Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondre über elektrische Schwingungen

Weber, Wilhelm

Leipzig, 1864

I. Bewegungsgesetze

urn:nbn:at:at-ubi:2-5938

Kirchhoff gemacht und in Poggendorffs Annalen 1857 Bd. 100 und 102 mitgetheilt worden. Dieser erste Versuch hat, obiger Bedenken ungeachtet, mit Recht grosses Interesse erweckt; denn es leuchtet ein, dass eine Entscheidung, ob und in wie weit obige Bedenken begründet seien, schwerlich auf anderem Wege als auf dem des Versuchs gewonnen werden kann. — Kirchhoff hat nämlich versucht, *eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Drahte* aufzustellen, wobei er jedoch, wie er selbst angiebt, gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen, oder solchen deren Intensität sich nur langsam ändert, statt finden, als allgemein geltend angenommen hat. Der Gang seiner Entwickelung soll im folgenden Artikel näher betrachtet werden.

I.

BEWEGUNGSGESETZE.

1.

Kirchhoff, über die Bewegung der Elektricität in Leitern.

Es sollen x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Punkts des Leiters bezeichnen, ferner u, v, w die *Stromdichtigkeiten* des nach den drei Coordinatenaxen zerlegten elektrischen Stroms, welcher zur Zeit t in jenem Punkte des Leiters vorhanden ist. — Unter *Stromdichtigkeit* wird hier verstanden das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität in die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität. Nach dem Ohm'schen Widerstandsgesetze, wenn ihm allgemeinere Geltung beigelegt wird, bedeutet dieses so viel als das Product der im betrachteten Punkte (x, y, z) wirkenden *elektromotorischen Kraft* in das *specifische Leitungsvermögen* des Leitermetalls. Hienach ist also, wenn A die elektromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) — d. i. den Unterschied der auf die Maasseinheit positiver und negativer Elektricität im Punkte (x, y, z) wirkenden Kräfte — bezeichnet, und α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Richtungen der drei Coordinatenaxen bildet, und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls,

$$u = A\cos\alpha \,.\, k\,, \quad v = A\cos\beta \,.\, k\,, \quad w = A\cos\gamma \,.\, k\,,$$

$\vec{j} = k\,\vec{E}$

wobei für Kräfte und Leitungsvermögen die *mechanischen Maasse* angenommen werden sollen, deren sich Kirchhoff stets bedient*). —

Die elektromotorische Kraft A rührt nun aber zum Theil von der in der ganzen Kette vertheilten *freien Elektricität* her, zum Theil von der *Induction*, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in allen Theilen der Leitungskette wirkt. Von allen *äusseren* elektromotorischen Kräften, z. B. von magnetelektrischen Inductionskräften, die von aussen her auf die Leitungskette wirken können, soll vor der Hand ganz abgesehen werden. Alle übrigen bekannten Kräfte, welche auf elektrische Massen

---

*) Bezeichnet ξ, η, ζ die Verschiebung eines elektrischen Theilchens im Punkte (x, y, z) nach der Zeit t in der Richtung der drei Coordinaten, also $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, nach der Richtung der drei Coordinatenaxen zerlegt, so ist, wenn $\mathfrak{E}$ die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität bezeichnet, der ersten Bestimmung gemäss,

$$u = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt}, \quad v = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt}, \quad w = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt}.$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist aber die Stromintensität i in einem linearen Leiter, wenn sie beharrlich ist, dem Quotienten der Summe aller nach der Richtung des Leiters in der Länge der ganzen geschlossenen Kette l wirkenden elektromotorischen Kräfte, d. i. $\int Adl$, dividirt durch den Widerstand der ganzen Kette, d. i. $\int\frac{dl}{ks}$, wenn s den Querschnitt des Leiters und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls bezeichnet, proportional oder, nach mechanischen Maassen, gleich, folglich ist $i = \frac{\int Adl}{\int\frac{dl}{ks}}$. In diesem Ausspruch des Ohm'schen Gesetzes wird aber unter der Stromintensität i das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, d. i. $\frac{d\sigma}{dt}$, wenn $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\alpha$, $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\beta$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\gamma$ gesetzt wird, in den Querschnitt des Leitungsdrahtes s und in die Menge $\mathfrak{E}$ der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität verstanden, folglich ist

$$\frac{\int Adl}{\int\frac{dl}{ks}} = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt}.$$

Wird nun dem Ohm'schen Gesetze allgemeinere Geltung, für jedes einzelne Längenelement der Kette, zugeschrieben, so erhält man

$$\frac{Adl}{\frac{dl}{ks}} = Aks = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt},$$

oder $Ak = \mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$, und hieraus, durch Zerlegung nach den Coordinatenaxen,

$$A\cos\alpha \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt} = u, \quad A\cos\beta \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt} = v, \quad A\cos\gamma \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt} = w.$$

wirken, tragen zur *elektromotorischen Kraft* (wenn die Widerstandskräfte, die dazu gerechnet werden könnten, davon ausgeschlossen bleiben) nichts bei, z. B. die von Ampère entdeckten, aus der Wechselwirkung der Stromelemente unter einander resultirenden, elektrodynamischen Kräfte, von denen bekannt ist, dass der Unterschied der auf die positive Elektricität und der auf die negative Elektricität wirkenden Kräfte stets Null ist, woraus also keine *elektromotorische* Kraft resultirt.

Die Componenten des *ersten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der in der Kette vertheilten *freien Elektricität* herrührt, werden, wenn Ω den Werth der *Potentialfunction der freien Elektricität* im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die *verdoppelten*, negativ genommenen Werthe der partiellen Differentialquotienten von Ω nach den drei Coordinatenaxen, d. i. durch

$$-2\frac{d\Omega}{dx}, \quad -2\frac{d\Omega}{dy}, \quad -2\frac{d\Omega}{dz}$$

dargestellt, wie man leicht ersieht, wenn man beachtet, dass die elektromotorische Kraft, d. i. der Unterschied der auf die Einheit positiver und negativer Elektricität wirkenden Kräfte, *doppelt* so gross ist als die auf die Einheit *positiver* Elektricität wirkende Kraft.

Um die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft anzugeben, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt, bezeichne x', y', z' die Coordinaten eines zweiten Punkts der Leitungskette, ferner u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, und r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') von einander.

Aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ergiebt sich dann die elektromotorische Kraft, welche das Element $dx'dy'dz'$, in welchem die Elektricität *nach der Richtung der x-Axe* mit der Geschwindigkeit $\frac{d\xi'}{dt}$ sich bewegt, wo also, nach der vorhergehenden Note, $u' = \mathfrak{E}\frac{d\xi'}{dt}$ ist, im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausübt, nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dx'dy'dz'}{r^3}\cdot(x-x')^2\cdot\frac{du'}{dt}.$$

Es ist nämlich (siehe Elektrodynamische Maassbestimmungen im 5. Bande dieser Abhandlungen, S. 268 Nr. 4) die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge α, dessen Stromintensität in der Zeit t um i gleichförmig wächst, auf einen Punkt in der Entfernung r nach 1856 einer Richtung, welche mit der verlängerten r den Winkel θ' macht, ausübt, wenn α mit r selbst den Winkel θ bildet,

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{i}{t} \cdot \cos\theta \cos\theta'.$$

Hierin ist aber die Stromintensität i nach absolutem *magnetischem* Maasse, wie sie durch Galvanometer bestimmt zu werden pflegt, auszudrücken, wofür der nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Werth, mit Hinzufügung des Faktors $\frac{2\sqrt{2}}{c}$, gesetzt werden kann. Die nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Stromintensität in obigem Falle ist aber $= u'dy'dz'$. Setzt man also $i = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot u'dy'dz'$, folglich $\frac{i}{t} = \frac{di}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz'$, und beachtet, dass in obigem Falle $\cos\theta = \cos\theta' = \frac{x-x'}{r}$ und $\alpha = dx'$ ist, so findet man die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{dx'}{r} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz' \cdot \frac{(x-x')^2}{rr},$$

was dem oben angegebenen Werthe gleich ist.

Betrachtet man die Bewegung der Elektricität im Elemente $dx'dy'dz'$ *nach der* y- *oder* z-*Axe* statt nach der x-Axe, so tritt, als Werth von $\cos\theta$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ an die Stelle von $\frac{x-x'}{r}$, und $\frac{dv'}{dt}$ oder $\frac{dw'}{dt}$ an die Stelle von $\frac{du'}{dt}$, woraus folgt, dass die ganze vom Elemente $dx'dy'dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der* x-*Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Ebenso findet man für die ganze vom Elemente $dx'dy'dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der* y- *oder* z-*Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft, indem man, als Werth von $\cos\theta'$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ statt $\frac{x-x'}{r}$ setzt,

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (y-y')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right)$$

oder

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (z-z')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Setzt man nun Kürze halber

$$U = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\,(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')) \qquad (1)$$

$$V = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')\,(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')) \qquad (2)$$

$$W = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')\,(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')) \qquad (3)$$

so erhält man hienach die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt,

$$= -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}, \quad = -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}, \quad = -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}.$$

Die Componenten der *ganzen* elektromotorischen Kraft waren aber oben mit

$$A\cos\alpha, \quad A\cos\beta, \quad A\cos\gamma$$

bezeichnet worden, wonach also

$$A\cos\alpha = -2\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}\right)$$

$$A\cos\beta = -2\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}\right)$$

$$A\cos\gamma = -2\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}\right)$$

erhalten wird. Setzt man endlich diese Werthe in die oben angeführten Gleichungen der Stromdichtigkeiten u, v, w im Punkte (x, y, z) ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$u = -2k\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}\right) \tag{4}$$

$$v = -2k\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}\right) \tag{5}$$

$$w = -2k\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}\right). \tag{6}$$

Für die Bestimmung des Werthes Ω der *Potentialfunction* der in der ganzen Kette vertheilten *freien* Elektricität im Punkte (x, y, z) kommt nun noch besonders in Betracht, dass die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Innern eines Leiters, in welchem Strombewegungen statt finden, nicht wie bei einem Leiter, in welchem die Elektricität sich in Ruhe befindet, $= 0$ gesetzt werden darf. Bezeichnet daher ε' die von Null verschiedene Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Punkte (x', y', z'), wenn derselbe *im Innern* des Leiters liegt, e' dagegen, wenn dieser Punkt im Oberflächenelemente dS' liegt, bezeichnet also e' die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im *Oberflächenelemente* dS', so erhält man folgende Bestimmung des Werthes von Ω, nämlich

$$\Omega = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\varepsilon' + \iint\frac{dS'}{r}\cdot e'. \tag{7}$$ $-\Delta\Omega = 4\pi\rho$

Hiezu kommt nun noch, dass die Vertheilung der *freien* Elektricität sowohl *im Innern* als auch *an der Oberfläche* der ganzen Leitungskette, welche durch die Werthe von ε' und e' bestimmt wird, zwar mit der Zeit sich ändern kann, dass aber diese Aenderungen von der *Bewegung* der Elektricität in der Kette abhängen, wonach es zwei Gleichungen geben muss, welche die *partiellen Differentialquotienten* von ε' und e' in Beziehung auf die Zeit in ihrer Abhängigkeit von der *Bewegung* der Elektricität darstellen.

Der Unterschied der in dem Zeitelemente dt in der Richtung der x-, y- und z-Axe aus dem Elemente $dx'dy'dz'$ austretenden positiven Elektricität von der darin eintretenden ist

$$dx'dy'dz' \,.\, \frac{du'}{dx'}\,dt\,,\quad dx'dy'dz' \,.\, \frac{dv'}{dy'}\,dt\,,\quad dx'dy'dz' \,.\, \frac{dw'}{dz'}\,dt\,.$$

Die *Summe* dieser Unterschiede giebt die *Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektricität $dx'dy'dz' \,.\, \varepsilon'$ im Zeitelemente dt, welche von der Bewegung der *positiven* Elektricität hervorgebracht wird. Aus der *entgegengesetzt gleichen Bewegung der negativen Elektricität* ergiebt sich aber nochmals eine ebenso grosse Verminderung für dasselbe Zeitelement dt; folglich ist jene Summe *die Hälfte der ganzen Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektricität im Zeitelemente dt, d. i. die *Hälfte* von $= -\, dx'dy'dz' \,.\, \frac{d\varepsilon'}{dt}\,dt$, also ist

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{d\varepsilon'}{dt}\,. \tag{8}$$

Bezeichnet man endlich die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der x-, y- und z-Axe bildet, mit (N', x'), (N', y'), (N', z'), so ist die Menge der *positiven* Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt von dem Oberflächenelemente dS' ins Innere zurückströmt,

$$= (u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z'))\, dS' \,.\, dt\,,$$

und da eine gleiche Menge *negativer* Elektricität in derselben Zeit aus dem Innern zu dem Oberflächenelemente dS' hinströmt, so ergiebt sich, dass jene Menge die Hälfte der *ganzen Verminderung der freien Elektricität* $e'dS'$ in dem Oberflächenelemente dS' in dem Zeitelemente dt ist, d. i. $= -\tfrac{1}{2}\,\frac{de'}{dt} \,.\, dS'dt$, also ist

$$u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') = -\tfrac{1}{2}\,\frac{de'}{dt}\,. \tag{9}$$

So allgemein nun diese von Kirchhoff gegebene Entwickelung der Bewegungsgleichungen der Elektricität in einem beliebigen Leiter sonst auch ist, so liegen ihr doch folgende drei beschränkende Annahmen zu Grunde, nämlich 1) die Annahme, wonach der Werth der elektromotorischen Kraft in einem Punkte, wie oben geschehen, bloss durch *Verdoppelung der auf die positive Elektricität wirkenden* Kraft bestimmt werden durfte, dass nämlich in allen Theilen des Leiters stets gleiche Mengen von positiver und negativer Elektricität enthalten wären, oder genauer, da dies streng genommen so viel heissen würde als dass die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters ε' und e' überall stets Null sein sollte, was nicht der Fall ist, dass wenigstens die vorhandene *freie* Elektricität gegen die Menge des an derselben Stelle vorhandenen *neutralen Gemisches* beider Elektricitäten stets als verschwindend klein betrachtet werden dürfe; 2) die Annahme, dass durch jeden Querschnitt gleichzeitig immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchgehen, was nur dann anzunehmen gestattet ist, wenn man überall eine beliebige Bewegung des neutralen Fluidums hinzugefügt denken darf, aus dem Grunde nämlich, weil eine solche hinzugefügte Bewegung des neutralen Fluidums, wenn sie wirklich vorhanden wäre, gar keinen Einfluss auf die *Beobachtungen* haben würde; 3) die Annahme einer allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes, welche, wie später gezeigt werden soll, auf die Annahme zurückgeführt werden kann, dass die *Masse* des elektrischen Fluidums gegen die *Masse* seines ponderabelen Trägers überall völlig verschwinde, was allerdings allgemein angenommen zu werden pflegt.

2.

Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird.

Zur näheren Bestimmung der elektromotorischen Kraft, welche in irgend einem Punkte des Leitungsdrahtes wirkt, ist es zweckmässig, dieselbe in zwei Theile zu scheiden, nämlich in den Theil, welcher von dem Elemente des Leitungsdrahts herrührt, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, und in den Theil, welcher von allen übrigen Elementen herrührt, die in grösseren, messbaren Entfernungen von dem betrachteten Punkte liegen.

Das Element des Leitungsdrahts, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, sei ein Cylinder, dessen Halbmesser im Vergleich mit seiner Länge sehr klein ist. Die Vertheilung der freien Elektricität sowohl wie der elektrischen Bewegungen in diesem Cylinder wird hiebei von Kirchhoff als *symmetrisch gegen die Cylinderaxe* angenommen.

In Beziehung auf die Coordinaten falle die x-Axe mit der Cylinderaxe zusammen und man setze

$$y = \varrho \cos\varphi \qquad y' = \varrho' \cos\varphi'$$
$$z = \varrho \sin\varphi \qquad z' = \varrho' \sin\varphi' .$$

Unterscheidet man ferner die Stromdichtigkeit in der Richtung der Cylinderaxe und senkrecht gegen die Cylinderaxe, so ist letztere, bei der angenommenen Symmetrie der Bewegungen, überall *radial,* d. i. ihre Richtung fällt in jedem Punkte mit dem durch diesen Punkt gelegten Cylinderradius zusammen. Hieraus folgt, wenn σ diese *radiale Stromdichtigkeit* im Punkte (x, y, z), σ' im Punkte (x', y', z') bezeichnet, dass

$$v = \sigma \cos\varphi \qquad v' = \sigma' \cos\varphi'$$
$$w = \sigma \sin\varphi \qquad w' = \sigma' \sin\varphi' ,$$

worin σ und σ' von φ und φ' unabhängige Werthe haben.

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdrücken von Ω und U im vorhergehenden Artikel erhält man, wenn α den Cylinderhalbmesser bezeichnet,

$$\Omega = \iiint \frac{dx'.\varrho' d\varrho' d\varphi'}{r} . \varepsilon' + \alpha \iint \frac{dx' d\varphi'}{r} . e' \tag{1}$$

$$U = \iiint \frac{dx'.\varrho' d\varrho' d\varphi'}{r^3} (x-x') \Big(u'(x-x') + \sigma' \big(\varrho \cos(\varphi-\varphi') - \varrho' \big) \Big) . \tag{2}$$

Man erhält ferner durch diese Substitution

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d.\sigma' \cos\varphi'}{dy'} ,$$

worin σ' für einen gegebenen Werth von x' bloss von der Variabelen ϱ' abhängt. Setzt man daher $\sigma' = f(\varrho') = f(\sqrt{(y'y' + z'z')})$, so findet man

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d}{dy'} . \left(\frac{y' f(\sqrt{(y'y'+z'z')})}{\sqrt{(y'y'+z'z')}} \right) = \frac{y'y'}{\varrho'\varrho'} . \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'\varrho' - y'y'}{\varrho'^3} . \sigma' ,$$

Ebenso findet man

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{z'z'}{\varrho'\varrho'} . \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'\varrho' - z'z'}{\varrho'^3} . \sigma'$$

folglich

$$\frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\sigma'}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho'} . \frac{d.\varrho'\sigma'}{d\varrho'} .$$

Fügt man noch $\frac{du'}{dx'}$ hinzu und substituirt für die Summe $\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}$ den dafür erhaltenen Werth, in Gleichung (8) des vorhergehenden Artikels, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{du'}{dx} + \frac{1}{\varrho'} \cdot \frac{d.\varrho'\sigma'}{d\varrho'} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\varepsilon'}{dt}. \tag{3}$$

Endlich findet man für die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der drei Coordinatenaxen bildet, folgende Werthe:

$$(N', x') = \frac{\pi}{2}, \ (N', y') = \varphi' + \pi, \ (N', z') = \varphi' + \frac{\pi}{2};$$

folglich ist

$$u'\cos(N', x') = 0, \ v'\cos(N', y') = -\sigma'\cos\varphi'^2, \ w'\cos(N', z') = -\sigma'\sin\varphi'^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (9) des vorhergehenden Artikels ergiebt sich dann

$$\sigma' = \tfrac{1}{2}\frac{de'}{dt}. \tag{4}$$

Setzt man nun Kürze halber

$$x' - x = \lambda, \text{ also } dx' = d\lambda$$
$$\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi') = б^2, \text{ also } r^2 = б^2 + \lambda^2,$$

so ist, wenn l die Länge des Cylinders bezeichnet und der Punkt (x, y, z) in dem diese Länge halbirenden Querschnitt liegt, nach Gleichung (1) und (2)

$$\Omega = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\varepsilon' d\lambda}{\sqrt{(б^2+\lambda^2)}} + \alpha \int d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{e' d\lambda}{\sqrt{(б^2+\lambda^2)}}$$

