universität innsbruck

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie - nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben ... ; mit 328 Erklärungen, Formelnverzeichnis ... ; für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer

Láska, Václav Jan

Stuttgart, 1889

II. Theoretische Astronomie

urn:nbn:at:at-ubi:2-5853

II. Theoretische Astronomie.

Q. Das Gravitationsgesetz und die ungestörte Planetenbewegung.

Anmerkung 26. Bis zu Newton war die Astronomie im Stadium des Sammelns, mit Newton trat sie in das Stadium des Erklärens. Das „Wie" hatte man schon ziemlich genau untersucht und nun gab Newton als Antwort auf das zu stellende „Warum" das epochale „Weil" sich die Himmelskörper mit einer Kraft anziehen, welche den Massen direkt und dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist. Dass dieses „Weil" alle „Warum" der Astronomie beantwortet, das zu zeigen ist die Aufgabe der theoretischen Astronomie.

a) Ueber die Bewegungsgleichungen.

Frage 132. Was ist und was bedingt das Gravitationsprinzip?

Antwort. Das Gravitationsprinzip sagt aus, dass sich alle Himmelskörper mit einer Kraft anziehen, die den Massen direkt und dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional wirkt.

Auf dieses Prinzip war Newton zunächst durch eine induktorische Betrachtung geleitet worden, lieferte aber später einen mathematisch genauen Beweis.

Wir verzichten auf die Reproduktion dieses Beweises, indem wir ja a posteriori zeigen, dass die aus diesem Prinzip folgenden Thatsachen mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmen.

Dass die Anziehungskraft auf unserer Erde identisch ist mit der allgemeinen Gravitation, bewies Newton, indem er die Beschleunigung der Schwere aus der Bewegung des Mondes um die Erde berechnete.

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt nämlich etwa 60 Erdradien. Sei aber g die Beschleunigung der Schwere in der Entfernung des Erdradius, so wird dieselbe auf dem Monde gleich:

$$g_0 = g \cdot \frac{1}{60^2} = \frac{g}{3600}$$

Dieselbe ist aber zugleich der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung, also wird:

$$g_0 = \frac{4\pi^2 \varrho}{t^2}$$

Erkl. 291. Das Gravitationsprinzip, welches die gegenseitige Anziehung der Materie nach dem Newtonschen Gesetze behauptet, ist ein Prinzip, dessen wohl dunkle Anfänge bis in das Altertum reichen. Von Plato rührt jenes „to homoion pheretai pros to homoion" und Plutarch hält dafür, dass die Anziehung die einzelnen Teile unseres Erdglobus zusammenhält.

Zu Keplers Zeiten war diese Idee ganz allgemein, nur konnte man nicht das Gesetz, nach welchem die Kraft wirkt. Da stellte Newton (Principia lib. III, p. 3) sein Prinzip auf und zeigte, dass die Schwere eine allgemein wirkende, alle Himmelskörper umfassende Kraft ist. Die Vermutung, dass dieses Gesetz in der besagten Form existiere, findet man schon bei Bullialdus (Astronomia Philolaica, 1645). Newtons Verdienst ist der mathematische genaue Nachweis. Littrow sagt ganz treffend: „Die Auffindung und Begründung des Gravitationsgesetzes ist das Eigentum des ganzen Zeitalters und Newton nur gleichsam notgedrungen der Träger des Ausdruckes dieser Zeit. Seine Befähigung zwang ihn, diesen Beruf zu übernehmen."

Erkl. 292. Newton nahm zuerst in Ermangelung eines genaueren Wertes den Erdumfang = 21600 engl. Meilen (= 34760 km), wodurch er für g den Wert 8,6 m erhielt, also fast um einen Meter weniger, als der schon früher von Galilei gefundene Wert für g haben sollte. Darum gab Newton die Sache ganz auf. Als nun Picard in Frankreich im Jahre 1670 den Meridiangrad zu 57060 Toisen gefunden, so dass der Erdumfang zu 40,035,600 m genommen werden konnte, nahm Newton seine Rechnung wieder auf und sah zu seiner grossen Freude die vollständige Uebereinstimmung des gefundenen und beobachteten Wertes von g, wobei $\varrho = 60$ Erdhalbmessern und t die siderische Umlaufzeit des Mondes, also 2360580 Sekunden bezeichnet. Wir erhalten also, wenn wir:

$$2\pi \cdot \text{Erdradius} = 40{,}000{,}000 \text{ m}$$

setzen:

$$g_0 = \frac{120 \cdot \pi \cdot 40{,}000{,}000}{(2360580)^2}$$

Dieses soll sein gleich:

$$\frac{g}{3600}$$

und in der That folgt hieraus:

$$g = 9 \cdot 74 \text{ m}$$

ein Wert, der mit dem aus den Pendelbeobachtungen abgeleiteten sehr gut übereinstimmt.

Frage 133. Wie lauten die Bewegungsgleichungen eines Planeten um die Sonne, wenn die gegenseitige Einwirkung der Planeten vernachlässigt wird?

Antwort. Es sei M die Masse der Sonne, m jene des Planeten, ferner ξ', η', ζ' die Koordinaten der Sonne, ξ, η, ζ jene des Planeten in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dann ist die Entfernung der beiden Körper offenbar:

$$r^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2$$

und die anziehende Wirkung nach dem Gravitationsgesetz:

$$k^2 \frac{Mm}{r^2}$$

seien nun:

$$\cos(xr) \quad \cos(yr) \quad \cos(zr)$$

die Richtungskosinuse des Radiusvektors r, so werden die auf den Massenpunkt M wirkenden Kraftkomponenten von:

$$k^2 \frac{Mm}{r^2}$$

der Reihe nach sein:

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(xr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\xi - \xi')$$

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(yr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\eta - \eta')$$

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(zr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\zeta - \zeta')$$

welche nach dem d'Alembertschen Prinzip den Ausdrücken:

$$M \frac{d^2 \xi'}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \eta'}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \zeta'}{dt^2}$$

gleich zu setzen sind. Daraus folgen:

$$\frac{d^2 \xi'}{dt^2} = k^2 \frac{m}{r^3} (\xi - \xi')$$

$$\frac{d^2 \eta'}{dt^2} = k^2 \frac{m}{r^3} (\eta - \eta')$$

Erkl. 293. Die Methode der Zerlegung der Beschleunigungen, resp. der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, parallel festen Achsen rührt von Maclaurin her, der sie in seinem Werke „Treatise of Fluxions", Vol. I, art. 465 et sequ., im Jahre 1742 herausgegeben. Früher zerlegte man nach Newtons Beispiel die Bewegung in eine tangentiale und normale. Eulers „Theoria motus", welche 1736 erschienen, basiert noch ganz auf dieser alten Methode. In der neuesten Zeit hat man infolge der hohen Ausbildung der Methode der Schraubenbewegung in der Mehrheit der Fälle beide Methoden verlassen und bedient sich zumeist anderer Methoden, die durch die Arbeiten Grassmanns eingeleitet wurden.

Erkl. 294. Es ist offenbar:

$$\cos(xr) = \frac{\xi - \xi'}{r}$$

$$\cos(yr) = \frac{\eta - \eta'}{r}$$

$$\cos(zr) = \frac{\zeta - \zeta'}{r}$$

Da sich die Bewegungsgleichungen der ungestörten Bewegung in jedem Lehrbuch der Mechanik ausführlich hergeleitet finden, so sehen wir von ihrer tieferen Begründung ab.

Erkl. 295. Wirken auf die miteinander verbundenen Massenpunkte:

$$m_1, \; m_2, \; m_3 \cdots$$

die Kräfte:

$$m_1 P_1, \; m_2 P_2, \; m_3 P_3 \cdots$$

so werden dieselben, wegen ihrer Verbindungen, andere Beschleunigungen erhalten, als wenn sie frei wären.

Denkt man sich die Punkte frei und dieselben Bewegungen ausführend wie verbunden infolge der Kräfte P, so müssten auf sie die Kräfte:

$$m_1 p_1,\ m_2 p_2,\ m_3 p_3 \cdots$$

wirken.

Bringt man diese letzteren Kräfte an ihre Angriffspunkte, jedoch in entgegengesetzter Richtung an, so werden sie den Kräften P Gleichgewicht halten. Nennt man die Kraft mP die bewegende, mp die wirksame, so besagt das d'Alembertsche Prinzip, dass die bewegenden Kräfte den in entgegengesetzter Richtung angebrachten wirksamen Kräften das Gleichgewicht halten.

