Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

Lehrbuch der sphärischen und theoretischen Astronomie und der mathematischen Geographie - nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben ... ; mit 328 Erklärungen, Formelnverzeichnis ... ; für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach System Kleyer

Láska, Václav Jan

Stuttgart, 1889

urn:nbn:at:at-ubi:2-5853

Lehrbuch

der

Sphärischen und theoretischen

Astronomie

und der

mathematischen Geographie.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben

mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben.

Mit 328 Erklärungen, Formelnverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln.

Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Dr. W. Láska.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1889.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Der Zweck des vorliegenden Werkes, über dessen Einrichtung die Einleitung zu Rate gezogen werden kann, ist, den Lernenden in die astronomische Praxis einzuführen. Es ist eine anerkannte Thatsache, dass man eine Wissenschaft nur dann beherrscht, wenn man sie zu benützen weiss. Der Verfasser war bestrebt, auf möglichst einfachen Wegen zu zeigen, wie man das, was die Astronomie als ihr gesichertes Eigentum betrachten kann, gewonnen hat und jederzeit gewinnen kann. Dabei war für ihn der geschichtliche Weg, soweit es eben anging, allein massgebend. Darum wurden Keplers Arbeiten ausführlicher, wenngleich in modernem Gewande, mitgeteilt.

Die Sprache ist einfach gehalten und der Vortrag durch viele Originalzeichnungen unterstützt, so dass es jedermann leicht wird, sich mit dem Dargebotenen vertraut zu machen. Der Verfasser hofft ein brauchbares Buch geschaffen zu haben, dank der Verlagshandlung, welche keine Illustrationskosten gescheut hat.

Endlich möge es dem Verfasser gestattet sein, Herrn Professor Dr. L. Weinek, Direktor der k. k. Sternwarte in Prag, an dieser Stelle seinen Dank auszusprechen, ohne dessen meisterhaften Vorträge, die der Verfasser vor Jahren zu hören das Glück hatte, es unmöglich gewesen wäre, dem Buche die gegenwärtige Form zu geben.

Prag, September 1889.

Dr. W. Láska.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung in das Studium des Werkes IX

I. Sphärische Astronomie.

A. Ueber die Astronomie, ihren Begriff, ihre Einteilung, ihren Nutzen im allgemeinen 1

B. Ueber die Bedeutung der in der sphärischen Astronomie vorkommenden Zeichen.

a) Ueber die Definition der sphärischen Koordinaten 2
b) Ueber das Koordinatensystem des Horizonts 5
c) Ueber die Refraktion 9
d) Ueber das Koordinatensystem des Aequators 12
e) Ueber die Beziehung der Zeit und Bogengrössen zu einander 17
f) Ueber die Verwandlung des horizontalen Koordinatensystems in das äquatoreale und umgekehrt 20
g) Gelöste Aufgaben 23
h) Ungelöste Aufgaben 25

C. Ueber die Zeit.

a) Ueber die Definition der Zeitmasse und die Verwandlung der verschiedenen Zeiten in einander 27
b) Gelöste Aufgaben 41
c) Ungelöste Aufgaben 46

D. Anwendungen.

a) Ueber die Erscheinungen der täglichen Bewegung 48
b) Gelöste Aufgaben 51
c) Ungelöste Aufgaben 54
d) Ueber die Bestimmung der Uhrkorrektion, der Polhöhe und des Azimuts eines terrestrischen Objektes 54
e) Gelöste Aufgaben 60
f) Ungelöste Aufgaben 65

E. Geodäsie.

a) Ueber die Erforschung der Erdgestalt 66
b) Gelöste Aufgaben 74
c) Ueber die Bestimmung und Berechnung des Erdellipsoids aus den Gradmessungen 76
d) Gelöste Aufgaben 86
e) Ueber die Landkartenprojektionen 87

F. Fortsetzung der sphärischen Astronomie.

a) Ueber den Begriff und die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik 95
b) Ueber das Koordinatensystem der Ekliptik 100
c) Gelöste Aufgaben 105
d) Ungelöste Aufgaben 108
e) Ueber die Theorie der Sonnenuhren 108

Seite

G. Ueber die Korrektion der Beobachtungen, welche durch den Standpunkt des Beobachters auf der Oberfläche der Erde und durch die Eigenschaften des Lichtes bedingt werden.

a) Ueber die Parallaxe 115
b) Gelöste Aufgaben 124
c) Ueber die Aberration des Lichtes 126

H. Ueber die Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper 132

J. Ueber die scheinbare Bewegung der Sonne und die Bahn der Erde.

a) Die Theorie der Sonne 136
b) Gelöste Aufgaben 155

K. Ueber die Theorie des Mars und der Planetenerscheinungen.

a) Ueber die Verwandlung der geozentrischen Koordinaten in heliozentrische . 161
b) Ueber die Bestimmung der Marselemente 172
c) Gelöste Aufgaben 175
d) Ueber den scheinbaren Planetenlauf 178
e) Theorie der Vorübergänge der unteren Planeten 181

L. Ueber die Theorie der Planetenbegleiter.

a) Theorie der Jupitermonde 185
b) Theorie des Saturnringes 193
Planetentafel 196

M. Ueber die Theorie des Mondes 201

N. Ueber die Berechnung der Finsternisse.

a) Ueber die Mondfinsternisse 211
b) Ueber die Sonnenfinsternisse 216
c) Numerisches Beispiel 222
d) Ueber die Wiederkehr der Finsternisse 225

O. Ueber die Bestimmung einer parabolischen Bahn.

a) Einige wichtige Relationen 226
b) Ueber die Bahnberechnung 237
c) Aufgelöstes Beispiel 241

P. Ueber die Längebestimmungen 245

II. Theoretische Astronomie.

Q. Das Gravitationsgesetz und die ungestörte Planetenbewegung.

a) Ueber die Bewegungsgleichungen 247
b) Bestimmung der Masse der Himmelskörper 255

R. Ueber die Theorie des Mondes 257

Zusammenstellung der in diesem Buche vorkommenden Formeln 269

Einleitung

in das

Studium des vorliegenden Werkes

und der Astronomie überhaupt.

Es wird vorausgesetzt, dass jedermann, der sich an das Studium dieses Werkes macht, irgend eine populäre Astronomie gelesen und sich auf Grund einer Sternkarte, durch eigene Anschauung, ein ungefähres Bild von allem dem geschaffen hat, was der gestirnte Himmel Tag und Nacht über bietet.

In dieser Hinsicht dürften das vorliegende Werk am besten ergänzen:

Newcomb, Populäre Astronomie, deutsch v. Engelmann. Leipzig 1882.

Gyldén, H., Die Grundlehren der Astronomie. Leipzig 1877.

Das erstere Werk ist rein populär, das zweite ist mehr wissenschaftlich.

Unter den Sternkarten empfehlen sich durch ihre Billigkeit insbesondere:

Schurig, R., Tabulae coelestes. Leipzig 1886.

Hat er sich so die nötige Vorbildung angeeignet, so kann er sofort zum Studium dieses Werkes übergehen. Das hier oft citierte Berliner Astronomische Jahrbuch kann durch das billigere

Nautisches Jahrbuch. Berlin. Heymanns Verlag,

welches jährlich erscheint, oder durch das nicht teuerere

Nautical Almanac. London. John Murray,

ersetzt werden, welches viel vollständiger ist.

Da das vorliegende Werk das Gebiet der Astronomie nicht vollständig erschöpfen kann, so wird für das eingehende Studium angezeigt sein, sich weitere Fachwerke anzuschaffen. Insbesondere mögen empfohlen werden:

für die sphärische Astronomie und Theorie der Instrumente:

Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin 1881,

für die Bahnbestimmung und die Praxis der Störungsrechnung:

Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Leipzig. Engelmann.

Dass die stete Berücksichtigung der Geschichte das Studium einer Wissenschaft nur beleben kann, ist anerkannt. Darum dürfte es sich empfehlen:

Wolfs Geschichte der Astronomie. München 1877,

zu lesen.

In Bezug auf das vorliegende Werk möge folgendes angeführt werden:

Zunächst wird es sich empfehlen, alle nachstehend angezeigten Versehen im Buche selbst zu verbessern.

Zweitens möge man bedenken, dass dieses Werk nur zur Einführung bestimmt ist, dass es demnach die Wissenschaft nur mit grossen Zügen charakterisiert, so dass alle Entwickelungen nur als erste Näherungen an das Problem zu betrachten sind.

Drittens möge noch angeführt werden, dass zur Astronomie kein königlicher Weg führt, sondern ein Weg durch Beobachtungen und Rechnungen, die oft nicht zu den leichtesten gehören. Demnach war es nicht möglich, alles auf Grund der allerelementarsten Sätze darzuthun, was insbesondere von der theoretischen Astronomie gilt. Wer daher die Astronomie mit Nutzen studieren will, darf sich nicht scheuen, sich die nötigen Kenntnisse anzueignen.

Demzufolge ist das Buch progressiv geschrieben, indem immer mehr und mehr vorausgesetzt wird. Doch gehen die Voraussetzungen der sphärischen Astronomie über das Gebiet der Trigonometrie nicht hinaus.

Das Werk selbst teilt sich in drei wesentlich von einander zu unterscheidende Teile.

I. In den einleitenden Teil, Seite 1 bis 136. Dieser hat zur Aufgabe, den Leser sozusagen mit den Operationsmitteln der Astronomie vertraut zu machen. Er enthält dasjenige, was man sonst die sphärische Astronomie im engeren Sinne zu nennen pflegt, die Grundlagen der Beobachtung.

II. Der folgende Teil, Seite 137 bis 246, unterscheidet sich von dem ersteren sowohl durch den Stoff, als auch durch die Behandlung. Während der erstere Teil sich mit dem Schein beschäftigt, untersucht der zweite das Sein; während der erstere Teil mehr referierend angelegt ist, lässt uns der zweite alles selbst finden, ohne dass wir irgend welche physikalische Lehrsätze voraussetzen.

III. Die Aufgabe des dritten Teiles, Seite 246 bis Ende, ist, auf Grund des Newtonschen Gravitationsgesetzes, die Thatsachen des zweiten zusammenfassend aus einem obersten Prinzip herzuleiten, denn erst dadurch wird die Astronomie eine Wissenschaft, d. h. eine möglichst ökonomische Darstellung unseres Wissens von den Himmelskörpern.

Zu den einzelnen Abschnitten wäre folgendes zu bemerken:

Die Abschnitte B. und C. sind zuerst und möglichst genau zu studieren, weil sie die Grundlagen der beobachtenden und rechnenden Astronomie enthalten. Insbesondere gilt dieses vom Abschnitte C. über die Zeit. Die Zeit der Astronomie, sowie sie aus der Formel folgt, ist immer die wahre Zeit, die bürgerliche ist immer die mittlere Zeit. Dieser Satz kann meiner Erfahrung gemäss nie oft genug wiederholt werden. Dabei möge angeführt werden, dass die Berechnungen sich oft viel kürzer ausführen lassen, als es vielleicht hie und da in diesem Werke geschehen ist, wo für den Gang der Rechnung pädagogische Rücksichten massgebend waren. Dieses möge auch bei den folgenden Abschnitten beherzigt werden.

Der Abschnitt D. enthält Anwendungen zur Uebung im Rechnen und Operieren mit den gewonnenen Fundamentalgleichungen und beschliesst so auf geeignete Art die Einleitung in die Astronomie.

Die Geodäsie, die man im Abschnitte E. findet, ist mehr für die Techniker bestimmt und kann von demjenigen, der sich ausschliesslich für die Astronomie interessiert, mit Ausnahme der Fragen 59 und 60 ungelesen bleiben, obschon sie, streng genommen, nichts anderes ist, als die Anwendung der Astronomie auf die Berechnung der Erdgestalt und somit sich den Anwendungen des vorhergehenden Abschnittes am bequemsten anschliesst.

Damit ist zugleich der Stoff der Astronomie erschöpft, soweit dieselbe an den polytechnischen Hochschulen als Nebenfach der höheren Geodäsie zum Vortrage gelangt.

Der Abschnitt F. mit den Anwendungen auf die Theorie der Sonnenuhren hat zur Aufgabe, in das dritte für die theoretische Astronomie wichtige System der Koordinaten einzuführen.

Ueber die ferneren Abschnitte ist nichts besonderes zu sagen, sie sind für den eigentlichen Astronomen bestimmt, d. h. für jenen, den die Astronomie als solche, nicht als Schulgegenstand interessiert.

Die theoretische Astronomie ist kurz und übersichtlich gefasst. Der Verfasser glaubte sie aufnehmen zu müssen, damit der Leser ein Buch in der Hand habe, welches ihn über alles belehrt und nicht gezwungen werde, nach einer Bibliothek zu greifen.

So ist das Buch, wie der Verfasser hofft, eine möglichst eingehende theoretische Erläuterung zu einer jeden populären Astronomie.

Verbesserungen und Zusätze.

Seite 6 Zeile 2 rechts von unten, lies statt $\varrho \cdot 1{,}08$ einfach ϱ.
„ 6 „ 9 und 13 rechts von oben, lies $\perp$ statt $+$
„ 11 „ 4 rechts von oben, lies i statt z
„ 21 „ 16 rechts von oben soll stehen: $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$
„ 31 „ 11 und 13 rechts von oben, lies 31^s statt 36^s
„ 51 in der Sterntafel lies: Beteigeuze statt Beteugeuze, Fomalhaut statt Fouralhaut.
„ 52 Zeile 21 rechts von oben, lies „die wahre Zeit des Aufganges" statt „die Zeit des Aufganges". Ebenso ist Zeile 14 und 4 rechts von unten, nach „bürgerlicher Zählung" noch „wahrer Zeit" hinzuzufügen.
„ 53 „ 4 rechts von unten, lies „die wahre Zeit der Kulmination" statt „die Zeit der Kulmination".
„ 60 „ 10 rechts von unten, lies „die wahre Ortszeit" statt „die mittlere Ortszeit".
„ 66 „ 9 rechts von oben, lies Hesiods statt Heriots.
„ 101 Figur 68, lies $90 - \beta$ statt $90 - \delta$ und $90 - \delta$ statt $90 - \beta$
„ 103 Erkl. 113, lies Tafel XII, XIII, XIV statt XI, XII, XIII.
„ 135 Zeile 6 links von oben, lies Zach statt Zech.
„ 140 „ 3 rechts von oben, lies Erdlänge statt Sonnenlänge.

Es besteht die Beziehung (vergl. Figur 94, Seite 140):

Erdlänge $L = \sphericalangle VFC$

Sonnenlänge $\odot = \sphericalangle VCF$

So dass immer:

$$L + \odot = 180^0$$

Seite 203 Formel 153) soll stehen: $T_{sy} = \dfrac{t_{tr}\, T_{tr}}{t_{tr} - T_{tr}}$

„ 210 Zeile 12 von oben lies: „mittlere Knotenlänge" statt „mittlere Länge".
„ 221 letzte Zeile unten soll stehen: Mitte der Finsternis T_m = Zeit der Konjunktion $- t^s$

I. Sphärische Astronomie.

A. Ueber die Astronomie, ihren Begriff, ihre Einteilung, ihren Nutzen im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter Astronomie?

Antwort. Unter Astronomie versteht man den Inbegriff aller unserer Kenntnisse von den Himmelskörpern, ihren wahren und scheinbaren Bewegungen und ihrer natürlichen Beschaffenheit.

Erkl. 1. Das Wort Astronomie stammt vom griechischen astron, Gestirn und nomos, Gesetz.

Erkl. 2. Eine Bewegung an und für sich, als Ortsveränderung in der Zeit, führt den Namen der wahren Bewegung. Bezieht man die wahre Bewegung auf irgend einen festen oder beweglichen Standpunkt, so wird sie zu einer scheinbaren.

Erkl. 3. Unter der natürlichen Beschaffenheit eines Himmelskörpers werden die sichtbaren Eigenschaften desselben verstanden, also Farbe, Aussehen der Oberfläche und ihre Veränderungen.

Frage 2. Wie wird die Astronomie eingeteilt?

Antwort. Man teilt zufolge der in 1. gegebenen Definition die Astronomie in:

1) die theoretische, d. h. die Lehre von den wahren,

2) die sphärische, d. h. die Lehre von den scheinbaren Bewegungen der Gestirne und endlich in:

3) die physische, d. h. die Lehre von der natürlichen Beschaffenheit der Himmelskörper.

Erkl. 3a. Die theoretische Astronomie wird bisweilen auch Astromechanik, die physische in der Regel Astrophysik genannt.

Erkl. 3b. Die Grundlage der Astronomie bildet die Beobachtung. Da jedoch, wie wir später sehen werden, die Beobachtungen unter verschiedenen Umständen, an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten gemacht werden, so sind sie mit einander nicht vergleichbar. Zu bewirken, dass sie es werden, ist die Aufgabe der Rechnung. Diese reduziert also, wie man zu sagen pflegt, die Beobachtungen auf eine Zeit und einen Ort. Beide zusammen, Beobachtung und Rechnung bilden die praktische Astronomie.

Frage 3. Welchen Nutzen gewährt die Astronomie?

Antwort. Die Astronomie gewährt sowohl einen materiellen, als auch einen geistigen oder intellektuellen Nutzen. Ohne Astronomie würde es keine Zeitmessung und keine Zeitrechnung geben. Die Zeit wäre nur ein „ungefähr“, denn wir hätten keine Kontrolle für unsere Uhren und unsern Kalender. Die Eisenbahnen in der jetzigen, so ökonomischen Einrichtung, könnten nicht bestehen. Auch die mathematische Geographie wäre ohne Astronomie nicht möglich, denn nur der Astronom (vergl. d. b. Abschnitt) vermag die Grösse und Gestalt der Erde zu messen und die Lage der einzelnen Erdorte genau festzustellen. Endlich darf die Schiffahrt nicht übergangen werden. Auf dem Meere sind die Sterne der einzige Wegweiser neben dem Kompas.

Ebenso gross, wo nicht grösser, ist der geistige Nutzen der Astronomie. Sie zeigt dem Menschen so deutlich seine Kleinheit, seine Beschränkung auf einen so winzigen Punkt im Weltall, als welchen die Erde zu betrachten ist. Was ist da der Herr der Schöpfung? wie sich der Mensch so gerne nennt, wo die Erde ein Staubkörnchen am Meeresstrande ist oder in der Wüste? So führt die Astronomie zur wahren Demut, zugleich aber sichert sie die volle Achtung der hohen Kraft und Macht des menschlichen Geistes, der mit seinem Forscherblick in die unermesslichen Tiefen des Universums einzudringen vermocht und mit so wenigen Hilfsmitteln, mit einigen Messwerkzeugen und einem Stückchen Glas, der Natur ihre Geheimnisse und Gesetze abgelauscht hat.

Unwillkürlich drängt sich bei der Betrachtung dieser Unermesslichkeiten des Himmels der Gedanke auf, an ein Jenseit, an ein höheres, waltendes Wesen, welches alle diese Herrlichkeiten geschaffen. So lehrt die Astronomie „wie die Himmel die Ehre dessen erzählen, der sie gemacht hat.“

Erkl. 3c. Zeitmessung oder Chronometrie (vom griech. chronos, die Zeit und metrein, messen) lehrt uns den Stand und Gang der Uhren mit Hilfe der Zeitbestimmung zu finden.

Zeitrechnung oder Chronologie (vom griech. chronos, die Zeit und logos, das Gesetz) ordnet unser Kalenderwesen.

Erkl. 4. Wir teilen nachstehend zwei Aussprüche von Laplace und Kant über Astronomie:

„Durch die Erhabenheit ihres Gegenstandes und durch die in allen anderen Wissenschaften beispiellose Vollendung ihrer Theorie ist die Astronomie das schönste Denkmal des menschlichen Geistes, sein Stolz und zugleich sein Trost für die Unbedeutendheit geworden, welche die Natur ihm und seiner Erde auf der Stufenleiter der Wesen angewiesen zu haben scheint, so dass er seine eigene Grösse bewundern muss in der Kleinheit der Basis, die ihm gedient hat, den ganzen Himmel zu nennen.“

Pierre Simon Laplace

(geb. 1749, 28. März zu Beaumont-en-Auge, dép. Calvados, gest. 1827, 5. März in Paris). Zuerst Lehrer der Mathematik an der Militärschule in seiner Vaterstadt, Mitglied der Akademie, von Napoleon zum Grafen, von Ludwig XVIII. zum Pair und 1817 zum Marquis ernannt. Der grösste Astronom aller Zeiten. Hauptwerk „Traité de mécanique céleste.“ V. Vol.

„Zwei Dinge sind es, die vor allen anderen würdig erscheinen, die Aufmerksamkeit des menschlichen Geistes zu fesseln und die ihn mit immer neuer Bewunderung erfüllen: das moralische Gesetz in uns und der gestirnte Himmel über uns.“

Immanuel Kant

(geb. 1724, 22. April zu Königsberg, gest. daselbst 1804, 12. Februar). Prof. der Philosophie an der Universität zu Königsberg und der grösste Philosoph Deutschlands.

B. Ueber die Bedeutung der in der sphärischen Astronomie vorkommenden Zeichen.

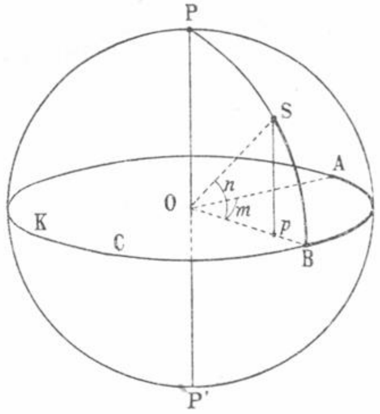
a) Ueber die Definition der sphärischen Koordinaten.

Anmerkung 1. Da die Erfahrung lehrt, dass die Gestirne sämtlich nach bestimmten Gesetzen ihren Ort an der scheinbaren Himmelskugel ändern, so muss man zunächst darauf bedacht sein, Methoden zu finden, den Ort eines Gestirnes zu jeglicher Zeit anzugeben, sobald nur das Gesetz, nach welchem die Ortsveränderung des Gestirns erfolgt, gegeben ist. Diese wird dadurch erreicht, dass man den Himmel mit einem Koordinatensystem überzieht, welches je nach dem Zwecke situiert wird. Die Koordinaten sind keineswegs konstante Grössen, sondern immer kleinen Aenderungen unterworfen, da im allgemeinen jeder Stern am Himmel seine eigene Bahn beschreibt. Das Studium dieser kleinen Veränderungen und ihrer Ursachen bildet den Hauptbestandteil der theoretischen Astronomie. Die gegenseitigen Veränderungen der Fixsterne entziehen sich meistenteils unserer Beobachtung, dagegen sind die Veränderungen, die durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse und um die Sonne verursacht werden, an allen Sternen leicht wahrnehmbar.

In Bezug auf den vorliegenden Abschnitt wird bemerkt, dass er die Grundlagen zu den nächsten Abschnitten enthält und daher sein genaues Studium nicht genug empfohlen werden kann. Es dürfte sich empfehlen, nach diesem Abschnitt zunächst den Abschnitt b), sodann mit Uebergehung von c) sofort den Abschnitt d) zu studieren.

Frage 4. Wie wird die Lage eines Punktes auf einer Kugel bestimmt?

Figur 1.



Erkl. 5. Unter Koordinaten (vom latein. cum und ordinare, zu ordnen) versteht man im allgemeinen Grössen, durch welche die Lage von Punkten in der Ebene oder im Raume oder endlich auf irgend einer Fläche bestimmt wird. Zu jedem Punkt gehören zwei (für die Ebene oder Fläche) oder drei (für den Raum) solcher Grössen. Diese sind also einander zugeordnet; daher der Name Koordinaten. Will man die Lage irgend eines Punktes feststellen, so geht man von bestimmten, als fest angenommenen Punkten, Linien oder Flächen, je nach dem Koordinatensystem, aus und gibt an, in welcher Entfernung und Richtung sich der betreffende Punkt von den soeben erwähnten Grössen befindet. Die hierzu nötigen Winkel und Längen oder auch Kurven heissen eben Koordinaten.

Als Erfinder der Methode der Koordinaten gilt René Descartes (geb. 1596, am 31. März zu La Haye in Touraine, gest. 1650 am 11. Februar in Stockholm). Die Entdeckung der Koor-

Antwort. Um die Lage eines Punktes auf einer Kugel zu bestimmen, verfährt man auf folgende Art:

Man legt durch den Mittelpunkt (O in der Figur 1) der Kugel eine Ebene, welche die Kugel in einem sogenannten grössten Kreis K schneiden wird. Diese Ebene heisst die Fundamentalebene. Die im Mittelpunkt der Kugel auf die Fundamentalebene errichtete Senkrechte schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten (P und P'), die man Pole nennt.

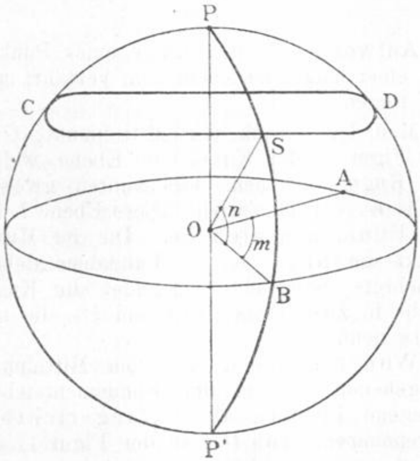
Wird nun irgend eine vom Mittelpunkt ausgehende und in der Fundamentalebene gelegene Richtung als Anfangsrichtuug angenommen (etwa OA in der Figur 1) und einigt man sich über den Sinn, in welchem die Winkel von dieser Richtung an gezählt werden sollen, so ist die Lage eines Punktes bestimmt, wenn man denjenigen Winkel m kennt, den die Projektion Op des Radius OS des Punktes S mit der Anfangsrichtung macht. Da aber die Projektion selbst durch den Projektionswinkel n bestimmt wird, so kann man auch sagen, dass die Lage eines Punktes durch die soeben genannten zwei Winkel m und n bestimmt wird. Diese beiden Winkel sind also die Koordinaten des Punktes S. Wir wollen diese beiden Winkel kurz den Abweichungs- (m) und Projektionswinkel (n) nennen. Untersuchen wir den geometrischen Ort aller jenen Punkte, denen ein gleicher Abweichungswinkel m zukommt, so finden wir einen durch die beiden Pole gehenden grössten Kreis, der mit der Anfangsrichtung den Winkel m einschliesst. Also der Kreis $PSBP'$ (s. Fig. 2) für alle Punkte dieses Kreises ist der Abweichungswinkel m derselbe und durch diesen Winkel ist der Kreis unzweideutig bestimmt. Dieser dinaten bespricht er im letzten Abschnitt seines „Discours de la methode“ Leyd. 1637.

Vergl. Klimpert, Geschichte der Geometrie, p. 141.

Erkl. 6. Unter der Projektion einer Geraden auf eine Ebene (Projektionsebene), versteht man die Verbindungslinie der Fusspunkte, der von den Endpunkten der Geraden auf die Ebene gefällten Senkrechten. Der Winkel, den die Gerade mit der Projektion einschliesst, wird der Projektionswinkel genannt.

Vergl. Vonderlinn, „Lehrbuch des Projektionszeichnens“ Seite 1 bis 16.

Figur 2.



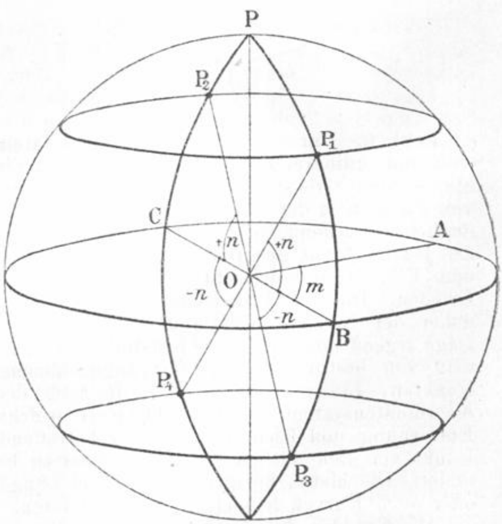
Erkl. 7. Unter einem geometrischen Ort im allgemeinen versteht man den Inbegriff von Punkten, welche insgesamt gewisse Bedingungen erfüllen, die wieder nur von den Punkten des Ortes erfüllt werden.

Vergl. Klimpert, Geschichte der Geometrie, p. 41.

Winkel bildet also die Koordinate dieses Kreises. Einen solchen Kreis wollen wir einen Scheitelkreis nennen. Suchen wir ferner den geometrischen Ort aller jener Punkte, denen ein gleicher Projektionswinkel n zukommt, so finden wir einen Kreis, der entsteht, wenn man durch den Punkt S eine parallele Ebene zur Fundamentalebene legt und diese mit der Kugel zum Durchschnitt bringt. Einen solchen Kreis wollen wir einen Parallelkreis nennen. Einem Parallelkreis, der sich oberhalb der Fundamentalebene befindet, entsprechen positive Projektionswinkel, einem der sich unterhalb befindet, negative. Aus dem Gesagten geht hervor, dass wir den Ort eines Punktes auch dadurch angeben können, dass wir sagen, auf welchem Parallelkreis und auf welchem Scheitelkreis er liegt. Beispielsweise sind die Koordinaten (siehe Figur 3):

des Punktes	**n**	**m**	
$P \cdots$	$+90^0$	beliebig	
$A \cdots$	0^0	0^0 od. 360^0	Anfangsrichtung
$B \cdots$	0^0	m^0	
$C \cdots$	0^0	$m^0 + 180^0$	
$P' \cdots$	-90^0	beliebig	
$P_1 \cdots$	$+n^0$	m^0	
$P_2 \cdots$	$+n^0$	$m^0 + 180^0$	
$P_3 \cdots$	$-n^0$	m^0	
$P_4 \cdots$	$-n^0$	$m^0 + 180^0$	

Figur 3.



b) Ueber das Koordinatensystem des Horizonts.

Anmerkung 2. Wir haben im vorhergehenden Abschnitt das Koordinatensystem im allgemeinen kennen gelernt. Soll dieses Koordinatensystem verwendbar sein, so muss seine Fundamentalebene und die Anfangsrichtung fixiert werden. Dieses kann auf mannigfaltige Art geschehen. Der ökonomische Charakter der Wissenschaft erfordert aber, dass es immer so geschehe, wie es eben am bequemsten geht. Die natürlichste Fundamentalebene ist offenbar jene des Horizonts.

Frage 5. Was versteht man unter dem Horizont eines Beobachtungsortes?

Antwort. Wird an einem Ort der Erde ein Lot aufgehängt, so zeigt (vorausgesetzt, dass grosse Bergmassen nicht in der Nähe sind, weil sie auf das Lot anziehend einwirken) der Faden des in der Ruhe befindlichen Lotes die Richtung der Schwere an, also die vertikale Richtung dieses Ortes. Eine jede Ebene, die auf dieser Richtung senkrecht steht, wird eine horizontale Ebene genannt. Denkt man sich diese Ebene bis an die scheinbare Himmelskugel erweitert, so erhält man die Ebene des wahren Horizonts. Da es bei der ungeheuren Entfernung des Himmels gleichgültig ist, ob wir diese Ebene durch den Beobachtungsort oder durch den Erdmittelpunkt uns gelegt denken, so wollen wir unter dem wahren Horizont jene horizontale Ebene verstehen, die durch den Erdmittelpunkt geht und unter dem scheinbaren oder auch natürlichen Horizont wollen wir dagegen diejenige Kreislinie auf der Erdoberfläche verstehen, welche für einen Beobachter auf freiem Meere, den sichtbaren Teil der Erdoberfläche begrenzt. Dieser Horizont wird auch der Seehorizont oder die Kimm *) genannt. Der Seehorizont liegt stets unter dem wahren Horizont und dieses um so tiefer, je höher das Auge des Beobachters ist. (Vergl. Fig. 4.) Der Winkel, um den der Gesichtskreis unter dem Horizont geneigt ist, heisst die Kimmtiefe. Die Grösse des scheinbaren Horizonts wird auch noch durch die Refraktion modifiziert.

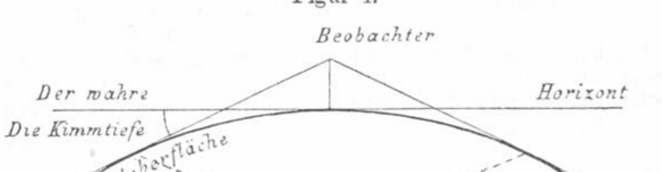
Erkl. 8. Das Wort vertikal stammt vom lateinischen vertex, Scheitel.

Erkl. 9. Das Wort Horizont stammt vom griechischen hōrao, sehe und zōnē, Gürtel, Kreis, daher die deutsche Uebersetzung Gesichtskreis.

Erkl. 9a. Im leeren Raume ist der Weg eines Lichtstrahles identisch mit der Verbindungslinie des Lichtpunktes mit dem Auge. Befindet sich zwischen dem Lichtpunkt und dem Auge eine lichtbrechende Substanz, so wird dieses nicht mehr der Fall sein, das Licht gelangt dann auf einem andern Wege in das Auge. Die dadurch bedingten Erscheinungen nennt man Refraktionserscheinungen. (Siehe Refraktion, Abschnitt C. dieses Werkes.)

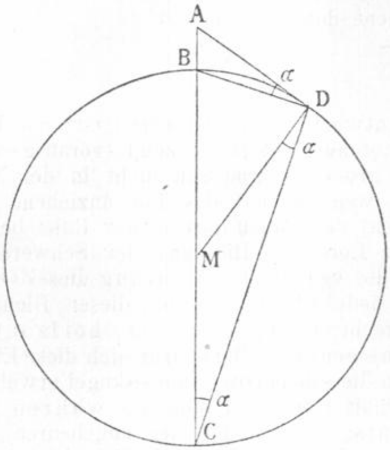
*) Man vergleiche Kleyer, Ebene Trigonometrie, Seite 829, Erkl. 712, 713.

Figur 4.



Frage 6. Wie findet man die Grösse des Horizonts für eine bestimmte Höhe über der Oberfläche der als kugelförmig gedachten Erde?

Figur 5.



Erkl. 9b. Ausführlicher behandelt findet man diesen Gegenstand in Kleyers Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, pag. 816 bis 823.

Erkl. 10. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Winkel, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen, sind einander gleich.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 11. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Hilfsrechnung 1.

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log r = 6{,}80392$$
$$\overline{7{,}10495}$$

$$\log \sqrt{2r} = 3{,}55247$$
$$\log 1{,}08 = 0{,}03342$$
$$\overline{3{,}58589}$$

Erkl. 12. Delambre, Jean Bapt. Joseph (geb. 1749, 19. Sept. zu Amiens, gest. 1822, 19. August zu Paris) nach Lalandes Tode 1807 Prof. der Astronomie am Collège de France.

Man vergleiche Kleyer, Ebene Trigonometrie, Seite 703, 704.

Antwort. Bezeichnet man (siehe Fig. 5) den Erdhalbmesser MB mit r, also den Erddurchmesser BC mit $2r$, die Höhe des Auges über der Meeresfläche, d. i. BA mit h und den Radius des Sichtbarkeitskreises AD mit ϱ, so hat man, da AD eine Kreistangente ist und diese auf dem Radius senkrecht steht:

$$AD \perp DM$$

ferner ist das Dreieck BDC ein Dreieck im Halbkreis und infolge dessen der Winkel BDC ein Rechter. Damit wird:

$$BD \perp DC$$

Daraus folgt (s. Erkl. 10):

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle MDC$$

Da nun (s. Erkl. 11):

$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle MCD$$

so folgt, dass auch:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle MCL$$

Sodann lässt sich leicht nachweisen, dass:

$$\triangle ADB \sim \triangle ADC$$

Denn wie soeben bewiesen ist:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle MCD$$

ferner ist:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAB$$

und somit auch die dritten Winkel gleich. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber:

$$\overline{BA} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AC}$$

und hieraus:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

oder:

$$\varrho^2 = h(2r + h) = 2rh + h^2$$

wofür man, da h^2 gegen $2rh$ sehr klein ist:

$$\varrho^2 = 2rh$$

und demnach:

$$\varrho = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{h}$$

setzen kann. Wird nun:

$$r = 6366738 \text{ m}$$

gesetzt, so folgt nach nebenstehender Hilfsrechnung 1:

$$\varrho = (3{,}55247) \sqrt{h}$$

in Kilometer, wobei die Zahl in der Klammer der Logarithmus von $\sqrt{2r}$ ist.

Nach den Untersuchungen von Delambre verändert indessen die Refraktion die Grösse des Radius des Sichtbarkeitskreises, so dass dieser nicht gleich ϱ, sondern:

$$1) \; \ldots \; \varrho \cdot 1{,}08 = (3{,}58589) \sqrt{h}$$

wird.

Frage 7. Was versteht man unter Zenith und Nadir?

Erkl. 13. Zenith stammt vom arabischen samt, Gegend, vollständig samt-ar-râs, um die Gegend des Kopfes.

Antwort. Denkt man sich im Mittelpunkt des Horizonts eine Senkrechte errichtet und dieselbe nach beiden Seiten hin bis zur scheinbaren Himmelskugel verlängert, so trifft sie dieselbe oben im Zenith oder dem Scheitelpunkt und unten im Nadir oder dem Fusspunkt.

Frage 8. Worin besteht das horizontale Koordinatensystem?

Erkl. 14. Derjenige Punkt des Horizonts, in welchem am 20. März die Sonne aufgeht, wird der Ostpunkt genannt. Der Ort des Sonnenuntergangs an diesem Tage führt den Namen Westpunkt. In der Mitte zwischen diesen Punkten und zwar nach der Richtung, wo die Sonne Mittags steht, liegt der Südpunkt und ihm gegenüber der Nordpunkt.

Antwort. Die Fundamentalebene dieses Systems ist der Horizont des Beobachtungsortes, seine Pole sind das Zenith und das Nadir. Die Koordinate des Scheitelkreises wird das Azimut genannt und gewöhnlich mit a bezeichnet. Die Koordinate des Parallelkreises nennt man die Höhe und bezeichnet sie mit h. Statt der Höhe wird oft auch die Zenithdistanz, welche man mit z bezeichnet und die die Ergänzung von h zu 90^0 bildet, benützt. Es wird demnach:

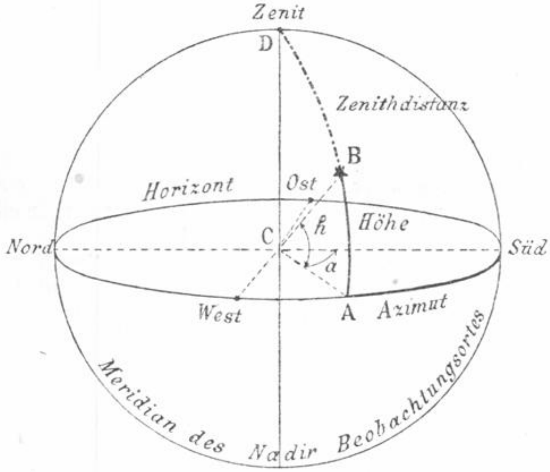
$$2) \quad . \; . \; . \; h + z = 90^0$$

Das Azimut wird vom Südpunkt des Horizonts über West nach Nord gezählt.

In der nebenstehenden Figur ist für den Stern B um dem Beobachtungsort c:

$$\sphericalangle \text{ Süd } CA = \text{Azimut}$$
$$\sphericalangle ACB = \text{Höhe}$$
$$\sphericalangle DCB = \text{Zenithdistanz.}$$

Figur 6.



Die Höhe wird vom Horizont, die die Zenithdistanz vom Zenith gerechnet, es hat demnach:

	der Pol	der Horizont
die Höhe	$= 90^0$	$= 0^0$
die Zenithdistanz	$= 0^0$	$= 90^0$

Derjenige Scheitelkreis, der durch den Südpunkt des Horizonts geht, wird der Meridian des Ortes genannt. Der Meridian wird sodann das Azimut $= 0^0$ haben, ferner wird das Azimut der Punkte:

West	Nord	Ost
$= 90^0$	$= 180^0$	270^0

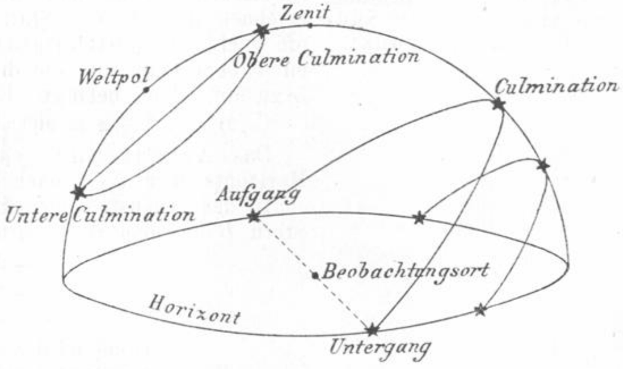
Ist auf irgend welche Art die Richtung des Meridians bestimmt (das wie, wird später gezeigt), so sind damit auch die vier Punkte gegeben. Dieses gibt uns auch ein Mittel, diese Punkte strenger zu definieren, als es in der Erklärung 11 geschehen ist. Wir sagen: Süd, West, Nord, Ost sind jene Punkte des Horizonts, deren Azimut der Reihe nach 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 ist.

Frage 9. Was versteht man unter der Kulmination eines Gestirns?

Erkl. 15. Nehmen wir an, wir befänden uns auf offener See und es sei keine Luft um uns vorhanden [welche, da sie ein brechendes Mittel ist, notwendigerweise Refraktionserscheinungen (s. Refraktion) hervorbringen muss, so dass uns Sterne am Horizont erscheinen, die thatsächlich noch unter dem Horizont vorhanden sind]. Geht nun ein Stern am Horizont auf, so ist seine Höhe gleich Null. Der Stern erhebt sich über den Horizont und seine Höhe wächst, bis sie ihren höchsten Wert erreicht hat, um wieder abzunehmen, bis sie endlich beim Untergang des Sternes den Wert Null erreicht

Antwort. Man sagt, dass ein Gestirn kulminiert, wenn es seine grösste Höhe erreicht hat (siehe Erkl. 15). Das Gestirn befindet sich sodann im Meridian des Beobachtungsortes. Es bietet daher die Bestimmung der Zeit der Kulmination zugleich ein Mittel zur Bestimmung des Meridians und damit auch die vier Punkte Süd, West, Nord, Ost. Es gibt Sterne, die nie auf und nie untergehen, sondern immer über dem Horizont bleiben. Erreichen sie ihre grösste Höhe, so sagt man, sie seien in der oberen Kulmination; erreichen sie ihre kleinste Höhe über dem Horizont, so befinden sie sich in der unteren Kulmination.

Figur 7.



Frage 10. Welche Eigenschaften besitzt das horizontale System und wann wird es angewendet?

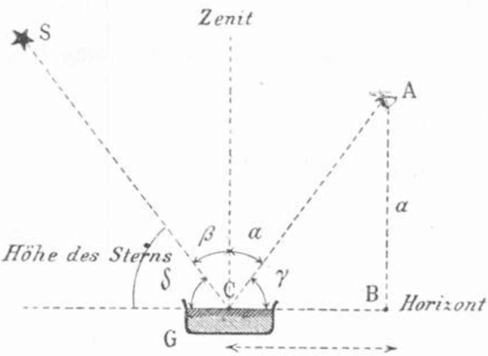
Antwort. Dieses System besitzt den Vorzug leichter Anwendbarkeit, weil seine Fundamentalebene leicht zu erhalten ist. Es hat aber den Nachteil, dass sich die Koordinaten eines Gestirns infolge der Erdbewegung fortwährend ändern. Man wird dasselbe also überall dort verwenden, wo man keinen festen Instrumentenstand besitzt, also in der Schiffahrtskunde und auf den Reisen.

Frage 11. Wie wird die Höhe eines Gestirns bestimmt?

Antwort. Das Prinzip der Höhenbestimmung besteht im Folgenden: Man stelle ein Gefäss (g in der Figur 8) mit Quecksilber auf eine möglichst feste Unterlage. Die Oberfläche des Quecksilbers in der Mitte des Gefässes stellt sodann einen Teil des Horizonts dar. Sieht sodann das Auge A des Beobachters in einer Entfer-

Erkl. 16. Fällt ein Lichtstrahl auf eine ebene, spiegelnde Fläche, so ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel und beide liegen in derselben Ebene. Unter dem Einfallswinkel wird jener Winkel verstanden, den der einfallende Strahl mit der in seinem Fusspunkt errichteten Senkrechten macht (vergl. Figur 9).

Figur 8.



Erkl. 17. Die so auf diese Weise bestimmte Höhe ist indessen die scheinbare Höhe, d. h. die infolge der Refraktion veränderte. Will man die wahre Höhe haben, so muss man von dieser Höhe den durch die Refraktion entstandenen Fehler subtrahieren.

nung b und bei einer Erhebung a über dem Quecksilberniveau einen Stern S, so ist nach dem bekannten Gesetz der Reflexion (siehe Erkl. 16):

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

also da:

$$\sphericalangle \gamma = 90^0 - \sphericalangle \alpha$$
$$\sphericalangle \varrho = 90^0 - \sphericalangle \beta$$

auch:

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta$$

Nun stellt der Winkel δ die Höhe des Sternes S (vergl. Erkl. 17) dar, wir haben also, wenn wir dieselbe mit h bezeichnen:

$$h = \sphericalangle \gamma$$

oder:

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} \gamma$$

Nun ist aber im $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}$$

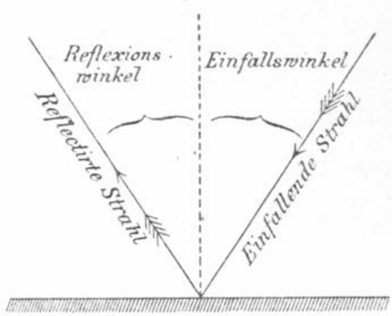
folglich wird:

$$\operatorname{tg} h = \frac{a}{b}$$

oder:

$$\log \operatorname{tg} h = \log a - \log b$$

Figur 9.



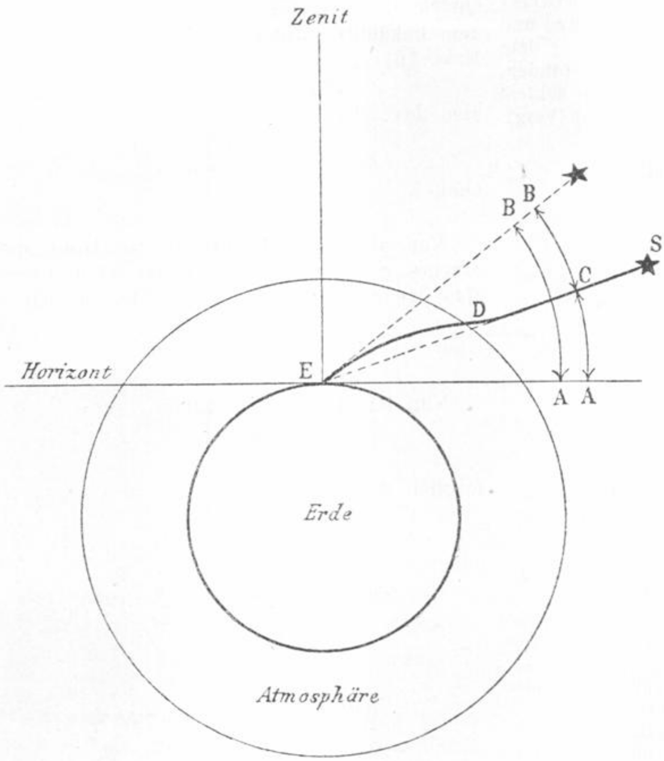
c) Ueber die Refraktion.

Anmerkung 3. Dieser Abschnitt wird am zweckmässigsten erst nach dem folgenden studiert.

Frage 12. Was ist und was bewirkt die Refraktion?

Antwort. Die Luft, die die Erde umgibt, besitzt die Eigenschaft, die Lichtstrahlen von ihrem geradlinigen Wege abzulenken. Diese Eigenschaft der Luft bedingt die Refraktion. Trifft ein Lichtstrahl in der Richtung ED die Grenze der Atmosphäre, so gelangt er nicht auf einem geradlinigen Wege nach E, sondern auf einem krummlinigen, so dass er aus der Richtung BE zu kommen scheint. Der Unterschied dieser

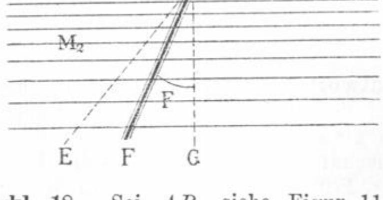
Figur 10.



beiden Richtungen, also der Winkel BEC bildet die sogenannte **Korrektion wegen Refraktion.** Beobachtet man die Höhe des Sternes S, so gibt die Beobachtung den Winkel AEB. Wird von diesem die Korrektion wegen Refraktion, also der Winkel BEC abgezogen, so erhält man die wahre Höhe AEC.

Frage 13. Wie wird die Korrektion wegen Refraktion bestimmt?

Figur 11.



Erkl. 18. Sei AB, siehe Figur 11, die Trennungsfläche zweier Medien M_1 und M_2, wobei M_2 das dichtere Medium sein soll. Trifft sodann ein Strahl DO unter dem Einfallswinkel $DOC = i$ die Grenzfläche, so wird er gebrochen, d. h. er bewegt sich nicht mehr in der Rich-

Antwort. Die Korrektion wegen Refraktion wird entweder durch Beobachtung oder durch Rechnung bestimmt. Wir wollen im folgenden nur die Grundzüge der ziemlich schwierigen Refraktionstheorie geben.

Wir setzen voraus, dass die Erde überall von einer homogenen Atmosphäre mit dem Brechungsindex:

$$\mu = 1{,}000204$$

umgeben ist, deren Höhe gegen den Erdhalbmesser sehr klein ist.

Sei sodann i der Einfallswinkel an der Grenze der Atmosphäre und f der Ablenkungswinkel, so wird (siehe Erkl. 18):

$$\sin i = \mu \sin f$$

In der Figur 12 ist:

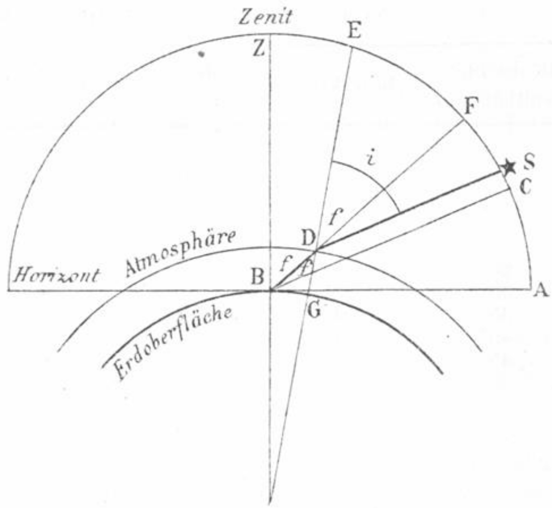
$$i = \sphericalangle EDS$$
$$f = \sphericalangle BDg = \sphericalangle ZBF$$

Es wird also f die beobachtete Zenithdistanz.

Wir können ferner ohne merklichen Fehler:

$$\sphericalangle i (= \sphericalangle EDS) = \sphericalangle ZBC$$

Figur 12.



tung DO, sondern in einer andern Richtung OF, die dem Lote CG näher liegt, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, das brechende Medium M_2 dichter ist. Wir sagen: der Refraktionswinkel $FOG = F$ ist kleiner als der Einfallswinkel. In der Optik (siehe diejenigen Teile der Kleyerschen Encyklopädie, die über die Optik handeln) wird gezeigt, dass die Brechung des Lichts zwischen zwei Mitteln jedesmal in der Art geschieht, dass der Sinus des Einfallswinkels im konstanten Verhältnis zum Sinus des Brechungswinkels steht, dass also:

$$\frac{\sin i}{\sin F} = \mu$$

ist für einen und denselben brechenden Körper. Dieses konstante Verhältnis wird der Brechungsexponent oder Brechungsquotient genannt.

Erkl. 19. Da der Zustand der Atmosphäre wesentlich von der Temperatur und dem Luftdruck abhängt, so müssen diese bei einer genauen Berechnung in Betracht gezogen werden. Für gewöhnlich genügt jedoch die mittlere Refraktion, d. h. jene bei 750 mm und 10⁰ Celsius. Die Grösse 57″ 717, die also aus gegebenen Brechungsquotienten abgeleitet ist, führt den Namen der Refraktionskonstante.

also gleich der wahren Zenithdistanz Z setzen.

Aus der Figur folgt:

$$z = f + df$$

wobei sodann df die Korrektion wegen Refraktion darstellt. Wir haben also:

$$\sin(f + df) = \mu \sin f$$

oder:

$$\sin f \cdot \cos df + \cos f \cdot \sin df = \mu \sin f$$

Da nun df sehr klein ist, so kann man:

$$\cos \cdot df = 1$$
$$\sin df = df \sin 1''$$

setzen, woraus:

$$\sin f + df \sin 1'' \cos f = \mu \sin f$$

oder:

$$df \sin 1'' \cos f = (\mu - 1) \sin f$$

oder:

$$df = \frac{\mu - 1}{\sin 1''} \operatorname{tg} f$$

Dabei drücken wir, um df in Winkelgrössen zu haben, $(\mu - 1)$ in denselben aus, so dass (vergl. Erkl. 19):

$$3) \ldots df = 57'' 717 \cdot \operatorname{tg} f$$

Uebersteigt f nicht 40^0, so stellt diese Formel die Refraktion genau dar, für grössere Werte von f wird sie ungleich komplizierter.

Dieses ist ungefähr der Weg, auf den man die Refraktion numerisch verfolgen kann. Wir werden später sehen, wie man die Refraktion durch Beobachtungen finden kann. Die Resultate der Beobachtung sind folgende:

Tafel I.

Mittlere Refraktion.

(Barometer = 750 mm, Thermometer = 10° Celsius).

Beobachtete Zenithdistanz	Refraktion	Beobachtete Zenithdistanz	Refraktion
0°	0′ 0″	55°	1′ 23″
5°	5	60°	1 40
10°	10	65°	2 9
15°	16	70°	2 38
20°	21	75°	3 33
25°	27	80°	5 16
30°	33	85°	9 47
35°	40	86°	11 39
40°	49	87°	14 15
45°	58	88°	18 9
50°	1 9	89°	29 25
		90°	39 54

Erkl. 20. Man findet nämlich:

$$dz + \beta \operatorname{tg} z \cdot dz = 57''\,717 \operatorname{tg} z$$

und durch Division durch $dz \cdot \operatorname{tg} z$

$$\operatorname{cotg} z + \beta = \frac{57''\,717}{dz}$$

also:

$$\beta = \frac{57''\,717}{dz} - \operatorname{cotg} z$$

Wird nun $z = 80^0$, so wird:

$$dz = 5'\,16'' = 316''$$

und

$$\operatorname{cotg} z = 0 \cdot 176327$$

Wir haben also:

$$\beta = \frac{57''\,717}{316''} - 0 \cdot 176327$$

Man kann die obige Formel so verbessern, dass sie die Refraktion bis zu einer Zenithdistanz von 80° genau darstellt. Zu diesem Zweck setze man:

$$dz = \frac{57''\,717 \operatorname{tg} z}{1 + \beta \operatorname{tg} z}$$

und bestimme β so, dass für $z = 80^0$ $dz = 5'\,16''$ wird.

Man erhält auf diese Weise:

$$4) \; . \; . \; . \; dz = \frac{57''\,717 \operatorname{tg} z}{1 + 0{,}006364 \operatorname{tg} z}$$

Es ist:

$$\log 57''\,711 = 1{,}7613037$$
$$\log 0{,}006364 = 7{,}8037302$$

d) Ueber das Koordinatensystem des Aequators.

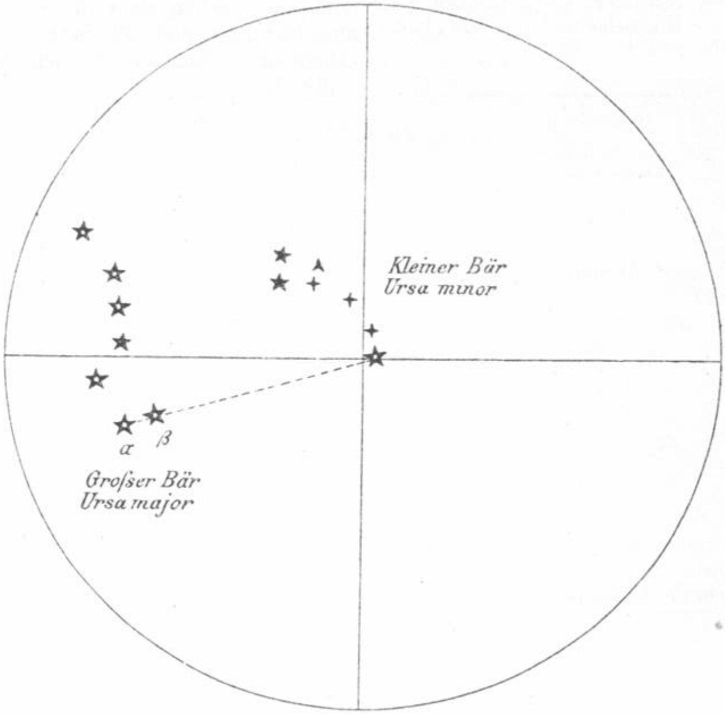
Anmerkung 4. Das Koordinatensystem des Horizonts, welches wir kennen gelernt haben, hat einen grossen Nachteil, insofern die Koordinaten der Gestirne zu jeder Tageszeit andere Werte annehmen. Sie sind daher zur Ortsbestimmung am Himmel nicht verwendbar. Da jedoch diese für die Astronomie begreiflicherweise von grosser Wichtigkeit ist, so müssen wir uns nach einem andern System umsehen, welches uns konstantere Koordinaten liefern würde. Dieses leistet das System des Aequators. Betrachtet man nämlich während einer Nacht die Bewegung der Gestirne, so wird man bald inne, dass sich dieselben so bewegen, als ob sich die ganze scheinbare Himmelskugel um eine Achse drehen würde, die mit der Rotationsachse der Erde übereinstimmt. Wir sehen, dass, wenn wir den Abstand eines Sternes von dieser Achse als Koordinate wählen, dieser konstant sein wird. Wir wollen daher diese Thatsache zur Aufstellung eines Koordinatensystem benutzen.

Da dieses Koordinatensystem für die sphärische Astronomie fundamental ist, so wird dasselbe zum ernsten Studium warm empfohlen und man darf die folgenden Abschnitte nicht eher durchgehen, bis man den gegenwärtigen völlig inne hat.

Frage 14. Was versteht man unter der Weltachse?

Antwort. Durch die Drehung der Erde um ihre Achse von West nach Ost scheint

Figur 13.



Erkl. 21. Das Wort Pol stammt vom griechischen polos.

Erkl. 22. Die Bezeichnung der Sterne mit griechischen Buchstaben führte Bayer in seiner Uranometria, 1603 zu Augsburg erschienen, zuerst ein.

Johann Bayer war Rechtsanwalt in Augsburg. Man weiss, dass er in Baiern geboren wurde, sonst ist weder das Geburts- noch Todesjahr bekannt.

Die alten Astronomen nannten jeden Stern mit einem speziellen Namen.

Das griechische Alphabet lautet:

α	Alpha	ι	Jota	ϱ	Rho
β	Beta	$\varkappa$	Kappa	σ, ς	Sigma
γ	Gamma	λ	Lambda	τ	Tau
δ	Delta	μ	My	υ	Ypsilon
ε	Epsilon	ν	Ny	φ	Phi
ζ	Zeta	ξ	Xi	χ	Chi
η	Eta	o	Omicron	ψ	Psi
ϑ	Theta	π	Pi	ω	Omega

die ganze Himmelkugel sich in entgegengesetzter Richtung, d. h. von Ost nach West um eine Achse zu drehen, die die verlängerte Erdachse ist. Diese Achse heisst die Welt- oder Himmelsachse und ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel die Weltpole, gleichnamig mit den ihnen zugewandten Erdpolen. Man kann die ungefähre Lage des Nordpols am Himmel leicht finden. Zieht man von durch die dem allbekannten Sternbilde des grossen Bären (der grosse Himmelswagen auch genannt) angehörenden Sterne α und β (siehe Figur 13), eine Gerade, so trifft ihre Verlängerung den sogenannten Polarstern (α ursae minoris α des kleinen Bären) der kaum einen halben Grad vom Nordpol absteht.

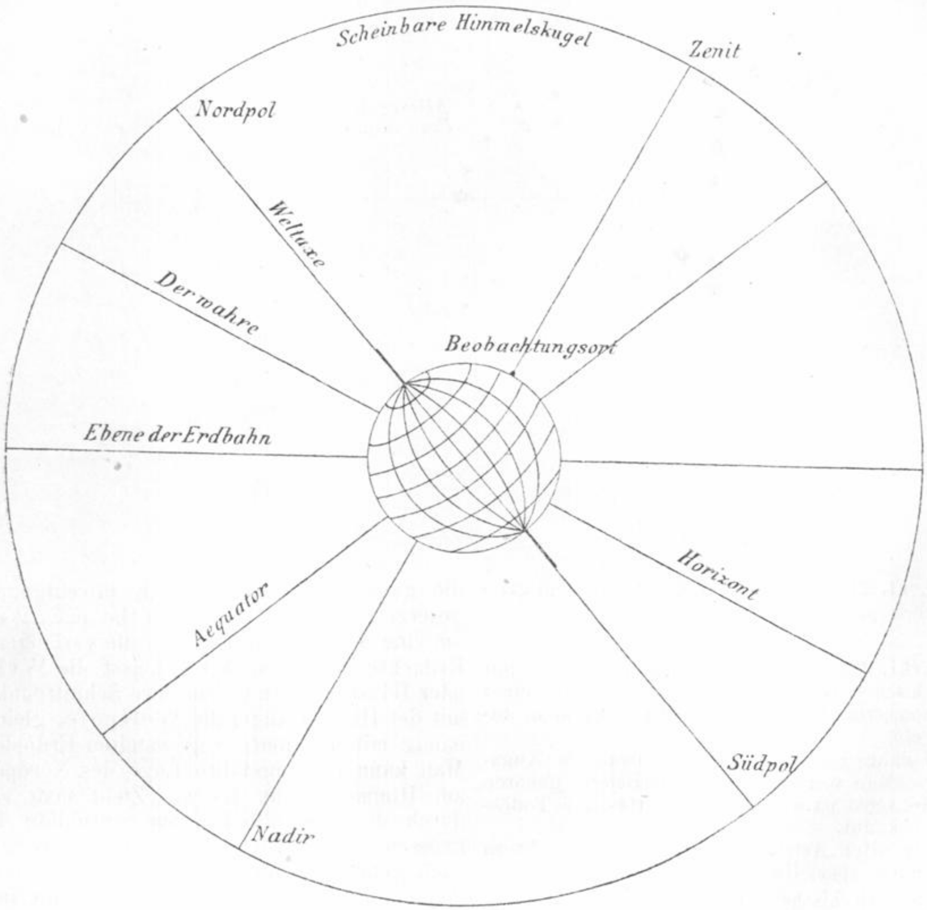
Frage 15. Was versteht man unter dem Himmelsäquator?

Antwort. Derjenige grösste Kreis der Himmelskugel, dessen Ebene auf der Richtung der Weltachse senkrecht steht, wird

Erkl. 23. Das Wort Aequator stammt vom lateinischen aequare, gleich machen, weil der Aequator die Himmelskugel in zwei gleiche Halbkugeln (Hemisphären) teilt.

der Himmelsäquator genannt. Wir werden später sehen, dass die Sonne jedes Jahr am 20. März und 23. September in ihrem scheinbaren Himmelslauf den Aequator beschreibt.

Figur 14.



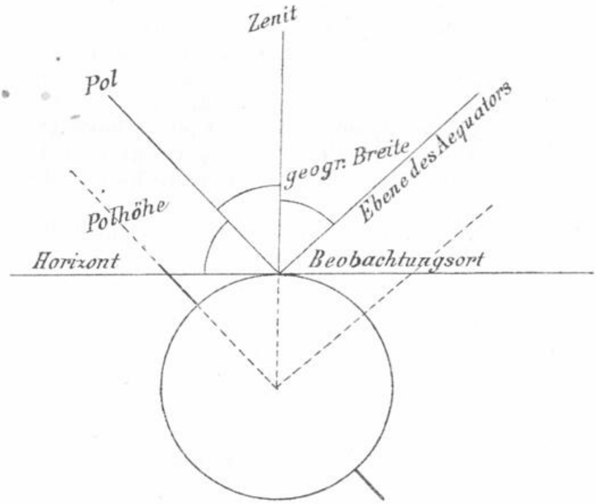
Frage 16. Was versteht man unter der Polhöhe?

Antwort. Unter Polhöhe versteht man den Abstand des Pols vom Horizont. Die Polhöhe ist, wie man aus der Figur 15 entnehmen kann, immer gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes. Es sind nämlich die Winkel Horizont-, Pol- und Zenith-Ebene des Aequators einander gleich, weil ihre Schenkel aufeinander senkrecht stehen.

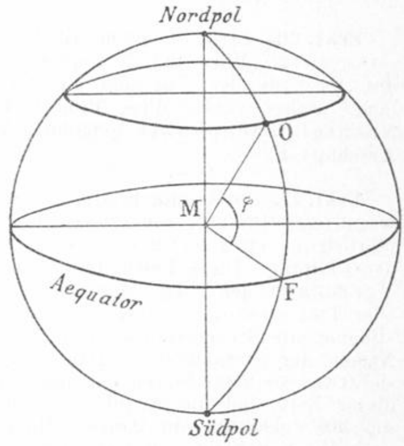
Man pflegt die Polhöhe mit dem griechischen Buchstaben φ zu bezeichnen.

Erkl. 24. Unter der geographischen Breite eines Ortes O auf der Erdoberfläche versteht man die Entfernung FO des Aequators von jenem Ort O gemessen durch den Projektionswinkel (siehe Erkl. 5) des Erdradius des Ortes O auf die Ebene des Erdäquators (vergl. Fig. 16). Je nachdem der Ort auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel der Erde liegt, ist seine Breite eine nördliche oder südliche. Man pflegt die nördliche Breite durch einen positiven Winkel, also $+\varphi$, dagegen die südliche durch einen negativen Winkel, also $-\varphi$ zu bezeichnen. Am Aequator ist die geographische Breite $= 0$, am Nordpol $= +90^0$, am Südpol $= -90^0$. Aus der Definition eines Parallelkreises folgt (siehe Antwort auf die Frage 4), dass alle in einem und demselben Parallelkreis liegenden Orte dieselbe geographische Breite haben.

Figur 15.