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{u'\lambda^2 d\lambda}{(б^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \iint \varrho'^2 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\varphi - \varphi')\right) d\varrho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\sigma'\lambda d\lambda}{(б^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Entwickelt man nun in der erstern Gleichung ε' und e' nach Potenzen von λ, nämlich

$$e' = e + \frac{de}{dx}.\lambda + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2e}{dx^2}.\lambda^2 + \ldots$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_0 + \frac{d\varepsilon'_0}{dx}.\lambda + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}.\lambda^2 + \ldots$$

wo ε'_0, abgesehen von der Zeit, bloss von der Variabelen ϱ' abhängt; so kann für sehr kleine Werthe von $\frac{б^2}{l^2}$, welche, da $б^2$ nie grösser als $4\alpha^2$ sein kann, aus kleinen Werthen von $\frac{\alpha}{l}$ nothwendig folgen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{d\lambda}{\sqrt{(\beta^2+\lambda^2)}} = 2\log\frac{l}{\beta}\,,\quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{(\beta^2+\lambda^2)}} = 0\,,\quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{(\beta^2+\lambda^2)}} = \tfrac{1}{4}l^2$$

gesetzt werden, woraus für kleine Werthe von l folgt

$$\Omega = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \left(2\varepsilon'_0 \log\frac{l}{\beta} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + \alpha\int d\varphi' \left(2e\log\frac{l}{\beta} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2e}{dx^2}l^2\right)$$

Die Integration ist von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken, wonach sich also ergiebt

$$\Omega = 2\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \tfrac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + 2\pi\alpha\left(2e\log l + \tfrac{1}{8}\frac{d^2e}{dx^2}l^2\right)$$

$$-\,2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log\beta - 2\alpha e\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log\beta$$

Beachtet man nun, dass $\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi'))$ entweder $= 2\pi \log\varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, oder $= 2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho > \varrho'$, so erhält man den auf die *Oberfläche* bezüglichen Theil, für welchen $\varrho' = \alpha$ ist,

$$-\,2\alpha e\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log\beta = -\,4\pi\alpha e \log\alpha\,.$$

Der auf das *Innere* sich beziehende Theil zerfällt in zwei Stücke, nämlich

$$-2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\beta = -\,4\pi\log\varrho\int_0^\varrho \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 - 4\pi\int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \log\varrho'\,,$$

reducirt sich also in dem einen Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = \alpha$ ist, auf

$$-\,4\pi\log\alpha . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0\,,$$

in dem andern Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = 0$ ist, auf

$$-\,4\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \log\varrho'\,,$$

die beide desto weniger von einander verschieden sind, je kleiner α*),

*) ε'_0 nähert sich bei der angenommenen symmetrischen Vertheilung der freien Elektricität im Drahte mit abnehmenden Werthen von ϱ' der *Constanz*. Ist es hienach

so dass man mit hinreichender Genauigkeit für sehr kleine Werthe von α den auf das Innere sich beziehenden Theil

$$2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' . \log 6 = -4\pi \log \alpha . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0$$

setzen kann; folglich

$$\Omega = 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \tfrac{1}{8}\tfrac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2} l^2\right) + 2\pi\alpha \left(2e \log l + \tfrac{1}{8}\tfrac{d^2 e}{dx^2} l^2\right)$$
$$- 4\pi \log \alpha . \left(\alpha e + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0\right)$$

oder kürzer

$$\Omega = 4\pi \log \frac{l}{\alpha} . \left(\alpha e + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0\right) + \tfrac{1}{4}\pi l^2 . \left(\alpha \frac{d^2 e}{dx^2} + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}\right).$$

Setzt man endlich hierin

$$2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \varepsilon'_0 = E,$$

das heisst, bezeichnet man mit Edx die Menge der *freien* Elektricität, die in dem Leiterelemente dx, theils an seiner Oberfläche theils im Innern, enthalten ist, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi\alpha . \frac{d^2 e}{dx^2} + 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2} = \frac{d^2 E}{dx^2},$$

folglich

$$\Omega = 2E \log \frac{l}{\alpha} + \tfrac{1}{8} \frac{d^2 E}{dx^2} . l^2 . \tag{5}$$

Ebenso können nun auch in der oben gefundenen Gleichung für U die Werthe von u' und σ' nach Potenzen von λ entwickelt werden, nämlich

---

für kleine Werthe von α gestattet, ε'_0 für alle Werthe von $\varrho' < \alpha$ *constant* zu setzen, so geht der für den erstern Grenzfall gefundene Werth über in

$$-4\pi\varepsilon'_0 \log \alpha \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' = -2\pi\alpha\alpha\varepsilon'_0 \log \alpha$$

der für den letzteren Grenzfall in

$$-4\pi\varepsilon'_0 \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \log \varrho' = -2\pi\alpha\alpha\varepsilon'_0 (\log \alpha - \tfrac{1}{2})$$

die sich von einander desto weniger unterscheiden, je kleiner α ist.

$$u' = u'_0 + \frac{du'_0}{dx} \,.\, \lambda + \frac{1}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2u'_0}{dx^2} \,.\, \lambda^2 + \ldots$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \frac{d\sigma'_0}{dx} \,.\, \lambda + \frac{1}{1\,.\,2} \,.\, \frac{d^2\sigma'_0}{dx^2} \,.\, \lambda^2 + \ldots$$

wo u'_0 und σ'_0 für einen gegebenen Werth von x', abgesehen von der Zeit, bloss von der Variabelen ϱ' abhängen.

Nun kann für sehr kleine Werthe von $\frac{6^2}{l^2}$, wie sie sehr kleinen Werthen von $\frac{\alpha^2}{l^2}$ entsprechen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0\,, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\left(\log\frac{l}{6} - 1\right) = 2\log\frac{l}{e6}\,,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^3 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0\,, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{4}l^2$$

gesetzt werden, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hienach ergiebt sich folgende Gleichung für U:

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' . \left(2u'_0 . \log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} . l^2\right) + \iint \varrho'^2 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\varphi - \varphi')\right) d\varrho' d\varphi' \left(2\frac{d\sigma'_0}{dx}\log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{24}\frac{d^3\sigma'_0}{dx^3} l^2\right).$$

Der letztere Theil dieses Werthes von U kann, wenn α sehr klein ist, da die Integration nach ϱ' von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken ist, als verschwindend betrachtet werden, folglich

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} l^2\right),$$

wo die Integration von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken ist, also

$$U = 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} . l^2\right) - 2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \log 6\,.$$

Da nun $\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log 6 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log\left(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi')\right)$ entweder $= 2\pi\log\varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, oder $= 2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho > \varrho'$, so ergiebt sich

$$U = 2\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} l^2\right) - 4\pi\log\varrho \int_0^\varrho \varrho' d\varrho' . u'_0 - 4\pi\int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \log\varrho'\,,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 + \tfrac{1}{4}\pi l^2 \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2} + 4\pi \log \frac{\alpha}{\varrho} . \int_0^\varrho \varrho' d\varrho' . u'_0 + 4\pi \int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \log \frac{\alpha}{\varrho'} .$$

Da nun aber, wenn α sehr klein ist, die beiden letzten Theile dieses Werthes von U gegen den ersten Theil als verschwindend betrachtet werden dürfen, so kann

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 + \tfrac{1}{4}\pi l^2 . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2}$$

gesetzt werden.

Setzt man endlich hierin

$$2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 = i ,$$

das heisst, bezeichnet man mit idt die Menge der positiven Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, wo also i die Stromintensität nach mechanischem Maasse ausdrückt, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2} = \frac{d^2 i}{dx^2} ,$$

folglich

$$U = 2i \log \frac{l}{e\alpha} + \tfrac{1}{8} \frac{d^2 i}{dx^2} . l^2 .$$

Hienach wird nun die elektromotorische Kraft, welche von der *freien Elektricität* in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird, näher bestimmt, nämlich aus dem Werthe von Ω,

$$- 2 \frac{d\Omega}{dx} = - 4 \frac{dE}{dx} . \log \frac{l}{\alpha} - \tfrac{1}{4} \frac{d^3 E}{dx^3} . l^2$$

und ebenso die elektromotorische Kraft, welche durch *Induction* von den *elektrischen Bewegungen* in demselben Stücke auf denselben Punkt ausgeübt wird, nämlich aus dem Werthe von U,

$$- \frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = - \frac{16}{cc} . \frac{di}{dt} . \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{cc} . \frac{d^3 i}{dx^2 dt} . l^2 .$$

Endlich kann, wenn man mit Kirchhoff für den Werth von $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl annimmt,

$$-2\frac{d\Omega}{dx} = -4\frac{dE}{dx}.\log\frac{l}{\alpha}$$

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}.\frac{di}{dt}.\log\frac{l}{e\alpha}$$

oder auch, wenn 1 gegen $\log\frac{l}{\alpha}$ ganz verschwindet,

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}.\frac{di}{dt}.\log\frac{l}{\alpha}$$

gesetzt werden.

3.

Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen.

Nach näherer Bestimmung der auf einen Punkt (x, y, z) des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche theils von der freien Elektricität theils von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stücke des Leitungsdrahts, zu welchem jener Punkt selbst gehört, herrühren, hat Kirchhoff die Art. 1 aufgestellten allgemeinen Gleichungen unter folgenden Voraussetzungen zu vereinfachen gesucht, nämlich

1) dass der Halbmesser des Leitungsdrahts α im Vergleich mit der Länge seiner als cylindrisch zu betrachtenden Elemente l so klein sei, dass $\log\frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl darstelle, was schon im vorhergehenden Artikel zur Vereinfachung des Ausdrucks der elektromotorischen Kräfte angenommen wurde;

2) dass in einem solchen dünnen Leitungsdrahte die auf einen Punkt (x, y, z) wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des einzigen kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stückes, dessen mittelstem Querschnitte der Punkt (x, y, z) angehört, herrühren, verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem eben bezeichneten kleinen Stücke selbst herrühren. — Hiezu kommt noch die auch der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen Art. 1 schon zum Grunde gelegte Voraussetzung,

3) dass das Ohm'sche Gesetz für alle Stromelemente einzeln gelte, auch wenn die Stromintensitäten in denselben sehr verschieden sind und schnell wechseln.

Ist nun nach der *ersten* Voraussetzung $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl, und kommen nach der *zweiten* Voraussetzung die im vorigen Artikel näher bestimmten elektromotorischen Kräfte, gegen welche die übrigen von den ferner liegenden Stücken des Leitungsdrahts herrührenden verschwindend klein sind, allein in Betracht; so findet man nach dem Schlusse des vorigen Artikels den *vollständigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft* nach der Richtung der Axe des Leitungsdrahts

$$-2\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{dU}{dt}\right)=-4\log\frac{l}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Ist dieses nun der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, so giebt derselbe nach Art. 1 mit dem specifischen Leitungsvermögen k multiplicirt, der *dritten* Voraussetzung gemäss, die Stromdichtigkeit u nach der Richtung des Leitungsdrahts in dem betrachteten Punkte (x, y, z), nämlich

$$u=-4k\log\frac{l}{\alpha}\cdot\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Beachtet man endlich, dass die Stromdichtigkeit im Punkte (x, y, z) hienach von ϱ unabhängig, folglich für alle Punkte desselben Drahtquerschnitts gleich ist, und daher mit dem Drahtquerschnitt $\pi\alpha\alpha$ multiplicirt die Stromintensität i giebt; so erhält man durch Multiplication der vorhergehenden Gleichung mit $\pi\alpha\alpha$ folgende aus den sieben ersten Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen abgeleitete Gleichung:

$$i=-4\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Es bleiben also nur noch die beiden letzten von den Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen übrig, welche Art. 2 reducirt worden sind auf

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d.\varrho\sigma}{d\varrho}=-\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}$$
$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{de}{dt}.$$

Multiplicirt man die erstere mit $\varrho d\varrho d\varphi$ und integrirt sodann über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahts, und zieht endlich die mit $2\pi\alpha$ multiplicirte zweite Gleichung ab, so erhält man

$$\pi\alpha\alpha\cdot\frac{du}{dx}=-\pi\alpha\cdot\frac{de}{dt}-\pi\int_0^\alpha\varrho d\varrho\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Da nun aber, nach Art. 2 für $\varrho' = \varrho$,

$$2\pi\alpha e + 2\pi\int_0^\alpha \varrho d\varrho \,.\, \varepsilon = E\,,$$

woraus

$$2\pi\alpha \,.\, \frac{de}{dt} + 2\pi\int_0^\alpha \varrho d\varrho \,.\, \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dE}{dt}\,,$$

so ergiebt sich, da $\pi\alpha\alpha u = i$ war, woraus $\pi\alpha\alpha \,.\, \frac{du}{dx} = \frac{di}{dx}$ folgt, aus den beiden letzten Art. 1 entwickelten Gleichungen folgende:

$$\frac{di}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dt}\,.$$

Nach dieser Reduction der neun allgemeinen Gleichungen auf zwei, nämlich

$$i = -4\pi\alpha\alpha k \log\frac{l}{\alpha} \,.\, \left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$

$$\frac{di}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dt}$$

kann endlich, durch Elimination von i, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Vertheilung der freien Elektricität in der Kette E sich für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}} \,.\, \frac{dE}{dt} = 0\,,$$

oder es kann, durch Elimination von E, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Stromintensität i sich für jeden Punkt der Kette und für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2i}{dx^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}} \,.\, \frac{di}{dt} = 0\,.$$

Die Vertheilung der freien Elektricität, sowie die Stromintensitäten in allen Theilen des Leitungsdrahts würden sich aber, wie man leicht sieht, auch aus den *Bewegungen* aller elektrischen Theilchen im Leitungsdraht von selbst ergeben haben, wenn das Gesetz der letzteren bekannt wäre. Umgekehrt lässt sich nun dieses letztere Gesetz aus dem gefundenen Gesetz der Vertheilung und der Stromintensitäten leicht ableiten, wobei es genügt, dasselbe für die Bewegungen aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte aufzustellen, weil die entgegengesetzt gleichen Bewegungen aller *negativ* elektrischen Theilchen sich daraus von selbst ergeben.

Bezeichnet s irgend einen Punkt des Leitungsdrahts und $\mathfrak{E}ds$ die ganze Menge positiver Elektricität, welche in dem Längenelement des Leitungsdrahts ds enthalten ist, bezeichnet ferner σ die Verschiebung eines Theilchens dieser positiven Elektricität nach der Zeit t von der Stelle seines ursprünglichen Gleichgewichts, also $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieses Theilchen im Leitungsdrahte bewegt, und $\frac{d\sigma}{ds}$ die Verdünnung der positiven Elektricität im Punkte s des Leitungsdrahts am Ende der Zeit t, der eine ebenso grosse Verdichtung der negativen Elektricität immer entspricht; so ist die Stromintensität i im Punkte des Leitungsdrahts s am Ende der Zeit t dem Producte $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$ gleich, und die Dichtigkeit E der *freien Elektricität*, d. i. des Ueberschusses der positiven Elektricität über die negative im Elemente ds, am Ende der Zeit t, ist dem doppelten Producte $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{ds}$ negativ genommen gleich, also

$$i = \mathfrak{E}\,.\,\frac{d\sigma}{dt}\,, \quad E = -\,2\mathfrak{E}\,.\,\frac{d\sigma}{ds}\,.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehenden Gleichungen erhält man aber die beiden Gleichungen

$$\frac{d^3\sigma}{dt^3} - \frac{cc}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^2dt} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}}\,.\,\frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^3\sigma}{dsdt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^3} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}}\,.\,\frac{d^2\sigma}{dsdt} = 0$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass während des ursprünglichen Gleichgewichts der Elektricität σ im ganzen Leitungsdraht überall $= 0$ war, das Gesetz der Bewegung aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdraht folgt, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}}\,.\,\frac{d\sigma}{dt} = 0\,.$$

4.

Prüfung der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzungen.

Im Anfang des vorigen Artikels sind die zur Vereinfachung der Gleichungen gemachten Voraussetzungen zusammengestellt worden, wovon die eine schon der Art. 1 gegebenen Entwickelung zum Grunde gelegt war. Was zunächst nun die erste der Vereinfachung halber neu hinzugekommene Annahme betrifft, nämlich die Annahme eines sehr feinen Leitungsdrahts, so scheint dieselbe so nahe zu liegen, dass sie kaum einer näheren Prüfung bedürfe, sondern, wenn es sich um Vereinfachung handelt, sich von selbst verstehe; doch näher betrachtet sieht man leicht, dass diese Feinheit des Leitungsdrahts hiebei in solchem Grade in Anspruch genommen wird und werden muss, wie sie wirklich nie statt findet, so dass dadurch alle praktische Anwendbarkeit der daraus abgeleiteten Folgerungen zweifelhaft wird. Es kommt aber dazu noch das besondere Bedenken, ob nicht ausserdem diese Voraussetzung mit der der Entwicklung Art. 1 zum Grunde gelegten, das Ohm'sche Gesetz betreffenden, Voraussetzung in Widerspruch gerathe, weil letztere auf weniger feine Leitungsdrähte beschränkt werden zu müssen scheint.

Findet es nämlich bei linearen Leitern auch kein Bedenken, die Dicke des Leitungsdrahts gegen seine ganze Länge als verschwindend zu betrachten, so sagt es doch schon weit mehr, diese Dicke gegen die Länge eines einzelnen noch als geradlinig zu betrachtenden Elements des Leitungsdrahts als verschwindend zu betrachten, und noch weit mehr heisst es, den Logarithmus des Verhältnisses der Länge eines so kleinen Elements zu jener Dicke als eine grosse Zahl anzunehmen, gegen welche die Einheit als verschwindend zu betrachten sei, wie es in jener Voraussetzung geschieht. Denn nähme man auch z. B. nur die Zahl 20 als eine solche Zahl an, so würde schon ein Draht verlangt werden, dessen kleinstes noch als geradlinig zu betrachtende Stück über 200 Millionen Mal länger als dick sein müsste, was nicht vorkommt.

Noch wichtiger aber ist das andere Bedenken, ob nicht die Annahme eines so feinen Leitungsdrahts, wenn er existirte, mit der das Ohm'sche Gesetz betreffenden Voraussetzung in Widerspruch gerathen würde. Es muss jedenfalls wenigstens als zweifelhaft betrachtet werden, ob diese letztere Voraussetzung *allgemein und streng gültig*, oder ob sie nur *für weniger feine Drähte näherungsweise zulässig ist*, und dieser Zweifel kann, wie man leicht einsieht, nur durch eine von dieser Voraussetzung selbst unabhängige Entwickelung der elektrischen Bewegungsgesetze gehoben werden. Es soll daher eine solche Entwickelung zu geben versucht werden, wenigstens in so weit als es zur Prüfung des angeführten Bedenkens nöthig erscheint, unter vorläufiger Beibehaltung der ersteren Voraussetzung, nämlich eines so feinen Leitungsdrahts, dass der Logarithmus des Verhältnisses der Länge der noch als geradlinig zu betrachtenden Elemente zu ihrer Dicke so gross sei, dass die Einheit dagegen vernachlässigt werden könne. Diese Entwickelung beruht auf folgender Betrachtung.

Wenn alle Kräfte wirklich bekannt wären, welche auf die elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte wirken, und diese Kräfte sämmtlich nach bekannten mechanischen Maassen genau ausgedrückt wären, so würde *die Möglichkeit einer von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes ganz unabhängigen Entwickelung der Bewegungsgesetze* dieser elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte von selbst einleuchten; denn die Resultante aller auf irgend ein Theilchen wirkenden Kräfte dividirt durch die Beschleunigung des Theilchens in der Richtung der Resultante muss, wie bei allen Körpern, einen stets gleichen Quotienten geben, welcher in der allgemeinen Mechanik als *Masse des Theilchens* bezeichnet wird.