D'Alembert, Jean le Roud, geboren 17. November 1717, gestorben 29. Oktober 1783 in Paris. Sein Prinzip findet sich in dem Werke „Traité de dynamique", Paris 1743. Es führt die Bewegungsgleichungen auf Bedingungen des Gleichgewichts. Von seinen vielen Abhandlungen sei nur die eine: „Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre", Paris 1749, erwähnt, worin eine vollständige Lösung des Problems der Präcession und Nutation gegeben ist.

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = k^2 \frac{m}{r^3}(\zeta - \zeta')$$

als Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt M. Analog ergibt sich für m:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2 \frac{M}{r^3}(\xi' - \xi)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k^2 \frac{M}{r^3}(\eta' - \eta)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k^2 \frac{M}{r^3}(\zeta' - \zeta)$$

Führt man nun ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in M und setzt:

$$\xi - \xi' = x$$
$$\eta - \eta' = y$$
$$\zeta - \zeta' = z$$

so folgt, wenn zugleich $M = 1$ gesetzt wird (so dass m in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt angenommen wird):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = 0$$

Dieses sind die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung.

Frage 134. Wie integriert man die Bewegungsgleichungen?

Erkl. 296. Es ist:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{d^2y}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2}$$

wie nebenstehend.

Erkl. 297. Multipliziert man die erste der Gleichungen mit z, die dritte mit $-x$ und addiert, so folgt:

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt^2} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0$$

also:

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = k_2$$

Wird nun die zweite Gleichung mit $-z$ und die dritte mit y multipliziert und beide addiert, so folgt:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

also:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_3$$

Antwort. Diese drei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefern uns sechs Konstanten. Diese sind die Bahnelemente im mathematischen Sinne und müssen aus den Beobachtungen bestimmt werden.

Multipliziert man die erste Gleichung mit $-y$, die zweite mit x und addiert, so erhält man:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

oder:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

also durch Integration:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k_1$$

wo k_1 die Integrationskonstante bezeichnet.

Analog ergibt sich:

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = k_2$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_3$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit z, y und x und addiert, so folgt:

Erkl. 298. Man sieht hieraus, dass zur Feststellung der Ebene, in welcher sich der Planet bewegt, zwei Konstanten nötig sind. In den früheren Abschnitten haben wir diese Ebene durch die Knotenlänge ☊ und die Neigung fixiert. Es fragt sich, in welcher Beziehung stehen diese Grössen zu den Konstanten C_1 und C_2.

Es ist, die Masse $m = 0$ gesetzt:

$$k_1 = k\sqrt{p}\cos i$$
$$k_2 = k\sqrt{p}\sin i\cos ☊$$
$$k_3 = k\sqrt{p}\sin i\sin ☊$$

also wird:

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1} = \operatorname{tg} i\cos ☊$$
$$C_2 = \frac{k_3}{k_1} = \operatorname{tg} i\sin ☊$$

Erkl. 299. Es ist:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos v + r\sin v\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin v + r\cos v\frac{dv}{dt}$$

also:

$$x\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}\sin v\cos v + r^2\cos^2 v\frac{dv}{dt}$$
$$y\frac{dx}{dt} = r\frac{dr}{dt}\sin v\cos v - r^2\sin^2 v\frac{dv}{dt}$$

woraus:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2(\sin^2 v + \cos^2 v)\frac{dv}{dt} = r^2\frac{dv}{dt}$$

folgt.

Erkl. 300. Man kann sofort die Bedeutung der Constante C_4 aus dieser Gleichung finden. Setzt man $t = 0$, so folgt:

$$2f_0 = C_4$$

Demnach kann die Integrationskonstante C_4 als jene doppelte Sektorfläche aufgefasst werden, die zwischen einem als fixe Ausgangslinie zu wählenden und dem für die Zeit $t = 0$ stattfindenden Radiusvektor eingeschlossen ist.

Die Bedeutung der Konstante C_3 haben wir Seite 146 kennen gelernt. Wir setzen:

$$C_3 = k\sqrt{p}\sqrt{1+m} = k\sqrt{a(1-e^2)(1+m)}$$

$$k_1 z + k_2 y + k_3 x = 0$$

oder:

$$z + \frac{k_2}{k_1}y + \frac{k_3}{k_1}x = 0$$

wofür, wenn:

$$\frac{k_2}{k_1} = C_1 \qquad \frac{k_3}{k_1} = C_2$$

gesetzt wird:

$$z + C_1 y + C_2 x = 0$$

geschrieben werden kann. Dieses ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems geht.

Vereinfachen wir uns nun die Rechnung, indem wir die Koordinatenebene in die Planetenebene selbst verlegen, so wird $z = 0$, wir haben also die beiden Gleichnngen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0$$

Multiplizieren wir zunächst die erste Gleichung mit $-y$ und die zweite mit $+x$ und addieren, so folgt:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3$$

wie früher. Setzen wir nun:

$$x = r\cos v$$
$$y = r\sin v$$

so folgt:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{dv}{dt} = C_3$$

Nun ist aber (vergl. Erkl. 229):

$$\frac{1}{2}r^2\frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt}$$

das Differential eines Sektors, so dass:

$$2\frac{df}{dt} = C_3$$

also durch Integration:

$$2f = C_3 t + C_4$$

Diese Gleichung sagt, dass die Flächen, die durch den Radiusvektor beschrieben werden, der Zeit proportional sind.

Multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen mit $2\frac{dx}{dt}$ und die zweite mit $2\frac{dy}{dt}$, so folgt nach Addition der beiden Produkte:

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{2k^2(1+m)}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

Erkl. 301. Es ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

woraus durch Addition:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Erkl. 302.

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Erkl. 303. Wir werden später die Bedeutung der eingeführten Werte der Konstanten:

$$a,\ e^2,\ k^2$$

noch näher bestimmen. Es mag hier sofort bemerkt werden, dass a die halbe grosse Achse, e die Exzentrizität und k die Gausssche Konstante bezeichnet.

Erkl. 304. Es ist eine allgemeine Identität (vergl. meine Formelnsammlung, Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1888, Band I, p. 14):

$$(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2 = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$$

Setzt man:

$$a = x \qquad \alpha = \frac{dy}{dt}$$

$$b = y \qquad \beta = \frac{dx}{dt}$$

so erhält man sofort die nebenstehende Formel:

$$(a\beta-b\alpha)^2 = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)-(a\alpha+b\beta)^2$$

Nun folgt aber aus:

$$r^2 = x^2+y^2$$

durch Differentiation:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$$

ferner ist:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

so dass die frühere Gleichung übergeht in:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]+\frac{2k^2}{r^2}(1+m)\frac{dr}{dt} = 0$$

oder wenn:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g^2$$

wobei ds ein Wegelement und demgemäss g die Geschwindigkeit bezeichnet, gesetzt wird, in:

$$\frac{dg^2}{dt}-2k^2(1+m)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$g^2-2k^2(1+m)\frac{1}{r} = C_5$$

oder:

$$g = \sqrt{C_5+2k^2(1+m)\frac{1}{r}}$$

Für die Konstante C_5 empfiehlt es sich, den Wert:

$$C_5 = -\frac{k^2(1+m)}{a}$$

einzuführen, so dass:

$$g = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}$$

Wir hatten:

$$C_3 = x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$$

also wird:

$$C_3^2 = x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-2xy\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$$

oder:

$$C_3^2 = (x^2+y^2)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2$$

also:

$$C_3^2 = r^2g^2-r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Demnach ist:

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2g^2-C^2$$

oder da nach der Gleichung:

$$g^2 = C_5+2k^2(1+m)\frac{1}{r}$$

ist, auch:

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2C_5+2k^2(1+m)r-C_3^2$$

Erkl. 305. Es wird zunächst:

$$\pm dv = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,dv}{r\sqrt{2ra - r^2 - a^2(1-e^2)}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{er}$$

so folgt:

$$\pm dv = \frac{\frac{a(1-e^2)\,dr}{er^2}}{\sqrt{[2ra - r^2 - a^2(1-e^2)]\,\frac{1-e^2}{e^2r^2}}}$$

$$= \frac{\frac{a(1-e^2)}{er^2}\,dr}{\sqrt{2\,\frac{a(1-e^2)}{e^2r} - \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{a^2(1-e^2)}{e^2r^2}}}$$

$$= \frac{\frac{a(1-e^2)\,dr}{er^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{e^2r^2}(1-e^2)^2 + 2\,\frac{a(1-e^2)}{er}\cdot\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}}}$$

woraus die obige Gleichung sofort folgt.