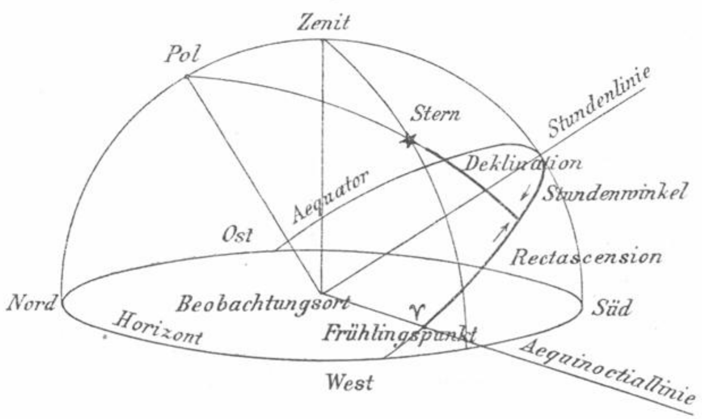


Figur 16.



Frage 17. Welches ist das Wesen des Aequatorsystems?

Figur 17.



Antwort. Die Fundamentalebene dieses Systems ist der Aequator. Die Koordinate des Scheitelkreises wird der Stundenwinkel genannt und mit t bezeichnet. Der Stundenwinkel wird vom Meridian (d. h. dem Scheitelkreis des Südpunktes) über West nach Nord und Ost gezählt. Es hat:

Süd den Stundenwink.		0^0
West „	„	90^0
Nord „	„	180^0
Ost „	„	270^0

Die Koordinate des Parallelkreises führt den Namen Deklination (Abweichung). Sie wird mit δ bezeichnet und vom Aequator gegen den Nordpol als positiv gezählt. Es ist für den:

	Nordpol	Aequator	Südpol
	$\delta = +90^0$	$= 0^0$	$= -90^0$

Die Anfangsrichtung des Koordinatensystems führt den Namen der Stundenlinie.

Frage 18. Was versteht man unter Ekliptik?

Erkl. 25. Ekliptik stammt vom griechischen „ekleipsis“ Verfinsterung. Ekliptik würde also so viel heissen, als Linie der Finsternisse, weil sich Finsternisse nur dann ereignen können, wenn sich der Mond in der Ebene der Ekliptik befindet. (Vergl. Finsternisse.)

Erkl. 26. Steht die Sonne in diesen Punkten (etwa am 20. März und 23. September), so ist auf der Erde der Tag und die Nacht gleich lang. Daher werden diese Punkte Tag- und Nachtgleichenpunkte genannt. Vergleiche Abschnitt F.

Erkl. 27. Die Aequinoktialpunkte sind keineswegs feste Punkte, sondern sie bewegen sich jährlich um etwa 50″ 2 von Ost nach West in der Ekliptik. Diese Bewegung nennt man das Vorrücken der Tag- und Nachtgleichen oder Präcession. Infolge dieses Vorrückens stimmen die Himmelszeichen nicht mehr mit den Namen der Sternbilder überein, nach welchen sie etwa vor 2000 Jahren benannt wurden. In dieser Zeit sind die Aequinoktialpunkte etwa um 30°, also um ein ganzes Himmelszeichen nach West gerückt, so dass das Zeichen des Widders sich jetzt im Standbilde der Fische befindet u. s. w.

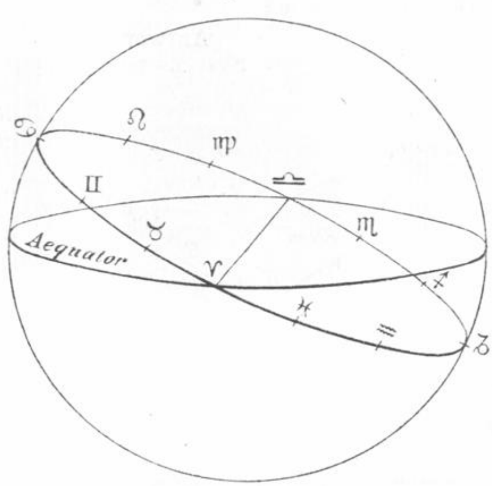
Antwort. Die Ebene der Ekliptik (siehe Erkl. 25) ist die Ebene der Erdbahn um die Sonne. Ihr Schnitt mit der scheinbaren Himmelskugel führt den Namen der Ekliptik. Die Ekliptik schneidet den Aequator in zwei Punkten, welche den Namen der Aequinoktialpunkte führen und zwar wird derjenige, der den scheinbaren Ort der Frühlingssonne darstellt, der Frühlingspunkt genannt und mit dem Zeichen des Sternbildes Widder ♈ bezeichnet. Die Verbindungslinie dieser beiden Aequinoktialpunkte führt den Namen der Aequinoktiallinie oder die Linie der Nachtgleichen (siehe Erkl. 26).

Die Ekliptik wird in zwölf gleiche Teile, Himmelszeichen genannt, eingeteilt, so dass auf jedes Himmelszeichen 30° kommen.

Die Namen der Himmelszeichen sind:

Widder	♈	Waage	♎
Stier	♉	Skorpion	♏
Zwillinge	♊	Schütze	♐
Krebs	♋	Steinbock	♑
Löwe	♌	Wassermann	♒
Jungfrau	♍	Fische	♓

Figur 18.



Frage 19. Was versteht man unter Rectascension eines Sternes?

Erkl. 28. Der Name Rectascension vom lateinischen ascensio recta, abgekürzt AR, d. h. gerade Aufsteigung (zum Unterschied von der in der ältern Astronomie gebrauchten ascensio obliqua, d. h. schiefe Aufsteigung, worunter der Aequatorbogen vom Widderpunkt

Antwort. Unter Rectascension (siehe Erkl. 28) eines Sternes versteht man den Unterschied zwischen dem Stundenwinkel des Frühlingspunktes und demjenigen des Sternes. Die Rectascension wird in einer dem Stundenwinkel entgegengesetzten Richtung von 0° bis 360° gezählt. Man bezeichnet sie mit α

bis zu demjenigen Punkt des Aequators verstanden wurde, der mit dem Sterne zugleich aufgeht). Der Name stammt aus den südlichen Breiten, dort sind nämlich der Aequator und alle Parallelkreise fast senkrecht auf den Horizont gerichtet; die Sterne erheben sich daher fast in senkrechter Richtung über den Horizont.

oder auch *AR.* Sie wird für gewöhnlich nicht in Bogenmass sondern in Zeitmass ausgedrückt.

Frage 20. Was versteht man unter der Sternzeit?

Antwort. Mit dem Namen der Sternzeit bezeichnet man den Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Man bezeichnet sie gewöhnlich mit dem griechischen Buchstaben Θ. Aus der Figur 17 ergibt sich unmittelbar:

$$5) \ldots \Theta = \alpha + t$$

d. h. die Sternzeit ist gleich der Rectascension vermehrt um den Stundenwinkel.

Frage 21. Welche Eigenschaften besitzt das Aequatorialsystem?

Antwort. Die Koordinaten α und δ dieses Systems sind für jeden Fixstern fast konstant, weil sich die Ebene des Aequators sehr wenig ändert und auch der wenig veränderliche Frühlingspunkt an der täglichen Bewegung der scheinbaren Himmelskugel teilnimmt. Das Wesentliche aber ist, dass wir diese Veränderungen genau für eine beliebige Zeit zu bestimmen wissen.

Machen wir daher durch Berücksichtigung dieser Veränderungen diese Koordinaten ganz konstant, d. h. beziehen wir sie auf einen bestimmten, sonst aber beliebigen Zeitpunkt (die Epoche genannt), so eignen sie sich ganz besonders zur Ortsangabe.

Man charakterisiert also ein Gestirn vollkommen, wenn man seine Deklination und Rectascension bezogen auf eine bestimmte Epoche angibt.

Sammlungen solcher Angaben nennt man Sternkataloge.

e) Ueber die Beziehung der Zeit- und Bogengrössen zueinander.

Anmerkung 5. Da man den Lauf der Gestirne zur Zeitmessung verwendet, so ist es oft vorteilhaft, den Stundenwinkel und die Rectascension nicht in Bogengrössen, sondern durch die Zeit ausgedrückt zu haben. Es ist für die Folge wichtig, über die Beziehung dieser zwei Grössen im Klaren zu sein, deshalb soll sie hier auseinandergesetzt werden.

Frage 22. In welcher Beziehung stehen die Zeit- und Bogengrössen zu einander?

Antwort. Die völlige Umdrehung des gestirnten Himmels vollführt sich innerhalb 24 Stunden. Innerhalb dieser Zeit gehen 360^0 durch den Meridian. Wir haben also:

$$24^h = 360^0$$

Hilfsrechnung 1.

$239 : 15 = 15 \cdots\cdots 15^{h}$
225
$14 \times 4 \cdots\cdots\cdots\cdots 56^{m}$
$18 : 15 \cdots\cdots\cdots\cdots 1^{m}$
15
$3 \times 4 \cdots\cdots\cdots\cdots 12^{s}$
$46'' 75 : 15 = \cdots\cdots\cdots\cdots 3^{s}\ 12$
17
20
5

Hilfsrechnung 2.

$15 \times 15 \cdots\cdots\cdots 225^{0}$
$57 : 4 \cdots\cdots\cdots\cdots 14^{0}$
$1 \times 15 \cdots\cdots\cdots\cdots 15'$
$15^{s}\ 12 : 4 \cdots\cdots\cdots\cdots 3'$
$3^{s}\ 12 \times 15 \cdots\cdots\cdots\cdots 46'', 80$

Erkl. 29. Man wird es immer, wenn man eine Tafel zur Hand hat, vorziehen, derartige Verwandlungen mit einer Tafel zu vollführen. Es ist dies eine Entlastung der geistigen Arbeit, also ein Umstand, der insbesondere in der Astronomie, wo man so viel zu rechnen hat, nie hoch genug angeschlagen werden kann, abgesehen davon, dass man der Gefahr, einen Fehler zu begehen, weniger ausgesetzt ist, wenn man sich einer Tafel bedient.

und demnach:

$$1^{h} = 15^{0}$$
$$1^{m} = \frac{15^{0}}{60} = \frac{15' \cdot 60}{60} = 15'$$
$$1^{s} = \frac{15'}{60} = \frac{15'' \cdot 60}{60} = 15''$$

Es entspricht demnach 1 Stunde 15 Graden, 1 Zeitminute 15 Bogenminuten, 1 Zeitsekunde 15 Bogensekunden.

Hat man also Bogengrössen in Zeitgrössen zu verwandeln, so muss man die Grade, Minuten und Sekunden durch 15 dividieren, dabei aber die bei Graden und Minuten bleibenden Reste mit 4 multiplizieren und sie als Minuten resp. Sekunden betrachten. Denn wir hatten:

$$1^{h} = 15^{0}$$

bleibt bei der Division ein Rest r, so sind es Grade, also r^{0}. Nun ist aber:

$$1^{h} = 60^{m} = 15^{0}$$

also:

$$1^{0} = \frac{60^{m}}{15} = 4^{m}$$

also werden r Grade gleich $4r$ Minuten.

So wird, siehe nebenstehende Hilfsrechnung $239^{0}\ 18'\ 46''\ 75 = 15^{h}$, $4 \times 14 + 1$ Minuten, $4 \times 3 + 3$ Sekunden und $0^{s}\ 12$, also:

$= 15^{h}\ 57^{m}\ 15^{s}\ 12$ (siehe Hilfsrechnung 1)

Umgekehrt, wenn Zeitgrössen in Bogengrössen zu verwandeln sind, so muss man die Stunden mit 15 multiplizieren, die Minuten und Sekunden aber durch 4 dividieren. Die jedesmaligen Reste müssen mit 15 multipliziert werden.

Darnach hat man:

$$15^{h}\ 57^{m}\ 15^{s}\ 12$$

$= 225 + 14$ Graden, $15 + 3$ Minuten und $46{,}75$

$= 239^{0}\ 18'\ 46''\ 75$ (s. Hilfsrechnung 2)

Man kann sich ein für allemal Tafeln für solche Reduktionen berechnen. Nachstehend teilen wir solche mit (s. Erkl. 29).

Tafel II.

Verwandlung des Bogens in Zeit.

Grade		Minuten				Sekunden				Sekunden	
°	h m	′	m s	′	m s	″	s	″	s	″	s
1	0 4	1	0 4	31	2 4	1	0,07	31	2,07	0,1	0,01
2	0 8	2	0 8	32	2 8	2	0,13	32	2,13	0,2	0,01
3	0 12	3	0 12	33	2 12	3	0,20	33	2,20	0,3	0,02
4	0 16	4	0 16	34	2 16	4	0,27	34	2,27	0,4	0,03
5	0 20	5	0 20	35	2 20	5	0,33	35	2,33	0,5	0,03
6	0 24	6	0 24	36	2 24	6	0,40	36	2,40	0,6	0,04
7	0 28	7	0 28	37	2 28	7	0,47	37	2,47	0,7	0,05
8	0 32	8	0 32	38	2 32	8	0,53	38	2,53	0,8	0,05
9	0 36	9	0 36	39	2 36	9	0,60	39	2,60	0,9	0,06
10	0 40	10	0 40	40	2 40	10	0,67	40	2,67	1,0	0,07
20	1 20	11	0 44	41	2 44	11	0,73	41	2,73		
30	2 0	12	0 48	42	2 48	12	0,80	42	2,80		
40	2 40	13	0 52	43	2 52	13	0,87	43	2,87		
50	3 20	14	0 56	44	2 56	14	0,93	44	2,93		
60	4 0	15	1 0	45	3 0	15	1,00	45	3,00		
70	4 40	16	1 4	46	3 4	16	1,07	46	3,07		
80	5 20	17	1 8	47	3 8	17	1,13	47	3,13		
90	6 0	18	1 12	48	3 12	18	1,20	48	3,20		
100	6 40	19	1 16	49	3 16	19	1,27	49	3,27		
200	13 20	20	1 20	50	3 20	20	1,33	50	3,33		
300	20 0	21	1 24	51	3 24	21	1,40	51	3,40		
		22	1 28	52	3 28	22	1,47	52	3,47		
		23	1 32	53	3 32	23	1,53	53	3,53		
		24	1 36	54	3 36	24	1,60	54	3,60		
		25	1 40	55	3 40	25	1,67	55	3,67		
		26	1 44	56	3 44	26	1,73	56	3,73		
		27	1 48	57	3 48	27	1,80	57	3,80		
		28	1 52	58	3 52	28	1,87	58	3,87		
		29	1 56	59	3 56	29	1,93	59	3,93		
		30	2 0	60	4 0	30	2,00	60	4,00		

Tafel III.

Verwandlung der Zeit in Bogen.

Stunden		Zeit-Minuten				Zeit-Sekunden				Zeit-Sekunden	
	°		° ′		° ′		′ ″		′ ″		″
1	15	1	0 15	31	7 45	1	0 15	31	7 45	0,1	1,5
2	30	2	0 30	32	8 0	2	0 30	32	8 0	0,2	3,0
3	45	3	0 45	33	8 15	3	0 45	33	8 15	0,3	4,5
4	60	4	1 0	34	8 30	4	1 0	34	8 30	0,4	6,0
5	75	5	1 15	35	8 45	5	1 15	35	8 45	0,5	7,5
6	90	6	1 30	36	9 0	6	1 30	36	9 0	0,6	9,0
7	105	7	1 45	37	9 15	7	1 45	37	9 15	0,7	10,5
8	120	8	2 0	38	9 30	8	2 0	38	9 30	0,8	12,0
9	135	9	2 15	39	9 45	9	2 15	39	9 45	0,9	13,5
10	150	10	2 30	40	10 0	10	2 30	40	10 0		
11	165	11	2 45	41	10 15	11	2 45	41	10 15	0,01	0,15
12	180	12	3 0	42	10 30	12	3 0	42	10 30	0,02	0,30
13	195	13	3 15	43	10 45	13	3 15	43	10 45	0,03	0,45
14	210	14	3 30	44	11 0	14	3 30	44	11 0	0,04	0,60
15	225	15	3 45	45	11 15	15	3 45	45	11 15	0,05	0,75
16	240	16	4 0	46	11 30	16	4 0	46	11 30	0,06	0,90
17	255	17	4 15	47	11 45	17	4 15	47	11 45	0,07	1,05
18	270	18	4 30	48	12 0	18	4 30	48	12 0	0,08	1,20
19	285	19	4 45	49	12 15	19	4 45	49	12 15	0,09	1,35
20	300	20	5 0	50	12 30	20	5 0	50	12 30		
21	315	21	5 15	51	12 45	21	5 15	51	12 45		
22	330	22	5 30	52	13 0	22	5 30	52	13 0		
23	345	23	5 45	53	13 15	23	5 45	53	13 15		
24	360	24	6 0	54	13 30	24	6 0	54	13 30		
		25	6 15	55	13 45	25	6 15	55	13 45		
		26	6 30	56	14 0	26	6 30	56	14 0		
		27	6 45	57	14 15	27	6 45	57	14 15		
		28	7 0	58	14 30	28	7 0	58	14 30		
		29	7 15	59	14 45	29	7 15	59	14 45		
		30	7 30	60	15 0	30	7 30	60	15 0		

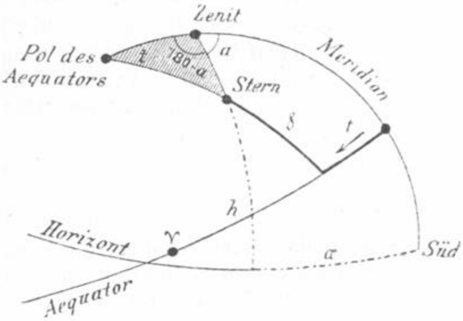
f) Ueber die Verwandlung des horizontalen Koordinatensystems in das aequatoreale und umgekehrt.

Anmerkung 6. Wir haben gesehen, dass das Koordinatensystem des Horizonts oft, z. B. auf der See, das einzig anwendbare ist, auch ist es jenes, auf welches wir alles im praktischen Leben beziehen, indem wir ja z. B. vom Auf- und Untergange der Sterne sprechen u. s. w. Dagegen war das Koordinatensystem des Aequators jenes, welches uns gestattete, die Sterne ein für allemal zu bestimmen. Es gilt nun, die Vorteile beider Systeme zu vereinigen. Dieses wird dadurch erreicht, dass man zeigt, wie beide Systeme ineinander verwandelt werden können.

Frage 23. In welcher Beziehung steht das horizontale System zum Aequatorealen?

Antwort. Vereinigen wir beide Systeme in einer Figur (19), so ergibt sich sofort das Beziehungsdreieck Figur 20.

Figur 19.



Nun gelten nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie für das allgemeine sphärische Dreieck (siehe Figur 21) folgende Formeln:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$
$$\sin a \cos B = \cos b \overset{\sin}{\cos} c - \sin b \sin c \cos A$$

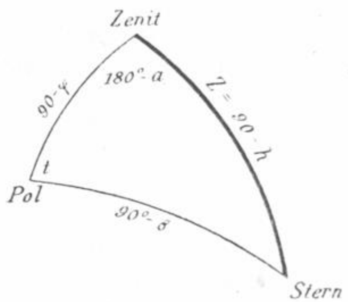
Uebertragen wir diese Formeln auf das Dreieck in der Figur 20, so wird:

$$a = 90^0 - \delta$$
$$b = 90^0 - h = z$$
$$c = 90^0 - \varphi$$
$$A = 180^0 - a$$
$$B = t$$
$$C = \text{Winkel am Stern.}$$

Setzt man diese Werte in die allgemeinen Formeln und beachtet, dass:

$$\cos(90^0 - \beta) = \sin\beta$$
$$\sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$$
$$\cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta$$
$$\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$$

Figur 20.



so folgt:

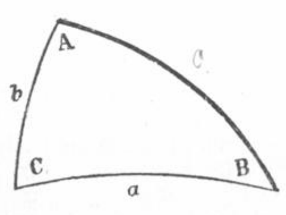
$$\text{I)} \ldots \begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a \\ \cos\delta \sin t = \cos h \sin a \\ \cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a \end{cases}$$

Wir können aber auch:

$$a = 90^0 - h = z$$
$$b = 90^0 - \delta$$
$$c = 90^0 - \varphi$$
$$A = t$$
$$B = 180^0 - a$$
$$C = \text{Winkel am Stern}$$

setzen und erhalten ein zweites Beziehungssystem, nämlich:

Figur 21.



$$\text{II)} \ . \begin{cases} \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \\ \cos h \sin a = \cos\delta \sin t \\ \cos h \cos a = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \end{cases}$$

Die beiden Systeme I) und II) drücken die Beziehung zwischen dem horizontalen und äquatorealen System in mathematischen Zeichen aus. Man kann daher mit ihrer Hilfe ein System in das andere verwandeln.

Frage 24. Wie verwandelt man das horizontale System in das äquatoreale?

Antwort. Das horizontale System wird in das äquatoreale mit Hilfe der Gleichungen I) verwandelt. Die Grösse φ ist für einzelne Erdorte als gegeben anzusehen. Die Grössen a und h liefert die Aufgabe und man kann sodann aus den Gleichungen I) t und δ berechnen (siehe Erkl. 30).

Die Berechnung selbst wird aber viel erleichtert, wenn man neue Variabeln einführt. Setzen wir:

$$\sin h = m \cos M$$
$$\cos h \cos a = m \sin M$$

so lässt sich m und M leicht berechnen, wenn h und a gegeben sind. Denn, dividieren wir die zweite Gleichung durch die erste, so folgt:

$$6) \ldots \operatorname{tg} M = \cos a \operatorname{ctg} h$$

und hiemit:

$$7) \ldots m = \frac{\sin h}{\cos M} = \frac{\cos h \cos a}{\sin M}$$

Führt man die Gleichungen an die Stelle der betreffenden Grössen in die Gleichungen I) ein, so folgt (vergl. Erkl. 31):

$$\sin \delta = m \sin(\varphi - M)$$
$$\cos \delta \sin t = \cos h \sin a$$
$$\cos \delta \cos t = m \cos(\varphi - M)$$

Dividieren wir nun die zweite dieser Gleichungen durch die dritte, so folgt:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\cos h \sin a}{m \cos(\varphi - M)}$$

und wenn man die erste durch die dritte dividiert:

$$\operatorname{tg} \delta = \cos t \operatorname{tg}(\varphi - M)$$

wodurch t und δ gegeben sind.

Stellen wir die für die Berechnung bequemsten Formeln zusammen, so sind es folgende: Man suche m und M aus:

$$\sin h = m \cos M$$
$$\cos h \cos a = m \sin M$$

sodann t und δ aus:

$$8) \ldots \operatorname{tg} t = \frac{\cos h \sin a}{m \cos(\varphi - M)}$$

$$9) \ldots \operatorname{tg} \delta = \cos t \operatorname{tg}(\varphi - M)$$

(vergl. Erkl. 32).

Erkl. 30. Auf den ersten Blick möchte man meinen, dass, wenn h und a gegeben sind, man aus dem System IV die drei Grössen:

$$t, \delta, \varphi$$

berechnen könne, da ja drei Gleichungen vorliegen. Man darf aber nicht vergessen, dass die Gleichungen I) nicht von einander unabhängig sind, vielmehr folgt je aus zwei gegebenen die dritte.

Erkl. 31. Die erste der Gleichungen I) lautet:

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$

ersetzt man $\sin h$ und $\cos h \cos a$ aus den Gleichungen:

$$\sin h = m \cos M$$
$$\cos h \cos a = m \sin M$$

so folgt:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot m \cos M - \cos \varphi \cdot m \sin M$$

oder:

$$\sin \delta = m (\sin \varphi \cos M - \cos \varphi \sin M)$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\sin(\varphi - M) = \sin \varphi \cos M - \cos \varphi \sin M$$

also wird:

$$\sin \delta = m \sin(\varphi - M)$$

ebenso findet man die dritte Gleichung.

Erkl. 32. Da $\delta \leq 90^0$, so ist durch die Formel 9) δ vollkommen bestimmt, nicht so t durch die Formel 8), da ja bekanntlich:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180 + \beta)$$

und man also im Zweifel sein könnte, ob t in diesen oder jenen Quadranten zu liegen kommt. Da aber das Azimut (wie aus der Figur 19 zu ersehen) immer auf derselben Seite des Meridians liegt, wie der Stundenwinkel, so kann man nie im Zweifel sein, in welchem Quadranten man den Stundenwinkel zu nehmen hat.

Frage 25. Wie verwandelt man das äquatoreale System in das horizontale?

Antwort. Um das äquatoreale System in das horizontale zu verwandeln, benützt man das System II. Führt man wieder neue Hilfsgrössen m um M durch die Gleichungen:

$$10 \ldots \begin{cases} \cos \delta \cos t = m \cos M \\ \sin \delta = m \sin M \end{cases}$$

so folgt aus Gleichung II) (vergl. Erkl. 33):

Erkl. 33. Es ist:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

daher, wenn:

$$\sin \delta = m \sin M$$
$$\cos \delta \cos t = m \cos M$$

gesetzt wird:

$$\sin h = m(\sin\varphi \sin M + \cos\varphi \cos M)$$

Nun ist aber:

$$\cos(\varphi - M) = \cos\varphi \cos M + \sin\varphi \sin M$$

also wird:

$$\sin h = m \cos(\varphi - M)$$

Wir finden sodann:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t}{m \sin(\varphi - M)}$$

oder da:

$$m = \frac{\cos\delta \cos t}{\cos M}$$

auch:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t \cos M}{\cos\delta \cos t \sin(\varphi - M)}$$

woraus da:

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

ist:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} t \cos M}{\sin(\varphi - M)}$$

folgt.

$$\sin h = m \cos(\varphi - M)$$
$$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos a = m \sin(\varphi - M)$$

und hieraus analog wie oben:

$$11) \ldots \operatorname{tg} a = \frac{\cos M \operatorname{tg} t}{\sin(\varphi - M)}$$

$$12) \ldots \operatorname{tg} h = \frac{\cos a}{\operatorname{tg}(\varphi - M)}$$

Da das Azimut immer auf derselben Seite liegen muss, wie der Stundenwinkel, so ist damit auch der Quadrant von a bestimmt.

---

g) Gelöste Aufgaben.

Anmerkung 7. Die einführenden Worte zum Abschnitt D. (Anwendungen) sind auch hier zu beherzigen. Das ruhige, besonnene Rechnen ist stets zu empfehlen.

Aufgabe 1. Man hatte auf die in der Antwort auf die Frage 11 angegebene Art die Höhe eines Sternes beobachtet und gefunden:

$$a = 1{,}5 \text{ und } b = 2 \text{ Meter}$$

Welches war die Sternhöhe, ohne Berücksichtigung der Refraktion?

Hilfsrechnung.

$$\log 1{,}5 = 0{,}17609$$
$$\log 2{,}0 = 0{,}30103$$
$$\operatorname{tg} h = 9{\cdot}87506 - 10$$

Man pflegt bei den astronomischen Rechnungen das **log** vor den Winkelfunktionen auszulassen.

Auflösung. Sei h die Höhe des Sternes, so hat man:

$$\operatorname{tg} h = \frac{a}{b}$$

Daher:

$$\log \operatorname{tg} h = \log a - \log b$$

Die nebenstehende Hilfsrechnung 1 liefert:

$$\log \operatorname{tg} h = 9{\cdot}87506$$

Daher wird:

$$h = 36^0\,52'$$

Dieses ist jedoch die scheinbare Höhe, um die wahre zu finden, haben wir noch die Korrektion wegen Refraktion in Abzug zu bringen (nach der Antwort auf die Frage 12).

Aufgabe 2. Wie gross ist die Refraktion für eine Höhe von 20^0?

Hilfsrechnung.

$$\log 57''\,717 = 1{,}76130$$
$$\operatorname{tg} 70^0 = 0{,}43893$$
$$\log A = 2{,}20023$$

Auflösung. Aus der Höhe h findet man die Zenithdistanz z mit Hilfe der Gleichung (siehe Antwort auf die Frage 8):

$$z = 90^0 - h$$

Wir haben also:

$$z = 70^0$$

Da diese Zenithdistanz grösser ist als 40^0,

$$\begin{aligned} \log 0{,}006364 &= 7{,}80373 \\ \operatorname{tg} 70^0 &= 0{,}43893 \\ \hline \log B &= 8{,}24266 \\ B &= 0{,}01748 \\ 1 + B &= 1{,}01748 \\ \log A &= 2{,}20023 \\ \log(1+B) &= 0{,}00753 \\ \hline \log dz &= 2{,}19270 \\ dz &= 155'' 8 \end{aligned}$$

so haben wir (siehe Antwort auf die Frage 13) die Korrektion dz aus der Formel:

$$dz = \frac{57'' 717 \operatorname{tg} z}{1 + 0{,}006364 \operatorname{tg} z}$$

zu rechnen. Die nebenstehende Hilfsrechnung gibt:

$$dz = 2' 36''$$

Aufgabe 3. Unter der geographischen Breite von $52^0 30' 16''$ hat man die Höhe eines Sterns gleich $16^0 11' 44''$, sowie sein Azimut gleich $202^0 4' 15''$ gefunden. Man fragt nach dem Stundenwinkel und der Deklination.

Hilfsrechnung zugleich als Schema.

$$\begin{aligned} \cos a &= 9_n 9669481 \\ \cos h &= 9 \cdot 9824139 \\ \hline \cos a \cos h &= 9_n 9493620 \\ \sin h &= 9 \cdot 4454744 \\ \hline \log M &= 10_n 5038876 \\ M &= -72^0 35' 54'' 6 \\ \varphi - M &= 125^0 6' 10'' 6 \\ \sin M &= 9_n 9796542 \\ \cos a \cos h &= 9_n 9493620 \\ \hline m &= 9 \cdot 9697078 \\ \cos(\varphi - M) &= 9_n 7597036 \\ \hline m \cos(\varphi - M) &= 9_n 7294114 \\ \cos h \sin a &= 9_n 5573184 \\ \hline \operatorname{tg} t &= 9 \cdot 8279070 \\ t &= 213^0 56' 2'' \\ \hline \cos t &= 9_n 9189115 \\ \operatorname{tg}(\varphi - M) &= 0_n 1531135 \\ \hline \operatorname{tg} \delta &= 0 \cdot 0720250 \\ \delta &= +49^0 43' 46'' \end{aligned}$$

Erkl. 34. Man hat allgemein:

$$\cos(180^0 + \beta) = -\cos\beta$$
$$\sin(180^0 + \beta) = -\sin\beta$$

so wird:

$$\cos 202^0 4' 15'' = -\cos 22^0 4' 15''$$
$$\sin 202^0 4' 15'' = -\sin 22^0 4' 15''$$

und später:

$$\cos 213^0 56' 2'' = -\cos 33^0 56' 2''$$
$$\log \operatorname{tg} t = 9 \cdot 8279070$$

gibt:

$$t = 33^0 56' 2''$$

oder:

$$t = 180^0 + 33^0 56' 2'' = 213^0 56' 2''$$

Zufolge der Erkl. 32 hat man den letzteren Wert zu nehmen.

Auflösung. Hier haben wir in üblichen Zeichen:

$$\varphi = 52^0 30' 16''$$
$$h = 16^0 11' 44''$$
$$a = 202^0 4' 15''$$

und gesucht werden t und δ. Die Auflösung des allgemeinen Falles wurde in der Antwort auf die Frage 24 gegeben.

Wir haben zunächst zu rechnen die Grösse M aus der Formel:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\cos a \cos h}{\sin h}$$

Die nebenstehende Hilfsrechnung liefert:

$$M = -72^0 35' 54'' 6$$

Sodann die Grösse m aus:

$$m = \frac{\cos a \cos h}{\sin M}$$

wodurch wir (s. nebenstehende Hilfsrechn.):

$$\log m = 9 \cdot 9697078$$

Hierauf wird:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\cos h \sin a}{m \cos(\varphi - M)}$$

Diese Gleichung liefert (s. nebenstehende Hilfsrechnung):

$$\log \operatorname{tg} t = 9 \cdot 8279070 \text{ (vergl. Erkl. 34)}$$

also:

$$t = 213^0 56' 2''$$

Endlich wird:

$$\operatorname{tg} \delta = \cos t \cdot \operatorname{tg}(\varphi - M)$$

also:

$$\delta = +49^0 43' 46''$$

Wir haben es vorgezogen:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\cos a \cos h}{\sin h}$$

statt einfacher:

$$\operatorname{tg} M = \cos a \operatorname{ctg} h$$

zu schreiben, weil wir sowohl $\cos h$ als auch $\sin h$ in der weiteren Rechnung brauchen und diese also nachgeschlagen werden müssen.

Aufgabe 4. Man weiss, dass die vorhergehende Beobachtung um:

$$18^h\,20^m\,56^s$$

Sternzeit gemacht wurde, welche war die Rectascension des beobachteten Objektes?

Hilfsrechnung.

200^0	13^h	20^m		
20^0	0	40		
3^0		12		
$56'$		3	44^s	
$2''$ ...			0^s	13
	14^h	15^m	44^s	13

Auflösung. Sei Θ die Sternzeit, so wird:

$$\Theta = 18^h\,20^m\,56^s$$

ferner fanden wir:

$$t = 213^0\,56'\,2''$$

oder nach der Tafel II in der Zeit:

$$t = 14^h\,15^m\,44^s$$

Nun besteht nach der Antwort auf die Frage 20:

$$\alpha = \Theta - t$$

wir haben also:

$$\alpha = 4^h\,5^m\,12''$$

Aufgabe 5. Unter der geographischen Breite:

$$\varphi = 52^0\,30'\,16''$$

hat man den Stundenwinkel:

$$t = 213^0\,56'\,2''$$

eines Sternes, dessen Deklination:

$$\alpha = 49^0\,43'\,46''$$

beobachtet. Welches war die Höhe h und das Azimut a des Sternes?

Hilfsrechnung zugleich als Schema.

$$\begin{aligned}
\cos\delta &= 9,8104999 \\
\cos t &= 9_n 9189118 \\
\cos\delta\cos t &= 9_n 7294117 \\
\sin\delta &= 9,8825249 \\
\operatorname{tg} M &= 0_n 1531132 \\
M &= -54^0\,53'\,49'' \\
\varphi - M &= 107^0\,24'\,5'' \\
\cos M &= 9,7597048 \\
\operatorname{tg} t &= 9,8279060 \\
\operatorname{tg} t\cos M &= 9,5876108 \\
\sin(\varphi - M) &= 9,9796545 \\
\operatorname{tg} a &= 9,6079663 \\
a &= 202^0\,4'\,17'' \\
\cos a &= 9,9669468 \\
\operatorname{tg}(\varphi - M) &= 0_n 5038904 \\
\operatorname{tg} h &= 9,4630564 \\
h &= 16^0\,11'\,43''
\end{aligned}$$

Auflösung. Wir haben zunächst nach der Antwort auf die Frage 25 die Grösse M aus den beiden Gleichungen 10) zu berechnen und erhalten:

$$\operatorname{tg} M = \frac{\sin\delta}{\cos\delta\cos t}$$

Sodann wird:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos M \operatorname{tg} t}{\sin(\varphi - M)}$$

und

$$\operatorname{tg} h = \frac{\cos a}{\operatorname{tg}(\varphi - M)}$$

Für die nebenstehende Hilfsrechnung ist zu merken, dass:

$$\sin(90^0 + \beta) = \cos\beta$$
$$\operatorname{tg}(90^0 + \beta) = -\operatorname{ctg}\beta$$

sodass also:

$$\sin 107^0\,24'\,5'' = \cos 17^0\,23'\,57''$$
$$\operatorname{tg} 107^0\,24'\,5'' = -\operatorname{ctg} 17^0\,23'\,57''$$

weil aus:

$$90^0 + \beta = 107^0\,24'\,5''$$
$$\beta = 17^0\,24'\,5''$$

folgt.

---

h) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man berechne die Refraktion für eine Höhe von 30^0.

Anleitung. Analog wie Aufgabe 2 zu behandeln.

Aufgabe 7. Man berechne die Refraktion für eine Zenithdistanz von:

$$64^0\,50'\,20''$$

Anleitung. Nach der Formel 4) in Antwort auf die Frage 13 zu berechnen.

Aufgabe 8. Verwandle in Zeit die Bogengrösse:

$218^0\,13'\,46''$

Anleitung. Nach der Antwort auf die Frage 22 oder mit Hilfe der Tafel II zu behandeln.

Aufgabe 9. Verwandle in Bogen die Zeitgrösse:

$15^h\,29^m\,46^s$

Anleitung. Nach der Antwort auf die Frage 22 oder mit Hilfe der Tafel III zu behandeln.

Aufgabe 10. Es seien gegeben:

$$\varphi = 51^0\,58'\,10''$$
$$h = 9^0\,12'\,48''$$
$$a = 331^0\,18'\,30''$$

zu suchen δ und t.

Anleitung. Analog wie Aufgabe 3 zu behandeln.

Aufgabe 11. Es seien gegeben:

$$\varphi = 30^0\,47'\,44''$$
$$\varrho = 7^0\,42'\,56''$$
$$t = 29^0\;\;2'\,55''$$

zu suchen h und a.

Anleitung. Analog der Aufgabe 5 zu behandeln.

Aufgabe 12. Um $22^h\,15^m\,37^s$ Sternzeit wurde die Höhe und das Azimut eines Sternes beobachtet und aus ihnen der Stundenwinkel:

$$t = 328^0\,44'\,28''$$

durch Rechnung gefunden. Es ist die Rectascension des beobachteten Objektes zu bestimmen.

Anleitung. Analog der Aufgabe 4 zu behandeln.

C. Ueber die Zeit.

Anmerkung 8. Wir haben schon öfters erwähnt, dass die Koordinaten der Gestirne veränderlich, d. h. dass sie gewisse Funktionen der Zeit sind. Um daher sie bestimmen zu können, muss das Argument dieser Funktion, d. h. die Zeit bestimmt sein. Die Zeitbestimmung ist aber nur durch Zeitmessung möglich. Wir haben daher nachzusehen, wie wir am bequemsten und sichersten die Zeit messen könnten. Dazu dient, wie wir aus der Physik wissen, die gleichförmige Bewegung irgend eines Körpers, denn bei dieser werden in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt. Die Strecken sind aber messbar und damit auch die Zeit. Sind wir versichert, dass irgend eine Bewegung eine gleichförmige ist, so genügt die Messung des zurückgelegten Weges zur Bestimmung der Zeit. Die theoretische Physik lehrt nun, dass die Bewegung der Erde um ihre Achse in mehr als einem Jahrtausend als vollkommen gleichförmig betrachtet werden kann. Da nun sich diese Bewegung in der täglichen scheinbaren Bewegung genau abspiegelt, so sehen wir, dass diese zur Messung der Zeit verwendet werden kann. Und in der That ist die scheinbare Himmelskugel die beste Uhr, die wir überhaupt haben. Allein nicht die Sterne, sondern die Sonne ist für unser bürgerliches Leben massgebend und während die Astronomen die Zeit nach den Sternen messen, erfordert es der Weltverkehr, die Zeit nach der Sonne einzurichten. Hier gibt es nun manches zu beachten, weil die Sonne infolge der Erdbewegung eine von den Sternen verschiedene scheinbare Bewegung besitzt, die sich mit der den Sternen gemeinsamen zusammensetzt.

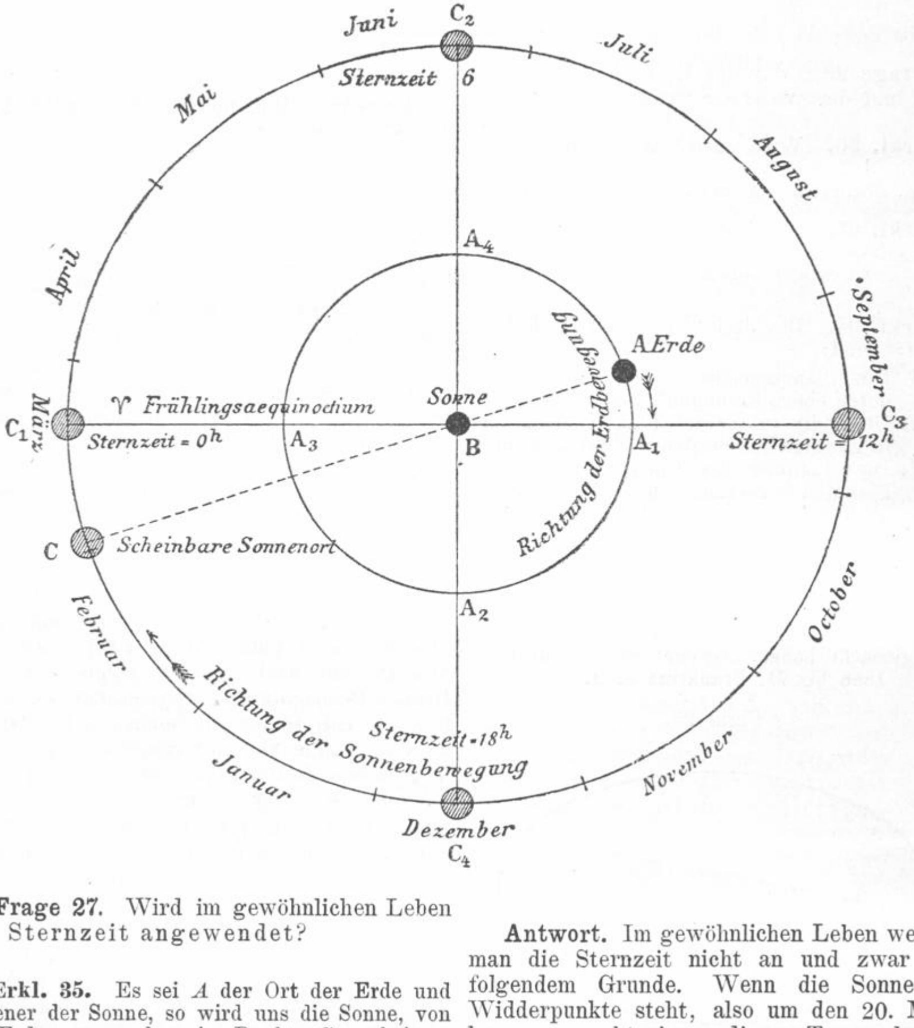
Das eingehende Studium dieser Partie ist sehr zu empfehlen, weil sie sowohl für die Astronomie als auch für das praktische Leben von grosser Wichtigkeit ist.

a) Ueber die Definitionen der Zeitmasse und die Verwandlung der verschiedenen Zeiten ineinander.

Frage 26. Was ist der Sterntag?

Antwort. Der Sterntag ist die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen des Widderpunktes. Man fängt denselben zu zählen an, wenn der Widderpunkt durch den Meridian geht. In diesem Angenblicke haben wir 0^h Sternzeit. Es wird ferner 1^h, $2^h \cdots 24^h$ Sternzeit sein, wenn der Stundenwinkel des Widderpunktes 1^h, $2^h \cdots 24^h$ oder 15^0, $30^0 \cdots 360^0$ beträgt.

Figur 22.



Frage 27. Wird im gewöhnlichen Leben die Sternzeit angewendet?

Erkl. 35. Es sei A der Ort der Erde und B jener der Sonne, so wird uns die Sonne, von der Erde aus gesehen, im Punkte C erscheinen.

Antwort. Im gewöhnlichen Leben wendet man die Sternzeit nicht an und zwar aus folgendem Grunde. Wenn die Sonne im Widderpunkte steht, also um den 20. März herum, so geht sie an diesem Tage nahe mit

Bewegt sich nun die Erde von A nach A_1, so wird sich die Sonne in scheinbar entgegengesetzter Richtung, von C nach C_1 bewegen. Ist die Erde in A_1, so ist die Sonne scheinbar in C_1 und deckt sich mit dem Frühlingspunkte ♈. An diesem Tage geht die Sonne mit dem Frühlingspunkte durch den Meridian, d. h. um 0^h Sternzeit. Bewegt sich die Erde weiter nach A_2, so verlässt die Sonne den Frühlingspunkt und entfernt sich immer mehr und mehr von ihm, bis sie nach C_2 gelangt. Sodann kulminiert die Sonne um 6^h Sternzeit u. s. f.

ihm durch den Meridian, also um 0^h Sternzeit (siehe Erkl. 35). Die Sonne bewegt sich aber in der Ekliptik vorwärts und wird am 23. September im Herbstäquinoktialpunkte stehen, also um 12^h Sternzeit kulminieren. So durchläuft die Zeit der Kulmination der Sonne in einem Jahre alle Zeiten des Sterntages. Nun ist aber für unsere Beschäftigung der Stand der Sonne allein massgebend. Es wird daher bequemer, die Sonne selbst als Zeitmesser zu gebrauchen. Denn würden wir die Sternzeit gebrauchen, so würde z. B. 12 Uhr einmal um die Zeit des Sonnenaufganges, das andere Mal um die Zeit des Mittags und wieder einmal in die tiefe Nacht fallen, wir müssten jedesmal mit der Stunde auch den Tag angeben, was unbequem sein würde.

Frage 28. Was ist die wahre Sonnenzeit und der wahre Sonnentag?

Antwort. Man nennt den Stundenwinkel der Sonne die wahre Sonnenzeit und die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen dieses Gestirns verfliesst, den wahren Sonnentag. Es ist 0^h wahre Sonnenzeit, wenn die Sonne durch den Meridian geht. Die Sonnenzeit wird von 0^h bis 24^h gerechnet. Es ist also um Mittag etwa 0^h, um 12^h nachts etwa 12^h, um 9^h vormittags etwa 21^h wahrer Sonnenzeit.

Allein während die Sternzeit nahezu gleichförmig verfliesst, ist dieses bei der wahren Sonnenzeit nicht mehr der Fall, sie eignet sich daher nicht zur Zeitmessung, denn wir messen ja die Zeit durch die Bewegung eines Körpers, von dem wir voraussehen, dass seine Geschwindigkeit immer dieselbe ist. Die Geschwindigkeit der Sonne ist aber keineswegs gleichförmig. Denn, da sich die Erde um die Sonne bewegt, so bewegt sich auch die Sonne scheinbar mit der der Erde entgegengesetzten Bewegung um die Erde. Die Erde bewegt sich, nach den von Kepler aus Tyge Brahes Beobachtungen abgeleiteten Gesetzen, in einer Ellipse um die Sonne, und zwar so, dass die Linie von der Sonne auf die Erde, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt. Aus der Figur 23 kann man ohne weiteres ersehen, dass in gleichen Zeiten von der Erde ungleiche Bogen durchlaufen werden.

Allein selbst wenn sich die Sonne ganz gleichförmig in der Ekliptik bewegen würde, könnte nicht ihr Stundenwinkel als Zeitmaass dienen. Denn der Stundenwinkel wird auf dem Aequator gemessen, und es entsprechen gleiche Bogen der Ekliptik durchaus nicht gleichen Bogen des Aequators und zwar aus

Erkl. 36. Wir sagen, es ist um Mittag „etwa 0^h“, nicht, es ist zu Mittag genau 0^h (vergl. bezüglich der Erkl. die Frage 30).

Erkl. 37. Man hat die Gleichung:

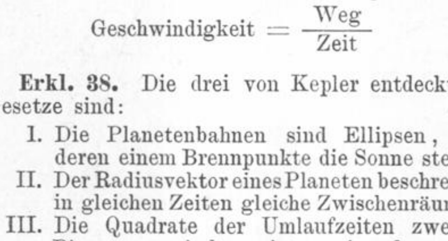
$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

Erkl. 38. Die drei von Kepler entdeckten Gesetze sind:

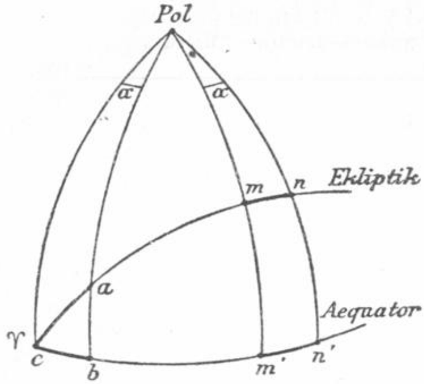
I. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.
II. Der Radiusvektor eines Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Zwischenräume.
III. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander, wie die Kuben der grossen Achsen ihrer Bahnen.

Johann Kepler, geb. 1571 zu Weil in Württemberg, gest. 1609 zu Regensburg. Im Jahre 1600 Gehilfe Tyge Brahes, leitete aus dessen Beobachtungen des Planeten Mars die oben genannten drei Gesetze, die ihn unsterblich gemacht haben. Gesamtwerke herausg. v. Frisch 1858 bis 71, Frankfurt a. M.

Figur 23.



Figur 24.



dem Grunde, weil die Ebene des Aequators gegen jene der Ekliptik unter einem Winkel von ungefähr $23\,{}^1/_2{}^0$ geneigt ist. (Man nennt diesen Winkel die Schiefe der Ekliptik und bezeichnet ihn mit ε, vergl. den Abschnitt F.) Um dieses einzusehen, betrachten wir die Figur 24. Hier wird offenbar:

$$ac > cb$$

dagegen:

$$mn \text{ nahe gleich } m'n'$$

Der Unterschied wird daher um die Aequinoktialpunkte am grössten, und in der Entfernung von 90^0 von ihnen am kleinsten.

Um diesen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, hat man die sogenannte mittlere Sonne eingeführt.

Frage 29. Was versteht man unter der mittleren Sonne?

Antwort. Unter der mittleren Sonne versteht man eine fingierte Sonne, welche genau in derselben Zeit, in welcher die wahre Sonne ihren jährlichen Umlauf in der Ekliptik vollendet, den Himmelsäquator mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, also mit der wahren Sonne eine gleiche Umlaufszeit hat. Diese fingierte Sonne soll zu gleicher Zeit mit der wahren Sonne die beiden Aequinoktialpunkte passieren.

Frage 30. Was versteht man unter der mittleren Zeit?

Antwort. Unter der mittleren Zeit versteht man die durch die mittlere Sonne dargestellte Zeit, also wird z. B. ein mittlerer Tag gleich sein dem Zeitraume zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen der mittleren Sonne. Der Unterschied zwischen der wahren und mittleren Sonnenzeit heisst die Zeitgleichung. Man hat daher:

14) . . . mittlere Zeit = wahre Zeit + Zeitgleichung

15) . . . wahre Zeit = mittlere Zeit — Zeitgleichung

wenn immer:

13) . . . Zeitgleichung = mittlere Zeit — wahre Zeit

Tafel IV.

Zeitgleichung für 1890 und den wahren Berliner Mittag.

Datum		Zeitgleichung		Datum		Zeitgleichung	
Januar	1	$+3^m$	53^s	Juli	4	$+4^m$	6^s
	5	5	43		9	4	55
	10	7	50		14	5	34
	15	9	43		19	6	1
	20	11	19		24	6	15
	25	12	37		29	6	13
	30	13	34				
Februar	3	14	5	August	3	5	56
	9	14	27		8	5	25
	14	14	24		13	4	39
	19	14	2		18	3	40
	24	13	24		23	2	28
					28	1	5
März	1	12	31	September	2	−0	27
	6	11	25		7	−2	6
	11	10	9		12	−3	49
	16	8	45		17	−5	35
	21	7	17		22	−7	20
	26	5	45		27	−9	3
	31	4	13				
April	5	2	43	Oktober	2	−10	41
	10	1	18		7	−12	11
	15	0	0		12	−13	30
	20	−1	9		17	−14	36
	25	−2	7		22	−15	28
	30	−2	54		27	−16	3
Mai	5	−3	27	November	1	−16	20
	10	−3	47		6	−16	16
	15	−3	51		11	−15	51
	20	−3	42		16	−15	5
	25	−3	18		21	−13	58
	30	−2	43		26	−12	32
Juni	4	−1	58	Dezember	1	−10	47
	9	−1	3		6	−8	47
	14	−0	2		11	−6	32
	19	+1	2		16	−4	9
	24	2	7		21	−1	40
	29	3	10		26	+0	49
					31	3	15

Zum besseren Verständnis dieser Tafel sei folgendes ausgeführt. Man habe eine richtig konstruierte Sonnenuhr und eine richtig gehende Räderuhr, die nach mittlerer Zeit gerichtet ist. Die Sonnenuhr wird genau 12^h zeigen, wenn die wahre Sonne kulminiert; die Räderuhr dagegen wird 12^h zeigen, wenn die mittlere Sonne kulminiert.

Zeigt also z. B. am 1. März die Sonnenuhr genau 12^h, so wird es:

$$12^h + 12^m\,36^s$$

also:

$$12^h\,12^m\,36^s$$

mittlerer Zeit sein.

Frage 31. Was versteht man unter einem tropischen Jahr?

Antwort. Das tropische Jahr ist jene Zeit, welche die Erde braucht, um vom Frühlingspunkte bis wieder zu demselben zurückzukehren. Es hat eine Dauer von 365,24222 mittleren Tagen oder 365 Tagen $5^h\,48^m\,47^s\,8$.

Erkl. 39. Das Wort tropisch, vom griech. trepo, wende rührt aus früherer Zeit her, wo man die Jahreslänge nach der Rückkehr der Sonne zu demselben Wendekreise (tropicus, vergl. Abschnitt F.) zu bestimmen pflegte.

Diese Dauer stellt aber die sogenannte mittlere Länge des tropischen Jahres, d. h. das Mittel aus den Längen der tropischen Jahre längerer Zeit. Die Dauer der einzelnen Jahre kann um einige Minuten differieren.

So war z. B. die Dauer des tropischen Jahres vom

20. März 1868 bis zum 20. März 1869
$= 365$ Tagen $5^h\,49^m\,5^s$ mittlerer Zeit

jenes vom

21. März 1869 bis zum 21. März 1870
$= 365$ Tagen $5^h\,58^m\,59^s$ mittlerer Zeit

also um

$$9^m\,54^s \text{ mittlere Zeit}$$

länger. Aber selbst das mittlere tropische Jahr nimmt in einem Jahrhundert um etwa

$$0^s\,6$$

ab.

Erkl. 40. Wir werden später ausführlich zeigen (vergl. Abschnitt F.), dass von dem Stande der Sonne gegen den Aequator, der Wechsel der Jahreszeiten mit allen seinen Folgen für das organische und soziale Leben abhängt.

Das tropische Jahr, welches also durch die Bewegung der Sonne bestimmt wird, ist demnach das für unsere Zeitrechnung, welche ja vorzüglich von der Sonne abhängt, das wichtigste. Unsere Kalenderjahre sind demnach tropische Jahre und das Wort „das Jahr, die Jahreslänge“ wird in der Kalenderkunde einzig und allein für das tropische Jahr resp. seine Länge gebraucht. Von grosser Wichtigkeit wird daher auch die

Bestimmung seiner Länge sein und ihrer Veränderungen. Dieses war aber insbesondere für die ältere Zeit ein sehr schwieriges Problem, da es an genauen Instrumenten mangelte. Wir werden in der Kalenderkunde auf diese Sachen noch zu sprechen kommen.

Frage 32. Was versteht man unter einem siderischen Jahr?

Erkl. 41. Das Wort „siderisch“ stammt vom lateinischen sidus, Stern. Das siderische Jahr bedeutet so viel als Sternjahr.

Antwort. Man versteht darunter jene Zeit, die die Erde braucht, um wieder zu demselben Fixstern zurückzukehren. Das siderische Jahr hat eine mittlere Dauer von 365,25637 mittleren Tagen oder:

$$365 \text{ Tagen } 6^h\, 9^m\, 10^s\, 7$$

Frage 33. Welche Beziehung besteht zwischen der mittleren Zeit und der Sternzeit?

Erkl. 42. Um Bruchteile eines Grades in Minuten zu verwandeln, muss man sie mit 60 multiplizieren und man erhält Minuten. Ebenso ist zu verfahren, wenn Bruchteile von Minuten in Sekunden zu verwandeln sind. Man hat also:

$$\begin{array}{rl} 0{,}9856472 \times 60 & \\ \hline 59{,}138832 & = 59'\,138832 \\ 0{,}138832 \times 60 & \\ \hline 8{,}32872 & = 8''\,32872 \end{array}$$

also:

$$0^0\, 9856472 = 59'\, 8''\, 33$$

Antwort. Da die mittlere Sonne in einem tropischen Jahre mit gleichförmiger Geschwindigkeit den Aequator durchläuft, so bewegt sie sich in einem mittleren Tage um:

$$\frac{360^0}{365{,}24222} = 0^0\, 9856472$$

oder:

$$= 59'\, 8''\, 33$$

oder in der Zeit ausgedrückt:

$$= 3^m\, 56^s\, 555$$

Wenn also an einem Tage die mittlere Sonne zugleich mit dem Widderpunkte kulminiert, so steht sie am folgenden Tage zur Zeit um 59′ 8″ 33 östlich vom Meridian und kulminiert um $3^m\, 56^s\, 555$ später. Mithin ist:

16) . . . 1 mittlerer Tag = einen Sterntag + $3^m\, 56^s\, 555$ Sternzeit

Setzt man einen Tag = 24 Stunden, so wird:

17) . . . 1 mittlerer Tag = $24^h\, 3^m\, 56^s$ Sternzeit

18) . . . 1 Sterntag = $23^h\, 56^m\, 4^s$ mittlerer Zeit

Wir können auch schreiben:

19) . . . 1 mittlerer Tag = $\frac{366{,}242201}{365{,}242201}$ Sterntagen = 1,002738 Sterntagen

20) . . . 1 Sterntag = $\frac{365{,}242201}{366{,}242201}$ mittleren Tagen = 0,997270 mittleren Tagen

Dass in einem tropischen Jahre genau ein Sterntag mehr sein muss, als mittlere Tage darin sind, erklärt sich daraus, dass die Sonne von einem Aequinoktium zum (demselben) andern, durch ihre scheinbare Bewegung von Westen nach Osten, einen vollen Tag gegen die Gestirne verliert.

Frage 34. Wie vergleicht man die Sternzeit mit mittlerer Zeit und umgekehrt?

Antwort. Die Vergleichung der Sternzeit mit der mittleren Zeit und umgekehrt kann mit Hilfe der Gleichungen 19) und 20) erfolgen. Man hat aber Tafeln berechnet, die bequemer sind. Diese Tafeln sagen z. B., dass:

$$2^h\,22^m\,25^s \text{ mittlerer Zeit}$$

gleich sind:

$$2^h\,22^m\,48^s \text{ Sternzeit}$$

nicht aber, dass wenn es:

$$2^h\,22^m\,25^s \text{ mittlerer Zeit}$$

ist, es:

$$2^h\,22^m\,48^s \text{ Sternzeit}$$

ist. Man findet:

2^h	2^h	0^m	$19 \cdot 713$
22^m		22	$3 \cdot 614$
25^s ...			$25 \cdot 069$
	2^h	22^m	$48 \cdot 386$

Tafel V.

Um Sternzeit in mittlere Sonnenzeit zu verwandeln.

Stunden		Minuten				Sekunden			
Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit
	h m s		m s		m s		s		s
1	0 59 50·1704	1	0 59·8362	31	30 54·9214	1	0·9973	31	30·9154
2	1 59 40·3409	2	1 59·6723	32	31 54·7576	2	1·9945	32	31·9126
3	2 59 30·5113	3	2 59·5085	33	32 54·5937	3	2·9918	33	32·9099
4	3 59 20·6818	4	3 59·3447	34	33 54·4299	4	3·9891	34	33·9072
5	4 59 10·8522	5	4 59·1809	35	34 54·2661	5	4·9864	35	34·9045
6	5 59 1·0226	6	5 59·0170	36	35 54·1023	6	5·9836	36	35·9017
7	6 58 51·1931	7	6 58·8532	37	36 53·9384	7	6·9809	37	36·8990
8	7 58 41·3635	8	7 58·6894	38	37 53·7746	8	7·9782	38	37·8963
9	8 58 31·5340	9	8 58·5256	39	38 53·6108	9	8·9754	39	38·8935
10	9 58 21·7044	10	9 58·3617	40	39 53·4470	10	9·9727	40	39·8908
11	10 58 11·8748	11	10 58·1979	41	40 53·2831	11	10·9700	41	40·8881
12	11 58 2·0453	12	11 58·0341	42	41 53·1193	12	11·9672	42	41·8853
13	12 57 52·2157	13	12 57·8703	43	42 52·9555	13	12·9645	43	42·8826
14	13 57 42·3862	14	13 57·7064	44	43 52·7917	14	13·9618	44	43·8799
15	14 57 32·5566	15	14 57·5426	45	44 52·6278	15	14·9591	45	44·8772
16	15 57 22·7270	16	15 57·3788	46	45 52·4640	16	15·9563	46	45·8744
17	16 57 12·8975	17	16 57·2150	47	46 52·3002	17	16·9536	47	46·8717
18	17 57 3·0679	18	17 57·0511	48	47 52·1364	18	17·9509	48	47·8690
19	18 56 53·2384	19	18 56·8873	49	48 51·9725	19	18·9481	49	48·8662
20	19 56 43·4088	20	19 56·7235	50	49 51·8087	20	19·9454	50	49·8635
21	20 56 33·5792	21	20 56·5597	51	50 51·6449	21	20·9427	51	50·8608
22	21 56 23·7497	22	21 56·3958	52	51 51·4810	22	21·9399	52	51·8580
23	22 56 13·9201	23	22 56·2320	53	52 51·3172	23	22·9372	53	52·8553
24	23 56 4·0906	24	23 56·0682	54	53 51·1534	24	23·9345	54	53·8526
		25	24 55·9044	55	54 50·9896	25	24·9318	55	54·8499
		26	25 55·7405	56	55 50·8257	26	25·9290	56	55·8471
		27	26 55·5767	57	56 50·6619	27	26·9263	57	56·8444
		28	27 55·4129	58	57 50·4981	28	27·9236	58	57·8417
		29	28 55·2490	59	58 50·3343	29	28·9208	59	58·8389
		30	29 55·0852	60	59 50·1704	30	29·9181	60	59·8362

Tafel VI.

Um mittlere Sonnenzeit in Sternzeit zu verwandeln.

Stunden		Minuten				Sekunden			
Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit	Mittlere Zeit	Sternzeit
	h m s		m s		m s		s		s
1	1 0 9·8565	1	1 0·1643	31	31 5·0925	1	1·0027	31	31·0849
2	2 0 19·7130	2	2 0·3286	32	32 5·2568	2	2·0055	32	32·0876
3	3 0 29·5694	3	3 0·4928	33	33 5·4211	3	3·0082	33	33·0904
4	4 0 39·4259	4	4 0·6571	34	34 5·5853	4	4·0110	34	34·0931
5	5 0 49·2824	5	5 0·8214	35	35 5·7496	5	5·0137	35	35·0958
6	6 0 59·1388	6	6 0·9857	36	36 5·9139	6	6·0164	36	36·0986
7	7 1 8·9953	7	7 1·1499	37	37 6·0782	7	7·0192	37	37·1013
8	8 1 18·8518	8	8 1·3142	38	38 6·2424	8	8·0219	38	38·1040
9	9 1 28·7083	9	9 1·4785	39	39 6·4067	9	9·0246	39	39·1068
10	10 1 38·5647	10	10 1·6428	40	40 6·5710	10	10·0274	40	40·1095
11	11 1 48·4212	11	11 1·8070	41	41 6·7353	11	11·0301	41	41·1123
12	12 1 58·2777	12	12 1·9713	42	42 6·8995	12	12·0329	42	42·1150
13	13 2 8·1342	13	13 2·1356	43	43 7·0638	13	13·0356	43	43·1177
14	14 2 17·9906	14	14 2·2998	44	44 7·2281	14	14·0383	44	44·1205
15	15 2 27·8471	15	15 2·4641	45	45 7·3924	15	15·0411	45	45·1232
16	16 2 37·7036	16	16 2·6284	46	46 7·5566	16	16·0438	46	46·1259
17	17 2 47·5600	17	17 2·7927	47	47 7·7209	17	17·0465	47	47·1287
18	18 2 57·4165	18	18 2·9569	48	48 7·8852	18	18·0493	48	48·1314
19	19 3 7·2730	19	19 3·1212	49	49 8·0495	19	19·0520	49	49·1342
20	20 3 17·1295	20	20 3·2855	50	50 8·2137	20	20·0548	50	50·1369
21	21 3 26·9859	21	21 3·4498	51	51 8·3780	21	21·0575	51	51·1396
22	22 3 36·8424	22	22 3·6140	52	52 8·5423	22	22·0602	52	52·1424
23	23 3 46·6989	23	23 3·7783	53	53 8·7066	23	23·0630	53	53·1451
24	24 3 56·5554	24	24 3·9426	54	54 8·8708	24	24·0657	54	54·1479
		25	25 4·1069	55	55 9·0351	25	25·0685	55	55·1506
		26	26 4·2711	56	56 9·1994	26	26·0712	56	56·1533
		27	27 4·4354	57	57 9·3637	27	27·0739	57	57·1561
		28	28 4·5997	58	58 9·5279	28	28·0767	58	58·1588
		29	29 4·7640	59	59 9·6922	29	29·0794	59	59·1615
		30	30 4·9282	60	60 9·8565	30	30·0821	60	60·1643

Frage 35. Was versteht man unter der Länge eines Erdortes?

Erkl. 43. Ein durch die beiden Erdpole und den betreffenden Ort der Erdoberfläche gehender Kreis wird der Ortsmeridian genannt. Astronomisch ist der Meridian als der geometrische Ort aller jener Erdorte zu definieren, in welchen die Sonne zu einer und derselben Zeit kulminiert und an dieser für die Astronomie allein massgebenden Definition wollen wir festhalten.

Antwort. Unter der Länge eines Ortes in Bezug auf einen andern, versteht man die Grösse des sphärischen Winkels zwischen den beiden Ortsmeridianen. Gewöhnlich wird ein fester Meridian, z. B. der von Paris, Berlin, Greenwich, Ferro angenommen und von diesem die geographische Länge von 0^0 bis 180^0 östlich — oder westlich + gerechnet.

Wir haben die Beziehungen:

21) . . . Berlin-Paris $= +\, 0^h\, 44^m\, 13^s\, 9 = 11^0\, 3'\, 28''$

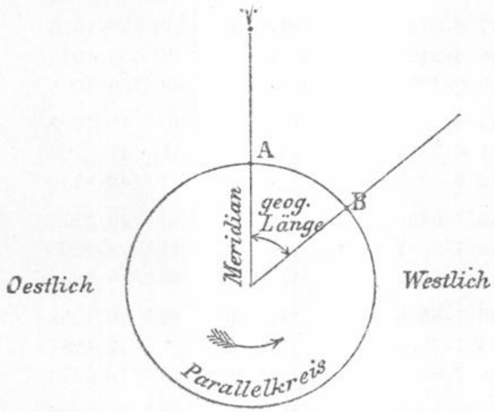
22) . . . Berlin-Greenwich $= +\, 0^h\, 53^m\, 34^s\, 9 = 13^0\, 23'\, 43''$

23) . . . Paris-Greenwich $= +\, 0^h\ \ 9^m\, 21^s\, 0 = 2^0\, 20'\, 15''$

Der Ferroer Meridian liegt genau 20^0 westlich vom Pariser.