5.

Von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes unabhängige Herleitung der Bewegungsgleichung.

Hienach suchen wir also zunächst alle auf ein elektrisches Theilchen im Leitungsdraht wirkenden Kräfte aufzuzählen und nach mechanischem Maasse auszudrücken, nämlich

1) die aus der Nähe wirkenden, schon von Kirchhoff bestimmten elektrischen Kräfte, aus denen, unter der von der Feinheit des Leitungsdrahts gemachten Voraussetzung, für einen Punkt s des Leitungsdrahts die elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= -4 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$

resultirte. Diese elektromotorische Kraft ist die Differenz der beiden Kräfte, welche auf die positive und auf die negative elektrische Maasseinheit (wie sie in der Elektrostatik definirt wird) wirken würden, wenn sie sich in diesem Punkte befänden. Da diese beiden Kräfte, abgesehen davon dass sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich sind, so ergiebt sich dass die Hälfte jener elektromotorischen Kraft, nämlich

$$-2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$

die Kraft ist, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s

wirkt. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente des Leitungsdrahts ds enthalten ist, ist aber früher, im dritten Artikel, mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden, wobei zugleich bemerkt worden, dass $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt} = i$ und $- 2\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{ds} = E$ ist. Multiplicirt man daher obige Kraft mit der Zahl $\mathfrak{E}ds$ und substituirt die eben angegebenen Werthe, so erhält man die auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= 4\mathfrak{E}\mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) . ds .$$

Zu diesen schon vorher bestimmten Kräften müssen aber ferner noch

2) die von den ponderabelen Leitertheilchen auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübten Kräfte hinzugefügt werden, welche wir auf folgende Weise zu bestimmen suchen.

Nach dem Ohm'schen, für *beharrliche* Ströme bewiesenen, Gesetze ist, wie Art. 1 in der Note gezeigt worden, die von den ponderabelen Theilchen des Leitungsdrahtes unabhängige elektromotorische Kraft in einem Punkte der Kette $= \frac{u}{k}$, oder, da nach Art. 3 $\pi\alpha\alpha u = i$ ist, $= \frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$. Die *Beharrlichkeit* des Stromes, d. i. die gleichbleibende Geschwindigkeit der elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte, beweist aber, dass ausser dieser von den ponderabelen Theilchen unabhängigen elektromotorischen Kraft noch eine zweite an Grösse gleiche, an Richtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft vorhanden sein müsse, welche offenbar von der Wirkung der ponderabelen Leitertheilchen auf die Elektricität im Leiter herrühren muss, welche dadurch also

$$= - \frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$$

gegeben ist. Die Hälfte dieser elektromotorischen Kraft, nämlich

$$- \frac{i}{2\pi\alpha\alpha k}$$

ist dann, wie aus dem vorher Gesagten einleuchtet, die Kraft, welche von den ponderabelen Leitertheilchen auf jede positiv elektrische Maasseinheit in dem betrachteten Punkte s ausgeübt wird. Multiplicirt man daher diese Kraft mit der Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}ds$, die im Elemente ds enthalten sind, so findet man die von den ponderabelen Leitertheilchen auf die im Elemente ds enthaltene positive Elektricität ausgeübte Kraft, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, nämlich, wenn man auch hier, wie vorher, $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$ für i substituirt,

$$= -\frac{1}{2\pi aak} \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot ds \,.$$

Beachtet man endlich, dass die Fälle *nicht beharrlicher* Ströme von denen *beharrlicher* Ströme sich nur in solchen Beziehungen unterscheiden, die ihren Grund in Verschiedenheiten der Wechselwirkung *der elektrischen Theilchen unter einander* haben, wovon die aus der Wechselwirkung *der ponderabelen Leitertheilchen auf die elektrischen* herrührenden Kräfte in keiner unmittelbaren Abhängigkeit stehen, so scheint man berechtigt, das angegebene Gesetz zur Bestimmung dieser letzteren Kräfte, wenn es in allen Fällen *beharrlicher* Ströme gilt, als allgemein gültig, auch in den Fällen *nicht beharrlicher* Ströme anzunehmen.

Um alle Kräfte in Rechnung zu bringen, welche auf das betrachtete elektrische Theilchen im Leitungsdrahte wirken, fassen wir endlich

3) alle aus der Ferne wirkenden Kräfte, woher sie rühren mögen, zusammen, und begreifen darunter namentlich auch alle Kräfte, welche von der Wechselwirkung der Elektricität mit Ausnahme der in dem Elemente ds selbst enthaltenen, in welchem der betrachtete Punkt liegt, auf die Elektricität in dem betrachteten Punkte herrühren, welche von Kirchhoff als verschwindend klein angenommen worden sind. Die daraus entspringende elektromotorische Kraft im Punkte s bezeichnen wir, nach mechanischem Maasse, mit S, deren Hälfte dann mit $\mathfrak{E}ds$ multiplicirt die auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübte Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}Sds$$

giebt.

Da alle diese Kräfte nach mechanischem Maasse, das heisst in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderabelen Masseneinheit (der Masse eines Milligramms) in der Zeiteinheit (in der Zeit einer Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit (ein Millimeter in einer Secunde) ertheilt; so folgt daraus, nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser gleichgerichteten Kräfte dividirt durch die Beschleunigung, d. i. durch die Geschwindigkeit, welche diese Summe von Kräften der positiven Elektricität im Elemente ds, auf welche sie wirkt, während der Zeiteinheit ertheilen würde, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}\,,$$

die Definition der *Masse* der im Elemente *ds* enthaltenen positiven Elektricität, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, giebt.

Es ist bemerkenswerth, dass man hiedurch auf eine neue Art *absoluter Bestimmung einer Elektricitätsmenge* geführt wird, worüber folgende Bemerkung, zur Vergleichung dieser neuen Art *absoluter Bestimmung* mit den schon bekannten hier der Anwendung auf vorliegende Betrachtung wegen Platz finden möge.

Ordnet man nämlich die verschiedenen Arten *absoluter Bestimmungen* einer Elektricitätsmenge nach der Genauigkeit, welche sie in der Ausführung gestatten, so sind ohne Zweifel die *absoluten Bestimmungen auf galvanometrischem Wege* obenan zu stellen, durch welche eine als Bestandtheil des *neutralen Fluidums* vorhandene Elektricitätsmenge, die aus einem Raume in einen andern übergegangen ist, in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche bei der *galvanometrisch bestimmten Einheit der Stromintensität* während der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters geht. — Sodann folgen die *absoluten Bestimmungen auf dem Wege der elektrostatischen Messung*, durch welche eine vorhandene Menge *freier* Elektricität in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt. Diese Bestimmung findet nur auf *kleine* Elektricitätsmengen welche *frei* vorkommen, im Vergleich mit den galvanometrisch bestimmten grossen im neutralen Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen, Anwendung. — Besonders wichtig ist die Kenntniss des Verhältnisses der diesen beiden Bestimmungsweisen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, welche durch doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge sowohl auf galvanometrischem als auch auf elektrostatischem Wege gewonnen worden, nämlich des Verhältnisses $155370 \,.\, 10^6 : 1$ (siehe die vorhergehende Abhandlung Bd. V. S. 261). — Diesen beiden *absoluten Bestimmungsweisen* kann man nun noch als *dritte* diejenige hinzufügen, nach welcher eine vorhandene Elektricitätsmenge durch ihre *Masse* in Theilen des für alle Körper festgestellten Massenmaasses (Milligramm) ausgedrückt werden soll; wobei jedoch zu bemerken ist, dass bisher auf diese Weise noch keine vorhandene Elektricitätsmenge hat ausgedrückt werden können, weil noch kein Weg der Messung entdeckt worden ist, welcher auch nur näherungsweise zu einer solchen Kenntniss führte. In Folge davon mangelt auch noch gänzlich die Kenntniss des *Verhältnisses* der dieser Bestimmungsweise und den vorigen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, weil keine doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge auf diese verschiedenen Weisen ausgeführt werden konnte. Wäre dieses *Verhältniss* $= r:1$ bekannt, so würde aus der Zahl $\mathfrak{E}ds$ der elektrostatischen Maasseinheiten positiver Elektricität, die im Leiterelemente ds enthalten sind, die *Masse* dieser Elektricitätsmenge in *Milligrammen* ausgedrückt $= \frac{1}{r} \,.\, \mathfrak{E}ds$ erhalten werden.

Durch Einführung dieses Ausdrucks der *Masse* und Gleichsetzung derselben mit dem oben angegebenen *Quotienten* erhält man dann folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\frac{d^2\sigma}{dt^2}} \,.\, \left(4\mathfrak{E}\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha} \,.\, \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) ds - \frac{1}{2\pi\alpha\alpha k} \,.\, \mathfrak{E}\mathfrak{E} \,.\, \frac{d\sigma}{dt}\, ds + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}Sds\right) = \frac{1}{r}\mathfrak{E}ds\,,$$

oder, geordnet und $\frac{cc}{8\log\frac{l}{\alpha} \,.\, r\mathfrak{E}} = \lambda$ gesetzt,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2(1+\lambda)} \,.\, \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha} \,.\, (1+\lambda)} \,.\, \frac{d\sigma}{dt} = \frac{cc}{16\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha} \,.\, (1+\lambda)} \,.\, S\,.$$

6.

Vergleichung der Resultate.

In dieser allgemeineren Gleichung, sieht man, ist die Kirchhoff'sche oben entwickelte Gleichung mit enthalten, nämlich unter den beiden Voraussetzungen, dass $S = 0$ und $\lambda = 0$ sei; denn es ist alsdann

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2} \,.\, \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}} \,.\, \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

ganz in Uebereinstimmung mit der am Schlusse des dritten Artikels entwickelten Gleichung.

Es darf hiebei bemerkt werden, dass auf diese eben entwickelte allgemeinere Gleichung und deren Uebereinstimmung mit der Kirchhoff'schen, unter den angegebenen Voraussetzungen, sich die von Poggendorff zu Kirchhoffs Abhandlung in den Annalen 1857. Bd. 100. S. 351 hinzugefügte Note bezieht.

Die Voraussetzung, dass $S = 0$ sei, enthält nun aber nicht bloss im Allgemeinen die von Kirchhoff vorausgeschickte Annahme, dass keine elektromotorische Kraft von Aussen her auf die Elektricität im Leitungsdrahte wirken soll, sondern insbesondre auch die zweite von den im Anfang des dritten Artikels erwähnten Annahmen, dass nämlich alle von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des kleinen als Cylinder betrachteten Stücks, in dessen Mitte der betrachtete Punkt liegt, herrührenden elektromotorischen Kräfte verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen cylindrischen Stücke selbst herrühren.

Die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, kommt dagegen mit der von Kirchhoff angenommenen allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes überein. Zwar könnte es scheinen, dass $\lambda = \frac{cc}{8 \log \frac{l}{\alpha} . r\mathfrak{E}}$ für $\log \frac{l}{\alpha} = \infty$ verschwinde, und dass also die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, näherungsweise schon durch die Kirchhoff'sche Annahme, dass α gegen l verschwinde, erfüllt werde; es ist dies aber nicht der Fall, sondern es wird $\lambda = \infty$ wenn α verschwindet, wie man leicht daraus ersieht, dass die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthalten ist, $= \mathfrak{E}$, dem Quadrat des Halbmessers α proportional ist und, wenn man die constante Zahl der positiv elektrischen Masseneinheiten, welche in der *Volumeneinheit des Leitungsdrahts* enthalten ist, mit $\mathfrak{E}_0$ bezeichnet, durch

$$\mathfrak{E} = \pi\alpha\alpha . \mathfrak{E}_0$$

dargestellt wird, woraus folgt, dass das Product $\mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha} = \pi\mathfrak{E}_0 . \alpha\alpha \log \frac{l}{\alpha}$ mit α verschwindet und also $\lambda = \frac{cc}{8r . \mathfrak{E} \log \frac{l}{\alpha}}$ unendlich wird.

Es geht daraus hervor, dass das Ohm'sche Gesetz zwar näherungsweise bei *stärkeren* Leitungsdrähten, für welche α grössere Werthe hat, die von Kirchhoff angenommene allgemeinere Geltung haben könne, nämlich bei einem sehr kleinen Werthe des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0}$; dass dagegen bei *feineren* Leitungsdrähten, zumal wenn diese Verfeinerung so weit getrieben werden soll, dass $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl werde, das Ohm'sche Gesetz diese allgemeinere Geltung verlieren müsse, wonach also das oben ausgesprochene Bedenken über die Unvereinbarkeit der beiden im Anfang des dritten Artikels unter (1) und (3) angeführten Annahmen wohl begründet erscheint.

Es leuchtet dagegen umgekehrt ein, dass wenn auf dem Wege der Beobachtung Fälle von feineren Leitungsdrähten nachgewiesen werden könnten, wo dem Ohm'schen Gesetz diese allgemeinere Geltung nicht zukäme, sondern messbare Abweichungen hervorträten, aus denen λ bestimmbar würde, so würde dadurch eine Kenntniss des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0} = 8\pi\alpha\alpha \log\frac{l}{\alpha} \cdot \lambda$ gewonnen, und die Kenntniss des Verhältnisses $r:1$, d. i. der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten welche auf 1 Milligramm gehen, würde bloss noch von der Erforschung der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}_0$ abhängen, welche in 1 Cubikmillimeter des Leiters enthalten sind.

7.

Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche auf einen Punkt eines geschlossenen linearen Leiters von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leiter, mit Ausnahme desjenigen Elements, in welchem der betrachtete Punkt liegt, ausgeübt wird.

Wenn man die auf einen Punkt s des Leitungsdrahts aus der Ferne wirkenden Kräfte, welche sich nicht bestimmen liessen, sowohl diejenigen welche von entfernteren Theilen des Leitungsdrahts selbst, als auch diejenigen welche von Aussen her wirken, $= 0$ setzte, so ergab sich nach den Entwickelungen der vorhergehenden Artikel übereinstimmend folgende partielle Differentialgleichung für die Verschiebung σ des positiv elektrischen Theilchens im Punkte s:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - a\frac{d^2\sigma}{ds^2} + b\frac{d\sigma}{dt} = 0,$$

wobei nur der Unterschied statt fand, dass die Bedeutung der constanten Coefficienten a und b in dieser Gleichung nach Art. 3 von der nach Art. 6 ihnen zukommenden etwas verschieden war, ein Unterschied, der möglicher Weise aber gar nicht in Betracht kommt, wenn nämlich die Erfahrung ergeben sollte, dass der im vorigen Artikel mit $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0}$ bezeichnete Quotient für alle Arten von Leitern einen verschwindend kleinen Werth hätte.

Diese Uebereinstimmung macht aber obige Gleichung noch keineswegs geeignet, die Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich zu bestimmen; denn wenn es auch Fälle geben kann, wo keine elektromotorischen Kräfte von Aussen her auf die Elektricität im Leitungsdrahte wirken, so kann es doch keinen Fall geben, wo auch keine elektromotorischen Kräfte von den ferner liegenden Theilen des Leitungsdrahts selbst ausgeübt würden, wenn darin irgend eine Störung des Gleichgewichts der Elektricität statt gefunden hat. Um daher zu einer Gleichung zu gelangen die zur Bestimmung der Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich dienen kann, reicht die Art. 2 gegebene Entwickelung der elektromotorischen Kräfte, welche auf einen Punkt s des Leitungsdrahts von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen des einzigen Elements ds, zu welchem der Punkt s gehört, ausgeübt werden, nicht hin, sondern es müssen auch diejenigen elektromotorischen Kräfte noch entwickelt werden, welche auf den Punkt s von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in allen übrigen Theilen des Leitungsdrahts ausgeübt werden. Es bedürfen daher die aus obiger Gleichung von Kirchhoff abgeleiteten Folgerungen noch einer Prüfung in Beziehung auf den Einfluss dieser letzteren Kräfte.

Für die Entwickelung dieser Kräfte genügt es nun zwar, da es sich um Elemente ds, ds' des Leitungsdrahts handelt, deren Dimensionen gegen ihre Entfernung verschwindet, die Dichtigkeiten der freien Elektricität und die Stromintensitäten in denselben bloss nach ihren Gesammtwerthen für den ganzen Querschnitt E, E', i, i' zu betrachten, die blosse Functionen von s und t oder von s' und t sind. Es lassen sich diese Functionen aber in Beziehung auf s oder s', wie von selbst einleuchtet, nicht wie die in Art. 2, nach dem Taylor'schen Lehrsatze in Reihen entwickeln, da dieselben im ersten Augenblick $t = 0$ ganz willkührlich gegeben sein können, sondern man muss dieselben in Sinus- und Cosinusreihen darzustellen suchen.

Setzt man also für einen geschlossenen Leitungsdraht von der Länge $2\pi a$

$$E' = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns'}{a} + b_n \cos\frac{ns'}{a}\right)$$
$$i' = \Sigma\left(c_n \sin\frac{ns'}{a} + \partial_n \cos\frac{ns'}{a}\right)$$

worin für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so ergiebt sich nach Art. 1, wenn man die Entfernung der Punkte s und s' von einander mit r bezeichnet, und die Winkel, welche ds und ds' mit der Richtung von r bilden, mit θ und θ',

$$\Omega = \int \frac{E'ds'}{r} = \int \frac{ds'}{r}\, \Sigma \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a}\right)$$
$$U = \int \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' . i' = \int \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' . \Sigma \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + \mathfrak{d}_n \cos \frac{ns'}{a}\right).$$

Ausserdem hat man noch die Art. 3 gefundene Gleichung

$$\frac{di'}{ds'} = -\tfrac{1}{2} \frac{dE'}{dt},$$

oder, durch Sinus- und Cosinusreihen ausgedrückt,

$$\frac{1}{a}\, \Sigma n \left(c_n \cos \frac{ns'}{a} - \mathfrak{d}_n \sin \frac{ns'}{a}\right) = -\tfrac{1}{2}\, \Sigma \left(\frac{da_n}{dt} . \sin \frac{ns'}{a} + \frac{db_n}{dt} \cos \frac{ns'}{a}\right).$$

Es folgt hieraus, da diese Gleichung für alle Werthe von s' gelten soll,

$$c_n = -\frac{a}{2n} . \frac{db_n}{dt}, \quad \mathfrak{d}_n = +\frac{a}{2n} . \frac{da_n}{dt}.$$

Soll nun aus den gefundenen Ausdrücken für Ω und U die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche auf den Punkt s des geschlossenen Leitungsdrahts wirkt, so setze man $s' - s = \sigma$, und substituire $s + \sigma$ für s' und $d\sigma$ für ds' in den Ausdrücken von Ω und U. Man erhält alsdann

$$\Omega = \Sigma \int \frac{d\sigma}{r} \left(a_n \sin\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right)\right)$$
$$U = \Sigma \int \frac{d\sigma}{r} \cos\theta \cos\theta' . \left(c_n \sin\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right) + \mathfrak{d}_n \cos\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right)\right).$$

Entwickelt man hierin den Sinus und Cosinus der Summe, so erhält man

$$\Omega = \Sigma \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} . d\sigma}{r} + \Sigma \left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} . d\sigma}{r}$$
$$U = \Sigma \left(c_n \cos \frac{ns}{a} - \mathfrak{d}_n \sin \frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} + \Sigma \left(c_n \sin \frac{ns}{a} + \mathfrak{d}_n \cos \frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}.$$

Hierin sind r, $\cos\theta$ und $\cos\theta'$ Functionen von σ, welche sich aus der Gleichung der Curve des Leitungsdrahts ergeben. Es folgt daraus, dass für jede Stellenzahl n die vier zwischen den Grenzen von $\sigma = \frac{1}{2} l$ bis $\sigma = 2\pi a - \frac{1}{2} l$ (wenn l die Länge desselben Stücks des Leitungsdrahts wie Art. 2 bezeichnet) zu nehmenden Integrale

$$\int \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos\theta \cos\theta \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}$$

durch die Gestalt der Leitercurve gegeben und bestimmt sind, deren Werthe daher kurz mit

$$N,\ N',\ M,\ M'$$

bezeichnet werden sollen. Man hat alsdann

$$\Omega = \Sigma\left((a_n N' - b_n N)\sin\frac{ns}{a} + (a_n N + b_n N')\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$U = \Sigma\left((c_n M' - \mathfrak{d}_n M)\sin\frac{ns}{a} + (c_n M + \mathfrak{d}_n M')\cos\frac{ns}{a}\right),$$

woraus nun die elektromotorischen Kräfte bestimmt werden können, nämlich

$$-2\,\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\,\Sigma n\left((a_n N' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N')\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$-\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt} = -\frac{8}{cc}\,\Sigma\left(\left(\frac{dc_n}{dt}.M' - \frac{d\mathfrak{d}_n}{dt}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{dc_n}{dt}.M + \frac{d\mathfrak{d}_n}{dt}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$

oder, wenn in der letzteren Gleichung die oben gefundenen Werthe von c_n und $\mathfrak{d}_n$ substituirt werden,

$$-\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

8.

Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter auf dem Art. 4—5 bezeichneten Wege sind zunächst alle Kräfte aufzuzählen, welche auf die positive Elektricität in einem Elemente *ds* des Leitungsdrahts wirken und die Grösse dieser Kräfte nach mechanischem Maasse auszudrücken.

1) Die *aus der Nähe* auf den Punkt *s* des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse von Art. 2 gefunden worden:

$$-2\,\frac{d\Omega}{ds} = -4\,\frac{dE}{ds}.\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{4}\,\frac{d^3E}{ds^3}.l^2$$
$$-\frac{8}{cc}\,\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}\,\frac{di}{dt}.\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{cc}\,\frac{d^3i}{ds^2dt}.l^2.$$

Hierin kann nun aber nach dem vorhergehenden Artikel

$$E = \Sigma\left(a_n\sin\frac{ns}{a} + b_n\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}.\cos\frac{ns}{a}\right)$$

substituirt werden, folglich

$$-2\,\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{4}{a}\,\Sigma\left(n\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{16}\,\frac{n^3l^2}{a^2}\right)\left(a_n\cos\frac{ns}{a} - b_n\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$-\frac{8}{cc}\,\frac{dU}{dt} = \frac{8}{cc}\,\Sigma\left(\frac{a}{n}\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{16}\,\frac{nl^2}{a}\right)\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}.\cos\frac{ns}{a}\right).$$

2) Die *aus der Ferne* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse des vorhergehenden Artikels gefunden worden:

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Aus der Nähe und aus der Ferne zusammen genommen sind also die elektromotorischen Kräfte, wenn

$$N' + 2\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2} = N''$$

$$M' + 2\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2} = M''$$

gesetzt wird,

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N'' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Diese elektromotorischen Kräfte sind nun die Differenzen derjenigen Kräfte, welche auf die positive und negative elektrische Maasseinheit in dem Punkte s wirken. Da aber die auf die positive Maasseinheit wirkende Kraft der auf die negative Maasseinheit wirkenden, abgesehen von ihrer entgegengesetzten Richtung, gleich ist, so folgt hieraus, dass die Hälfte jener elektromotorischen Kräfte diejenigen Kräfte sind, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s wirken. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente ds des Leitungsdrahts enthalten sind, ist aber Art. 3 mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden; multiplicirt man daher die Hälfte der obigen elektromotorischen Kräfte mit $\mathfrak{E}ds$, so findet man die Kräfte, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirken, nach mechanischem Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{\mathfrak{E}ds}{a}\Sigma n\left((a_n N'' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$+\frac{2a\mathfrak{E}ds}{cc}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

3) Die von den *ponderabelen Leitertheilchen* herrührende Widerstandskraft, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkt, war Art. 5 nach mechanischem Maasse ausgedrückt gefunden worden

$$= -\frac{1}{2\pi\alpha\alpha k}.\mathfrak{E}\mathfrak{E}.\frac{d\sigma}{dt}ds,$$

worin

$$\frac{\mathfrak{E}d\sigma}{dt} = i = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\,.\,\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\,.\,\cos\frac{ns}{a}\right),$$

wonach diese Kraft erhalten wird:

$$= + \frac{a\mathfrak{E}ds}{4\pi\alpha\alpha k}\,.\,\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\,.\,\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\,.\,\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Hiezu kommt endlich

4) die *von Aussen* her auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft, welche nach Art. 5 (3)

$$= + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}Sds$$

erhalten wird, wenn S hierin nur die von Aussen auf den Punkt s ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Wird nun S in Sinus- und Cosinusreihen entwickelt

$$S = \Sigma'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

so wird diese Kraft dargestellt

$$= + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}ds\,.\,\Sigma'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da nun alle diese Kräfte nach *mechanischem Maasse*, d. h. in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderabelen Masseneinheit (Milligramm) in der Zeiteinheit (Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt, so folgt daraus nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser Kräfte dividirt durch die von ihnen der positiven Elektricität im Elemente ds, auf die sie wirken, ertheilte Beschleunigung, $= \frac{d^2\sigma}{dt^2}$, die Definition der *Masse* dieser Elektricitätsmenge, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, ist, welche Art. 5 durch $\frac{1}{r}\mathfrak{E}ds$ Milligramm bezeichnet worden. Multiplicirt man die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{\mathfrak{E}ds}\,.\,\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ und setzt

$$\mathfrak{E}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

so erhält man die gesuchte Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leitungsdrahte in folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l}
-\frac{1}{a}\Sigma n\left((a_nN''-b_nN)\cos\frac{ns}{a}-(a_nN+b_nN'')\sin\frac{ns}{a}\right)\\
+\frac{2a}{cc}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M-\frac{d^2a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)\\
+\frac{a}{4\pi\alpha\alpha k}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)+\frac{1}{2}\Sigma'\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right)
\end{array}\right\} = -\frac{a}{2r\mathfrak{E}}.\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a}-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da N, N'', M, M'' bloss von der Gleichung der Leitercurve abhängen, so können sie als Functionen von s dargestellt werden. In dem einzigen Falle, wenn jene Curve ein *Kreis* ist, hat jede von diesen Grössen einen für alle Punkte s *gleichen Werth* und es lässt sich dann die obige Gleichung in die folgenden beiden einfacheren Gleichungen auflösen, nämlich, wenn $\frac{cc}{4M''r\mathfrak{E}} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n = \frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{n^2c^2N}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n = -\frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2a_n}{dt^2} - \frac{n^2c^2N}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n .$$

Es wird hiedurch die Betrachtung des Falls einer *kreisförmigen Leitercurve* sehr vereinfacht und verdient deshalb besondre Berücksichtigung. In allen andern Fällen würden, bei weiterer Entwickelung, N, N'', M, M'' als Functionen von s ebenfalls in Sinus- und Cosinusreihen dargestellt werden müssen, wodurch die Gleichungen sehr an Einfachheit verlören.

9.

Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern von beliebiger Gestalt.

Es kommen häufig Betrachtungen und Anwendungen geschlossener Ketten vor, für welche die Kenntniss der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in einzelnen Punkten der Kette nicht erfordert wird, sondern die Kenntniss ihres *Mittelwerths* für die ganze Länge des Leitungsdrahts genügt. Bevor daher auf eine speciellere Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem *kreisförmigen* Leitungsdrahte eingegangen wird, sollen die eben gefundenen angewendet werden, um die Gleichung für die *Mittelwerthe* der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern *von beliebiger Gestalt* daraus abzuleiten.

Diese Gleichung ergiebt sich, wenn man die Glieder der im vorigen Artikel gefundenen allgemeinen Gleichung mit ds multiplicirt und sie sodann von $s = 0$ bis $s = 2\pi a$ integrirt. Sie vereinfacht sich aber wesentlich dadurch, dass *erstens* der Integralwerth der elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität im Leitungsdrahte herrühren, nach einem bekannten Theoreme stets Null ist, und dass *zweitens* der Integralwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte in der Regel als gegeben betrachtet werden darf. Man erhält hienach *erstens*

$$\int_0^{2\pi a}\frac{ds}{a}\,\Sigma n\left((a_nN''-b_nN)\cos\frac{ns}{a}-(a_nN+b_nN'')\sin\frac{ns}{a}\right)=0$$

zweitens, wenn der gegebene Integralwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit S bezeichnet wird,

$$\int_0^{2\pi a}ds\,\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a}+g_n\cos\frac{ns}{a}\right)=S\,.$$

Da nun ferner, wenn

$$i_n=-\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\,.\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\,.\cos\frac{ns}{a}\right)$$

gesetzt wird, $i=\Sigma i_n$ war; so ergiebt sich

$$\int ds\,.\frac{2a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M-\frac{d^2a_n}{dt^2}M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$=-\frac{4}{cc}\int ds\,\Sigma M''\frac{di_n}{dt}-\frac{4a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\int\frac{d^2i_n}{dsdt}\,Mds\,.$$

Nun ist

$$\int\frac{d^2i_n}{dsdt}\,Mds=M\frac{di_n}{dt}-\int\frac{di_n}{dt}\,.\frac{dM}{ds}\,ds\,;$$

folglich

$$\int_0^{2\pi a}\frac{d^2i_n}{dsdt}\,Mds=-\int_0^{2\pi a}\frac{di_n}{dt}\,.\,\frac{dM}{ds}\,ds$$

wonach also

$$\int_0^{2\pi a}ds\,.\frac{2a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M''+\frac{d^2a_n}{dt^2}M\right)\sin\frac{ns}{a}+\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M-\frac{d^2a_n}{dt^2}M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$=-\frac{4}{cc}\int_0^{2\pi a}ds\,\Sigma M''\frac{di_n}{dt}+\frac{4a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\int_0^{2\pi a}\frac{di_n}{dt}\,.\,\frac{dM}{ds}\,ds\,.$$

Fügt man endlich hinzu, dass

$$\int\frac{ads}{4\pi\alpha\alpha k}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a}-\frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)=-\frac{1}{2\pi\alpha\alpha k}\,.\int ids$$
$$\int\frac{ads}{2r\mathfrak{E}}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a}-\frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right)=-\frac{1}{r\mathfrak{E}}\,.\int\frac{di}{dt}\,ds\,,$$

so erhält man folgende Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten $\frac{1}{2\pi a}\,.\,S$ und $\frac{1}{2\pi a}\,.\int_0^{2\pi a}ids$:

$$S = \frac{1}{\pi\alpha\alpha k} \cdot \int_0^{2\pi a} i ds + \frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} ds \Sigma M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{8a}{cc} \Sigma' \frac{1}{n} \int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds + \frac{2}{r\mathfrak{E}} \int_0^{2\pi a} \frac{di}{dt} ds .$$

Diese Mittelwerthe kommen nun offenbar dann vorzüglich in Betracht, wenn in den verschiedenen Elementen des Leitungsdrahts entweder gar keine Verschiedenheit der elektrischen Bewegung statt findet, oder eine so geringe, dass sie ganz vernachlässigt werden kann. In allen diesen Fällen sind also i und $\frac{di}{dt}$ von s unabhängige Grössen, und es kann $i = i_0$, $\frac{di}{dt} = \frac{di_0}{dt}$, folglich, für $n > 0$, $\frac{di_n}{dt} = 0$ gesetzt werden, wonach

$$S = \frac{2\pi a}{\pi\alpha\alpha k} i_0 + \left(\frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} \right) \frac{di_0}{dt} ,$$

wo $\frac{2\pi a}{\pi\alpha\alpha k} = w$ der Widerstand der ganzen Kette ist. Setzt man hierin

$$\frac{8}{cc} \int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} = p$$

und schreibt i für i_0, so erhält man

$$S = wi + p \frac{di}{dt} ,$$

worin S, i und $\frac{di}{dt}$ bloss Functionen der Zeit t sind. Durch Integration erhält man daraus

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{w}{p}t} . \int e^{\frac{w}{p}t} . Sdt .$$

10.

Bewegungsgesetze der Elektricität in einem kreisförmigen Leitungsdrahte.

Wenn die Form eines geschlossenen Leiters gegeben ist, so lassen sich die Werthe von N, N', M, M', d. h. die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\theta \cos\theta' \cos \frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} ,$$

für jeden Punkt s des Leiters bestimmen. Zum Beispiel diene nun ein Leiter von der Form eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$ ist.

Bei dieser Kreisform ist der Abstand r zweier Punkte s und s' gleich der Sehne des Bogens $\frac{s'-s}{a} = \frac{\sigma}{a}$; es ist also

$$r = 2a \sin\frac{\sigma}{2a}.$$

Ferner ist der Winkel θ, welchen das Element ds mit r bildet, dem Winkel θ' gleich, welchen das Element ds' mit r bildet, und beide sind dem Winkel gleich, welchen die Tangente des Kreises im Punkte s mit der Sehne des Bogens $\frac{\sigma}{a}$ bildet, d. i.

$$\theta = \theta' = \frac{\sigma}{2a}.$$

Hieraus ergiebt sich also

$$N = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \frac{\sin\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}}, \qquad N' = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \frac{\cos\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}},$$

$$M = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2 .\sin\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N - \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \sin\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\,d\sigma$$

$$M' = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2 .\cos\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N' - \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a-\frac{1}{2}l} \cos\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\,d\sigma.$$

Setzt man nun $\frac{\sigma}{2a} = z$, also

$$N = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi-\frac{l}{4a}} \frac{\sin 2nz\,.\,dz}{\sin z},\quad N' = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi-\frac{l}{4a}} \frac{\cos 2nz\,.\,dz}{\sin z},\quad M = N - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi-\frac{l}{4a}} \sin 2nz\,.\sin z dz,\quad M' = N' - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi-\frac{l}{4a}} \cos 2nz\,.\sin z dz,$$

und beachtet dabei, dass

$$\int\frac{\sin 2nz\,.\,dz}{\sin z} = 2\int\cos(2n-1)z\,.\,dz + 2\int\cos(2n-3)z\,.\,dz + \ldots + 2\int\cos z dz$$

$$\int\frac{\cos 2nz\,.\,dz}{\sin z} = -2\int\sin(2n-1)z\,.\,dz - 2\int\sin(2n-3)z\,.\,dz - \ldots - 2\int\sin z dz + \int\frac{dz}{\sin z}$$

ist, so findet man, wenn man alle Integrale zwischen den Grenzen von $z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ nimmt,

$$N = 0$$
$$N' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\,l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a}\,.$$

Ferner findet man, da

$$\int \sin 2nz\,.\,\sin z dz = \frac{1}{2\,(2n-1)}\sin(2n-1)\,z - \frac{1}{2\,(2n+1)}\sin(2n+1)\,z$$
$$\int \cos 2nz\,.\,\sin z dz = \frac{1}{2\,(2n-1)}\cos(2n-1)\,z - \frac{1}{2\,(2n+1)}\cos(2n+1)\,z\,,$$

wenn auch diese Integrale zwischen den Grenzen von $z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ genommen werden,

$$M = 0$$
$$M' = N' + \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Hieraus folgt endlich nach Art. 8

$$N'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}$$
$$M'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Es bezeichnet aber hierin l die Länge des als geradlinig betrachteten Leiterelements ds, in dessen Mitte der betrachtete Punkt s liegt. Diese Länge ist innerhalb gewisser Grenzen willkührlich, nur ist die Wahl derselben dadurch beschränkt, dass sowohl $\frac{\alpha}{l}$ als auch $\frac{l}{a}$ als verschwindend kleine Brüche müssen betrachtet werden können, was der Fall sein muss, wenn der Leiter als ein *linearer* betrachtet werden soll. Die Verschiedenheit der Werthe von l, die innerhalb dieser Grenzen möglich sind, haben auf die Werthe von N'' und M'' keinen merklichen Einfluss. Es kann daher

$$l = \sqrt{a\alpha}$$

gesetzt werden, da dieser Werth bei jedem als *linear* zu betrachtenden Leiter innerhalb der angegebenen Grenzen liegen muss. Zugleich leuchtet ein, dass alsdann auch $\frac{l}{8a}$ für $\operatorname{tang}\frac{l}{8a}$ gesetzt werden kann. Setzt man noch Kürze halber

$$\frac{n^2\alpha}{8a} = 2\log\nu$$
$$\frac{n^2\alpha}{8a} + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} = 2\log\mu$$

so ergiebt sich

$$N'' = -4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{\nu\alpha}$$
$$M'' = -4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{\mu e\alpha}\,.$$

Substituirt man nun die hier für einen kreisförmigen Leiter gefundenen Werthe von N, N'', M, M'' in die Gleichungen am Schlusse des 8ten Artikels, so erhält man für die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter folgende beiden Gleichungen

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n = 0$$

worin N'' und M'' die eben angegebenen Werthe haben.

11.

Gleichgewicht der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Für den Fall des Gleichgewichts der Elektricität hat man in allen Theilen des Leiters

$$i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{di}{dt} = 0\ .$$

Setzt man für i seinen Werth aus Art. 8 (3), so erhält man

$$-\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

$$-\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

woraus folgt

$$\frac{da_n}{dt} = 0\ , \quad \frac{db_n}{dt} = 0\ , \quad \frac{d^2a_n}{dt^2} = 0\ , \quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0\ ,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt} = \frac{1}{n}\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0$ sein müsse auch für $n = 0$.

Die am Schlusse des vorhergehenden Artikels aufgestellten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende *Gleichgewichtsgleichungen* über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{nN''}{a} \cdot a_n - \tfrac{1}{2}g_n = 0$$

$$\frac{nN''}{a} \cdot b_n + \tfrac{1}{2}f_n = 0$$

wozu noch $g_0 = 0$ hinzukommt. Es folgt hieraus als Bedingung des Gleichgewichts der Elektricität, dass die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte, nämlich

$$S = \int ds\, \Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

sein müsse, ganz in Uebereinstimmung mit dem bekannten Ohm'schen Gesetze, wonach die Stromintensität der Summe dieser Kräfte proportional ist und daher nur zugleich mit dieser Summe Null werden kann.

12.

Beharrliche Strömungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Eine *beharrliche* Strömung wird die Bewegung der Elektricität in einem Leiter genannt, wenn sie in jedem Punkte des Leiters immer gleich bleibt. Sie ist nur in einem geschlossenen Leiter möglich. Findet also eine solche *beharrliche* Strömung statt, so hat man für alle Punkte des geschlossenen Leiters

$$i = \mathrm{Const}\,,$$

folglich

$$\frac{di}{dt} = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0\,,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0\,,\quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0\,,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n}\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0$, auch für $n = 0$, sein müsse.