Erkl. 306. Setzt man:

$$\cos v = m$$

so wird:

$$v = \arccos m$$

also:

$$-dv \sin v = dm$$

oder:

$$-dv = \frac{dm}{\sqrt{1-\cos^2 v}} = \frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

so dass:

$$dv = -\frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

woraus:

$$d(\arccos m) = -\frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

folgt.

woraus:

$$\pm dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{C_5 r^2 + 2k^2(1+m)\,r - C_3^2}}$$

folgt. Es war aber:

$$dt = \frac{r^2\,dv}{C_3}$$

also wird:

$$\pm dv = \frac{C_3\,dr}{r\sqrt{C_5 r^2 + 2k^2(1+m)\,r - C_3^2}}$$

Setzen wir nun wie oben:

$$C_5 = -\frac{k^2(1+m)}{a}$$

$$C_5^2 = a(1-c^2)\,k^2(1+m)$$

so folgt:

$$\pm dv = \frac{\frac{a(1-e^2)}{er^2}\,dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e}\right)^2}}$$

Setzt man:

$$x = \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e}$$

so wird:

$$dx = -\frac{a(1-e^2)}{er^2}\,dr$$

also:

$$\pm dv = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arccos x)$$

woraus durch Integration:

$$\pm v = \arccos x \mp \vartheta$$

folgt, wobei ϑ eine Integrationskonstante ist.

Demzufolge wird:

$$\cos(v+\vartheta) = x = \frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right)$$

oder:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(v+\vartheta)}$$

Hieraus sehen wir, dass a die halbe grosse Achse, e die Exzentrizität bedeutet, da selbstverständlich diese Gleichung jene des Kegelschnittes ist. Die Planetenbahnen sind also Kegelschnitte.

Setzt man:

$$a(1-e^2) = p$$

so folgt:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v+\vartheta)}$$

und zählt man den Winkel v vom Perihel aus, so wird $\vartheta = 0$, also:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

Frage 135. Zu welchen Folgerungen führen uns die gewonnenen Gleichungen?

Antwort. Wir fanden:

$$2S_1 = C_3 t_1 + C_4$$

Erkl. 307. Es ist zunächst:

$$2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}\, k \sqrt{1+m}\, T$$

also:

$$2\pi a^{3/2} \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2} = \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}\, k \sqrt{1+m}\, T$$

oder:

$$2\pi a^{3/2} = k \sqrt{1+m}\, T$$

woraus die nebenstehende Gleichung folgt.

Erkl. 308. $k'' = \dfrac{k}{\operatorname{arc} 1''}$

Die Grösse k führt den Namen der Gaussschen Attraktionskonstante.

Erkl. 309. Da m und m' für die Planeten sehr klein sind, so kann man:

$$a_1^3 : a^3 = T_1^2 : T$$

mit grosser Annäherung setzen, wie dieses in der That Kepler gefunden hat.

Erkl. 310. Es ist:

$$\frac{p^2}{(1+e\cos v)^2}\,\frac{dv}{dt} = k \sqrt{p}\ \sqrt{1+m}$$

also:

$$\frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = dt \cdot \frac{k \sqrt{1+m}}{p^{3/2}}$$

woraus durch Integration die nebenstehende Formel folgt.

und ebenso wird für eine Zeit t_2:

$$2S_2 = C_3 t_2 + C_4$$

also:

$$2(S_2 - S_1) = C_3 (t_2 - t_1)$$

entspricht nun die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ einem vollen Umlauf in der Zeit T, so wird $S_2 - S_1$ gleich der Ellipsenfläche, also:

$$S_2 - S_1 = ab\pi = a^2 \sqrt{1-e^2}\,\pi$$

so dass:

$$a^2 \sqrt{1-e^2}\,\pi = C_3 T$$

Nun war aber:

$$C_3 = k \sqrt{1+m}\ \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}$$

also haben wir:

$$k = \frac{2a^{3/2}\pi}{T\sqrt{1+m}}$$

Hieraus kann k berechnet werden. Setzt man:

$t = 1 =$ dem mittleren Sonnentag,
$a = 1 =$ der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne,
$1 =$ Sonnenmasse,

also:

$T = 365{,}25638$ mittlere Sonnentage
$m = 1 : 354710$

so folgt:

$$k = 0\cdot017202099$$
$$\log k = 8{,}235581441$$
$$\log k'' = 3\cdot550006575$$

Da diese für alle Planeten identisch ist, so folgt:

$$\frac{a^{3/2}}{T\sqrt{1-m}} = \frac{a_1^{3/2}}{T_1\sqrt{1+m_1}}$$

oder:

$$\frac{a_1^3}{1+m_1} : \frac{a^3}{1+m} = T_1^2 : T^2$$

wodurch wir die genauere Darstellung des Keplerschen Gesetzes erhalten.

Wir wollen nun noch eine Beziehung zwischen v und t finden.

Es war:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{p}\ \sqrt{1+m}$$

also da:

$$r^2 = \frac{p^2}{(1+e\cos v)^2}$$

auch:

$$\frac{p^{3/2}}{k\sqrt{1+m}\, t} = \int \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}$$

Die Anwendung dieses Integrals führt uns sofort zu einer Relation zwischen v und t.

Um diese Auswertung durchzuführen, setze man:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \tau$$

Erkl. 311. Es ist:

$$\int \frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{[1+e+\tau^2(1-e)]}$$

$$= \int \frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{\left(1+\tau^2\frac{1-e}{1+e}\right)^2(1+e)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+e)^2}\int \frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{\left(1+\tau^2\frac{1-e}{1+e}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+e)^2}\left(\int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} + \int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\right)$$

so folgt:

$$d\tau = \frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1+\tau^2}{2}\,dv$$

$$\cos v = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad dv = \frac{2\,d\tau}{1+\tau^2}$$

also:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t}{2p^{3/2}} = \int \frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{[1+e+\tau^2(1-e)]^2}$$

Setzt man noch:

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}$$

so wird:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{2p^{3/2}} = \int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} + \int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

Wird:

$$e = 1$$

also:

$$\varepsilon = 0$$

so folgt:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \int d\tau + \int \tau^2 d\tau$$

oder:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \tau + \frac{1}{3}\tau^3 + \text{Konst.}$$

Da nun für $t = 0$ auch $v = 0$ und demnach auch $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \tau = 0$ wird, so ist Konst. $= 0$ zu setzen, vorausgesetzt natürlich, dass wir v vom Perihel aus zählen. Wir haben also:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}$$

eine Beziehung, wie wir sie bei der Parabel gefunden haben.

Erkl. 312. Es ist:

$$\int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\varepsilon\tau^2}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{1+\varepsilon\tau^2-1}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

Um das allgemeine Integral auszuwerten, beachten wir, dass für $e < 1$ ε immer positiv sein muss und

$$\int \frac{\tau^2 d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

also:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)}$$

Da nun:

$$\int \frac{d\varepsilon}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} =$$

so folgt:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(1+e)^2\,t}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int \frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2}$$

oder:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(1+e)^2\,t}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{arc\,tg}\tau\sqrt{\varepsilon}$$

Erkl. 313. Es ist:

$$\int \frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int \frac{d\tau\sqrt{\varepsilon}}{1+(\tau\sqrt{\varepsilon})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arc\,tg} \tau\sqrt{\varepsilon}$$

wobei die Integrationskonstante aus gleichen Gründen, wie früher, gleich Null gesetzt wurde.

Setzt man:

$$\tau\sqrt{\varepsilon} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

so folgt:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right) = \frac{E}{2}$$

Ferner wird:

$$\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sin E$$

demnach:

$$\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{2k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\sin E + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)E$$

woraus:

$$\frac{2k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}}\,\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}} = E + \frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}}\sin E$$

oder wenn man abkürzend

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$$

setzt:

$$E - e\sin E = \mu t$$

folgt.

Die analoge Formel würde man auch für den Fall einer Hyperbel, also für:

$$e > 1$$

ableiten können, was wir jedoch hier unterlassen wollen, weil die Hyperbel selbst bei den Kometen eine höchst seltene Erscheinung ist.

Erkl. 314. Es ist:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}$$

$$\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$

Nun ist:

$$\varepsilon+1 = \frac{e-1}{e+1}+1 = \frac{2e}{e+1}$$

$$\varepsilon-1 = \frac{e-1}{e+1}-1 = -\frac{2}{e+1}$$

also:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{e-1}{e+1}\cdot\frac{e+1}{2e} = \frac{e-1}{2e}$$

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = -e$$

---

b) Bestimmung der Masse der Himmelskörper.

Frage 136. Wie bestimmt man die Masse eines Himmelskörpers, der einen Begleiter hat?

Antwort. Um die Masse eines Himmelskörpers zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass diejenige seines Begleiters gegen die des Hauptplaneten vernachlässigt werden kann, kann man verfahren wie folgt:

Sei 1 die Sonnenmasse,

μ jene des Satelliten,

m jene des Planeten.