Man kann die Länge noch anders deuten. Nehmen wir an, der andere Ort liege westlich vom ersteren Anfangsort. Kulminiert der Widderpunkt am letzteren Orte, so ist er am ersteren noch vor der Kulmination. Er wird am zweiten kulminieren, wenn sich die Erde um einen Winkel gedreht hat, der gleich ist der Länge dieses zweiten Ortes, bezogen auf den ersten. Drückt man diesen Winkel in der Zeit aus, so gibt er jene Zeit an, die zwischen der Kulmination des Widderpunktes am einen und dem andern Orte verfliesst (vergl. Figur 25). Ein Beispiel möge das klar machen.

Figur 25.



Wir wissen, dass z. B. Prag:

$0^h\, 57^m\, 42^s$ östlich von Greenwich

liegt. Was hat das zu bedeuten? es heisst so viel, während in Greenwich es 0^h Sternzeit ist, ist es in Prag schon:

$0^h\, 57^m\, 42^s$

Sternzeit. Es heisst aber auch so viel: Während es in Greenwich 0^h mittlere Zeit ist, ist es in diesem Augenblicke in Prag:

$0^h\, 57^m\, 42^s$

mittlerer Zeit, weil auch die mittlere Sonne in 24 (mittleren) Stunden den Winkel von 360^0 durchläuft.

Erkl. 44. Die dritte Kolumne der Tafel wird später von Nutzen sein. Sie enthält eine Grösse, die man zu der Längendifferenz hinzufügen muss, um sie in Sternzeit zu erhalten, weil dieses oft benötigt wird.

Folgende Tafel gibt die Längenunterschiede einiger Erdorte von Berlin an und zwar sind dieselben:

+ wenn der Erdort östlich

— wenn er westlich

von Berlin liegt.

Erkl. 45 a. Was für den Rechner Logarithmentafeln sind, das sind für den Astronomen die Ephemeriden. Ein jeder Astronom muss solche besitzen. Wir beziehen uns im folgenden stets auf das „Berliner astronomische Lehrbuch für 1890“ und bezeichnen dieses Werk einfach mit B.

Dabei ist aber zu merken: Ist die gegebene Zeit kleiner als die zu subtrahierende Länge in Zeit, so addiert man 24^h zu derselben, und subtrahiert eins vom gegebenen Datum; wenn aber die gegebene Zeit vermehrt um die zu addierende Länge in Zeit 24^h übersteigt, so subtrahiere man 24^h und addiere 1 zum gegebenen Datum.

Tafel VII.

Geographische Koordinaten einiger Erdorte.

Name	Geogr. Breite			Geogr. Länge bezw. auf Berlin			$\Delta\lambda$
Berlin	52°	30′	17″	0h	0m	0s	0,00s
Bonn	50	43	45	+ 0	25	12	+ 4,14
Breslau	51	6	56	— 0	14	34	— 2,39
Christiania	59	54	44	+ 0	10	41	+ 1,76
Dorpat	58	22	47	— 0	53	17	— 8,76
Dresden	51	2	17	— 0	1	20	— 0,22
Göttingen	51	31	48	+ 0	13	48	+ 2,27
Graz	47	4	37	— 0	8	13	— 1,35
Greenwich	51	28	38	+ 0	53	35	+ 8,80
Hamburg	53	33	7	+ 0	13	41	+ 2,25
Karlsruhe	49	0	30	+ 0	19	58	+ 3,28
Kiel	54	20	29	+ 0	12	59	+ 2,13
Kopenhagen	55	41	13	+ 0	3	16	+ 0,54
Krakau	50	3	50	— 0	26	15	— 4,31
Leipzig	51	20	6	+ 0	4	1	+ 0,66
Moskau	55	45	20	— 1	36	42	— 15,89
München	48	8	45	+ 0	7	9	+ 1,17
Olmütz	49	35	43	— 0	15	33	— 2,55
Paris	48	50	11	+ 0	44	14	+ 7,27
Petersburg	59	56	30	— 1	7	38	— 11,11
Pola	44	51	48	— 0	1	48	— 0,30
Prag	50	5	18	— 0	4	7	— 0,68
Pulkova	59	46	19	— 1	7	44	— 11,13
Rom	41	53	54	+ 0	3	40	+ 0,61
Stockholm	59	20	34	— 0	18	39	— 3,06
Strassburg	48	35	0	+ 0	22	30	+ 3,70
Triest	45	38	34	— 0	1	27	— 0,24
Warschau	52	13	6	— 0	30	32	— 5,02
Wien	48	13	55	— 0	11	47	— 1,93
Zürich	47	22	40	+ 0	19	22	+ 3,18

Frage 36. Wie verwandelt man die mittlere (Berliner) Zeit in die wahre und in die Sternzeit?

Erkl. 45 b. Sollte man nicht im Besitze eines Berliner Jahrbuches sein, so kann man sich auch die nötigen Daten (Sternzeit im mittleren Berliner Mittag) nach der Aufgabe 15 berechnen.

Antwort. Zur Verwandlung der mittleren Zeit in die wahre und die Sternzeit benötigt man der Ephemeride. Die Art der Verwandlung wird man am bequemsten aus einem Beispiel sehen. Es sei also z. B. das Datum:

Januar 5. $7^h\ 8^m\ 11^s$ (1890)

mittlerer Berliner Zeit gegeben. Man fragt, welches die wahre und welches die Sternzeit des Augenblicks ist. In B. findet man auf der Seite 2 und 3:

	Zeitgleichung:	Sternzeit im mittl. Berliner Mittag:
Januar 4.	$+ 5^m 20^s$	$18^h 56^m 2^s$
„ 5.	$5^m 43^s$	$18^h 59^m 59^s$
„ 6.	$6^m 9^s$	$19^h 3^m 55^s$
„ 7.	$6^m 35^s$	$19^h 7^m 52^s$

Die Zeitgleichung gilt jedoch für den wahren Berliner Mittag.

Um zunächst die wahre Zeit zu finden, haben wir, da:

Zeitgleichung = mittl. Zeit — wahre Zeit

also:

wahre Zeit = mittl. Zeit — Zeitgleichung

Von der mittleren Zeit ist also die Zeitgleichung für Jan. 5. $7^h 8^m 11^s$ mittlere Zeit zu subtrahieren. Wir haben aber in der Ephemeride bloss die Zeitgleichung für:

Jan. 4. 0^h wahrer Zeit
„ 5. 0^h „ „
„ 6. 0^h „ „
„ 7. 0^h „ „

woraus wir schliessen können, dass diese grösser wird als $5^m 43^s$, aber kleiner als $6^m 9^s$.

Der ungefähre Wert wird also sein:

$$\begin{array}{r} 7^h 8^m 11^s \\ - \quad 6^m \quad \\ \hline 7^h 2^m 11^s \end{array}$$

Den genaueren Wert müssen wir durch Interpolation finden. Bezeichnen wir die Zeitgleichung mit y, die Zeit selbst mit x und setzen:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

so haben wir an die Stelle der unbekannten Beziehung zwischen x und y eine einfachere gesetzt. Wir wollen nun die Koeffizienten:

$$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2$$

so bestimmen, dass uns, wenigstens innerhalb eines gewissen Intervalles, diese Gleichung die unbekannte Beziehung ersetzt.

Wählen wir Jan. 4. 0^h zu jenem Punkte, welchem $x = 0$ entspricht, und setzen:

Jan. 5. $0^h = 1$
Jan. 6. $0^h = 2$

so muss für $x = 0$ die obige Gleichung:

$$y = 5^m 20^s = 320^s$$

liefern, und ebenso für:

$$x = 1, \quad y = 5^m 43^s = 343^s$$
$$x = 2, \quad y = 6^m 9^s = 369^s$$

Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$320^s = \alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2$$
$$343^s = \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2$$
$$369^s = \alpha_0 + 2 \cdot \alpha_1 + 4 \cdot \alpha_2$$

Erkl. 46.

$$320 = \alpha_0$$
$$343 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$
$$369 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten und dritten, so wird:

$$23 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$49 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und subtrahieren sie von der zweiten, so folgt:

$$3 = 2\alpha_2$$

also:

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Da nun:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 23$$

so wird:

$$\alpha_1 = 23 - \alpha_2 = 23 - 1{,}5 = 21{,}5$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\alpha_0 = 320^s\,,\quad \alpha_1 = 21{,}5^s\,,\quad \alpha_2 = 1{,}5^s$$

also wird:

$$y = 320^s + 21{,}5^s x + 1{,}5^s x^2$$

Wir müssen nun x für:

Jan. 5. $7^h\ 2^m\ 11^s$

rechnen. Wir haben für:

Jan. 5. 0^h, $x = 1$

gesetzt und $24^h = 1$ angenommen.

Demnach wird:

$$1^h = \frac{1}{24} \text{ des Tages} = 0{,}04167$$

$$1^m = \frac{1^h}{60} = \frac{0{,}04167}{60} = 0{,}00069$$

$$1^s = \frac{1^m}{60} = \frac{0{,}00069}{60} = 0{,}00001$$

Damit findet man:

$7^h\ 2^m\ 11^s = 0{,}3$

also x für:

Jan. 5. $7^h\ 2^m\ 11^s$

gleich:

$x = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$

Sodann ergibt sich die Zeitgleichung aus:

$$y = 320^s + 21^s\,5 \cdot 1{,}3 + 1{,}5^s \cdot 1{,}7$$

Man findet:

$y = 350^s\ 50$

oder:

$y = 6^m\ 50{,}5^s$

Wir hatten:

Jan. 5. $7^h\ 8^m\ 11^s$ mittl. Berl. Zeit

dazu die Zeitgleichung für diese Zeit:

$-\ 5^m\ 50^s\ 5$

womit sich endlich ergibt:

$7^h\ 2^m\ 20^s\ 5$

als die wahre Berliner Zeit für:

Jan. 5. $7^h\ 8^m\ 11^s$ mittl. Berl. Zeit.

Um nicht zweimal die obigen Multiplikationen machen zu müssen, hat man Tafeln berechnet, die Stunden, Minuten und Sekunden als Teile des Tages liefern. Nachstehend teilen wir eine solche Tafel mit. Sie liefert für den obigen Fall genauer:

7^h 0,291667
2^m 0,001389
11^s ... 0,000127
$7^h\ 2^m\ 11^s = 0{,}293183$

in Teilen des Tages.

Um nun die Sternzeit zu erhalten, beachten wir, dass wenn es:

$18^h\ 59^m\ 58^s\ 66$

am 5. Jan. 1890 0^h war, es am 6. 0^h um $3^m\ 56^s\ 555$ mehr sein muss, also:

$19^h\ 3^m\ 55^s\ 22$

am 7. 0^h wieder um $3^m\ 56^s\ 555$ mehr etc. Denn um so viel nimmt ja die Sternzeit gegen die mittlere Zeit zu.

Für die mittlere Zeit:

$7^h\ 8^m\ 11^s$

Hilfsrechnung 1.

0,04167 × 7
0,29169 0,29169
0,00069 × 2
0,00138 0,00138
0,00001 × 11
0,00011 0,00011
0,29318

Wir können rund 0,3 nehmen.

Ferner wird:

$1{,}3^2 = 1{,}69$

wofür wir rund 1,7 nehmen.

$21^s\ 5 \times 1{,}3$
21 5
6 45 $\qquad 320^s$
27·95 .... $27^s\ 95$

1,5 × 1,7
1 5
1 05
2,55 .... $2^s\ 55$
$350^s\ 50$

Erkl. 47. $3^m\ 56^s\ 555 = 236^s\ 555$

Hilfsrechnung 2.

$\log 236{,}555 = 2\cdot37393$
$\log 0{,}2973 \quad 0\cdot47319 - 1$
$= 1\cdot84712$

Dazu die Zahl $70{,}33^s = 1^m\ 10{,}33^s$

die in Teilen des Tages ausgedrückt 0,2973 gibt, wird also die Sternzeit sein:

$$18^h\ 59^m\ 58^s\ 66 + 0{,}2973 \times 236^s\ 555$$

oder:

$$\begin{array}{r} 18^h\ 59^m\ 58^s\ 66 \\ 1^m\ 10^s\ 33 \\ \hline 19^h\ \ 1^m\ \ 8\cdot 99 \end{array}$$

Fassen wir unsere Rechnung zusammen, so folgt:

Jan. 5. $7^h\ 8^m\ 11^s$ mittl. Berl. Zeit
= Jan. 5. $7^h\ 2^m\ 20^s$ wahrer „ „
= Jan. 5. $19^h\ 1^m\ \ 9^s$ Sternzeit.

Tafel VIII.

Um Stunden, Minuten und Sekunden in Teilen des Tages auszudrücken.

Stunden		Minuten				Sekunden			
h	Teile des Tages	m	Teile des Tages	m	Teile des Tages	s	Teile des Tages	s	Teile des Tages
1	0,041667	1	0,000694	31	0,021528	1	0,000012	31	0,000359
2	0,083333	2	0,001389	32	0,022222	2	0,000023	32	0,000370
3	0,125000	3	0,002083	33	0,022917	3	0,000035	33	0,000382
4	0,166667	4	0,002778	34	0,023611	4	0,000046	34	0,000394
5	0,208333	5	0,003472	35	0,024305	5	0,000058	35	0,000405
6	0,250000	6	0,004167	36	0,025000	6	0,000069	36	0,000417
7	0,291667	7	0,004861	37	0,025694	7	0,000081	37	0,000428
8	0,333333	8	0,005556	38	0,026389	8	0,000093	38	0,000440
9	0,375000	9	0,006250	39	0,027083	9	0,000104	39	0,000451
10	0,416667	10	0,006944	40	0,027778	10	0,000116	40	0,000463
11	0,458333	11	0,007639	41	0,028472	11	0,000127	41	0,000475
12	0,500000	12	0,008333	42	0,029167	12	0,000134	42	0,000468
13	0,541667	13	0,009028	43	0,029861	13	0,000150	43	0,000498
14	0,583333	14	0,009722	44	0,030556	14	0,000162	44	0,000509
15	0,625000	15	0,010417	45	0,031250	15	0,000174	45	0,000521
16	0,656667	16	0,011111	46	0,031944	16	0,000185	46	0,000532
17	0,708333	17	0,011805	47	0,032639	17	0,000197	47	0,000544
18	0,750000	18	0,012500	48	0,033333	18	0,000208	48	0,000556
19	0,791667	19	0,013194	49	0,034027	19	0,000220	49	0,000567
20	0,833333	20	0,013889	50	0,034722	20	0,000231	50	0,000579
21	0,875000	21	0,014583	51	0,035417	21	0,000243	51	0,000590
22	0,916667	22	0,015277	52	0,036111	22	0,000255	52	0,000602
23	0,958333	23	0,015972	53	0,036805	23	0,000266	53	0,000613
24	1,000000	24	0,016667	54	0,037500	24	0,009278	54	0,000625
		25	0,017361	55	0,038194	25	0,000290	55	0,000637
		26	0,018055	56	0,038889	26	0,000301	56	0,000648
		27	0,018750	57	0,039583	27	0,000313	57	0,000660
		28	0,019444	58	0,040278	28	0,000324	58	0,000671
		29	0,020139	59	0,040972	29	0,000336	59	0,000683
		30	0,020823	60	0,041667	30	0,000347	60	0,000694

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Es sollen $9^h\ 15^m\ 6^s$ mittl. Zeit in Sternzeit verwandelt werden.

Auflösung. Die Tafel VI gibt:

9^h .... =	9	1	28·7083
15^m .... =		15	2·4641
6^s .... =			6·0164
Man hat also:	9	16	37·1888

$$9^h\ 15^m\ 6^s \text{ m. z.} = 9^h\ 16^m\ 37{,}2^s \text{ s. z.}$$

Aufgabe 14. Es soll $3^h\ 12^m\ 31^s\ 25$ Sternzeit in mittlere Zeit verwandelt werden.

Auflösung. Man findet zunächst aus der Tafel V:

$$3^h\ 12^m\ 31^s = 3^h\ 11^m\ 59^s\ 46$$

Wir haben ferner:

$$0^s\ 25 = \frac{2^s}{10} + \frac{5^s}{100}$$

also:

$0^s\ 2$ 0,1994		
$0^s\ 05$ 0,0499		
$0^s\ 25$		0·2493
$3^h\ 12^m\ 31^s$	$3^h\ 11^m$	59·4600
	$3^h\ 11^m$	59·7093

Demnach ist:

$$3^h\ 12^m\ 31^s\ 25 = 3^h\ 11^m\ 59^s\ 71$$

Aufgabe 15. Das B. gibt für:

Jan. 1. 1890, 0^h mittl. Berl. Zeit

die Sternzeit zu

$18^h\ 44^m\ 12^s\ 42$

welches ist die Sternzeit am:

Febr. 13. 1890, 0^h mittl. Berl. Zeit?

Auflösung. Da die tägliche Aenderung der Sternzeit nichts anderes ist, als der Ueberschuss des mittleren Sonnentags über den Sterntag, d. h.:

$$3^m\ 56^s\ 555$$

und vom 1. Januar 0^h bis 13. Februar 0^h im ganzen 42 Tage verflossen sind, so wird die fragliche Sternzeit:

$$18^h\ 44^m\ 12^s\ 42 + 42 \times 3^m\ 56^s\ 555$$

d. h.:

$$\begin{array}{r} 18^h\ 44^m\ 12^s\ 42 \\ +\ 2^h\ 45^m\ 35^s\ 31 \\ \hline 21^h\ 29^m\ 47^s\ 73 \end{array}$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{l} 236{,}555 \times 42 \\ \hline 9935^s\ 310 = 2^h\ 45^m\ 47^s\ 73 \end{array}$$

Das B. gibt für diesen Tag:

$$21^h\ 29^m\ 47^s\ 8$$

Für derartige Reduktionen dürfte folgende Tafel von Nutzen sein:

Mittlere tropische Bewegung der Sonne.

Gemeinjahr	$= 365^d$	$= 23^h\ 59^m\ 2{,}70676^s$	$= 24^h$	$-$	$57{,}29324^s$
Schaltjahr	$= 366^d$	$= 24^h\ 2^m\ 59{,}26213^s$	$= 24$	$+$	$2^m\ 59{,}26213$
	300^d	$= 19^h\ 42^m\ 46{,}6083^s$			
	200^d	$= 13\ \ 8\ \ 31{,}0722$			
	100^d	$= 6\ \ 34\ \ 15{,}5361$			
	1^h	$= 0\ \ 0\ \ 9{,}85647$			
	1^m	$= 0\ \ 0\ \ 0{,}16427$			

$1^d =$	$0^h\ 3^m$	$56{,}5554^s$		$10^d =$	0^h	39^m	$25{,}5536^s$
2 =	7	53,1107		20 =	1	18	51,1072
3 =	11	49,6661		30 =	1	58	16,6608
4 =	15	46,2214		40 =	2	37	42,2144
5 =	19	42,7768		50 =	3	17	7,7681
6 =	23	39,3322		60 =	3	56	33,3217
7 =	27	35,8875		70 =	4	35	58,8753
8 =	31	32,4429		80 =	5	15	24,4289
9 =	35	28,9982		90 =	5	54	49,9825

Aufgabe 16. Es sei die Sternzeit für:
Jan. 5. 1890, $7^h\ 8^m\ 10^s$ mittl. Prager Zeit zu finden.

Hilfsrechnung.

7^h	7^h	1^m	$8{\cdot}99^s$
4^m		4	$0{\cdot}66$
4^s			$4{\cdot}01$
	7^h	5^m	$13{\cdot}66^s$
	7	4^m	4
	0^h	1^m	$9{\cdot}66^s$

T	18^h	59^m	59^s
t	7	8	11
$\varDelta$		1	10
	26^h	9^m	20^s

Erkl. 48. Bekanntlich wird die astronomische Zeit von Mittag 0^h bis 24^h gerechnet, so dass die bürgerliche Vormittagsstunde x astronomisch mit $12^h + x$ mit dem Kalenderdatum des vorhergehenden Tages zu nehmen ist. Also ist z. B.:

bürgerlich Januar 4. 9^h Vormittag
= astronom. Januar 3. 21^h

Bei der Sternzeit pflegt man vom Datum abzusehen, weil sie lediglich die Stellung des Widderpunktes gegen den Meridian angeben soll. Wenn daher die Sternzeit grösser als 24^h ist, so subtrahiert man 24^h. So fanden wir:

$$S = 26^h\ 9^m\ 20^s$$

wofür:

$$S = 26^h\ 9^m\ 20^s - 24^h$$

d. h.:

$$2^h\ 9^m\ 20^s$$

zu schreiben ist.

Auflösung. Um überhaupt die Sternzeit S für einen Ort der die Länge λ (östlich $+$, westlich $-$) von Berlin hat, zu finden, für die gegebene mittlere Ortszeit t suche man zunächst aus dem B. die Sternzeit im mittl. Berliner Mittag T. Man hat alsdann:

Sternzeit im mittl. Berliner Mittag $= T$

Die mittlere Ortszeit t ist gleich $t + \lambda$ mittl. Berliner Zeit, also in Sternzeit:

$$t + \lambda + \varDelta$$

wobei $\varDelta$ jenen Betrag darstellt, den man zu $t + \lambda$ mittlerer Zeit hinzufügen muss, um diese Zeit in Sternzeit zu erhalten. Wir haben also:

Sternzeit in Berlin $= T + t + \lambda + \varDelta$

Gehen wir wieder zur Ortssternzeit über, indem wir die Länge $-\lambda$ addieren, so folgt:

$$S = T + t + \lambda + \varDelta - \lambda$$

oder:

$$24) \ldots S = T + t + \varDelta$$

Aus dieser Gleichung folgt auch:

$$25) \ldots t = S - T - \varDelta$$

Diese letztere Gleichung löst die Aufgabe, die mittlere Ortszeit aus bekannter Ortssternzeit zu finden. In unserm Falle haben wir:

$$T = 18^h\ 59^m\ 59^s$$
$$t = 7^h\ 8^m\ 11^s$$
$$\lambda = -\ 4^m\ 7^s$$

also:

$$t + \lambda = 7^h\ 4^m\ 4^s$$

dieses in Sternzeit verwandelt gibt:

$$7^h\ 5^m\ 14^s$$

also die Differenz $\varDelta$ beträgt:

$$\varDelta = 1^m\ 10^s$$

Damit ergibt sich:

$$S = 2^h\ 9^m\ 20^s$$

Aufgabe 17. Es sei gegeben:

1890 Jan. 5. $10^h\ 12^m\ 15^s$ mittl. Prager Zeit welches ist die wahre Prager Zeit?

Auflösung. Um die wahre Zeit zu erhalten, haben wir die Zeitgleichung von der mittleren zu subtrahieren. Da nun das B. nur die Zeitgleichung für Berliner wahre Zeit liefert, so müssen wir die gegebene Prager Zeit in Berliner wahre Zeit (wenigstens genähert) umsetzen. Dieses geschieht durch Hinzufügung der Längendifferenz, also:

$$\begin{array}{r} 10^h\ 12^m\ 15^s \\ -\ 4^m\ \ 7^s \\ \hline 10^h\ \ 8^m\ \ 8^s \end{array}$$ mittl. Berliner Zeit.

Die genäherte Zeitgleichung beträgt $+ 6^m$, also die genäherte Berliner wahre Zeit:

$10^h\ 2^m\ 8^s$ Januar 5. 1890

Für diese haben wir durch Interpolation die genaue Zeitgleichung zu finden. In der Frage 45 fanden wir für diese Zeit die Interpolationsgleichung:

$$y = 320^s + 21{,}5^s\ x + 1{,}5^s\ x^2$$

wobei $x = 1$ am 5. Januar 0^h. Drücken wir nach der Tafel VIII:

$$10^h\ 2^m\ 8^s$$

in Teilen des Tages aus, so folgt:

$$10^h\ 2^m\ 8^s = 0{,}4281$$

wofür man genähert 0,4 nehmen kann. Damit wird:

$$x = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$$

Nun berechnet sich die Zeitgleichung aus:

$$y = 320^s + 21{,}5^s \cdot 1{,}4 + 1{,}5^s \cdot 1{,}96$$

Man findet:

$$y = 353^s\ 04 = 5^m\ 53^s$$

Dieses ist die Zeitgleichung für:

$10^h\ 8^m\ 8^s$ mittl. Berliner Zeit

und auch für:

$10^h\ 12^m\ 15^s$ mittl. Prager Zeit.

Demnach ist die wahre Zeit:

$$10^h\ 12^m\ 15^s - 5^m\ 53^s$$

also gleich:

$$10^h\ \ 6^m\ 22^s$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{rr} 21^s\,5 \times 1{,}4 \cdots\cdots & 320^s \\ 215 & \\ 860 & \\ \hline 3010 \cdots\cdots & 30^s\ 10 \\ 1{,}5 \times 1{,}96 & \\ 15 & \\ 135 & \\ 90 & \\ \hline 2{,}940 \cdots\cdots & 2^s\ 94 \\ \hline & 353^s\ 04 \end{array}$$

Aufgabe 18. Wieviel ist mittl. Berliner Zeit am:

1890 Januar 17. $9^h\ 8^m\ 12^s$ Sternzeit?

Auflösung. Nach B. (oder nach Aufgabe 19 zu berechnen) ist am:

1890 Januar 17. 0^h mittl. Berliner Zeit

die Sternzeit gleich:

$$19^h\ 47^m\ 17^s$$

Es wird an diesem Tage $9^h\ 8^m\ 12^s$ Sternzeit sein, nachdem 24^h Sternzeit erreicht und überdies $9^h\ 8^m\ 12^s$ Sternzeit verflossen, also im Ganzen nach:

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 19\ 47\ 17 \\ \hline 4\ 12\ 43 \\ +\ \ 9\ \ 8\ 12 \\ \hline 13\ 20\ 55 \end{array}$$

$$(24^h - 19^h\,47^m\,17^s) + 9^h\,8^m\,12^s$$

in Sternzeit, d. h. nach:

$$13^h\,20^m\,55^s \text{ Sternzeit}$$

oder nach:

$$13^h\,18^m\,43^s\,8 \text{ mittl. Zeit}$$

Diese Grösse ist also zu 0^h mittlerer Zeit hinzuzufügen und man erhält 1890 Jan. 17. Berlin:

$$9^h\ 8^m\ 12^s \text{ Sternzeit}$$
$$= 13^h\,18^m\,44^s \text{ mittl. Zeit.}$$

Hilfsrechnung 2.

Nach der Tafel V ist:

13^h	$12^h\,57^m\,52^s\,2$
20^m	$19^m\,56 \cdot 7$
55^s ..	$54 \cdot 9$
	$13^h\,18^m\,43^s\,8$

Aufgabe 19. Es ist für Prag

1890 Januar 5. $10^h\,12^m\,11^s$ Sternzeit

in mittlere Zeit zu verwandeln.

Auflösung. Nach der Gleichung 8) haben wir:

$$t = S - T - \varDelta$$

wobei:

$$S = 10^h\,12^m\,11^s$$
$$T = 18^h\,59^m\,59^s$$

nach B. Die Längendifferenz in Sternzeit ausgedrückt, gibt:

$$-4^m\,8^s$$

Es ist demnach $10^h\,12^m\,11^s$ Prager Sternzeit gleich:

$$10^h\,12^m\,11^s + 4^m\,8^s = 10^h\,16^m\,19^s$$

Berliner Sternzeit oder in mittlerer Zeit:

$$= 10^h\,14^m\,38^s$$

Also ist:

$$\varDelta = 10^h\,16^m\,19^s - 10^h\,14^m\,38^s$$

oder:

$$\begin{aligned} \varDelta &= 1^m\,41^s \\ T &= 18^h\,59^m\,59^s \\ \hline -(T+\varDelta) &= -19^h\ \ 1^m\,40^s \\ S &= 34^h\,12^m\,11^s \\ \hline t &= 15^h\,10^m\,31^s \end{aligned}$$

Hilfsrechnung.

Nach der Tafel V ist:

10^h	$9^h\,58^m\,21^s \cdot 7$
16^m	$15^m\,57^s \cdot 9$
19^s ...	$18^s\ 9$
	$10^h\,14^m\,38^s\ 0$

Aufgabe 20. Man berechne aus folgenden Angaben des Berliner Jahrbuches die Länge des tropischen Jahres.

1870 März

$$20) \ldots \begin{cases} \alpha_\odot = 23^h\,58^m\,44^s\,5 \\ \delta_\odot = -0^0\,8'\,11''\,0 \end{cases}$$

$$21) \ldots \begin{cases} \alpha_\odot = 0^h\,2^m\,22^s\,8 \\ \delta_\odot = +0^0\,15''\,29''\,8 \end{cases}$$

1871 März

$$20) \ldots \begin{cases} \alpha_\odot = 23^h\,57^m\,51^s\,7 \\ \delta_\odot = -0^0\,13'\,55''\,7 \end{cases}$$

$$21) \ldots \begin{cases} \alpha_\odot = 0^h\,1^m\,30^s\,2 \\ \delta_\odot = +0^0\,9'\,46''\,3 \end{cases}$$

Erkl. 49. Man bezeichnet die Sonne nach dem Vorgang der alten Astronomen einfach mit dem Symbol $\odot$. Sodann bezeichnet:

$\alpha_\odot$ die Rectascension der Sonne

$\delta_\odot$ die Deklination der Sonne.

Auflösung. Es sei (vergl. Figur 26) S der Standpunkt der Sonne am 20. März und S' jener am 21. März, so geht der Mittelpunkt der Sonne, wie aus den nebenstehenden Angaben ersichtlich (indem die Deklination ihr Zeichen ändert) durch den Aequator zwischen diesen zwei Tagen.

In der Zeichnung ist:

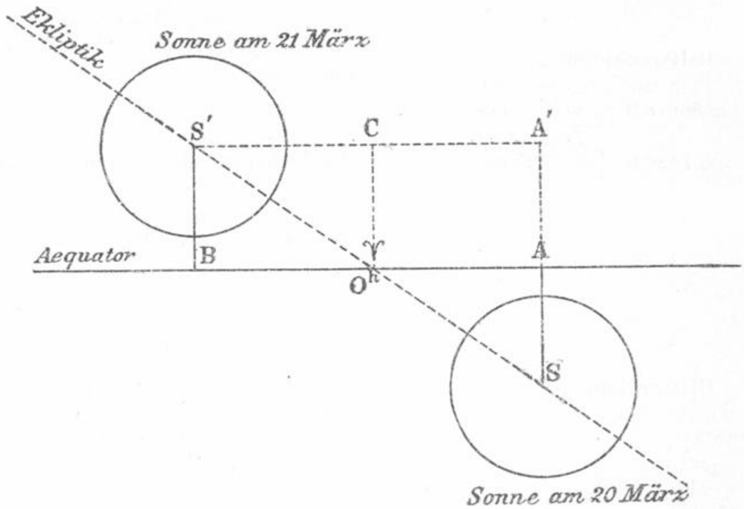
$$AS = \delta_\odot \text{ am 20. März}$$
$$BS' = \delta_\odot \text{ am 21. März}$$

ferner ist:

$$VA = 24^h - \alpha_\odot \text{ am 20. März}$$
$$VB = \alpha_\odot \text{ am 21. März}$$

Im Punkte S befindet sich der Mittelpunkt der Sonne am 20. um 12^h mittlerer Berliner Mittag.

Figur 26.



Fragen wir, wann befindet sich die Sonne im Punkte V? Wir brauchen dann nur zu wissen, um wieviel sich die Deklination der Sonne in einer Sekunde ändert.

Vom 20. März bis 21. März vergingen zwischen den beiden Kulminationen der Sonne (die Angaben sind auf den mittleren Berliner Mittag bezogen) offenbar:

$$(24^h - 23^h\,58^m\,44^s\,5) + 24^h + 0^h\,2^m\,22^s\,8$$

also:

$$\begin{array}{r} 24^h\,1^m\,15{,}5 \\ +\,0^h\,2^m\,22^s \\ \hline 24^h\,3^m\,38^s\,3 \end{array} \text{ Sternzeit.}$$

In dieser Zeit verändert sich die Deklination der Sonne um:

$$\begin{array}{r} 0^0\;\;8'\,11''\,0 \\ +\,0^0\;15'\,29''\,8 \\ \hline 23'\,40''\,8 \end{array}$$

In der obenstehenden Figur 26 wird:

$$AB = A'S' = 24^h.3^m\,38^0\,3$$
$$A'S = AS + BS' = 23'\,40''\,8$$

ferner:

$$AS = 8'\,11''\,0$$

Wir haben dann die Proportion:

$$AV : AS = A'S' : A'S$$

woraus:

$$AV = \frac{AS}{A'S} \cdot A'S'$$

folgt.

Verwandeln wir alles in Sekunden, so wird (siehe nebenstehende Hilfsrechnung 1):

$$AS = 491''$$
$$A'S = 1420{,}8''$$
$$A'S' = 86618{,}3^s$$

Hilfsrechnung 1.

$$8'\,11'' = 8\cdot 60 + 11 = 480 + 11 = 491$$
$$23'\,40''\,8 = 23\cdot 60 + 40{,}8 = 1380 + 40{,}8$$
$$= 1420{,}8$$
$$24^h\,3^m\,38^s\,3 = 24\cdot 3600 + 3\cdot 60 + 38{,}3$$
$$= 86400 + 180 + 38{,}3 = 86618{,}3$$

$$\begin{array}{r} 3600\cdot 24 \\ \hline 7200 \\ 14400 \\ \hline 86400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 86400 \\ 180 \\ 38{,}3 \\ \hline 86618{,}3 \end{array}$$

Wir haben also:

$$AV = \frac{491}{1420,8} \cdot 86618,3^s$$

Man findet (siehe nebenstehende Hilfsrechnung 2):

$$AV = 29934^s \text{ Sternzeit.}$$

Es war demnach 29934^s Sternzeit nach der Kulmination der Sonne am 20. März 1870 der Anfang des tropischen Jahres.

Berechnet man ebenso das Ende des Jahres aus den Daten für das Jahr 1871, so folgt:

$$AV = \frac{835,7}{1422} \cdot 86618,5 = 50905^s \text{ Sternzeit}$$

mithin war das Ende des tropischen Jahres 50905^s Sternzeit nach der Kulmination des Sonnenmittelpunktes am 20. März 1871.

Das Jahr dauerte also:

mittl. Berl. Mittag 1870 März 20. — 29934^s Sternzeit

bis

mittl. Berl. Mittag 1871 März 20. + 50905^s Sternzeit

also:

365 Sonnentage + $(50905 - 29934)^s$ Sternzeit

das ist:

365 Sonnentage + 20971^s Sternzeit

Verwandelt man die Sternzeit in mittlere Zeit (nach der Tafel V) so folgt (siehe nebenstehende Hilfsrechnung 3) das Ergebnis:

365 Tage $5^h\,48^m\,34^s$

als die Länge des tropischen Jahres 1870 bis 1871.

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \log 491 &= 2\cdot6910815 \\ \log 86618,3 &= 4\cdot9376097 \\ \hline &\ 7\cdot6286912 \\ \log 1420,8 &= 3\cdot1525329 \\ \hline \log x &= 4\cdot4761583 \\ \text{num } x &= 29934 \end{aligned}$$

Hilfsrechnung 3.

$3\cdot20971^s = 20971 : 3600 = 5^h$

$$\begin{array}{lll} 18000 & & \\ \hline 2971 : 60 & = & 49^m\ 31^s \\ 240 & & \\ \hline 571 & & \\ 540 & & \\ \hline 31 & & \\ \hline & & 5^h\ 49^m\ 31^s \text{ Sternz.} \end{array}$$

nach der Tafel V:

$$\begin{array}{lr} 5^h \ldots\ldots\ldots\ldots & 4^h\ 59^m\ 10\cdot85 \\ 49^m \ldots\ldots & 48^m\ 51\cdot97 \\ 31^s \ldots & 30\cdot91 \\ \hline & 5^h\ 48^m\ 33\cdot73 \text{ mittl. Zeit} \end{array}$$

wofür wir abkürzend

$5^h\,48^m\,34^s$ mittlerer Zeit

setzen.

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 21. Es soll $9^h\,5^m\,48^s$ Sternzeit in mittlere Zeit verwandelt werden.

Anleitung. Mit Hilfe der Tafel V zu berechnen.

Aufgabe 22. Es ist das bürgerliche Datum:

März 4. 7^h Nachmittags

und

März 5. 3^h Vormittags

in das astronomische zu verwandeln.

Anleitung. Nach der Erkl. 48 zu berechnen.

Aufgabe 23. Nach B. ist für den mittl. Berliner Mittag 10. März 1890:

die Sternzeit $= 23^h\,12^m\,18^s\,2$

welches ist die Sternzeit am 30. März 1890 im mittl. Berliner Mittag?

Anleitung. Nach Aufgabe 15 zu behandeln.

Aufgabe 24. Man hat für Berlin 1890 Nov. 1. 0^h die Sternzeit:

$$14^h\,42^m\,45^s\,2$$

welches ist die Sternzeit am 10. Nov. 1890 um $5^h\,3^m\,12^s$ mittl. Berliner Zeit?

Anleitung. Nach Aufgabe 15 zu behandeln.

Aufgabe 25. Man finde für 1885 den 8. Januar auf $81^0\,37'$ östliche Länge von Greenwich für die wahre Zeit $4^h\,15^m\,24^s$ die entsprechende mittlere, wenn die Zeitgleichung für diesen Tag und für mittl. Greenw. Mittag:

$$= 7^m\,7^s\,2$$

ist und jene für den folgenden:

$$= 6^m\,41^s\,8$$

ist.

Anleitung. Nach Frage 36. Die Aenderung der Zeitgleichung kann hier als proportional der Zeit angenommen werden.

Aufgabe 26. Welches ist die Sternzeit für:

1849 Juni 9. $9^h\,5^m\,23^s\,6$ wahrer Berliner Zeit wenn für den wahren Berliner Mittag:

1849 Juni 8.	die Sternzeit	$= 5^h\,5^m\,30^0\,8$
9.	„ „	$= 9^m\,38^s\,7$
10.	„ „	$= 13^m\,47^s\,0$

Anleitung. Nach Frage 36 zu behandeln.

D. Anwendungen.

Anmerkung 9. Wir haben im Vorhergehenden die Beziehungen zwischen dem äquatorealen und horizontalen Koordinatensystem entwickelt und gezeigt, wie man das eine System in das andere verwandeln kann. Wir wollen nun zeigen, dass die gewonnenen Gleichungssysteme I und II in der That der denkbar sparsamste Ausdruck aller von der täglichen Bewegung der Erde abhängenden Erscheinungen sind, d. h. dass sich aus ihnen alle Erscheinung der täglichen Bewegung ableiten lassen. In dem weiteren Abschnitte b) werden sodann einige Probleme gelöst, die teils für die praktische Astronomie, teils für die Folge wichtig sind.

Bei allen diesen Anwendungen wird dem Lernenden das selbständige Nachrechnen der entwickelten und gelösten Probleme empfohlen. Es wird zunächst gut sein, das Schema für die Rechnung einfach abzuschreiben, bei den nächsten Anwendungen der ungelösten Aufgaben soll man es versuchen, das Schema sich selbst zu bilden. Auch ist jedesmal nachzusehen, ob sich das gegebene Schema nicht einfacher schreiben lässt, damit man so wenig als möglich Ziffern und Zahlen zu schreiben hat. Es ist dieses deshalb wichtig, weil man einerseits an Zeit erspart und andererseits den Abschreibefehlern weniger ausgesetzt ist. Es mag noch bemerkt werden, dass in dem vorliegenden Buche die Schemata aus pädagogischen Rücksichten nicht die einfachste Gestalt haben.

Man wird sich bei der Nachrechnung einiger wenigen Beispiele überzeugen, dass das fehlerfreie Rechnen eine Kunst ist, daher unterlasse man nicht, wenn es möglich ist, sich durch eine Probe zu überzeugen, ob man richtig gerechnet hat.

Wichtigere Rechnungen werden in der Astronomie immer doppelt und zwar unabhängig von einander gerechnet.

Im übrigen ist das in der allgemeinen Einleitung an der Spitze des Buches Gesagte zu beherzigen.

---

a) Ueber die Erscheinungen der täglichen Bewegung.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

$$\text{I a)} \ldots \sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a$$
$$\text{I b)} \ldots \cos\delta \sin t = \cos h \sin a$$
$$\text{I c)} \ldots \cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a$$
$$\text{II a)} \ldots \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\text{II b)} \ldots \cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$
$$\text{II c)} \ldots \cos h \cos a = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t$$

Sternzeit (Θ) = Rectascension (α) + Stundenwinkel (t)

$$\Theta = \alpha + t$$

Frage 37. Wie findet man die Zeit des Auf- und Untergangs eines Fixsterns, dessen Deklination und Rectascension gegeben ist?

Antwort. Befindet sich der Fixstern am Horizonte, so ist $h = 0$, also haben wir, wenn wir den zugehörigen Stundenwinkel mit t_0 bezeichnen, nach IIa):

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_0$$

und hieraus:

$$26) \ldots \cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

Diese Formel liefert für eine bestimmte geographische Breite φ den Stundenwinkel des Auf- und Unterganges.

Da man nun auch die Rectascension des Sternes kennt, so erhält man nach der Formel:

$$\Theta = \alpha + t_0$$

die Grösse Θ, d. h. die Sternzeit des Auf- und Unterganges und aus dieser die mittlere Ortszeit nach Aufgabe 19.

Um die Zeit des Aufganges zu erfahren, betrachten wir die Figur 27, In derselben ist:

$$\alpha = \text{Rectascension von } S = ED$$
$$t_0 = \text{Stundenwinkel von } S = CAFD$$

für den Aufgang. Die Sternzeit Θ_0 Aufganges ist $CAFDE$. Da nun:

$$CAFDE = CAFD + DE$$

so wird, wie bekannt:

$$27) \ldots \Theta_0 = \alpha + t_0$$

Wir haben also den berechneten Wert von t_0 einfach zu der gegebenen Rectascension zu addieren, um die Sternzeit des Aufganges zu erhalten.

Für den Untergang ist der Stundenwinkel von S gleich:

$$t_1 = CA = CD = 360^0 - CAFD$$

oder:

$$t_1 = 360^0 - t_0$$

Die Sternzeit des Unterganges ist aber:

$$\Theta_1 = \alpha + t_1$$

also:

$$\Theta_1 = \alpha + 360^0 - t_0$$

oder:

$$28) \ldots \Theta_1 = 360^0 + (\alpha - t_0)$$

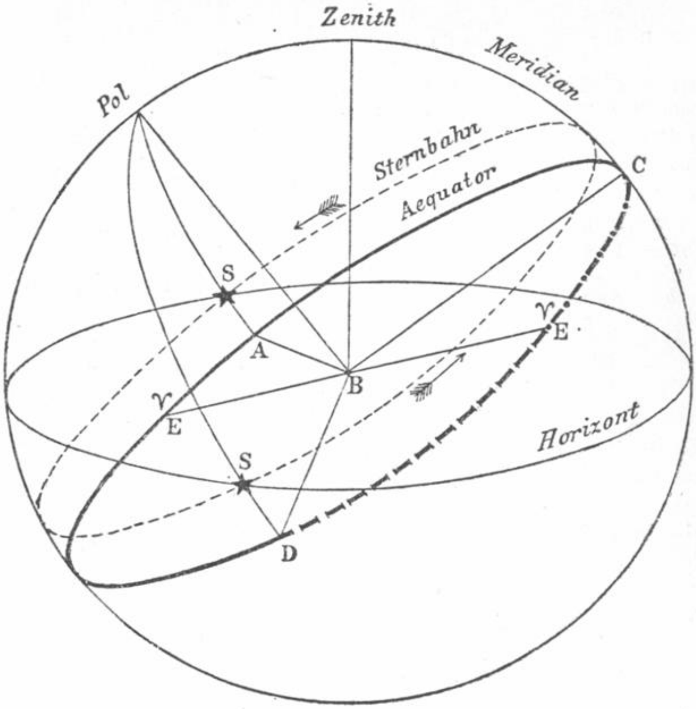
Erkl. 50. Der Anblick der Figur 27 lehrt, dass t_0 für den Aufgang im III. oder IV. Quadranten, für den Untergang im I. oder II. zu nehmen ist.

Erkl. 51. Wir haben schon früher erwähnt, dass Θ bloss den Wert einer Koordinate hat, und in diesem Falle ist:

$$\Theta \text{ und } 360^0 + \Theta$$

ganz gleichwertig.

Figur 27.



Erkl. 52. Es ist:

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$$

Da nun:

$$\sin^2\frac{t}{2} = 1 - \cos^2\frac{t}{2}$$

so folgt hieraus:

$$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$$

oder:

$$2\cos^2\frac{t}{2} = 1 + \cos t$$

Analog ist die Formel:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = 1 - \cos t$$

abzuleiten.

Erkl. 53. Man wird es vorziehen, diese Formel immer zu gebrauchen, sobald nahezu:

$$\varphi + \delta = 90^0$$

weil sich der Cosinus in der Nähe von 0^0 und 180^0 wenig ändert, daher die frühere Formel zur genaueren Berechnung nicht geeignet ist.

Sollte $\Theta_1 > 360^0$ sein, was immer stattfinden wird, wenn $\alpha < t_0$ ist, so ist die Sternzeit des Unterganges:

$$29) \ldots \Theta' = 360^0 - \Theta_1$$

Wir wollen der Formel 26) noch eine andere Gestalt geben. Es ist:

$$2\cos^2\frac{t}{2} = 1 + \cos t$$

$$2\sin^2\frac{t}{2} = 1 - \cos t$$

Nun fanden wir aber:

$$\cos t = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta$$

wir haben also:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = 1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta$$

$$2\cos^2\frac{t}{2} = 1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta$$

oder:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = 1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin\delta}{\cos\delta}$$

$$2\cos^2\frac{t}{2} = 1 - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin\delta}{\cos\delta}$$

demnach:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

$$2\cos^2\frac{t}{2} = \frac{\cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

Erkl. 54. Sei B der Bogen eines Kreises und b sein Wert, ausgedrückt in Teilen des Halbmessers, ferner β die Zahl der diesem Bogen entsprechenden Sekunden. Sodann ist:

$$\text{Bogen } 1'' : b = 1'' : \beta'' = 1 : \beta$$

Nun kann aber:

$$\text{Bogen } 1'' = \sin 1''$$

gesetzt werden, wir haben also:

$$\sin 1'' : b = 1 : \beta$$

oder:

$$b = \beta \sin 1''$$

$$\beta = \frac{b}{\sin 1''}$$

Erkl. 55. Es ist:

$$\cos(t_0 + dt_0) = \cos t_0 \cos dt_0 - \sin t_0 \sin dt_0$$

also wenn:

$$\cos dt_0 = 1, \quad \sin dt_0'' = dt_0'' \sin 1''$$

gesetzt wird, die obige Formel.

oder:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos\varphi\cos\delta}$$

$$2\cos^2\frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos\varphi\cos\delta}$$

also durch Division:

$$30) \ldots \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}}$$

Diese Formel würde der Wirklichkeit entsprechen, wenn es keine Refraktion gäbe. Wir wissen aber, dass die Gestirne schon sichtbar sind, wenn sie 35′ unter dem Horizont sich befinden. Es beginnt also der Aufgang und endet der Untergang nicht bei einer Höhe $= 0^0$, sondern bei einer Höhe $= -35'$, dadurch wird auch t_0 (der sog. Tagbogen) grösser. Bezeichnen wir diese Vergrösserung mit dt_0, so wird nach IIa):

$$-\sin 35' = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(t_0 + dt_0)$$

Da nun dt_0 eine kleine Grösse ist, so kann man:

$$\cos dt_0 = 1$$
$$\sin dt_0 = dt_0'' \sin 1''$$

setzen, womit:

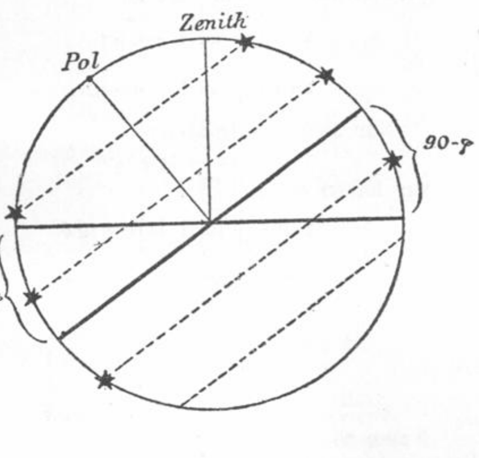
$$\cos(t_0 + dt_0) = \cos t_0 - \sin t_0\, dt_0'' \cdot \sin 1''$$

wird. Wir erhalten demnach:

$$-\sin 35' = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_0 - \cos\varphi\cos\delta\sin t_0\, dt_0''\sin 1''$$

Erkl. 56. Bei den Sternen, für welche $\varphi + \delta$ nahe an 90^0 ist, kann die Refraktionswirkung sehr bedeutend sein.

Figur 28.



Nun ist aber:

$$\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t_0 = 0$$

demnach:

$$+\sin 35' = +\cos\varphi\cos\delta\sin t_0 \cdot dt_0''\sin 1''$$

oder:

$$\sin 1'' dt_0'' = \frac{\sin 35'}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0}$$

Woraus:

$$dt_0'' = \frac{2100''}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0}$$

oder in der Zeit:

$$31) \ldots dt_0^s = \frac{140^s}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0}$$

Diese Formel liefert durch die Beschleunigung des Aufganges resp. die Verzögerung des Unterganges.

Aus der nebenstehenden Figur 28 ergibt sich leicht, dass Sterne, deren Deklination δ ist, dreierlei Verhalten im Bezug auf den Auf- und Untergang zeigen:

I. Sie bleiben stets am Horizont. Dann muss δ positiv und

$$\delta > 90 - \varphi$$

II. Sie gehen auf und unter. Dann muss, wenn δ positiv ist:

$$\delta < 90 - \varphi$$

und wenn δ negativ ist:

$$-\delta < 90 - \varphi$$

III. Sie bleiben stets unsichtbar. Dann ist δ negativ und

$$-\delta > 90 - \varphi$$

In den Fällen, wo:

$$\pm \delta = 90 - \varphi$$

berühren die Gestirne einmal den Horizont.

Erkl. 57. Selbstverständlich gelten diese Relationen nur für die nördliche Halbkugel.

Tafel IX.

Sterntafel.

Name	Rectascension für 1890	Jährl. Verän-derung	Deklination für 1890	Jährliche Verän-derung	Grösse
α Andromedae (Sirrah) .	0h 2m 42,1s	3,09s	+ 28° 28′ 59″	19″ 90	2,0
α Ursae minoris	1 18 30,9	23,23	+ 88 43 18	18″ 89	2,0
α Arietis	2 0 58,3	3,37	+ 22 56 31	17″ 19	2,0
α Persei (Algenib) . .	3 16 28,2	4,26	+ 49 28 8	13″ 09	2,0
α Tauri (Aldebaran) . .	4 29 36,5	3,44	+ 16 17 51	7″ 52	1,0
α Aurigae (Capella) . .	5 8 33,8	4,42	+ 45 53 7	4″ 04	1,0
β Orionis (Rigel) . . .	5 9 15,1	2,88	− 8 19 46	4″ 41	1,0
α Orionis (Beteugeuze) .	5 49 13,0	3,25	+ 7 23 9	1″ 00	1,0 — 1,4
α Can. maj. (Sirius) . .	6 40 18,2	2,64	− 16 33 57	− 4″ 71	1,0
α Geminorum (Castor) .	7 27 34,7	3,84	+ 32 7 45	− 7″ 56	2,3
α Can. min. (Procyon) .	7 33 32,6	3,14	+ 5 30 23	− 8″ 99	1,0
α Leonis (Regulus) . .	10 2 30,8	3,20	+ 12 30 16	− 17″ 46	1,3
α Urs. majoris	10 56 56,2	3,75	+ 62 20 41	− 19″ 37	2,0
α Virginis (Spica) . .	13 19 23,8	3,15	− 10 35 13	− 18″ 88	1,0
α Bootis (Arcturus) . .	14 10 38,6	2,73	+ 19 45 19	− 18″ 86	1,0
α Coronae (Gemma) . .	15 30 1,8	2,54	+ 27 5 7	− 12″ 30	2,0
α Serpentis (Unuk) . .	15 38 51,0	2,95	+ 6 46 19	− 11″ 53	2,3
α Scorpii (Antares) . .	16 22 39,7	3,67	− 26 11 15	− 8″ 29	1,3
α Lyrae (Wega) . . .	18 33 12,8	2,03	+ 38 40 54	+ 3″ 19	1,0
α Aquilae (Atair) . . .	19 45 25,0	2,92	+ 8 34 41	+ 9″ 29	1,3
α Cygni (Deneb) . . .	20 37 40,9	2,04	+ 44 53 15	12″ 74	1,6
α Piscium (Fouralhaut) .	22 51 34,3	3,32	− 30 12 19	19″ 00	1,3
α Pegasi (Markab) . .	22 59 16,9	2,98	+ 14 36 49	19″ 32	2,0

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 27. Wann geht in Prag Atair (α Aquilae) am 10. August 1890 auf und unter?

Auflösung. Die Tafel IX gibt folgende Werte für diesen Stern:

$$\alpha = 19^h\,45^m$$
$$\delta = +8^0\,35'$$

ferner folgt aus der Tafel VII für Prag:

$$\varphi = 50^0\,5'$$

Erkl. 58. Es genügt hier, die Daten mit vollen Minuten zu nehmen und die Rechnung fünfstellig zu führen.

Wir haben zu rechnen:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta$$

also:

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}07747$$
$$\operatorname{tg}\delta = 9{,}17880$$
$$-\cos t_0 = 9\cdot 25627$$
$$t_0 = 259^0\,36'$$

dieses in Zeit verwandelt, gibt:

$$t_0 = 17^h\,18^m$$
$$\alpha = 19^h\,45^m$$

Damit ergibt sich:

$$\alpha + t_0 = 13^h\,3^m$$

als die Sternzeit des Aufganges, und:

$$\alpha - t_0 = 2^h\,27^m$$

als die Sternzeit des Unterganges.

Die Sternzeit im mittl. Prager Mittag ist:

$$= 9^h\,12^m$$

von dieser Zeit bis $13^h\,3^m$ verfliessen $3^h\,51^m$ in Sternzeit, oder:

$$3^h\,50^m$$

in mittl. Zeit. Dieses ist also die Zeit des Aufganges.

Der Untergang findet statt um:

$$2^h\,27^m$$

Sternzeit. Von:

$$9^h\,12^m$$

verfliessen bis 0^h, d. h. 24^h:

$$14^h\,48^m$$

von 0^h bis $2^h\,27^m$ noch:

$$2^h\,27^m$$

also im ganzen von $9^h\,12^m$ bis zu dieser Zeit:

$$17^h\,15^m$$

in Sternzeit, oder:

$$17^h\,12^m$$

mittl. Zeit. Es findet demnach der Untergang statt um:

$$5^h\,12^m$$

morgens, bürg. Zählung.

Will man noch die Refraktion berücksichtigen, so hat man zu rechnen dt_0 aus:

$$dt_0 = \frac{140^s}{\cos\varphi\cos\delta\sin t_0}$$

Es findet sich:

$$dt_0 = 4^m$$

Der Aufgang mit Berücksichtigung der Refraktion findet also statt um:

$$3^h\,46^m$$

nachmittags und die Zeit des Unterganges:

$$5^h\,16^m$$

morgens, bürg. Zählung.

Indessen ist die Berücksichtigung dieser Refraktion bei den Gestirnen ganz belanglos,

Erkl. 59. Wir haben schon früher erklärt, dass t_0 für den Aufgang nur im III. oder IV. Quadranten liegen kann. Ist $\cos t_0$ —, so liegt t_0 im III., ist $\cos s_0$ +, so liegt t_0 im IV. Quadranten.

Erkl. 60. Aus der Gleichung 24) folgt für die Verwandlung der Prager Sternzeit im mittleren Mittag in Berlin die Gleichung:

$$S = T + \varDelta$$

wobei $\varDelta$ die Differenz der Länge in Sternzeit und mittlerer Zeit darstellt. Diese Grösse findet sich als $\varDelta\lambda$ in der Tafel VII. Wir haben also:

Sternzeit im mittl. Prager Mittag
— Sternzeit im mittl. Berliner Mittag $= \varDelta\lambda$,
also $= -0^s\,68$.

Hilfsrechnung.

$$\cos\varphi = 9\cdot 80731$$
$$\cos\delta = 9\cdot 99511$$
$$\sin t_0 = 9\cdot 99281$$
$$= 9{,}79523$$
$$\log 140^s = 2{,}14613$$
$$\log dt_0 = 2{,}35090$$

Demnach:

$$dt_0 = 224^s = 3^m\,44^s$$

bloss bei der Sonne bewirkt sie eine Verlängerung der Tageslänge. Die Formel für dt lässt sich noch auf die Form:

$$dt = \frac{140^s}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}$$

bringen, den Beweis überlassen wir dem Leser. Man hat nur $\sin t_0$ durch:

$$\sqrt{1 - \cos^2 t_0}$$

zu ersetzen und zu beachten, dass:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

Diese Formel zeigt, dass wenn:

$$\varphi + \delta$$

nahe an 90^0, also $\cos(\varphi + \delta)$ sehr klein wird, dass alsdann dt bedeutend gross sein kann.

Aufgabe 28. Wann geht Arcturus am 10. Januar in Berlin durch den Meridian?

Auflösung. Offenbar wenn er kulminiert, d. h. seine höchste Höhe erreicht hat. Der Kulminationspunkt ist aber vom Aufgangs- und Untergangspunkt (ohne Rücksicht auf die Refraktion berechnet) gleich weit entfernt. Man muss also die Mitte der beiden Sternzeiten nehmen oder die Mitte der beiden mittleren Zeiten des Auf- und Unterganges, um die Kulminationszeit zu erhalten.

So findet man die fragliche Kulminationszeit um:

$$6^h\ 51^m\ 38^s$$

in der Früh. Diese Aufgabe lässt aber eine viel einfachere Lösung zu, welche zugleich als ein Kriterium für die Richtigkeit der Berechnung des Auf- und Unterganges dient.

Es ist offenbar die Rectascension eines Sternes die Sternzeit des Ortes für den Augenblick der oberen Kulmination, sie gibt daher, in mittlere Zeit verwendelt, die mittlere Zeit der oberen Kulmination. Für Arcturus findet man aus der Tafel IX:

$$\alpha = 14^h\ 10^m\ 38{,}6^s$$

Die Sternzeit im mittl. Berliner Mittag war am 10. Jan. 0^h:

$$= 19^h\ 19^m\ 41^s\ 4$$

also ist die Sternzeit $14^h\ 10^m\ 38^s\ 6$:

$$6^h\ 50^m\ 57^s\ 2$$

oder ausgedrückt in mittlerer Zeit, d. h.:

$$6^h\ 49^m\ 50^s$$

Dieses ist die Zeit der Kulmination. Die Differenz rührt von ungleichen α und δ her, die zur Grundlage der Rechnung gemacht wurden.

Erkl. 61. Man findet nach Aufgabe 27 den Aufgang zu $10^h\ 56^m\ 58^s$ abends und den Untergang zu $2^h\ 42^m\ 18^s$ nachmittags. Nun verfliessen von $10^h\ 56^m\ 58^s$ bis 12^h:

$$1^h\ 3^m\ 2^s$$

Von da bis $2^h\ 42^m\ 18^s$ nachmittags:

$$14^h\ 42^m\ 18^s$$

Der ganze Zeitraum ist also:

$$15^h\ 45^m\ 20^s$$

also die Hälfte:

$$7^h\ 54^m\ 40^s$$

diese von:

$$14^h\ 42^m\ 18^s$$

gibt:

$$6^h\ 51^m\ 38^s$$

als Kulminationszeit.

Erkl. 62. Im Meridian ist zur Zeit der oberen Kulmination $t = 0$, also zufolge der Gleichung:

$$\Theta = \alpha + t$$
$$\Theta = \alpha$$

für die obere:

$$\Theta = \alpha + 12^h$$

für die untere Kulmination.

Hilfsrechnung.

	24		
$-$	19^h	19^m	$41^s\ 4$
	4	40	18,6
$+$	14	10	38,6
	18	50	57,2
	12		
	6	50	57,2

c) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 29. Man soll berechnen, wann der Stern Arcturus (α Bootis) am 10. Jan. für Berlin auf- und untergeht.

Anleitung. Nach Aufgabe 27 zu behandeln.

Aufgabe 30. Um wie viel Uhr geht die Sonne unter einer geographischen Breite von $51^0 58'$ am 21. Juni auf und unter, wenn für diesen Tag (die als unveränderlich angenommene) Deklination der Sonne $= 23^0 28'$.

Anleitung. Nach Aufgabe 27 zu behandeln.

Aufgabe 31. Die Sternzeit im mittleren Berliner Mittag 1882 Nov. 14. war:

$$15^h\ 33^m\ 47^s\ 5$$

zu welcher bürgerlicher Zeit kulminierte an diesem Tage Sirius zu Berlin?

Anleitung. Nach Aufgabe 29 zu behandeln.

---

d) Ueber die Bestimmung der Uhrkorrektion, der Polhöhe und des Azimuts eines terrestrischen Objektes.

Frage 38. Wie bestimmt man bei bekannter geographischer Breite die Korrektion einer Uhr?

Antwort. Beobachtet man die Höhe eines bekannten Sternes, so folgt aus der Formel IIa):

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Da nun hier h, φ und δ bekannt sind, so folgt hieraus:

$$32) \ldots \cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Hat man einmal t, so ergibt sich mit Hilfe der bekannten Rectascension des Sternes α die Sternzeit der Beobachtung Θ aus der Gleichung:

$$\Theta = \alpha + t$$

und hieraus die mittlere Zeit der Beobachtung T. Zeigte die Uhr bei der Beobachtung die Zeit T' an, so wird die Uhrkorrektion:

$$\tau = (T - T')$$

Wird diese zu der beobachteten Zeit hinzuggefügt, so erhält man die wahre mittlere Zeit wegen der Gleichung:

$$33) \ldots T = T' + (T - T') = T' + \tau$$

Die obige Gleichung ist aber für die logarithmische Berechnung nicht bequem. Man bilde daher, indem man die Gleichung 32) von der Identität:

$$1 = 1$$

subtrahiert, die neue Gleichung:

$$1 - \cos t = \frac{\cos\varphi \cos\delta - \sin h + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Erkl. 63. Wir haben noch den Quadranten von t zu bestimmen. Nach der Erkl. 59 wissen wir, dass t vor der Kulmination im III. oder IV., nach der Kulmination im I. oder II. Quadranten stehen kann; dieser gibt uns ein Mittel zur Bestimmung des Quadranten von t.

Folgende hieraus abgeleitete praktische Regel bietet manchmal gute Dienste. Man nehme t absolut, wenn der Stern im Westen steht, und $24^h - t$, wenn der Stern im Osten steht.

Die Kulmination des Sternes wird nach der Aufgabe 28 zu bestimmen sein.

Erkl. 64. Es ist:

$$\sin h = \cos(90^0 - h) = \cos z$$

also:

$$2\sin^2\frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos z}{\cos\varphi \cos\delta}$$

sei nun:

$$m - n = \varphi - \delta$$
$$m + n = z$$

so wird:

$$\cos(m+n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n$$
$$\cos(m-n) = \cos m \cos n + \sin m \sin n$$

also:

$$2\sin m \sin n = \cos(m-n) - \cos(m+n)$$

Nun ist aber:

$$m = \frac{1}{2}(\varphi - \delta + z)$$

$$n = \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)$$

und demnach:

$$2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta + z) \sin \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta) = \cos(\varphi - \delta) - \cos z$$

Da nun (vergl. Erkl. 52):

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

so folgt:

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos\varphi \cos\delta}$$

oder wenn man die Zenithdistanz z durch die die Formel:

$$h + z = 90^0$$

einführt:

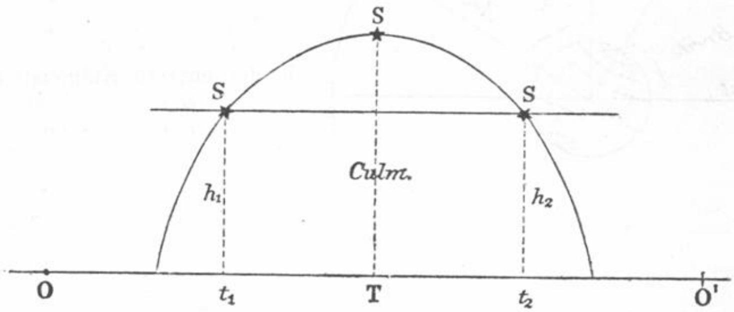
$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta + x) \sin \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Demnach:

$$34) \ldots \sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \delta + z) \sin \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}}$$

wobei nach Erkl. 32 t oder $24^h - t$ zu nehmen ist, je nachdem der Stern Westen oder Osten steht.

Figur 29.



Frage 39. Wie bestimmt man die Korrektion der Uhr durch korrespondierende Fixsternhöhen?

Antwort. Beobachtet man einen Fixstern vor und nach der Kulmination in gleichen Höhen, so ist die halbe Zwischenzeit die Zeit der Kulmination selbst. Denn sei in der Figur 29 $t_2 O' = t_1 O$, so folgt:

$$2\,OT = OO' = Ot_2 + t_2 O' = Ot_2 + Ol_1$$

demnach:

$$OT = \frac{1}{2}(Ot_2 + Ot_1)$$

oder kürzer, wenn T die Zeit der Kulmination und t_1 und t_2 die Zeiten der korrespondierenden Höhen bezeichnen:

$$T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

Nun ist aber die Rectascension des Sternes die Sternzeit des Ortes für die obere Kulmination des Sternes und gibt in mittlere Zeit verwandelt (nach Aufgabe 20) die mittlere Zeit T' der Kulmination des Sternes im oberen Meridian. Wir haben also:

$$T' = T + \tau$$

wobei:

$$\tau = T' - T$$

gleich der Uhrkorrektion und diese:

$$\tau = T' - T$$

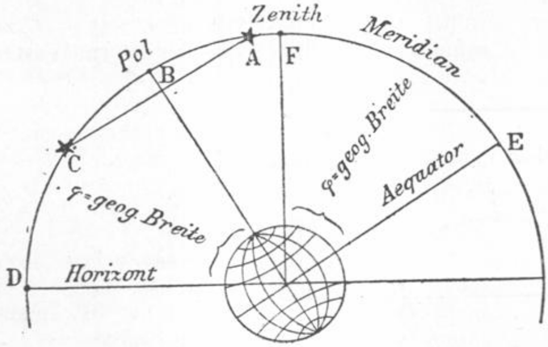
oder:

$$35) \; \ldots \; \tau = T' - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

Frage 40. Wie bessimmt man die Polhöhe eines Erdortes?

Antwort. Es gibt mehrere Methoden zur Bestimmung der Polhöhe eines Erdortes, die wichtigsten sind:

Figur 30.