Die am Schlusse von Art. 10 angeführten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende Bedingungsgleichungen für *beharrliche* Strömungen über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{1}{4\pi\alpha\alpha k}\cdot\frac{da_n}{dt} + \frac{n^2N''}{aa}\cdot a_n - \frac{n}{2a}g_n = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\alpha\alpha k}\cdot\frac{db_n}{dt} + \frac{n^2N''}{aa}\cdot b_n + \frac{n}{2a}f_n = 0$$

wozu noch $\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt} = \mathrm{Const}$ für $n = 0$, folglich $a_0 = \mathrm{Const}$ hinzukommt. Hieraus folgt, dass bei *beharrlicher* Strömung die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte

$$S = \int ds\,\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right) = \frac{2}{a}\int ds\,\Sigma nN''\left(a_n\cos\frac{ns}{a} - b_n\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$- \frac{a}{2\pi\alpha\alpha k}\int ds\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

sein soll; folglich, da

$$-\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{o} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = i$$

und da

$$\int ds \Sigma n N'' \left(a_n \cos \frac{ns}{a} - b_n \sin \frac{ns}{a}\right) = 0$$

ist, wie man leicht sieht wenn man beachtet, dass a_0 einen constanten Werth hat und folglich $na_n = 0$ ist für $n = 0$,

$$S = \frac{1}{\pi \alpha \alpha k} \cdot \int ids \ .$$

Nun ist aber $\frac{1}{2\pi a} \cdot \int ids = J$ der *Mittelwerth der Stromintensität im ganzen Leiter*, und $\frac{2\pi a}{\pi \alpha \alpha k} = w$ ist der *Widerstand des ganzen Leiters;* folglich $S = Jw$, d. i. die Summe der äusseren elektromotorischen Kräfte im ganzen Leiter soll dem Producte des Widerstands in die mittlere Stromintensität des ganzen Leiters gleich sein, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze, dass das Product des Widerstands in die Stromstärke die elektromotorische Kraft der Kette giebt, was mit obigem Resultate identisch ist, wenn man dabei voraussetzt, dass gar keine Verschiedenheiten der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten des Leiters statt finden. Dies braucht nun zwar nach obiger Theorie nicht nothwendig der Fall zu sein; soll aber eine Verschiedenheit der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten mit der Beharrlichkeit des Stroms in jedem einzelnen Punkte bestehen, so müssen nach obiger Theorie die von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte *mit der Zeit proportional* sich ändern, ein Fall der in der Wirklichkeit nicht vorkommt und daher bei dem auf die Erfahrung begründeten Ohm'schen Gesetze ausser Betracht geblieben ist. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn

$$i = -\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a}\right)$$

in verschiedenen Punkten des Leiters verschiedene Werthe haben soll, wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von n entweder $\frac{da_n}{dt}$ oder $\frac{db_n}{dt}$ einen von Null verschiedenen Werth $= A$ haben müsste, woraus entweder $a_n = At + B$ oder $b_n = At + B$ folgte. Substituirt man nun im einen Falle $At + B$ für a_n in der ersten von den beiden oben gefundenen Bedingungsgleichungen beharrlicher Strömung, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi \alpha \alpha k} \cdot A + \frac{n^2 N''}{aa}(At + B) - \frac{n}{2a} g_n = 0 \ ,$$

woraus folgt, dass g_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. Substituirt man im andern Falle $At + B$ für b_n in der zweiten Bedingungsgleichung, so folgt auf gleiche Weise, dass f_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. In beiden Fällen würde also auch die von Aussen wirkende elektromotorische Kraft

$$S_n = f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}$$

mit der Zeit proportional sich ändern.

13.

Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Die Theorie der Bewegung der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem Leiter umfasst die wichtige Lehre von der *Fortpflanzung*, insbesondre die Fragen, ob die Bewegungsfortpflanzung durch die Elektricität in Leitern, ebenso wie die durch den Lichtäther oder durch die Luft, von *Wellen* vermittelt werde, ferner welche *Geschwindigkeit* diese Wellen besitzen, und endlich überhaupt welche *Gesetze* von dieser Wellenverbreitung gelten. Die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts kann nämlich auf einen kleinen Theil des Leiters beschränkt sein, und wenn darauf, ohne äussere Einwirkung, *ähnliche* Störungen des Gleichgewichts *successiv* in allen übrigen Theilen des Leiters von selbst eintreten, so bezeichnet man diese Uebertragung mit dem Namen *Fortpflanzung*, und das Fortgepflanzte mit dem Namen *Welle*.

Soll die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleiben, so sind *alle von Aussen her stammenden Kräfte*, welche auf die Elektricität im Leiter wirken würden, $= 0$ zu setzen. Man erhält daher die Bewegungsgleichungen für diesen Fall, wenn man in den Gleichungen am Schlusse von Art. 10

$$f_n = 0 \quad \text{und } g_n = 0$$

setzt, nämlich folgende:

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n = 0 .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nun durch Integration, wenn

$$\frac{cc}{16\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} = \varepsilon$$

$$\frac{n^2c^2N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} = m^2 + \varepsilon^2$$

gesetzt wird,

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}.\sin m\,(t - A')$$
$$b_n = Be^{-\varepsilon t}.\sin m\,(t - B')\,,$$

wo A, A', B, B' die Integrationsconstanten sind, welche aus der gegebenen ursprünglichen Störung des Gleichgewichts zu bestimmen sind.

Ist nämlich die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter durch folgende Gleichung gegeben, wenn E_0 den Werth der Dichtigkeit E für $t = 0$ bezeichnet,

$$E_0 = \Sigma\left(a^0_n \sin\frac{ns}{a} + b^0_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

und die ursprünglichen Strömungen in allen Theilen des Leiters durch folgende Gleichung, wenn i_0 den Werth der Stromintensität i für $t = 0$ bezeichnet,

$$i_0 = -\frac{a}{2}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db^0_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da^0_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right),$$

worin a^0_n, b^0_n, $\frac{da^0_n}{dt}$, $\frac{db^0_n}{dt}$ bekannte Werthe haben, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe in obige Gleichung für $t = 0$

$$a^0_n = -A\sin mA'$$
$$b^0_n = -B\sin mB'$$

und, nachdem man obige Gleichungen differentiirt hat,

$$\frac{da^0_n}{dt} = mA\cos mA' - \varepsilon a^0_n$$
$$\frac{db^0_n}{dt} = mB\cos mB' - \varepsilon b^0_n\,.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich folgende Werthe der Integrationsconstanten:

$$A = \sqrt{\left(a^{0\,2}_n + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)^2\right)}$$
$$B = \sqrt{\left(b^{0\,2}_n + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)^2\right)}$$
$$A' = -\frac{1}{m}\,\text{arc sin}\,\frac{a^0_n}{A}$$
$$B' = -\frac{1}{m}\,\text{arc sin}\,\frac{b^0_n}{B}\,.$$

Setzt man die beiden letzteren Werthe in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\sin\left(mt + \text{arc}\sin\frac{a^0{}_n}{A}\right)$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\sin\left(mt + \text{arc}\sin\frac{b^0{}_n}{B}\right)$$

und hiemit das Gesetz der *Vertheilung der freien Elektricität* im Leiter:

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(A\sin\frac{ns}{a}\sin\left(mt+\text{arc}\sin\frac{a^0{}_n}{A}\right)+B\cos\frac{ns}{a}\sin\left(mt+\text{arc}\sin\frac{b^0{}_n}{B}\right)\right),$$

oder, wenn der Sinus der Summe zweier Bögen entwickelt wird,

$$E=\Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(a^0{}_n\sin\frac{ns}{a}\cos mt+\sqrt{(B^2-b^0{}_n{}^2)}\cos\frac{ns}{a}\sin mt+b^0{}_n\cos\frac{ns}{a}\cos mt+\sqrt{(A^2-a^0{}_n{}^2)}\sin\frac{ns}{a}\sin mt\right).$$

Setzt man nun

$$a^0{}_n = p + q \qquad b^0{}_n = p' + q'$$

$$\sqrt{(B^2 - b^0{}_n{}^2)} = p - q \qquad \sqrt{(A^2 - a^0{}_n{}^2)} = p' - q'$$

wodurch p, q, p', q' bestimmt werden, nämlich

$$p = \tfrac{1}{2}\left(a^0{}_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(a^0{}_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0{}_n + \frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$p' = \tfrac{1}{2}\left(b^0{}_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$q' = \tfrac{1}{2}\left(b^0{}_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0{}_n + \frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right),$$

so erhält man

$$E=\Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(q\sin\left(\frac{ns}{a}-mt\right)+p'\cos\left(\frac{ns}{a}-mt\right)\right) + \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(p\sin\left(\frac{ns}{a}+mt\right)+q'\cos\left(\frac{ns}{a}+mt\right)\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$E=\Sigma\sqrt{(p'p'+qq)}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a}-mt+\text{arc tg}\frac{p'}{q}\right)+\Sigma\sqrt{(pp+q'q')}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a}+mt+\text{arc tg}\frac{q'}{p}\right).$$

Auf gleiche Weise findet man das Gesetz der *Strömung der Elektricität* im Leiter, nämlich:

$$i=\Sigma\sqrt{(P'P'+QQ)}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a}-mt+\text{arc tg}\frac{P'}{Q}\right)+\Sigma\sqrt{(PP+Q'Q')}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{ns}{a}+mt+\text{arc tg}\frac{Q'}{P}\right)$$

worin P, Q, P', Q' folgende Werthe haben:

$$P = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0{}_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2+\varepsilon^2)\,a^0{}_n + \varepsilon\frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$Q = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0{}_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2+\varepsilon^2)\,a^0{}_n + \varepsilon\frac{da^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$P' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0{}_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2+\varepsilon^2)\,b^0{}_n + \varepsilon\frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right)$$

$$Q' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0{}_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2+\varepsilon^2)\,b^0{}_n + \varepsilon\frac{db^0{}_n}{dt}\right)\right).$$

14.

Vergleichung mit dem Ohm'schen Gesetze.

Es ist schon Art. 6 erörtert worden, wovon es abhänge, ob das von Ohm für *beharrliche* Ströme aufgestellte Gesetz auch auf *veränderliche* Ströme angewendet werden dürfe. Es hing dies von der Grösse $\lambda = \frac{cc}{8 \log \frac{l}{a} . r\mathfrak{E}}$ ab; überall wo diese Grösse in Betracht kommt und ihr Werth nicht verschwindet, findet das Ohm'sche Gesetz entweder gar keine oder nur eine approximative Anwendung. Diese Grösse λ ist Art. 8, mit Rücksicht auf den Art. 6 noch nicht berücksichtigten Einfluss, welchen entferntere Theile der Kette darauf haben, genauer bestimmt worden, nämlich $\lambda = \frac{cc}{4M''r\mathfrak{E}}$, wo der für $2 \log \frac{l}{a}$ in Art. 6 gesetzte Werth M'' genau definirt und Art. 10 für einen kreisförmigen Leiter bestimmt worden ist. Diese Grösse λ, oder, da der Werth des Factors $\frac{cc}{4M''}$ als bekannt betrachtet werden darf, die Grösse des Products $r\mathfrak{E}$, erlangt dadurch, dass sie über die Anwendbarkeit des Ohm'schen Gesetzes entscheidet, in der Lehre von der Bewegung der Elektricität in Leitern eine besondere Wichtigkeit, deren Grund sich aus der *physischen Bedeutung* des Products $r\mathfrak{E}$ leicht erkennen lässt.

Die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricitätsmenge ist nämlich, in der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit ausgedrückt, mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet und ihre *Masse in Milligrammen* $= \frac{1}{r}\mathfrak{E}$ gesetzt worden. Aus der Definition der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit (wonach nämlich diejenige Elektricitätsmenge zur Maasseinheit genommen wird, welche auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt, d. i. eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt) geht aber hervor, dass rr die Kraft ist, welche *ein Milligramm* positiver oder negativer Elektricität auf ein gleiches Milligramm Elektricität in der Einheit der Entfernung ausübt. Hieraus folgt, dass das Product $r\mathfrak{E}$ die Kraft bedeutet, welche *die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricität,* wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, auf *ein Milligramm* positiver Elektricität in der Einheit der Entfernung ausüben würde.

Durch die Art. 8 ff. gegebene Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem geschlossenen Leiter wird nun der Einfluss dieser Grösse λ oder des Products $r\mathfrak{C}$ näher bestimmt. Aus Art. 11 und 12 geht zunächst hervor, dass die Gesetze des *Gleichgewichts* und der *beharrlichen Ströme* der Elektricität in Leitern ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze sind, weil die Grösse λ oder $r\mathfrak{C}$ dabei gar nicht in Betracht kommt, während aus Art. 13 hervorgeht, dass die Gesetze der *Fortpflanzung*, oder im Allgemeinen die Gesetze aller nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen*, zunächst von den Werthen m und ε und dadurch mittelbar von λ oder $r\mathfrak{C}$ wesentlich abhängig sind. Es folgt daraus, dass von der Grösse λ oder dem Producte $r\mathfrak{C}$ (und dadurch also mittelbar, wenn die in der Längeneinheit eines Leiters enthaltene Elektricitätsmenge nach *elektrostatischer Maasseinheit* bekannt wäre, von der ganzen *Masse* der im Leiter vorhandenen Elektricität in Milligrammen) nur aus solchen Beobachtungen Kenntniss erlangt werden kann, welche bestimmte *Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze* in den nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen* der Elektricität in Leitern nachweisen.

Es leuchtet ein, welche Wichtigkeit *genauere Beobachtungen über Bewegungsänderungen oder über Bewegungsfortpflanzungen durch die Elektricität in Leitern* hiedurch gewinnen; denn gelänge es aus solchen Beobachtungen irgend eine *Abweichung vom Ohm'schen Gesetze* wirklich nachzuweisen, so würde dieses Resultat zur Kenntniss des Werths des Products $r\mathfrak{C}$ führen, das heisst zur Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf *ein Milligramm* Elektricität gehen, wenn die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene Zahl *elektrostatischer Maasseinheiten* bekannt ist.

Es sollen zunächst die Gesetze *elektrischer Wellenbewegungen* in kreisförmigen Leitern nach Art. 13 näher entwickelt werden, um zu prüfen, ob daraus ein bestimmter Leitfaden für die *Ausführung solcher Beobachtungen* entnommen werden könne; sodann, wenn dies nicht der Fall wäre, soll geprüft werden, worin der Grund davon liege, und ob es andere elektrische Bewegungen in kreisförmigen Leitern gebe, die sich besser als die *Wellenbewegung* dazu eigneten.

15.

Elektrische Wellenbewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Aus den Art. 13 entwickelten Gesetzen ergiebt sich, dass alle Bewegungen der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität nach einer beliebigen Störung des Gleichgewichts zu einer Reihe *vorwärts*, und zu einer Reihe *rückwärts* schreitender *Wellenzüge* sich gestalten, von denen der *erste Wellenzug* jeder der beiden Reihen aus zwei Wellen besteht, nämlich aus einer positiven und aus einer negativen, die zusammen die ganze Kreisperipherie einnehmen; der *zweite Wellenzug* jeder Reihe besteht aus vier abwechselnd positiven und negativen Wellen, die zusammen den ganzen Kreis einnehmen; der *dritte Wellenzug* aus sechs Wellen u. s. w.

Löst man nämlich die Summen, durch welche Art. 13 die Dichtigkeit der freien Elektricität E und die Stromintensität i dargestellt worden sind, in ihre Glieder auf und bezeichnet diese Glieder nach ihrer Stellenzahl n mit E_n und i_n, so ist

$$E_1 = \sqrt{(p'p' + qq)} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{p'}{q}\right) + \sqrt{(pp + q'q')} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{q'}{p}\right)$$

$$i_1 = \sqrt{(P'P' + QQ)} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{P'}{Q}\right) + \sqrt{(PP + Q'Q')} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{Q'}{P}\right),$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s - amt)$ proportional ändert enthalten, den *ersten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s + amt)$ proportional ändert enthalten, den *ersten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Der erste vorwärts schreitende Wellenzug besteht aber aus einer *positiven Welle*, welche im Augenblicke $t = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tang} \frac{p'}{q}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier positiver Elektricität hervorbringt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier negativer Elektricität hervorbringt. Beide Wellen zusammen nehmen aber die ganze Kreisperipherie ein. Dasselbe gilt von dem ersten rückwärts schreitenden Wellenzuge, welcher aus einer *positiven Welle* besteht, welche im Augenblicke $t = -\frac{1}{m} \operatorname{arc\,tang} \frac{q'}{p}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt.

Ferner ist

$$E_2 = \sqrt{(p'p'+qq)}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{2s}{a}-mt+\operatorname{arc\,tg}\frac{p'}{q}\right)+\sqrt{(pp+q'q')}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{2s}{a}+mt+\operatorname{arc\,tg}\frac{q'}{p}\right)$$

$$i_2 = \sqrt{(P'P'+QQ)}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{2s}{a}-mt+\operatorname{arc\,tg}\frac{P'}{Q}\right)+\sqrt{(PP+Q'Q')}\,.\,e^{-\varepsilon t}\sin\left(\frac{2s}{a}+mt+\operatorname{arc\,tg}\frac{Q'}{P}\right),$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s-\frac{1}{2}amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s+\frac{1}{2}amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Jener vorwärts schreitende Wellenzug besteht aus 4 Wellen, von denen im Augenblicke $t=\frac{1}{m}\operatorname{arc\,tang}\frac{p'}{q}$ die erste positive von $s=0$ bis $s=\frac{1}{2}\pi a$, die zweite negative von $s=\frac{1}{2}\pi a$ bis $s=\pi a$, die dritte positive von $s=\pi a$ bis $s=\frac{3}{2}\pi a$, die vierte negative von $s=\frac{3}{2}\pi a$ bis $s=2\pi a$ sich erstreckt. Dasselbe gilt von den 4 Wellen des rückwärts schreitenden Wellenzugs im Augenblicke $t=-\frac{1}{m}\operatorname{arc\,tang}\frac{q'}{p}$.

Auf gleiche Weise ergeben sich die dritten Wellenzüge beider Reihen aus E_3 und i_3 u. s. f.

Die *Intensitäten* dieser verschiedenen Wellenzüge, welche nach den Regeln der Wellenlehre proportional mit ii zu setzen sind, nehmen während der Fortpflanzung ab und zwar jeder Wellenzug in der Zeit t im Verhältniss

$$1 : e^{-2\varepsilon t}\,.$$

Diese Abnahme ist nach der Stellenzahl n der Wellenzüge verschieden, weil der Werth von ε mit dem Werthe von n sich ändert; denn es war

$$\varepsilon = \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)}$$

$$\lambda = \frac{cc}{4M''r\mathfrak{C}}$$

und hierin war nach Art. 10

$$M'' = -4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}+\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right)+2\log\frac{8a}{e\alpha}-\frac{1}{8}\frac{nn\alpha}{a}$$

$$+\frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}-\frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\,,$$

woraus, wenn $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein ist,

$$\text{für } n=1\,,\quad M''=2\log\frac{8a}{\alpha}-6{,}666\ldots$$

$$\text{für } n=2\,,\quad M''=2\log\frac{8a}{\alpha}-7{,}466\ldots$$

u. s. w. folgt. Bezeichnet w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters $= \frac{1}{\pi\alpha\alpha k}$, und wird $\lambda = 0$ gesetzt, d. h. beschränkt man sich auf diejenigen Fälle, wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so ergiebt sich in der Zeiteinheit eine Intensitätsabnahme in einem Verhältnisse, welches für die ersten Wellenzüge, für welche $n = 1$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 53{,}33\ldots}}$$

für die zweiten Wellenzüge, für welche $n = 2$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 59{,}733\ldots}}$$

ist, u. s. w. Man sieht hieraus, dass eine desto schnellere Abnahme statt findet, je grösser der Widerstand der Längeneinheit des Leiters, je dicker der Leiter im Vergleich zu seiner Länge und je grösser die Stellenzahl n des Wellenzugs ist, das heisst, je kleiner die Wellen sind.

16.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenzüge in einem kreisförmigen Leiter.