Sei ferner T und A die Umlaufzeit und die halbe grosse Achse des Planeten, t und

Erkl. 315. Auf die hier angezeigte Art fand Newton für den Jupiter die Masse gleich 1 : 1067 der Sonnenmasse. Wendet man genauere Zahlen an, so wird:

$$A = 5{,}20284$$
$$T = 4330{,}5936$$

und für den ersten Mond:

$$a = 0{,}00282$$
$$t = 1{,}76914$$

woraus:

$$m = \frac{1}{1048}$$

folgt. Für die Erde ist:

$$A = 1 \qquad T = 365{,}25638$$

und den Mond:

$$a = 0{,}00259 \quad t = 27{,}32165$$

woraus:

$$m + \mu = \frac{1}{322420}$$

folgt. Hier darf μ gegen m nicht vernachlässigt werden, weil nach anderweitigen Untersuchungen:

$$\mu = \frac{1}{80}\,\mathrm{m}$$

Am unsichersten ist die Masse des Merkurs bekannt. Encke fand aus den Störungen des nach ihm bekannten Kometen dieselbe zu 1 : 500,000, ungefähr denselben Wert fand Leverrier aus den Venusstörungen, während die neueren Untersuchungen von Asten und Tisserand auf den Wert 1 : 700,000 hinweisen. Dagegen scheint die Venusmasse nach übereinstimmenden Resultaten nicht viel von 1 : 400,000 abzuweichen.

Erkl. 316. Schon Newton fand (Principia lib. II), dass die Erddichte nicht viel von 5 abweicht und zwar so, dass sie zwischen 5 und 6 liegen muss. Die erste experimentelle Bestimmung führte Cavendish 1798 aus; diese lieferte den Wert 5,48, die späteren Versuche nach seiner Methode lieferten etwas grössere Werte. [Baily (1842) fand 5,66, Reich (1852) 5,28]. Der neueste von Cornu und Baille (1873) erhaltene Wert 5,56 dürfte der Wahrheit am meisten entsprechen.

Was von der Masse des Merkurs gesagt wurde, kann von seiner Dichte wiederholt werden. Laplace hat durch Vergleichung der Dichtigkeiten der Erde, des Jupiters und Saturns gefunden, dass dieselbe im umgekehrten Verhältnis der mittleren Entfernungen stehen und so auf eine Dichte von 2,7 für Merkur (Erde = 1) geschlossen. Doch dürfte dieser Wert zu gross sein. Nach Leverrier dürfte die Merkurdichte etwa = 1,2, also nicht viel von der Erddichte verschieden sein.

Man vergleiche hierzu die Angaben (Theorie und Literatur der Versuche von Cavendish) in Kraft. Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Stuttgart 1885. II. Band. p. 554.

a dieselben Grössen für den Satelliten, ferner k die Gausssche Konstante, so ist:

$$k = \frac{2A^{3/2}\pi}{T\sqrt{1+m}}$$

oder:

$$1 + m = \frac{4A^3\pi^2}{T^2k^2}$$

Analog für den Begleiter:

$$k = \frac{2a^{3/2}\pi}{t\sqrt{\mu+m}}$$

also:

$$\mu + m = \frac{4a^3\pi^2}{t^2k^2}$$

so dass durch Division:

$$\frac{m+\mu}{1+m} = \frac{t^2A^3}{T^2a^3}$$

oder wenn μ gegen m und m gegen 1 vernachlässigt wird:

$$m = \frac{t^2}{a^3} \cdot \frac{A^3}{T^2}$$

Sind die Dimensionen des Planeten bekannt, so findet man hieraus sofort die Dichte d, indem ja, wenn m die Masse und v das Volumen bezeichnet:

$$d = \frac{m}{v}$$

Um die Erdmasse zu bestimmen, muss man andere Wege gehen, weil die Mondmasse nahezu $^1/_{80}$ der Erdmasse ist, also gegen die Erdmasse nicht vernachlässigt werden darf.

Es ist bekannt, dass die Anziehung, mit welcher die Erde auf die auf ihr befindlichen Gegenstände wirkt, sich zusammensetzt aus der Schwere und der vertikalen Komponente der Zentrifugalkraft.

Nehmen wir die Erde als vollkommen rund mit dem Radius:

$$r = 6364551\ \mathrm{m}$$

und der Beschleunigungskonstante:

$$g = 9{,}79586\ \mathrm{m}$$

So hat man gefunden, dass durch die vertikale Komponente der Zentrifugalkraft die Schwere um:

$$\frac{2}{867}$$

ihres Betrages vermehrt wird, so dass also die Kraftwirkung:

$$G = 9{,}79586\left(1 + \frac{2}{867}\right) = 9{,}81645$$

ist. Sei also m die Erdmasse, so hat man:

$$G = k^2\frac{m}{r^2}$$

Erkl. 317. Man findet für:

$$a = 23964\,r$$

$$\frac{1}{m} = 354592$$

also:

$$m = \frac{1}{354592}$$

Nun war aber vergl. Erkl. 315:

$$m + \mu = \frac{1}{322420}$$

so wird:

$$\mu = \frac{354592 - 322420}{322420 \cdot 354592}$$

Dadurch ist auch die Mondmasse bestimmt. Die hier erhaltene Masse der Erde dürfte etwas zu klein sein. Newton (Principia lib. III. prop. 8) fand den Wert 1 : 169300 also einen zu hohen, während Leverrier (1876) sich für den Wert 1 : 324439 entschied. Auch die Mondmasse fand Newton doppelt so gross, nämlich 1 : 40 der Erdmasse, während man jetzt den Wert 1 : 81 als den wahrscheinlichsten hält.

Erkl. 318. Man hat nach Arago die Erdschwere $\gamma = 1$ angenommen, für

die Sonne	$\gamma = 28{,}5$
den Merkur	$\gamma = 0{,}5$
die Venus	$\gamma = 0{,}9$
den Mond	$\gamma = 0{,}2$
den Mars	$\gamma = 0{,}5$
den Jupiter	$\gamma = 2{,}5$
den Saturn, Uranus und Neptun	$\gamma = 1{,}1$

Erkl. 319. Um zu ersehen, was es heisst, dass die Schwerkraft auf der Sonne 28 mal grösser als auf der Oberfläche der Erde ist, mögen Mädlers Worte über diesen Gegenstand angeführt werden. „Ein Körper, der bei uns kaum 4 Pfund wiegt, würde dort nur durch eine Kraft bewegt werden können, die auf der Erde zur Bewegung eines Zentners erfordert wird. Ein Geschöpf von unserer Kraft und unserem Körperbau vermöchte dort kaum den Fuss empor zu heben und liefe beim Auftreten Gefahr, ihn zu zerschmettern; schon nach wenigen sehr kurzen Schritten würde völlige Erschöpfung eintreten. Ein Sekundenpendel würde dort die Länge von 86 Par. Fuss haben; ein mit aller unserer Kraft emporgeworfener Körper sich nur sehr wenig über unserem Kopf erheben.“ Umgekehrtes fände natürlich auf dem Monde statt.

oder:

$$k^2 = \frac{G r^2}{m}$$

Dieses in die Gleichung:

$$\frac{4\pi^2 A^3}{T^2} = k^2 (1 + m)$$

eingesetzt, liefert:

$$\frac{4\pi^2 A^3}{G T^2 r^2} = \frac{1 + m}{m}$$

oder:

$$\frac{1}{m} = \frac{4\pi^2 A^2}{g T^2 r^2} - 1$$

Um noch die Intensität der Schwere für irgend einen Planeten zu finden, hat man zu bedenken, dass dieselbe nichts anderes ist als die Gesamtanziehung des Gestirnes auf die Masseneinheit. Sei also ϱ der mittlere Radius und μ die Masse des Himmelskörpers, so wird, wenn γ die Intensität der Schwere bezeichnet:

$$\frac{km}{\varrho^2} = \gamma$$

Da nun für die Erde:

$$\frac{km}{r^2} = g$$

so folgt:

$$\gamma = g \frac{\mu}{m} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2$$

Für die Sonne ist:

$$\frac{\mu}{m} = 357922$$

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{112}$$

Setzt man daher:

$$g = 15{,}106 \text{ Par. Fuss}$$

so folgt:

$$p = 28 \cdot 53\, g = 431 \cdot 4 \text{ Par. Fuss}$$

Es fällt demnach auf der Sonne ein Körper in der ersten Sekunde 431·4 Par. Fuss und 1 Pfund lastet auf der Sonne ebenso stark wie 28,5 Pfund bei uns.