I. Methode.

Aus der Fig. 30 entnimmt man sofort, dass:

$$2DB = DC + DA$$

oder:

$$DB = \frac{DC + DA}{2}$$

Sei h die Höhe und z die Zenith-Distanz in der oberen, h' und z' jene in der unteren Kulmination, so wird:

$$DC = h' = 90^0 - z'$$
$$DA = h = 90^0 - z$$

also:

$$DB = \frac{1}{2}(h + h') = \frac{1}{2}(z + z)$$

Nun ist $BD = \varphi =$ Polhöhe, also:

$$36) \; \ldots \; \varphi = \frac{1}{2}(h + h') = \frac{1}{2}(z + z')$$

II. Methode.

Sei δ die Deklination und z die Zenith-Distanz in der oberen Kulmination, so besteht die Beziehung:

$$\delta = \varphi + z$$

also wird:

$$37) \; \ldots \; \varphi = \delta - z$$

Es ist nämlich, siehe Figur 30:

$$EF + FA = EA$$

Nun ist aber:

$AE =$ Deklination des Sternes δ,

$EF =$ Polhöhe φ

$AE =$ Zenith-Distanz z

und hieraus ergibt sich die obige Formel.

Anmerkung. Auf diese Weise kann man bei bekannter Polhöhe die Deklinationen einzelner Sterne bestimmen.

III. Methode.

Die beiden vorhergehenden Methoden setzen voraus, dass die Richtung des Meridians bekannt ist. Es gibt andere Methoden, die diese Voraussetzung nicht machen und daher auf Reisen bequem sind.

Wir nehmen an, dass die Sternzeit der Beobachtung bekannt ist, ebenso die Deklination und Rectascension des beobachteten Sternes, sodann ist zunächst:

$$\Theta = \alpha + t$$

also auch:

$$t = \Theta - \alpha$$

und hiermit der Stundenwinkel bekannt. Messen wir nun eine Sternhöhe, so ist nach Gleichung II a):

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

Setzt man hierin:

$$\cos \delta \cos t = \varrho \sin \sigma$$
$$\sin \delta = \varrho \cos \sigma$$

so folgt:

$$\sin h = \varrho \sin(\varphi + \sigma)$$

und hieraus:

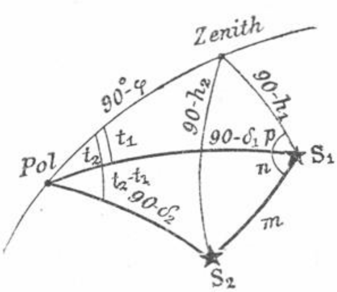
$$38) \ldots \sin(\varphi + \sigma) = \frac{\sin h}{\varrho}$$

Da nun ϱ und σ aus den vorhergehenden Gleichungen bekannt sind, so ist hiermit das Problem gelöst.

IV. Methode.

Die vorhergehende Methode setzte noch die Kenntnis der Zeit voraus, wir wollen auch von dieser absehen und nur die Deklination und Rectascension des Sternes als bekannt und die Höhe durch Messung gegeben, annehmen.

Figur 31.



Dann müssen wir zu gleicher Zeit die Höhen zweier Sterne messen.

Seien:

$$\alpha_1 \, \alpha_2$$

ihre Rectascensionen,

$$\delta_1 \, \delta_2$$

ihre Deklination, und:

$$h_1 \, h_2$$

die gemessenen Höhen, ferner Θ die Sternzeit der Beobachtung, so wird:

$$\Theta = \alpha_1 + t_1 = \alpha_2 + t_2$$

Wir haben:

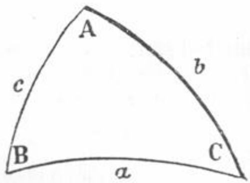
$$t_1 = \Theta - \alpha_1$$
$$t_2 = \Theta - \alpha_2$$

und hieraus:

$$t_1 - t_2 = -(\alpha_1 - \alpha_2)$$

also ist auch diese Differenz bekannt. Seien S_1 und S_2 die beiden Sterne (in der Fig. 31), so hat man zunächst aus dem Dreiecke Pol $S_1 S_2$, die Seite $S_1 S_2 = m$ und den Winkel $S_2 S_1$ Pol $= n$ zu bestimmen. Sodann aus dem Dreiecke S_1 S_2 Zenith, den Winkel $(n + p)$, woraus sich der Winkel $p =$ Pol S_1 Zenith,

Figur 32.



ergibt. Sodann haben wir $90^0 - \varphi$ aus dem Dreiecke Pol S_1 Zenith zu rechnen. Man sieht, dass die Rechnung ziemlich umständlich wird.

Man erhält folgende vier Gleichungen:

a) . . . $\cos m = \sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(t_2 - t_1)$

aus dem Dreiecke Pol $S_1 S_2$, wodurch m bestimmt ist, ferner aus demselben Dreiecke:

b) . . . $\frac{\sin n}{\cos\delta_2} = \frac{\sin(t_2 - t_1)}{\sin m}$

wodurch wieder n bestimmt ist. Aus dem Dreiecke S_2 Zenith S_1 folgt:

c) . . . $\sin h_2 = \sin h_1 \cos m + \cos h_1 \sin m \cos(n + p)$

diese Gleichung liefert p. Endlich folgt aus dem Dreiecke Pol S_1 Zenith:

d) . . . $\sin\varphi = \sin h_1 \sin\delta_1 + \cos h_1 \cos\delta_1 \cos p$

wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Wir haben nur noch die Formeln für die logarithmische Rechnung einzurichten.

Setzt man:

$$\sin\delta_2 = \varrho \cos\mu$$
$$\cos\delta_2 \cos(t_2 - t_1) = \varrho \sin\mu$$

so folgt:

$$\cos m = \varrho \sin(\delta_1 + \mu)$$

n ist sodann aus:

$$\sin n = \frac{\sin(t_2 - t_1)\cos\delta_2}{\sin m}$$

zu bestimmen. Weiter haben wir:

$$\cos(n + p) = \frac{\sin h_2 - \sin h_1 \cos m}{\cos h_1 \sin m}$$

wird hier:

$$\sin h_2 \cos m = \cos h_2 \operatorname{tg} v$$

gesetzt, so folgt:

$$\cos(n + p) = \frac{\sin(h_2 - v)}{\cos v \cos h_1 \sin m}$$

Endlich setzen wir:

$$\sin\delta_1 = \sigma \cos\eta$$
$$\cos\delta_1 \cos p = \sigma \sin\eta$$

so folgt:

$$\sin\varphi = \sigma \sin(h_1 + \eta)$$

Damit sind alle Formeln logarithmisch gemacht.

Erkl. 65. Aus der sphärischen Trigonometrie folgen für das allgemeine Dreieck, siehe Figur 32.

Die Hauptgleichungen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Beachtet man, dass:

$$\sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$$
$$\cos(90^0 - \beta) = \sin\beta$$
$$\sin(180^0 - \beta) = \sin\beta$$

so folgen aus ihnen die nebenstehenden Formeln.

Erkl. 66. Man hat:

$$\cos(n + p) = \frac{\sin h_2 - \cos h_2 \operatorname{tg} v}{\cos h_1 \sin m}$$

oder:

$$\cos(n + p) = \frac{\sin h_2 - \cos h_2 \frac{\sin v}{\cos v}}{\cos h_2 \operatorname{s n} m}$$

und hieraus durch Multiplikation mit $\cos v$ im Zähler und Nenner:

$$\cos(n + p) = \frac{\cos v \sin h_2 - \sin v \cos h_2}{\cos v \cos h_1 \sin m}$$

woraus:

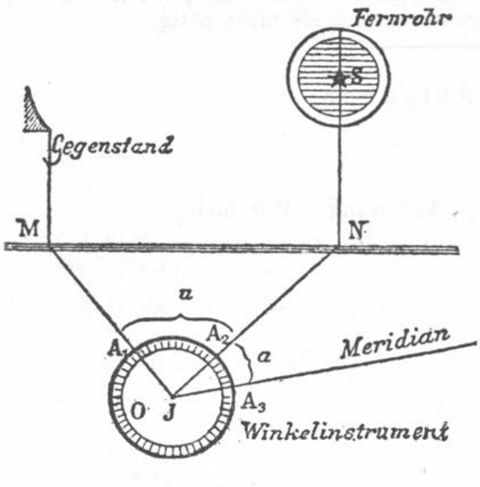
$$\cos(n + p) = \frac{\sin(h_2 - v)}{\cos v \cos h_1 \sin m}$$

folgt.

Frage 41. Wie wird das Azimut eines terrestrischen Objektes bestimmt?

Antwort. Das Azimut eines terrestrischen Objektes wird am bequemsten durch die Beobachtung des Azimutalabstandes von einem bekannten Fixstern. Man fixiere zu diesem Zweck mit einem Messinstrument, welches stabil aufgestellt ist, die Richtung des Gegenstandes (JM in der Figur 33) und bezeichne die Ablesung der Kreisteilung mit A_1.

Figur 33.



Erkl. 67. Es ist:

IIb) . . $\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$

IIc) . . $\cos h \cos a = \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta$

bei der Division hebt sich $\cos h$ im Zähler und Nenner.

Sodann wähle man irgend eine zweite Richtung, etwa JN, die der Kreisablesung A_2 entspricht und beobachte, zu welcher Zeit ein bekannter Stern am Mittelfaden des Fernrohrs erscheint. Da der Stern bekannt ist, also sein δ und α gegeben ist, da man ferner die Zeit kennt (ihre Kenntnis kann man sich durch eine der vorhergehenden Methoden erwerben), so kann man nach 3):

$$t = \Theta - \alpha$$

und mit diesem das Azimut des Sternes a nach IIb) und IIc) berechnen. Dividiert man nämlich die Gleichung IIb) durch die Gleichung IIc), so folgt:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta}$$

Wird zu dem so bestimmten Winkel die Differenz der Ablesungen $A_2 - A_1$ oder was dasselbe ist, der Winkel u hinzugefügt, so erhält man das Azimut des terrestrischen Objektes.

Setzt man:

$$39) \ldots \begin{cases} \cos\delta \cos t = \varrho \cos v \\ \sin\delta = \varrho \sin v \end{cases}$$

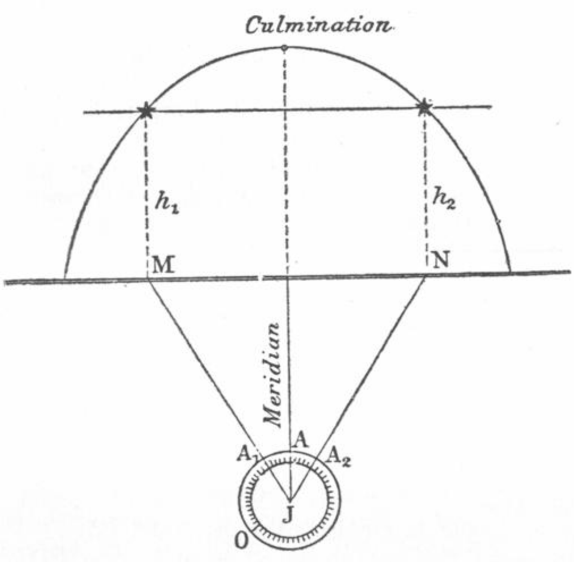
so folgt:

$$40) \ldots \operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t}{\varrho \sin(\varphi - v)}$$

Frage 42. Wie bestimmt man die Richtung des Meridians?

Antwort. Um die Richtung des Meridians zu bestimmen, bestimme man das Azimut eines terrestrischen Objektes, wie im vorhergehenden Falle und drehe das Fernrohr von A_1 der Kreisteilung um den Winkel $a + u$ bis zu A_3 (Figur 33). Die Visur gibt dann die Richtung des Meridians. Man kann auf diese Weise immer unabhängig von einer Sternbeobachtung die Richtung des Meridians finden.

Figur 34.



Eine zweite Methode ist die Beobachtung korrespondierender Sternhöhen, wie wir sie schon in der Frage 39 kennen gelernt haben. Man beobachtet eine Höhe. Die Richtung dieser Höhe sei an der Kreisteilung des Instrumentes durch die Ablesung A_1 gegeben (Figur 34). Sodann wartet man ab, bis der Stern dieselbe Höhe nach der Kulmination erreicht. Die Richtung dieser Höhe soll der Ablesung A_2 entsprechen.

Nun sind aber gleiche Höhen vom Meridian gleichweit entfernt, also ist die Richtung des Meridians gegeben durch die Kreisablesung:

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

Diese beiden Methoden setzen aber Winkelinstrumente voraus, bei der folgenden Aufgabe 34 sind sie nicht nötig.

e) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 32. Am 10. April 1884 wurde Arcturus in Prag beobachtet und seine Höhe gemessen. Sie betrug, befreit von der Refraktion:

$$h = 20^0\,35'\,20''$$

um $18^h\,14^m\,51^s$, welches war die richtige Zeit, wenn für Arctur an diesem Tage:

$$\alpha = 14^h\,10^m\,24^s$$
$$\delta = 19^0\,47'\,2^s$$

ferner für Prag:

$$\varphi = 50^0\,5'\,18''$$

Erkl. 68. Man muss die beobachtete Höhe immer von der Refraktion befreien. Gewöhnlich pflegt man mehrere Höhen zu beobachten, um das Mittel aus den Höhen und Beobachtungszeiten zu nehmen.

Erkl. 69. Die gewonnene Uhrkorrektion gilt nur für diese Zeit, am nächsten Tage kann sie schon bedeutend anders werden.

Auflösung. Wir bilden:

$$h = m - n = 30^0\,18'\,16''$$
$$m + n = 69^0\,24'\,40''$$
$$m = \frac{1}{2}(\varphi - \delta + z) = 49^0\,51'\,28''$$
$$n = \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta) = 19^0\,33'\,12''$$

Sodann haben wir nach Formel 17):

$$\begin{aligned}
\sin m &= 9{\cdot}8833471 \\
\sin n &= 9{\cdot}5246352 \\
\hline
\sin m \sin n &= 9{\cdot}4079823 \\
\cos\varphi \cos\delta &= 9{\cdot}7808469 \\
\hline
\sin^2\frac{t}{2} &= 9{\cdot}6271354 \\
\sin\frac{t}{2} &= 9{\cdot}8135677 \\
\cos\varphi &= 9{\cdot}8072683 \\
\cos\delta &= 9{\cdot}9735786 \\
\hline
\cos\varphi\cos\delta &= 9{\cdot}7808469 \\
\frac{t}{2} &= 40^0\,36'\,56'' \\
t &= 81^0\,13'\,52'' \\
\alpha &= 14^h\,10^m\,24^s \\
t &= 5^h\,24^m\,55^s \\
\hline
\Theta &= 19^h\,35^m\,19^s
\end{aligned}$$

Sternzeit im mittl. Mittag $= 1^h\,16^m\,19^s$

Sternzeit-Differenz . . . . $= 18^h\,19^m\,0^s$

In mittl. Zeit verwandelt $= 18^h\,16^m\,0^s$

Demnach beträgt die Uhrkorrektion:

$$+\,1^m\,9^s$$

d. h. zu der Uhrzeit müssen $1^m\,9^s$ hinzuaddiert werden, um die mittlere Ortszeit zu erhalten.

Aufgabe 33. Es wurden von α Arietis und α Canis minoris je eine Höhe beobachtet. Es war für:

α Arietis	α Canis minoris
$h_1 = 76^0\,7'$	$h_2 = 12^0\,0'$

ferner:

$\alpha_1 = 2^h\,0^m\,4^s$	$\alpha_2 = 7^h\,32^m\,42^s$
$\delta_1 = 22^0\,51'\,56''$	$\delta_2 = 5^0\,32'\,45''$

auf welcher Breite geschah die Beobachtung?

Erkl. 70. Nach Frage 40, Methode IV ist:

$$\sin\delta_2 = \varrho\cos\mu$$
$$\cos\delta_2\cos(t_2 - t_1) = \varrho\sin\mu$$

Auflösung. Wir bilden zunächst:

$$t_2 - t_1 = -(\alpha_2 - \alpha_1)$$

und erhalten:

$$t_2 - t_1 = 5^h\,32^m\,38^s$$

oder in Graden nach der Tafel III:

$$t_2 - t_1 = 83^0\,9'\,30''$$

Damit haben wir die vorbereitenden Daten für die Rechnung gewonnen.

Die ganze Rechnung stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{array}{rl}
\cos\delta_2 & = 9{,}9979624 \\
\cos(t_2-t_1) & = 9{,}0760067 \\ \hline
\varrho\sin\mu & = 9\cdot0739691 \\
\sin\delta_2 = \varrho\cos\mu & = 8\cdot9838627 \\ \hline
\operatorname{tg}\mu & = 0\cdot0901064 \\
\mu & = 50^0\;54'\;\;6'' \\
\delta_1 & = 22^0\;51'\;56'' \\
\delta_1+\mu & = 73^0\;46'\;\;0'' \\
\sin\delta_2 & = 8\cdot9838627 \\
\cos\mu & = 9\cdot7997907 \\ \hline
\varrho & = 9\cdot1840720 \\
\sin(\delta_1+\mu) & = 9\cdot9823306 \\ \hline
\cos m & = 9\cdot1664026 \\
m & = 81^0\;33'\;53'' \\
\cos\delta_2 & = 9\cdot9979624 \\
\sin(t_2-t_1) & = 9\cdot9968964 \\ \hline
 & \;9\cdot9948588 \\
\sin m & = 9\cdot9952764 \\ \hline
\sin n & = 9\cdot9995824 \\
n & = 87^0\;29'\;16'' \\
\sin h_1 & = 9\cdot9871236 \\
\cos m & = 9\cdot1664026 \\ \hline
 & \;9\cdot1535262 \\
\cos h_2 & = 9\cdot9904044 \\ \hline
\operatorname{tg} v & = 9\cdot1631218 \\
h_2 & = 12^0 \\
v & = \;\;8^0\;17'\;\;0'' \\ \hline
h_2-v & = \;\;3^0\;43'\;\;0'' \\
\cos v & = 9\cdot9954455 \\
\cos h_1 & = 9\cdot3801129 \\
\sin m & = 9\cdot3708348 \\ \hline
 & = 9\cdot3708348 \\
\sin(h_2-v) & = 8\cdot8117264 \\ \hline
\cos(n+p) & = 9\cdot4408916 \\
n+p & = \qquad 73^0\;58'\;44'' \\
n & = \qquad 87^0\;29'\;16'' \\ \hline
p & = -\,14^0\;31'\;32'' \\
\cos p & = 9\cdot9858914 \\
\cos\delta_1 & = 9\cdot9644573 \\ \hline
\sigma\sin\eta & = 9\cdot9503487 \\
\sin\delta_2 = \sigma\cos\eta & = 9\cdot5894693 \\ \hline
\operatorname{tg}\eta & = 0\cdot3608794 \\
\eta & = \;\;66^0\;27'\;27'' \\
h_1 & = \;\;76^0\;\;\;7' \\ \hline
h_1+\eta & = 142^0\;34'\;27'' \\
\sin\delta_1 & = 9\cdot5894693 \\
\cos\eta & = 9\cdot6014397 \\ \hline
\sigma & = 9\cdot9880296 \\
\sin(\eta+h_1) & = 9\cdot7837136 \\ \hline
\sin\varphi & = 9\cdot7717432 \\
\varphi & = 36^0\;14'\;32''
\end{array}$$

Erkl. 71. Wir haben nach Frage 40, Methode IV:

$$\cos m = \varrho\sin(\delta_1+\mu)$$

$$\sin n = \frac{\sin(t_2-t_1)\cos\delta_2}{\sin m}$$

ferner:

$$\cos(n+p) = \frac{\sin(h_2-v)}{\cos v\cos h_1\sin m}$$

wobei v zu bestimmen ist aus:

$$\sin h_1\cos m = \cos h_2\operatorname{tg} v$$

Wird nun:

$$\sin\delta_1 = \sigma\cos\eta$$

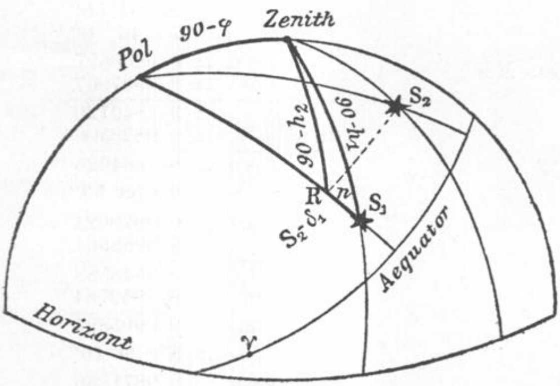
$$\cos\delta_1\cos p = \sigma\sin\eta$$

gesetzt, so folgt:

$$\sin\varphi = \sigma\sin(h_1+\eta)$$

Aufgabe 34. Man beobachtet die Höhe eines Sternes, und nachdem soviel Sternzeit verflossen als der Rectascensionsunterschied zwischen diesem und einem zweiten beträgt, auch die Höhe eines zweiten, auf welcher Breite befindet man sich?

Figur 35.



Auflösung. Betrachtet man die ohne weiteres verständliche Figur 35, so sieht man, dass im Dreiecke $S R_1$:

$$\text{Zenith } RS_1 = \delta_2 - \delta_1$$
$$\text{Zenith } R = 90^0 - h_2$$
$$\text{Zenith } S_1 = 90^0 - h_1$$

gegeben sind. Durch drei Stücke ist aber ein Dreieck bestimmt. Man kann daher den Winkel bei S_1 bestimmen.

Im Dreiecke Pol Zenith S_1 sind dann:

$$\text{Pol } S_1 = \delta_2$$
$$\text{Zenith } S_1 = 90^0 - h_1$$

und der soeben berechnete Winkel bei S_1 gegeben; man kann also die Seite Pol Zenith $= 90^0 - \varphi$ leicht bestimmen.

Man findet, wenn man den Winkel bei S_1 mit n bezeichnet:

$$\sin h_2 = \sin h_1 \cos(\delta_2 - \delta_1) + \cos h_1 \sin(\delta_2 - \delta_1) \cos n$$

ferner:

$$\sin\varphi = \sin h_1 \sin\delta_1 + \cos h_1 \cos\delta_1 \cos n$$

und hiermit ist unser Problem gelöst.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\cos n = \frac{\sin h_2 - \sin h_1 \cos(\delta_2 - \delta_1)}{\cos h_1 \sin(\delta_2 - \delta_1)}$$

oder wenn:

$$\sin h_1 \cos(\delta_2 - \delta_1) = \operatorname{tg} m \cos h_2$$

gesetzt wird:

$$\cos n = \frac{\cos m \cos h_1 \sin(\delta_2 - \delta_1)}{\sin(h_2 - m)}$$

und hiermit, wenn:

$$\sin\delta_1 = \varrho \cos\mu$$
$$\cos\delta_1 \cos n = \varrho \sin\mu$$

gesetzt wird:

$$\sin\varphi = \varrho \sin(h_1 + \mu)$$

in welcher letzterer Gestalt die Gleichungen logarithmisch sind. Die Durchrechnung des folgenden Beispiels überlassen wir dem Leser zur Einübung in der Unabhängigkeit der Rechnung.

Aufgabe 35. Man beobachtet, dass ein Fixstern um u Minuten später untergeht als ein zweiter, unter welcher Breite befindet man sich?

Auflösung. Seien $\alpha_1 \delta_1$, $\alpha_2 \delta_2$ die Rectascensionen, beziehungsweise die Deklinationen der beiden Sterne, so folgt aus Gleichung IIa):

$$\sin h_1 = \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos t_1$$

oder da:

$$t_1 = \Theta - \alpha_1$$

$$\sin h_1 = \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(\Theta - \alpha_1)$$

Erkl. 72. Aus den beiden Gleichungen folgt durch Division durch $\cos\varphi \cos\delta$:

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_1 = -\cos(\Theta_0 - \alpha_1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_2 = -\cos(\Theta_0 + v - \alpha_2)$$

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich die nebenstehende Formel.

Im Augenblicke des Unterganges ist $h_1 = 0$, wir haben also:

$$0 = \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos(\Theta_0 - \alpha_1)$$

wobei Θ_0 die Sternzeit des Unterganges bezeichnet. Bezeichnet man mit v, die Zeit u in Sternzeit, so ist für den zweiten Stern die Sternzeit des Unterganges:

$$\Theta_0 + v$$

Wir haben also folgende zwei Gleichungen:

$$0 = \underline{\sin\varphi} \sin\delta_1 + \underline{\cos\varphi} \cos\delta_1 \cos(\underline{\Theta_0} - \alpha_1)$$

$$0 = \underline{\sin\varphi} \sin\delta_2 + \underline{\cos\varphi} \cos\delta_2 \cos(\underline{\Theta_0} + v - \alpha_2)$$

aus welchen die Unbekannten φ und Θ_0 zu berechnen sind. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

Erkl. 73. Es ist:

$$\Theta_0 + v - \alpha_2 = \Theta_0 + v - \alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_1$$
$$= (\Theta_0 - \alpha_1) + (v + \alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{\cos(\Theta_0 + v - \alpha_2)}{\cos(\Theta_0 - \alpha_1)}$$

oder:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{\cos[(\Theta_0 - \alpha_1) + (v + \alpha_1 - \alpha_2)]}{\cos(\Theta_0 - \alpha_1)}$$

Entwickelt man den Zähler, so folgt weiter:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{\cos(\Theta_0 - \alpha_1)\cos(v + \alpha_1 - \alpha_2) - \sin(\Theta_0 - \alpha_1)\sin(v + \alpha_1 - \alpha_2)}{\cos(\Theta_0 - \alpha_1)}$$

oder:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1} = \cos(v + \alpha_1 - \alpha_2) - \operatorname{tg}(\Theta_0 - \alpha_1)\sin(v + \alpha_1 - \alpha_2)$$

Man hat also:

$$\operatorname{tg}(\Theta_0 - \alpha_1) = \frac{\cos(v + \alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1}}{\sin(v + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

Ist $(\Theta_0 - \alpha_1)$ gefunden, so ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\cos(\Theta_0 - \alpha_1)}{\operatorname{tg}\delta_1}$$

womit das Problem gelöst ist.

Setzt man noch:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\operatorname{tg}\delta_1} = \sin(v + \alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{ctg}\mu$$

so wird:

$$\operatorname{tg}(\Theta_0 - \alpha) = \operatorname{ctg}(v + \alpha_1 - \alpha_2) - \operatorname{ctg}\mu$$

oder:

$$\operatorname{tg}(\Theta_0 - \alpha) = \frac{\sin(\mu - v - \alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\mu \sin(v + \alpha_1 - \alpha_2)}$$

Erkl. 74. Man hat allgemein:

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} =$$
$$\frac{\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin\gamma\sin\beta}$$

Aufgabe 36. Man beobachtet, dass ein bekannter Fixstern um u Sekunden hinter einer Turmmauer später verschwindet als ein zweiter. Welches ist das Azimut der Turmmauer?

Auflösung. Seien α_1, δ_1 und t_1 die Rectascension, Deklination und Stundenwinkel des ersten Sternes, α_2, δ_2, t_2 jene des zweiten, ferner Θ_0 die Sternzeit beim Verschwinden des ersten Sternes, so haben wir:

$$\Theta_0 = \alpha_1 + t_1$$
$$\Theta_0 + v = \alpha_2 + t_2$$

wobei v den Betrag u in Sternzeit ausgedrückt darstellen soll. Subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten, so folgt:

$$t_2 - t_1 = v - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Die Differenz der Stundenwinkel ist also bekannt. In der Frage 41 fanden wir allgemein:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta}$$

Das das Azimut in beiden Fällen dasselbe ist, so haben wir:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta_1 \sin t_1}{\sin\varphi \cos\delta_1 \cos t_1 - \cos\varphi \sin\delta_1}$$
$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta_2 \sin t_2}{\sin\varphi \cos\delta_2 \cos t_2 - \cos\varphi \sin\delta_2}$$

Hieraus ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke:

$$\frac{\cos\delta_1 \sin t_1}{\sin\varphi \cos\delta_1 \cos t_1 - \cos\varphi \sin\delta_1} = \frac{\cos\delta_2 \sin t_2}{\sin\varphi \cos\delta_2 \cos t_2 - \cos\varphi \sin\delta_2}$$

aus dieser und der Gleichung:

$$t_2 - t_1 = v - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

lässt sich t_1 und t_2 berechnen und mit diesen folgt aus:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta_1 \sin t_1}{\sin\varphi \cos\delta_1 \cos t_1 - \cos\varphi \cos\delta_1}$$

das Azimut a des terrestrischen Objektes.

Diese Methode ist eine der bequemsten, die es gibt, und dabei sehr genau, nur muss der Turm genügend weit entfernt sein.

Wir wollen noch die obige Formel für die Berechnung geeigneter machen. Wir schreiben:

$$\frac{\sin\varphi \cos\delta_1 \cos t_1 - \cos\varphi \sin\delta_1}{\cos\delta_1 \sin t_1} = \frac{\sin\varphi \cos\delta_2 \cos t_2 - \cos\varphi \sin\delta_2}{\cos\delta_2 \sin t_2}$$

oder durch wirkliche Division:

$$\sin\varphi \operatorname{ctg} t_1 - \cos\varphi \frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\sin t_1} = \sin\varphi \operatorname{ctg} t_2 - \cos\varphi \frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\sin t_2}$$

Erkl. 75. Es ist, siehe Erkl. 74:

$$\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin\gamma \sin\beta}$$

Diese Gleichung schreiben wir wie folgt:

$$\sin\varphi (\operatorname{ctg} t_1 - \operatorname{ctg} t_2) = \cos\varphi \left(\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\sin t_1} - \frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\sin t_2}\right)$$

oder:

$$\sin\varphi \frac{(\sin t_2 - t_1)}{\sin t_1 \sin t_2} = \cos\varphi \frac{\operatorname{tg}\delta_1 \sin t_2 - \operatorname{tg}\delta_2 \sin t_1}{\sin t_1 \sin t_2}$$

Multiplizieren wir nun mit $\sin t_1 \sin t_2$ und

Erkl. 76. Diese Gleichung hat die Form:

$$A \sin t_1 + B \cos t_1 = C$$

Setzt man:

$$A = \varrho \cos \mu$$
$$B = \varrho \sin \mu$$

so folgt:

$$\varrho \sin (t_1 + \mu) = C$$

und da ϱ und μ aus den vorhergehenden Gleichungen berechnet werden, auch der Wert t_1.

dividieren durch $\cos \varphi$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin (t_2 - t_1) = \operatorname{tg} \delta_1 \sin t_2 - \operatorname{tg} \delta_2 \sin t_1$$

Nun ist:

$$t_2 = (t_2 - t_1) + t_1$$

also:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin (t_2 - t_1) = \operatorname{tg} \delta_1 \sin [(t_2 - t_1) + t_1] - \operatorname{tg} \delta_2 \sin t_1$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin (t_2 - t_1) = \operatorname{tg} \delta_1 \sin (t_2 - t_1) \underline{\cos t_1} + [\operatorname{tg} \delta_1 \cos (t_2 - t_1) - \operatorname{tg} \delta_2] \underline{\sin t_1}$$

Da nun $t_2 - t_1$ bekannt ist, lässt sich aus dieser Gleichung t_1 leicht berechnen.

---

f) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 37. Man beobachtet die Höhe des Sirius:

$$h_1 = 24^0\ 14'$$

und nachdem so viel Sternzeit verflossen, als der Rectascensionsunterschied zwischen diesem Stern und dem Castor beträgt, die Höhe des letzteren:

$$h_2 = 40^0\ 12'$$

auf welcher Breite befindet man sich, wenn für:

Sirius	Castor
$\alpha_1 = 6^h\ 39^m\ 40^s$	$\alpha_2 = 7^h\ 26^m\ 40^s$
$\delta_1 = -16^0\ 32'\ 50''$	$\delta_2 = +32^0\ 9'\ 40''$

Anleitung. Nach Aufgabe 35 zu behandeln.

Aufgabe 38. Man beobachtet, dass Sirius 25^m später untergeht, als Aldebaran. Auf welcher Breite befindet man sich?

Sirius	Aldebaran
$\alpha_1 = 6^h\ 39^m\ 38^s$	$\alpha_2 = 4^h\ 28^m\ 45^s$
$\delta_1 = -16^0\ 32'\ 46''$	$\delta_2 = +16^0\ 15'\ 22''$

Anleitung. Nach Aufgabe 36 zu behandeln.

E. Geodäsie.

Anmerkung 10. Nachdem wir uns, so weit es eben erforderlich war, am Himmel orientiert haben, kehren wir zu der Erde zurück. Die nächste Frage, die wir uns vorlegen müssen, ist, welche Gestalt hat wohl die Erde? In der Geographie wird gezeigt, dass die Erdgestalt nicht allzusehr von jener einer Kugel abweichen kann, es spricht dafür sowohl die Analogie mit anderen Himmelskörpern als auch der Erdschatten bei einer Mondfinsternis u. s. w. Allein die Geographie kann nicht die Dimensionen und wahre Gestalt dieser kugelförmigen Fläche bestimmen. Dieses ist die Aufgabe der Geodäsie und dieser ist der vorliegende Abschnitt gewidmet, der auf Grund der geschichtlichen Entwickelung das Wesen und die Mittel der Geodäsie klarzulegen sucht. Von einer genaueren Beschreibung der Apparate sehen wir ab, da wohl wenige in die Lage kommen, selbst nachstehende Beobachtungen auszuführen.

Die geodätischen Untersuchungen liefern uns den Begriff der geocentrischen Breite, der für die späteren Entwickelungen von grosser Wichtigkeit ist.

Derjenige, der sich speziell um die Astronomie interessiert, kann ohne Folgen den ganzen Abschnitt E., ausgenommen die Fragen 59 und 60, ungelesen lassen.

a) Ueber die Erforschung der Erdgestalt.

Frage 43. Welche sind die ältesten Ansichten über die Gestalt der Erde?

Erkl. 77. Aristoteles, der grösste griechische Philosoph, geb. 384 zu Stagira in Macedonien, gest. 322 in Chalcis auf der Insel Euböa, war Erzieher Alexanders des Grossen.
(Aristoteles „de Coelo“ II, 14.)

Plinius der Aeltere, geb. 23, gest. 79 n. Chr. beim Ausbruch des Vesuvs, der Herkulanum und Pompeji vernichtete. Er war ein Sammler. Hauptwerk „Historia naturalis“.

Ptolemäus Claudius, geb. 70, gest. 147 n. Chr., der grösste Astronom des Altertums. Sein Hauptwerk „der Almagest“.

Antwort. Die Griechen dachten sich zur Zeit Homers und Heriods die Erde als eine flache Scheibe, die vom Okeanos umflossen wurde. Aristoteles war der erste, der die Beweise für die Kugelgestalt der Erde sammelte, indem er einerseits auf die Form des Erdschattens bei einer Mondfinsternis hinwies und andererseits die Beobachtung machte, dass, wenn man ein wenig nach Nord oder Süd sich von seinem Standpunkt entfernt, die in unserem Scheitel stehenden Sterne sich sofort von demselben entfernen. Ptolomäus und Plinius fügten noch hinzu, dass die Erde kugelförmig sein müsse, weil man von entfernten Schiffen zuerst die Spitzen erblicke.

Frage 44. Welche sind die ältesten Versuche, die Gestalt der Erde zu bestimmen?

Erkl. 78. Eratosthenes, geb. 276, gest. 195 v. Chr., Vorsteher der Alexandrinischen Bibliothek. Schrieb ein Werk über die Geographie.

Posidonius aus Apamea in Syrien, geb. 103, gest. 19 v. Chr., lehrte zu Rhodos stoische Philosophie.

Al-mamûn Abdallah, der zweite Sohn von Harûn Arraschûd, Kalif von Bagdad, regierte von 813–833 n. Chr.

Antwort. Die ältesten Versuche, die Figur der Erde zu bestimmen, sind jene der Griechen Eratosthenes und Posidonius, sowie der arabische unter dem Kalifen Al-mamûn.

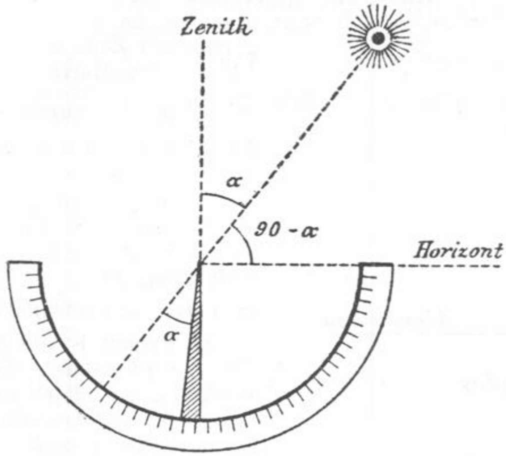
Frage 45. Wie hat Eratosthenes die Grösse der Erde zu bestimmen versucht?

Erkl. 79. Aristarch aus Samos lehrte um 280 v. Chr. in Alexandrien, dass die Erde sich um die Sonne bewegt und suchte zuerst auf sehr sinnreiche Weise die Entfernung der Erde von der Sonne zu bestimmen. (Siehe dieses.)

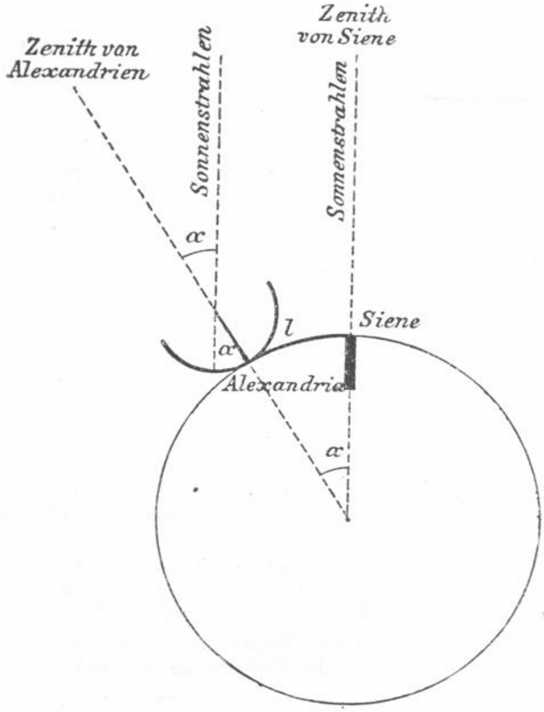
Antwort. Um die Art und Weise seines Verfahrens einzusehen, müssen wir uns zunächst mit seinem Instrument, der Skaphe, bekannt machen. Dieses Instrument wurde von Aristarch erfunden und bestand aus einer Hohlkugel, in deren tiefstem Punkte ein Stift befestigt war, der die Länge und Richtung des Radius hatte. Von diesem Punkt gegen den Rand war die Kugel durch konzentrische Kreise in eine bestimmte Anzahl Teile geteilt. Wie mit diesem Instrument mit Hilfe des Schattens die Zenithdistanz der Sonne gemessen werden konnte, ist unmittelbar aus der nebenstehenden Zeichnung (Figur 36) ersichtlich.

Eratosthenes beobachtete, dass zur Zeit des Sommeranfangs die Grundfläche eines

Figur 36.



Figur 37.



tiefen Brunnens zu Syene in Egypten ganz erleuchtet wurde. Die Sonne stand also um diese Zeit im Zenith von Syene, während sie nach seiner Beobachtung in Alexandrien um dieselbe Zeit um $\frac{1}{50}$ der Kreisperipherie vom Zenith abstand. Daraus schloss er (vergl. Figur 37), dass auch der Bogen des Meridians von Syene bis Alexandrien gleich ist $\frac{1}{50}$ des ganzen Erdmeridians, also gleich:

$$\frac{1}{50} \cdot 2 R \pi$$

wobei R den Erdradius bezeichnet. Sei l die Länge dieses Bogens, so haben wir demnach:

$$l = \frac{1}{50} \cdot 2 R \pi$$

oder:

$$2 \pi R = 50 \cdot l$$

Er mass auch wirklich diese Entfernung und fand sie gleich 5000 Stadien und so gelangte er zu dem Resultat, dass der Erdumfang gleich ist $50 \cdot 5000 = 250 \cdot 000$ Stadien. Leider wissen wir nicht, welches Stadium gemeint ist. Mag man dieses oder jenes Stadium zu Grunde legen, nie wird der Fehler in Anbetracht der unvollkommenen Instrumente zu gross, wenn man noch bedenkt, dass Alexandrien und Syene nicht ganz auf demselben Meridian liegen.

(In Figur 37 liess „Syene“ statt Siene.)

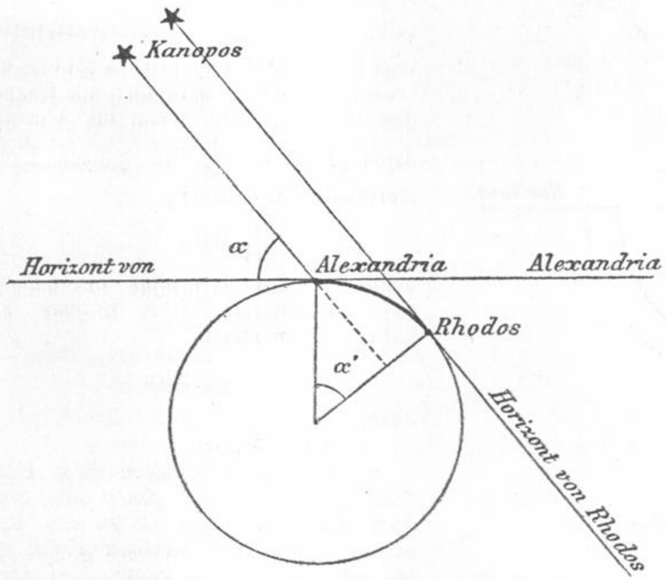
Anmerkung 11. Zu diesem und folgenden vergleiche Peschel, Geschichte der Erdkunde; Posch, Geschichte und System der Breitengradmessungen.

Frage 46. Auf welchem Weg hat Posidonius das Problem zu lösen versucht?

Antwort. Posidonius bemerkte, dass in Rhodos der Stern Kanopos im Schiff Argo gerade zur Zeit, wo er in Rhodos den Horizont berührte, in Alexandrien $\frac{1}{48}$ der Kreisperipherie über dem Horizont stehe und da er nun die Entfernung dieser beiden Städte zu 5000 schätzte, fand er den Erdumfang zu:

$$48 \cdot 5000 = 240 \cdot 000 \text{ Stadien.}$$

Figur 38.



Das Prinzip ist aus der Figur 38 zu ersehen. Der Winkel α ist gleich dem Winkel α', weil ihre Schenkel aufeinander senkrecht stehen.

Frage 47. Worin bestand das Prinzip der arabischen Messung?

Antwort. Das Prinzip der arabischen Messung ist dasselbe, welches auch heutzutage benützt wird. Man mass an einem Orte A die Zenithdistanz eines bekannten Sternes Z_A und zu gleicher Zeit auch an einem andern Orte, der genau in südlicher Richtung vom ersteren lag. die Zenithdistanz Z_B desselben Sternes. Sodann war der:

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle Z_A - \sphericalangle Z_B$$

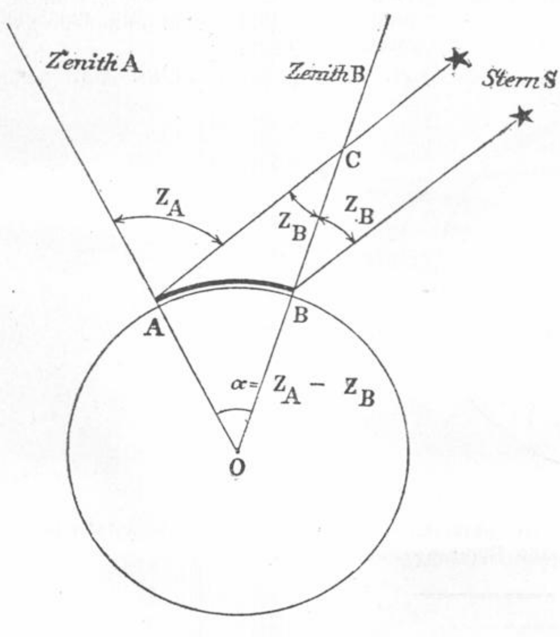
weil im Dreiecke AOC Z_A der Aussenwinkel und Z_B und α die beiden ihm nicht anliegenden Winkel sind. Dieser Winkel betrug 2^0. Die Entfernung AB wurde sorgfältig gemessen und gleich $56\frac{2}{3}$ arabischen Meilen gefunden. Sei noch U der Erdumfang, so wird:

$$U : AB = 360^0 : 2^0$$

und hieraus:

$$U = \frac{360 \cdot AB}{2} = 180 \cdot AB$$

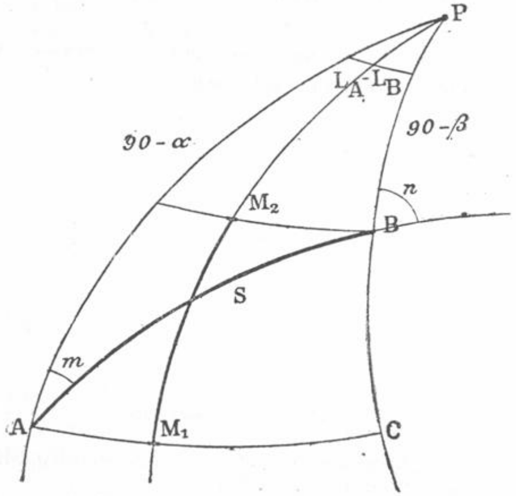
Figur 39.



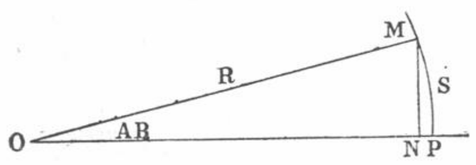
Wir wissen leider über die arabischen Meilen ebenso wenig zu sagen, wie über das früher erwähnte Stadium und deshalb können wir die Richtigkeit des Resultates nicht feststellen.

Frage 48. Von einem Orte, dessen geographische Breite $= \alpha$ ist, wird in einer Richtung eine Strecke bis nach B gemessen und ihre Länge gleich S gefunden. Die Richtung dieser Strecke weicht vom Meridian des Ortes A um den Winkel m ab. Wie findet man die geographische Breite des Ortes B, den Unterschied der geographischen Längen von A u. B, also $L_A - L_B$, unter der Voraussetzung, dass S klein ist.

Figur 40.



Figur 41.



Auflösung. In dem Dreiecke ABP haben wir nach diesem bekannten Satze (vergl. Frage 34, Figur 15):

$$\cos(90-\beta) = \cos(90-\alpha)\cos AB + \sin(90-\alpha)\sin AB\cos m$$

oder da:

$$\cos(90-\beta) = \sin\beta$$
$$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin\beta = \sin\alpha\cos AB + \cos\alpha\sin AB\cos m$$

woraus sich β berechnen lässt.

In demselben Dreiecke haben wir:

$$\frac{\sin(L_A - L_B)}{\sin AB} = \frac{\sin m}{\sin(90-\beta)}$$

oder:

$$\sin(L_A - L_B) = \frac{\sin AB\sin m}{\cos\beta}$$

wodurch, da β aus der ersteren Formel berechnet werden kann, auch $L_A - L_B$ gegeben ist.

Wir haben nun den Winkel AB durch die Länge S auszudrücken und sodann $\sin AB$ und $\cos AB$ zu berechnen.

Wir haben offenbar (vergleiche Figur 41):

$$\sin AB = \frac{MN}{R}$$

oder wenn man MN durch $MP = S$ ersetzt, was bei so kleinem Winkel gestattet ist:

$$\sin AB = \frac{S}{R}$$

ferner wird:

$$\cos AB = \sqrt{1-\sin^2 AB}$$

oder da AB sehr klein:

$$\cos AB = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 AB$$

also:

$$\cos AB = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{S^2}{R^2}$$

Damit erhalten wir:

$$\sin\beta = \sin\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{S^2}{R^2}\sin\alpha + \frac{S}{R}\cos\alpha\cos m$$

$$\sin(L_A - L_B) = \frac{\sin m}{\cos\beta}\,\frac{S}{R}$$

Frage 49. Wie bestimmt man die Länge des Meridianbogens, der zwischen den beiden Parallelen von A und B enthalten ist?

Antwort. Ersetzen wir in der Figur 41 AB durch BC (vergleiche Figur 40, wo $M_1M_2 = BC$) und S durch die gesuchte Länge l, so folgt:

$$\sin BC = \frac{l}{R}$$

Nun ist aber:

$$BC = PC - PB = PA - PB$$

oder:

$$BC = (90 - \alpha) - (90 - \beta) = \beta - \alpha$$

wir haben:

$$\frac{l}{R} = \sin(\beta - \alpha)$$

Wir wollen noch einen bequemeren Ausdruck für l finden.

Es ist:

$$\sin\beta = \sin(\beta - \alpha + \alpha) = \sin(\beta - \alpha)\cos\alpha + \cos(\beta - \alpha)\sin\alpha$$

also da analog wie oben:

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{l}{R}$$

$$\cos(\beta - \alpha) = 1 - \frac{1}{2}\frac{l^2}{R^2}$$

$$\sin\beta = \frac{l}{R}\cos\alpha + \sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{l^2}{R^2}\sin\alpha$$

wir hatten aber:

$$\sin\beta = \frac{S}{R}\cos\alpha\cos m + \sin\alpha - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R^2}\sin\alpha$$

daraus folgt:

$$\frac{l}{R}\cos\alpha - \frac{1}{2}\frac{l^2}{R^2}\sin\alpha = \frac{S}{R}\cos\alpha\cos m - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R^2}\sin\alpha$$

Multiplizieren wir mit R und dividieren durch $\cos\alpha$, so folgt:

$$l = S\cos m - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\frac{l^2}{R}\operatorname{tg}\alpha$$

Im letzten kleinen Glied können wir:

$$l = S\cos m$$

setzen, so dass:

$$l = S\cos m - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R}\operatorname{tg}\alpha(1 - \cos^2 m)$$

oder:

$$41)\ \ldots\ l = S\cos m - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R}\operatorname{tg}\alpha\sin^2 m$$

Nun war:

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{l}{R}$$

also:

$$(\beta - \alpha)'' = \frac{l}{R\sin 1''}$$

d. h.:

$$42)\ \ldots\ (\beta - \alpha)'' = \frac{S\cos m}{R\sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R^2}\frac{\operatorname{tg}\alpha\sin^2 m}{\sin 1''}$$

In beiden Formeln genügt für R ein ungefährer Wert, etwa der, den wir für γ gefunden haben.

Wir hatten ferner:

$$\sin(L_A - L_B) = \frac{\sin m}{\cos\beta}\,\frac{S}{R}$$

hieraus folgt:

$$43) \ldots (L_A - L_B)'' = \frac{\sin m}{\cos\beta}\,\frac{S}{R}\,\sin 1''$$

Frage 50. Wie berechnet man die Länge des Erdradius R und die Länge λ für einen Grad an dieser Stelle?

Antwort. Wir haben die Proportion:

$$2R\pi : l = 360\cdot 60\cdot 60'' : (\beta - \alpha)''$$

also:

$$R = \frac{360\cdot 60\cdot 60''\cdot l}{2\cdot\pi\cdot(\beta - \alpha)''}$$

also:

$$R = \frac{180\cdot 60\cdot 60''\cdot l}{\pi(\beta - \alpha)''}$$

oder:

$$44) \ldots R = \frac{648000''}{(\beta - \alpha)''}\cdot\frac{l}{\pi}$$

Die Länge λ eines Grades ergibt sich ferner aus der Proportion:

$$\lambda : l = 3600'' : (\beta - \alpha)''$$

oder:

$$45) \ldots \lambda = \frac{3600''\cdot l}{(\beta - \alpha)''}$$

Frage 51. Welche ist die fernere Geschichte des Problems der Erdmessung?

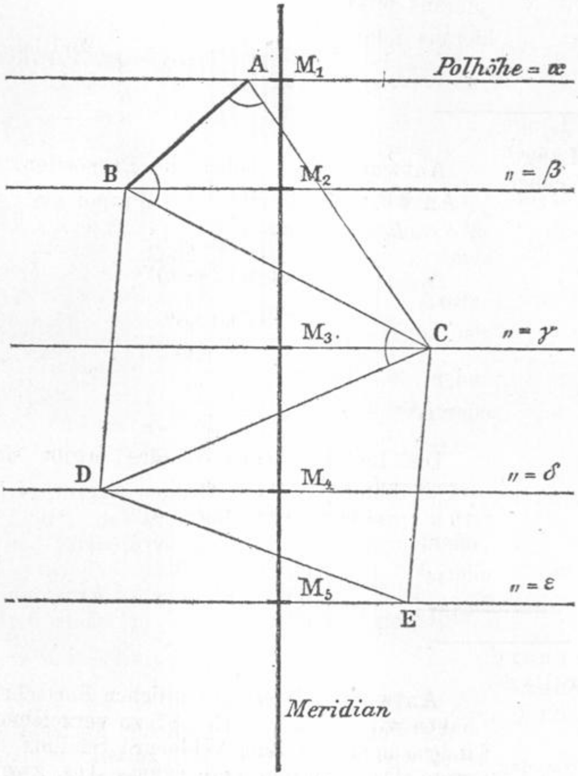
Erkl. 80. W. Snellius, geb. 1591 in Leyden, gest. daselbst 1626, Professor der Mathematik und Entdecker des Brechungsgesetzes des Lichtes, machte die Resultate seiner Messungen bekannt in der Schrift „Eratosthenes Batavus“, Leyden 1617. Seine Berechnung war eine höchst mühevolle, da er die Logarithmen nicht kannte.

Antwort. Einen wesentlichen Fortschritt haben wir im Jahr 1615—17 zu verzeichnen, indem in dieser Zeit Willebord Snellius die erste Triangulation unternahm. Die zweite von ihm unternommene war genauer (1662) und nach später gemachter Ausrechnung durch Musschenbroek betrug die Länge eines Grades 57033 Toisen.

Frage 52. Was versteht man unter der Triangulation?

Antwort. Die Methode der Triangulation besteht im folgenden. Man misst in einer möglichst ebenen Gegend mit der möglichst grössten Genauigkeit eine Strecke, die sogenannte Basis, etwa AB in der Figur 42. Sodann von ihren Endpunkten aus die Winkel, die sie mit einem dritten festen Punkt (etwa einer Turmspitze) bildet, also $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ in der Figur. Dadurch ist das Dreieck ABC und demzufolge auch die Seite BC bestimmt. Nun wird der Winkel $\sphericalangle C$ und der Winkel DBC gemessen, wodurch wieder das Dreieck BCD

Figur 42.



bestimmt ist u. s. f. Auf diese Weise bekommt man ein Dreiecksnetz und nach Frage 49 auch die Meridianstücke $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_4$, $M_4 M_5$ u. s. f., deren Summe einsn grosen Meridianbogen liefert.

Die Länge dieses Bogens dividiert durch den Unterschied der geographischen Breiten gibt die Länge eines Grades, gültig für die Mitte der geographischen Breiten.

Es ist aber folgendes zu bemerken. Nach der Formel 41) ist:

$$l = S \cos m - \frac{1}{2}\,\frac{S^2}{R}\,\operatorname{tg}\alpha \sin^2 m$$

Man wird daher m so klein als möglich annehmen, damit das zweite Glied so klein als möglich werde.

Mit anderen Worten, man wird zweckmässig solche Seiten zur Berechnung von l wählen, die gegen den Meridian eine kleine Neigung besitzen, also in der Figur 42 etwa BD und CE.

Zweitens haben die Dreieckseiten infolge der Unebenheit des Erdbodens eine verschiedene Neigung gegen den Horizont. Sie müssen daher auf eine und dieselbe Kugelebene reduziert werden. Diese muss für alle Dreiecke dieselbe Entfernung vom Erdmittelpunkt haben, weil sonst die Länge eines Grades verschieden ausfallen würde. Man ist übereingekommen, alles auf die Meeresfläche zu reduzieren. Daher besteht die Aufgabe der Geodäsie darin, die Gestalt der ganz von dem Meere bedeckten Erdoberfläche festzustellen, wenn von der Einwirkung des Mondes und der Sonne (Ebbe und Flut) abgesehen wird.

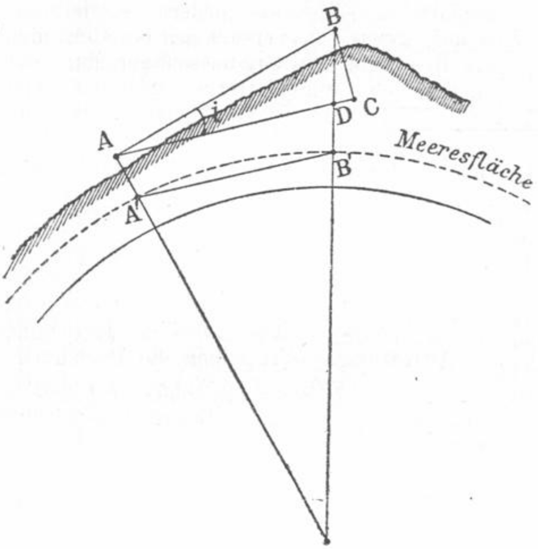
Frage 53. Worin bestehen die Reduktionen auf den Horizont und die Meeresoberfläche?

Antwort. Nehmen wir an, es würde die Strecke AB gemessen und man weiss, dass der Punkt B um h Meter höher liegt als der Punkt A, sodann ist die Linie AB auf den Horizont reduziert gleich der Linie AC (vergl. Figur 43) oder weil AO und BC nahezu parallel sind, wenn die gemessene Strecke im Verhältnis zu dem Erdradius sehr klein ist (was immer stattfindet), auch gleich AD.

Wir haben:

$$\sin i = \sin (BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{AD}$$

Figur 43.



also da:

$$BD = h$$

und wenn $AB = l$ der gemessenen Länge gesetzt wird:

$$\sin i = \frac{h}{l}$$

Sei nun λ die reduzierte Strecke AD, so wird:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

oder:

$$AD = AB\sqrt{1 - \left(\frac{BD}{AB}\right)^2}$$

woraus:

$$\lambda = l\sqrt{1 - \sin^2 i}$$

oder:

$$\lambda = l \cos i$$

also:

$$l - \lambda = l(1 - \cos i) = 2l \sin^2 \frac{i}{2}$$

woraus:

$$46) \ldots \lambda = l - 2l \sin^2 \frac{i}{2}$$

folgt.

Sei sodann H die Höhe von A über dem Meeresspiegel, so wird, wenn man den Radius der vom Meer bedeckten, als kugelförmig angesehenen Erde mit R bezeichnet, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$ADO \text{ und } A'B'O$$

$$AD : A'B' = AO : OA'$$

oder:

$$AD : A'B' = OA' + A'A : OA'$$

Demnach, wenn L die auf Meeresoberfläche reduzierte Länge von λ bezeichnet:

$$\lambda : L = R + H : R$$

demnach:

$$L = \lambda \frac{R}{H + R}$$

oder:

$$L = \lambda \frac{1}{1 + \frac{H}{R}}$$

da nun $\frac{H}{R}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so wird:

$$L = \lambda\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

oder:

$$47) \ldots L = \lambda - \lambda \frac{H}{R}$$

Erkl. 81. Es ist:

$$1 - \cos i = 1 - \cos\left(\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\right) =$$

$$1 - \cos\frac{i}{2} \cdot \cos\frac{i}{2} + \sin\frac{i}{2} \cdot \sin\frac{i}{2} =$$

$$1 - \cos^2\frac{i}{2} + \sin^2\frac{i}{2}$$

da nun:

$$1 - \cos^2\frac{i}{2} = \sin^2\frac{i}{2}$$

so folgt:

$$1 - \cos i = 2\sin^2\frac{i}{2}$$

Frage 54. Zu welchen Resultaten ist man mit Hilfe der Triangulation gelangt?

Antwort. Die Gradmessungen haben gezeigt, dass die Länge des Grades vom Pole gegen den Aequator abnimmt und zwar so, dass man daraus schliessen kann, dass die Erde 1) sehr wenig von der Kugelgestalt abweicht, 2) dass sie an den Polen abgeplattet ist. Nimmt man noch hinzu, dass die Gesetze der mathematischen Physik für die Erde die Gestalt eines an den Polen abgeplatteten Ellipsoids fordern, so hat man Grund genug zu versuchen, ob sich nicht die Resultate der Gradmessungen durch ein an den Polen abgeplattetes darstellen lassen.

---

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 39. Im Jahre 1525 benützte Fernel die ziemlich gerade Strecke von Paris nach Amiens zur Bestimmung des Erdhalbmessers. Er legte auf dieser Strasse eine Strecke von 1^0 zu Wagen zurück und zählte die Umdrehungen des Wagenrades, welches er mit einem Zählapparat verbunden. Er fand dieselbe = 57070 Toisen. Wie gross ist der Erdhalbmesser nach dieser Messung, wenn:

$$1 \text{ Toise} = 1{,}949037 \text{ m}$$

Erkl. 82. Fernel, geb. 1497, gest. 1558, königl. Leibarzt, machte seine Resultate in der Schrift „Cosmotheoria“ 1528 bekannt.

Erkl. 83. Wir wollen noch erklären, wie er den astronomischen Teil dieser Messung bewältigte. Er bestimmte zunächst die geographische Breite für Paris und fand dieselbe $= 48^0\,38'$. Mit diesem Wert berechnete er die Sonnenhöhen für einen Ort, der 1^0 nördlicher liegt, dessen geographische Breite also $49^0\,38'$ betrug, und zwar für einige Tage gegen das Ende August. Sodann begab er sich nach Norden und fand in der Nähe von Amiens einen Punkt, an welchem die beobachtete Sonnenhöhe genau die berechnete war, woraus er schloss, dass die geographische Länge dieses Ortes $= 49^0\,38'$ ist. Die Entfernung dieses Punktes von Paris betrug eben 57070 Toisen.

Auflösung. Wir haben die Beziehung:

$$U : 57070 = 360^0 : 1^0$$

oder, wenn R den Erdhalbmesser bezeichnet, wegen:

$$U = 2R\pi = R \cdot 6{,}283185$$

auch:

$$R \cdot 6{,}283185 : 57070 = 360^0 : 1^0$$

woraus:

$$R = \frac{360 \cdot 57070}{6{,}283185}$$

folgt. Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 360 &=& 2{,}5563025 \\ \log 57070 &=& 4{,}7564079 \\ \hline && 7 \cdot 3127104 \\ \log 2\pi &=& 0{,}7981799 \\ \hline \log R &=& 6 \cdot 5145305 \\ R &=& 3269870 \text{ Toisen} \end{array}$$

also der Durchmesser:

$$2R = 6539740$$

Multiplizieren wir diese Zahl mit:

$$1{,}949037$$

so erhalten wir den Durchmesser in Metern. Wir haben:

$$\begin{array}{rcl} \log 2R &=& 6{,}8155605 \\ \log 1{,}949037 &=& 0{,}2898200 \\ \hline && 7 \cdot 1053805 \end{array}$$

oder:

$$2R = 12746200 \text{ m}$$

Nach neueren Bestimmungen beträgt der Durchmesser einer Kugel, die mit der Erde einen gleichen Rauminhalt hat:

$$12740568$$

Dieses Resultat weicht nicht viel von dem soeben erhaltenen ab. Bei der Ungenauigkeit der Messung muss man annehmen, dass hier Zufall im Spiele war, indem sich entgegengesetzte Fehler aufhoben.

Aufgabe 40. Zwischen Berlin und dem südlich gelegenen Eichberg wurde die Entfernung gemessen und zu:

$$S = 30558{,}9 \text{ m}$$

gefunden. Die geographische Breite für Berlin ist:

$$\alpha = 52^0\, 31'\, 19''$$

ferner das Azimut des trigonometrischen Punktes auf dem Eichberge:

$$m = 221^0\, 23'\, 15''$$

Wie gross sind die Grössen:

$$l,\ \beta,\ R,\ \lambda$$

Erkl. 84. Man hat für immer:

$$\log 648000'' = 5{,}8115750$$
$$-\log \pi = 0{,}4971499$$
$$\log \frac{648000}{\pi} = 5{,}3144251$$

Auflösung. Wir berechnen zunächst nach der Formel 23) l.

$$l = S \cos m - \frac{1}{2} \frac{S^2}{R} \operatorname{tg} \alpha \sin^2 m$$

$$\log S = 4{,}4851377$$
$$\log \cos m = 9_n 8752091$$
$$\log A = 4_n 3603468$$
$$A = -22926{,}0 \text{ m}$$

$$2 \log S = 8 \cdot 9702754$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9 \cdot 8846404$$
$$2 \log \sin m = 9 \cdot 6405957$$
$$= 8 \cdot 4955115$$

$$\log 2 = 0 \cdot 3010300$$
$$\log R = 6 \cdot 8041588$$
$$7 \cdot 1051888$$

$$\log B = 1 \cdot 3903227$$
$$R = 24{,}6$$

Nun wird:

$$l = A - B = -22950{,}6 \text{ m}$$

oder da es gleichgültig ist, ob wir + oder — bei der Länge nehmen, weil wir von der Richtung absehen:

$$\underline{\underline{l = 22950{,}6 \text{ m}}}$$

Sodann rechnen wir β aus der Formel:

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$$

und

$$(\beta - \alpha)'' = \frac{l}{R} \sin 1''$$

also:

$$\log l = 4{,}3607940$$
$$\log \sin 1'' = 5{,}3144256$$
$$= 9 \cdot 6752196$$
$$\log R = 6 \cdot 8041588$$
$$\log (\beta - \alpha)'' = 2 \cdot 8710608$$

Wir haben also:

$$(\beta - \alpha)'' = 743''$$

oder:

$$\beta - \alpha = 12'\, 23''$$

Da nun β nördlicher liegt, so haben wir:

$$\beta = 52^0\, 31'\, 19'' - 12'\, 23''$$

oder:

$$\underline{\underline{\beta = 52^0\, 18'\, 56''}}$$

Rechnen wir ferner R nach der Formel 44):

$$R = \frac{648000''}{(\beta - \alpha)''} \frac{l}{\pi}$$

also:

$$\begin{array}{rl} \log \frac{648000}{\pi} & = 5{,}3144251 \\ \log l & = 4{,}3607940 \\ \hline & \ 9{\cdot}6752191 \\ \log (\beta - \alpha)'' & = 2{\cdot}8710608 \\ \hline \log R & = 6{\cdot}8041583 \\ R & = 6370280 \text{ m} \end{array}$$

Endlich die Länge eines Grades λ nach der Formel 45):

$$\lambda = \frac{3600'' \cdot l}{(\beta - \alpha)''}$$

$$\begin{array}{rl} \log l & = 4{,}3607940 \\ \log 3600'' & = 3{,}5563025 \\ \hline & \ 7{,}9170965 \\ \log (\beta - \alpha)'' & = 2{\cdot}8710608 \\ \hline \log \lambda & = 4{\cdot}0460357 \\ \lambda & = 11118 \text{ m} \end{array}$$

Aufgabe 41. Wie weit muss man gehen, damit die geographische Breite um 1′ zu- oder abnehme?