Es ergiebt sich, wie oben gezeigt, aus Art. 13, dass die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter nach jeder Störung des Gleichgewichts sich in Wellenzüge, deren Fortpflanzung durch einfache Gesetze bestimmt ist, auflösen lassen, ebenso, wie dies bei vielen andern Körpern der Fall ist. Bei manchen Körpern, wie z. B. bei der Luft in einer kreisförmigen Röhre, kommt aber noch hinzu, dass diese Wellenzüge durch die Fortpflanzung gar nicht verändert werden, dass namentlich keine Intensitätsabnahme statt findet, und dass ausserdem sämmtliche Wellenzüge *mit gleicher Geschwindigkeit* fortgepflanzt werden, woraus folgt, dass sämmtliche vorwärts schreitende, oder sämmtliche rückwärts schreitende Wellenzüge sich zu einem einzigen Wellenzuge *zusammensetzen*, der ebenfalls unverändert und mit der nämlichen Geschwindigkeit, wie die einzelnen Wellenzüge aus denen er besteht, fortgepflanzt wird. Ein solcher zusammengesetzter Wellenzug besteht aber aus *zusammengesetzten Wellen*, die an Grösse, Form und Intensität von einander sehr verschieden sein können. Solche *zusammengesetzte Wellen*, welche in Folge gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ihrer Bestandtheile immer auf gleiche Weise zusammengesetzt bleiben, haben als *Beobachtungsobject* eine besondre physische Bedeutung und werden *Wellen im engeren Sinne* genannt.

In diesem *engeren* Sinne würden also elektrische Wellen in einem kreisförmigen Leiter, in welchem das elektrische Gleichgewicht gestört worden ist, schon wegen der verschiedenen Intensitätsabnahme der verschiedenen elementaren Wellenzüge nicht statt finden, noch weniger aber, wenn den verschiedenen elementaren Wellenzügen auch noch *verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* zukommen.

Da die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, wo Wellen im engern Sinne statt finden, für die Kenntniss des *Fortpflanzungsmediums* von grösster Wichtigkeit ist, hat die Frage danach in Betreff der *Elektricität* besonderes Interesse erweckt, und es sollen daher die aus Art. 13 sich darüber ergebenden Resultate näher betrachtet werden.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* der verschiedenen elementaren Wellenzüge werden aus den Art. 13 entwickelten Formeln gleich der Zunahme oder Abnahme gefunden, welche s erhalten muss, wenn in den Werthen von E_n und i_n beim Wachsthum der Zeit t um 1 die Bogenwerthe unter dem Sinuszeichen unverändert bleiben sollen, d. i.

$$= \frac{ma}{n},$$

oder, wenn man für m seinen Werth aus Art. 13

$$m = \sqrt{\left(\frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} - \left(\frac{cc}{16\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)}\right)^2\right)}$$

setzt,

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2}\right)},$$

worin, wie oben, $w' = \frac{1}{\pi\alpha\alpha k}$ gesetzt ist. Beschränkt man sich auf die Fälle, wo $\lambda = 0$ gesetzt werden kann, das heisst wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so reducirt sich der Ausdruck dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}\right)},$$

worin die Werthe von N'' und M'' auf folgende Weise bestimmt werden:

$$N'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) - \frac{n^2\alpha}{8a}$$

$$M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) - \frac{n^2\alpha}{8a}$$
$$- 2 - \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

Hieraus ergiebt sich also, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die verschiedenen Wellenzüge nach Verschiedenheit ihrer Stellenzahl n verschieden ist, und es würde nur noch die Frage sein, ob die Differenzen dieser verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht unter gewissen Verhältnissen so klein wären, dass sie näherungsweise als verschwindend betrachtet werden dürften, und welches der Grenzwerth sei, dem sich dann alle diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten näherten.

Aus den angeführten Werthen ergiebt sich nun wirklich, dass so lange die Stellenzahl n nicht über diejenigen Werthe hinausgeht, für welche $\frac{nn\alpha}{a}$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden kann,

$$\frac{N''}{M''} = 1 + \frac{8nn}{(4nn-1)\,M''}$$

gesetzt werden darf. Für grosse Werthe von M'', für welche der Bruch $\frac{8nn}{(4nn-1)\,M''}$ gegen 1 verschwindet, und für kleine Werthe des Widerstands des ganzen Leiters, für welche der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}$ gegen 1 verschwindet*), ist daher $\frac{c}{\sqrt{2}}$ der gesuchte Grenzwerth, dem sich alle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nähern, und dieser Grenzwerth ist, für den gegebenen Werth $c = 439450 \,.\, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310740 \,.\, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

d. i. eine Geschwindigkeit von 41950 Meilen in der Secunde.

Diese Geschwindigkeit hat schon Kirchhoff für die Fortpflanzung elektrischer Wellen gefunden und bemerkt: »dass sie sowohl unabhängig von dem Querschnitt, als auch von der Leitungsfähigkeit des Drahts, als auch endlich von der Dichtigkeit der Elektricität wäre; auch dass ihr Werth von 41950 Meilen in einer Secunde sehr nahe dem der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume gleichkommt.« Könnte diese nahe Uebereinstimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen mit der des Lichtes als eine Andeutung eines inneren Zusammenhangs beider Lehren angesehen werden, so würde sie bei der

---

*) Der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}$ kann gegen 1 als verschwindend betrachtet werden, wenn für grosse Werthe von M'' diejenige Geschwindigkeit, welche nach *absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* den Widerstand des ganzen Leiters ausdrückt, d. i. $\frac{\pi c}{4}\,acw'$, im Verhältniss zur Geschwindigkeit c sehr klein ist.

grossen Wichtigkeit, welche die Erforschung eines solchen Zusammenhangs hat, das grösste Interesse in Anspruch nehmen. Es leuchtet aber ein, dass dabei vor Allem die wahre Bedeutung, die in Beziehung auf die Elektricität jener Geschwindigkeit zukommt, in Betracht gezogen werden muss, welche nicht der Art zu sein scheint, dass sich grosse Erwartungen daran knüpfen liessen.

Denn die Annäherung der wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit an jenen Grenzwerth, der mit der Geschwindigkeit des Lichts übereinstimmt, setzt, wie eben gezeigt worden, nicht bloss einen im Vergleich zu seiner Länge sehr dünnen Leitungsdraht voraus, sondern auch, dass dieser lange und dünne Leitungsdraht einen sehr kleinen Widerstand besitze. Es leuchtet hieraus ein, dass grössere Annäherung an jenen Grenzwerth nur selten, grössere Abweichungen davon sehr häufig vorkommen werden. Hierüber lässt sich am leichtesten eine Uebersicht durch Beispiele gewinnen.

Wir wählen zu Beispielen drei kreisförmige Kupferdrähte, deren Kreishalbmesser der Reihe nach

$$a = 1000\ , \qquad 1000000\ , \qquad 1000000 \text{ Millimeter}$$

und deren Querschnitt der Reihe nach

$$\pi\alpha\alpha = 1\ , \qquad 1\ , \qquad \tfrac{1}{10} \text{ Quadratmillimeter}$$

gross sei. Der Widerstand dieser Drähte, wie er durch Messung *nach absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* gefunden wird, kann (siehe Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 5 Art. 9) in runder Zahl $W = \frac{2\pi a}{\pi\alpha\alpha} \,.\, 2 \,.\, 10^6$ gesetzt werden. Nach bekannter Relation zwischen magnetischem und mechanischem Widerstandsmaasse ist aber $W = \frac{1}{4}\pi ccaw'$, oder $\frac{1}{128}a^2c^2w'^2 = \frac{W^2}{8\pi^2c^2}$, wonach

$$\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}\right)} = \frac{c'}{\sqrt{2}}\,.$$

Hienach ist folgende Tafel berechnet.

n		1. Draht $a = 1000$ $\pi aa = 1$ $W = 4.10^9.\pi$	2. Draht. $a = 1000000$ $\pi aa = 1$ $W = 4.10^{12}.\pi$	3. Draht. $a = 1000000$ $\pi aa = \frac{1}{10}$ $W = 4.10^{13}.\pi$
1	N''	$= 15,119$	$= 28,935$	$= 31,605$
	M''	$= 12,452$	$= 25,268$	$= 28,938$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,214$	$= 1,145$	$= 1,092$
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{11970000}$	$= 0,0166$	$= 1,2364$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,214$	$= 1,128$	$= -0,0443$
2	N''	$= 13,786$	$= 27,601$	$= 31,062$
	M''	$= 11,652$	$= 25,468$	$= 28,928$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,183$	$= 1,084$	$= 1,074$
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{52450000}$	$= 0,00408$	$= 0,3093$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,183$	$= 1,080$	$= 0,7644$
3	N''	$= 12,986$	$= 26,801$	$= 30,262$
	M''	$= 10,929$	$= 24,747$	$= 28,205$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,188$	$= 1,083$	$= 1,073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{103800000}$	$= 0,00192$	$= 0,1446$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,188$	$= 1,081$	$= 0,9283$
4	N''	$= 12,414$	$= 26,230$	$= 29,690$
	M''	$= 10,383$	$= 24,198$	$= 27,659$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,196$	$= 1,084$	$= 1,073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{166200000}$	$= 0,00113$	$= 0,0846$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,197$	$= 1,083$	$= 0,9889$
5	N''	$= 11,970$	$= 25,785$	$= 29,246$
	M''	$= 9,950$	$= 23,765$	$= 27,226$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,203$	$= 1,085$	$= 1,074$
	$\frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}$	$= \frac{1}{239000000}$	$= 0,00075$	$= 0,0559$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,203$	$= 1,084$	$= 1,0183$

Aus den Werthen von $\frac{c'c'}{cc}$ in dieser Tafel, welche die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\frac{c'}{\sqrt{2}}$ in Theilen des Quadrats des Grenzwerths $\frac{c}{\sqrt{2}}$ angeben, stellen sich beträchtliche Verschiedenheiten schon unter den ersten 5 Wellenzügen, auf welche die Tafel beschränkt ist, dar; bei dem dritten Draht hat $\frac{c'c'}{cc}$ für $n = 1$ sogar einen *negativen* Werth, es wird hier also der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten Wellenzugs *imaginär* und es lassen sich daher die Gesetze der Bewegungsänderungen in diesem Drahte nach einer Störung des Gleichgewichts gar nicht in Form fortgepflanzter Wellenzüge auffassen, sondern bedürfen einer andern Form, welche die Bewegungsänderungen als eine blosse Annäherung an den Gleichgewichtszustand darstellt, die mit dem Namen *Absorption* bezeichnet werden kann, und da sie für lange und dünne Leitungsdrähte von grossem Widerstande, namentlich also für Telegraphendrähte, von besonderer Wichtigkeit ist, nähere Betrachtung verdient.

17.

Absorption elektrischer Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Bei der Art. 13 gegebenen Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität, nämlich der Gleichungen

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{da_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\,a_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{db_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\,b_n = 0\ .$$

ist in den für a_n und b_n aufgestellten Ausdrücken

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\sin m\,(t - A')$$
$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\sin m\,(t - B')$$

vorausgesetzt worden, dass m einen reellen Werth erhielte, was aber nicht immer der Fall ist. Es lässt sich nämlich diese Voraussetzung, da, $\frac{1}{\pi\alpha\alpha k} = w'$ gesetzt,

$$m = \frac{n}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2}\right)}$$

war, auch so aussprechen, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} < \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

sein solle, oder wenn $\lambda = 0$

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2} < \frac{N''}{M''}.$$

Das Beispiel des dritten Drahts im vorigen Artikel zeigt dagegen, dass bei langen und dünnen Leitungsdrähten auch der Fall vorkommen kann, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2} > \frac{N''}{M''}$$

ist, woraus einleuchtet, dass alsdann die Integration obiger Differentialgleichungen unter der angeführten Form illusorisch wird und daher unter einer andern Form gesucht werden muss.

Setzt man alsdann zu diesem Zwecke

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}\right)},$$

so erhalten die beiden Differentialgleichungen folgende Form, nämlich

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{da_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\,a_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{db_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\,b_n = 0,$$

aus denen durch Integration

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\cdot\left(e^{m(t-A')} - e^{-m(t-A')}\right)$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\cdot\left(e^{m(t-B')} - e^{-m(t-B')}\right)$$

hervorgeht. Die Integrationsconstanten A, A', B, B' werden hierin auf gleiche Weise, wie es Art. 13 geschehen, aus den für $t = 0$ gegebenen Werthen von a^0_n, b^0_n, $\frac{da^0_n}{dt}$, $\frac{db^0_n}{dt}$, durch welche die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die ursprünglichen Strömungen ausgedrückt werden, gefunden. Man erhält auf diese Weise

$$Ae^{-mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)$$

$$Ae^{+mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)$$

$$Be^{-mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)$$

$$Be^{+mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t} - \left((\varepsilon-m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)\,t}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t} - \left((\varepsilon-m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)\,t}\right].$$

Setzt man endlich diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

so findet man die Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter für die hier betrachteten Fälle.

Ein solcher Fall kommt nun bei jedem kreisförmigen Leiter vor, wenn nämlich die gegebene ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen darin so beschaffen ist, dass der Werth von b^0_n oder $\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}$ für $n = 0$ nicht Null ist, und es ist daher dieser Fall von der Betrachtung Art. 15 ausgeschlossen worden, wo nur diejenigen Werthe von E_n und i_n erörtert wurden, welche für $n = 1, 2, 3 \ldots$ gelten. Ist nämlich $n = 0$, so leuchtet von selbst ein, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} > \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

ist und dass alsdann

$$m = \frac{1}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2c^2w'^2}{128M''^2(1+\lambda)^2}}$$

zu setzen ist. Nun war aber

$$\varepsilon = \frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)},$$

woraus folgt, dass für $n = 0$

$$m = \varepsilon$$

zu setzen ist.

Substituirt man nun diesen Werth von m in den oben angeführten Werthen von a_n und b_n, so erhält man

$$a_0 = a^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{da^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{da^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$
$$b_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{da_0}{dt} = \frac{da^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$
$$\frac{db_0}{dt} = \frac{db^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen

$$E_n = a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}$$

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

für $n = 0$, ein, so findet man

$$E_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt}\left(1 - e^{-2\varepsilon t}\right)$$

$$i_0 = -\frac{s}{2}\frac{db^0_0}{dt}e^{-2\varepsilon t} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0$$

wo $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0$ den Werth von $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)$ für $n = 0$ bezeichnet; folglich, da $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0 = \left(\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}\right)_0 . e^{-2\varepsilon t}$ ist, und da in der Gleichung

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

die Coefficienten von $\sin\frac{ns}{a}$ und $\cos\frac{ns}{a}$ stets endliche Werthe haben sollen, wonach für $n = 0$

$$\frac{da_0}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{db_0}{dt} = 0$$

sein müsse,

$$E_0 = b^0_0$$

$$i_0 = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}\right)_0 . e^{-2\varepsilon t} .$$

Hieraus ergiebt sich also, dass, wenn ein kreisförmiger Leiter ursprünglich seiner ganzen Länge nach gleichförmig mit freier Elektricität geladen ist, so dass jede Längeneinheit dieselbe Menge freier Elektricität $= b^0_0$ enthält, diese Ladung mit der Zeit t keine Aenderung erleidet, was auch von selbst unmittelbar einleuchtet. Ausserdem ergiebt sich aber, dass, wenn in demselben Leiter eine in allen Theilen gleiche Strömung ursprünglich vorhanden ist, diese vorhandene Strömung in dem Augenblicke, von dem an die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleibt, nicht verschwindet, sondern mit arithmetisch wachsender Zeit t nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe allmählig abnimmt. Leuchtet auch die Nothwendigkeit des allmähligen Verschwindens hiebei a priori ein, so liess sich doch a priori nicht übersehen, wie schnell es erfolgen müsse und welche Verschiedenheiten in dieser Schnelligkeit zwischen verschiedenen Leitern statt finden.

Es ist für manche praktische Fragen von Interesse, zu bestimmen, — wenn ein Strom von bestimmter Intensität i in einem geschlossenen Leiter in demjenigen Augenblicke vorhanden ist, von dem an die Elektricität im Leiter sich ganz selbst überlassen bleibt, weil von Aussen keine elektromotorische Kraft darauf wirkt, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein gegen den Leiter bewegter inducirender Magnet durch Anstossen in seiner Bewegung plötzlich gehemmt wird, — wie gross die positive oder negative Elektricitätsmenge sei, welche von dem angegebenen Augenblicke an durch jeden Querschnitt des Leiters noch hindurchgeht; so wie ferner zu bestimmen, wie lang die Zeit ist, welche von demselben Augenblicke an verfliessen muss, bis die Stromintensität vom Werthe i bis $\frac{1}{2}i$ abgenommen habe.

Ist $i = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}\right)_0$ für jenen Augenblick $t = 0$ gegeben, so ist die Stromintensität nach Verlauf der Zeit t

$$= i \, . \, e^{-2\varepsilon t} ,$$

was, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, die Menge der positiven Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehen würde. Die Menge der positiven Elektricität, welche im Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leiters geht, ist hienach

$$= i \, . \, e^{-2\varepsilon t}\, dt ,$$

und der von $t = 0$ bis $t = \infty$ hievon genommene Integralwerth giebt die ganze positive Elektricitätsmenge, welche von dem betrachteten Augenblicke an überhaupt noch durch jeden Querschnitt des Leiters hindurchgeht, nämlich

$$i\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, dt = \frac{1}{2\varepsilon} \, . \, i \, .$$

Die in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt gehende negative Elektricität ist eben so gross.

Ferner ergiebt sich zur Bestimmung der Zeit t, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werths herabsinkt, folgende Gleichung:

$$e^{-2\varepsilon t} = \tfrac{1}{2} ,$$

folglich $t = \frac{1}{2\varepsilon}$ log nat 2.

Nun war $\varepsilon = \frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)}$, worin, für $n = 0$, $M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha}$ zu setzen ist; folglich ist, $\lambda = 0$ gesetzt, jene durch den Querschnitt des Leiters gehende Elektricitätsmenge

$$\frac{1}{2\varepsilon} \,.\, i = \frac{16}{ccw'} \,.\, \log \frac{8a}{\alpha} \,.\, i = \frac{2}{W'} \log \frac{8a}{\alpha} \,.\, i\;,$$

wenn $W' = \frac{cc}{8} w'$ den Widerstand der Längeneinheit des Leiters nach magnetischem Maasse bezeichnet.

Die Zeit, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werthes herabsinkt, ist dann, in Secunden ausgedrückt,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \,.\, \log 2 = \frac{16}{ccw'} \,.\, \log \frac{8a}{\alpha} \,.\, \log 2 = \frac{2}{W'} \,.\, \log \frac{8a}{\alpha} \,.\, \log 2\;.$$

Für die Art. 16 als Beispiele angeführten Drähte ergeben sich hienach folgende Werthe:

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
$\frac{1}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{104607}$	$\frac{1}{60726}$	$\frac{1}{567584}$
$\frac{\log 2}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{150916}$	$\frac{1}{87609}$	$\frac{1}{818846}$

So klein hienach auch der Bruchtheil $\frac{1}{2\varepsilon}$ ist, den die von dem verschwindenden Strome durch den Querschnitt des Leiters geführte positive Elektricitätsmenge von derjenigen bildet, welche bei der ursprünglichen Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen würde, so könnte doch jene Elektricitätsmenge eine sehr starke *Ladung* des Leiters hervorbringen, wenn sie dazu verwendet würde. Denn wäre z. B. die ursprünglich vorhandene Stromintensität gleich der *magnetischen Maasseinheit* (bei welcher 1 Milligramm Wasser in $106\frac{2}{3}$ Secunde zersetzt wird), so würde die bei diesem Strome in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehende positive Elektricitätsmenge $155370 \,.\, 10^6$ *elektrostatische Maasseinheiten* betragen, und es würden, während der Strom im 1. Drahte verschwände, noch $\frac{155370}{104607} \,.\, 10^6$ d. i. fast $1\frac{1}{2}$ Million *elektrostatischer Maasseinheiten* positiver Elektricität durch jeden Querschnitt des Leiters geführt werden, d. i. etwa der 24. Theil der schwächsten, oder der 33. Theil der stärksten Ladung der kleinen *Leidener Flasche*, welche zu dem in der vorigen Abhandlung, im 5. Bande, beschriebenen Versuche gebraucht worden, wo jene Ladungen S. 254 näher bestimmt sind.