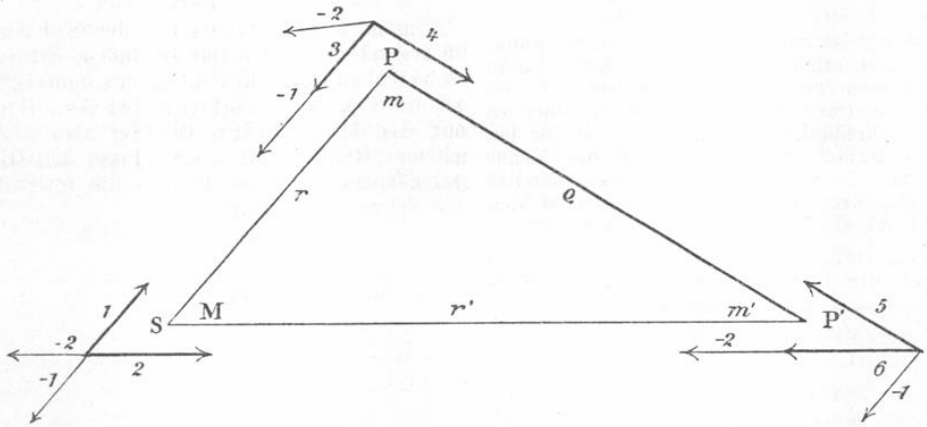
R. Ueber die Theorie des Mondes.

Anmerkung 27. In diesem Abschnitt sollen wenigstens die Grundzüge der schwierigen Mondtheorie, wenn auch nicht vollständig entwickelt, so doch wenigstens angedeutet werden.

Die vorgesteckten Grenzen machen es uns unmöglich, die Variationen aller Elemente zu entwickeln, doch wird die Art und Weise der Berechnung an der Variation der Knoten und der Neigung durchgeführt in einer Weise, dass der Leser sich ein klares Bild davon machen kann, wie in anderen Fällen vorgegangen werden muss.

Die Mondtheorie soll ferner auch ein Beispiel bieten für die Berechnung der Störungen der Planeten, die im allgemeinen, wegen der kleinen Planetenmassen, viel bequemer ist als diejenige der Störungen der Mondbewegung, bei welcher die Sonnenmasse als der störende Körper auftritt, dagegen geht ein Vorteil der Mondtheorie, nämlich die Kleinheit des Verhältnisses zwischen der Entfernung des störenden und gestörten Planeten verloren.

Figur 145.



Frage 137. Wie lauten die Grundgleichungen der Mondbewegung?

Erkl. 320. Der erste, dem es gelang, die wichtigsten Erscheinungen der Mondbewegung theoretisch darzustellen, war Newton. In seinen Prinzipien behandelt er (lib. III, prop. 29 bis 34) die Variation, Knotenbewegung und die Störungen der Neigung. Eine wenigstens abgeschlossene Mondtheorie lieferten Clairaut (Theorie de la lune, déduite du princip de l'attraction, Saint-Petersbourg 1762) und Euler (Theoria motus lunae, Petrop 1772).

Eine ziemlich elementare und dabei interessante Auseinandersetzung dieses Themas findet man in dem Werke von Möbius (Die Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843, auch in dessen Gesamtwerken IV. Band, Seite 1 bis 318, Leipzig 1887).

Antwort. Die Grundgleichungen der Mondbewegung sind genau jene, welche für die allgemeine Bewegung eines Planeten P unter der Einwirkung eines zweiten P' gelten.

Seien m und m' die Massen dieser Körper, sowie M die Masse der Sonne S; seien ferner die Entfernungen:

$$SP = r, \quad SP' = r', \quad PP' = \varrho$$

sei endlich k^2 die Gausssche Konstante, so folgt, dass nach dem Prinzip der Gravitation auf S die Kräfte:

$$(1) \ldots k^2 \frac{m}{r} \text{ von } S \text{ nach } P$$

$$(2) \ldots k^2 \frac{m'}{r} \text{ von } S \text{ nach } P'$$

wirken und analog auf P die Kräfte:

$$(3) \ldots k^2 \frac{M}{r} \text{ von } P \text{ nach } S$$

$$(4) \ldots k^2 \frac{m'}{\varrho} \text{ von } P \text{ nach } P'$$

und auf P' endlich die Kräfte:

$$(5) \ldots k^2 \frac{M}{r'} \text{ von } P' \text{ nach } S$$

$$(6) \ldots k^2 \frac{m}{\varrho} \text{ von } P' \text{ nach } P$$

Da es sich uns nicht um die absolute Bewegung dieser drei Körper SPP', sondern nur um die relative Bewegung von P und P' aus S handelt, so wollen wir uns S als ruhend vorstellen, dann müssen wir aber die Kräfte (1) und (2) auf P und P' übertragen (vergl. Figur 145). Auf P wirken dann die ursprünglichen Kräfte (3) und (4) und ausserdem die Kräfte (-1) und (-2), so dass man also die drei Kräfte:

$$(-1)+(3) = k^2 \frac{M+m}{r^2} \text{ in der Richtung } PS$$

$$(4) = k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \text{ in der Richtung } PP'$$

$$(-2) = k^2 \frac{m'}{r'^2} \text{ parallel mit } P'S$$

hat.

Analog auf P' die Kräfte:

$$(-2)+(6) = k^2 \frac{M+m'}{r^2} \text{ in der Richtung } P'S$$

$$(5) = k^2 \frac{m}{\varrho^2} \text{ in der Richtung } P'P$$

$$(-1) = k^2 \frac{m}{r^2} \text{ parallel mit } PS$$

Damit haben wir die Bewegung von S auf die Punkte P und P' übertragen, so dass wir nun S als ruhend annehmen können.

Nun wollen wir annehmen, dass die Bewegung von P' bekannt sei und nur jene von P gesucht werde. Die auf diesen Körper wirkenden Kräfte wollen wir, wie es in der Mechanik üblich ist, in drei Komponenten:

$$T \quad V \quad W$$

und zwar T in der Richtung des Radiusvektors SP, V senkrecht darauf in der Ebene der Bewegung und W normal auf diese Ebene richten.

Erkl. 321. Dieses ist in der Astronomie zumeist der Fall. Der Mond wirkt z. B. auch auf die Sonne, allein diese Wirkung ist so klein, dass sie immer vernachlässigt werden kann. Gleiches gilt von den Asteroiden und noch mehr von den Kometen in Bezug auf die Hauptplaneten.

Die erste Kraft soll positiv sein, wenn sie P von S zu entfernen sucht; die zweite ist es, wenn ihre Richtung mit der Richtung der Bewegung übereinstimmt; die dritte ist positiv nach Norden hin.

Zu der ersten Kraft gehört also die Kraft $(-1)+3$, also die Kraft:

$$k^2 \frac{M+m}{r^2}$$

Die zweite Kraft (4):

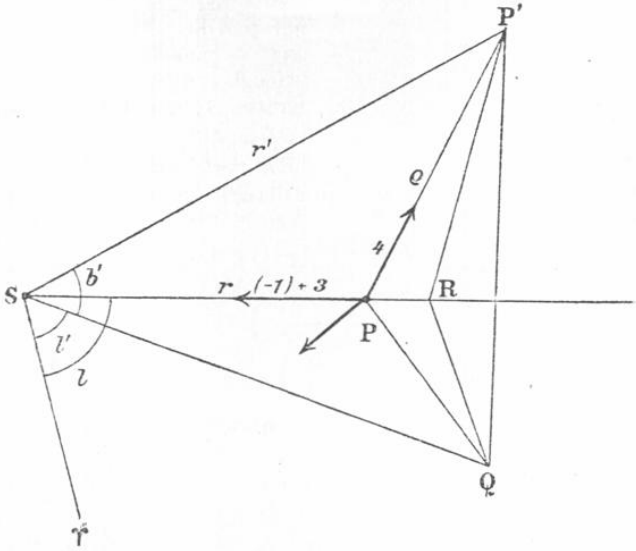
$$k^2 \frac{m'}{\varrho^2}$$

muss zerlegt werden. Seien:

$$\cos\alpha \qquad \cos\beta \qquad \cos\gamma$$

die Kosinuse zwischen der Richtung dieser Kraft und den Kräften T, V, W, so dass:

Figur 146.



$$\cos[(4), T] = \cos\alpha$$
$$\cos[(4), V] = \cos\beta$$
$$\cos[(4), W] = \cos\gamma$$

so sind die Komponenten:

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\alpha$ in der Richtung von T

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\beta$ „ „ „ „ V

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\beta$ „ „ „ „ W

Nun ist aber (vergl. Figur 146):

$$\cos\alpha = \frac{PR}{\varrho}$$
$$\cos\beta = \frac{QR}{\varrho}$$
$$\cos\gamma = \frac{QP'}{\varrho}$$

demnach werden die drei Komponenten:

$$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cdot \frac{PR}{\varrho},\ k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cdot \frac{QR}{\varrho},\ k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \frac{QP'}{\varrho}$$