Auflösung. Setzt man in der Formel 26):

$$(\beta - \alpha)'' = 60''$$

so folgt:

$$R = 10800 \cdot \frac{l_0}{\pi}$$

und hieraus:

$$l_0 = \frac{R \cdot \pi}{10800}$$

Man findet:

$$l_0 = 1853 \text{ m}$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log R & = 6{,}8041583 \\ \log \pi & = 0{,}4971499 \\ \hline & \ 7{,}3013082 \\ \log 10800 & = 4{,}0334238 \\ \hline \log l_0 & = 3{,}2678844 \end{array}$$

---

c) Ueber die Bestimmung und Berechnung des Erdellipsoids aus den Gradmessungen.

α) Gleichung der Ellipse in rechtwinkligen Koordinaten.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a halbe grosse Achse, b halbe kleine Achse, x die Abscisse, y die Ordinate

b) $a^2 (1 - e^2) = b^2$

c) $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

e numerische Excentrizität

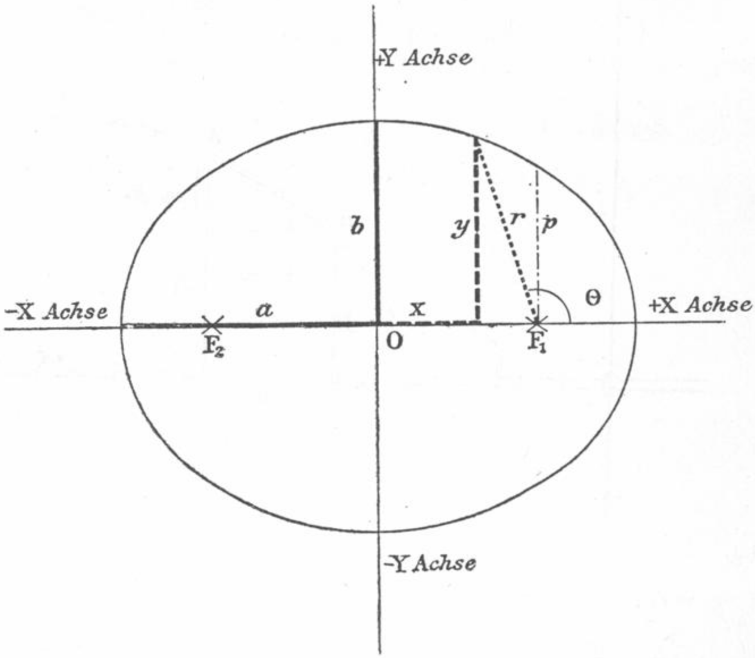
d) $\varepsilon = ea$

ε lineare Excentrizität, gleich dem Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte.

β) Polargleichung der Ellipse (Pol = Brennpunkt).

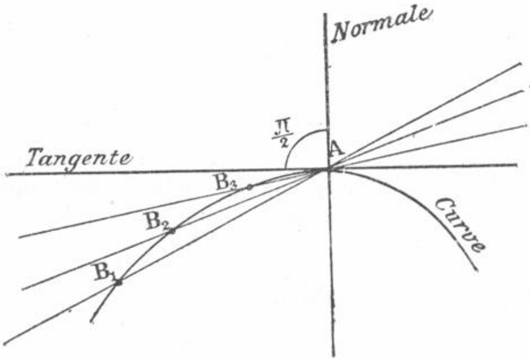
$r = \frac{p}{1 + e \cos \Theta}$, r der Radiusvektor, $p = a (1 - e^2)$ Parameter, Θ die Anomalie.

Figur 44.



Frage 55. Was versteht man unter der Tangente und Normale an einem Kurvenpunkt?

Figur 45.

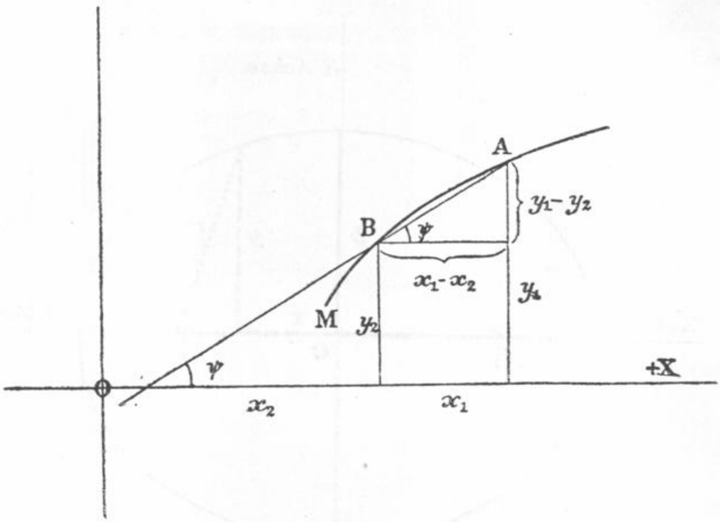


Antwort. Die Tangente ist eine Sekante, deren Schnittpunkte mit der Kurve zusammenfallen in einen einzigen. Die Normale steht auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht. Zum Begriffe der Tangente gelangt man noch auf folgende Art. Man beschreibe um den Berührungspunkt einen Kreis mit einem kleinen Radius. Dieser wird von der Kurve in zwei Punkten geschnitten. Verbindet man diese beiden Punkte durch eine Gerade, so wird diese zur Tangente, wenn der Radius des Kreises kleiner ist, als jede noch so kleine, angebbare Grösse.

Frage 56. Wie wird die Tangente und Normale an einem Punkt bestimmt?

Antwort. Durch jenen Winkel, den sie mit der Abscissenachse einschliessen. Seien A und B (Figur 46) zwei Kurvenpunkte, so wird die durch sie gehende Gerade die po-

Figur 46.



Erkl. 84 a. Es ist (siehe Figur 46):

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\psi = \frac{AC}{AB}, \quad \cos\psi = \frac{BC}{AB}$$

Erkl. 85. Wir führen für die Folge eine eigentümliche Bezeichnung ein.

Wir bezeichnen mit dx die Differenz $x_1 - x_2$, insofern sie in Null übergeht. Es ist also dx mit 0 quantitativ gleichwertig. Ebenso dy, welches wir für $y_1 - y_2$ schreiben. Sodann wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0}$$

also eine unbestimmte Grösse, d. h. so lange unbestimmt, so lange der Zusammenhang zwischen x und y nicht gegeben ist.

Ist z. B.:

$$y = \operatorname{tg}\alpha$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg}x_1 - \operatorname{tg}x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x_1 - x_2)\cdot(1 + \operatorname{tg}x_1 \operatorname{tg}x_2)}{x_1 - x_2}$$

wenn man sich der Formel:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

erinnert, aus welcher:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\,(1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)$$

folgt. Hier haben wir $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$ zu setzen. Wir können, da $x_1 - x_2 = 0$, also jedenfalls sehr klein gedacht werden kann:

$$\operatorname{tg}(x_1 - x_2) = x_1 - x_2$$

sitive Richtung der Abscissenachse schneiden unter einem Winkel φ.

Aus der Figur 47 entnimmt man, dass:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Nähert man den Punkt $x_2 y_2$ immer mehr und mehr dem Punkte $x_1 y_1$ bis sie zusammenfallen, so hat man im obigen Ausdrucke $x_1 = x_2 = x$ zu setzen, wodurch er die unbestimmte Form:

$$\frac{0}{0}$$

annimmt. Bezeichnen wir den Ausdruck $y_1 - y_2$ für diesen Fall mit dy und $x_1 - x_2$ mit dx, so folgt:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{dy}{dx}$$

wobei Θ der Tangentenwinkel ist.

Bezeichnen wir die Länge des Bogens von M bis A mit s_1 und bei B mit s_2, so wird:

$$AB = s_1 - s_2$$

und wir erhalten:

$$\sin\Theta = \frac{dy}{ds} \quad \cos\Theta = \frac{dx}{ds}$$

auf analoge Weise wie die Tangente, weil für sehr kleine Bogen das Kurvenstück AB mit dem Sehnenstücke AB vertauscht werden kann. Da nun:

$$\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$$

so folgt:

$$\frac{(dy)^2}{(ds)^2} + \frac{(dx)^2}{(ds)^2} = 1$$

also:

$$\frac{\operatorname{tg}(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 1$$

setzen. Wodurch:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2$$

setzt man $x_1 = x_2 = x$ und beachtet, dass:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 x}$$

so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder:

$$\frac{d \cdot \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

woraus wieder:

$$dx = \cos^2 x \cdot d \operatorname{tg} x$$

hervorgeht, eine Beziehung, von der wir sofort Gebrauch machen werden.

oder:

$$\frac{(dy)^2 + (dx)^2}{(ds)^2} = 1$$

oder:

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}$$

was auch unmittelbar aus der Fig. 46 folgt. Wir wollen den Wert:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ für } y_1 = y_2,\ x_1 = x_2$$

für die Ellipse berechnen. Wir haben die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b_2} = 1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

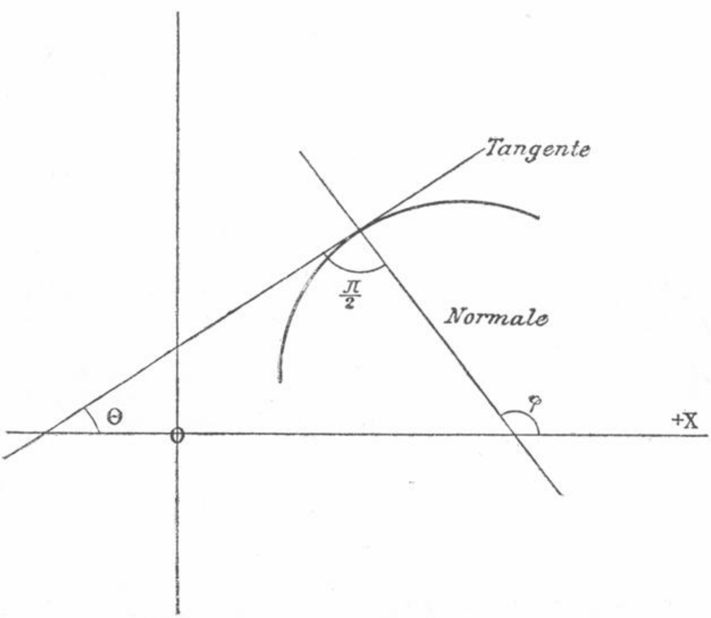
Daraus folgt durch Subtraktion:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b_2} = 0$$

oder:

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2} = 0$$

Figur 47.



Dadurch wird:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

oder wenn man:

$$x_1 = x_2 = x$$
$$y_1 = y_2 = y$$

setzt:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Normale mit der positiven Richtung der Abscissenachse bildet, mit φ, so ist aus der Figur 47 unmittelbar zu ersehen, dass:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \Theta$$

also wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) = -\operatorname{ctg} \Theta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \Theta}$$

also:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dx}{dy}$$

und speziell für die Ellipse:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dx}{dy} = +\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}$$

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) = \cos\Theta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$$

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) = -\sin\Theta = -\frac{dy}{ds} = -\frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}$$

Erkl. 86. Es ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{dy^2+dx^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}}} = \frac{a^2y^2}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$$

oder:

$$\sin\varphi = \frac{a^2y}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-b^2y}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$$

Frage 57. Was versteht man unter dem Krümmungskreis eines Kurvenpunktes und wie wird dessen Radius berechnet?

Antwort. Analog dem Begriffe der Tangente wollen wir den Begriff des Krümmungskreises entwickeln. Legen wir an zwei benachbarte Kurvenpunkte (vergl. Figur 48) Tangenten und Normalen, so ist durch die beiden Kurvenpunkte und den Schnittpunkt der beiden Normalen ein Kreis bestimmt. Derjenige Kreis, den man erhält, wenn man die beiden Tangenten zusammenfallen lässt, wird der Krümmungskreis genannt und sein Radius führt den Namen des Krümmungsradius.

Bezeichnen wir denselben mit ϱ, so folgt aus der Figur 48 sofort die Proportion:

$$\varrho : 1 = \text{Bogen } AB : \varphi_1 - \varphi_2$$

Sei nun:

$$MB = s_1,\ MA = s_2$$

so wird:

$$\varrho : 1 = s_1 - s_2 : \varphi_1 - \varphi_2$$

also:

$$\varrho = \frac{s_1 - s_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Soll ϱ Krümmungsradius sein, so muss nach der Definition $s_1 - s_2$ in ds und $\varphi_1 - \varphi_2$ in $d\varphi$ übergehen. Wir haben also:

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$$

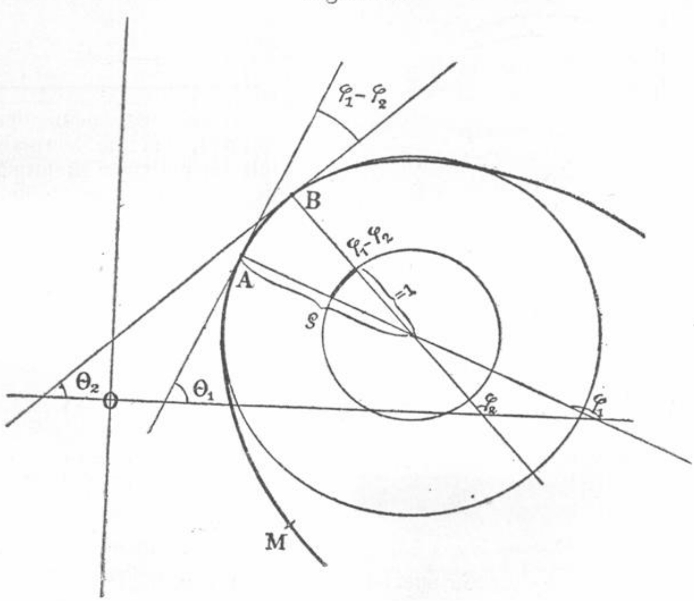
Um diesen Wert für die Ellipse zu bilden, benützen wir die in Erkl. 85 gewonnene Relation, nach welcher:

$$d\varphi = \cos^2\varphi \cdot d \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

ferner ist noch:

$$ds = \frac{dx}{\sin\varphi}$$

Figur 48.



Es wird also:

$$\varrho = \frac{dx}{\sin\varphi\cos^3\varphi\, d\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

oder:

$$\frac{1}{\varrho} = \sin\varphi\cos^3\varphi\,\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx}$$

Nun ist:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_1x_2(x_1-x_2)} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y_1x_2 - x_2y_2 - (x_1y_2 - x_1y_2)}{x_1x_2(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\,\frac{x_2(y_1-y_2) - y_2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)x_1x_2} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} - \frac{x_1x_2}{y_2}\right)$$

Da nun:

$$\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

so folgt:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx} = -\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y} + \frac{y_2}{x_1x_2}\right)$$

Setzt man hierin:

$$x = x_1 = x_2$$
$$y = x_1 = y_2$$

so folgt:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{dx} = -\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)$$

Wir haben ferner:

$$\sin\varphi = \frac{a^2y}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{b^4x^2}{(\sqrt{a^4y^2+b^4x^2})^2}$$

Damit wird:

$$\underline{\frac{1}{\varrho} = -\frac{a^4b^4}{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}}$$

Setzt man noch:

$$48)\quad \ldots\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$$

oder:

$$y = x\,\frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

in die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so folgt:

$$\underline{x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}}$$

$$\underline{y = \frac{b^2\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\sin\varphi\,(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}}$$

Damit wird:

$$a^4y^2 + b^4x^2 = b^4x^2\left(1 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2}\right) = b^4x^2(1+\mathrm{tg}^2\varphi) = \frac{b^4x^2}{\cos^2\varphi}$$

oder da:

$$\frac{b^4x^2}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2b^4}{(1-e^2\sin^2\varphi)},\quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{a}{b^2}(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}$$

Erkl. 87. Es ist nach der Definition:

$$d\,\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}\right)$$

ferner:

$$dx = x_1 - x_2$$

woraus nebenstehende Formel folgt.

Erkl. 88. Es ist:

$$-\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\,\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)\frac{a^2b^4x^2y}{(\sqrt{a^4y^2+b^4x^2})^3} =$$

$$-\frac{a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{(\sqrt{a^4y^2+b^4x^2})^3} = -a^4b^4\,\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{(\sqrt{a^4y^2+b^4x^2})^3}$$

Da nun bei der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, so folgt das obige Resultat.

Erkl. 89. Man hat:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^4}\,b^2\,\mathrm{tg}^2\varphi\right) = 1 =$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{tg}^2\varphi\right) = \frac{x^2}{a^2}\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}$$

demnach:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{a^2\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)}{a^2\cos^2\varphi}$$

setzt man:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = e$$

so folgt das obige Resultat.

Nun ist:

$$y = x\,\frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-4^2\sin^2\varphi}}$$

also da:

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

das obige Resultat.

Da nun:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

so folgt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e)^2}$$

oder:

$$49) \ldots \varrho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Frage 58. Auf welche Art wird aus den vorhandenen Messungen das Erdellipsoid bestimmt?

Antwort. Da wir das Erdellipsoid als ein Umdrehungsellipsoid voraussetzen, so genügt es, irgend einen Meridianschnitt desselben zu bestimmen. Dieser Schnitt ist offenbar eine Ellipse.

Haben wir demnach an irgend einer Stelle die Länge eines Grades bestimmt und aus ihr die Länge des Radius nach dem vorhergehenden berechnet, so erhalten wir offenbar den Krümmungsradius an dieser Stelle. Sei also λ_1 die Länge eines Grades unter der geographischen Breite φ_1 und ϱ_1 der zugehörige Krümmungsradius, so haben wir:

$$\lambda_1 : 2\pi\varrho_1 = 1^0 : 360^0$$

oder:

$$\varrho_1 = \frac{\lambda_1 \cdot 180}{\pi}$$

ebenso für eine zweite Stelle mit der geographischen Breite φ_1:

$$\varrho_2 = \frac{\lambda_2 \cdot 180}{\pi}$$

woraus:

$$50) \ldots \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

folgt.

Andererseits haben wir nach der Formel 49):

$$\varrho_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{3/2}}$$

$$\varrho_2 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{3/2}}$$

also:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \left(\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}\right)^{3/2}$$

also auch:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2/3} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}$$

wie:

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{2/3} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}$$

und hieraus:

$$51) \ldots . \; e^2 = \frac{\lambda_1^{2/3} - \lambda_2^{2/3}}{\lambda_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \lambda_2^{2/3} \sin^2 \varphi_2}$$

oder:

$$52) \ldots \frac{1}{e^2} = \frac{\varrho_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \varrho_2^{2/3} \sin^2 \varphi_2}{\varrho_1^{2/3} - \varrho_2^{2/3}}$$

Erkl. 90. Man hat:

$$\lambda_1^{2/3}(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1) = \lambda_2^{2/3}(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)$$

also:

$$\lambda_1^{2/3} - \lambda_2^{2/3} = e^2(\lambda_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \lambda_2^{2/3} \sin^2 \varphi_2)$$

und hieraus:

$$e^2 = \frac{\lambda_1^{2/3} - \lambda_2^{2/3}}{\lambda_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \lambda_2^{2/3} \sin^2 \varphi_2}$$

Erkl. 91. Es ist:

$$\varrho_1^{2/3} - \varrho_2^{2/3} = \varrho_1^{2/3} - [\varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)]^{2/3} =$$

$$\varrho_1^{2/3} - \varrho_1^{2/3}\left(1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}\right)^{2/3} =$$

$$\varrho_1^{2/3} - \varrho_1^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}\right)$$

wenn man nach dem binomischen Satze entwickelt und die höheren Potenzen von:

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}$$

vernachlässigt. Hieraus folgt sofort:

$$\varrho_1^{2/3} - \varrho_2^{2/3} = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}\,\varrho_1^{2/3}$$

Analog wird:

$$\varrho_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - \varrho_2^{2/3} \sin^2 \varphi_2 =$$

$$\varrho_1^{2/3} \sin^2 \varphi_1 - [\varrho_2^{2/3} + (\varrho_2^{2/3} - \varrho_1^{2/3})] \sin^2 \varphi_2$$

oder:

$$= \varrho_1^{2/3}(\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2) - (\varrho_2^{2/3} - \varrho_1^{2/3}) \sin^2 \varphi_2$$

$$= \varrho_1^{2/3}(\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2) + \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1}\,\varrho_1^{2/3} \sin^2 \varphi_2$$

Dieses letzte Glied können wir im Divisor vernachlässigen und erhalten so das nebenstehende Resultat.

Vernachlässigen wir nämlich α^2, so ist:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \alpha$$

zu setzen, weil:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \alpha + \alpha^2 + \cdots$$

Erkl. 92. Es ist allgemein:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

Denn setzt man nach Erkl. 52:

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$
$$2\sin^2\beta = 1 - \cos 2\beta$$

so folgt:

$$2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = \cos 2\beta - \cos 2\alpha$$

Setzt man:

$$2\beta = m - n$$
$$2\alpha = m + n$$

wodurch:

$$m = \alpha + \beta,\quad n = \alpha - \beta$$

wird und beachtet, dass:

$$\cos(m-n) - \cos(m+n) = \sin m \sin n$$

so folgt leicht das obige Resultat.

Haben wir auf diese Weise e berechnet, so können wir die Abplattung der Erde an den Polen oder den Bruch:

$$53)\ \ldots\ \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2}$$

berechnen.

Um die halbe grosse Achse a zu erhalten, bemerken wir, dass:

$$\varrho_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{3/2}}$$

woraus:

$$54)\ \ldots\ a = \frac{\varrho_1}{1-e^2}(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{3/2}$$

folgt. Sodann erhalten wir b aus der Gleichung:

$$55)\ \ldots\ b = a\sqrt{1-e^2}$$

Wir wollen noch die Formel 52) umformen, wobei wir die zweiten Potenzen von:

$$\frac{(\varrho_2-\varrho_1)}{\varrho_1}$$

vernachlässigen. Setzen wir:

$$\varrho_2 = \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)$$

so folgt:

$$\varrho_1^{2/3} - \varrho_2^{2/3} = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1}\,\varrho_1^{2/3}$$

ferner wird:

$$\varrho_1^{2/3}\sin^2\varphi_1 - \varrho_2^{2/3}\sin^2\varphi_2 =$$
$$\varrho_1^{2/3}(\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2) + \frac{2}{3}\varrho_1^{2/3}\,\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}\sin^2\varphi_2$$

also:

$$e^2 = \frac{2}{3}\,\frac{\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}\varrho_2^{2/3}}{\varrho_1^{2/3}(\sin^2\varphi_1-\sin^2\varphi_2) + \frac{2}{3}\varrho_1^{2/3}\frac{(\varrho_1-\varrho_2)}{\varrho}\sin^2\varphi_2}$$

wofür wir:

$$e^2 = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1(\sin^2\varphi_1-\sin^2\varphi_2)}$$

schreiben können. Beachtet man ferner, dass:

$$\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2 = \sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)$$

so folgt endlich:

$$56)\ \ldots\ e^2 = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\varrho_1-\varrho_1}$$

Diese Formel ist für die logarithmische Rechnung sehr geeignet.

Frage 59. Was versteht man unter der geozentrischen Breite?

Antwort. Verbindet man den Beobachtungsort mit dem Erdmittelpunkte, so erhält man den Erdradius ϱ für den gedachten Ort. Der Winkel φ', den dieser mit der Ebene des Aequators bildet, nennt man die geozentrische Breite.

Man hat, wie aus der Figur 49 hervorgeht:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{A \text{ Beob.}}{OA} = \frac{y}{x}$$

Wir hatten aber für die geographische Breite, welche nichts anderes als den Schnittwinkel der Normale φ darstellt, in der Frage 56 gefunden, dass:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$$

wir erhalten somit:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi'$$

und daraus:

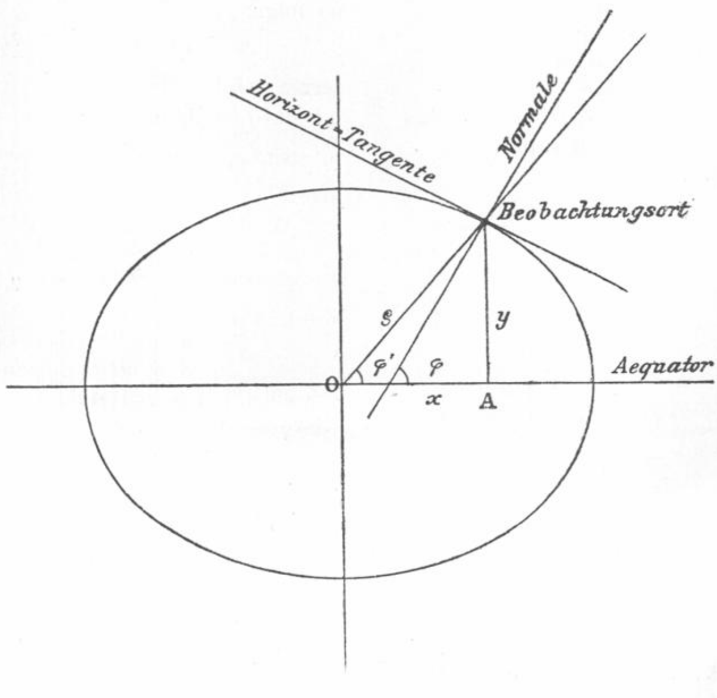
$$57) \ldots \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi$$

oder mit dem in der Aufgabe 42 enthaltenen Werte:

$$58) \ldots \operatorname{tg}\varphi' = 0{,}993211 \operatorname{tg}\varphi$$

Anmerkung. $\log(1-e^2) = 9{,}9970416$

Figur 49.



Frage 60. Wie berechnet man die Grösse des Erdradius für einen bestimmten Ort?

Antwort. Es ist offenbar (vergl. Fig. 49):

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nun haben wir aber in der Frage 57 gefunden, dass:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Es war ferner:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi'$$

Wir erhalten demnach:

$$\varrho = x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

oder:

$$\varrho = \frac{x}{\cos\varphi'} = \frac{a\cos\varphi}{\cos\varphi'\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

Diese Gleichung können wir noch umformen. Es ist, da $1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$

$$\varrho = \frac{a\cos\varphi}{\cos\varphi'\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi-e^2\sin^2\varphi}}$$

demnach:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi'}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}}$$

oder durch Division mit $\cos\varphi$ im Zähler und Nenner:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi'}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+(1-e^2)\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi}}$$

Nun war aber:

$$\operatorname{tg}\varphi' = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi$$

dieses eingesetzt, gibt:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi'}\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi'}}$$

Da nun:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}$$

so folgt:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi'}\sqrt{\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'}}$$

oder:

$$59) \ldots \varrho = \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}}$$

Nachstehende Tafel liefert die Resultate von 10 zu 10 Graden.

Erkl. 93. Es ist:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi'} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi\,\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}}$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit $\cos\varphi'$, so folgt:

$$\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'} = \frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos(\varphi-\varphi')}$$

Damit wird:

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi'}\sqrt{\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos(\varphi-\varphi')}} = a\sqrt{\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}}$$

woraus unmittelbar das nebenstehende Resultat folgt.

Tafel X.

φ	$\varphi-\varphi'$	φ'	$\frac{\varrho}{a}$	$\log\frac{\varrho}{a}$
0^0	0	0	1,000000	0,0000000
10^0	3′ 58″	9^0 56′ 2″	0,999899	9,9999561
20^0	7′ 27″	19^0 52′ 33″	0,999608	9,9998297
30^0	10′ 3″	29^0 49′ 57″	0,999161	9,9996355
40^0	11′ 26″	39^0 48′ 34″	0,998612	9,9993968
50^0	11′ 27″	49^0 48′ 33″	0,998026	9,9991418
60^0	10′ 5″	59^0 49′ 55″	0,997473	9,9989013
70^0	7′ 29″	69^0 52′ 31″	0,997022	9,9987048
80^0	3′ 59″	79^0 56′ 1″	0,096727	9,9985762
90^0	0	90^0 0′ 0″	0,996624	9,9985313

d) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Bei der russischen Gradmessung, die in den Jahren 1816 bis 1855 von Struve und Tenner ausgeführt wurde, fand man für die geographischen Breiten:

$$\varphi_1 = 64^0\ 31'\ 29''$$
$$\varphi_2 = 51^0\ 51'\ 25''$$

folgende Werte:

$$\varrho_1 = 6387972 \text{ m}$$
$$\varrho_2 = 6375192 \text{ m}$$

Es sind aus dieser Messung die Grössen:

$$e,\ a,\ b$$

zu berechnen.

Auflösung. Wir berechnen zunächst e nach der Formel 56), Frage 58. Hier ist:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 6387972 \\ \varrho_2 &= 6375192 \\ \hline \varrho_1 - \varrho_2 &= 12780 \\ \varphi_1 &= 64^0\ 31'\ 29'' \\ \varphi_2 &= 51^0\ 51'\ 25'' \\ \hline \varphi_1 + \varphi_2 &= 116^0\ 22'\ 54'' \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= 12^0\ 40'\ \ 4'' \end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0\cdot3010300 \\ \log(\varrho_1 - \varrho_2) &= 4\cdot1065309 \\ \hline & 14\cdot4075609 - 10 \\ \log 3 &= 0\cdot4771213 \\ \log \varrho_1 &= 6\cdot8053630 \\ \log\sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= 9\cdot9522372 \\ \log\sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= 9\cdot3410338 \\ \hline & 6\cdot5757553 \\ \log e^2 &= 7\cdot8318056 - 10 \\ \log e &= 3\cdot9159028 - 5 \\ \underline{e} &\underline{= 0{,}082395} \\ e^2 &= 0{,}006789 \\ 1 - e^2 &= 0{,}993211 \\ \frac{1}{2}\log(1 - e^2) &= 9\cdot9985208 \\ \sqrt{1 - e^2} &= 9\cdot9966 \\ 1 - \sqrt{1 - e^2} &= 0{,}0034 \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\underline{\frac{a - b}{a} = 0{,}0034 = \frac{1}{294}}$$

Ferner haben wir nach 54) und 55):

$$\underline{a = 6378207 \text{ m}}$$
$$\underline{b = 6356520 \text{ m}}$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} \log e^2 &= 7\cdot8318056 - 10 \\ \log\sin^2\varphi_1 &= 9\cdot9121552 \\ \hline &= 7\cdot7439608 \\ e^2\sin^2\varphi_1 &= 0{,}0055457 \\ 1 - e^2\sin^2\varphi_1 &= 0\cdot9944543 \\ \frac{3}{2}\log(1 - e^2\sin^2\varphi_1) &= 9\cdot9963772 \\ \log\varrho_1 &= 6\cdot8053630 \\ \hline &= 6\cdot8027402 \\ \log(1 - e^2) &= 9\cdot9970416 \\ \hline \log a &= 6\cdot8046986 \\ \log\sqrt{(1 - e^2)} &= 9\cdot9985208 \\ \hline \log b &= 6\cdot8032194 \end{aligned}$$

Aufgabe 43. Man berechne für Wien, d. h. für:

$$\varphi = 48^0\ 12'\ 33''$$

die Grössen φ' und $\frac{\varrho}{a}$.

Auflösung. Wir berechnen zunächst φ' nach der Formel 58):

$$\begin{aligned} \log(1 - e^2) &= 9{,}9970416 \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 0{,}0487522 \\ \hline \log\operatorname{tg}\varphi' &= 0{,}0457938 \\ \underline{\varphi'} &\underline{= 48^0\ \ 0'\ 55''} \\ \varphi - \varphi' &= 11'\ 38'' \end{aligned}$$

Sodann nach der Formel 59) $\frac{\varrho}{a}$:

$$\begin{aligned} \log\cos\varphi' &= 9\cdot8253822 \\ \log\cos(\varphi' - \varphi) &= 9\cdot9999975 \\ \hline &= 9\cdot8253897 \\ \log\cos\varphi &= 9\cdot8237437 \\ \hline &= 9\cdot9983540 \end{aligned}$$

$$\log\frac{\varrho}{a} = 9\cdot9991770$$

$$\frac{\varrho}{a} = 0{,}998107$$

Aufgabe 44. Man berechne den mittleren Halbmesser des Erdsphäroids.

Auflösung. Die Formel für den Flächeninhalt eines Ellipsoids lautet:

$$F = \frac{4}{3}\pi a b c$$

wird nun $a = c$, was beim Umdrehungsellipsoid der Fall ist, so folgt:

$$F = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Dieses liefert uns mit den obigen Werten den Kubikinhalt der Erde.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist:

$$F = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Setzt man also:

$$\frac{4}{3} a^2 b \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

woraus:

$$r = \sqrt[3]{a^2 b}$$

folgt, so erhält man den Radius einer Kugel, die mit der Erde einen gleichen Inhalt hat, also auch den mittleren Erdradius. Man erhält:

$$r = 6370961 \text{ m}$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{aligned} 2\log a &= 13\cdot6093972 \\ \log b &= 6\cdot8032194 \\ \hline \log a^2 b &= 20\cdot4126166 \end{aligned}$$

$$\log r = \frac{1}{3}\log a^2 b = 6{,}8042055$$

e) Ueber die Landkartenprojektionen.

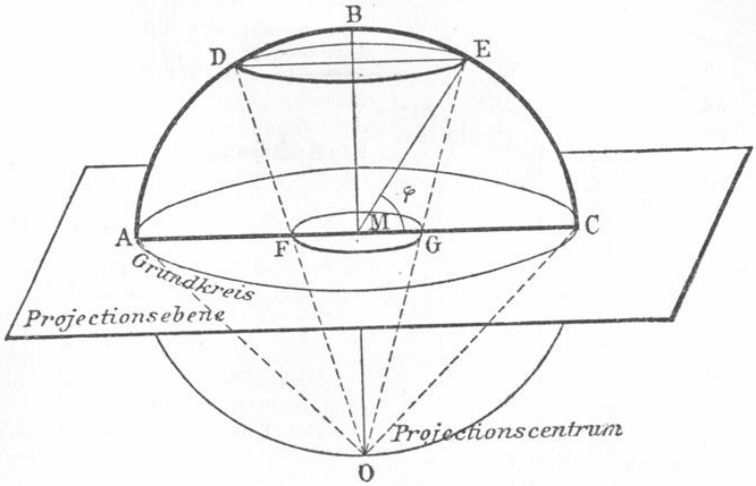
Anmerkung 12. In dem Vorhergehenden haben wir die Erdgestalt unseren Zwecken entsprechend bestimmt; es handelt sich nun, dieselbe bildlich darzustellen. Dieses könnte am einfachsten dadurch bewirkt werden, wenn wir einen Globus, d. h. eine Erdkugel bauen würden. Aber sollte dieselbe diejenigen Dienste leisten, die wir von unseren Landkarten fordern, so müsste sie von so ungeheurer Grösse sein, dass wir sie, abgesehen von der Schwierigkeit der Aufstellung, gar nicht benützen könnten. Man war daher darauf bedacht, die Erdkugel auf einer Ebene abzubilden. Die Hauptforderung ist, dass die Abbildung ein möglichst treues Bild der Erdkugel liefert. Diese Forderung übersetzte man in neuester Zeit in die Sprache der Mathematik in der Weise, dass man sagte, es sollen die kleinsten Teile des Bildes und der Abbildung ähnlich im geometrischen Sinne sein. Es ergaben sich sodann unzählige Arten, dieses zu bewirken. Wir wollen unter diesen vielen nur jene hervorheben, die die einfachsten sind und auch in der Regel angewendet werden.

Dieser Abschnitt kann ohne weiteres beim Studium der Astronomie ausgelassen werden. Er ist mehr für den Ingenieur, Seefahrer und Geographen bestimmt.

Frage 61. Was versteht man unter der stereographischen Projektion?

Antwort. Unter der stereographischen Projektion versteht man die perspektivische Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines ihrer grössten Kreises,

Figur 50.



Erkl. 94. Ueber den Begriff der Projektion vergl. Erkl. 6. Die hier behandelte Projektion wird gewohntermassen stereographische genannt.

Erkl. 95. Perspektivisch (vom latein. perspicere, durchschauen) wird diese Entwerfung genannt, weil die Kugelfläche so gezeichnet wird, wie sie auf einer zwischen ihr und dem Auge befindlichen durchsichtigen Tafel gezeichnet erscheinen würde.

wobei der Ort des Auges (das Projektionszentrum) in einem der beiden Pole des grössten Kreises genommen wird. Der Kreis wird einfach der Grundkreis genannt und seine Ebene die Projektionsebene.

Die stereographische Projektion besitzt folgende Eigenschaften, die sie zur Darstellung der Erdkugel in einer Ebene besonders geeignet machen.

1) Die Projektionen grösster Kreise, die durch das Projektionszentrum gehen, sind gerade Linien, die sich im Mittelpunkte des Grundkreises schneiden.

(So ist z. B. in der Figur 50 ein solcher Kreis ABC und AC seine Projektion.)

2) Die Projektion eines der Projektionsebene parallelen Kreises ist ein Kreis, dessen Zentrum im Mittelpunkte des Grundkreises liegt.

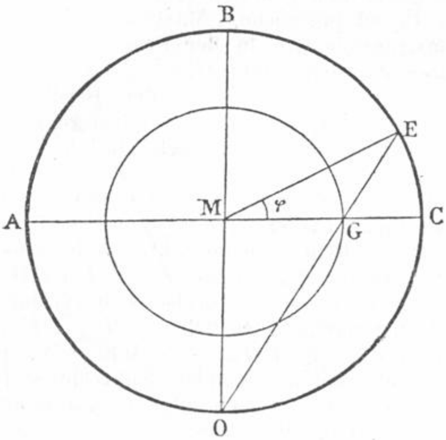
(In der Figur 50 ist DE ein Parallelkreis und FG seine Projektion.)

Frage 62. Wie findet man die Projektion eines der Projektionsebene parallelen Kugelkreises, deren sphärischer Abstand (das ist der Winkel CME in der Figur 50) von der Projektionsebene gegeben ist?

Antwort. Nach dem Vorhergehenden ist seine Projektion ein Kreis, dessen Zentrum im Mittelpunkte des Grundkreises liegt.

Aus der Figur 50 ergibt sich bei der Betrachtung des Winkels BOE sofort folgende Konstruktion. Man zeichne den Grundkreis (OCB in der Figur 51) und ziehe zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser (AC und OB). Sodann nehme man den

Figur 51.



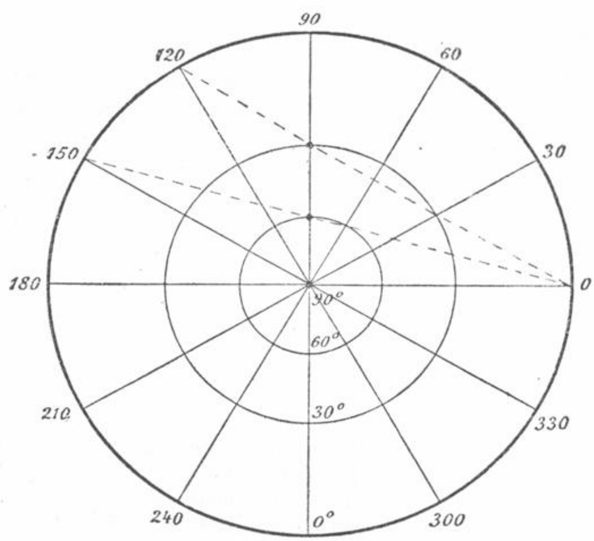
Winkel CME gleich dem gegebenen sphärischen Abstande φ und verbinde E mit dem Punkte O. Die Verbindende schneidet den Halbmesser MC in G. Die Länge MG ist dann der gesuchte Radius des Projektionskreises. Von dieser Konstruktion wird in der sogenannten Polarprojektion der Erdkugel Gebrauch gemacht.

Frage 63. Was versteht man unter der Polarprojektion?

Antwort. Die Polarprojektion ist diejenige, bei welcher das Projektionszentrum in einem der beiden Erdpole gedacht wird und bei welcher der Aequator der Grundkreis und seine Ebene die Projektionsebene ist.

Die Meridiane sind nach der Frage 61. 2) gerade Linien, die sich im Mittelpunkte des Kreises schneiden. Die Parallelkreise sind nach der Frage 62 zu konstruieren. Figur 52 gibt diese Konstruktion von 30° zu 30° mit den notwendigen Hilfslinien.

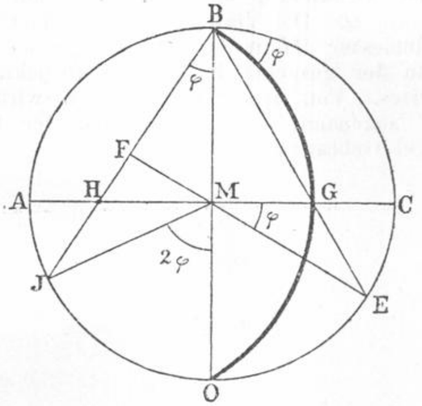
Figur 52.



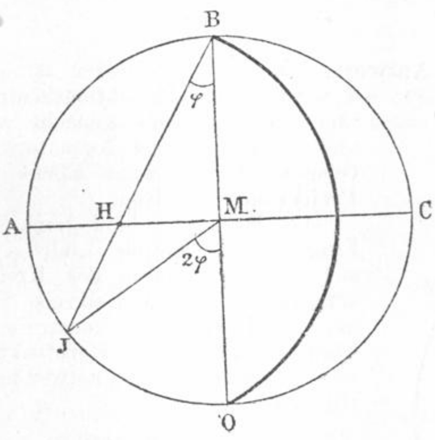
Frage 64. Wie findet man die Projektion eines grössten Kugelkreises, der mit dem Grundkreise einen gegebenen Winkel φ einschliesst, wenn zugleich sein Durchschnitt mit dem Grundkreis gegeben ist?

Antwort. Man kann dieses Problem sofort auf das vorige zurückführen, wenn man denjenigen Parallelkreis sucht, der den gegebenen grössten Kreis berührt, d. h. denjenigen, der einen sphärischen Abstand φ hat.

Figur 53.



Figur 54.



Es sei (vergl. Figur 53) OB der Schnitt des gegebenen grössten (Halb-) Kreises mit der Projektionsebene. Machen wir dieselbe Konstruktion wie in der Frage 62, so erhalten wir den Punkt G.

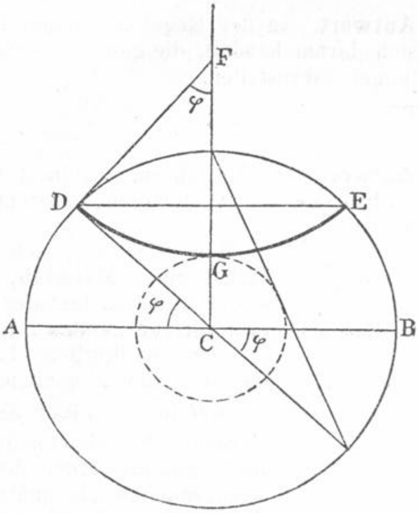
Dieser Punkt ist also der Berührungspunkt des Parallelkreises mit dem gegebenen grössten Kreise, also auch ein Punkt des letzteren. Durch die drei Punkte BGO ist aber ein Kreis bestimmt und dieser ist eben die gesuchte Projektion des gegebenen grössten Kreises. Allein die Konstruktion kann wesentlich vereinfacht werden. Sei BH der Halbmesser des Projektionskreises, wir verlängern ME bis nach F, so wird $BH \perp FE$ und demzufolge $\sphericalangle JBO = \sphericalangle CME = \varphi$, weil ihre Schenkel aufeinander senkrecht stehen.

Hieraus ergibt sich folgende vereinfachte Konstruktion. Man mache (vergl. Figur 54) den Winkel $OMJ = 2\varphi$ und verbinde J mit B, so erhält man in H den Mittelpunkt des Projektionskreises, dessen Radius gleich HB ist.

Frage 65. Wie findet man die Projektion eines Kugelkreises, der auf der Projektionsebene senkrecht steht und diese längs einer gegebenen Linie schneidet?

Antwort. Sei DE (Figur 55) die gegebene Schnittlinie, so sind die Punkte D und E zugleich Punkte des Kreises und seiner Projektion, die ebenfalls ein Kreis ist. Es muss daher der Mittelpunkt dieses Projektionskreises irgendwo auf der Geraden CF liegen, d. h. auf der Senkrechten durch den Halbierungspunkt von DE. Wir reduzieren auch hier das Problem auf das frühere, indem wir den berührenden Parallelkreis zu Hilfe nehmen, und erhalten so den Punkt G, wodurch wieder drei Punkte und mit ihnen der Kreis bestimmt ist. Durch analoge Schlüsse wie oben ergibt sich folgende Konstruktion: Sei DE die gegebene Schnittlinie und AB der parallele Durchmesser. Man ziehe DC und $DF \perp DC$, so ist DF der Halbmesser

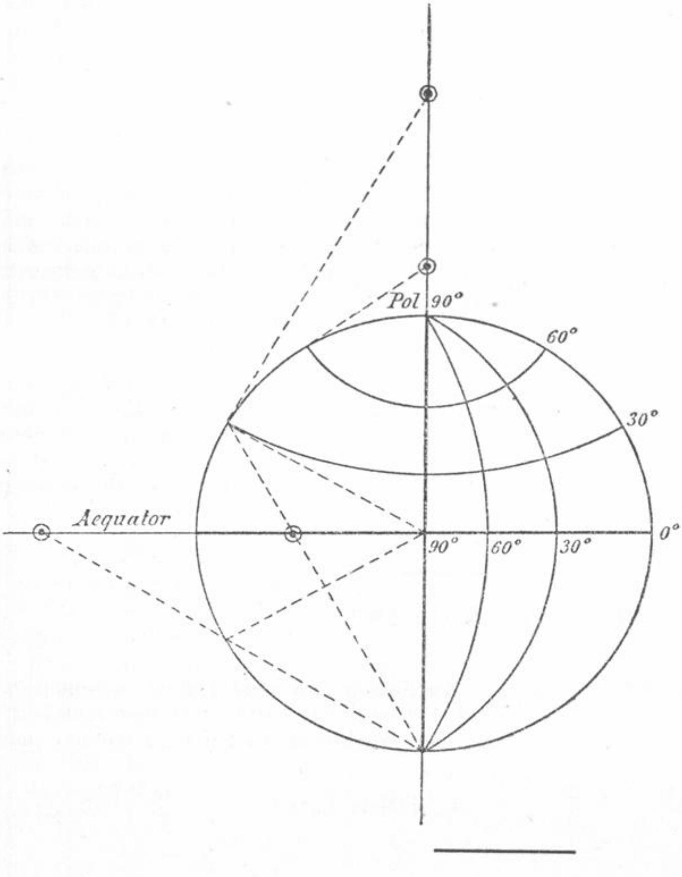
Figur 55.



des Projektionskreises und DGE die gesuchte Projektion.

Frage 66. Was versteht man unter der Aequatorealprojektion?

Figur 56.



Antwort. Die Aequatorealprojektion ist diejenige, bei welcher sich das Projektionszentrum in einem Aequatorpunkte befindet. Der von diesem um 90° entfernte Meridian ist der Grundkreis und der Aequator wird infolge der Projektion zu einem Durchmesser desselben. Die Meridiane werden nach Frage 64, die Parallelkreise nach Frage 65 konstruiert.

Die Figur 56 liefert eine solche Konstruktion mit den nötigen Linien von 30° zu 30°.

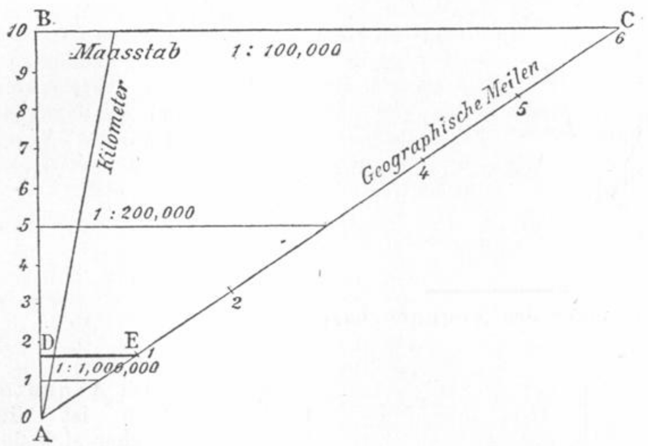
Frage 67. Wann werden die vorstehenden Projektionen angewendet?

Antwort. In der Regel nur dann, wenn es sich darum handelt, die ganze oder halbe Erdkugel darzustellen.

Frage 68. Welches Verfahren wendet man bei kleineren Landkarten an?

Antwort. Das Verfahren, einzelne Landkartennetze zu verfertigen, besteht in folgendem:

Figur 57.



Man zeichnet sich zunächst einen Massstab, entweder in Kilometer oder geographischen Meilen, indem man eine willkürliche Länge als eine Einheit annimmt.

(AB in der Figur 58.)

Sodann berechnet man sich die ungefähre Mitte der zu zeichnenden Karte und zieht eine vertikale Linie, welche den mittleren Meridian der Karte darstellen soll.

(CD in der Figur 58.)

Sodann entnimmt man aus der folgenden Tafel XI die Länge der Breitegrade und überträgt sie im gegebenen Massstabe auf die gezogene Linie.

(CC_1, $C_1C_2 \cdots C_4D$ in der Figur 57.)

Jetzt wird in jedem der so gewonnenen Punkte eine Senkrechte auf die vertikale Linie nach beiden Seiten hin gezogen und auf diese die Länge der Längengrade (nach Tafel XI) im gegebenen Massstab aufgetragen und die so gewonnenen Punkte werden durch gerade Linien miteinander verbunden.

(CE und CF in der Figur 58.)

Sodann werden wieder in den neugewonnenen Punkten (E und F) Senkrechten auf ihre Verbindungslinien gezogen und auf diese die (gleiche) Länge der Längegrade aufgetragen und so fort, bis man an die Grenzen der Landkarte gelangt.

Damit ist das Gradnetz fertig.

---

f) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 45. Zeichne nach gegebener Anleitung das Gradnetz für Oesterreich im Massstab von 1 : 6,000,000.

Auflösung. Da Oesterreich zwischen 26^0 und 44^0 östlicher Länge von Ferro und 42^0 und 52^0 nördlicher Breite liegt, so hat man zunächst:

$$\text{die mittlere Länge} = \frac{44^0 + 26^0}{2} = 35^0$$

Als Massstab dient:

$$1 : 6{,}000{,}000$$

Um für diesen Massstab die Länge von 10 geogr. Meilen zu erhalten, teilen wir AC in der Figur 57 in sechs Teile und ziehen DE parallel zu BC, sodann ist:

$$DE = 10 \text{ geogr. Meilen}$$

im Massstabe von $1 : 6{,}000{,}000$.

Wir zeichnen ferner das Gradnetz von 2 zu 2 Graden. Sodann finden wir auf der folgenden Tafel XI Länge des Breitegrades für $52^0 = 15$ geogr. Meilen (nahezu) für 42^0 auch denselben Wert. Die Unterschiede sind für unseren Massstab zu gering. Wir tragen daher, von oben angefangen, auf die gezogene Vertikale ($= 35^0$ östl. von Ferro) die Längen von $2 \cdot 15$ geogr. Meilen auf und erhalten so die Parallele 52^0, 50^0, 48^0, 46^0, 44^0.

Die Längen der Längengrade sind nach der Tafel XI für diese Breiten:

52^0	9,25 ···	oder abgerundet 9,0
50^0	9,66 ···	9,5
48^0	10,06 ···	10,0
46^0	10,44 ···	10,5
44^0	10,81 ···	11,0

Das Fernere ergibt sich aus der Figur 58 selbst.

Erkl. 96. In der Figur ist:

$$BC : DE = AC : AE$$

also:

$$BC : DE = 6 : 1$$

oder:

$$DE = \frac{BC}{6}$$

Nehmen wir BC gleich dem Massstabe $1 : 100{,}000$, so wird DE der Massstab für $1 : 600{,}000$, also wenn wir $DE = 10$ geogr. Meilen setzen, der Massstab für eine Meile:

$$1 : 6{,}000 \cdot 000$$

Tafel XI.

Längen der Breite- und Längengrade von Grad zu Grad.

Grade	Breitegrade		Längengrade		Grade	Breitegrade		Längengrade	
	Geogr. Meilen	Kilometer	Geogr. Meilen	Kilometer		Geogr. Meilen	Kilometer	Geogr. Meilen	Kilometer
0	14,900	110,56	15,000	111,31	45	14,967	111,13	10,624	78,84
1	900	56	14,998	29	46	979	15	438	77,45
2	900	57	991	24	47	981	17	248	76,05
3	900	57	980	16	48	989	19	055	74,62
4	901	57	964	09	49	987	21	9,860	73,16
5	14,901	110,57	14,943	110,89	50	14,989	111,23	9,661	71,69
6	902	58	918	70	51	992	25	460	70,19
7	902	58	889	48	52	994	26	254	68,67
8	903	58	855	23	53	997	28	046	67,13
9	904	59	817	109,95	54	999	30	8,836	65,57
10	14,905	110,60	14,774	109,63	55	15,002	111,32	8,623	63,99
11	906	61	726	27	56	004	34	407	62,39
12	907	62	674	108,89	57	007	36	190	60,76
13	908	62	618	47	58	009	37	7,968	59,13
14	909	63	557	02	59	011	39	745	57,47
15	14,911	110,64	14,492	107,54	60	15,014	111,40	7,529	55,79
16	912	65	423	02	61	016	42	291	54,10
17	913	66	349	106,47	62	018	44	060	52,39
18	915	68	270	105,89	63	020	46	6,828	50,67
19	917	69	188	105,28	64	022	47	593	48,93
20	14,918	110,70	14,101	104,63	65	15,024	111,49	6,357	47,17
21	920	71	010	103,96	66	026	50	128	45,40
22	922	73	13,914	103,25	67	028	52	5,878	43,61
23	924	74	815	102,51	68	020	53	635	41,82
24	926	75	711	101,74	69	032	54	391	40,01
25	14,928	110,77	13,603	100,94	70	15,033	111,55	5,145	38,18
26	930	78	491	100,16	71	035	57	4,898	36,35
27	932	80	374	99,24	72	037	58	649	34,50
28	934	82	254	98,35	73	038	60	399	32,64
29	936	83	130	97,43	74	039	60	147	30,78
30	14,938	110,85	13,001	96,47	75	15,041	111,61	3,894	28,90
31	941	87	12,869	95,49	76	042	62	640	27,01
32	943	88	733	94,48	77	043	63	385	25,12
33	945	90	593	93,44	78	044	64	129	23,22
34	948	92	449	92,37	79	045	64	2,871	21,31
35	14,950	110,94	12,301	91,28	80	15,046	111,65	2,613	19,39
36	953	96	199	90,15	81	047	66	354	17,47
37	955	98	11,994	89,00	82	048	66	094	15,54
38	958	99	835	87,82	83	048	67	1,834	13,61
39	960	111,01	673	86,62	84	049	67	573	11,67
40	14,963	111,03	11,507	85,38	85	15,049	111,67	1,312	9,73
41	966	05	337	84,13	86	050	68	050	7,79
42	968	07	164	82,84	87	050	68	0,788	5,84
43	970	09	10,987	81,53	88	050	68	525	3,90
44	973	11	808	80,20	90	050	68	262	1,95
								0,000	0,00

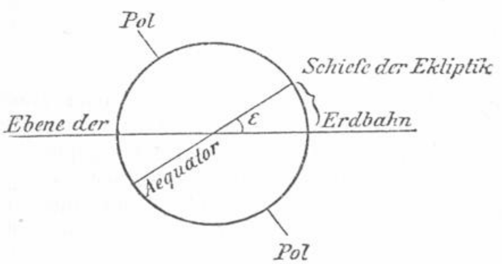
F. Fortsetzung der sphärischen Astronomie.

Anmerkung 13. Ausser dem horizontalen und äquatorealen Koordinatensystem ist in der Astronomie noch ein drittes gebräuchlich, dessen Fundamentalebene durch die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne bestimmt wird. Dieses System ist für die theoretische Astronomie und insbesondere für die nähere Begründung der von uns schon bei der Zeitbestimmung benützten scheinbaren Sonnenbewegung von fundamentaler Bedeutung. Durch die Einführung dieses Systems werden wir im stande sein, nicht nur die Erdbahn und diejenige des Mondes genau darzustellen, sondern auch noch jene Lücken auszufüllen, die uns beim Aufbau der Astronomie offen geblieben sind. Ich erwähne nur unter anderen die Berechnung der Zeitgleichung. Dieses System wird auch später bei der Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers und der Berechnung der Finsternisse zur Anwendung kommen. Es ist dieses jenes System, welches bei der berechnenden Astronomie genau dieselbe Rolle spielt, wie das äquatoreale bei der beobachtenden.

a) Ueber den Begriff und die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik.

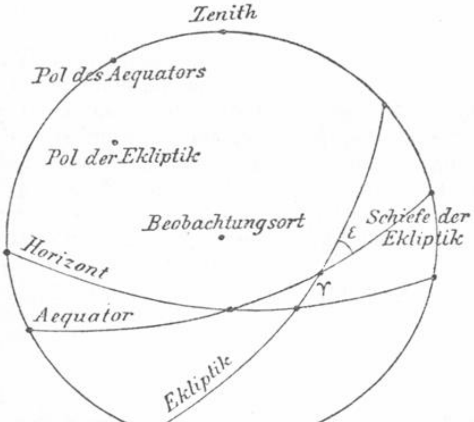
Frage 69. Was versteht man unter der Schiefe der Ekliptik?

Figur 59.



Erkl. 97. So oft man daher von irgend einem Betrage der Schiefe der Ekliptik spricht, so muss man zugleich auch die Zeit angeben, für welche dieser Betrag gilt, die sog. Epoche.

Figur 60.



Antwort Man versteht darunter jenen Winkel, den die Ebene des Aequators mit der Ebene der Erdbahn macht. Dieser Winkel ist keineswegs konstant, sondern er verändert sich stetig von Jahr zu Jahr, wenn auch die Veränderungen gering sind. Wir werden in einem der nächsten Abschnitte auf diese Veränderungen zurückkommen.

Im Jahre 1884 am 1. Januar betrug die mittlere Schiefe der Ekliptik:

$$23^0\,27'\,15''\,65$$

und die mittlere jährliche Abnahme derselben: $0''\,476$

so dass wir allgemein für ein Jahr nach t Jahren, von 1884 angefangen, die Schiefe der Ekliptik ε aus der Formel:

$$60)\ \ldots\ \varepsilon = 23^0\,27'\,15''\,65 - 0''\,476\,t$$

darnach wird z. B. für das Jahr 1890:

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,15''\,65 - 0''\,476 \times 6$$

oder:

$$\varepsilon = 23^0\,27'\,12''\,79$$

Diese Abnahme der Ekliptik bezeichnet man mit dem Namen der Präcession.

Die Schiefe der Ekliptik unterliegt aber noch einer periodischen Aenderung, welche von den Stellungen der Sonne und des Mondes herrührt und den Namen Nutation führt. Diese ist genähert gleich:

$$61)\ \ldots\ \varDelta\varepsilon = 9''\,224 \cos \Omega + 0''\,551 \cos 2\dot{\odot}$$

wobei ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik und ⊙ die Länge der Sonne bezeichnet.

Der Begriff der Länge wird noch in diesem Kapitel erklärt.

Erkl. 98. Präcession stammt vom latein. praecedere, vorschreiten; die Benennung ist daher nicht ganz passend. Sie hat jedoch das Bürgerrecht erhalten.

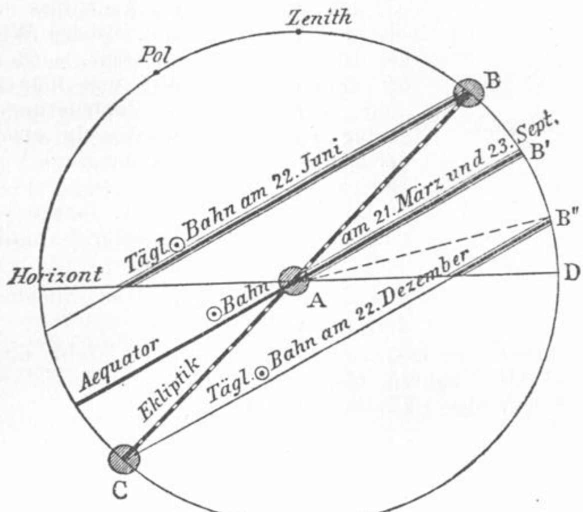
Erkl. 99. Nutation stammt vom latein. nutare, schwanken, so genannt, weil ihr Betrag bald positiv, bald negativ wird, also um den Nullwert schwankt.

Erkl. 100 a. Die Mondbahn schneidet die Ebene der Erdbahn (Ekliptik) in zwei Punkten. Dies werden die Mondknoten genannt und zwar wird derjenige, wo der Mond von der Südseite der Ekliptik auf die Nordseite übergeht, der aufsteigende genannt und mit ☊ bezeichnet. Der andere führt den Namen niedersteigende Mondknoten und das Zeichen ☋.

Frage 70. Welche Erscheinungen bewirkt die Schiefe der Ekliptik?

Antwort. Würde die Sonne unbeweglich sein, wie die Fixsterne, so würde sie täglich denselben Parallelbogen beschreiben. Weil sie sich aber in einem gegen den Aequator geneigten Kreise (der Ebene der Ekliptik) bewegt (d. h. scheinbar), so beschreibt sie täglich einen anderen Parallelkreis.

Figur 61.



An jenem Tage, wo sich die Sonne im Frühlings- oder Herbstpunkte befindet, fällt der tägliche Parallelkreis mit dem Aequator zusammen, die Sonne ist dann eine gleiche Zeit über und unter dem Horizont, Tag und Nacht sind gleich lang (21. März und 23. September). An diesem Tage geht die Sonne genau im Osten auf und im Westen unter.

Nach dem 21. März beschreibt die Sonne in der Ekliptik infolge ihrer Bewegung in der Ekliptik (in der Richtung A gegen B, Fig. 61) immer nördlichere Parallelkreise, bis sie am 22. Juni den nördlichsten erreicht; sie verweilt dann am längsten über dem Horizont, wir haben den längsten Tag.

Nach dem 23. September bewegt sich die Sonne in der Ekliptik immer mehr und mehr nach Süden (in der Richtung A gegen C in der Figur 61). Der Tagebogen wird immer kürzer und kürzer, bis er am 22. Dezember sein Minimum erreicht, wir haben sodann die längste Nacht.

Folgende Figur enthält den Sonnenlauf für das Jahr 1884 nach dem Nautical-Almanac. Die Abscissen geben die Rectascension, die Ordinaten, die Deklination der Sonne an.

Erkl. 100 b. Würde, wie aus der Formel 60 erhellt, die Schiefe der Ekliptik stets der Zeit proportional abnehmen, so würde sie etwa nach:

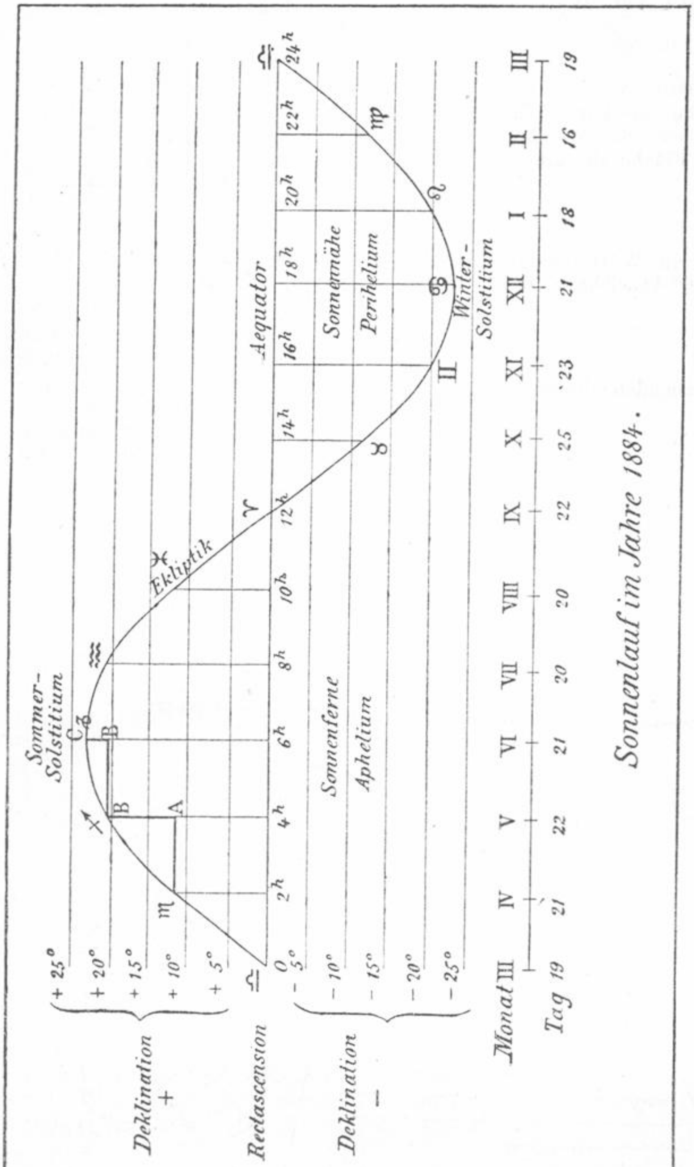
176·000 Jahren

oder genauer nach:

$$\frac{23^0\ 27'\ 16''}{0'',476} \text{ Jahren}$$

nach dem Jahre 1884 den Wert 0 erreichen. Dann würden aber, da sich die Sonne stets im Aequator bewegen würde, Tag und Nacht, das ganze Jahr hindurch dieselbe Länge haben, es würde demnach ewiger Frühling sein. Leider aber gilt obige Formel kaum für ein Jahrhundert ganz streng, so dass, wie sich Littrow aus-drückt, „die Hoffnung des ewigen Frühlings ebenso eitel ist, wie die des ewigen Friedens, den uns Bernardin de St. Pierre so reizend geschildert hat.“ Es braucht wohl nicht bemerkt zu werden, dass das Wort ewig hier hyperbolisch für eine grosse Zahl von Jahren zu nehmen ist.

Figur 62.



Erkl. 101. Die Parallelkreise, die die Sonne an den Tagen der Solstitien beschreibt, führen den Namen der Wendekreise oder Tropen

Aus dieser Darstellung ersieht man sofort, dass die Deklinationszunahme von Monat zu Monat ungleich ist.

So ist z. B. vom 21. April bis 22. Mai die Deklinationszunahme dargestellt durch die Strecke AB und jene vom 22. Mai bis 21. Juni durch die Strecke BC. Die Zeichnung zeigt, dass sie am kleinsten ist am 21. Juni und 21. Dezember. Die Sonne scheint an diesen Tagen mehrere Tage hindurch einen und denselben Parallelkreis zu beschreiben, ihre Mittagshöhe ändert sich an diesen Tagen sehr wenig. Diese Zeit ist die der Solstitien, d. h. die Zeit des Stillstehens der Sonne. An diesen Tagen sind die Tage auch nahezu gleich, während an jenen Tagen, wo die Aenderung der Deklination am grössten (d. h. 19. März und 22. Septbr.), die Längen der Tage gegen einander die grösste Differenz aufweisen.