Man sieht leicht ein, dass ein ähnliches Verschwinden des in einem geschlossenen Leiter vorhandenen Stromes in dem Augenblicke eintritt, wo die Kette eines galvanischen Stroms gelöst wird, und dass dann die von dem verschwindenden Strome durch den mittelsten Querschnitt des

Leiters geführte positive Elektricitätsmenge wirklich zur *Ladung* der einen Hälfte des Leiters, sowie die in entgegengesetzter Richtung durch denselben Querschnitt geführte negative Elektricitätsmenge zur Ladung der andern Hälfte des Leiters verwendet wird, und dass durch diese entgegengesetzten Ladungen an der Stelle, wo die Kette durchbrochen wurde, der *Lösungsfunke* hervorgebracht wird, wo es von Interesse ist, die durch den *Lösungsfunken* entladenen *Elektricitätsmengen* kennen zu lernen.

Ebenso leuchtet die Wichtigkeit einer weiter auszuführenden Entwickelung der Gesetze des Stromverschwindens für die Bestimmung der dadurch auf andere Leiter ausgeübten Inductionskräfte ein, zumal für die Theorie der darauf gebauten *Ruhmkorff'schen* und anderer ähnlichen *Inductions-Maschinen*, für welche hiedurch eine Grundlage gegeben ist.

18.

Beziehung zur Wärmeleitung.

Die beiden im vorhergehenden Artikel für a_n und b_n gefundenen Gleichungen, nämlich

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t} - \left((\varepsilon-m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)\,t}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t} - \left((\varepsilon-m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)\,t}\right]$$

gehen für wachsende Werthe von t, wo endlich e^{-2mt} gegen 1 verschwindet, in die einfacheren Gleichungen über:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon+m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t}$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon+m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)\,t},$$

und setzt man diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma\,\frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0_n+\frac{da^0_n}{dt}\right)\sin\frac{ns}{a}+\left((\varepsilon+m)\,b^0_n+\frac{db^0_n}{dt}\right)\cos\frac{ns}{a}\right]e^{-(\varepsilon-m)\,t}$$

$$i = \frac{a}{4}\,\Sigma\frac{\varepsilon-m}{mn}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0_n+\frac{db^0_n}{dt}\right)\sin\frac{ns}{a}-\left((\varepsilon+m)\,a^0_n+\frac{da^0_n}{dt}\right)\cos\frac{ns}{a}\right]e^{-(\varepsilon-m)\,t}.$$

Man erkennt hieraus leicht, dass in denjenigen Fällen, wo $\frac{\varepsilon-m}{nn}=6$ ein von n unabhängiger Coefficient ist,

$$i = -\frac{aa6}{2}\,.\,\frac{dE}{ds}$$

$$\frac{di}{ds} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{dE}{dt}$$

erhalten wird, woraus durch Elimination von i

$$\frac{dE}{dt} = aa6\,\frac{d^2E}{ds^2}$$

folgt, eine Gleichung von der nämlichen Form wie die Gleichung für die Wärmeleitung in festen Körpern.

Nun war aber im vorigen Artikel

$$m = \frac{n}{a}\,.\,\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2}-\frac{N''}{M''(1+\lambda)}\right)}$$

gesetzt worden, worin $\frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)}=\varepsilon$ war, wonach also

$$m = \varepsilon\sqrt{\left(1-\frac{128N''M''(1+\lambda)}{a^2c^2w'^2}\,.\,nn\right)}\,.$$

In allen Fällen nun, wo die Werthe von $\frac{nn}{a^2c^2w'^2}$ und von $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein sind, kann hiefür gesetzt werden

$$m = \varepsilon\left(1-\frac{256\left(\log\frac{8a}{\alpha}\right)^2.\,(1+\lambda)}{a^2c^2w'^2}.\,nn\right)$$

woraus $\varepsilon-m=\frac{8}{aaw'}\log\frac{8a}{\alpha}.\,nn$, folglich

$$6 = \frac{8}{aaw'}\,.\,\log\frac{8a}{\alpha}$$

ein von n unabhängiger Coefficient ist.

Es ergeben sich hienach also für die Ladungsänderungen der Elektricität in den eben bezeichneten Fällen ähnliche Gesetze wie für die Wärmeleitung in festen Körpern, was schon von Thomson und Kirchhoff nachgewiesen worden ist. Es verdient jedoch dabei besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn auch der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die grösseren Wellenzüge, d. i. für kleinere Werthe von n, imaginär wird, und daher für diesen Theil der Bewegung andere Gesetze eintreten, die sich mehr oder weniger den

Gesetzen der Wärmeleitung in festen Körpern nähern, doch ein anderer Theil der Bewegung stets übrig bleibt, welcher kleinere Wellenzüge giebt, für welche grössere Werthe von n gelten, für die der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell bleibt und also die Art. 13 entwickelten Gesetze Gültigkeit behalten. Es finden also in einem solchen Leiter nach Störung des Gleichgewichts immer *Wellenzüge* statt, die mit bestimmten *Geschwindigkeiten* fortgepflanzt werden, aber es ist keine *reine Wellenbewegung* vorhanden, sondern sie ist mit andern Bewegungen vermischt, welche den der geleiteten Wärme ähnlichen Gesetzen unterworfen sind.

Beachtet man nun alle Verhältnisse, welche aus einer solchen Vermischung von Bewegungen hervorgehen, die ganz verschiedenen Gesetzen unterworfen sind, so leuchtet von selbst ein, dass die von Wheatstone beobachtete *Ungleichzeitigkeit der Funken* an zwei von einander sehr entfernten Unterbrechungsstellen eines solchen langen Leitungsdrahts durchaus keinen Schluss auf eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit gestattet, dass überhaupt die Wheatstone'sche Beobachtungsmethode, so sinnreich sie auch ist, und so werthvoll die damit erhaltenen Resultate in andern Beziehungen sein würden, wenn sie wirklich genau verbürgt werden könnten, doch unmittelbar zu dem vorliegenden Zwecke gar nicht geeignet ist, wie es überhaupt in keiner Weise gelingen wird, solche Beobachtungsmethoden ausfindig zu machen, mit denen die Gesetze aller Bewegungsänderungen der Elektricität in einem Leiter nach gestörtem Gleichgewichte *rein erfahrungsmässig* begründet werden könnten. Der Zweck der *Beobachtungen* wird daher hier darauf zu beschränken sein, die aus unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität abgeleiteten Gesetze zu *prüfen*. Deshalb war es nöthig, wie es in den vorhergehenden Artikeln versucht worden ist, diese Ableitung der Gesetze den zu ihrer Prüfung auszuführenden Beobachtungen vorauszuschicken, um so mehr, als die so aufgestellten Gesetze selbst *als Leitfaden* beim Suchen der zu ihrer Prüfung anzuwendenden *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* benutzt werden müssen.

19.

Schwingungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Was nun die *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* zur Prüfung der elektrischen Bewegungsgesetze betrifft, so leuchtet aus den bisher entwickelten Gesetzen zunächst von selbst ein, dass bei der ausserordentlich grossen *Geschwindigkeit,* mit der sich nach diesen Gesetzen die meisten *elektrischen Wellenzüge* in guten Leitern fortpflanzen sollen, und bei der aus denselben Gesetzen sich ergebenden schnellen *Dämpfung* dieser Wellenzüge genaue *Beobachtungen und Messungen zu directer Prüfung dieser Gesetze* auszuführen bei den durch die Sinneswerkzeuge allen Beobachtungen gesetzten Schranken kaum möglich sein dürfte. Eine genaue Ausführung von Messungen nimmt immer eine gewisse Zeit in Anspruch, die bei so flüchtigen Erscheinungen nicht dazu gestattet ist. Beachtet man daher, dass die feinsten Messungen in der Physik diejenigen sind, welche entweder *Gleichgewichtserscheinungen,* oder *beharrliche Bewegungen,* oder *periodisch regelmässig wiederkehrende Erscheinungen,* wie z. B. die Pendelschwingungen sind, betreffen; so liegt es sehr nahe, auch zur Prüfung der Gesetze der Bewegung der Elektricität in Leitern, abgesehen von *constanten Strömen,* eine Prüfungsmethode dieser Gesetze auf Beobachtungen *periodisch regelmässig wiederkehrender Bewegungen der Elektricität in Leitern* zu begründen, vorausgesetzt, dass sich Mittel zu feiner Ausführung solcher Beobachtungen finden lassen.

Periodisch regelmässig wiederkehrende Bewegungen der Elektricität können aber in einem Leiter nicht von selbst, sondern nur unter fortgesetzter Anregung äusserer elektromotorischer Kräfte, bestehen, und es bietet sich zu ihrer Hervorbringung die einfachste und für feinere Beobachtungen und Messungen zweckmässigste Methode in der schnellen Umdrehung eines kleinen Magnets um eine gegen seine magnetische Axe rechtwinkelige Drehungsaxe dar. Um aber einen Leitfaden zu zweckmässigen Einrichtungen für genaue Beobachtungen der so hervorgebrachten periodisch wiederkehrenden Bewegungen oder *Schwingungen* der Elektricität in einem Leiter zu gewinnen, soll zuvor versucht werden, die Gesetze solcher elektrischen Schwingungen in einem kreisförmigen Leiter aus den Art. 10 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln.

20.

Schwingungen durch Induction eines rotirenden Magnets.

Die elektromotorische Kraft, welche durch schnelle Umdrehung eines kleinen Magnets in der Nähe des kreisförmigen Leiters auf irgend einen Punkt des Leiters s *in einem bestimmten Augenblicke* ausgeübt wird, kann, wenn a den Halbmesser bezeichnet, dargestellt werden durch

$$\Sigma \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right),$$

wo f_n und g_n nur von der Stellenzahl n abhängig sind. Alle diese auf verschiedene Punkte des Leiters s wirkenden Kräfte sind aber bei gleichförmiger Drehung des Magnets einem gleichen periodischen Wechsel unterworfen, und zwar sind sie bei zweckmässiger Anordnung dem Sinus eines mit der Zeit gleichförmig wachsenden Winkels proportional. Alle diese Kräfte können *für einen beliebigen Augenblick*, am Ende der Zeit t, dargestellt werden durch

$$\sin \mu t \,.\, \Sigma \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right).$$

Hiemit erhält man, wenn man in den beiden partiellen Differentialgleichungen am Schlusse von Art. 10 für f_n und g_n, welche dort beliebige Functionen der Zeit bezeichneten, $f_n \sin \mu t$ und $g_n \sin \mu t$, worin f_n und g_n bestimmte von der Zeit unabhängige Werthe haben, einsetzt, die folgenden beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n \sin \mu t = 0$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n \sin \mu t = 0.$$

Nun sieht man leicht, dass wenn

$$a_n = p \sin(\mu t + \varrho)$$
$$b_n = q \sin(\mu t + \varrho)$$

gesetzt wird, p, q, ϱ sich so bestimmen lassen, dass die damit erhaltenen Werthe von a_n und b_n den beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Setzt man nämlich die obigen Werthe von a_n und b_n und die daraus abgeleiteten Werthe

$$\frac{da_n}{dt} = p\mu \cos(\mu t + \varrho)$$
$$\frac{db_n}{dt} = q\mu \cos(\mu t + \varrho)$$
$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = -p\mu\mu \sin(\mu t + \varrho)$$
$$\frac{d^2b_n}{dt^2} = -q\mu\mu \sin(\mu t + \varrho)$$

in die angeführten Gleichungen ein, so erhält man, wenn man Kürze halber $\frac{1}{\pi\alpha\alpha k} = w'$, und entweder, nach dem Ohm'schen Gesetze, $\lambda = 0$ setzt, oder M'' für $M''(1+\lambda)$ schreibt,

$$-p\mu\mu \sin(\mu t+\varrho) + \frac{p\mu ccw'}{8M''}\cos(\mu t+\varrho) + \frac{pn^2c^2N''}{2aaM''}\,.\,\sin(\mu t+\varrho) - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n \sin\mu t = 0$$
$$-q\mu\mu \sin(\mu t+\varrho) + \frac{q\mu ccw'}{8M''}\cos(\mu t+\varrho) + \frac{qn^2c^2N''}{2aaM''}\,.\,\sin(\mu t+\varrho) + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n \sin\mu t = 0$$

Entwickelt man hierin Sinus und Cosinus der Summe nach Sinus und Cosinus der Theile, so erhält man

$$\left(\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\cos\varrho + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n\right)\sin\mu t$$
$$+\left(\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\cos\varrho\right)\cos\mu t = 0$$
$$\left(\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\cos\varrho - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n\right)\sin\mu t$$
$$+\left(\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\cos\varrho\right)\cos\mu t = 0\,.$$

Sollen nun diese beiden Gleichungen für jeden Werth von t gelten, so erhält man für $\cos\mu t = 0$ die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\cos\varrho + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n = 0$$
$$\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\cos\varrho - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n = 0$$

und für $\sin\mu t = 0$ noch die dritte Gleichung, nämlich

$$\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right)\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,\cos\varrho = 0\,,$$

aus denen p, q, ϱ so bestimmt werden, dass den beiden partiellen Differentialgleichungen durch die darnach bestimmten Werthe von a_n und b_n genügt wird. Man erhält nämlich

$$\varrho = \text{arc tang}\,\frac{\mu a^2c^2w'}{4(2\mu^2a^2M'' - n^2c^2N'')}$$

$$p = -\frac{accn}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\,.\,g_n\cos\varrho = -\frac{2accn}{\sqrt{(16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2)}}\,.\,g_n$$
$$q = +\frac{accn}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\,.\,f_n\cos\varrho = +\frac{2accn}{\sqrt{(16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2)}}\,.\,f_n\,.$$

Fügt man zu den hiedurch bestimmten particularen Werthen von a_n und b_n, welche den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, noch die Art. 13 für a_n und b_n, für den Fall wo $f_n = 0$ und $g_n = 0$ war, gefundenen Werthe hinzu, so geben die beiden Summen die vollständigen Integralwerthe von a_n und b_n, nämlich

$$a_n = p \sin(\mu t + \varrho) + Ae^{-\varepsilon t}. \sin\left(mt + \text{arc}\sin\frac{a^0{}_n}{A}\right)$$

$$b_n = q \sin(\mu t + \varrho) + Be^{-\varepsilon t}. \sin\left(mt + \text{arc}\sin\frac{b^0{}_n}{B}\right)$$

worin A und B sowie ε und m die Art. 13 angegebene Bedeutung haben. Wenn m einen imaginären Werth hat, treten für die hinzugefügten Glieder die Art. 17 entwickelten Werthe von a_n und b_n ein. Es leuchtet aber ein, dass für wachsende Werthe von t die hinzugefügten Glieder abnehmen, und dass sie, wie Art. 17 gezeigt worden, schon nach Verlauf eines sehr kleinen Bruchtheils einer Secunde als verschwindend betrachtet werden können, von wo an also die Bewegung der Elektricität im kreisförmigen Leiter eine gleichförmige periodisch wiederkehrende wird, deren Hervorbringung der Zweck der beschriebenen Methode mit dem rotirenden Magnete war.

Setzt man diese Werthe von a_n und b_n, mit Weglassung der mit der Zeit verschwindenden Glieder in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich für die regelmässig fortdauernde elektrische Schwingung folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma \sin(\mu t + \varrho)\left(p \sin\frac{ns}{a} + q\cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{a\mu}{2}\Sigma\frac{1}{n}\cos(\mu t + \varrho)\left(q \sin\frac{ns}{a} - p\cos\frac{ns}{a}\right)$$

worin p, q, ϱ die oben angeführten Werthe haben. Nun ergiebt sich aber aus jenen Werthen

$$p = -\frac{2n}{\mu a w'}\sin\varrho \,.\, g_n$$

$$q = +\frac{2n}{\mu a w'}\sin\varrho \,.\, f_n \,.$$

Werden diese Werthe von p und q in beiden Gleichungen substituirt, so wird

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \Sigma n \sin\varrho \sin(\mu t + \varrho)\left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{1}{w'} \Sigma \sin\varrho \cos(\mu t + \varrho)\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

oder, wenn $\sin(\mu t + \varrho)$ und $\cos(\mu t + \varrho)$ entwickelt werden,

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \sin\mu t \,.\, \Sigma n \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$+ \frac{2}{\mu a w'} \cos\mu t \,.\, \Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$i = \frac{1}{w'} \sin\mu t \,.\, \Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$- \frac{1}{w'} \cos\mu t \,.\, \Sigma \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Wenn man hierin endlich

$$\frac{\Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)}{\Sigma \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang}\gamma$$

$$\frac{\Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)}{\Sigma n \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang}\gamma'$$

$$\left(\Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2 = kk$$

$$\left(\Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 = k'k'$$

setzt, so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \,.\, k' \sin(\mu t + \gamma')$$

$$i = -\frac{1}{w'} \,.\, k \cos(\mu t + \gamma)\,.$$

Setzt man aber

$$\Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) = f$$

$$\Sigma \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) = g$$

$$\frac{df}{ds} = f'\,, \qquad \frac{dg}{ds} = g'$$

so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu w'} \sqrt{(f'f' + g'g')} \,.\, \sin\left(\mu t + \operatorname{arc\,tg}\frac{f'}{g'}\right)$$

$$i = -\frac{1}{w'} \sqrt{(ff + gg)} \,.\, \cos\left(\mu t + \operatorname{arc\,tg}\frac{f}{g}\right)$$

woraus die Gleichung $\frac{di}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}$ leicht abgeleitet werden kann.

21.

Gleichheit der Phasen und Amplituden elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern.

Beachtet man, dass die von dem rotirenden Magnet auf den *ganzen* Leitungsdraht ausgeübte elektromotorische Kraft durch

$$\sin \mu t \,.\int ds\,.\,\Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

dargestellt wird, und dass, wenn diese ganze Kraft nicht $= 0$ sein soll, g_0 einen bestimmten endlichen Werth haben müsse; so lässt sich der gefundene Werth von i übersichtlicher darstellen, wenn man in den angegebenen Werthen von $\tang\gamma$ und kk die ersten Glieder der als Summen dargestellten Reihen, nämlich die Glieder welche der Stellenzahl $n = 0$ entsprechen, auf folgende Weise absondert, indem man mit ϱ_0 den Werth von ϱ für $n = 0$ bezeichnet:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{g_0 \sin\varrho_0^2 + \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho^2\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)}{g_0\sin\varrho_0\cos\varrho_0 + \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho\cos\varrho\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)}$$

$$\begin{aligned} kk = g_0g_0\sin\varrho_0^2 &+ 2g_0\sin\varrho_0\cos\varrho_0\,.\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho\cos\varrho\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)\\ &+ 2g_0\sin\varrho_0^2\,.\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho^2\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)\\ &+ \left(\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho\cos\varrho\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2\\ &+ \left(\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}\sin\varrho^2\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Da nun hierin

$$\sin\varrho = \frac{\mu a^2c^2w'}{\sqrt{(16\,(2\mu^2a^2M'' - n^2c^2N'')^2 + \mu^2a^4c^4w'^2)}}$$

$$\cos\varrho = \frac{4\,(2\mu^2a^2M'' - n^2c^2N'')}{\sqrt{(16\,(2\mu^2a^2M'' - n^2c^2N'')^2 + \mu^2a^4c^4w'^2)}}$$

war, so ergeben sich die Werthe von $\sin\varrho_0$ und $\cos\varrho_0$, wenn der Werth von M'' für $n = 0$ mit M_0'' bezeichnet wird,

$$\sin\varrho_0 = \frac{ccw'}{\sqrt{(64\mu^2M_0''M_0'' + c^4w'^2)}}\,,\qquad \cos\varrho_0 = \frac{8\mu M_0''}{\sqrt{(64\mu^2M_0''M_0'' + c^4w'^2)}}\,.$$

Bedenkt man ausserdem, dass auch für sehr lange und dünne Leiter und für die grössten darstellbaren Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets die Quotienten $\frac{\mu aaw'}{N''}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind, so leuchtet ein, dass mit hinreichender Näherung für alle Werthe von $n > 0$

$$\sin\varrho = \frac{\mu aaw'}{4n^2N''}, \qquad \cos\varrho = 1$$

gesetzt werden kann. Hieraus leuchtet ein, dass, da schon $\frac{\mu aaw'}{N''}$ ein sehr kleiner Bruch ist, $\sin\varrho = \frac{\mu aaw'}{4n^2N''}$ um so mehr als verschwindend betrachtet werden darf, je grösser die Stellenzahl n ist. Es wird daher meist auch für sehr lange und dünne Leiter und bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets näherungsweise

$$\gamma = \varrho_0 \quad \text{und} \quad k = g_0 \sin\varrho_0$$

angenommen werden können, wonach

$$i = -\frac{g_0}{w'}\sin\varrho_0\cos(\mu t + \varrho_0)$$

gefunden wird.