Analog lässt sich die Kraft (— 2) nach denselben Richtungen zerlegen und es sind die Komponenten:

$$-k^2 \frac{m'}{r'^2} \cdot \frac{SR}{r'},\ -k^2 \frac{m'}{r'^2} \frac{RQ}{r'},\ -k^2 \frac{m'}{r'^2} \frac{QP'}{r'}$$

Wir haben also:

$$T = -k^2 \left(\frac{M+m}{r^2} + \frac{m'}{\varrho^3} PR - \frac{m'}{r'^3} SR \right)$$
$$V = -k^2 m' RQ \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$
$$W = k^2 m' QP' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

Seien nun l und l' die Längen der Planeten, sowie b' die Breite von P', so ist (vergl. Fig. 146):

$$QP' = r' \sin b'$$
$$SQ = r' \cos b'$$
$$RQ = SQ \sin(l' - l) = -r' \cos b' \sin(l - l')$$
$$SR = SQ \cos(l' - l) = r' \cos b' \cos(l - l')$$
$$PR = r' \cos b' \cos(l - l') - r$$

Damit gehen die Werte von T, V, W über in die folgenden:

$$T = -k^2 \left[\frac{M+m}{r^2} + m' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos b' \cos(l - l') - \frac{m'}{\varrho^3} r \right]$$
$$V = -k^2 m' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos b' \sin(l - l')$$
$$W = k^2 m' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \sin b'$$

Ferner wird:

$$\varrho^2 = PQ^2 + QP'^2 = PR^2 + RQ^2 + QP'$$

oder:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos b' \cos(l - l') + r'^2}$$

In der analytischen Mechanik wird gezeigt, dass diese Gleichungen noch anders ausgedrückt werden können.

Es ist:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cos^2 b \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{db}{dt} \right)^2 = T$$
$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \cos^2 b \frac{dl}{dt} \right) = V$$
$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{db}{dt} \right) + r^2 \cos b \sin b \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = W$$

Man kann immer diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \cos^2 b \frac{dl}{dt} \right) = V$$
$$\frac{d^2}{dt^2} (r \cos b) - r \cos b \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = T \cos b - \frac{1}{r} W \sin b$$
$$\frac{d^2}{dt^2} (r \sin b) = T \sin b + \frac{1}{r} W \cos b$$

welche für manche Untersuchungen eine bequemere Gestalt haben.

Das Störungsproblem oder wie man auch sagt das Problem der drei Körper besteht nun in der Integration eines der beiden letzten Gleichungssysteme. Diese kann aber nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht geleistet werden, darum ist man gezwungen, sich mit Näherungsmethoden zu begnügen, die je nach dem zu behandenden Spezialfall auch spezielle Gestalten annehmen.

Seien nun, um die allgemeinen Formeln auf die Mondbahn anzuwenden, M, m, m' die Massen der Erde, Mond und Sonne, also:

Erkl. 322. Die soeben entwickelten Gleichungen gelten ganz allgemein. Sie sind der Ausgangspunkt sehr vieler Untersuchungen seit ihrer Aufstellung (1747) durch Euler. Ihre für die Astronomie bequemste Integration lieferte Laplace in seinem epochalen Werke: „Traité de mécanique céleste. Paris 1799 bis 1825. V vol.“ Einem der grossartigsten Werke, welche je der menschliche Geist geschaffen. Die Untersuchungen dieses Werkes sind so geführt, dass man zu ihnen heutzutage nur wenig hinzufügen kann. Das Werk behandelt alle auf die Astronomie bezüglichen Probleme und muss von einem jeden, der sich der theoretischen Astronomie widmen will, auf das Genaueste studiert werden. Mathematischerseits erfuhr das Problem manche vorteilhafte Erweiterung durch Lagrange, Jacobi und manche andere. Vom Standpunkte der Funktionentheorie sind insbesondere die neuesten darauf bezüglichen Arbeiten von Gyldén (Konvergenz der Reihen) und Bruns (Form der Integrale) zu erwähnen.

$$M = 1 : 354710$$
$$m = \frac{1}{81} M$$
$$m' = 1$$

r und r' die Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, also im Mittel:

$$r = 0{,}002712 = a$$
$$r' = 1{,}000000 = a'$$

l und l' die in der Mondbahn gerechneten Längen von Mond und Sonne, b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondbahn.

Die mittlere Neigung des Mondes beträgt etwa $5^0\ 9'$, also wird im Mittel:

$$b' < 5^0\ 9'$$

daher:

$$\cos b < 0{,}99596$$

also nahezu 1, wir werden daher stets für $r \cos b'$ einfach r' schreiben. Sodann ist:

$$\varrho = r' \sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l') + \frac{r^2}{r'^2}}$$
$$= r'\left[1 - \frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

weil:

$$\frac{r}{r'} = 0{,}002712$$

also $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$ sehr klein und somit:

$$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{r'^3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

und

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}\cos(l - l')$$

Setzt man diese Werte in die Ausdrücke für T, V, W ein und vernachlässigt die Glieder mit:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

so ergibt sich:

$$T = -k^2\left(\frac{M + m}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{m' r}{r'^3}[1 + 3\cos 2(l - l')]\right)$$
$$V = -\frac{3}{2}k^2\frac{m' r}{r'^3}\sin 2(l - l')$$
$$W = 3k^2\frac{m' r}{r'^3}\cos(l - l')\cdot\sin b'$$

Nun wollen wir noch fernere Vereinfachungen vornehmen, indem wir $l = ☾$, d. h. gleich der Mondlänge in Bezug auf die Ekliptik und analog $l' = ☉$.

Ferner ist:

$$k^2(M + m) = n^2 a^3$$
$$k^2(M + m') = n'^2 a'^3$$

wobei n und n' die mittleren Bewegungen von Mond und Sonne und a und a' die Mittelwerte von r und r' bezeichnen.

Erkl. 323. Man überzeugt sich durch Ausziehen der Quadratwurzel, dass:

$$\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)x^2 + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)x^3 + \cdots$$

Vernachlässigt man die mit x^2 behafteten Glieder, so folgt:

$$\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}x$$

Analog ist, wenn x sehr klein, so dass das Quadrat von x vernachlässigt werden kann:

$$(1 - x)^3 = 1 - 3x$$

und

$$\frac{1}{(1 - x)^3} = \frac{1}{1 - 3x} = 1 + 3x$$

Es ist:

$$n' = 3548''\,2 = \frac{360^0}{365{,}256374}$$

$$n = 47434''\,9 = \frac{360^0}{27{,}3216609}$$

Setzt man also:

$$\left(\frac{n'}{n}\right)^2 = w = \frac{1}{178{,}72} = 0{,}0055953$$

so wird:

$$T = n^2 a \left[-\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a} \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w\,[1 + 3\cos 2\,(\mathbb{C} - \odot)] \right]$$

$$V = n^2 a \left[-\frac{3}{2}\,\frac{r}{a} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \sin 2\,(\mathbb{C} - \odot) \right]$$

$$W = n^2 a \left[3\,\frac{r}{a} \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \cos\,(\mathbb{C} - \odot) \sin b' \right]$$

Damit haben wir die Fundamentalgleichungen der Mondtheorie gewonnen, diese lauten:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r \left(\frac{d l}{d t}\right)^2 = n^2 a \left[-\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w\,[1 + 3\cos 2\,(\mathbb{C} - \odot)] \right]$$

$$r\,\frac{d^2 l}{d t^2} - 2\,\frac{d r}{d t} \cdot \frac{d l}{d t} = n^2 a \left[-\frac{3}{2}\,\frac{1}{a} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \sin 2\,(\mathbb{C} - \odot) \right]$$

Die dritte Gleichung ist von der Ordnung der Störungen.

Erkl. 324. Diese Gleichungen gehen aus den allgemeinen, wenn man darin:

$$\cos b = 1$$

$$\sin b = 0$$

setzt. Wobei man annimmt, dass die Mondbahn zugleich die Fundamentalebene der Polarkoordinaten r, l, b ist. Würde diese Ebene unveränderlich feststehen, so wäre $b = 0$, aber sie verändert sich sehr wenig, demnach ist b sehr klein, d. h. klein von der Ordnung der Störungen dieser Ebene um ihre Gleichgewichtslage.

Wir wollen die Integration dieser Gleichungen succesive durchführen.