Eine weitere Folge der Schiefe der Ekliptik sind ferner die Jahreszeiten. Es ist eine bekannte Thatsache, dass, je schiefer die Sonnenstrahlen auf irgend eine Fläche auffallen, dass desto geringer ihre Leuchtkraft und ihre Wärmewirkungen werden. Aus der Fig. 64 entnimmt man, dass für die nördlicheren Breiten B in der Sonnennähe die Sonnenstrahlen viel schiefer auffallen als in der Sonnenferne; für die südlicheren Breiten findet dagegen das Umgekehrte statt.

Befinden wir uns daher (d. h. auf der nördlichen Hemisphäre) der Sonne am nächsten, so sind die Wärmewirkungen der Sonne viel geringer, als wenn wir von ihr am weitesten entfernt sind. Wir haben daher in der Sonnennähe den Winter, in der Sonnenferne den Sommer. Auf der südlichen Halbkugel findet (wie uns (vom griechischen trepō, wende) und zwar der Wendekreis des Krebses und des Steinbocks, weil vor Zeiten die Solstitien in diesen Sternbildern sich befanden.

Erkl. 102. Nehmen wir an, es treffe einen Teil der Fläche F, dessen Durchschnitt mit AB bezeichnet werden soll, per Flächeneinheit die Wärmemenge Q, so wird die genannte Wärmemenge dieses Flächenteils:

$$W = Q \cdot f$$

wenn f dessen Flächeninhalt ist.

Neigen wir nun die Fläche, so wird sich, wenn β der Neigungswinkel ist, die Wärmemenge W verteilen über einer Fläche, die gleich ist:

$$\frac{f}{\cos\beta} \quad \text{(vergl. Figur 63)}$$

Wir haben also, wenn wir die Wärmemenge per Flächeneinheit jetzt mit Q' bezeichnen, die Beziehung:

$$W = Q' \cdot \frac{f}{\cos\beta}$$

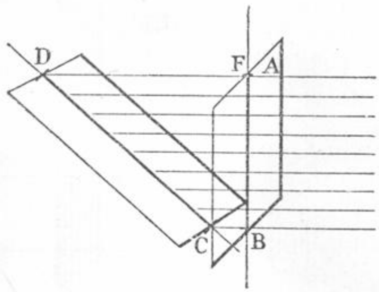
Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung ergibt sich:

$$Q' = Q \cos\beta$$

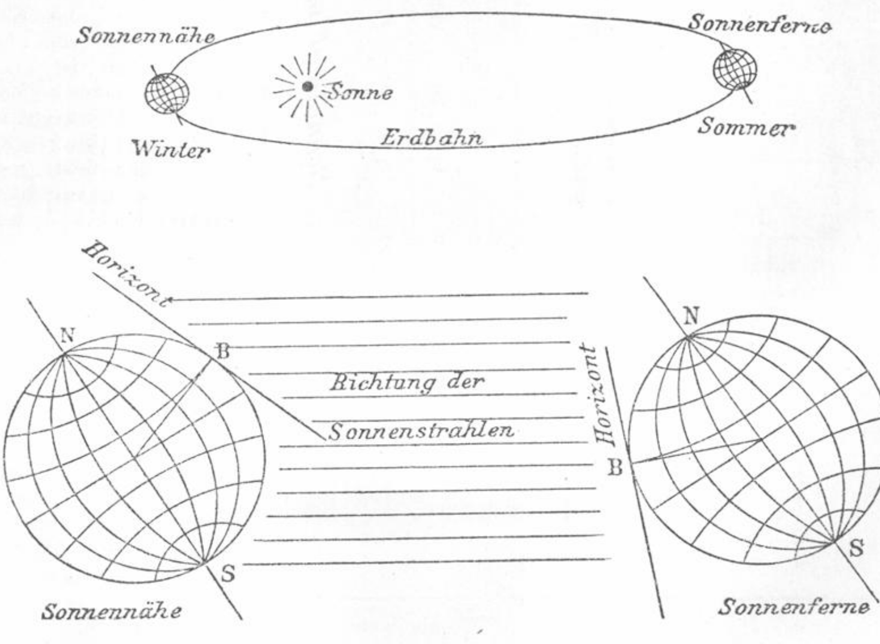
Es wird also die per Flächeneinheit empfangene Wärme desto kleiner, je grösser der Neigungswinkel gegen die Strahlen ist.

ein Blick auf die Figur 64 zeigt) das Umgekehrte statt.

Figur 63.



Figur 64.



Frage 71. Wie wird die Schiefe der Ekliptik bestimmt?

Antwort. Die Schiefe der Ekliptik kann auf mehrfache Art bestimmt werden. Die einfachste Methode ist folgende:

Aus der Figur 65 entnimmt man leicht dass:

$$\sphericalangle ACB - \sphericalangle ADB'' = \sphericalangle CBD''$$

also:

$$\sphericalangle ACB - \sphericalangle ADB'' = 2\varepsilon$$

Man braucht also nur die grösste Höhe der Sonne am 22. Juni und die kleinste Höhe am 22. Dezember zu messen. Ihre Differenz gibt die doppelte Schiefe der Ekliptik.

Oder man messe die grösste Sonnenhöhe und verwandle diese in die Deklination (nach Frage 24), so erhält man auch den Winkel CBD', also die Schiefe der Ekliptik.

Auf die erstere Art bestimmte schon 1000 v. Chr. ein chinesischer Kaiser mit dem Gnomon, dessen Höhe 8 chinesische Fuss betrug, die kleinste Schattenlänge zu 1,54 und die grösste zu 13,12 und damit auch die Schiefe der Ekliptik zu:

$$23^0\,52'$$

Es war nämlich (siehe Figur 65):

$$2\varepsilon = \alpha - \beta$$

und:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BA}{AC} = \frac{8}{1{,}54}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BA}{AD} = \frac{8}{13{,}12}$$

hieraus ergibt sich (siehe Hilfsrechnung):

$$\alpha = 79^0\,6'$$

$$\beta = 31^0\,22'$$

also:

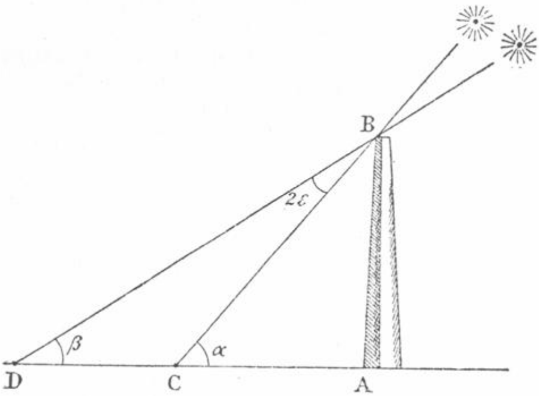
$$\alpha - \beta = 2\varepsilon = 47^0\,44'$$

und hiermit der obige Wert.

Erkl. 103. Wenn wir Sonnenhöhen messen, so haben wir die Höhe des oberen Randes zu nehmen oder die des unteren, und von ihr den halben Betrag des Sonnendurchmessers etwa 16′ zu subtrahieren resp. zu ihr hinzuzufügen. Man bestimmt sich dazu, wenn kein Berliner Jahrbuch zur Verfügung steht, wo der Sonnenhalbmesser von Tag zu Tag angegeben ist, zunächst den Sonnendurchmesser.

Erkl. 104 a. Der Gnomon war vielleicht eines der wichtigsten Instrumente der alten Astronomen. Er bestand aus einer Säule, durch deren Schatten die Sonnenhöhen bestimmt wurden. Auch diente er als Sonnenuhr, worüber wir im Kapitel Sonnenuhren das Nähere sagen werden.

Figur 65.



Hilfsrechnung.

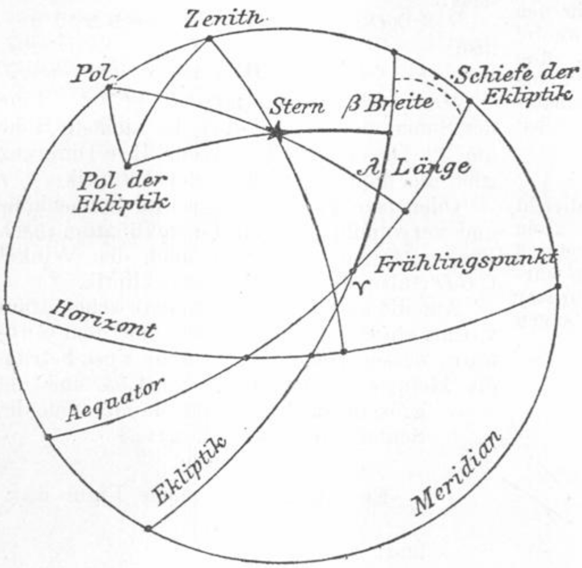
$$\begin{aligned}\log 8 &= 0,90309\\ \log 1{,}54 &= 0,18752\\ \hline \log\operatorname{tg}\alpha &= 0\cdot 71557\\ \alpha &= 79^0\,6'\\ \log 8 &= 0\cdot 90309\\ \log 13{,}12 &= 1,11793\\ \hline \log\operatorname{tg}\beta &= 9\cdot 78516\\ \beta &= 31^0\,22'\end{aligned}$$

Erkl. 104 b. Es war dieses der in den heiligen Büchern Schu-king des Confucius erwähnte und hochgepriesene Tschu-kong, Bruder des U-wang, des Stifters der Dynasti Tschu, welcher China während der Minderjährigkeit seines Neffen in den Jahren 1109 bis 1098 v. Chr. beherrschte.

b) Ueber das Koordinatensystem der Ekliptik.

Frage 72. Welches ist das Wesen des ekliptikalen Koordinatensystems?

Figur 66.



Erkl. 105. Auf der Figur 66 sind die drei Koordinatensysteme des Horizonts, des Aequators und der Ekliptik zusammengestellt.

Erkl. 106. Die durch die nebenstehenden Kardinalpunkte gehenden grössten Kreise führen den Namen Koluren (d. i. Schwanzabschneider) wahrscheinlich, weil der der Aequinoktien dem Sternbilde des grossen Bären und jener der Solstitien dem des kleinen Bären den Schwanz abschneidet.

Antwort. Die Fundamentalebene dieses Systems ist die Ebene der Ekliptik (und zwar bezogen auf irgend eine Epoche, vergl. Erkl. 97). Die Anfangsrichtung geht durch den Frühlingspunkt. Die Koordinate des Scheitelkreises (d. h. desjenigen grössten Kreises, der durch den Pol der Ekliptik geht) führt den Namen der Länge und die Bezeichnung λ (Lambda). Sie wird wie die Rectascension vom Frühlingspunkt von West nach Ost in der Richtung des Sonnenlaufes gezählt, aber nur in Graden, nicht in der Zeit, da die Rotation des Himmels nicht parallel zur Ekliptik folgt und deshalb gleichen Drehungswinkeln nicht gleiche Bogen der Ekliptik entsprechen können.

Steht demnach der Frühlingspunkt genau im Osten, so haben die einzelnen Scheitelkreise:

	Ost	Süd	West	Nord
die Längen:	0^0	90^0	180^0	270^0

ferner hat der Kolur

des Frühlingspunktes die Länge 0^0 od. 360^0
„ Sommersolstitiums „ „ 90^0
„ Herbstpunktes „ „ 180^0
„ Wintersolstitiums „ „ 270^0

Die Scheitelkreise werden daher hier Längenkreise genannt.

Die Koordinate der Parallelkreise wird die Breite genannt und mit β (Beta) bezeichnet. Die Breite kann wie die Deklination + oder — sein. Man hat

für die Ebene der Ekliptik $\beta = 0$
für den Pol der Ekiptik $\beta = +90^0$
für den entgegengesetzten Punkt
(Gegenpol) der Ekliptik $\beta = -90^0$

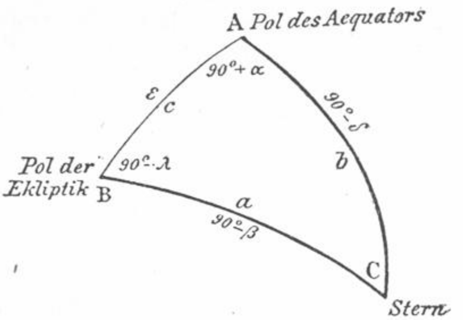
Frage 73. Welche Eigentümlichkeiten besitzt das System der Ekliptik und wann wird es verwendet?

Antwort. Das System der Ekliptik ist in vielfacher Beziehung demjenigen des Aequators ähnlich. Die Koordinaten der Länge und Breite sind wenig veränderlich, ja fast konstant und die Veränderungen können genau rechnerisch bestimmt werden. Ausserdem hat die Ebene der Ekliptik eine für die Astromechanik wichtige Bedeutung. Wir werden später zeigen, dass das ekliptikale System für die Planeten genau dieselbe Rolle spielt, wie das äquatoreale im Betracht der Fixsterne. Man wird daher alle Planetenorte am bequemsten durch die ekliptikalen Koordinaten darstellen können, was auch immer geschieht.

Die Koordinaten der Länge und der Breite werden nie durch Beobachtung, sondern immer nur durch Rechnung aus den anderen Koordinatensystemen bestimmt.

Frage 74. Wie verwandelt man das äquatoreale System in das ekliptikale?

Figur 67.



Erkl. 107. Für das allgemeine Dreieck mit den Winkeln A, B, C und den ihnen gegenüberliegenden Seiten a, b, c hat man die allgemeinen Gleichungen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$
$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

Setzt man hierin im Anschluss an die Figuren 67 und 68:

$$a = 90^0 - \beta \qquad A = 90^0 + \alpha$$
$$b = 90^0 - \delta \qquad B = 90^0 - \lambda$$
$$c = \varepsilon$$

und beachtet, dass allgemein:

$$\sin(90 \pm q) = \cos q$$
$$\cos(90 \pm q) = \pm \sin q$$

so folgen sofort die nebenstehenden Formeln.

Erkl. 108. Man hat nämlich:

$$\cos\beta \sin\lambda = \underline{\cos\delta \sin\alpha} \cos\varepsilon + \underline{\sin\delta} \sin\varepsilon$$

oder durch die erwähnte Substitution:

$$\cos\beta \sin\lambda = M(\cos N \cos\varepsilon + \sin N \sin\varepsilon)$$

also, da allgemein:

$$\cos p \cos q + \sin p \sin q = \cos(p - q)$$

ist auch:

$$\cos\beta \sin\lambda = M \cos(N - \varepsilon)$$

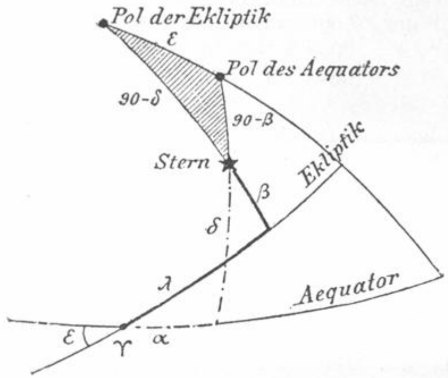
Ebenso ist auf Grund der allgemeinen Formel:

$$\sin p \cos q - \cos p \sin q = \sin(p - q)$$

die zweite Formel zu behandeln.

Antwort. Aus der Figur 65 ergibt sich leicht das Bestimmungsdreieck (s. Figur 68).

Figur 68.



Nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie hat man die Formeln (s. Erkl. 107):

$$\text{III)} \;..\; \begin{cases} \cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\beta \sin\lambda = \cos\delta \sin\alpha \cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon \\ \sin\beta = -\cos\delta \sin\alpha \sin\varepsilon + \sin\delta \cos\varepsilon \end{cases}$$

Um diese Formeln für die logarithmische Rechnung bequemer zu machen, setzen wir:

$$M \sin N = \sin\delta$$
$$M \cos N = \cos\delta \sin\alpha$$

woraus die drei Formeln in (siehe Erkl. 108):

$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha$$
$$\cos\beta \sin\lambda = M \cos(N - \varepsilon)$$
$$\sin\beta = M \sin(N - \varepsilon)$$

übergehen.

Man bekommt hieraus unmittelbar:

$$\sin\beta = M \sin(N - \varepsilon)$$

und wenn man die zweite durch die erste dividiert und:

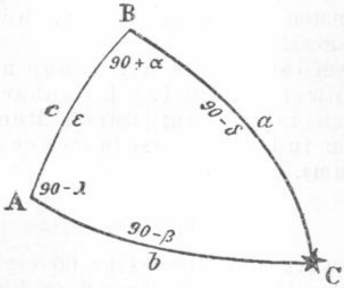
$$\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \mathrm{tg}\lambda$$

setzt:

$$\mathrm{tg}\lambda = \frac{M \cos(N - \varepsilon)}{\cos\delta \cos\alpha}$$

Frage 75. Wie verwandelt man das ekliptikale System in das äquatoreale?

Figur 69.



Antwort. Man hat (siehe Erkl. 109) die Formeln:

$$\text{IV)} \ldots \begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon \\ \sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon \end{cases}$$

Wird hierin:

$$\cos\beta\sin\lambda = M\cos N$$
$$\sin\beta = M\sin N$$

gesetzt, so folgt noch:

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = M\cos(N+\varepsilon)$$
$$\sin\delta = M\sin(N+\varepsilon)$$

durch welche Gleichungen das Problem gelöst ist, denn die letzte Gleichung liefert:

$$\sin\delta = M\sin(N+\varepsilon)$$

und die zweite dividiert durch die erste:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M\cos(N+\varepsilon)}{\cos\beta\cos\lambda}$$

Erkl. 109. Wendet man die allgemeinen Formeln (siehe Erkl. 107) auf das Dreieck in der Figur 67 an, indem man setzt:

$$A = 90 - \lambda \qquad a = 90 - \delta$$
$$B = 90 + \alpha \qquad b = 90 - \beta$$
$$c = \varepsilon$$

so folgen auf analoge Weise wie die Formeln III), die Formeln IV).

Frage 76. Welchen Veränderungen sind die Koordinaten der Länge und Breite unterworfen?

Antwort. Berechnet man aus der beobachteten Rectascension und Deklination eines Sternes die Länge und Breite von 10 zu 10 Jahren, so findet man, dass sich die Breiten sehr wenig ändern, die Längen dagegen um:

$$50''\,241$$

jährlich zunehmen. Diese Zunahme ist dadurch zu erklären, dass der Frühlingspunkt jährlich um diesen Betrag rückwärts geht, d. h. vom Nordpol aus gesehen rechts herum im Sinne des Uhrzeigers. Man nennt diese Erscheinung die Präcession. Infolge der Präcession rücken die Sterne etwa in 70 Jahren um 1^0 in der Länge vor und vollenden demnach in 25800 Jahren einen ganzen Umlauf um den Himmel.

Man nennt diesen Zeitraum das grosse platonische Jahr.

Die Theorie ergibt (vergl. Erkl. 112) für die dem Pole nicht allzu nahen Sterne:

Wenn:

$$\alpha_0 \quad \delta_0$$

die Rectascension und Deklination für 1750:

$$\alpha \quad \delta$$

jene für $1750 + t$ bezeichnen:

$$62) \ldots \begin{cases} \alpha - \alpha_0 = m + n\operatorname{tg}\delta\sin\alpha \\ \delta - \delta_0 = n\cos\alpha \end{cases}$$

wobei:

$$m = 46''\,02824 + 0''\,000308645\,t$$
$$n = 20''\,06442 - 0''\,0000970204\,t$$

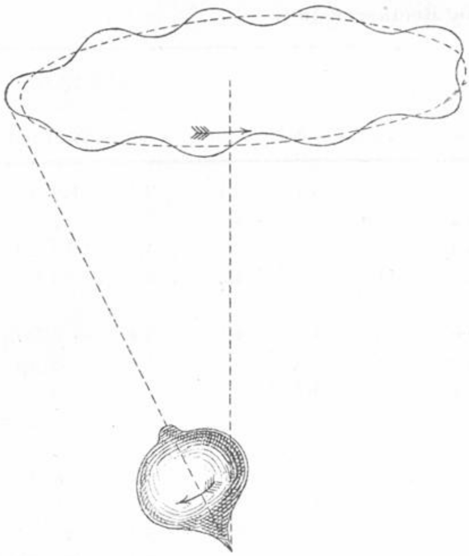
Erkl. 110. Die Astronomen nennen diejenige Richtung, in welcher die Sonne um die Erde sich scheinbar bewegt, vorwärts, die entgegengesetzte rückwärts.

Erkl. 111. Die Präcession war schon von Hipparch (lebte auf Rhodus im II. Jahrhundert v. Chr.) erkannt, welcher die Länge von Spica 174^0 während 150 Jahre vorher diese Länge von Aristyll und Tymocharis gleich 172^0 gefunden worden war und ähnlich bei allen von ihm gemessenen Sternen, während die Breiten sich nicht merklich geändert haben.

Newton (1687) erklärte die Präcessionsbewegung durch die Anziehung, welche die Sonne und der Mond auf die abgeplattete Erde ausüben. Die Erklärung gestaltet sich ziemlich einfach, wenn man ein einfaches Experiment zu Hilfe nimmt. Man versetze einen Kreisel in schnelle Rotation, wobei seine Achse senkrecht sein soll. Sodann gebe man der Achse eine beliebige Neigung, so wird ihre Richtung eine kreisförmige Schlangenlinie beschreiben und zwar in der der Drehung entgegengesetzten Richtung.

Erkl. 112. Man möge zu Rate ziehen: Brünnow, Lehrbuch der sphär. Astronomie, IV. Aufl., II. Abschnitt I.

Figur 70.



und es gilt die Regel: Um die Präcession für einen Zeitraum $t' - t$ zu erhalten, hat man nur nötig, die Präcession für das arithmetische Mittel der Zeiten, also für:

$$\frac{t' - t}{2}$$

zu berechnen und diese mit der Zwischenzeit zu multiplizieren.

Um nach den obigen Formeln rechnen zu können, müsste man eigentlich schon sehr genäherte Werte für α und δ kennen. Man verschafft sich solche leicht mit Hilfe der Tafel XII und XIII (vergl. Erkl. 113).

Tafel XII.

Tafel der Präcession in Deklination.

α		$n \cos \alpha$
$0^h\ 0^m$	$0^h\ 0^m$	$+20''1$
0 40	23 20	19,7
1 20	22 40	18,8
2 0	22 0	17,4
2 40	21 20	15,4
3 20	20 40	12,9
4 0	20 0	10,0
4 40	19 20	6,9
5 20	18 40	3,5
6 0	18 0	0,0
6 40	17 20	— 3,5
7 20	16 40	— 6,9
8 0	16 0	— 10,0
8 40	15 20	— 12,9
9 20	14 40	— 15,4
10 0	14 0	— 17,4
10 40	13 20	— 18,8
11 20	12 40	— 19,7
12 0	12 0	— 20,1

Erkl. 113. Nachstehende Tafeln XI und XII geben den jährlichen Betrag der Präcession für Ueberschlagsrechnungen.

Die Tafel XIII liefert die Werte der Konstanten m und n für genaue Rechnungen.

Es war z. B. für α Arietis 1830:

$$\alpha = 1^h\,57^m\,36^s\,,\quad \delta = +22^0\,39'\,16''$$

und die Werte von α und δ für 1850 zu erhalten, suche man mit:

$$\alpha = 2^h \qquad \delta = 22^0\,\frac{2}{3}$$

in der Tafel XII, womit man die jährliche Präcession zu $3^s\,30$ findet. Diese Grösse ist mit der Zwischenzeit = 20 Jahren zu multiplizieren, wodurch man $1^m\,8^s$ erhält. Also ist für 1850:

$$\alpha = 1^h\,57^m\,36^s + 1^m\,8^s = 1^h\,58^m\,44^s$$

Die strengen Formeln liefern denselben Wert.

Für die Deklination liefert Tafel XI $+\,17''\,4$, also in 20 Jahren:

$$348'' = 5'\,48''$$

Wodurch für 1850:

$$\delta = +22^0\,39'\,16'' + 5'\,48''$$
$$= +22^0\,45'\,2''$$

Die strengen Formeln hätten:

$$+\,22^0\,45'\,2''$$

geliefert.

Man benützt diese Tafeln, um Näherungswerte für α und δ zu erhalten, welche nach den Formeln 62) zur Berechnung der wahren Werte nötig sind.

Tafel XIII.

Tafel der Präcession in Rectascension.

Rectas.	$m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$										Rectas.
Deklinat.	—20°	—10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°	+50°	+60°	+70°	Deklinat.
0h 0m	3s 07	3s 07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,1	3,1	3,1	12h 0m
40	2,99	3,03	3,07	3,11	3,15	3,20	3,26	3,35	3,5	3,7	11 20
1 20	2,90	2,99	3,07	3,15	3,24	3,33	3,45	3,6	3,9	4,3	10 40
2 0	2,83	2,95	3,07	3,19	3,31	3,46	3,63	3,9	4,2	4,9	10 0
2 4	2,76	2,92	3,07	3,22	3,38	3,57	3,79	4,1	4,6	5,4	9 20
3 20	2,70	2,89	3,07	3,25	3,44	3,66	3,93	4,3	4,8	5,9	8 40
4 0	2,65	2,87	3,07	3,27	3,49	3,74	4,04	4,45	5,1	6,25	8 0
4 40	2,61	2,85	3,07	3,29	3,53	3,80	4,12	4,6	5,25	6,5	7 20
5 20	2,59	2,81	3,07	3,30	3,55	3,83	4,17	4,6	5,35	6,7	6 40
6 0	2,58	2,83	3,07	3,31	3,56	3,84	4,19	4,7	5,4	6,7	6 0
12 0	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,1	3,1	3,1	24 0
12 40	3,15	3,11	3,07	3,03	2,99	2,94	2,88	2,8	2,7	2,4	23 20
13 20	3,24	3,15	3,07	2,99	2,90	2,81	2,69	2,5	2,3	1,8	22 40
14 0	3,31	3,19	3,07	2,95	2,83	2,68	2,51	2,3	1,9	1,2	22 0
14 40	3,38	3,22	3,07	2,92	2,76	2,57	2,35	2,05	1,6	0,7	21 20
15 20	3,44	3,25	3,07	2,89	2,70	2,48	2,21	1,85	1,3	0,3	20 40
16 0	3,49	3,17	3,07	2,87	2,65	2,40	2,10	1,7	1,1	—0,1	20 0
16 40	3,53	3,29	3,07	2,85	2,61	2,34	2,02	1,6	0,9	—0,4	19 20
17 20	3,55	3,30	3,07	2,84	2,59	2,31	1,97	1,5	0,8	—0,5	18 40
18 0	3,56	3,31	3,07	2,83	2,58	2,30	1,95	1,5	0,75	—0,6	18 0

Tafel XIV.

Tafel der Konstanten m und n.

	m	△	log [$(n : 15) = n^s$]	△	log n''	△
1800	3s 06968		0·126146		1,302238	
1810	3s 06987	19	0·126128	18	1,302219	19
1820	3s 07006	19	0·126109	19	1,302200	19
1830	3s 07025	19	0·126090	19	1,302182	18
1840	3s 07044	19	0·126072	18	1,302163	19
1850	3s 07063	19	0·126053	19	1,302144	19
1860	3s 07081	18	0·126034	19	1,302125	19
1870	3s 07100	19	0·126015	19	1,302107	18
1880	3s 07119	19	0·126996	19	1,302088	19
1890	3s 07138	19	0·126978	18	1,302069	19
1900	9s 07157	19	0·126959	19	1,302050	19

Partes prop.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	2	4	5	7	9	11	13	14	16	18
19	2	4	6	8	10	11	13	15	17	19

c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 46. Es sei gegeben:

$$\alpha = 6^0\ 33'\ 29''$$
$$\delta = -16^0\ 22'\ 35''$$
$$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 32''$$

zu berechnen λ und β. Umgekehrt nehme man die letzteren Grössen als gegeben an und berechne die ersteren.

Erkl. 114. $\sin(-\delta) = -\sin\delta$ daher:

$$\log\sin(-16^0\ 22'\ 35'') = 9_n\ 45017$$

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{aligned} \cos\delta &= 9{\cdot}98201 \\ \cos\alpha &= 9{\cdot}99715 \\ \hline \cos\delta\cos\alpha &- 0{\cdot}97916 \end{aligned}$$

Erkl. 115. Wir finden $\operatorname{tg}\lambda = 8_n\ 08976$, demnach kann der Winkel λ entweder im zweiten oder vierten Quadranten liegen. Um dies zu entscheiden, beachten wir die Gleichung:

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha$$

Es war hier $\cos\delta$ und $\cos\beta$ gleich bezeichnet, d. h. negativ, also muss $\cos\alpha$ dasselbe Vorzeichen haben wie $\cos\lambda$. Nun war $\cos\alpha$ positiv, also muss auch $\cos\lambda$ positiv sein, d. h. λ liegt im vierten Quadranten. Zu derartigen Beurteilungen ist folgende Tafel dienlich:

	Quadrant			
Winkel	I	II	III	IV
tg	+	—	+	—
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+

Auflösung. Nach Antwort auf die Frage 74 haben wir zu rechnen zunächst M und N aus:

$$M\sin N = \sin\delta$$
$$M\cos N = \cos\delta\sin\alpha$$

sodann wird:

$$\sin\beta = M\sin(N-\varepsilon)$$
$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{M\cos(N-\varepsilon)}{\cos\delta\cos\alpha}$$

Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \cos\delta &= 9\ {\cdot}98201 \\ \sin\alpha &= 9\ {\cdot}05771 \\ \hline M\cos N &= 9\ {\cdot}03972 \\ M\sin N &= 9_n{\cdot}45017 = \sin\delta \\ \hline \operatorname{tg} N &= 0_n\ 41045 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= -\ 68^0\ 45'\ 42'' \\ \varepsilon &= 23^0\ 27'\ 32'' \\ \hline N-\varepsilon &= -\ 92^0\ 13'\ 14'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\cos N &= 9\ {\cdot}03972 \\ \cos N &= 9\ {\cdot}55901 \\ \hline M &= 9\ {\cdot}48071 \\ \sin(N-\varepsilon) &= 9_n{\cdot}99967 \\ \hline \sin\beta &= 9_n{\cdot}48038 \\ \beta &= -\ 17^0\ 35'\ 37'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 9\ {\cdot}48071 \\ \cos(N-\varepsilon) &= 8\ {\cdot}58821 \\ \hline &= 8_n{\cdot}06892 \\ \cos\delta\cos\alpha &= 9\ {\cdot}97916 \\ \hline \operatorname{tg}\lambda &= 8\ {\cdot}08976 \\ \lambda &= 359^0\ 17'\ 44'' \end{aligned}$$

Für die Umkehrung hat man nach Frage 75:

$$\sin\beta\sin\lambda = M\cos N$$
$$\sin\beta = M\sin N$$

zu setzen, woraus:

$$\sin\delta = M\sin(N+\varepsilon)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M\cos(N+\varepsilon)}{\cos\beta\cos\lambda}$$

folgt.

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \sin\beta &= 9_n\,48038 \\ \sin N &= 9\cdot 99967 \\ \hline M &= 9_n\,48071 \end{aligned}$$

Hilfsrechnung 3.

$$\begin{aligned} \cos\beta &= 9\cdot 97919 \\ \cos\lambda &= 9\cdot 99997 \\ \hline \cos\beta\cos\lambda &= 9\cdot 97916 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= 9_n 48071 \\ \cos(N+\varepsilon) &= 9_n 55901 \\ \hline &= 9\cdot 03972 \\ \cos\lambda\cos\beta &= 9\cdot 97916 \\ \hline \operatorname{tg}\alpha &= 9\cdot 06056 \\ \alpha &= 6^0\ 33'\ 29'' \end{aligned}$$

Man hat also:

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= 8_n\cdot 08973 \\ \cos\beta &= 9\ \cdot 97919 \\ \hline &= 8_n\cdot 06892 \\ \sin\beta &= 9_n\cdot 48038 \\ \hline \operatorname{tg} N &= 1\ \cdot 41146 \\ N &= 87^0\ 46'\ 46'' \\ \varepsilon &= 23^0\ 27'\ 32'' \\ \hline N+\varepsilon &= 111^0\ 14'\ 18'' \\ \sin(N+\varepsilon) &= 9\cdot 96945 \\ M &= 9_n\ 48071 \\ \hline \sin\delta &= 9_n\ 45016 \\ \delta &= -16^0\ 22'\ 34'' \end{aligned}$$

Aufgabe 47. Am 19. Juni 1843 wurde zu Königsberg die Deklination der Sonne beobachtet und gefunden:

$$\delta_\odot = 23^0\ 26'\ 9''$$

Zu derselben Zeit fand man die Rectascension zu:

$$\alpha_\odot = 5^h\ 48^m\ 51^s$$

Welches war die Schiefe der Ekliptik an diesem Tage?

Hilfsrechnung.

Nach der Tafel III:

$$\begin{aligned} 5^h \ \ldots\ldots &\ 75^0 \\ 88^m \ \ldots\ldots &\ 12^0 \\ 51^s \ \ldots\ldots &\ \quad 12'\ 45'' \\ \hline 5^h\ 88^m\ 51^s = &\ 87^0\ 12'\ 85'' \end{aligned}$$

Antwort. Da sich die Sonne in der Ekliptik bewegt, so ist:

$$\beta_\odot = 0$$

Dann folgt aber aus der letzten der Formeln III), Frage 74:

$$0 = -\cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot \sin\varepsilon + \sin\delta_\odot \cos\varepsilon$$

demnach:

$$63)\ \ldots\ \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\delta_\odot}{\sin\alpha_\odot}$$

In unserem Beispiel haben wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta_\odot &= 9\cdot 63697 \\ \sin\alpha_\odot &= 9\cdot 99949 \\ \hline \operatorname{tg}\varepsilon &= 9\cdot 63748 \\ \varepsilon &= 23^0\ 27'\ 37'' \end{aligned}$$

Aufgabe 48. Nach Frage 71 fand man um das Jahr 1100 v. Chr. die Schiefe der Ekliptik zu:

$$23^0\ 52'$$

ferner ist diese nach Frage 69 für das Jahr 1890 n. Chr:

$$23^0\ 27'$$

wie gross ist die jährliche Abnahme der Schiefe der Ekliptik?

Auflösung. Zwischen 1100 vor und 1890 nach Chr. verflossen 2990 Jahre. Die Abnahme der Schiefe ist also:

$$\frac{23^0\,52' - 23^0\,27'}{2990} = 0''\,5$$

womit der in der Frage 69 angegebene Wert:

$$0''\,476$$

ziemlich nahe übereinstimmt.

Aufgabe 49. Die Schiefe der Ekliptik sei ε, α und δ seien die Rectascensionen und Deklinationen des Sternes α Aquarii; man hat gefunden:

	ε	α	δ
für das Jahr 1830	$23^0\ 27'\ 32''$	$21^h\ 57^m\ 3{,}0^s$	$-1^0\ 8'\ 33''$
1850	$23^0\ 27'\ 25''$	$21^h\ 58^m\ 4{,}7^s$	$-1^0\ 2'\ 49''$
1870	$23^0\ 27'\ 19''$	$21^h\ 59^m\ 6{,}4^s$	$-0^0\ 57'\ 1''$

Man berechne hieraus die Präcession in der Länge.

Hilfsrechnung.

$$16 \cdot 60 = 960$$

Wir haben also:

$$960 + 43 = 1043''$$
$$960 + 45 = 1045''$$
$$1043'' : 20 = 50{,}21$$
$$1045'' : 20 = 50{,}22$$

Auflösung. Berechnet man auf bekannte Art (siehe Aufgabe 46) die Längen für diese drei Orte, so findet man:

	λ	Differenzen
1830	$330^0\,58'\,54''$	
		$16'\,43''$
1850	$331^0\,15'\,37''$	
		$16'\,45''$
1870	$331^0\,32'\,22''$	

woraus, da die Zwischenzeit 20 Jahre beträgt, unmittelbar die Präcession in der Länge zu:

$$50'',21$$
$$50'',22$$

jährlich folgt, also nahezu der oben angegebene Wert.

Aufgabe 50. Es sollen die Werte von α und δ für den Stern α Andromedae für das Jahr 1882 berechnet werden aus folgenden Daten:

1842. α Andromedae

$$\alpha = 0^h\,0^m\,14^s,\quad \delta = +28^0\,13'\,5''$$

Hilfsrechnung 1.

$$3^s\,07 \cdot 40 = 122^s\,8 = 2^m\,3^s$$
$$20''\,1 \cdot 40 = 804'' = 13'\,24''$$

Hilfsrechnung 2.

$$2^m \cdots\cdots\cdots 30'$$
$$17^s \cdots\cdots\cdots 4'\,15''$$
$$\overline{2^m\,17^s = 34'\,15''}$$

Hilfsrechnung 3.

$$3^s\,071 \times 40 = 122^s\,84 = 2^m\,2^s\,84$$
$$n^s \operatorname{tg}\delta \sin\alpha \qquad 0^s\,29$$
$$\overline{2^m\,3^s\,13}$$

Auflösung. Wir verschaffen uns zunächst die genäherten Werte nach Erkl. 113 aus den Tafeln XII und XIII mit den Werten:

$$\alpha = 0^h$$
$$\delta = +28^0$$

und finden für ein Jahr:

$$\alpha - \alpha_0 = 3{,}07^s$$
$$\delta - \delta_0 = +20''\,1$$

demnach genähert für 1882:

$$\alpha = 0^h\,2^m\,17^s$$
$$\delta = +28^0\,26'\,29''$$

Sodann haben wir für:

$$\frac{1842 + 1882}{2} = 1862$$

die Werte von m und n zu berechnen.

Die Tafel XIV liefert:

$$m = 3^s\,071$$
$$\log n^s = 0{,}12603$$
$$\log n'' = 1{,}30212$$

ferner ist:

$$\alpha = 34'\,15''$$

Damit nach der Formel 62:

$$\alpha - \alpha_0 = (m + n^s \operatorname{tg}\delta \sin\alpha) \cdot 40$$
$$\alpha - \delta_0 = n'' \cos\alpha \cdot 40$$

$$\log n^s = 0{,}12603$$
$$\log\operatorname{tg}\delta = 9 \cdot 73370$$
$$\log\sin\alpha = 7 \cdot 99837$$
$$\log 40 = 1 \cdot 60206$$
$$\overline{9 \cdot 46016}$$

Demnach ist:

$$\alpha - \alpha_0 = 0^h\,2^m\,3^s\,13$$
$$\alpha_0 = 0^h\,0^m\,14^s\,00$$
$$\overline{\alpha = 0^h\,2^m\,17^s\,13}$$

$$\begin{aligned} \log n'' &= 1{,}30212 \\ \log 40 &= 1{,}60206 \\ \log \cos \alpha &= 9{,}99998 \\ \hline & 2{,}90416 \end{aligned}$$

Demnach:

$$\begin{aligned} \delta - \delta_0 &= \, 13'\, 22'' \\ \delta_0 &= 28^0\, 13'\; 5'' \\ \hline \delta &= 28^0\, 26'\, 27'' \end{aligned}$$

d) Ungelöste Aufgaben.

Man berechne α, δ, beziehungsweise λ, β, aus folgenden Daten:

Aufgabe 51. 1842. (β Orionis.)

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 5^h\, 6^m\, 57^s \\ \delta &= -\, 8^0\, 23'\, 23'' \end{aligned}\right\} \varepsilon = 23^0\, 27'\, 35''$$

Anleitung. Analog der Aufgabe 46.

Aufgabe 52. 1882. (Sirius.)

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \, 102^0\, 27'\, 19'' \\ \beta &= -\, 39^0\, 34'\, 45'' \end{aligned}\right\} \varepsilon = 23^0\, 27'\, 16''$$

Aufgabe 53. 1850. (α Leonis.)

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \, 147^0\, 44'\, 39'' \\ \beta &= +\, 0^0\, 27'\, 39'' \end{aligned}\right\} \varepsilon = 23^0\, 27'\, 25''$$

Aufgabe 54. Es soll α und δ für das Jahr 1870 berechnet werden aus:

1830. $\alpha = 14^h\, 41^m\, 18^s$
$\delta = -\, 15^0\, 17'\, 7''$

Anleitung. Analog der Aufgabe 50.

Aufgabe 55. Ebenso für das Jahr 1882 aus dem Datum:

1842. $\alpha = 6^h\, 38^m\, 11^s$
$\delta = -\, 16''\, 30'\, 17''$

Aufgabe 56. Desgleichen für 1850 aus dem Datum:

1875. $\alpha = 220^0\; 1'\, 24''$
$\delta = +\, 20^0\, 21'\, 15''$

e) Ueber die Theorie der Sonnenuhren.

Anmerkung 14. Eine Anwendung der vorgetragenen Lehren ist jene auf die Theorie der Sonnenuhren, die jetzt bei weitem nicht jene Wichtigkeit haben, wie in der früheren Zeit.

Frage 77. Was versteht man unter einer Sonnenuhr?

Antwort. Unter einer Sonnenuhr versteht man im allgemeinen einen Apparat, bei welchem der durch die Sonne erzeugte Schatten eines Stabes die Zeit anzeigt. Der Zeigerstab hat immer die Richtung der Weltachse,

Erkl. 116a. Eine jede Sonnenuhr wird also nicht die mittlere Zeit, sondern die Sonnenzeit zeigen, weswegen sie (vergl. Frage 28, 29, 30) mit einer nach der mittleren Zeit gehenden Uhr nur an den Tagen der

Aequinoktien (vergl. Frage 70) übereinstimmen wird. Die Differenz im Mittag ist nämlich (vergl. Frage 30) gleich der Zeitgleichung.

Erkl. 116 b. Statt des Schattens eines Stabes benützt man gewöhnlich den Schatten einer Dreiecksfläche, weil diese einen deutlicheren Schatten wirft und konstanter ist als der leicht veränderliche Stab.

er ist also gegen den Horizont um den Winkel:

$$\varphi = \text{Polhöhe}$$

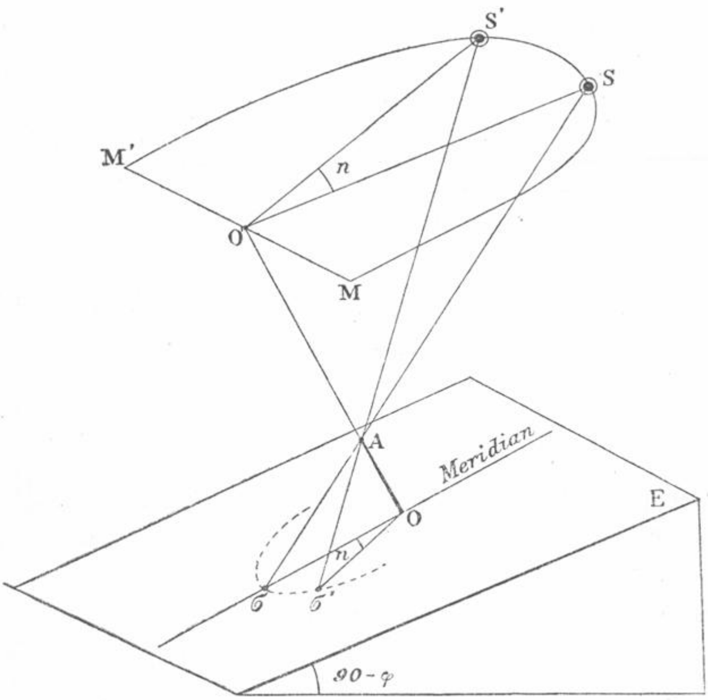
geneigt. Je nach der Lage der Ebene, welche den Schatten auffängt, also das Zifferblatt trägt, unterscheidet man äquatoreale, horizontale und vertikale Sonnenuhren.

Um eine Sonnenuhr zu zeichnen, muss man folgendes Problem für gegebene Bedingungen (Lage der Zifferblattebene) lösen:

Welchen Winkel ($\sigma O \sigma'$ in der Figur 71) beschreibt der Schatten des Zeigerstabes (OA), wenn die Sonne am Himmel einen Winkel n ($= S'OS$) zurücklegt?

Frage 78. Wie ist eine äquatoreale Sonnenuhr beschaffen?

Figur 71.



Antwort. Eine äquatoreale Sonnenuhr besteht aus einer der Ebene des Aequators parallelen Ebene, auf welcher der Stab senkrecht steht. Da die Ebene des Aequators um den Winkel:

$$90 - \varphi^0$$

gegen den Horizont geneigt ist, so muss die Ebene der Sonnenuhr auch diese Neigung haben. Wird in dieser Ebene ein Stab senkrecht befestigt, so hat er eine Neigung von φ^0 gegen den Horizont. Seine Verlängerung trifft daher den Weltpol. Aus der Figur 71 entnimmt man leicht (vergl. Erkl. 117), dass wenn die Sonne den Bogen SS' am Himmel beschreibt, der Schatten des Stabes einen proportionalen Bogen $\sigma\sigma'$ in der Uhrebene E zurücklegt.

Um daher eine solche Uhr zu konstruieren, nehmen wir eine Ebene, die um den Winkel:

$$90 - \varphi$$

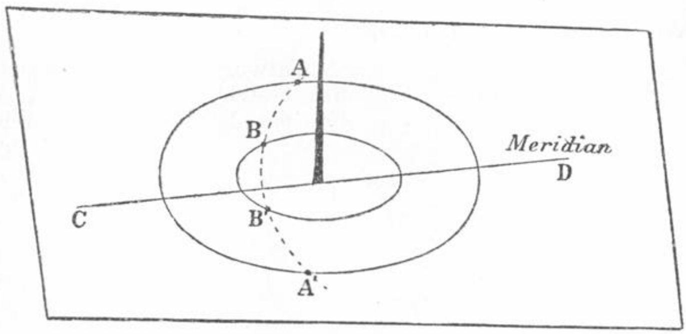
gegen die Ebene des Horizonts geneigt ist, und beschreiben auf derselben einen Kreis. In dem Mittelpunkte dieses Kreises stellen wir einen Stab senkrecht auf. Sodann bestimmen wir die Richtung des Meridians und bezeichnen denjenigen Punkt, in welchem die durch den Mittelpunkt des Kreises gehende

Erkl. 117. Wir brauchen bloss nachzuweisen, dass der Winkel $SO'S'$ gleich ist dem Winkel $\sigma O \sigma'$. Was wir damit thun, dass wir zeigen, dass ihre Schenkel parallel laufen. Dieses ist aber leicht (wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $A\sigma O$ und ASO' und der Dreiecke $A\sigma' O$ und $AS'O$) zu erweisen.

Erkl. 118. Um für diese Zwecke genügend genau die Richtung des Meridians zu finden, befestige man einen Stab senkrecht auf ein mit Papier überspanntes festliegendes Brett, auf welchem mehrere konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des Stabes gezeichnet sind. Beobachtet man nun, wenn die Spitze des Schattens (am besten 9^h bis 10^h vor- und 2^h bis 3^h nachmittags) die einzelnen Kreise trifft. Bezeichnet man sich diese Punkte und verbindet die zu einem und demselben Kreise zugehörige Punkte durch eine Sehne, so ist die durch die Halbierungspunkte dieser Sehnen gehende Gerade eine Meridianlinie, d. h. ihre Richtung ist jene des Meridians.

Meridianlinie den Kreisumfang trifft, mit der Zahl 12. Selbstverständlich muss dieser Punkt auf der Nordseite liegen. Teilen wir nun den Kreis von diesem Punkte aus in 24 Teile, so entsprechen die einzelnen Teilpunkte den einzelnen Stunden.

Figur 72.



Frage 79. Wie wird eine horizontale Uhr konstruiert?

Antwort. Um eine horizontale Uhr zu konstruieren, bestimme man zunächst die Richtung des Meridians und ziehe die Meridianlinie. In einem geeigneten Punkte derselben errichte man den Zeiger, der die Richtung der Weltachse haben muss. Er wird also (für unsere Halbkugel) um den Winkel φ nach Norden gegen die Meridianlinie geneigt sein. Um nun die einzelnen Stundenlinien einzeichnen zu können, müssen wir zunächst die Frage beantworten: Welchen Winkel beschreibt der Sonnenschatten, wenn die Sonne $15^0, 30^0, 45^0$ etc. allgemein einen Winkel p vom Meridian aus zurücklegt? Dieser Winkel ist leicht zu berechnen aus dem sphärischen Dreiecke ABC, in welchem:

$$AB = \varphi = \text{Polhöhe des Ortes},$$

$$BC = x \text{ dem gesuchten Winkel}$$

und

$$\sphericalangle BAC = p \text{ dem Sonnenwinkel}$$

oder wie wir ihn auch früher genannt haben, den Stundenwinkel. Der Winkel bei B ist selbstverständlich ein rechter Winkel.

Erkl. 119. Um einzusehen, dass der Winkel, den die Sonne zurücklegt, gleich ist dem Winkel bei A (siehe Figur 73), erinnere man sich, dass A der Nordpol ist.

Eine Tangente an dem Nordpol ist aber der Ebene des Aequators stets parallel. Nun ist aber der Winkel eines sphärischen Dreieckes identisch (vergl. die sphärische Trigonometrie) mit dem Winkel, den die Tangenten an die Seiten in der Spitze bilden.

Erkl. 120. Für das allgemeine rechtwinklige Dreieck ABC (vergl. Figur 73) gilt nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie der Satz:

$$\operatorname{tg} a = \sin c \operatorname{tg} A$$

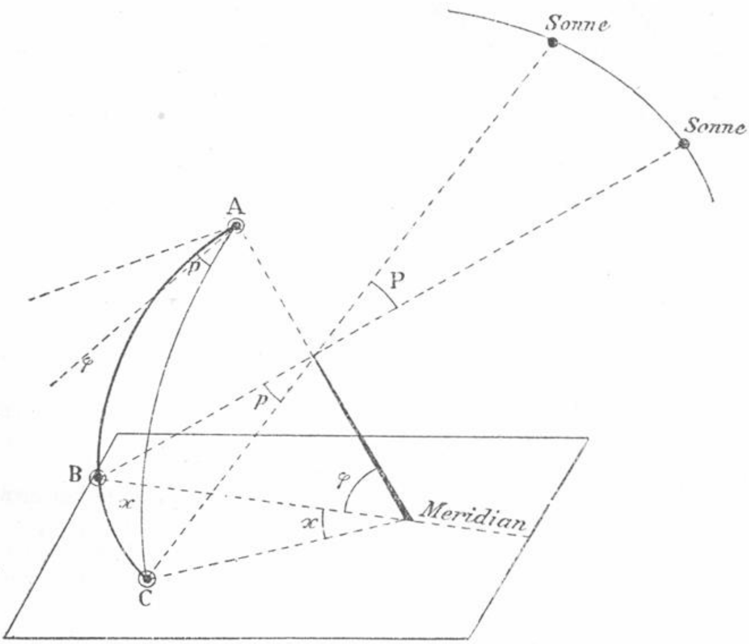
Nach den Lehrsätzen der sphärischen Trigonometrie ergibt sich sofort (vgl. Erkl. 120):

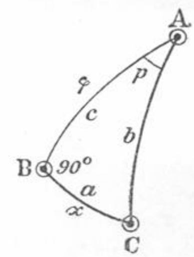
$$64) \ldots \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p \cdot \sin \varphi$$

Berechnet man nach dieser Formel die Stundenlinien für die geographische Breite von 52° 30′, also jene von Berlin, so ergibt sich folgende Tafel:

Vormittag	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Nachmittag	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	XII
x	126°	$108\frac{2}{3}$°	90°	$71\frac{1}{3}$°	54°	$38\frac{1}{2}$°	$24\frac{1}{2}$°	12°	0°

Figur 73.





Frage 80. Wie wird eine horizontale Sonnenuhr ohne Rechnung konstruiert?

Antwort. Man ziehe eine gerade Linie CV (vergl. Figur 74) und trage von C den Winkel:

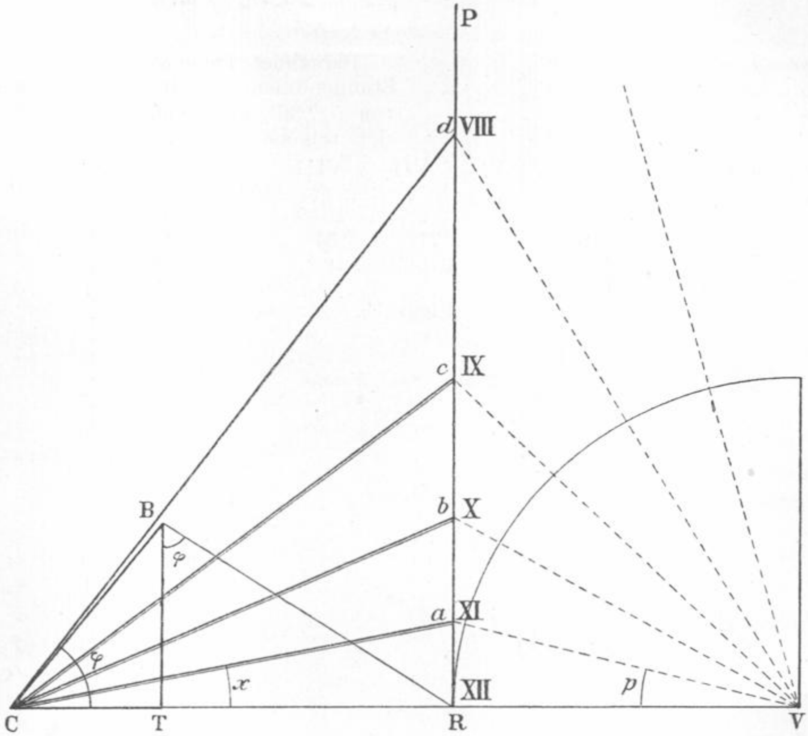
$$BCT = \varphi$$

gleich der Polhöhe des Ortes. Ziehe ferner:

$$TB \perp CV \text{ und } BR \perp BC$$

und mache $RV = RB$. Zieht man nun in R eine Senkrechte auf CV und beschreibt von V mit dem Radius RV einen Kreis, dessen Quadranten man in 6 Teile teilt (wenn man ganze, 12 wenn man halbe, 24 wenn man Viertelstunden haben will), so treffen die Verbindungslinien der Teilungspunkte mit

Figur 74.



dem Mittelpunkte die Gerade RP in den Punkten:

$$a, \; b, \; c, \; d \cdots$$

Verbindet man diese mit C, so erhält man die Stundenlinien.

Erkl. 121. Ein trigonometrischer Satz lautet:

„Die Tangente eines Winkels im rechtwinkligen Dreiecke ist gleich dem Quotienten aus der Gegenkathete in die Ankathete.“

„Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Quotienten aus der Gegenkathete in die Hypothenuse.“

Um den Beweis zu dieser Konstruktion zu liefern, bezeichnen wir die Winkel wie folgt:

$$\sphericalangle RVa = p, \quad \sphericalangle aCR = x$$
$$\sphericalangle BCT = \varphi$$

so wird:

$$\operatorname{tg} p = \frac{aR}{VR}$$

oder da $VR = RB$, auch:

$$\operatorname{tg} p = \frac{aR}{RB}$$

Ferner wird:

$$\sin \varphi = \frac{TR}{RB}$$

Wir haben also:

$$\operatorname{tg} p \cdot \sin \varphi = \frac{TR}{RB} \cdot \frac{aR}{RB}$$

Erkl. 122. Ein planimetrischer Satz lautet:

„Die Kathete ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf diese.“

Nun ist aber nach einem bekannten Satze über rechtwinklige Dreiecke:

$$\overline{BR}^2 = TR \cdot RC$$

also wird:

$$\operatorname{tg} p \cdot \sin \varphi = \frac{TR \cdot aR}{TR \cdot RC} = \frac{aR}{RC}$$

Es ist aber:

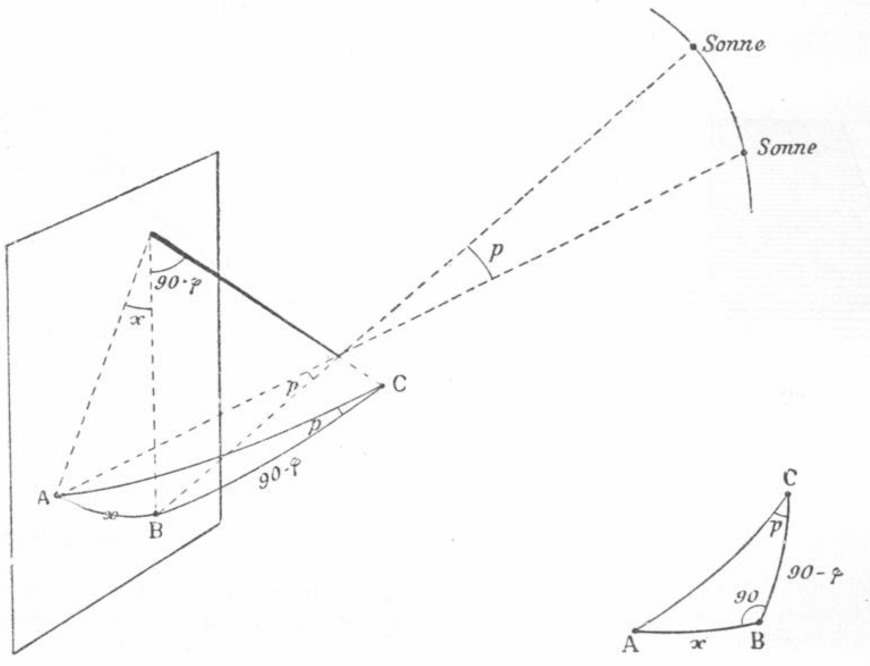
$$\operatorname{tg} x = \frac{aR}{RC}$$

also wird:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p \sin \varphi$$

wie es auch unsere Fundamentalgleichung erfordert.

Figur 75.



Frage 81. Wie wird eine vertikale Sonnenuhr konstruiert?

Antwort. Die vertikale Sonnenuhr wird ganz genau so wie die horizontale konstruiert, nur tritt an die Stelle des Winkels φ der Winkel $90 - \varphi$, so dass also unsere Grundgleichung jetzt:

$$65) \;\ldots\; \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p \cos \varphi$$

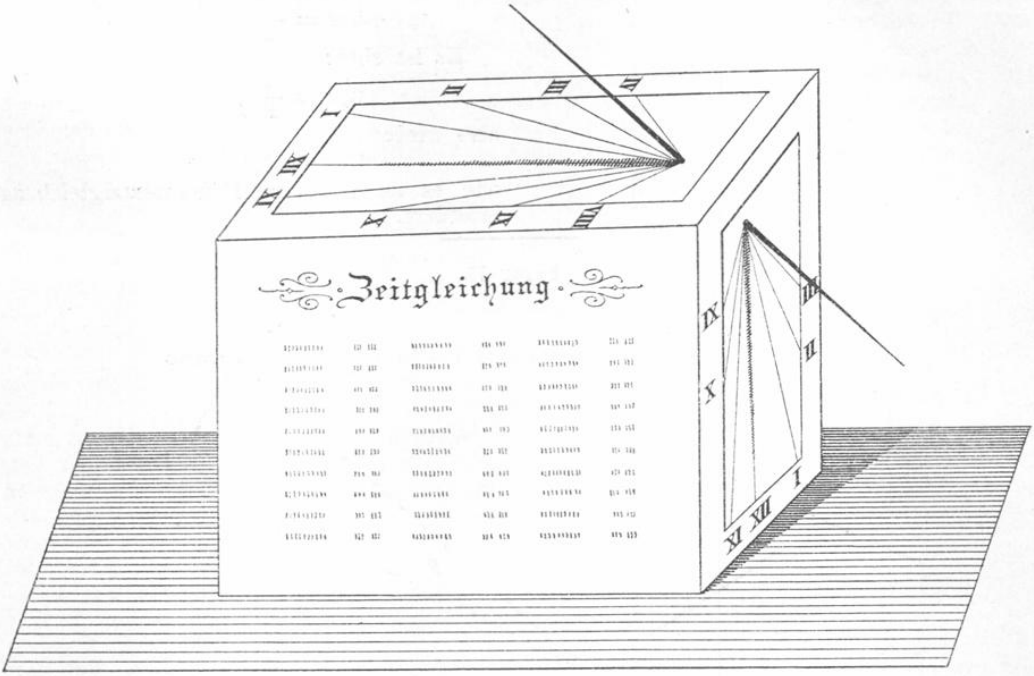
lautet. Es wird dabei jedoch vorausgesetzt, dass die vertikale Uhr genau von West nach Ost gerichtet ist. Wie man sieht, ist bei allen Uhren die Bestimmung des Meridians das schwierigste Geschäft.

Deshalb wollen wir eine neue Vorrichtung kennen lernen, die uns gestattet, diese Bestimmung sofort und viel genauer, als wir es früher gezeigt haben, auszuführen.

Erkl. 123. Eine trigonometrische Formel lautet:

$$\sin(90^0 - \varphi) = \cos \varphi$$

Figur 76.



Frage 82. Was ist der Uhrwürfel?

Antwort. Der Uhrwürfel (s. Figur 76) ist eine Verbindung der horizontalen Uhr mit einer vertikalen. Er besteht aus einem gut gearbeiteten Würfel aus Holz, auf dessen oberer Fläche eine Horizontaluhr und auf dessen einer Seitenfläche eine Vertikaluhr gezeichnet ist. Die übrigen Seitenflächen kann man zur Anbringung der Zeitgleichung (vgl. Seite 29) verwenden. Um einen solchen Uhrwürfel richtig zu stellen, hat man ihn nur so lange zu drehen, bis der Schatten auf beiden Uhren dieselbe Stunde zeigt. Wie man sieht, liefert der Uhrwürfel zugleich eine sehr einfache und ziemlich genaue Methode zur Bestimmung des Meridians.

G. Korrektion der Beobachtungen, welche durch den Standpunkt des Beobachters auf der Oberfläche der Erde und durch die Eigenschaften des Lichtes bedingt werden.

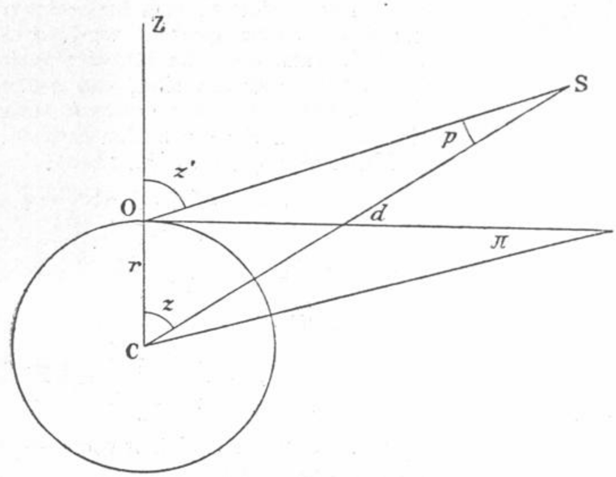
Anmerkung 15. Die astronomischen Tafeln und Ephemeriden geben immer die Oerter der Gestirne, wie sie vom Mittelpunkt der Erde aus erscheinen. Für unendlich weite Gestirne ist es in der That gleichgültig, ob man sie vom Erdzentrum oder irgend einem Orte auf der Erdoberfläche beobachtet. Anders wird es aber, wenn die Entfernung des Gestirnes im anggebbaren Verhältnis zum Erdradius steht, dann wird das Gestirn vom Mittelpunkt der Erde gesehen anderswo erscheinen, als von einem Erdorte auf der Oberfläche. Will man daher die Tafeln benützen, so muss man Mittel haben, welche uns gestatten, eine auf der Erdoberfläche gemachte Beobachtung auf das Erdzentrum zu reduzieren. Diese Reduktion wird im Kapitel „über die Parallaxe“ gelehrt. Eine zweite Veränderung des wahren Fixsternortes wird durch die die Erde umgebende Atmosphäre hervorgerufen. Wir haben sie schon früher als Refraktion kennen gelernt. Eine dritte Veränderung erleidet der Fixsternort endlich dadurch, dass die Geschwindigkeit der Erde zu der Geschwindigkeit des Lichtes ein angebbares Verhältnis hat, so dass der Beobachter auf der Erde alle Sterne um einen kleinen Winkel, welcher von diesem Verhältnis abhängig ist, nach derjenigen Richtung vorgerückt sieht, nach welcher sich die Erde bewegt. Diese Erscheinung führt den Namen der Aberration. Um aber die wahren Oerter der Sterne aus den Beobachtungen zu erhalten, muss man Mittel haben, um die beobachteten scheinbaren Oerter von dieser Aberration zu befreien.

---

a) Ueber die Parallaxe.

Frage 83. Was versteht man unter der Parallaxe?

Figur 77.



Erkl. 124 a. Parallaxe stammt vom griechischen parallattein, vorbeigehen, ausweichen.

Erkl. 124 b. Man vergleiche zum ganzen Abschnitt: Kleyers Trigonometrie p. 841 u. folg.

Erkl. 124 c. Die Parallaxe wirkt auf die Zenithdistanz umgekehrt der Refraktion. Denn um die wahre Zenithdistanz zu finden, muss man zu der scheinbaren die Refraktion addieren, dagegen die Parallaxe von ihr subtrahieren.

