + \frac{3x}{1} + \frac{2x}{1} + \frac{4x}{1} + \frac{3x}{1} + \frac{5x}{1} + \frac{4x}{1} + \ldots.$$

Für $x = 1$, erhält man hieraus:

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+\ldots. =$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{5}{1+\ldots}}}}}}}}$$

und findet für die Werthe der reducirten Brüche dieses Kettenbruches vom 20sten angefangen:

$$\{20\} = 0,403621 \ldots \quad \{23\} = 0,403673 \ldots$$
$$\{21\} = 0,403689 \ldots \quad \{24\} = 0,403643 \ldots$$
$$\{22\} = 0,403635 \ldots \quad \{25\} = 0,403663 \ldots$$

Euler fand auf anderem Wege $0,4036524 \ldots$ als Werth der Summe dieser sehr divergirenden Reihe. Auch hier ist, wie überhaupt in ähnlichen Fällen, dieser Ausdruck in dem schon im vorigen Beispiele angedeuteten Sinne zu verstehen, dass die obige Reihe: $x - 1.2x^2 + \ldots$ die Entwickelung einer gewissen Funktion $f(x)$ darstellt, deren Werth jedoch aus der für jedes x divergirenden Reihe nicht gefunden werden kann, weil der Rest der Reihe, oder das Ergänzungsglied, d. i. die Summe aller auf das n^{te} folgenden Glieder mit unendlich wachsendem n selbst unendlich gross wird und also nie vernachlässiget werden kann.

Anmerkung. So wie übrigens eine unendliche Reihe, wenn sie zur näherungsweisen Berechnung der Funktion, deren Entwickelung sie ist, dienen soll, convergiren muss, eben so gut gilt diess auch von den unendlichen Kettenbrüchen. Wenn die aufeinanderfolgenden reducirten Brüche, sowohl gerader als ungerader Ordnung, sich nicht einer und derselben bestimmten Grenze nähern, so ist der Kettenbruch für divergent zu halten. Nur Kettenbrüche von der Form:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

wo die Zähler der einzelnen Glieder $=1$ und die Nenner $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ganze, positive Zahlen sind, convergiren immer und die reducirten Brüche führen hier mit Recht den Namen Näherungsbrüche. Diess findet aber nicht mehr nothwendig statt, wenn der Kettenbruch eine andere Form hat, und es bedürfte dann ebenso, wie bei den Reihen, einer Untersuchung ihrer Convergenz, wozu wir jedoch bis jetzt nur in wenigen Fällen die Hülfsmittel besitzen.

7) Bisweilen bricht die Entwickelung der Grössen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ ab, indem die sämmtlichen Glieder irgend einer der Reihen (2) verschwinden; in diesem Falle erhält man also die Summe der unendlichen Reihe durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt, welcher auf

bekannte Weise in einen gemeinen Bruch verwandelt werden kann. Diess tritt ein, wenn die Reihe eine rücklaufende ist [§. 40], deren erzeugender Bruch aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht. — So findet man für die Reihe:

$$S = 1 + 2x + 5x^2 + 12x^3 + 29x^4 + \ldots.$$

$$v_0, = 1\ v_1 = -\frac{1}{2x},\ v_2 = 4,\ v_3 = \frac{1}{2x},\ v_4 = \infty\ ,$$

somit:

$$S = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2x}}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{2x}{1 - \dfrac{x}{2+x}}} = \frac{1}{1-2x-x^2}.$$

In der That ist die gegebene Reihe eine rücklaufende der 2ten Ordnung (jeder Coefficient $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$), und $\dfrac{1}{1-2x-x^2}$ ihr erzeugender Bruch, wie man umgekehrt durch Entwickelung desselben sich leicht überzeugt.