Setzen wir:

$$r = a\,(1 + cw)\,(1 + fw \cos\lambda_1)$$

$$l = \mathbb{C} + gw \sin\lambda_1$$

wobei:

$$f, \quad c, \quad g$$

gewisse, noch näher zu bestimmende Konstanten bezeichnet und:

$$\lambda_1 = knt$$

gesetzt wird. k ist eine neue Konstante und t die Zeit, sowie n die mittlere siderische Sonnenbewegung.

Vernachlässigt man die Quadrate der Grössen fw und gw, so folgt durch Substitution in die Grundgleichungen:

$$1 + cw + [(1 + k^2)\,f + 2kg]\,w \cos\lambda_1 = 1 - \left(\frac{1}{2} + 2cw\right) - \frac{3}{2}\,w \cos 2\,(\mathbb{C} - \odot) - 2fw \cos\lambda_1$$

$$(2kf + k^2 g)\,w \sin\lambda_1 = \frac{3}{2}\,w \sin 2\,(\mathbb{C} - \odot)$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn man:

$$\lambda_1 = 2\,(\mathbb{C} - \odot)$$

$$-c = \frac{1}{2} + 2c$$

$$-(1 - k^2)\,f - 2kg = \frac{3}{2} + 2f$$

$$2kf + k^2 g = \frac{3}{2}$$

setzt. Hieraus folgt:

$$c = -\frac{1}{6}$$

$$f = +\frac{3}{2} \cdot \frac{k+2}{k(k^2-1)}$$

$$g = +\frac{3}{2} \frac{k^2+2k+3}{k^2(k^2-1)}$$

Da nun in erster Annäherung:

$$\mathbb{C} = nt$$
$$\odot = n't$$

so wird:

$$\lambda_1 = 2(n-n')t = knt$$

also:

$$k = 2\frac{n-n'}{n} = 1{,}8504$$

damit findet sich:

$$f = -1{,}2876$$
$$g = 1{,}8297$$

und

$$fw = -0{,}007204$$
$$gw = 0{,}010238 = 35'\,12''$$

so dass also:

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{178{,}72}\right)[1 - 0{,}007204 \cos 2(\mathbb{C} - \odot)]$$
$$l = \mathbb{C} + 35'\,12'' \sin 2(\mathbb{C} - \odot)$$

Dieses stimmt mit dem von Hansen angegebenen Werte für die Variation:

$$35'\,45''\,01 \sin 2(\mathbb{C} - \odot)$$

fast genau überein. Indem wir statt der einfachen Form für r und l die allgemeinere:

$$r = a(1 + cw)(1 + w\Sigma f_k \cos\lambda_k)$$
$$l = \mathbb{C} + w\Sigma g_k \sin\lambda_k$$

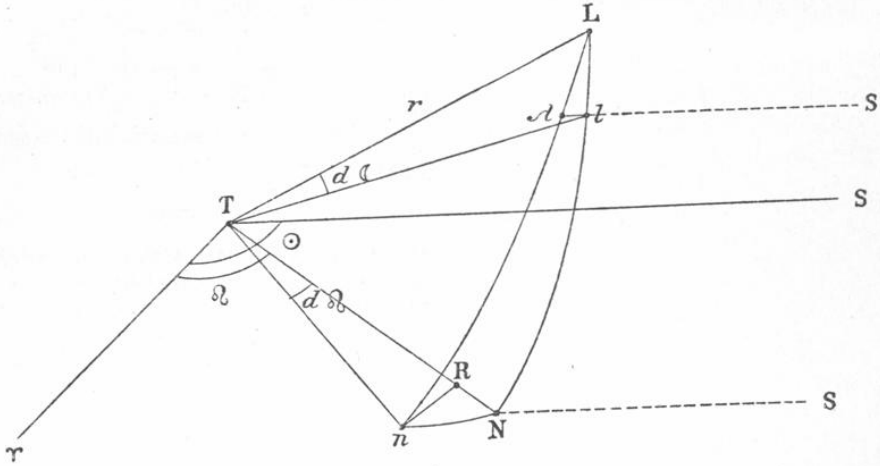
wählen und analoge Rechnungen durchführen, erhalten wir die genauen Werte für r und l. Da es sich nur um die Angabe des Weges handelt, auf welchem man die Werte l und r erlangen kann, so dürfte das Gesagte genügen.

Erkl. 325. Man findet diese Rechnungen durchgeführt in Moebius „die Elemente der Mechanik des Himmels“ § 117 u. folg., auch Ges. Werke, IV. Band, Seite 154 bis 242.

Um die Störungen der Knotenbewegung und der Neigung zu erhalten, kann man folgenden Weg einschlagen.

Es sei (vergl. Figur 147) T die Erde, C die Sonne (etwa in 400facher Entfernung gedacht, so dass in der Figur CS, TS, NS parallel erscheinen) und L sei der Mondort in der Entfernung r. Nehmen wir an, dass infolge der ungestörten Bewegung der Mond in der Zeit dt die Strecke Ll zurücklegen würde. Da aber die Sonne auf ihn anziehend einwirkt, so würde er unter ihrer Anziehung allein in dieser Zeit die Strecke $l\lambda$ durchmessen, so dass er in der Wirklichkeit die Bahn $L\lambda$ beschreibt. Verlängern wir Ll und $L\lambda$ bis zur Ekliptik, so erhalten wir die Punkte N und n.

Figur 147.



Wegen der grossen Entfernung der Sonne können wir:

$$\lambda l \text{ und } Nn$$

einfach als parallel annehmen.

Sodann ist:

$$Ll = r\,d\,☾$$

und wegen der Proportion:

$$nN : \lambda L = Ll : LN$$

auch:

$$nN = \frac{l\lambda}{r\,d\,☾}\,LN$$

Nun ist, da:

$$\sphericalangle\, TNn = ☉ - ☊$$

$$nR = Nn \sin(☉ - ☊)$$

so dass also:

$$nR = \frac{l\lambda}{r\,d\,☾}\,LN \sin(☉ - ☊)$$

Nun ist offenbar:

$$d\,☊ = -\frac{nR}{TR} = -\frac{nR}{TN + NR}$$

oder wenn wir NR als klein gegen TN vernachlässigen:

$$d\,☊ = -\frac{nR}{TN}$$

also:

$$d\,☊ = -\frac{l\lambda}{r\,d\,☾} \cdot \frac{LN}{TN} \sin(☉ - ☊)$$

Wir haben ferner:

$$\sphericalangle\, TLN = 90^0$$

$$\sphericalangle\, LTN = 180^0 - (☾ - ☊)$$

also:

$$\frac{LN}{TN} = \sin LTN = \sin(☾ - ☊)$$

so dass:

$$d\,☊ = -\frac{\lambda l}{r\,d\,☾} \cdot \sin(☾ - ☊) \sin(☉ - ☊)$$

Nun ist nach den Grundsätzen der Dynamik:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = k^2 \varphi$$

wobei φ die beschleunigende Kraft, k deren Intensität in der Einheit der Entfernung und $\frac{d^2 s}{d t^2}$ gleich der Geschwindigkeitszunahme, also:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} \cdot d t^2 = k^2 \varphi \, d t^2$$

gleich dem Weg, der infolge der Geschwindigkeitszunahme zurückgelegt wird, so dass wir also, wenn φ geeignet bestimmt wird:

$$l \lambda = k^2 \varphi \, d t^2$$

setzen können. Nun ist aber in unserem Falle:

$$\varphi = \frac{3 m' r}{r'^3} \cos (\odot - \mathbb{C})$$

so dass also:

$$l \lambda = \frac{3 k^2 m' r}{r'^3} \cos (\odot - \mathbb{C}) \, d t^2$$

und demnach:

$$d \Omega = - 3 \frac{k^2 m'}{r'^3} \cdot \frac{d t}{d \mathbb{C}} \cdot \cos (\odot - \mathbb{C}) \sin (\mathbb{C} - \Omega) \sin (\odot - \Omega) \, d t$$

wird. Diese Gleichung wollen wir umformen, indem wir:

$$\odot - \mathbb{C} = m$$
$$\odot - \Omega = m'$$
$$\mathbb{C} - \Omega = m''$$

setzen und beachten, dass:

$$4 \cos m \sin m' \sin m'' = \cos (m + m' - m'') + \cos (m - m' + m'')$$
$$- \cos (m + m' + m'') - \cos (m - m' - m'')$$

und wegen:

$$m = m' - m''$$

auch:

$$4 \cos m \sin m' \sin m'' = 1 + \cos 2 m - \cos 2 m' - \cos 2 m''$$

so dass wir:

$$d \Omega = - \frac{3}{4} \frac{k^2 m'}{r^3} \frac{d t}{d \mathbb{C}} [1 + \cos 2 (\odot - \mathbb{C}) - \cos 2 (\mathbb{C} - \Omega) - \cos 2 (\odot - \Omega)] \, d t$$