Erkl. 125. Ein trigonometrischer Satz lautet:

„Es verhalten sich zwei Seiten im Dreiecke, wie die Sinuse der ihnen gegenüberliegenden Seiten.“

Antwort. Unter der Parallaxe versteht man denjenigen Winkel, welcher von den zwei Linien gebildet wird, die aus dem Mittelpunkte eines Gestirns nach dem Beobachtungsorte und dem Erdzentrum gehen. Sei C der Erdmittelpunkt (siehe Figur 77), O der Beobachtungsort und S der Mittelpunkt des Gestirns (Sonne, Mond, Planet). Die Verbindende OC treffe die scheinbare Himmelskugel in Z, so wird Z der geozentrische Zenith genannt. Nehmen wir an, wir hätten die Beobachtung schon von Refraktion befreit, so wird von O aus das Gestirn in der Richtung OS wahrgenommen, von C dagegen in der Richtung CS. Setzen wir:

$$\sphericalangle ZOS = z'$$
$$\sphericalangle ZCS = z$$

so wird z' die scheinbare und z die wahre Zenithdistanz darstellen. Der Winkel:

$$p = z' - z$$

wird die Parallaxe darstellen; diese drückt also aus, um wie viel Minuten und Sekunden das Gestirn dem Beobachter weiter vom Zenith erscheint, als wenn es vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen würde. Setzt man die Entfernung der beiden Mittelpunkte $CS = d$, sowie die Entfernung des Beobachters vom Erdmittelpunkte $OC = r$, so folgt:

$$66) \ldots \sin p = \frac{r}{d} \sin z'$$

wird $z = 90^0$, so erreicht p seinen Grössenwert und wird die Horizontalparallaxe genannt und gewöhnlich mit π bezeichnet. Es wird also:

$$67) \ldots \sin\pi = \frac{r}{d}$$

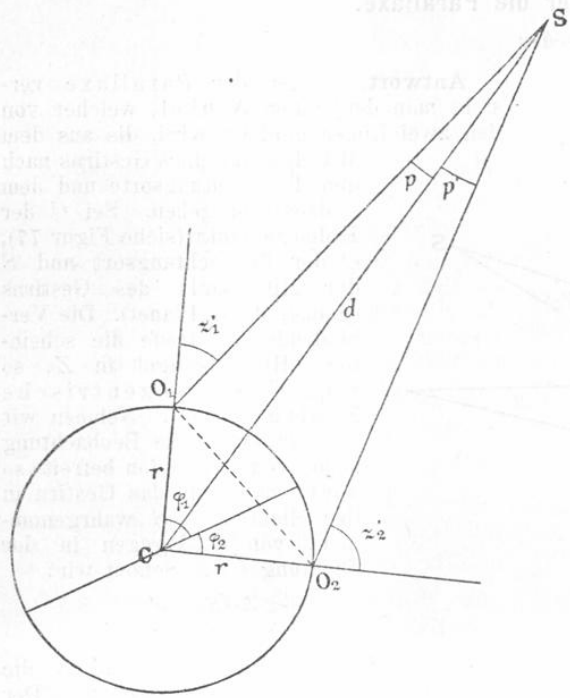
und damit:

$$68) \ldots \sin p = \sin\pi \sin z'$$

Erkl. 126. Da die Erde keine vollkommene Kugel ist, so sind die Erdradien von verschiedener Grösse, am grössten am Aequator, am kleinsten an den Polen. Spricht man daher von der Horizontalparallaxe, so muss angegeben werden, zu welchem Radius sie gehört. Oft wird auch die Aequatorial-Horizontalparallaxe (d. h. die Horizontalparallaxe am Aequator) Horizontalparallaxe schlechthin genannt.

Frage 84. Wie bestimmt man die Aequatoreal-Horizontalparallaxe?

Figur 78.



Antwort. Um die Aequatoreal-Horizontalparallaxe zu bestimmen, beobachtet man von zwei auf demselben Meridian gelegenen, möglichst weit entfernten Orten (O_1 und O_2 in der Figur 78) die Zenithdistanz eines Gestirns zu derselben Zeit, also z. B. zur Zeit seiner Kulmination. Man kennt dann in dem Viereck ($O_1 C O_2 S$), das von den beiden Erdorten, dem Erdzentrum und dem Gestirn gebildet wird, drei Winkel, kann also, da überdies noch zwei Seiten gegeben sind, das ganze Viereck bestimmen und demnach auch die Parallaxen für die beiden Erdorte.

Man findet (vergl. Erkl. 126a):

$$69) \ldots \left\{ \begin{aligned} & p + p' = z_1' + z_2' - (\varphi_1 + \varphi_2) \\ & \operatorname{tg}\frac{p' - p}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{z_1' - z_2'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z_1' + z_2'}{2}} \operatorname{tg}\frac{p + p'}{2} \end{aligned} \right.$$

Setzt man:

$$m = \frac{\operatorname{tg}\frac{z_1' - z_2'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z_1' + z_2'}{2}} \operatorname{tg}\frac{p + p'}{2}$$

so folgt wegen der Kleinheit von $p' - p$ auch in Sekunden:

$$p' - p = \frac{2m}{arc\,1''}$$

Hat man einmal p und p' gefunden, so ergibt sich aus:

$$\sin p = \sin\pi_1 \cdot \sin z_1'$$

die Horizontalparallaxe des Ortes O und ferner aus:

$$\sin\pi_1 = \frac{r}{d}$$

die Entfernung von S.

Sei nun π die Horizontal-Aequatoreal-parallaxe, so wird:

$$\sin\pi = \frac{a}{d}$$

wobei a der Halbmesser des Aequators ist.

Erkl. 126a. Die ganze ausführliche Ableitung der beiden Gleichungen findet sich in Kleyers Trigonometrie p. 845 bis 850, wohin wir den Leser verweisen.

Erkl. 126b. Aus dem Nebenstehenden entnimmt man, dass man die auseinandergesetzte Methode auch zur Bestimmung der Entfernung eines Himmelskörpers verwenden kann. In der That wurde auf diese Weise die Entfernung des Mondes bestimmt.

aus dieser und der vorhergehenden Formel folgt sofort:

$$70) \ldots \sin\pi = \frac{a}{r}\sin\pi_1$$

und damit haben wir die Horizontal-Aequatorealparallaxe bestimmt.

Einen zweiten Weg zur Bestimmung der Aequatorial-Horizontalparallaxe bietet die Aberration (siehe diese).

Einen dritten Weg liefern die Venus- und Merkurdurchgänge (siehe diese).

Erkl. 126c. Die Aequatoreal-Horizontal- und die Horizontal-Parallaxe im allgemeinen führen den Namen der täglichen Parallaxe, weil insbesondere die Horizontalparallaxe an einem Tage alle ihre möglichen Werte annimmt, von Null im geozentrischen Zenith bis zur Aequatoreal-Horizontalparallaxe für den betreffenden Erdradius.

Man hat so gefunden als die wahrscheinlichsten Werte für:

$$71) \ldots \text{die Sonne } \pi_{\odot} = 8{,}85''$$

für die mittlere Erddistanz, d. i.

20000000 geogr. Meilen (148500000 km),

$$72) \ldots \text{den Mond } \pi_{\text{☾}} = 57'\,2{,}06''$$

für die mittlere Erddistanz von

51800 geogr. Meilen (= 384460 km).

(Man vergleiche hierzu den Abschnitt über den Mond.)

Ferner war im Jahre 1884:

für den Merkur die Horizontalparallaxe im Max. = 16″ 1, entsprechend einer Erddistanz von 0,55 der mittleren Sonnenentfernung,
im Min. = 6″ 1 für die Erddistanz 1,45,

für die Venus:

im Max. = 30″ 5 für die Erddistanz 0,29
im Min. = 6″ 5 „ „ „ 1,47

für den Mars:

im Max. = 13″ 2 für die Erddistanz 0,67
im Min. = 3″ 8 „ „ „ 2,36

für Jupiter wenig verschieden von 2″
„ Saturn „ „ „ 1″
„ Uranus „ „ „ 0″ 5
„ Neptun „ „ „ 0″ 3

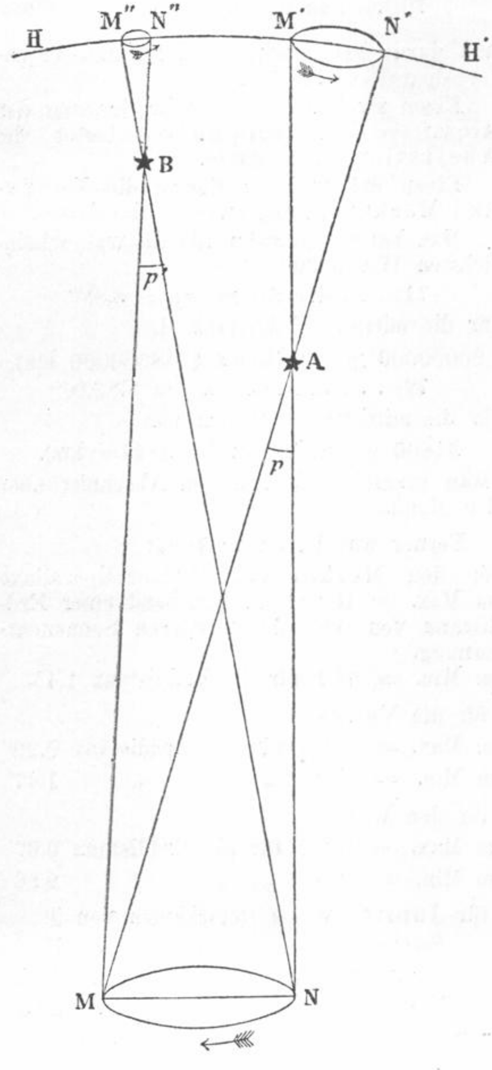
Frage 85. Was versteht man unter der jährlichen Parallaxe?

Antwort. Es sei in der Figur 79 MN der Durchmesser der Erdbahn und es sei uns der Fixstern A näher als der Fixstern B. Beobachtet man, während die Erde sich in N befindet, die beiden Sterne, so erscheint uns A in M' und B in M'' auf der scheinbaren Himmelskugel HH'. Ihr Abstand ist:

$$M'M''$$

Bewegt sich nun die Erde in ihrer Bahn von N gegen M, so werden die Fixsterne A und B entgegengesetzt der Erdbewegung am Himmel eine der Erdbahn ähnliche Bahn

Figur 79.



Erkl. 126 d. Die gegenseitige Verschiebung der Fixsterne liefert zugleich den natürlichsten und überzeugendsten Beweis für die Bewegung der Erde. Daher man auch von Kopernikus so hart einen Beweis eines solchen forderte, was wegen der Ungenauigkeit der damaligen Instrumente nicht möglich war. Als später Tyge Brahe so vollkommene Instrumente gebaut, dass sie 1′ zu messen gestatteten, und dennoch keine Parallaxe fand, so glaubte er sicher von der Unrichtigkeit des Kopernikanischen Systems überzeugt zu haben. Erst den vollendeten Instrumenten der Neuzeit war es vorbehalten, die Genauigkeit der Messung so weit zu treiben, als es dieses Problem erfordert.

beschreiben. A und B werden als ruhend angenommen. Befindet sich die Erde in M, so erscheint uns A in N', B in N'' und der scheinbare Abstand B von A ist offenbar:

$$N'N''$$

Ist nun A uns näher als B, so wird, wie aus der Figur 79 unmittelbar ersichtlich:

$$N'N' > M'M''$$

Diese Thatsache bietet uns also ein Mittel zu entscheiden, ob uns ein Fixstern näher ist, als ein anderer. Man ist nun überein gekommen, die Hälften den Winkel $p = MAN$ und $p = MBN$ die Jahres- oder Fixstern-Parallaxe des betreffenden Sternes zu nennen.

Ist diese bestimmt, so kann man das Dreieck AHN als ein gleichschenkliges ansehen, in welchem $MN =$ Durchmesser der Erdbahn und $p =$ Parallaxe von A bekannt ist und demnach auch die Entfernung MA berechnet werden kann. Man findet (vergl. Erkl. 127a):

$$MA = \frac{MN}{2 \sin \frac{p}{2}}$$

Um die Parallaxe eines Sternes zu finden, beobachtet man den Abstand eines Sternes, etwa A (vergl. Figur 80), von seinen Nachbarn und die Abstände dieser letzteren unter sich. Aendern sich die letzteren nicht, während man aus den gemessenen Abständen Aa, Ab, Ac etc. eine elliptische Bahn abzuleiten im stande ist, und wiederholt sich der Vorgang jedes Jahr in genau derselben Weise, so kann man mit Sicherheit schliessen, dass der Stern A uns viel näher liegt, als die Sterne a, b, c etc., und zwar wird die Hälfte des sphärischen Abstandes seiner äussersten Oerter $M'N'$ gleich seiner Parallaxe sein.

In dieser Weise bestimmte Bessel in den Jahren 1838 bis 1840 die Parallaxe des Doppelsternes 61 Cygni zu:

$$0''5$$

welchen Wert eine Entfernung von:

400000

Erdbahnhalbmessern entspricht. Die beiden Sterne sind eben noch mit dem blossen Auge sichtbar. Es sind also die hellsten Sterne nicht die uns am nächsten stehenden.

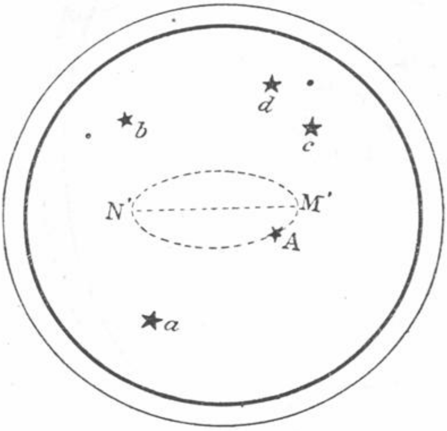
Um sich eine Vorstellung von solchen Weiten zu verschaffen, beachte man, dass das Licht von der Sonne aus auf die Erde in etwas mehr als 8 Minuten gelangt. Um von 61 Cygni zu uns zu gelangen, würde es etwas mehr als 6 Jahre gebrauchen, d. h. so viel: würde der Stern auf einmal sein Licht im Jahre 1890 verlieren, so würden wir ihn

Erkl. 127a. Sei a ein Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und b seine Basis, sowie β der Winkel an der Spitze, so lautet eine trigonometrische Formel:

$$a = \frac{b}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$$

Vergleiche Kleyers Trigonometrie, Seite 34, Aufgabe 64 und Aufgabe 1179, p. 856.

Figur 80.



Erkl. 127b. Bessel, Friedr. Wilhelm, einer der bedeutendsten Astronomen, zuerst Kaufmannslehrling, dann Direktor der Sternwarte zu Königsberg, geb. 1784, 22. Juli zu Minden, gest. 1846, 17. März in Königsberg. Ges. Werke, III Bände. Ausserdem die berühmten „Fundamenta astronomiae ex Bradlei observationibus“, „Tabulae Regiomontanae“ etc.

Erkl. 128. 61 Cygni (61 Schwan) hat eine Rectascension von $21^h\ 2^m$ und eine Deklination $+ 38^0\ 15'$ und ist ein Doppelstern, der Hauptstern ist fünfter, der Nebenstern ist sechster Grösse. Die Figur 81 gibt die Umgebung dieses merkwürdigen Sternes an. Der Stern β ist uns auch fast so nahe, da seine Parallaxe um weniges kleiner als $0''\,5$ ist.

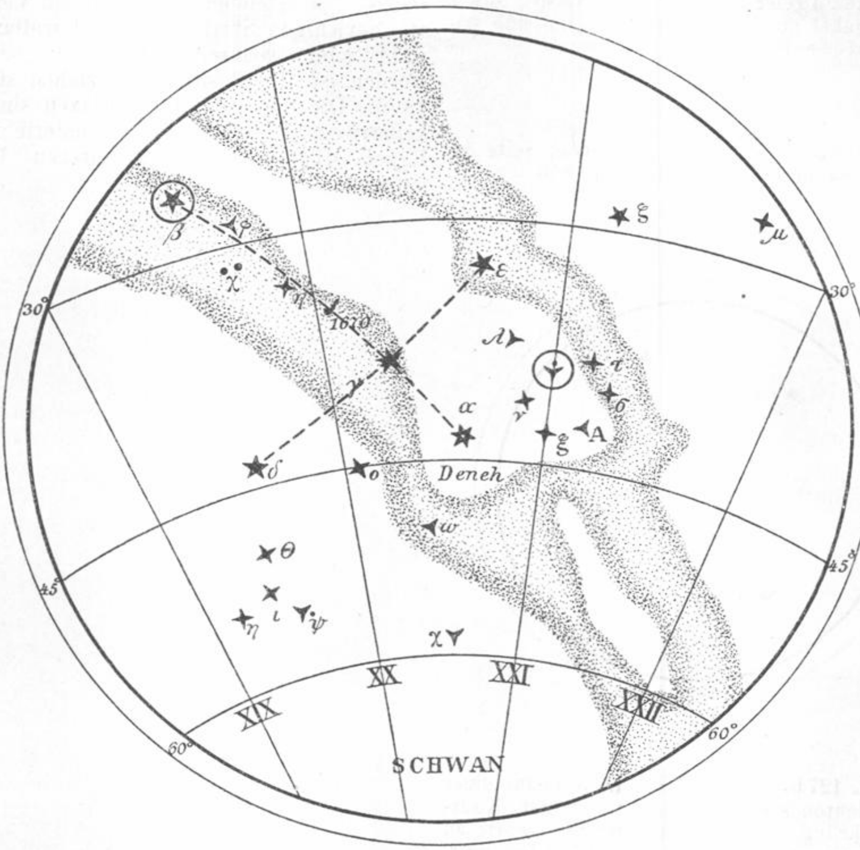
Erkl. 129. Man pflegt die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne mit dem Namen der Erdweite zu belegen, dieses ist also eine Strecke von etwa:

150,000,000 km

Eine 200,000 grössere Strecke oder die Distanz von etwa 31 Billionen Kilometer nennt man eine Sternweite. Es ist dies jene Entfernung, die einer Parallaxe von 1 Sekunde entspricht.

noch bis zum Jahre 1896 in vollem Glanze sehen. Nachstehend geben wir ein Verzeichnis derjenigen Sterne, deren Parallaxe mit mehr oder weniger Genauigkeit bestimmt worden ist, die Positionen beziehen sich auf 1890. Die mitgeteilten Parallaxen sind aber keineswegs absolut sicher, sondern in der Regel Mittelwerte aus mehreren Bestimmungen.

Figur 81.



Tafel XV.

Tafel der Sternparallaxen.

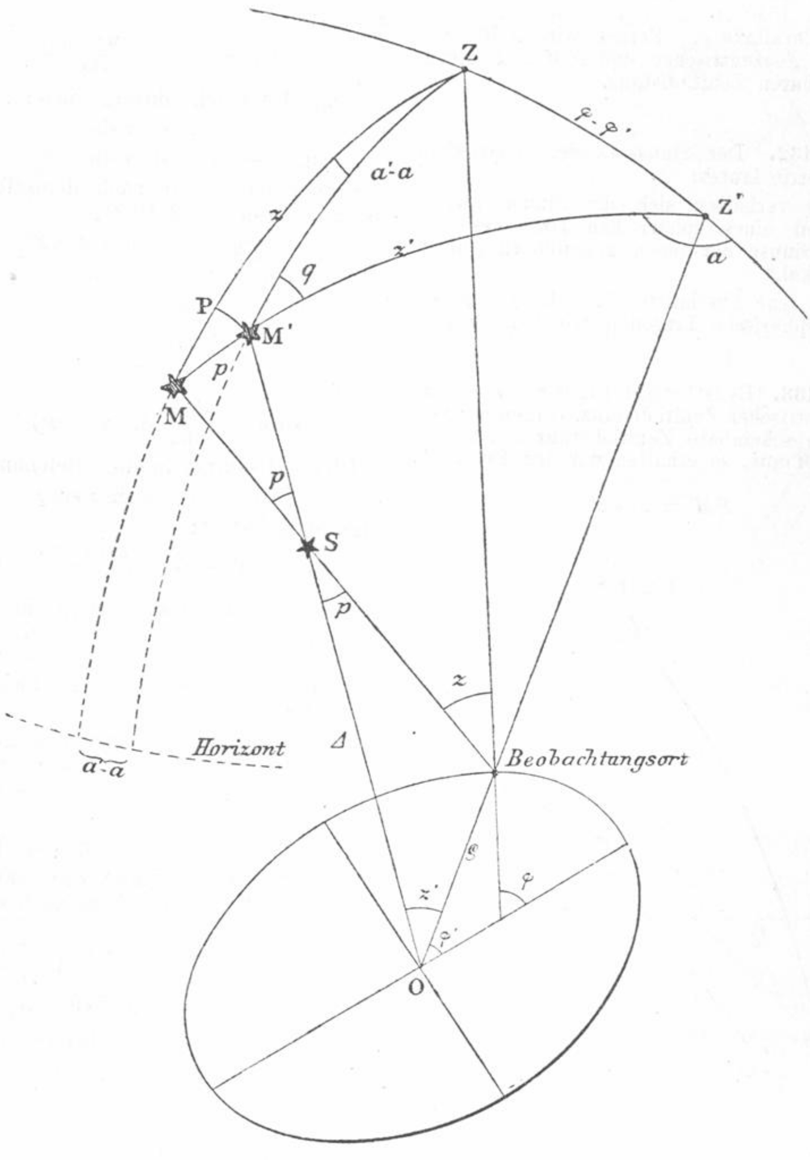
Stern	Grösse	α	δ	Parallaxe	Berechner
61 Schwan . .	5,6	21h 2,4m	+ 38° 15′	0,51″	O. Struve, Auwers, Ball
α Centauri . .	1	14 32,8	— 60 25	0,50	Elkin
21185 Lalande	7,8	10 57,9	+ 36 38	0,50	Winnecke
β Schwan . .	3	19 26,7	+ 27 45	0,48	Ball
μ Casiopeiae .	5,6	1 1,6	+ 54 26	0,34	O. Struve
Capella . . .	1	5 9,3	+ 45 54	0,31	„
Procyon . . .	1	7 34,1	+ 5 29	0,24	Auwers
Wega . . .	1	18 33,6	+ 38 41	0,20	W. u. O. Struve, Brünnow
Sirius . . .	1	6 40,7	— 16 35	0,19	Henderson, Gyldèn
Arctur . . .	1	14 11,1	+ 19 42	0,13	Peters

Erkl. 130. 21185 Lalande heisst der Stern Nr. 21185 in dem von Lalande herausgegebenen Sternverzeichnis.

Frage 86. Wie berechnet man die Korrektion wegen Parallaxe in Höhe und Azimut?

Antwort. Es sei (vergl. Figur 82) Z der scheinbare, Z' der geozentrische Zenith, M

Figur 82.



Erkl. 131. In der Figur 82 ist O der Mittelpunkt des Erdellipsoids. Verbindet man diesen mit dem Beobachtungsorte und verlängert die Verbindende, bis sie die scheinbare Himmelskugel trifft, so erhält man Z', den geozentrischen Zenith. Errichtet man im Beobachtungsorte eine Normale, so trifft ihre Verlängerung

der scheinbare und M' der wahre Ort eines Gestirns S, so wird $Z'M'$ die geozentrische und ZM die scheinbare Zenithdistanz.

Der Bogen MM' ist der parallaktische Winkel, für den wir:

$$\sin p = \sin \pi \sin z$$

die scheinbare Himmelskugel im scheinbaren Zenith. Der Bogen ZZ' ist offenbar gleich der Differenz aus der geozentrischen und geographischen Breite, also gleich $\varphi - \varphi'$.

Sei nun in S ein Gestirn, so wird dasselbe vom Erdzentrum in M' und vom Beobachtungsorte in M auf der Himmelskugel erscheinen. Der Bogen MM' ist nach der früheren Definition die Parallaxe p. Ferner wird $ZM' = z'$ gleich der geozentrischen und $ZM = z$ gleich der scheinbaren Zenithdistanz.

Erkl. 132. Der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie lautet:

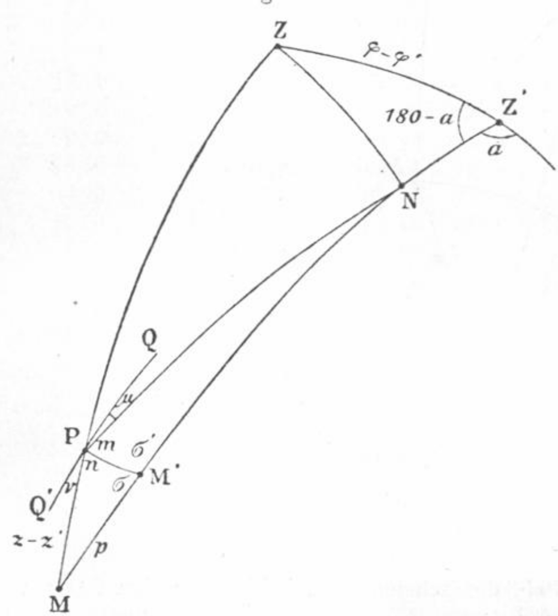
> „Es verhalten sich die Sinuse zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes wie die Sinuse der ihnen gegenüberliegenden Winkel.“

(Vergl. jene Abschnitte dieser Encyklopädie, die über sphärische Trigonometrie handeln.)

Erkl. 133. Es ist (vergl. Figur 83) $ZM = z'$ der geozentrischen Zenithdistanz, tragen wir von Z aus die scheinbare Zenithdistanz z auf den Bogen ZM auf, so erhalten wir den Punkt P, so dass:

$$PM = z - z'$$

Figur 83.



gefunden haben. Bezeichnen wir noch den Winkel $ZM'Z'$ mit q, so folgt nach dem Sinussatze der sphärischen Trigonometrie aus dem Dreieck PZM':

$$\frac{\sin z}{\sin(180 - q)} = \frac{\sin p}{\sin(a' - a)}$$

so dass:

$$\sin(a - a) = \frac{\sin p \sin q}{\sin z}$$

oder mit Rücksicht darauf, dass:

$$\sin p = \sin \pi \sin z$$

$$\sin(a' - a) = \sin \pi \sin q$$

Ferner haben wir nach demselben Satze aus dem Dreiecke $ZM'Z'$:

$$\frac{\sin q}{\sin(\varphi - \varphi')} = \frac{\sin M'ZZ'}{\sin z'}$$

oder wenn wir genähert:

$$M'ZZ' = a$$

$$z' = z$$

setzen:

$$\sin q = \frac{\sin a}{\sin z} \sin(\varphi - \varphi')$$

Dieses Resultat in die Gleichung:

$$\sin(a' - a) = \sin \pi \sin q$$

eingesetzt, liefert:

$$73) \;\ldots\; \sin(a' - a) = \frac{\sin \pi \sin a}{\sin z} \sin(\varphi - \varphi')$$

Da wir nun (vergleiche Seite 83) $\varphi - \varphi'$ berechnen können, so liefert diese Formel $a' - a$ oder die Korrektion wegen Parallaxe in Azimut.

Um die Korrektion wegen Parallaxen in den Zenithdistanzen und damit zugleich wegen der Gleichung:

$$z = 90^0 - h$$

für die Höhen zu finden, betrachten wir (vergl. Figur 83) das Dreieck MPM', aus welchem nach dem Sinussatze:

$$\frac{\sin(z - z')}{\sin p} = \frac{\sin \sigma}{\sin n}$$

folgt. Ziehen wir $QQ' \parallel MZ'$, so wird:

$$\frac{\sin \sigma}{\sin n} = \frac{\sin(m + \mu)}{\sin n}$$

Ferner folgt aus dem Dreiecke PNM':

$$\frac{\sin[z - (\varphi - \varphi)\cos a]}{\sin z} = \frac{\sin m}{\sin \sigma'}$$

oder da:

$$\sigma' = n + \nu$$

auch:

$$\frac{\sin[z - (\varphi - \varphi')\cos a]}{\sin z} = \frac{\sin m}{\sin(n + \nu)}$$

Erkl. 134 a. Es ist (vergl. Figur 83) das Dreieck ZNZ ein sehr kleines, deshalb kann man es als ein ebenes betrachten.

Sodann folgt:

$$NZ' = ZZ' \cos(180 - a) = \cos a$$

oder da:

$$zz' = \varphi - \varphi'$$

auch:

$$NZ' = (\varphi - \varphi') \cos a$$

Da nun $Z'M' = z$, so wird:

$$NM' = M'Z' - NZ = z - (\varphi - \varphi') \cos a$$

Ferner kann man, da der Winkel bei M sehr klein, $ZP = PN$ setzen, also:

$$PN = z$$

Da nun ν und μ sehr kleine Winkel sind, so kann man sich erlauben:

$$\frac{\sin(m+\mu)}{\sin n} = \frac{\sin m}{\sin(n+\nu)}$$

zu setzen, woraus:

$$\sin(z - z') = \frac{\sin[z - (\varphi - \varphi') \cos a]}{\sin z} \sin p$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\sin p = \sin \pi \sin z$$

auch:

74) . . $\sin(z - z') = \sin\pi \sin[z - (\varphi - \varphi') \cos a]$

folgt, welches die gewöhnliche Formel für die Korrektion wegen Parallaxe in der Zenithdistanz ist.

Erkl. 134 b. Für nachstehende Tafel wurde:

$$(\varphi - \varphi) \cos a = 0$$

gesetzt, so dass:

$$z - z' = \pi \sin z$$

wird. Diese Formel ist für die Praxis genügend.

Tafel XVI.

Höhenparallaxe des Mondes weniger der mittleren Refraktion.

	53′	54′	55′	56′	57′	58′	59′	60′	61′	Wert von 1″ in der Parallaxe
5	43′ 4″	44′ 4″	45′ 3″	46′ 3″	47′ 3″	48′ 3″	49′ 2″	50′ 2″	51′ 2″	1″
10	46 57	47 56	48 45	49 54	50 54	51 53	52 52	53 51	54 50	1″
15	47 41	48 39	49 37	50 35	51 33	52 31	53 29	54 27	55 25	0″ 97
20	47 12	48 9	49 5	50 1	50 58	51 54	52 51	53 47	54 43	0″ 93
25	46 0	46 54	47 49	48 93	49 38	50 32	51 26	52 21	53 15	0″ 90
30	44 15	45 7	45 59	46 51	47 43	48 35	49 27	50 19	51 11	0″ 87
35	42 4	42 53	43 42	44 31	45 20	46 9	46 58	47 48	48 37	0″ 83
40	39 28	40 14	41 0	41 46	42 32	43 18	44 4	44 50	45 36	0″ 77
45	36 32	37 14	37 57	38 39	39 21	40 4	40 46	41 29	42 11	0″ 70
50	33 16	33 55	34 33	35 12	35 51	36 29	37 8	37 46	38 25	0″ 63
55	29 44	30 19	30 53	31 27	32 2	32 36	33 11	33 45	34 20	0″ 57
60	25 57	26 27	26 57	27 27	27 57	28 27	28 57	29 27	29 57	0″ 50
65	21 58	22 23	22 48	23 14	23 39	24 4	24 30	24 55	25 20	0″ 42
70	17 47	18 8	18 28	18 49	19 9	19 30	19 50	20 11	20 31	0″ 33
75	13 28	13 43	13 59	14 14	14 30	14 45	15 1	15 16	15 32	0″ 25
80	9 2	9 13	9 23	9 33	9 44	9 54	10 5	10 15	10 25	0″ 17
85	4 32	4 37	4 43	4 48	4 53	9 58	5 4	5 9	5 14	0″ 08
90	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0″ 00

Erkl. 134 c. Beobachtete Mondhöhe weniger dem Argument dieser Tafel gibt die geozentrische Mondhöhe. Die Argumente unter 5⁰ ändern sich zu stark, so dass sie jedesmal berechnet werden müssen. Die Horizontal-Parallaxe findet man für jeden Tag in den astronomischen Jahrbüchern angegeben.

Tafel XVII.

Wert für 1 Minute in der Höhenänderung.

Von 5^0—10^0	$+1''18$	Von 35^0—40^0	$-0''52$	Von 65^0—70^0	$-0''84$
„ 10^0—15^0	$-0''15$	„ 40^0—45^0	$-0''57$	„ 70^0—75^0	$-0''86$
„ 15^0—20^0	$-0''10$	„ 45^0—50^0	$-0''65$	„ 75^0—80^0	$-0''88$
„ 20^0—25^0	$-0''24$	„ 50^0—55^0	$-0''71$	„ 80^0—85^0	$-0''90$
„ 25^0—30^0	$-0''35$	„ 55^0—60^0	$-0''76$	„ 85^0—90^0	$-0''91$
„ 35^0—40^0	$-0''44$	„ 60^0—65^0	$-0''80$		

Tafel XVIII.

Höhenparallaxen der Sonne und Planeten (Kometen).

Höhe	Sonne	Horizontal-Parallaxe					
		5″	10″	15″	20″	25″	30″
0^0	9″	5″	10″	15″	20″	25″	30″
10^0	8″	5″	10″	15″	20″	25″	30″
20^0	8″	5″	9″	14″	19″	24″	28″
30^0	7″	4″	9″	13″	17″	22″	26″
40^0	6″	4″	7″	12″	15″	19″	23″
50^0	5″	3″	6″	10″	12″	16″	19″
60^0	4″	3″	5″	8″	10″	13″	15″
70^0	3″	2″	3″	5″	7″	9″	10″
80^0	1″	1″	1″	2″	4″	4″	5″
90^0	0″	0″	0″	0″	0″	0″	0″

Erkl. 134 d. Um die geozentrische wahre Höhe zu erhalten, hat man von der beobachteten Höhe die Korrektion wegen Refraktion zu subtrahieren und zu ihr die Höhenparallaxe zu addieren.

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Es ist für die scheinbare Mondhöhe $= 27^0\ 56'$ und die Horizontalparallaxe $57'\ 28''$ die wahre geozentrische Höhe zu finden.

Auflösung.

1) Durch Rechnung.

Vernachlässigen wir:

$$(\varphi - \varphi') \cos a$$

in der Formel:

$$\sin (z - z') = \sin \pi \sin [z - (\varphi - \varphi') \cos a]$$

so folgt:

$$\sin (z - z') = \sin \pi \cdot \sin z$$

oder wegen der kleinen Winkel:

$$(z - z')'' = \pi'' \cdot \sin z$$

Hilfsrechnung 1.

$57' 28'' = 3448''$

$$\begin{array}{rl} \log 3448 = & 3 \cdot 53757 \\ \log \cos 27^0 56' = & \underline{9 \cdot 64620} \\ & 3 \cdot 48377 \end{array}$$

$\text{numlog} = 3046'' = 50' 46''$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rl} \log 57'' 6 = & 1 \cdot 76042 \\ \log \cos h = & \underline{0 \cdot 27554} \\ & 2 \cdot 03616 \end{array}$$

$\text{numlog} = 109'' = 1' 49''$

Hilfsrechnung 3.

$$\begin{array}{r} \underline{0'' 93 \cdot 28''} \\ 18\,6 \\ \underline{7\,44} \\ 26{,}04 = 26'' \end{array}$$

Hilfsrechnung 4.

$$\begin{array}{r} \underline{176 \cdot 0'' 35} \\ 528 \\ \underline{880} \\ 6160 = 62'' \end{array}$$

Es ist:

$$+26'' - 62'' = -\ 36''$$

damit:

$$49' 38'' - 36'' = \quad 49' 2''$$

Beobachtete Höhe: $= \underline{27\ \ 56'}$

$$28^0 45' 2''$$

Da nun:

$$z = 90 - h$$
$$z' = 90 - h'$$

so wird:

$$(h' - h)'' = \pi'' \cos h$$

also:

$$(h' - h)'' = 57' 28'' \cdot \cos 27^0 56'$$

Durch nebenstehende Hilfsrechnung findet man:

$$h' - h = 50' 46''$$

Diese Grösse haben wir zu der beobachteten Höhe hinzuzufügen und hievon die mittlere Refraktion (vergl. Seite 12) für $27^0 56'$, d. i.:

$$1' 49''$$

zu subtrahieren, wodurch wir:

$$28^0 44' 59''$$

als die wahre geozentrische Höhe erhalten.

2) Mit Hilfe der Tafeln XVI und XVII.

Aus der Tafel XVI entnimmt man für:

$$h = 25^0, \text{ Parallaxe} = 57'$$

das Argument:

$$49' 38''$$

Der Wert $1''$ in der Parallaxe ist:

$$0'' 93$$

also wird die hinzuzufügende Korrektion auf die Parallaxe $57' 28''$ gleich:

$$+26''$$

Aus der Tafel XVIII ergibt sich für 1 Minute der Höhenänderung zwischen 25^0 und 30^0 der Betrag:

$$-0'' 35$$

Da nun zwischen $27^0 56'$ und $25^0 2^0 56' = 176'$ liegen, so haben wir:

$$62'$$

abzuziehen, so dass wir endlich als endgültige Korrektion wegen Parallaxe:

$$+49' 22''$$

erhalten. Diese ist zu der beobachteten Höhe hinzuzufügen, so dass wir:

$$28^0 45' 2'$$

erhalten. Der geringe Unterschied von $3''$ datiert daher, dass wir interpoliert haben.

Aufgabe 58. Man hat bestimmt die Parallaxe des Merkurs in einer Erddistanz von 0,55 der mittleren Sonnenentfernung von der Erde zu $16'' 1$, wie gross ergibt sich hieraus die Sonnenparallaxe?

Antwort. Da offenbar die Sonnenparallaxe identisch ist mit derjenigen des Merkurs in der Entfernung 1, so wird der Wert der Sonnenparallaxe offenbar gleich:

$$0{,}55 \cdot 16'' 1 = 8'' 855$$

Denn sei $\pi_{\odot}$ die Horizontal-Aequatoreal-parallaxe der Sonne, so wird:

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{a}{\varDelta}$$

wobei a der Halbmesser des Aequators und $\varDelta$ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bezeichnet. Für irgend einen andern Planeten wird:

$$\sin \pi' = \frac{a}{D}$$

wobei D die Entfernung von der Erde.

Daraus folgt:

$$a = D \sin \pi'$$

Dieses in die obere Gleichung eingesetzt, liefert:

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{D \sin \pi'}{\varDelta}$$

Setzen wir nun $\varDelta = 1$, so muss D durch $\varDelta$ ausgedrückt werden und beachten, dass π' und $\pi_{\odot}$ sehr kleine Winkel sind, so folgt:

$$75) \quad . \; . \; . \quad \pi_{\odot} = D \cdot \pi'$$

Anmerkung 16. Es liefert also eine jede Parallaxenbestimmung, wenn die Entfernung des Sternes von der Erde bekannt ist, zugleich ein Mittel zur Bestimmung der mittleren Erddistanz von der Sonne.

c) Ueber die Aberration des Lichtes.

Frage 87. Welche war die Veranlassung zur Entdeckung der Aberration der Fixsterne und worin besteht diese?

Erkl. 135. James Bradley, geb. 1692, gest. 1762. 1721 Professor der Astronomie an der Universität zu Oxford, 1742 Astronom an der Sternwarte zu Greenwich. Er ist zugleich der Entdecker der schon früher (vergl. Seite 95) besprochenen Nutation.

Bradley hatte sich anfangs der Theologie zugewandt und wurde Pfarrer, ging jedoch später zur Astronomie über. Das Instrument, mit welchem er die Entdeckungen machte, wird noch aufbewahrt.

Erkl. 136. Aberration stammt vom lat. aberrare, abirren. Ausser der hier behandelten jährlichen Aberration, welche durch die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne erzeugt wird und den ersten direkten Beweis für diese lieferte, gibt es noch eine tägliche, die durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse erzeugt wird. Deren Betrag ist aber verschwindend klein. Ihre Konstante beträgt 0″ 311.

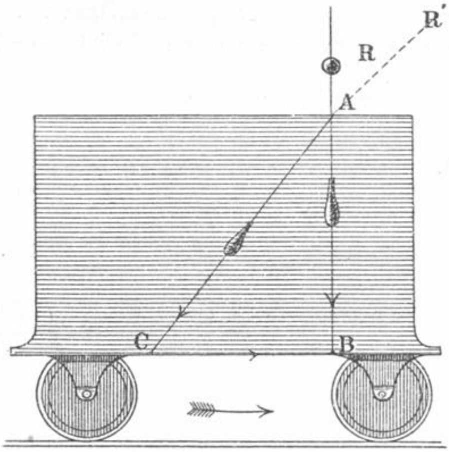
Antwort. Unter die eifrigen Nachspürer der Parallaxe gehört ohne Zweifel Bradley. Dieser begann am Ende des Jahres 1725 in Kew den Stern γ im Kopfe des Drachen zu beobachten und setze diese Beobachtungen 18 Jahre fort. Diese ergaben eine höchst merkwürdige Erscheinung. Er fand, dass die Länge und Breite dieses Fixsterns eine Periode aufweisst, die genau die Länge eines Jahres hat. Man möchte also auf den ersten Blick hierin eine Parallaxe vermuten. Aber er fand, dass diese Erscheinung allen Sternen gemeinsam ist, jedoch so, dass die Längenänderung bei allen Sternen gleich und zwar nahe 41″ betrug, die Breitenänderung dagegen immer kleiner und kleiner wurde, je näher der Stern der Ekliptik stand. Bradley nannte diese Aenderung die Aberration. Bei der Aberration haben also alle Ellipsen, die die Sterne beschreiben, gleich grosse Achsen, deren halbe Länge nach Struve:

20″ 445

beträgt; man nennt diese Grösse die Konstante der Aberration.

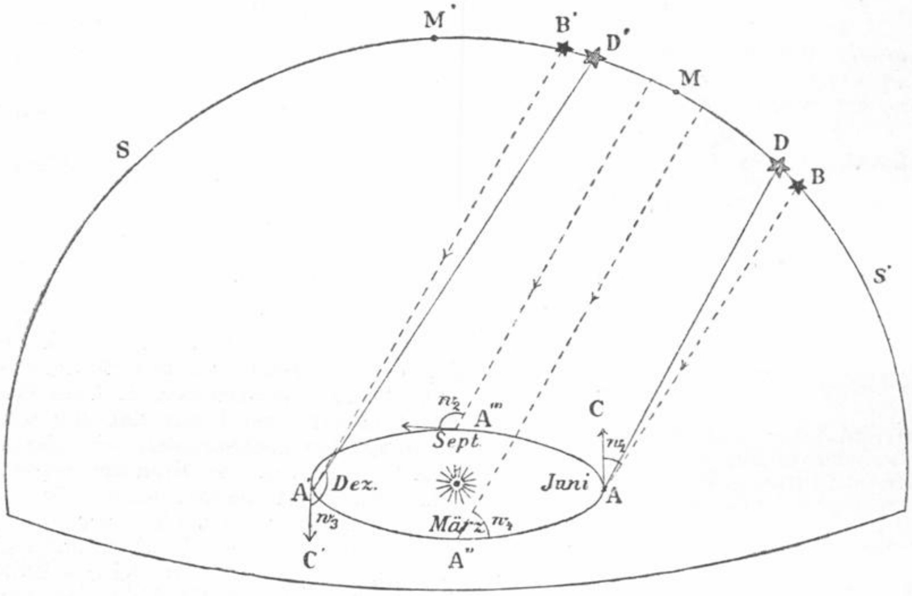
Frage 88. Wie ist die Aberration zu erklären?

Figur 84.



Antwort. Es sei R (vergl. Fig. 84) ein Regentropfen, der senkrecht herabfällt. Im Punkte A berührt derselbe die Seite eines Wagens, so wird er, wenn der Wagen ruhig steht, nach einiger Zeit mit dem unter A senkrecht liegenden Punkte B des Wagens in Berührung kommen. Bewegt sich aber der Wagen in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung, so wird nach dieser Zeit die Stelle des Punktes B ein Wagenpunkt C einnehmen und dieser daher mit dem Tropfen in Berührung kommen. Die Bahn, längs welcher der Tropfen die Wagenwand benetzt, ist jetzt AC. Es scheint, als ob der Regentropfen aus der Richtung $R'AC$ käme. Setzen wir an die Stelle des fallenden Regentropfens den Lichtstrahl und an die Stelle des Wagens unsere Erde, so werden wir begreifen, dass, wenn der Weg den Lichtstrahl in einer gewissen Zeit zurücklegt, endlich gross ist gegen den, den die Erde in dieser Zeit durchläuft, dass uns dann der Lichtstrahl wie aus einer andern Richtung kommend erscheinen muss.

Figur 85.

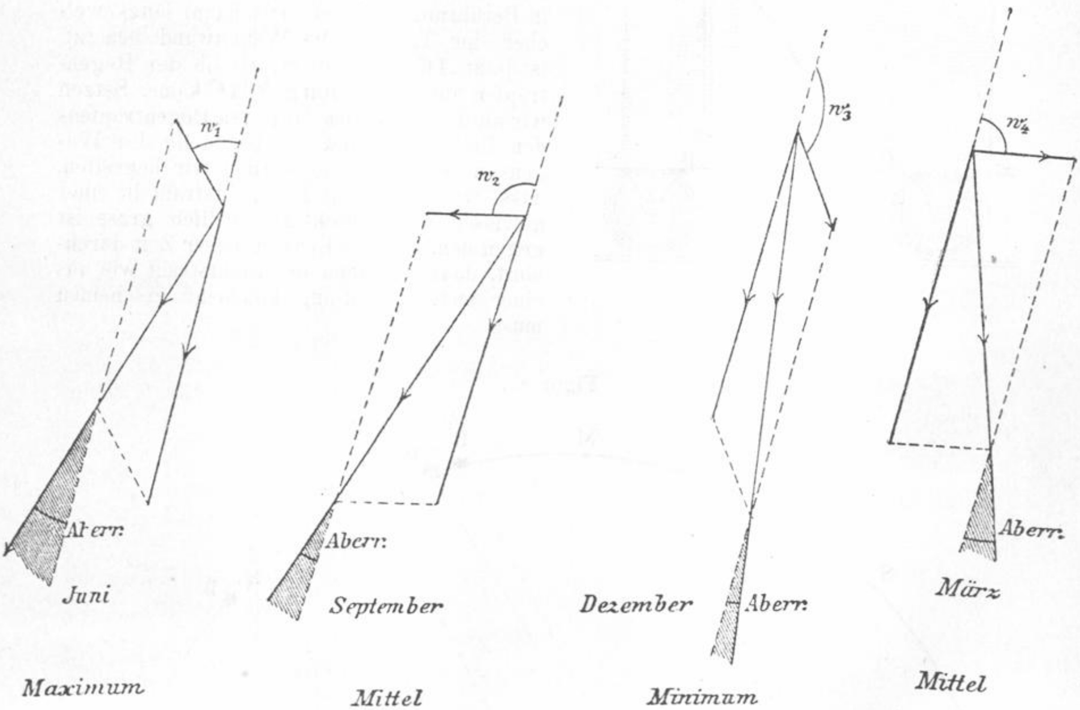


Erkl. 137. Um diese Richtung zu finden, haben wir die beiden Strecken, welche der Länge und Richtung nach die Geschwindigkeiten des Lichtes und der Erde darstellen, aneinanderzureihen und sie zu einem Parallelogramm zu ergänzen. Die von den Anfangs-

Stellt nun (vergl. Fig. 85) A den Erdort im Juni, CA die Richtung der Erdgeschwindigkeit vor, so wird nach obiger Erkl. 137 der von dem Sterne B kommende Lichtstrahl BA scheinbar gegen AC abgelenkt, so dass uns punkten gezogene Diagonale gibt dann die gesuchte Richtung. Diese Konstruktion zeigt, dass, um bildlich zu sprechen, der Lichtstrahl von seinem Wege gegen die Richtung der Erdgeschwindigkeit abgelenkt wird, so dass sich der Winkel zwischen beiden verkleinert.

Erkl. 138. In der Figur 85 ist der Himmelsbogen SS' unendlich weit entfernt zu denken, so dass B mit B' und M mit M' zusammenfallen. der Stern nicht in B, sondern in D erscheint. Der scheinbare Ort ist also einem Punkte M näher. Ebenso wird in A' (d. i. im Dezember) der von demselben Stern (vergl. Erkl. 138) B' kommende Strahl $B'A'$ gegen die Richtung der Erdgeschwindigkeit AC' abgelenkt, so dass uns der Stern statt in B' in D' erscheint, also jetzt entfernter von dem früheren Punkte M'.

Figur 86.



Führt man für die vier Erdorte A', A'', A''' die Konstruktion wirklich durch (vergl. Figur 86), so sieht man, dass für A, das ist Juni, der Aberrationswinkel (d. h. der Winkel zwischen der scheinbaren und der wahren Richtung der Lichtstrahlen) ein Maximum, in A'' und A''', d. i. im März und September, einen Mittelwert besitzt, genau wie es die Beobachtungen zeigen. Da wir auch die Aberrationskonstante, wie wir sogleich sehen werden, aus der bekannten Lichtgeschwindigkeit genau so wie durch die Beobachtungen erhalten und da ferner diese Theorie alle Erscheinungen erklärt, so haben wir sie als eine richtige zu bezeichnen.

Frage 89. Wie wird die Korrektion wegen Aberration in Länge und Breite berechnet?

Figur 87.

Antwort. Um zu diesen Korrektionen zu gelangen, stellen wir folgende Ueberlegung an. Die Erde braucht, um 360°, d. i. 360 · 60 · 60 Sekunden zurückzulegen, 365,25 Tage, d. h. ein Jahr oder:

$$365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ Zeitsekunden}$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Erde ist also:

$$\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 0''\,041$$

Sei nun $\varDelta$ die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde, also:

$$\varDelta = 148{,}500{,}000 \text{ km}$$

so wird der Erdweg per Sekunde g (vergl. Figur 87) gleich:

$$g = \varDelta \cdot \operatorname{tg} 0''\,041$$

wofür wir:

$$g = \varDelta \cdot 0''\,041 \operatorname{tg} 1''$$

setzen können.

Die Lichtgeschwindigkeit G wurde zu:

$$300{,}000 \text{ km}$$

gefunden. Dieses gibt nach der Konstruktion des Parallelogramms, wenn sich die Erde senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles bewegt:

$$\operatorname{tg} \text{Aberrationskonstante} = \frac{g}{G}$$

also da:

$$\frac{g}{G} = \frac{\varDelta \cdot 0''\,041 \operatorname{tg} 1''}{300 \cdot 000}$$

auch, wenn wir bei der Aberrationskonstante:

tg Aberr. durch Aberr. tg 1''

ersetzen:

$$\text{Aberrationskonstante } \operatorname{tg} 1'' = \frac{\varDelta \cdot 0''\,041}{300 \cdot 000} \operatorname{tg} 1''$$

also:

$$\text{Aberrationskonstante} = \frac{148{,}500{,}000 \cdot 0''\,041}{300 \cdot 000}$$

oder:

$$= \frac{41 \cdot 1{,}485}{3} = 20''\,295$$

Sei nun w derjenige Winkel, den die Richtung der Erdbwegung mit der Richtung des Lichtstrahles macht, so folgt aus dem Dreiecke ABC (Figur 88):

$$\frac{\sin A}{\sin (180^0 - w - A)} = \frac{g}{G}$$

also:

$$\sin A = \frac{g}{G} \sin w$$

oder da A sehr klein ist:

$$A \sin 1'' = \frac{g}{G} \sin w$$

Erkl. 139. Aus der nachfolgend entwickelten Formel folgt, wenn $w = 90^0$, also $\sin w = 1$, einfach:

$$A = 20''\,445$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{l} 1,485 \cdot 41 \\ \hline 59\ 40 \\ \hline 60 \cdot 885 : 3 = 20''\,295 \end{array}$$

Erkl. 140. Ein planimetrischer Satz lautet:

„Die Summe dreier Winkel im Dreiecke ist gleich zwei Rechten oder 180°."

Daher wird der Winkel bei B (vgl. Fig. 88):

$$= 180 - (w + A)$$

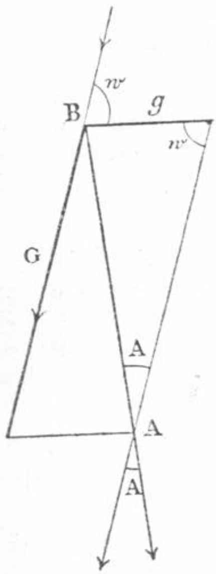
Ferner ist nach den Lehren der Goniometrie:

$$\sin (180 - m) = \sin m$$

Ein trigonometrischer Satz lautet:

„In einem Dreiecke verhalten sich zwei Seiten wie die Sinuse der ihnen gegenüberliegenden Winkel."

Figur 88.



Erkl. 141. In der Figur 89 ist E der Ort der Erde, S jener der Sonne. Die Richtungen SV und EV sind nach dem Frühlingspunkte gerichtet. EG stellt die Geschwindigkeit der Erde per Sekunde der Länge und Richtung nach dar, ihre Verlängerung trifft die scheinbare Himmelskugel in D. In C befindet sich ein Stern, dessen Breite β durch den Winkel CEB und dessen Länge durch den Winkel $VEB = \lambda$ gemessen wird. L, d. i. der Winkel VES, stellt die Sonnenlänge dar. Da ferner $ES \perp$ auf EG steht, weil die Erdbahn wegen der kleinen Exzentrizität als ein Kreis gedacht werden kann, so wird der Winkel:

$$BED = 90^0 - SEB$$

oder da:

$$\sphericalangle SEB = L - \lambda$$

auch:

$$BED = 90^0 (L - \lambda)$$

der Winkel $CEG = w$, d. h. demjenigen Winkel, den die entgegengesetzte Richtung des Lichtstrahles mit der Richtung der Erdgeschwindigkeit einschliesst.

So entsteht das rechtwinklige sphärische Dreieck CBD mit dem rechten Winkel bei B.

Beachtet man, dass ferner:

$$\sin(90 - \gamma) = \cos\gamma$$
$$\cos(90 - \gamma) = -\sin\gamma$$

Ferner den trigonometrischen Satz:

„In einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Kosinus eines spitzen Winkels gleich dem Kosinus der ihm gegenüberliegenden Seite, multipliziert mit dem Sinus des anderen spitzen Winkels.“

Da nun:

$$\sin 1'' = \operatorname{tg} 1''$$

so folgt noch:

$$A = \frac{g}{G \operatorname{tg} 1''} \sin w$$

Nun ist aber:

$$\frac{g}{G \operatorname{tg} 1''} = 20'' 445$$

gleich der Aberrationskonstante, demnach wird:

$$76) \; \ldots \; A = 20'' 445 \sin w$$

Es ist dieses die Abweichung des wahren Ortes von dem beobachteten.

Um nun den Betrag der Aenderung in der Länge selbst zu erhalten, denken wir uns die Länge A von C auf CD (in der Figur 89) bis E aufgetragen. So wird nahezu für die Breiten:

$$\beta - \beta' = A \cos m$$

wobei β die wahre und β' die scheinbare Breite ist. Aus dem sphärischen Dreieck CBD ergibt sich mittels des Sinussatzes:

$$\frac{\sin n}{\sin 90^0} = \frac{\sin\beta}{\sin w}$$

ferner:

$$\cos m = \sin(L - \lambda) \sin n$$

also:

$$\cos m = \frac{\sin(L - \lambda)\sin\beta}{\sin w}$$

Da nun:

$$A = 20'' 445 \sin w$$

so folgt:

$$77) \; \ldots \; \beta - \beta' = 20'' 445 \sin(L - \lambda) \sin\beta$$

Ferner folgt aus dem Dreiecke PCE vermittels desselben Satzes:

$$\frac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin A} = \frac{\sin(180 - m)}{\sin(90 - \beta)}$$

oder:

$$\lambda - \lambda' = \frac{A \sin m}{\cos\beta}$$

Da nun aus dem Dreiecke CBD:

$$\frac{\sin m}{\sin 90^0} = \frac{\cos(L - \lambda)}{\sin w}$$

folgt, so wird:

$$\sin(\lambda - \lambda') = \frac{A \cos(L - \lambda)}{\sin w \cos\beta}$$

oder wegen:

$$A = 21'' 445$$

auch:

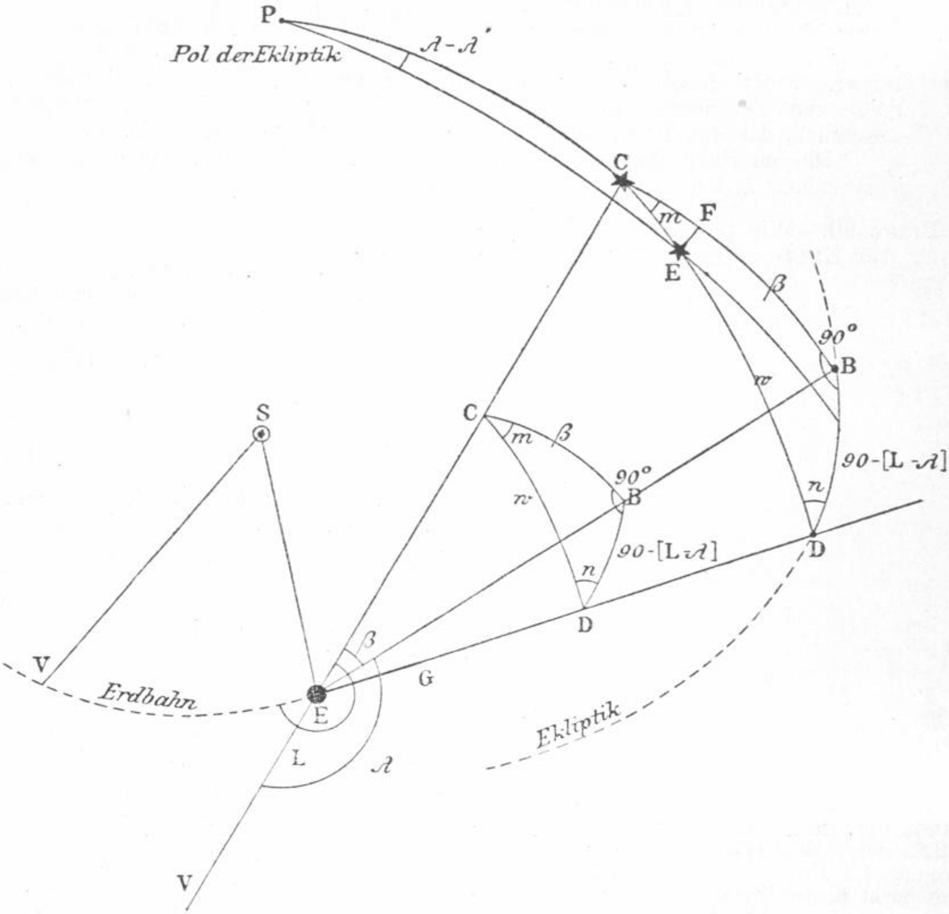
$$78) \; \ldots \; \lambda - \lambda' = \frac{20'' 445 \cos(L - \lambda)}{\cos\beta}$$

Aus den beiden letzten Formeln ergibt sich:

$$\cos(L - \lambda) = \frac{\lambda - \lambda'}{20'' 445}$$

$$\sin(L - \lambda) = \frac{\beta - \beta'}{20'' 445 \sin\beta}$$

Figur 89.



Erkl. 142. Die Gleichung der Ellipse mit der halben grossen Achse a und der halben kleinen Achse b lautet in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

also, da:

$$\sin(L-\lambda)^2 + \cos(L-\lambda)^2 = 1$$

auch:

$$79) \ldots \left(\frac{\lambda-\lambda'}{20''\,445}\right)^2 + \left(\frac{\beta-\beta'}{20''\,445 \sin\beta}\right)^2 = 1$$

Hieraus entnehmen wir, dass die Sterne am Himmel Ellipsen beschreiben, deren grosse Achse $= 2 \cdot 20''\,445$ ist und parallel der Ekliptik liegt. Die kleine Achse ist:

$$2 \cdot 20''\,445 \sin\beta$$

also 0 im Aequator, gleich der grossen Achse am Nordpol.

H. Ueber die Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper.

Anmerkung 17. Die Auseinandersetzungen der vorhergehenden Abschnitte gestatten uns eine wichtige Anwendung, nämlich die Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper. Unter diesen ist es vorzüglich die Sonne und der Mond, die uns in der Folge zunächst beschäftigen werden und es ist für die weiteren Untersuchungen wesentlich, dasjenige, was dieser Abschnitt behandelt, vorauszuschicken.

Die am Ende dieses Abschnittes folgenden Tafeln werden in der Folge ihre Verwendung finden.

Frage 90. Wie teilt man die Bestimmung der Entfernungen der Himmelskörper ein?

Antwort. Die Bestimmungen der Entfernungen der Himmelskörper kann man in zwei Gruppen einteilen. Absolute und relative. Absolute sind solche, welche die Entfernungen direkt durch ein Mass gemessen liefern, also beispielsweise, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückt in Erdhalbmessern oder in geographischen Meilen oder endlich in Kilometern. Relative sind dagegen solche, die uns nur die Verhältnisse zweier oder mehrerer solcher Entfernungen liefern, so z. B. das Verhältnis der Sonnen- und Mondentfernung, oder das Verhältnis der Entfernungen zweier Planeten von der Sonne.

Frage 91. Welche sind die wichtigsten relativen Bestimmungsarten der Entfernungen?

Erkl. 143. Aristarch aus Samos lebte um 280 v. Chr. in Alexandrien und war ein Anhänger der pythagoräischen Lehre von der Bewegung der Erde. Sein fehlerhaftes Resultat liegt nicht in der Theorie, sondern in der ungenügenden Beobachtung.

Man findet seine Methode in dem Werke: Aristarchus Samius de magnitudinibus et distantiis Solis et Lunae. 4°. Pisawii 1572, prop. VII. Den Wert 89° 45′ gibt Lalande in seiner Astronomie.

Erkl. 144. Ist α (in der Fig. 90) der Winkel, unter welchen uns die Sonne vom Monde abstehend erscheint, ferner d die Entfernung des Mondes und $\varDelta$ jene der Sonne von der Erde, so ist:

$$\cos\alpha = \frac{d}{\varDelta}$$

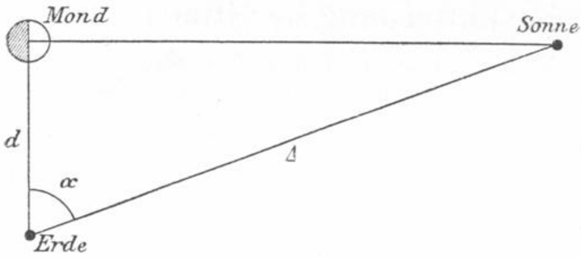
vergleiche Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie, Seite 854.

Antwort. Die erste und älteste relative Bestimmung der Entfernung bezieht sich auf die Entfernung der Sonne und des Mondes von der Erde. Sie stammt von Aristarch und beruht auf der Thatsache, dass der vom Erdmittelpunkte (vergl. Figur 90) zum Mondmittelpunkte geführte Radius, in dem Augenblicke, wo der Mond uns genau halb erleuchtet erscheint, notwendigerweise auf demjenigen Radius senkrecht steht, der die Mittelpunkte von Sonne und Mond verbindet. Nach Aristarchs Angabe tritt dieses ein, wenn der Mond uns in einem Abstande von 87° von der Sonne entfernt erscheint. Thatsächlich beträgt dieser Winkel 89° 45′ (vergl. Erkl. 144).. Daraus schloss Aristarch, dass die Sonne 19 (statt 400) mal entfernter ist von der Sonne, als der Mond.

Eine zweite Methode zur Bestimmung der relativen Entfernungen der einzelnen Planeten von der Sonne, wurde von Kepler aus Tyge Brahes Beobachtungen auf empirischem Wege gefunden und später von Newton theoretisch begründet.

Kepler fand, dass die zweiten Potenzen der Umlaufzeiten zweier Planeten sich verhalten wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der

Figur 90.



Sonne. Seien also T und T_1 die Umlaufzeiten, Δ und Δ_1 die Entfernungen, so besteht die Beziehung:

$$\frac{T^2}{T^2} = \frac{\Delta^3}{\Delta_1^3}$$

Wir sehen hieraus, dass, da die Umlaufzeiten durch Beobachtungen genau bestimmbar sind, wir sofort alle Planetenentfernungen von der Sonne kennen werden, sobald wir eine, z. B. jene der Erde von der Sonne gemessen haben. Diese eine kann aber, wie wir sehen werden, auf mehrfache Weise bestimmt werden.

Erkl. 145. Tyge Brahe, geb. 14. Dezbr. 1546 zu Knudhtorp in Schonen, gest. 24. Okt. 1601 zu Prag. Er brachte die Genauigkeit der astronomischen Messungen bis auf 1 Minute. Bradley (vergl. Erkl. 135) dehnte sie bis auf 1 Sekunde aus.

Isak Newton, geb. am 5. Jan. 1643 zu Woolsthorpe, gest. am 21. März 1727 zu London. Er ist der Begründer der mathematischen Physik und der Entdecker des Gesetzes der Schwere. Sein Hauptwerk führt den Titel: „Philosophiae naturalis principia mathematica.“ 1687.

Frage 92. Welches sind die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der absoluten Entfernung der Erde von der Sonne?

Antwort. Das Wesen der ersten Methode, die wir anführen wollen, haben wir früher in der Parallaxe kennen gelernt. Wir fanden für die Horizontal-Aequatorealparallaxe den Ausdruck:

$$\frac{a}{\Delta} = \pi_{\odot} \sin 1''$$

wobei a den Erdradius und Δ die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne bezeichnete. Wird $\pi_{\odot}$ aus den Beobachtungen bestimmt und a direkt gemessen, so wird:

$$80) \ldots \Delta = \frac{a}{\pi_{\odot} \sin 1''}$$

Es war:

$$\pi_{\odot} = 8'' 84$$
$$a = 6370 \text{ km}$$

also wird:

$$\Delta = \frac{6370 \cdot 206264{,}8}{8'' 84}$$

also:

$$\Delta = 149{,}300{,}000$$

Erkl. 146. $\sin 1'' = \dfrac{1}{206264{,}8}$

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{aligned} \log 6370 &= 3 \cdot 80414 \\ \log 206264{,}8 &= 5{,}31443 \\ \hline &= 9 \cdot 11857 \\ \log 8'' 84 &= 0 \cdot 94645 \\ \hline &= 8 \cdot 17412 \end{aligned}$$

Eine zweite Methode liefert uns die Aberration in Verbindung mit der Lichtgeschwindigkeit. Die Konstante der Aberration wurde durch Beobachtungen zu:

$$20'' 445$$

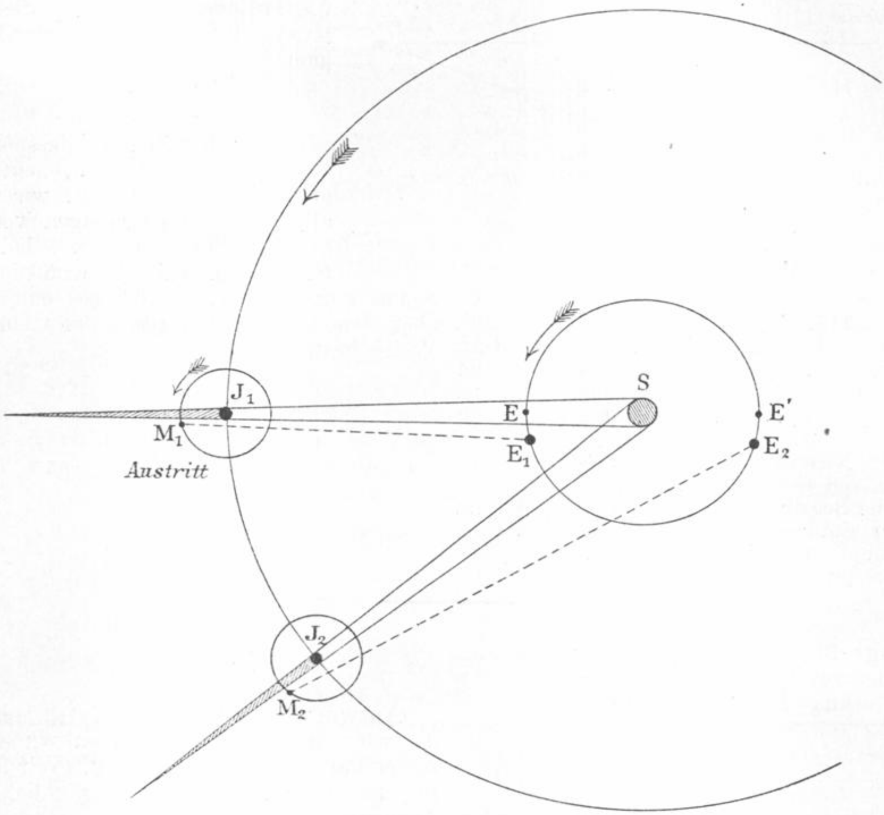
bestimmt, ebenso die Lichtgeschwindigkeit zu:

$$300{,}000 \text{ km}$$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \log 20'' 445 &= 1{,}31059 \\ \log 300{,}000 &= 5{,}47712 \\ \hline & 6 \cdot 78771 \\ & 8 \cdot 61278 \\ \hline & 8 \cdot 17493 \end{aligned}$$

Figur 91.