Da $\frac{g_0}{w'}$ und ϱ_0 von s unabhängige constante Werthe haben, so geht daraus hervor, dass die elektrischen Schwingungen in allen Theilen eines kreisförmigen Leiters gleichzeitig gleiche *Phase* und gleiche *Amplitude* haben, auch wenn die von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile des Leiters sehr ungleich vertheilt sind.

Aus dieser Gleichheit der Schwingungsphasen und Schwingungsamplituden in allen Theilen des kreisförmigen Leiters geht hervor, dass die Stromintensität in irgend einem Punkte stets der mittleren Stromintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte ist aber schon Art. 9 entwickelt worden, wo sich ergab, wenn der Mittelwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit $\frac{1}{2\pi a}\,.\,S$ bezeichnet und

$$\frac{8}{cc}\int M_0''ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{C}} = p\,, \quad \frac{2\pi a}{\pi aak} = w = 2\pi aw'$$

gesetzt wird, dass

$$i = \frac{1}{p}\,e^{-\frac{wt}{p}}\,.\int e^{\frac{wt}{p}}\,.\,Sdt$$

ist. Wendet man nun dieses Gesetz auf unsern Fall an, wo in einem Leiter elektrische Schwingungen von einem rotirenden Magnet hervorgebracht werden, und wo der Mittelwerth der vom rotirenden Magnet auf den Leiter ausgeübten elektromotorischen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi a}\,.\,S = g_0\sin\mu t$$

war, so erhält man

$$i = \frac{2\pi a g_0}{p} e^{-\frac{pt}{w}} . \int e^{\frac{pt}{w}} . \sin \mu t \,.\, dt = \frac{2\pi a g_0}{p} . \frac{\frac{w}{p} \sin \mu t - \mu \cos \mu t}{\frac{ww}{pp} + \mu\mu}$$

$$= - \frac{2\pi a g_0}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} . \cos \left(\mu t + \operatorname{arc\,tg} \frac{w}{\mu p}\right) .$$

Da nun $p = \frac{8}{cc}\int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{C}} = \frac{8}{cc}\int M_0'' (1 + \lambda)\, ds$, und $w = 2\pi a w'$ ist, so erhält man, wenn auch hier wie Art. 20 zur Vereinfachung M_0'' statt $M_0''(1+\lambda)$ geschrieben wird,

$$\frac{w}{\mu p} = \frac{\pi a c c w'}{4\mu \int M_0'' ds} = \operatorname{tg} \varrho_0 , \quad \frac{w}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \frac{2\pi a w'}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \sin \varrho_0 ,$$

folglich übereinstimmend mit dem oben für *kreisförmige* Leiter gefundenen Resultate,

$$i = - \frac{g_0 \sin \varrho_0}{w'} . \cos (\mu t + \varrho_0) .$$

Da nun aber das obige Gesetz, für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte, Art. 9 nicht bloss auf *kreisförmige* Leiter beschränkt, sondern unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters gefunden worden war, so ergiebt sich daraus, dass das daraus für den Fall, wo die von einem rotirenden Magnet herrührenden elektromotorischen Kräfte gegeben sind, abgeleitete Gesetz ebenfalls für geschlossene Leiter von beliebiger Gestalt gilt.

Das angeführte Resultat, dass *Phasen* und *Amplituden* elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern überall gleich seien, beruht auf der Voraussetzung, dass die Quotienten $\frac{\mu a a w'}{N''}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind. Da nun diese Quotienten mit der Länge und Feinheit des Leiters und mit der Rotationsgeschwindigkeit des kleinen Magnets wachsen, so ist es von Interesse die Werthe derselben für einige Beispiele von langen und feinen Leitern bei grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets wirklich zu berechnen. Werden dazu die drei schon Art. 16 als Beispiele gebrauchten Leitungsdrähte gewählt, so ergeben sich die in folgender Tafel berechneten Werthe.

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
a	1000	1000000	1000000
w'	$\frac{1}{120697 \,.\, 10^{12}}$	$\frac{1}{120697 \,.\, 10^{12}}$	$\frac{1}{12070 \,.\, 10^{12}}$
N'' (für $n = 1$)	15,119	28,935	31,237
$100\,\frac{aaw'}{N''}$	$\frac{1}{18248 \,.\, 10^{6}}$	$\frac{1}{34939}$	$\frac{1}{3770}$
$100\,\frac{a}{c}$	$\frac{1}{4394500}$	$\frac{1}{4394}$	$\frac{1}{4394}$

Die beiden letzten Reihen dieser Tafel enthalten die Werthe der beiden Quotienten für die drei zum Beispiel genommenen Drähte, wenn $\mu = 100$, d. i. bei 15,965 Umdrehungen des Magnets in 1 Secunde. Man sieht, dass in allen diesen Fällen die Werthe dieser beiden Quotienten sehr kleine Brüche sind, indessen erkennt man daraus auch, da diese Werthe bei 159,65 Umdrehungen in 1 Secunde 10 Mal grösser, bei 1596,5 Umdrehungen in 1 Secunde 100 Mal grösser sein würden, dass doch wirklich Fälle vorkommen können, wo jene Quotienten Brüche von erheblicher Grösse werden, und wo also das Gesetz der Gleichheit der *Phasen* und *Amplituden* in allen Theilen des kreisförmigen Leiters nicht mehr gelten würde.

22.

Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter.

Das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter ist in dem Art. 20 gefundenen Ausdruck für die Dichtigkeit E enthalten, nämlich

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \,.\, k' \sin(\mu t + \gamma')$$

worin der Coefficient k' durch die Gleichung

$$k'k' = \left(\Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2$$

bestimmt war.

Man sieht hieraus, dass auch die Stärke der Ladung mit freier Elektricität in jedem Punkte des kreisförmigen Leiters proportional dem Sinus eines mit t proportional wachsenden Bogens wechselt, dass aber das Ladungsmaximum $= \frac{2k'}{\mu a w'}$, welches für den Sinus $= 1$ statt findet, in verschiedenen Punkten des Leiters verschieden ist, und zwar dass näherungsweise in denjenigen Punkten die Aenderung von Element zu Element am grössten ist, wo die von dem rotirenden Magnet ausgeübte elektromotorische Kraft von ihrem Mittelwerthe am meisten abweicht; wo diese elektromotorische Kraft ihrem Mittelwerthe gleich ist, ist näherungsweise auch die Ladung gleich, und zwar $= 0$. Es würde also in dem ganzen kreisförmigen Leiter nirgends freie Elektricität vorhanden sein, wenn der rotirende Magnet auf alle Punkte desselben gleich wirkte, wobei vorausgesetzt ist, dass der kreisförmige Leiter, unabhängig vom rotirenden Magnet, keine Ladung von freier Elektricität besitze.

Da nämlich nach dem vorhergehenden Artikel $\sin\varrho$ und $\cos\varrho$ für $n = 0$ endliche Werthe behalten, so leuchtet ein, dass für obigen Werth von $k'k'$ geschrieben werden kann

$$k'k' = \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho^2\left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho\cos\varrho\left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2.$$

Ferner kann, unter den im vorigen Artikel angeführten Voraussetzungen,

$$\sin\varrho = \frac{\mu a a w'}{4n^2 N''}, \quad \cos\varrho = 1$$

gesetzt, und, wenn $\sin\varrho$ einen sehr kleinen Werth hat, der erste Theil von $k'k'$, welcher unter dem Summenzeichen den Faktor $\sin\varrho^2$ enthält, gegen den zweiten vernachlässigt werden, wonach also

$$k' = \frac{\mu a a w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{nN''}\left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$

erhalten wird. Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{N''}\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Ist endlich $\log\frac{8a}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl und convergirt ferner die Reihe $\Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$ so rasch, dass alle Glieder der Reihe für $n > \nu$ vernachlässigt werden können, während $2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{2\nu - 1}\right) + \frac{\nu^2\alpha}{8a}$ gegen $\log\frac{8a}{\alpha}$ verschwindet, so darf $N'' = 2\log\frac{8a}{\alpha}$ und

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{8\log\frac{8a}{\alpha}}\left(\sum_0^\nu\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) - g_0\right)$$

gesetzt werden.

Nun ist aber der Faktor

$$\sum_0^{\nu}{}'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) - g_0$$

die Differenz der im Punkte s von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kraft von ihrem Mittelwerthe in der ganzen Länge des Leiters; also ist $\frac{dk'}{ds}$, oder die Aenderung von k' im Verhältniss zur Aenderung von s, jener Differenz proportional.

Von der Stärke dieser Ladungen hängt, wie man leicht sieht, das Ueberspringen elektrischer Funken und der Grad der nothwendigen *Isolirung* des Leiters ab, wenn solches Ueberspringen vermieden werden soll, ein Gegenstand, der einer ausführlicheren Erörterung bedarf, aber erst dann, wenn es sich um Leiter handelt, die nicht bloss einen einfachen Kreis, sondern ein System sehr nahe aneinander liegender Spiralwindungen bilden, ein Fall, der von der Betrachtung hier ausgeschlossen worden ist.

23.

Leitfaden für die Beobachtungen.

Es bleibt noch übrig, die Resultate der vorhergehenden Entwickelung als Leitfaden zu den *Beobachtungen* zu benutzen, durch welche jene Resultate an der Erfahrung geprüft werden sollen. Eines solchen Leitfadens bedarf es besonders, wenn keine Analogien mit andern Bewegungserscheinungen vorliegen, welche dazu benutzt werden können, und es geht aus dem Vorhergehenden hervor, dass solche Analogien in vielen Beziehungen hier fehlen.

Es kommt nämlich bei mangelnden Analogien mit andern schon bekannten und erforschten Bewegungserscheinungen vor Allem auf Bestimmung von *Beobachtungsobjecten* an, die besonders wichtig und *genauerer Bestimmung durch Beobachtungen* fähig sind. Ferner kommt es auf die nähere Kenntniss der *Verhältnisse* an, unter welchen über diese Beobachtungsobjecte die genauesten Bestimmungen zu erlangen sind. Es leuchtet nun ein, dass die genauere Erörterung dieser *Verhältnisse* am zweckmässigsten mit der Erörterung der *Hülfsmittel* zu ihrer wirklichen Darstellung und mit der *Ausführung der Beobachtungen* selbst verbunden wird, was zusammen den Gegenstand des folgenden Abschnitts dieser Abhandlung bilden wird. Am Schlusse dieses Abschnitts sollen daher nur kurz diejenigen *Beobachtungsobjecte* bezeichnet werden, die nach der vorhergehenden Entwickelung als besonders *wichtig und einer genaueren Bestimmung durch Beobachtungen fähig* erscheinen.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit,* die bei andern Bewegungserscheinungen von so grosser Wichtigkeit ist, scheint nach dem, was schon Art. 18 darüber bemerkt worden, hier nicht dazu gerechnet werden zu können, es bieten sich dafür aber verschiedene andere Gegenstände der Beobachtung dar.

Es sind hauptsächlich *drei* Gegenstände, welche sich nach den entwickelten Gesetzen als besonders zur Prüfung der aufgestellten Gesetze geeignete Beobachtungsgegenstände herausstellen, nämlich *erstens* die Vergleichung der Schwingungsphasen und der Schwingungsamplituden der Elektricität an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leiters, auf welchen ein rotirender Magnet inducirend wirkt; *zweitens* das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets; *drittens* endlich bietet sich noch ein wichtiger Gegenstand für Beobachtungen in der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude* der durch einen rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leitungsdraht hervorgebrachten elektrischen Schwingungen von der diesem Leitungsdrahte gegebenen *Gestalt* dar.

Die *Gleichheit der Schwingungsphase und der Schwingungsamplitude,* welche nach den entwickelten Gesetzen auch in sehr langer geschlossener Kette und bei grosser Rotationsgeschwindigkeit in allen Theilen statt finden soll, ist ein Gegenstand, der zur Prüfung an der Erfahrung sich um so mehr eignet, je unerwarteter dieses Resultat erscheint. Denn ohne genauere Entwickelung der Verhältnisse würde wohl bei einer sehr langen Kette, wo alle Bewegungen von einer Stelle ausgehen und bei ihrer Verbreitung einer sehr starken Dämpfung oder Absorption unterworfen sind, erwartet werden, dass auch bei fortgesetzter Erregung von Schwingungen alle Bewegungen immer nur sehr geschwächt zu den entferntesten Theilen der Kette gelangten. Da ferner die Verbreitung von der Erregungsstelle nach beiden Seiten geschieht, dürfte man erwarten, dass bei dem Wechsel positiver und negativer Schwingungen durch das Zusammentreffen von entgegengesetzten Seiten an einigen Stellen *Verstärkung* an anderen *Aufhebung* statt finden werde, wie bei Interferenzerscheinungen. Endlich, wenn auch in Folge solcher Begegnung Schwingungen, die in allen Theilen der Kette vollkommen synchron sind, *möglich* wären, so dürfte man doch erwarten, dass dieser *mögliche* Fall an besondre Bedingungen z. B. an bestimmte Rotationsgeschwindigkeiten geknüpft wäre, nicht aber, dass in allen Theilen der Kette solche synchronische Schwingungen stets, *bei jeder Rotationsgeschwindigkeit*, sich bildeten. Das angeführte Resultat ist daher nach allen Analogien, welche die Verbreitung von Bewegung in anderen bekannten Fällen bietet, höchst unerwartet, und eignet sich daher besonders zur Prüfung der Resultate der auf unsere bisherige Kenntniss von der Elektricität gebaueten Theorie an der Erfahrung.

Die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets eignet sich ferner von einer andern Seite dazu, nämlich von Seiten der *quantitativen Prüfung* des entwickelten Gesetzes, durch Beobachtungen und Messungen, die nach wachsender Rotationsgeschwindigkeit in Reihen geordnet werden.

Endlich, wenn es auch noch gelänge, über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* feinere Bestimmungen durch genaue Beobachtungen und Messungen zu gewinnen, so würde dadurch nicht bloss eine neue Prüfung der entwickelten Gesetze, sondern auch eine wesentliche Ergänzung unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität selbst, aus der diese Gesetze abgeleitet worden, erlangt werden. Nach unserer bisherigen Kenntniss muss zwar der Elektricität als einem Körper eine *Masse* zugeschrieben werden, und diese Masse übt auf eine andere ähnliche Masse eine *Kraft* aus; es fehlt aber noch an der Kenntniss des *Verhältnisses* jener Masse zu dieser Kraft. Die Kenntniss dieses *Verhältnisses* war nun auch nicht nöthig, so lange es sich um *Gleichgewichtserscheinungen* oder um *beharrliche Bewegungen* handelte, wo die Kenntniss der *Kräfte* genügte; die verschiedenen Elektricitätsmengen konnten dabei, statt nach ihren Massen, nach der Grösse der *Kräfte* unterschieden werden, die sie auf eine und dieselbe Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübten, und diese letztere Elektricitätsmenge konnte durch die *Kraft* bestimmt werden, die sie auf eine *gleiche* Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübte. Eine so bestimmte Elektricitätsmenge war nun wirklich die sogenannte *elektrostatische Maasseinheit*. Handelt es sich aber nicht um blosses *Gleichgewicht* oder um blosse *Erhaltung einer schon vorhandenen Bewegung*, sondern soll einer Elektricitätsmenge *neue Bewegung* ertheilt werden, welche sie vorher nicht besass, so reicht die blosse Kenntniss der Kräfte nicht aus, sondern es bedarf auch der Kenntniss der *Masse* der in Bewegung zu setzenden Elektricität, oder des *Verhältnisses* dieser Masse zu der von ihr auf die elektrostatische Maasseinheit in der Einheit der Entfernung ausgeübten Kraft, d. i. der Kenntniss der *Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf die Masseneinheit* (Milligramm) *Elektricität gehen.* Diese Zahl ist oben mit r bezeichnet worden und die *Masse* jeder in *elektrostatischen Maasseinheiten* bestimmten Elektricitätsmenge $\mathfrak{E}$ wird damit $= \frac{1}{r}\mathfrak{E}$ gefunden. Es leuchtet ein, dass wenn nun auf diese *Masse* irgend eine *Kraft* f wirkt, der *Quotient* dieser Kraft durch die Masse $\frac{1}{r}\mathfrak{E}$, auf welche sie wirkt, die *Geschwindigkeit* der von der Kraft der Masse in der Zeiteinheit ertheilten Bewegung $= \frac{fr}{\mathfrak{E}}$ giebt.

Unsere Kenntniss vorhandener Elektricitätsmengen nach *elektrostatischen Maasseinheiten* ist nun aber in der That durch die Beobachtungen auf die in den Körpern vertheilten *freien* Elektricitätsmengen beschränkt und erstreckt sich nicht auf die im *neutralen* Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen. Ebenso ist unsere Kenntniss der Kräfte f auf solche beschränkt, welche auf *freie* Elektricitätsmengen wirken, während von denjenigen Kräften, welche auf das *neutrale* Fluidum wirken, durch die Beobachtungen nur die Kenntniss des mit dem Namen *elektromotorischer Kraft* bezeichneten Coefficienten f' erlangt wird, welcher mit der unbekannten *Zahl der im neutralen Fluidum enthaltenen elektrostatischen Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ multiplicirt werden muss, um f zu erhalten, also $f = f'.\mathfrak{E}$. Dagegen brauchen wir auch in der ganzen Elektrodynamik nicht die *Geschwindigkeit* selbst, sondern nur die *Stromdichtigkeit* und deren Aenderungen zu erforschen, d. i. das Product der in der strömenden Elektricität enthaltenen *Zahl elektrostatischer Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ in jene *Geschwindigkeit* $\frac{rf}{\mathfrak{E}}$, d. i. $rf = f'.r\mathfrak{E}$, wo die *elektromotorische Kraft* f' aber schon bekannt, also bloss das Product $r\mathfrak{E}$ zu bestimmen ist.

Ist hienach, in Uebereinstimmung mit der vorhergegangenen Entwickelung zur Bestimmung der *Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, nicht die Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten r, welche auf die Masseneinheit (Milligramme) gehen, selbst nöthig, sondern bloss die Kenntniss des Products $r\mathfrak{E}$, so leuchtet ein, dass umgekehrt *aus Beobachtungen der Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, auch nur die Kenntniss dieses Products $r\mathfrak{E}$ erworben werden kann; es leuchtet aber zugleich auch die Wichtigkeit von der Kenntniss dieses