Setzt man nun:

$$\frac{d \mathbb{C}}{d \odot} = h \qquad \frac{d \Omega}{d \odot} = - j$$

so wird:

$$d m = d \odot - d \mathbb{C} = d \odot (1 - h)$$
$$d m' = d \odot - d \Omega = d \odot (1 + j)$$
$$d m'' = d \mathbb{C} - d \Omega = d \odot (h + j)$$

so dass man also hat:

$$d \Omega = - \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{r'^3} \frac{d t}{d \mathbb{C}} \cdot \frac{d t}{d \odot} \left(d \odot + \frac{\cos 2 m \, d m}{1 - h} - \frac{\cos 2 m' \, d m'}{1 + j} - \frac{\cos 2 m'' \, d m''}{h + j} \right)$$

Setzen wir:

$$d \Omega = d \Omega_1 + d \Omega_2$$

Erkl. 326. Es ist (vergleiche jene Teile der Encyklopädie, die über Integralrechnung handeln):

$$\int \cos \alpha x \cdot dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + \text{Konst.}$$

$$\int \sin \alpha x \cdot dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + \text{Konst.}$$

Erkl. 327. Es ist offenbar:

$$\frac{d\odot}{dM'} \cdot dM' = d\odot$$

oder weil:

$$\frac{d\odot}{dM'} = 1$$

auch:

$$dM' = d\odot$$

Hilfsrechnung.

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{360^0}{365{,}256358\cdots} = 0{,}098561$$

$$\frac{d\mathbb{C}}{dt} = \frac{360^0}{27{,}32166} = 13^0\ 17667$$

$$e' = 0{,}0167607$$

$$\odot = 360^0 \text{ für ein Jahr}$$

so dass:

$$\log \frac{3}{4} = 9{\cdot}8750613$$

$$\log \frac{d\mathbb{C}}{d\odot} = 1{\cdot}1261001$$

$$8{\cdot}7489612$$

$$\log 360 = 2{\cdot}5563025$$

$$1{\cdot}3052637$$

$$\frac{3}{4}\,\frac{d\mathbb{C}}{d\odot} \cdot 360^0 = 20{,}19592 = 20^0\ 11'\ 47''$$

$$\log \frac{3}{4} \cdot \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} = 8{\cdot}7489612$$

$$\log 3e' = 8{\cdot}7014125$$

$$7{\cdot}4503737$$

$$\text{num} = 0{,}0028208 = 9'\ 42'' = 528''$$

so dass:

$$d\Omega_1 = \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{r'^3} \frac{dt}{d\mathbb{C}} \cdot dt$$

beachtet man nun, dass hier genähert:

$$r'^3 = a'^3 (1 + 3e' \cos M')$$

gesetzt werden kann, wo e' die Exzentrizität und M' die mittlere Anomalie bezeichnet, so folgt:

$$d\Omega_1 = \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{a'^3} (1 - 3e' \cos M') \frac{dt}{d\mathbb{C}}\, dt$$

Nun ist ferner:

$$k^2 = \frac{n'^2 a'^3}{m'} = \left(\frac{d\odot}{dt}\right)^2 \frac{a'^3}{m'}$$

so dass:

$$d\Omega_1 = \frac{3}{4} \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} (1 - 3e' \cos M')\, d\odot$$

folgt oder:

$$d\Omega_1 = \frac{3}{4} \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \cdot d\odot - \frac{9}{4} e' \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \cos M'\, dM'$$

Integriert man diese Gleichung, so folgt:

$$d\Omega_1 = \frac{3}{4} \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \cdot \vartheta\odot - \frac{9}{4} e' \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \cdot \sin M'$$

oder (vergl. nebenstehende Hilfsrechnung):

$$\Omega_1 = \Omega_0 - 0{,}056100 \cdot \odot + 528'' \sin M'$$

Wir sehen, dass die Theorie ein Zurückweichen der Knoten um jährlich:

$$20^0\ 11'\ 47''$$

ergibt, statt:

$$19^0\ 19'\ 42''$$

also fast 1^0 mehr, als die Beobachtungen liefern. Der Fehler liegt aber in den Vernachlässigungen, die wir uns erlaubt haben.

Entwickelt man den zweiten Teil von $d\Omega$, nämlich $d\Omega_2$, so liefert uns die Integration der Gleichung:

$$d\Omega_2 = \frac{3}{4} \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \left(\frac{\cos 2m}{h-1}\, dm + \frac{\cos 2m'}{1+j}\, dm' + \frac{\cos 2m''\, dm''}{h+j} \right)$$

einfach:

$$\Omega_2 = \frac{3}{8} \frac{d\odot}{d\mathbb{C}} \left(\frac{\sin 2m}{h-1} + \frac{\sin 2m'}{1+j} + \frac{\sin 2m''}{h+j} \right)$$

oder wenn man analoge Rechnung durchführt:

$$\Omega_2 = 5491'' \sin 2(\odot - \Omega) + 431'' \sin 2(\mathbb{C} - \Omega) + 468'' \sin 2(\odot - \mathbb{C})$$

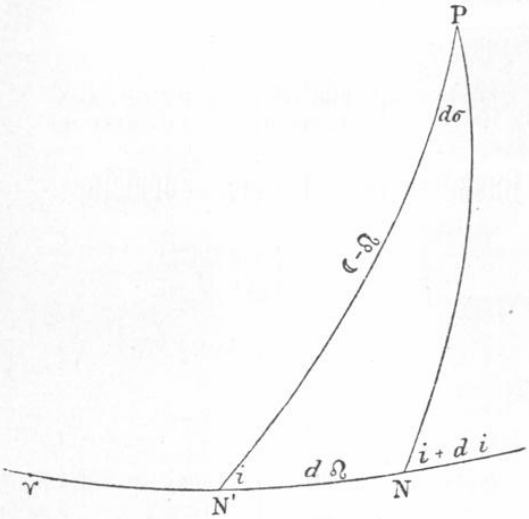
so dass wir jetzt allgemein:

$$\Omega = \Omega_0 - 0{,}056100\, \odot + 528'' \sin M' + 431'' \sin 2(\mathbb{C} - \Omega) + 5491'' \sin 2(\odot - \Omega) + 468'' \sin 2(\odot - \mathbb{C}) + \cdots$$

schreiben können. Es sei bemerkt, dass dieses nur die Anfangsglieder einer sehr ausgedehnten Reihe sind.

Um endlich die Störungen der Neigung zu berechnen, wenigstens die grössten Glieder der Reihe für die Neigung, betrachten wir die Figur 148. Sei P der Mondort, PRN

Figur 148.



Erkl. 328. Es ist (vergleiche Kleyers Lehrbuch der Integralrechnung):

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{Konst.}$$

oder:

$$\int \frac{dx}{x} = \log (x \cdot \text{Konst.})$$

die ungestörte, PN' die gestörte Mondbahn, $\Upsilon NN'$ ihr Schnitt mit der Ekliptik, alles auf die scheinbare Himmelskugel übertragen gedacht, ferner RN' senkrecht auf PN, so folgt aus dem Dreieck PNN':

$$\cos (i + di) = \cos d\sigma \cos i - \sin d\sigma \sin i \cos (☾ - ☊)$$

$$\sin (i + di) : \sin d\sigma = \sin (☾ - ☊) : \sin d☊$$

woraus nach Vernachlässigung der höheren Potenzen von:

$$\begin{array}{ccc} di & d\sigma & d☊ \end{array}$$

$$di = \cos (☾ - ☊)\, d\sigma$$

$$d☊ = \frac{\sin (☾ - ☊)}{\sin i}\, d\sigma$$

folgt. Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{di}{\sin i} = \operatorname{ctg} (☾ - ☊)\, d☊$$

Da nun i klein, so kann man $\sin i$ durch i ersetzen, woraus:

$$\frac{di}{i} = \operatorname{ctg} (☾ - ☊)\, d☊$$

Rechter Hand sind bekannte Grössen. Integriert man, so folgt:

$$\log (i_0 + di) - \log i_0 = \int \operatorname{ctg} (☾ - ☊)\, d☊$$

oder:

$$\log \left(1 + \frac{di}{i_0}\right) = \int \operatorname{ctg} (☾ - ☊)\, d☊$$

woraus unter Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$di = i_0 \int \operatorname{ctg} (☾ - ☊)\, d☊$$

folgt. Führt man die angedeuteten Operationen aus, so folgt:

$$i = 5^0\, 8'\, 40'' + 490'' \cos 2 (☉ - ☊) + 38'' \cos 2 (☾ - ☊) - 42'' \cos 2 (☾ - ☉) + 47'' \sin M' + + \cdots$$