Erkl. 147. Der Planet Jupiter ist bekanntlich von vier Monden umgeben. Nimmt man den Aequatorealhalbmesser des Jupiters als Einheit an, so wird für den

	Abstand vom Mittelpunkte des Jupiters:	Umlaufzeit:
I.	6,0	1 Tag $18\frac{1}{2}$ Stunden
II.	9,6	3 „ $13\frac{1}{4}$ „
III.	15,4	7 „ $3\frac{3}{4}$ „
IV.	26,0	16 „ $16\frac{1}{2}$ „

Da sie sich nahezu in derselben Ebene wie Jupiter um die Sonne bewegen, so tritt bei dem I. jeden 1 Tag $18\frac{1}{2}$ Stunden je eine Verfinsterung, d. h. eintreten in den Schatten der Planeten, bei dem II. jede 3 Tage $13\frac{1}{4}$ Stunden eine etc.

Wir fanden:

$$20'' 445 = \frac{\Delta\, 0'' 041}{300 \cdot 000}$$

Aus dieser Gleichung kann also Δ berechnet werden und zwar erhalten wir Δ in Kilometern, weil wir die Lichtgeschwindigkeit in Kilometern gemessen haben.

Es wird:

$$\Delta = \frac{20'' 445 \cdot 300{,}000}{0'' 041} = 149{,}600{,}000 \text{ km}$$

Eine dritte Methode, welche ebenfalls auf der bekannten Lichtgeschwindigkeit basiert, ist jene der Verfinsterungen der Jupitermonde (siehe Erkl. 147). Sie rührt von dem dänischen Astronomen Olof Römer her. Sei S die Sonne (vergl. Fig. 91), E die Erde, J der Jupiter und M sein Mond. Gesetzt, wir hätten in E_1 den Austritt des Mondes M_1 beobachtet, so ist die Zeit der Beobachtung nicht die Zeit des Austrittes, sondern die Zeit des Austrittes vermehrt um jene Zeit, die das Licht braucht, um die Strecke E_1 M_1, d. h. die Entfernung des Jupitermondes von der Erde zu durchlaufen. Beobachten wir also den Austritt nicht zur Zeit T_1, wie ihn die theoretische Berechnung erfordert, sondern zur Zeit T_1', so wird:

$$(T_1' - T_1) \cdot v = M_1 E_1$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Ebenso wird in einem zweiten Falle:

$$(T_2' - T_2)\, v = M_2 E_2$$

Denken wir uns, wir hätten den Austritt einmal in E, sodann genau in dem diametral liegenden Punkte E' beobachtet und seien die Zeitdifferenzen ϑ und ϑ', so wird:

$$\vartheta \cdot v = M_1 E$$
$$\vartheta' \cdot v = M_2 E'$$

also:

$$(\vartheta' - \vartheta)\, v = M_1 E - M_1 E' = 2 \varDelta$$

wobei $\varDelta$ die Entfernung der Erde von der Sonne bezeichnet. Die Zwischenzeit beträgt nach neueren Beobachtungen $995{,}5_s$, also fast 1000^s. Wir haben also, wenn wir die Lichtgeschwindigkeit zu:

$$300 \cdot 000 \text{ km}$$

annehmen:

$$\varDelta = \frac{995{,}5 \cdot 300 \cdot 000}{2}$$

oder:

$$\varDelta = 149{,}300{,}000 \text{ km}$$

Erkl. 148. Olof Römer, geb. 1644 zu Aarhuus, gest. 1710 in Kopenhagen, lebte von 1671—1681 zu Paris. Ihm wird oft (von Bessel) die Methode der Meridianstellung des Fernrohrs zugeschrieben, aber mit Unrecht, diese rührt von Hagecius her (vergl. Zech, monatliche Korresp., Artikel Wilhelm von Hessen). Seine meisten Beobachtungen, unter anderen mehr als 1000 sehr genau bestimmten Positionen von Sternen sind bei einer Feuersbrunst verloren gegangen.

Hilfsrechnung 3.

$$\begin{aligned} \log 995{,}5 &= 2 \cdot 99804 \\ \log 150{,}000 &= 5 \cdot 17609 \\ \hline & \ 8 \cdot 17413 \end{aligned}$$

Tafel XX.

Tafel zur Verwandlung der Tage in Bruchteile des Jahres.

Monat und Monatstag	Jahrestag	In Teilen des Jahres	Monat und Monatstag	Jahrestag	In Teilen des Jahres
Januar 1	0	0,0000	Juli 9	189	0,5175
„ 10	9	0,0246	„ 19	199	0,5448
„ 20	19	0,0520	„ 29	209	0,5722
„ 30	29	0,0794	August 8	219	0,5996
Februar 9	39	0,1068	„ 18	229	0,6270
„ 19	49	0,1342	„ 28	239	0,6544
März 1	59	0,1615	September 7	249	0,6817
„ 11	69	0,1889	„ 17	259	0,7091
„ 21	79	0,2163	„ 27	269	0,7365
„ 31	89	0,2437	Oktober 7	279	0,7639
April 10	99	0,2711	„ 17	289	0,7913
„ 20	109	0,2984	„ 27	299	0,8186
„ 30	119	0,3258	November 6	309	0,8460
Mai 10	129	0,3532	„ 16	319	0,8734
„ 20	139	0,3806	„ 26	329	0,9008
„ 30	149	0,4079	Dezember 6	339	0,9282
Juni 9	159	0,4353	„ 16	349	0,9555
„ 19	169	0,4627	„ 26	359	0,9829
„ 29	179	0,4901			

Anmerkung. Im Schaltjahre ist vom 1. März an zu dem Jahrestag 1 oder zu den Teilen des Jahres

$$+\,0{,}0027$$

hinzuzufügen.

Tag	Partes prop.
1	0,0027
2	0,0055
3	0,0082
4	0,0110
5	0,0137
6	0,0164
7	0,0192
8	0,0219
9	0,0246

Es ist z. B. für 1884 14. Mai = Mai 10 + 5 Tage, also:

$$\begin{aligned} & 0{,}3532 \\ + & \,0{,}0137 \\ \hline & 0{,}3669 \end{aligned}$$

Tafel XXI.

Tafel zur Verwandlung der Teile einer Radiuseinheit in Winkelgrössen.

1 = 57⁰ 29597951.

°		′		″	
1	0,01745	1	0,00029	1	0,00000
2	0,03491	2	0,00058	2	0,00001
3	0,05236	3	0,00087	3	0,00001
4	0,06981	4	0,00116	4	0,00002
5	0,08727	5	0,00145	5	0,00002
6	0,10472	6	0,00175	6	0,00003
7	0,12217	7	0,00204	7	0,00003
8	0,13963	8	0,00233	8	0,00004
9	0,15708	9	0,00262	9	0,00004
10	0,17453	10	0,00291	10	0,00005
20	0,34907	20	0,00582	20	0,00010
30	0,52360	30	0,00873	30	0,00015
40	0,69813	40	0,01164	40	0,00019
50	0,87266	50	0,01454	50	0,00024
60	1,04720	60	0,01745	60	0,00029
70	1,22173				
80	1,39626				
90	1,57080				
100	1,74533				
200	3,49066				
300	5,23599				

J. Ueber die scheinbare Bewegung der Sonne und die Bahn der Erde.

Anmerkung 18. Schon in dem Abschnitte über die Zeit haben wir, sowie später, als wir von der Ekliptik handelten, einige Erscheinungen des Sonnenlaufes betrachtet. Es ist dabei aber in unserem Wissen insofern eine Lücke geblieben, als wir uns immer der Ephemeriden bedienen mussten. Wir haben nun diese Lücken auszufüllen, was dadurch geschieht, dass wir die Zahlen der Ephemeriden in bequeme Formeln bringen, und dann aus diesen Formeln eine Theorie der scheinbaren Sonnen- und demnach auch der wahren Erdbewegung ableiten. Am Ende wird das Wichtigste über die Sonnenrotation gesagt.

a) Die Theorie der Sonne.

Frage 93. Ist die Sonne von der Erde im Verlaufe des Jahres immer gleich weit entfernt?

Antwort. Beobachtet man den scheinbaren Durchmesser der Sonne im Verlaufe eines Jahres, so sieht man (vergleiche nachstehende Tafel), dass er in regelmässiger Weise ab- und zunimmt. Die nachstehende Tafel XXII gibt die Beobachtungsresultate.

Tafel XXII.

Halbmesser der Sonne und Logarithmen der Sonnenentfernung (1884).

Datum	Sonnen-halbmesser	Log. d. Sonnen-entfernung	Datum	Sonnen-halbmesser	Log. d. Sonnen-entfernung
Januar 1	16′ 18″ 2	9·99267	Juli 9	15′ 46″ 1	0·00715
„ 11	18″ 0	275	„ 19	46″ 6	693
„ 21	17″ 2	309	„ 29	47″ 6	648
„ 31	16″ 0	364	August 8	49″ 0	584
Februar 10	14″ 4	434	„ 18	50″ 7	507
„ 20	12″ 4	526	„ 28	52″ 8	411
März 1	10″ 0	631	September 7	55″ 1	303
„ 11	7″ 5	743	„ 17	57″ 6	189
„ 21	4″ 8	866	„ 27	16′ 0″ 4	066
„ 31	2″ 0	991	Oktober 7	3″ 2	9·99940
April 10	15′ 59″ 3	0·00114	„ 17	5″ 9	818
„ 20	56″ 6	236	„ 27	8″ 5	698
„ 30	54″ 1	349	November 6	11″ 0	586
Mai 10	51″ 9	449	„ 16	13″ 2	490
„ 20	49″ 9	540	„ 26	15″ 1	405
„ 30	48″ 3	613	Dezember 6	16″ 6	339
Juni 9	47″ 2	667	„ 16	17″ 6	295
„ 19	46″ 3	705	„ 26	18″ 1	270
„ 29	46″ 0	721			

Erkl. 149. Die älteste Schätzung des scheinbaren Halbmessers der Sonne findet sich in einem Citate Archimedes, nach welchem Aristarch aus Samos (etwa 270 v. Chr.) denselben gleich 900″ schätzte. Etwas grösseren Wert hat Ptolomaeus (140 nach Chr.), etwa 940″. Der erste wissenschaftliche Wert dieser Konstante rührt von den Astronomen Auzout und Picarg (1666), welche zuerst durch mikrometrische Messungen denselben zu 965″ 5 bestimmten.

Erkl. 150. Ob die Sonne vollkommene Kugel ist oder nicht, kann noch nicht mit Gewissheit behauptet werden. Piazzi (Del reale osserv. Palermo 1806) glaubt, dass der horizontale Durchmesser ein wenig grösser ist als der vertikale. Holden fand 1881 für den mittleren horizontalen 961″ 254, für den mittleren vertikalen 961″ 282. Da nun diese aus sehr vielen (fast 4000) Beobachtungen hergeleitete Zahlen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler übereinstimmen, so darf man die Sonne als vollkommen kugelförmig mit dem mittleren Halbmesser:

961″

annehmen.

Aus dieser Tafel entnimmt man, dass der Sonnenradius innerhalb der Werte von:

16′ 18″ 2 am 1. Januar

bis

15′ 46″ 0 am 1. Juli

schwankt. Es ist aber eine bekannte Thatsache, dass uns ein Gegenstand desto kleiner erscheint, je weiter er entfernt ist. Daher schliessen wir, dass uns die Sonne im Januar näher ist, als im Juli. Es sei B (vergl. Figur 92) der Sonnenort am 1. Januar, D jener am 1. Juli, so wird:

$$\sphericalangle CAB = 16' 18'' 2 = m$$
$$\sphericalangle EAD = 15' 46'' 0 = n$$

ferner wird:

$$CB = AB \operatorname{tg} m$$
$$ED = AD \operatorname{tg} n$$

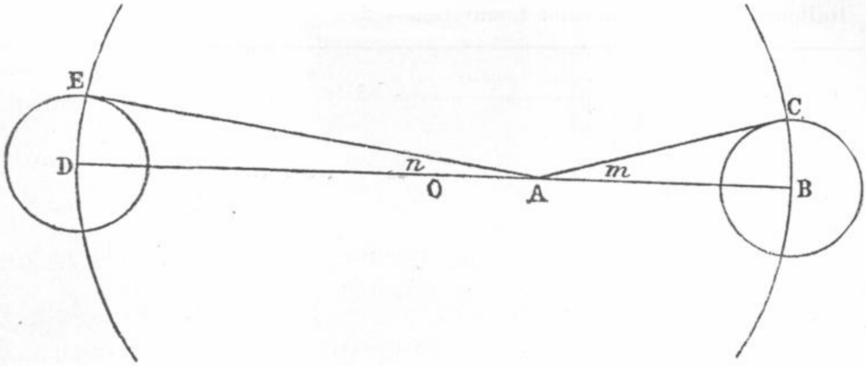
Setzen wir:

$$\frac{1}{2} DB = OD = OB = a$$

ferner $OA = E$, so wird:

$$a - \varepsilon = AB$$
$$a + \varepsilon = AD$$

Figur 92.



Erkl. 151. Die Maxima und Minima des Sonnendurchmessers schwanken sehr wenig. Das Maximum:

$$16' \, 18'' \, 22 = 978'' \, 22$$

tritt am 1. Januar, das Minimum:

$$15' \, 45'' \, 98 = 945'' \, 98$$

am 2. Juli ein. Es mag hier gleich eine Eigentümlichkeit erwähnt sein. Der Mond und die Sonne erscheinen uns am Horizont grösser wegen der Wirkung der Refraktion, aber nur scheinbar, denn wenn man die Scheibe wirklich mit dem Mikrometer misst, so sieht man, dass eigentlich ihre scheinbare Grösse mit ihrer Höhe zunimmt. Der Grund scheint daher darin zu liegen, dass wir die Gegenstände am Horizont für entfernter halten, was schon Ptolomäus (Alm. Libr. IX, Kap. 2) bemerkt hat, indem er sagt: „Distantiae majores ad horizontem visibus modo apparent, et minores in medii coeli locationibus.“ Daher erscheint uns der Himmel auch nicht als eine Halbkugel, sondern wie ein eingedrücktes Gewölbe, dessen Basis etwa dreimal so gross ist als die Höhe. Daher uns der Mond im Zenith dreimal näher erscheint als im Horizont und da sein Durchmesser sich gleich bleibt, am Horizont viel grösser.

Erkl. 152. Zur Berechnung kann man auch:

$$\frac{n}{m} = \cos 2y$$

setzen, wodurch:

$$\frac{m-n}{m+n} = \frac{1-\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}} = \frac{1-\cos 2y}{1+\cos 2y} = \operatorname{tg}^2 y$$

wird, so dass:

$$\varepsilon = a \operatorname{tg}^2 y$$

oder:

$$e = \operatorname{tg}^2 y$$

wird. Dass:

$$\frac{1-\cos 2y}{1+\cos 2y} = \operatorname{tg}^2 y$$

demnach:

$$CB = (a-\varepsilon) \operatorname{tg} m$$
$$ED = (a+\varepsilon) \operatorname{tg} n$$

oder da:

$$CB = ED$$

auch:

$$(a-\varepsilon) \operatorname{tg} m = (a+\varepsilon) \operatorname{tg} n$$

Hieraus berechnet sich ε zu:

$$81) \ldots \varepsilon = a \frac{m-n}{m+n}$$

wenn man bei der Kleinheit der Winkel die Tangenten durch die Bogengrössen selbst ersetzt. Die Grösse:

$$\frac{m-n}{m+n} = \text{Exzentrizität}$$

wollen wir mit eigenem Buchstaben e bezeichnen und schreiben:

$$82) \ldots \varepsilon = ae$$

Aus den vorstehenden Daten findet man:

$$83) \ldots e = 0{,}016734$$

Die Exzentrizität ist kleinen jährlichen Aenderungen unterworfen, die ihren Grund in der gegenseitigen Anziehung der Himmelskörper haben.

Sie war z. B.:

18 200 vor Chr. = 0,0188
8 200 „ „ = 0,0195
1 800 nach „ = 0,0168

und wird:

11 800 „ „ = 0,0115
21 000 „ „ = 0,0059

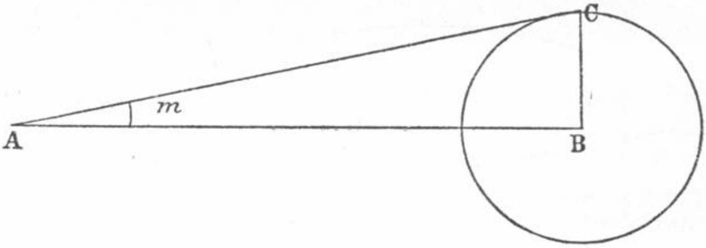
Allgemein für die nächsten Jahrhunderte ist, wenn t das Jahr nach 1800 bezeichnet:

$$84) \ldots e = 0{,}01679207 - 0{,}0000004135\, t$$

sie nimmt also beständig ab.

Durch sorgfältige zehnjährige Beobachtungen auf der Sternwarte zu Greenwich

Figur 93.



überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, dass:

$$\cos 2y = \cos(y+y) = \cos^2 y - \sin^2 y$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{lr} & 16'\,18''\,2 \\ & \underline{15'\,46''\,0} \\ \text{Differenz:} & 32''\,2 \\ \text{Summe:} & 32'\;\;4''\,2 = 1924''\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 32''\,2 = 1{,}50786 \\ \log 1924''\,2 = \underline{3{,}28425} \\ \log e = 8{,}22361 \end{array}$$

Erkl. 153. Auf Grund theoretischer Untersuchungen sind nach Stockwell (1873) die Grenzen, zwischen welchen sich die Exzentrizitäten der Planeten bewegen können, die folgenden:

	Obere	Untere Grenze
Merkur . . .	0,23172	0,12149
Venus . . .	0,07063	0,00000
Erde	0,06939	0,00000
Mars	0,13966	0,01848
Jupiter . . .	0,06083	0,02549
Saturus . . .	0,08433	0,01237
Uranus . . .	0,07796	0,01176
Neptun . . .	0,01451	0,00557

Die Exzentrizitäten nehmen im allgemeinen innerhalb dieser Grenzen periodisch ab und zu. Diese Grenzen sollen nur so viel sagen, dass überhaupt die Exzentrizitäten innerhalb dieser Werte bleiben müssen.

Erkl. 154. Wir hätten zu schreiben:

$$CB = AB \cdot m'' \cdot \mathrm{tg}\, 1''$$

da wir aber auch CB in Sekunden haben wollen, so müssen wir die Länge CB ersetzen durch:

$$CB'' \cdot \mathrm{tg}\, 1''$$

so dass:

$$CB'' = AB \cdot m''$$

folgt.

Erkl. 155. Diese Formeln setzen voraus, dass sich der wirkliche Halbmesser der Sonne nicht ändert. Dass dieses wirklich der Fall ist, bestätigen die Beobachtungen. Zwar wollte Lindenau aus den Beobachtungen von Maskelyne und in neuerer Zeit Rosa (1874) darwurde der Sonnenhalbmesser in der mittleren Entfernung, also $r = 1$, zu:

$$85) \;\ldots\; 961''\,82 = 16'\,1''\,82$$

bestimmt. Wir haben also:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximum} & 16'\,18''\,2 & r = 0{,}98327 \\ \text{Mittel} & 16'\;\;1''\,8 & r = 1{,}00000 \\ \text{Minimum} & 15'\,46''\,2 & r = 1{,}01673 \end{array}$$

Aus der Figur 93 entnimmt man:

$$CB = AB \cdot \mathrm{tg}\, m$$

oder wie wir kürzer schreiben wollen:

$$CB = AB \cdot m$$

Setzen wir:

$$AB = r$$

so wird, wenn $r = 1$:

$$CB = m = 961''\,82$$

also haben wir:

$$86) \;\ldots\; 961''\,8 = rm$$

und

$$87) \;\ldots\ldots\; r = \frac{961''\,82}{m}$$

Aus dieser Formel kann man, wenn der scheinbare Halbmesser der Sonne gegeben ist, sofort die zu ihm zugehörigen Werte der Erdentfernung berechnen.

Die Resultate dieser Berechnung haben wir auf der Tafel XXII in der Rubrik: „Logarithmen der Sonnenentfernung“ zusammengestellt.

Den Ort der grössten Erdnähe bezeichnen wir mit dem Namen Perigeum und den der Erdferne mit Apogeum.

Es muss offenbar das Perigeum um 180° in der Länge von dem Apogeum abstehen.

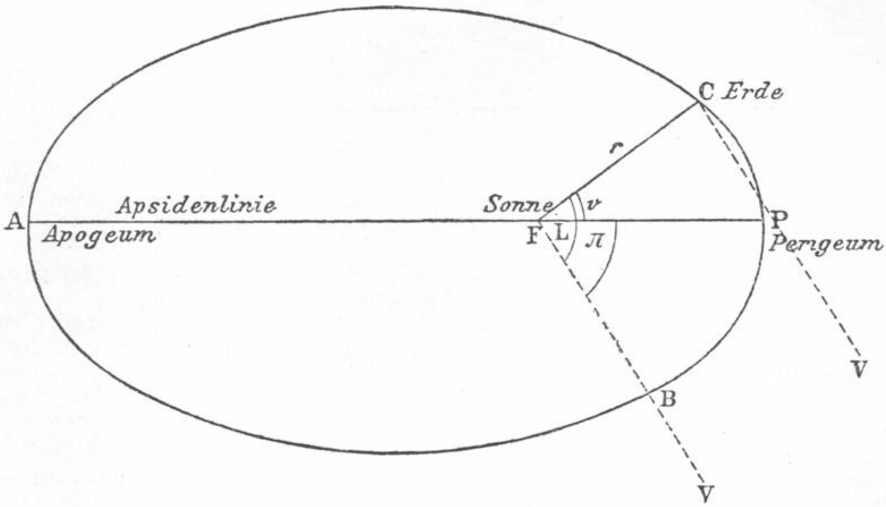
Die Länge des Perigeums (mit π zu bezeichnen) oder die sogen. Perihellänge der Erde beträgt für das Jahr t nach 1850:

$$88) \;\ldots\; \pi = 280^0\,21'\,21''\,5 + 61''\,700\,t$$

sie nimmt jährlich um 61'' 7 zu.

Die das Perigeum und Apogeum verbindende Linie nennt man die Apsidenlinie. Wir wollen ferner den Winkel PFC in der Figur 94, also den Winkelabstand der Erde vom Perigeum, mit dem Namen

Figur 94.



thun, dass dieses nicht der Fall ist. Dieser Ansicht trat aber Auwers (Berliner Monatsb. 1873) energisch entgegen.

Erkl. 156. Perigeum stammt vom griech. „peri“ bei und „gē“ die Erde; Apogeum von „apō“ fern und „gē“ die Erde.

Erkl. 157. Perihelium stammt vom griech. „peri“ und „helion“ die Sonne und ist für die Erde mit dem Perigeum identisch. Nach Bessel ist für das Jahr $1800 + t$:

$$\pi = 279^0\,30'\,8''\,39 + 61''\,5171\,t + 0{,}0002038\,t^2$$

Erkl. 158. Apsidenlinie stammt vom griech. „apsis“ Wölbung, Krümmung, Umfang eines Rades, so genannt, weil sie die am meisten gekrümmten Stellen der Bahn verbindet.

der wahren Anomalie und dem Buchstaben v bezeichnen. Sodann folgt, wenn L die Sonnenlänge bezeichnet:

$$89) \ldots v = L - \pi$$

Frage 94. Welches ist die Gestalt der Erdbahn?

Erkl. 159. Um die Gestalt irgend einer Kurve zu charakterisieren, wähle man in der Ebene einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt und eine durch ihn gehende Richtung als Anfangsrichtung. Sodann ist irgend ein Punkt dieser Kurve vollkommen charakterisiert, wenn wir seine Entfernung vom Anfangspunkte und den Winkel, den diese Entfernung mit der Anfangsrichtung macht, angeben, denn es gibt immer einen und nur einen Punkt, der diese Entfernung und diesen Entfernungswinkel gemein hat.

Antwort. Um diese Frage beantworten zu können, denken wir uns in der Sonne (F in der Figur 94) als Ursprung ein polares Koordinatensystem gelegt, dessen Anfangsrichtung durch das Perigeum geht. Haben wir sodann die Erdentfernung als eine Funktion der wahren Anomalie dargestellt, also eine Gleichung:

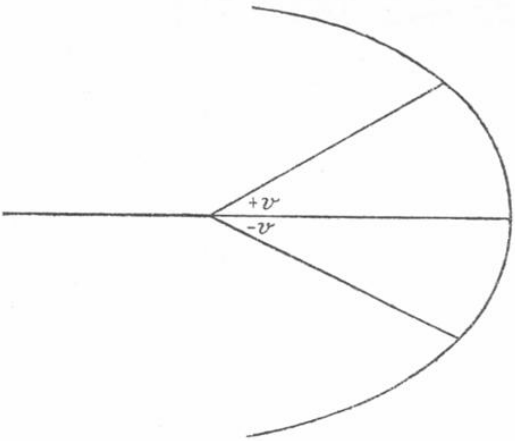
$$r = F(v)$$

gefunden, so ist die Frage beantwortet, weil:

$$r = F(v)$$

die Gleichung einer Kurve in unserem polaren Koordinatensystem darstellt.

Figur 95.



Erkl. 160. Der weder kurze noch leichte Beweis dieses höchst wichtigen Satzes setzt eine eingehende Bekanntschaft nicht nur der Prinzipien, sondern der ganzen höheren Analysis im weitesten Sinne des Wortes voraus und kann demnach hier nicht gegeben werden.

Erkl. 161. Es wird nämlich, wenn wir uns bloss auf die Anfangsglieder beschränken:

$$f(+v) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \beta_1 \sin v + \cdots$$
$$f(-v) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v - \beta_1 \sin v + \cdots$$

also:

$$f(+v) + f(-v) = 2(\alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \cdots$$
$$f(+v) - f(-v) = 2(\beta_1 \sin v + \cdots$$

Ist daher:

$$f(+v) = -f(-v)$$

so ist immer:

$$\beta_1 \sin v + \beta_2 \sin 2v + \cdots = 0$$

Erkl. 162. Ist $v = 0$, so wird:

$$\cos v = 1,\ \cos 2v = 1,\ \cos 3v = 1 \text{ etc.}$$

Ist $v = 180^0$, so wird:

$$\cos v = -1,\ \cos 2v = +1,\ \cos 3v = -1 \text{ etc.}$$

Erkl. 163. Die Grösse p, welche der Parameter genannt wird, ist die Länge der Senkrechten, welche in einem der Brennpunkte auf die grosse Achse errichtet wird. Den linearen Abstand des Brennpunktes von dem näheren Endpunkte der grossen Achse, pflegt man mit q zu bezeichnen und ihn die Periheldistanz zu nennen. Es besteht die Beziehung:

$$p = q(1 + e)$$

Ist aber r eine Funktion von v, so muss auch $\frac{1}{r}$ sein und es wird:

$$\frac{1}{r} = F(v)$$

Es kommt nun alles darauf an, diese Funktion v zu bestimmen.

Aus den Daten der Tafel XXII entnimmt man, dass die Erdbahn eine um die Apsidenlinie symmetrische Gestalt besitzt, es wird also (vergl. Fig. 95):

$$f(+v) = f(-v)$$

wobei wie üblich $-v$ dieselbe Grösse wie $+v$ besitzt, aber von der Anfangsrichtung (hier Apsidenlinie) in entgegengesetzter Richtung gezählt wird.

Ferner wissen wir, dass:

$$f(0) = \frac{1}{a - \varepsilon} = \frac{1}{a(1 - e)}$$
$$f(180) = \frac{1}{a - \varepsilon} = \frac{1}{a(1 - e)}$$

Nun wird in der Funktionentheorie gezeigt, dass eine jede Funktion von v dargestellt werden kann in der Form:

$$f(v) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \alpha_2 \cos 2v + \alpha_3 \cos 3v + \cdots$$
$$+ \beta_1 \cos v + \beta_2 \sin 2v + \beta_3 \sin 3v + \cdots$$

Ist aber:

$$f(v) = f(-v)$$

so folgt, da:

$$\cos(v) = \cos(-v)$$
$$\sin(v) = -\sin(v)$$

dass:

$$f(v) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \alpha_2 \cos 2v + \alpha_3 \cos 3v + \cdots$$

wobei:

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \cdots$$

konstante Koeffizienten sind.

Um diese zu bestimmen, beachten wir, dass:

$$f(0) = \frac{1}{a - \varepsilon} = \frac{1}{a(1 - e)}$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots$$
$$f(180^0) = \frac{1}{a - \varepsilon} = \frac{1}{a(1 - e)}$$
$$= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots$$

Es wird demnach durch Addition und Subtraktion der letzten Gleichungen:

$$\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e}\right)$$
$$= \frac{1}{a(1 - e^2)}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}\right)$$
$$= \frac{e}{a(1-e^2)}$$

Setzt man noch:

$$90\text{a}) \ldots p = a(1-e^2)$$

so wird:

$$\alpha_0 = \frac{1}{p} - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6 - \cdots$$
$$\alpha_1 = \frac{e}{p} - \alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_7 - \cdots$$

also:

$$\begin{aligned} f(v) = \frac{1}{p}(1 + e\cos v) &+ \\ &\alpha_2(\cos 2v - 1) \\ &+ \alpha_3(\cos 3v - \cos v) \\ &+ \alpha_4(\cos 4v - 1) \\ &+ \alpha_5(\cos 5v - \cos v) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$f(v) = \frac{1}{p}(1 + e\cos v) + \varphi(v)$$

Um nun den Verlauf der Funktion $\varphi(v)$ kennen zu lernen, berechnen wir:

$$\varphi(v) = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}(1 + e\cos v)$$

für ein ganzes Jahr. Es wird hier genügen, für einzelne Daten die Grösse von v zu bestimmen, da wir bloss zeigen wollen, wie es geschehen soll.

Die Beobachtungsdaten sind:

Mittlerer Pariser Mittag 1882.

Datum		Sonnen-halbmesser	L
März	2	969″ 91	341° 49′ 56″ 6
Mai	24	949″ 38	63° 9′ 37″ 9
August	22	951″ 40	149° 13′ 27″ 3
Oktober	15	565″ 16	202° 1′ 52″ 3

Für 1882 finden wir aus vorstehenden Formeln:

$$e = 0{,}16771$$
$$p = 0{,}99972$$

$$\pi = \begin{cases} 280^0\ 54'\ 26''\ 0 \\ 54'\ 40''\ 1 \\ 54'\ 55''\ 3 \\ 55'\ \ 4''\ 4 \end{cases} \qquad v = \begin{cases} 60^0\ 55'\ 30''\ 6 \\ 142^0\ 14'\ 57''\ 8 \\ 228^0\ 19'\ 32''\ 0 \\ 281^0\ \ 6'\ 47''9 \end{cases}$$

und damit die nebenstehende Tafel:

Datum	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{2}(1+e\cos v)$	$\varphi(v)$
März 2	1,00841	1,00843	$-0,00001$
Mai 24	0,98708	0,98702	$+0,00006$
August 22	0,98917	0,98913	$+0,00004$
Oktbr. 15	1,00365	1,00351	$+0,00004$

Daraus sehen wir, dass wir:

$$\varphi(v) = 0$$

zu setzen haben, weil die Abweichungen zwischen:

$$\frac{1}{r} \text{ und } \frac{1}{p}(1+e\cos v)$$

ausserhalb der Grenzen der Genauigkeit der logarithmischen Rechnung liegen. Hätten wir die Berechnung für das ganze Jahr von Tag zu Tag durchgeführt, so hätte sich dasselbe Resultat ergeben.

Wir schliessen hieraus, dass:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1+e\cos v)$$

oder:

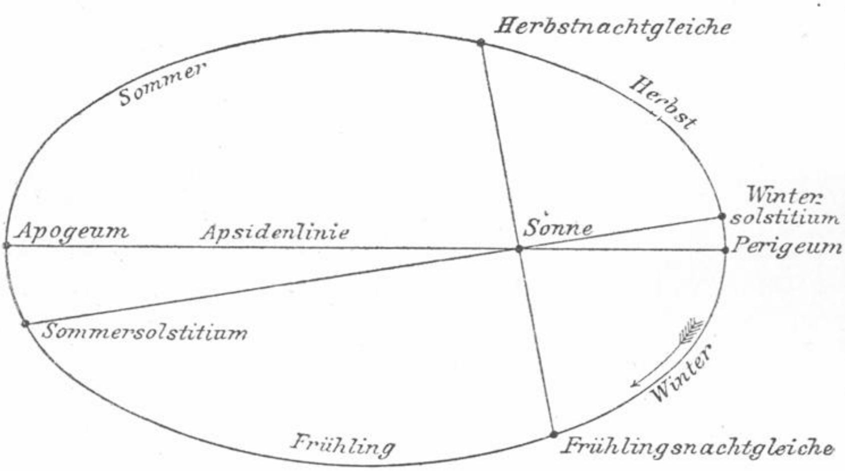
$$90) \;.\;.\;.\; r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

Dieses ist aber die Gleichung der Ellipse. Daraus folgt, dass die Erdbahn nahezu eine Ellipse ist. Die Figur 96 ergibt ein ungefähres Bild von dem jeweiligen Standpunkte der Erde in den einzelnen Jahreszeiten.

Erkl. 164 zur Figur 96. Aus dieser Figur entnimmt man, dass die Erde im Winter und zwar etwa am 1. oder 2. Januar der Sonne am nächsten ist, dagegen am 30. Juni oder 1. Juli von ihr am weitesten absteht. Die zur Figur nötigen Berechnungen gibt die Aufgabe 63.

Erkl. 165. Dass die Erdbahn und die Planetenbahnen (wenn man von gegenseitigen Störungen der Planeten absieht) Ellipsen seien, hat zuerst Kepler ausgesprochen. Indem er die Entfernungen in ein Gesetz zu bringen suchte, nahm er einen Kreis und fand manchmal die Entfernungen zu gross, bei einer angenommenen Ellipse dagegen zu klein. Daher sagt er (De stella Mart. Cap. LVIII): „Circulus Cap. 43, peccat excessu, ellipsis Cap. 45 peccat defectu et sunt excessus ille et hic defectus aequales. Inter circulum vero et ellipsin nihil mediat nisi ellipsis alia. Ergo ellipsis est planetae iter.“

Figur 96.



Frage 95. Wie gross ist die Längezunahme an den einzelnen Tagen des Jahres, d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Sonne?

Antwort. Beobachtet man täglich die Sonnenlänge, so ergibt sich, dass dieselbe durchaus nicht Tag für Tag in gleicher Weise zunimmt. Vielmehr ist die Zunahme im Perigäum am grössten und im Apogeum am kleinsten.

So war z. B. im Jahre 1884:

Maximum	Januar 1.	280 32 24″ 8	also die Differenz 61′ 10″ 8
	„ 2.	281 33 35″ 6	
Minimum	Juli 1.	99 58 32″ 8	„ „ „ 57′ 10″ 5
	„ 2.	100 55 43″ 3	

Wir wollen wie früher $\frac{1}{r}$ auch jetzt die Geschwindigkeit g als eine Funktion von v darstellen, indem wir:

$$g = \alpha_0 + \alpha_1 \cos v + \alpha_2 \cos 2v + \alpha_3 \cos 3v + \cdots$$

setzen.

Ist:

$v = 0$, so ist $g = 61' \, 10'' 8$
$v = 180$, „ „ $g = 57' \, 10'' 5$

Wir haben also:

$$61' \, 10'' \, 8 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots$$
$$57' \, 10'' \, 5 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots$$

Hieraus folgt:

$$118' \, 21'' \, 3 = 2\,(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots$$
$$4' \;\; 0'' \, 3 = 2\,(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdots$$

Demnach wird:

$$\alpha_0 = 59' \, 10' \, 6 - \alpha_2 - \alpha_4 - \cdots$$
$$\alpha_1 = \;\; 2' \;\; 0'' \, 1 - \alpha_3 - \alpha_5 - \cdots$$

und

$$g = 59' \, 10'' \, 6 + 120'' \, 1 \cos v + \varphi(v)$$

wobei:

$$\begin{aligned}\varphi(v) = {} & \alpha_2(\cos 2v - 1) \\ & + \alpha_3(\cos 3v - \cos v) \\ & + \alpha_4(\cos 4v - 1) \\ & + \alpha_5(\cos 5v - \cos v) \\ & + \cdots\end{aligned}$$

Rechnen wir nun, um den Betrag von $\varphi(v)$ kennen zu lernen:

$$g - 59' \, 10'' 6 - 120'' 1 \cos v = \varphi(v)$$

für folgende Daten:

1884 Mittl. Green. Mittag.

		L
März 1,5	$g = 60' \, 8'' 7$	$341^0 \, 51' \, 13''$
Sept. 1,5	$g = 58' \, 7'' 8$	$359^0 \, 53' \, 27''$

Wir finden die Länge des Perigeums nach den oben mitgeteilten Formeln zu:

März 1,5 $\pi = 280^0 \, 56' \, 30''$
Sept. 1,5 $\pi = 280^0 \, 57' \;\; 0''$

und daraus wegen:

$$v = L - \pi$$

März 1,5 $v = \;\; 60^0 \, 54' \, 44''$
Sept. 1,5 $v = 238^0 \, 56' \, 26''$

Erkl. 166. Im Jahre 1875 beschrieb die Sonne an einem Tage folgende Bogen der Ekliptik:

31.	Dezember	1874	61′ 11″ 1
30.	Januar	1875	60′ 54,8
1.	März	„	60′ 11,2
31.	„	„	59′ 12,2
30.	April	„	58′ 13,9
30.	Mai	„	57′ 30,1
24.	Juni	„	57′ 12,4
29.	Juli	„	57′ 23,4
28.	August	„	58′ 0,3
27.	September	„	58′ 55,6
27.	Oktober	„	59′ 56,4
26.	November	„	60′ 46,3

Wir erhalten für:

$$\text{März } 1{,}5 \quad \varphi(v) = -0''3$$
$$\text{Sept. } 1{,}5 \quad \varphi(v) = -0''8$$

Demnach werden wir:

$$\varphi(v) = 0$$

setzen, da wir die Genauigkeit nicht über die Sekunden hinaus treiben wollen.

Wir haben also:

$$g = 59'\,10''6 + 120''1 \cos v$$

Diese Geschwindigkeit ist offenbar gleich der Winkelzunahme, geteilt durch die Zeitzunahme, also:

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$$

oder wie wir schreiben wollen:

$$\frac{dv}{dt}$$

woraus:

$$91) \ldots \frac{dv}{dt} = 59'\,10''6 + 120''1 \cos v$$

folgt.

Wir können diese Formel noch anders schreiben. Setzen wir:

$$59'\,10''\,6 = 3550''\,6 = m$$

so wird:

$$120''\,1 = m\,\frac{120''\,1}{3550''\,6} = m\,0{,}033825$$

Es war aber:

$$e = 0{,}0168$$

also wird:

$$2e = 0{,}0334$$

so dass wir nahezu:

$$120''\,1 = m \cdot 2e$$

setzen können, wodurch:

$$\frac{dv}{dt} = m\,(1 + 2e \cos v)$$

Nun ist aber:

$$\frac{p^2}{r^2} = 1 + 2e \cos v + e^2 \cos^2 v$$

demnach wird:

$$\frac{dv}{dt} = m\left(\frac{p^2}{r^2} - e^2 \cos^2 v\right)$$

oder:

$$r^2\,\frac{dv}{dt} = m p^2 - m r^2 e^2 \cos^2 v$$

also schliessen wir, dass $r^2 \frac{dv}{dt}$ nahezu konstant ist.

Hätten wir die Rechnung ganz genau geführt, so hätten wir erhalten:

$$\frac{dv}{dt} = m\,(1 + 2e \cos v + e^2 \cos^2 v)$$

also:

$$93) \ldots r^2\,\frac{dv}{dt} = \text{Konst.}$$

Wir überlassen es dem Leser, sich von der Richtigkeit dieser Relation an folgenden Daten zu überzeugen:

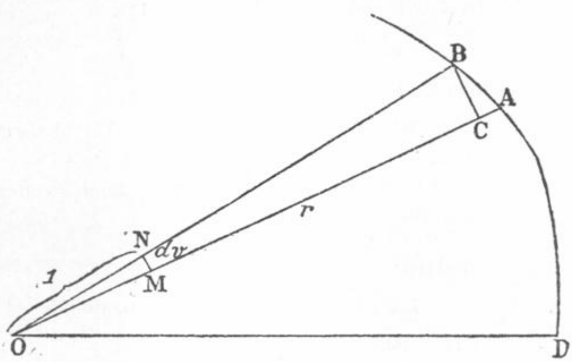
1884 Mittl. Green. Mittag

1884 Juli 10,5	$L = 108^0\,52'\,50''$	$g = 57'\,11''\cdot 9$	$\log r = 0{,}0071296$
Dez. 10,5	$L = 258^0\,54'\,42''$	$g = 61'\;\;1''\;6$	$\log r = 9\cdot 9931672$

Frage 96. Zu welchen Relationen führt das soeben gefundene Gesetz:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \text{Konst.?}$$

Figur 97.



Erkl. 167. Es ist (vergl. Figur 97):

$$OM : NM = OC : CB$$

oder da nahezu:

$$OC = OA$$

$$OM : NM = OA : CB$$

also:

$$1 : dv = r : CB$$

woraus:

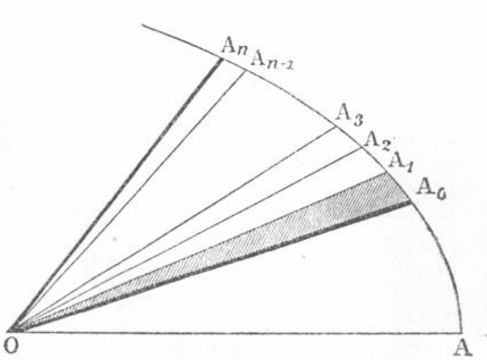
$$CB = r\,dv$$

folgt, wenn wir wie immer:

$$v_1 - v = dv$$

setzen.

Figur 98.



Antwort. Es ist leicht einzusehen, dass der Flächeninhalt eines kleinen Sektors OAB (vergl. Figur 97) um so weniger von dem des Dreieckes OAB sich unterscheiden wird, je kleiner die Winkelzunahme dv ist. Nehmen wir dieselbe so klein an, dass wir den Unterschied vernachlässigen können, so wird:

$$\text{Sektor} = \frac{1}{2}\, OA \cdot CB$$

oder da:

$$CB = r\,dv,\; OA = r$$

so wird:

$$\text{Sektor} = \frac{1}{2} r^2 dv$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Sektors einfach mit df, wodurch wir df als die Differenz:

$$ODB - ODA = f_1 - f$$

auffassen, so können wir schreiben:

$$df = \frac{1}{2} r^2 dv$$

Wir haben also:

$$df = \frac{\mu}{2} dt$$

oder:

$$f_1 - f = \frac{\mu}{2}(t_1 - t)$$

Nun ist (vergl. Figur 98) der Sektor:

$$OA_0A_n = OA_0A_1 + OA_1A_2 + \cdots + OA_{n-1}A_n$$

also:

$$OA_0A_n = \frac{\mu}{2}(t_1 - t) + \frac{\mu}{2}(t_2 - t_1) + \cdots + \frac{\mu}{2}(t_n - t_{n-1})$$

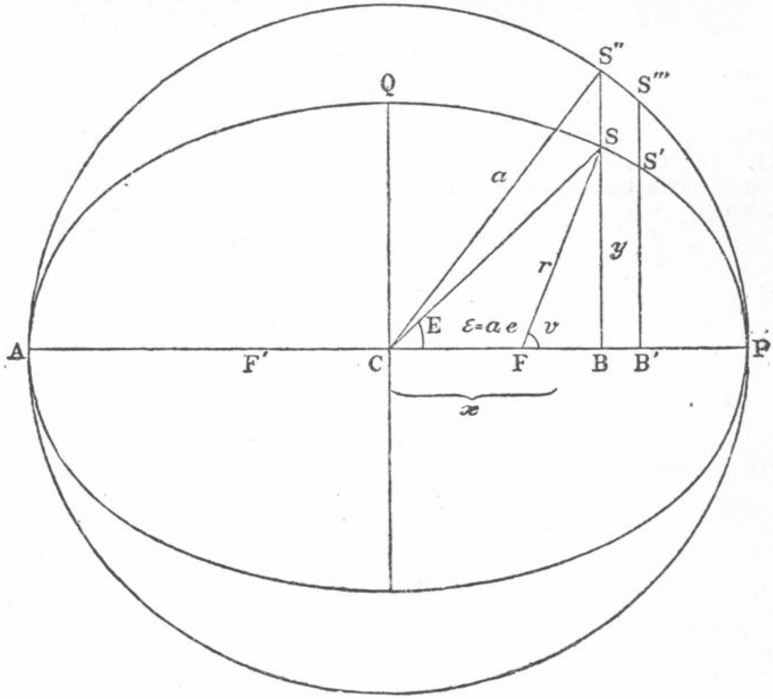
oder:

$$OA_0A_n = \frac{\mu}{2}(t_n - t)$$

Wir sehen, dass die Flächenräume, die die Erde beschreibt, einfach (da μ konstant ist) der Zeit proportional sind. Sei f ein solcher Sektor, der in der Zeit t beschrieben wurde, so ist:

$$f = \frac{\mu}{2} t$$

Figur 99.



Erkl. 168. Wir haben in der Frage 95 gezeigt, dass:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \mu$$

einer Konstante, daher wird:

$$\frac{1}{2} r^2 dv = \frac{1}{2} \mu dt$$

und hieraus, da:

$$\frac{1}{2} r^2 dv = df$$

ist, auch:

$$df = \frac{1}{2} \mu dt$$

oder wenn wir wie immer:

$$df = f_1 - f$$

setzen:

$$f_1 - f = \frac{1}{2} \mu (t_1 - t)$$

Dabei wird aber $f_1 - f$ und $t_1 - t$ sehr klein vorausgesetzt.

Erkl. 169. Der Satz, dass die Sektoren, die von den Planeten um die Sonne beschrieben werden, proportional den Zeiten sind, wird gewöhnlich das dritte Keplersche Gesetz genannt. Kepler bewies diesen Satz nur für den exzentrischen Kreis und die Nähe der Apsiden, und selbst für diesen Fall hält sein Beweis keiner strengen Kritik stand, weil er auf falschen Vordersätzen beruht.

Ebenso wird die ganze Ellipse in der Umlaufzeit T beschrieben, so dass wir:

$$ab\pi = \frac{\mu}{2} T$$

haben.

Daraus folgt aber, dass:

$$94) \ldots \mu = \frac{2ab\pi}{T}$$

Dieses gibt uns die Bedeutung dieser Konstante. Es war noch:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

oder wenn man:

$$e = \sin\varphi$$

setzt:

$$b = a \cos\varphi$$

Setzt man nun, wie üblich, bei der Erde die halbe grosse Achse $a = 1$, so folgt:

$$95) \ldots \frac{\mu}{2} = \frac{\pi}{T} \cos\varphi$$

Dabei ist T die Zeit, in welcher die Erde einen Umlauf um die Sonne vollendet, d. h. die Länge des siderischen Jahres.

Legt man durch C (vergl. Figur 99) als Ursprung ein Koordinatensystem, dessen positive X-Achse die Richtung CP die positive Y-Achse die Richtung CQ hat, so wird:

$$BS'' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Erkl. 170. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich:

$$a b \pi$$

wo a die halbe grosse und b die halbe kleine Achse bezeichnet. Vergl. Erkl. 172.

Erkl. 171. Die Gleichung der Ellipse in rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt, lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1$$

daraus folgt:

$$\frac{4^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

oder:

$$4 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Wird $b = a$, so erhalten wir die Kreisgleichung und für diese ist:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Erkl. 172. Der Umstand, dass:

$$\text{Sector } BSP = \frac{b}{a} \text{ Sektor } BPS''$$

zeigt, dass wenn:

$$BS''P = \text{dem Viertelkreis}$$

auch gleich wird:

$$BSP = \text{der Viertelellipse}$$

Wir haben also:

$$\text{Viertelellipse} = \frac{b}{a} \text{ Viertelkreis}$$

also auch:

$$\text{Ellipse} = \frac{b}{a} \text{ Kreis}$$

Nun ist die Kreisfläche gleich $a^2\pi$, also wird die Ellipsenfläche

$$\frac{b}{a} \cdot a^2 \pi = a b \pi$$

wie schon früher erwähnt.

Erkl. 173. Es ist, vergl. Fig. 100:

$$1 : \beta = OA' : A'B'$$

also:

$$\beta \cdot OA' = A'B'$$

Der Flächeninhalt des kleinen Dreieckes $AB'O'$ ist aber:

$$\frac{1}{2} A'B' \cdot OA'$$

Zerlegt man den Sektor OCG in die Dreiecke OCD, ODE, OEF, OFG, so wird, wenn i_1, i_2, i_3, i_4 ihre Inhalte sind, der Inhalt des Sektors:

$$= i_1 + i_2 + i_3 + i_4$$

wenn $CS'' = a$ ist und $CB = x$. Ferner ist:

$$BS = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

wie aus der Gleichung der Ellipse bekannt ist. Wir haben also:

$$BS = \frac{b}{a} BS''$$

Also auch wenn wir beiderseits mit CB multiplizieren:

$$CB \cdot BS = \frac{b}{a} CB \cdot BS''$$

Es ist aber $CB \cdot BS$ gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreieckes CBS, ebenso $CB \cdot BS''$ der doppelte Flächeninhalt des Dreieckes CBS'', also wird:

$$CBS = \frac{b}{a} CBS''$$

Nun ist:

$$\text{Dreieck } CFS + \text{Sektor } FSP = \text{Sektor } CSP$$

und nach dem soeben bewiesenen Satze:

$$\text{Sektor } FSP = \frac{\mu}{2} t$$

wenn t die vom Perigeum verflossene Zeit bedeutet, so dass wir haben:

a) . . . $\text{Dreieck } CFS + \frac{\mu}{2} t = \text{Sektor } CSP$

Es ist offenbar nach dem früheren:

$$BS = \frac{b}{a} BS''$$

also wenn BB' genügend klein gewählt, wird wegen:

$$BS \cdot BB' = \frac{b}{a} BS'' \cdot BB'$$

$$BB' \cdot SS' = \frac{b}{a} BB' \cdot S''S'''$$

Zerlegt man die Sektoren BPS und $BS'P$ in solche kleine Vierecke und summiert dieselbe, so folgt leicht:

$$\text{Sektor } BSP = \frac{b}{a} \text{ Sektor } BPS$$

Da nun auch:

$$\text{Dreieck } CBS = \frac{b}{a} \text{ Dreieck } CBS''$$

so folgt durch Summation der letzten zwei Gleichungen:

$$\text{Sektor } CSP = \frac{b}{a} \text{ Sektor } CSP''$$

Nun ist aber, wenn man den Winkel $SCP = E$ (= der **exzentrischen Anomalie**) setzt:

$$\text{Sektor } CS''P = \frac{a}{2} Ea$$

demnach wird:

b) . . . $\text{Sektor } CSP = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{2} Ea = \frac{ab}{2} E$

Nun ist aber:

$$OC = OD = OE = OF = OG = r$$

und

$$i_1 = \frac{1}{2} r DC$$

$$i_2 = \frac{1}{2} r DE$$

$$i_3 = \frac{1}{2} r EF$$

$$i_4 = \frac{1}{2} r FG$$

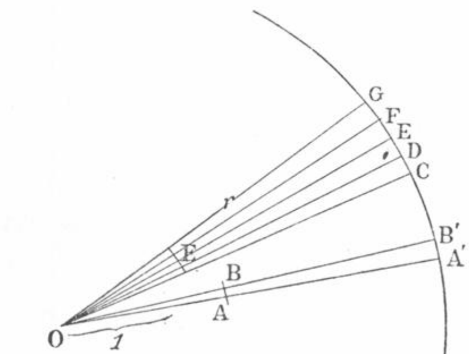
also:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \frac{1}{2} r (DC + DE + EF + FG)$$

$$= \frac{1}{2} r \text{ Bogen } CG$$

$$= \frac{1}{2} r \cdot r E = \frac{1}{2} r^2 E$$

Figur 100.



Erkl. 174. Kepler sagt über diese Gleichung (De Stella Mart. Schluss des IV. Teiles): „Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse, propter arcus et sinus heterogeian. Erranti mihi, quicumque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius."

Kepler drückt sehr richtig das Problem so aus: „aream semicirculi ex quocumque puncto diametri in data ratione secare."

Erkl. 175. Man kann auch Reihen für die Auflösung des vorliegenden Problems in Anwendung bringen. Man findet z. B.:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M$$

$$+ \frac{e^3}{2^3} (3 \sin 3M - \sin M)$$

$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3} (2 \sin 4M - \sin 2M)$$

$$+ \frac{e^5}{2^7 \cdot 3} (5^3 \sin 5M - 3^4 \sin 3M + 2 \sin M)$$

$$+ \cdots$$

Ferner wird:

$$\text{Dreieck } CFS = \frac{1}{2} BS \cdot CF$$

oder da:

$$BS = \frac{b}{a} BS'' = \frac{b}{a} a \sin E = b \sin E$$

und

$$CF = ac$$

auch:

a) . . . Dreieck $CFS = \frac{1}{2} abe \sin E$

Setzt man die gewonnenen Resultate **b)** und **c)** in die Gleichung a) ein, so folgt:

$$\frac{abc}{2} \sin E + \frac{\mu}{2} t = \frac{1}{2} abE$$

oder:

$$96) \ldots E - e \sin E = \frac{\mu}{ab} t$$

In dieser Gleichung ist das berühmte Keplersche Problem enthalten. Man setzt noch:

$$97) \ldots \frac{\mu}{ab} t = M$$

und nennt M die mittlere Anomalie, so dass endlich:

$$98) \ldots E - e \sin E = M$$

wird. Die Hauptaufgabe besteht nun darin, aus einem gegebenen M das E zu berechnen. Dieses kann aber nicht direkt bewirkt werden. Da e hier eine kleine Grösse ist, so wird M nie viel von E verschieden sein und man kann leicht einen Ausdruck angeben, der sofort zu einem uns genügenden Werte von E führt.

Es ist offenbar:

$$(E - M)^2 = (e \sin E)^2$$

$$e^2 - (E - M)^2 = (e \cos E)^2$$

daher:

$$a) \ldots \operatorname{tg}^2 E = \frac{(E - M)^2}{e^2 - (E - M)^2}$$

Ferner wird:

$$\sin (E - M) = \sin (e \sin E)$$

oder wenn man wegen der Kleinheit der Winkel:

$$\sin (e \sin E) = e \sin E$$

setzt:

$$\sin (E - M) = e \sin E$$

woraus:

$$\sin E \cos M - \cos E \sin M = e \sin E$$

und

$$\sin E (\cos M - e) = \cos E \sin M$$

oder:

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}$$

und daher:

$$b) \ldots \operatorname{tg}^2 E = \left(\frac{\sin M}{\cos M - e} \right)^2$$

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M$$
$$+ \frac{e^3}{2^2\cdot 3}(13\sin 3M - 3\sin M)$$
$$+ \frac{e^4}{2^5\cdot 3}(103\sin 4M - 44\sin 2M)$$
$$+ \frac{e^5}{2^6\cdot 3\cdot 5}(1097\sin 5M - 645\sin 3M + 50\sin M) + \cdots$$

Erkl. 176. Man kann eine sehr einfache Konstruktion für den Winkel $E - M$ angeben. Sei ABC ein Dreieck, dessen Seite $AB = e$, und dessen Seite $AC = 1$ und bei dem der Winkel bei $A = M$, so wird nach dem Sinussatze:

$$AB : BC = \sin C : \sin M$$

oder da:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos A}$$
$$= \sqrt{1 - 2e\cos M + e^2}$$

und

$$AB = e$$
$$\sin C = \frac{e\sin M}{\sqrt{1 - 2e\cos M + e^2}}$$

so dass wir wegen des kleinen Winkels:

$$C = EM$$

setzen können.

folgt. Die Gleichsetzung der Formeln a) und b) liefert:

$$E - M = \frac{e\sin M\sin 1''}{\sqrt{1 - 2e\cos M + e^2}}$$

woraus:

$$99)\ \ldots\ E = M + \frac{e\sin M\sin 1''}{\sqrt{1 - 2e\cos M + e^2}}$$

Der Fehler wird kleiner als $\frac{1}{12}e^5$, also da $e = 0{,}016$ so klein, dass er in unseren Rechnungen gar nicht in Betracht kommt.

Frage 97. Wie berechnet man aus der exzentrischen Anomalie die wahre und umgekehrt?

Antwort. Es ist, wie man aus der Figur 101 entnehmen kann:

$$r\cos v = a\cos E - ae$$
$$r\sin v = \frac{b}{a}AC = \frac{b}{a}\cdot a\sin E = b\sin E$$

oder da bekanntlich:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

auch:

$$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

Damit wird:

$$r^2 = (r\sin v)^2 + (r\cos v)^2 = a^2(\cos E - e)^2 + a^2(1 - e^2)\sin^2 E$$

oder geordnet und Wurzel gezogen:

$$100)\ \ldots\ r = a(1 - e\cos E)$$

Sodann folgt:

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e\cos E) + a(\cos E - e)$$

oder:

$$r(1 + \cos v) = a(1 + \cos E)(1 - e)$$

und ebenso:

$$r(1 - \cos v) = a(1 - \cos E)(1 + e)$$

Da nun:

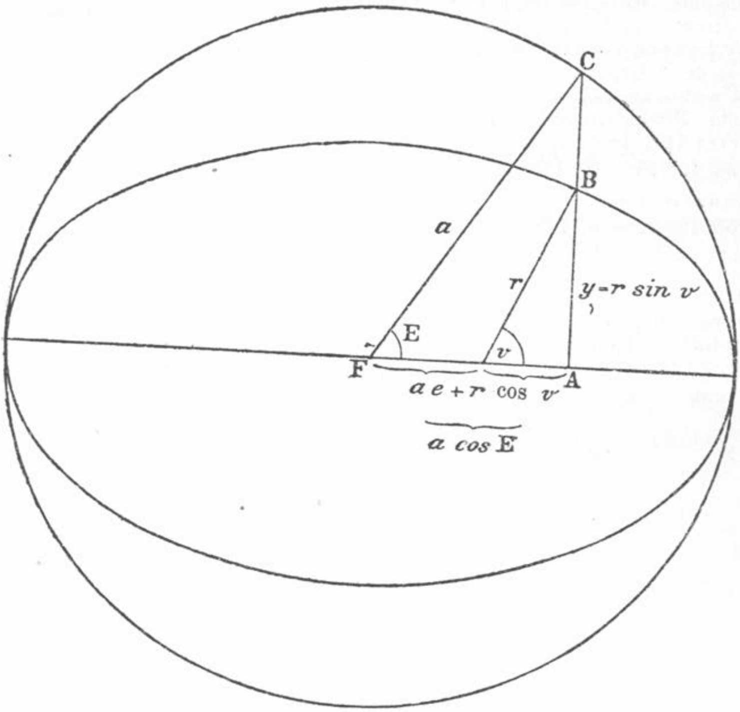
$$\frac{1 + \cos v}{1 - \cos v} = \operatorname{cotg}^2\frac{v}{2}$$
$$\frac{1 + \cos E}{1 - \cos E} = \operatorname{cotg}^2\frac{E}{2}$$

Erkl. 177. Will man r durch M ausdrücken, so gelangt man zu einer unendlichen Reihe.

Es wird:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos M - \frac{e^2}{2}(\cos 2M - 1)$$
$$- \frac{e^3}{2^3}(3\cos 3M - 3\cos M)$$
$$- \frac{e^4}{3}(\cos 4M - \cos 2M)$$
$$- \frac{e^5}{2^7\cdot 3}(5^3\cos 5M - 5\cdot 3\cos 3M + 5\cdot 2\cos M) + \cdots$$

Figur 101.



so folgt durch Division der vorletzten zwei Gleichungen:

$$101) \ldots \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

und

$$102) \ldots \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

Damit ist unser Problem gelöst. Setzt man noch:

$$103\text{a}) \ldots e = \cos \varphi$$

so wird wegen:

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

auch:

$$103\text{b}) \ldots \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Frage 98. Was versteht man unter der Mittelpunktsgleichung?

Antwort. Unter der Mittelpunktsgleichung versteht man den Winkel zwischen der wahren und mittleren Sonne. Ihr Wert ist also durch die Grösse:

$$v - M$$

gegeben. Man kann diesen Wert analog wie

Erkl. 178. In Bezug auf die Mittelpunktsgleichung mögen folgende Bemerkungen genügen:

Sie hat ein positives Maximum etwa Anfangs April und wird Null etwa Anfangs Juli, um im Anfang des Monats Oktober das negative Minimum und mit dem Jahresanfang wieder den Wert Null zu erreichen.

Die sogenannte Mittelpunktsgleichung war schon in den ältesten Zeiten bekannt und führte den Namen Prostaphaeresis (zusammengezogen aus dem Griechischen prosthesis Addition und aphairesis Subtraktion).

Die grösste Mittelpunktsgleichung beträgt nach Le Verier (für 1850, $t = 0$):

$$1^0\,55'\,18''78 - 0'',175\,t$$

oder nach Hansen (für 1850, $t = 0$):

$$1^0\,55'\,19''22 - 0,171\,t$$

Erkl. 179. Um aus der Mittelpunktsgleichung und der wahren Länge der Sonne L die Zeitgleichung zu finden, kann man sich auch der Formel:

$$\text{Zeitgleichung} = \text{Mittelpunktsgleichung} - \mathrm{tg}^2\frac{E}{2}\sin 2L + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^4\frac{E}{2}\sin 4L - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^6\frac{E}{2}\sin 6L + \cdots$$

bedienen.

Leverrier, Urbain Joseph Jean, geboren 11. März 1811 zu Saint-Lô im Dep. La Manche, gest. 23. Sept. 1877 als Direktor der Sternwarte zu Paris. Durch die rechnerische Entdeckung Neptuns und seine Arbeiten auf dem Gebiete der theoretisch-rechnerischen Astronomie, insbesondere durch seine Tafeln der Himmelskörper hat er seinen Namen unsterblich gemacht. Wenn wir jetzt die Bahnen und Bewegung fast sämtlicher Hauptplaneten mit einer fast vollkommenen Genauigkeit kennen, so verdanken wir es zum grössten Teil Leverrier, der ihnen ein ganzes Leben geweiht.

Am 27. Juni 1889 wurde im Garten der Pariser Sternwarte in aller Stille von dem berühmten Physiker Fizeau sein Denkmal enthüllt, welches die einfache Inschrift zeigt:

U. J. J. Leverrier
1811—1877
Souscription internationale.

Erkl. 180. Für die Erdelemente seien folgende Gewährsmänner angeführt:

Hansen. Epoche 1850, Jan. 0 m. Par. Z.

Mittl. Länge $= 99^0\,47'\,54''\,69 + 1296027''\,702\,t$

Lange des Perihels $= 100^0\,21'41''\,02 + 61''5953\,t$

Le Verrier. Epoche 1850, Jan. 1. m. Par. Z.

Mittl. Länge $= 100^0\,46'\,43''\,51 + 1296027''\,678\,t$

Länge des Perihels $= 100^0\,21'\,21''\,5 + 61''\,6995\,t$

Um diese Zahlen für die Sonne zu erhalten, hat man zu den gegebenen Werten einfach 180^0 zu addieren, so wird z. B. die mittl. Länge der Sonne für 1850, Jan. 1.:

$$280^0\,46'\,43''\,51$$

u. s. w.

wir es oben thaten, durch die Reihe (gültig für 1850):

104a) . . . $v - M = 6918''\,37 \sin M + 72''\,52 \sin 2M + 1''\,05 \sin 3M$

ausdrücken oder genauer:

104b) . . . $v - M = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \cdots$

wobei wir den für das betreffende Jahr geltenden Wert von e einzusetzen haben. Die allgemeine Gleichung kann nur mit Hilfe der höheren Analysis abgeleitet werden, weswegen wir uns begnügen, sie hier einfach anzuführen. (Vergl. Brünnow, Lehrb. d. sphärischen Astronomie, IV. Aufl., p. 95.) Man könnte auch ohne die obige Reihe aus M zunächst E mittels der Formel:

$$E - e\sin E = M$$

und sodann v mittels der Formel:

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}$$

oder:

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2} = \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}$$

berechnen und so den Wert:

$$v - M$$

darstellen.

Da die scheinbare Winkelbewegung der Sonne gleich der Winkelbewegung der Erde um die Sonne ist, so erhält man die wahre Länge der Sonne, wenn man zu v die Perihellänge π hinzuaddiert. Es wird also:

$$L = v + \pi$$

$M + \pi$ wird sodann die sogen. mittlere Länge darstellen, d. h. die Länge der fingierten mittleren Sonne, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Ekliptik bewegt. Bezeichnen wir diese mit λ, so folgt:

105a) . . . $L = \lambda + 6918''\,37 \sin M + 72''\,52 \sin 2M + 1''\,05 \sin 3M + \cdots$

Um nun endlich auch die Rectascension A der Sonne zu erhalten, erinnern wir uns, dass:

106a) . . . $\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} L \cos E$

wo E die Schiefe der Ekliptik ist.

Setzt man:

$$E = 23^0\,27'\,31''$$

so kann man auch hier leicht eine Reihe erhalten, es wird:

106b) . . . $A = L - 8891''\,56 \sin 2L + 191''\,65 \sin 4L - 5''\,51 \sin 6L + \cdots$

Der periodische Teil, mit umgekehrten Zeichen genommen, wird die Reduktion auf die Ekliptik genannt.

Frage 99. Wie findet man die mittlere und wahre Länge der Sonne für irgend eine Zeit?

Antwort. Sei μ die mittlere tägliche tropische Bewegung der Sonne und L_T die Länge zu einer Zeit T, so findet man die Länge L_t für die Zeit t aus der Formel:

$$105\text{b}) \ldots L_t = L_T + (t - T)\mu$$

Man kann sich merken, dass in 100 Jahren:

36524,25 Tage

verfliessen, welche die Kalenderreform wie folgt verteilt:

$$L_{1300} = L_{1400} - 36525\,\mu$$
$$L_{1400} = L_{1500} - 36525\,\mu$$
$$L_{1500} = L_{1600} - 36515\,\mu$$
$$L_{1600} = L_{1700} - 36524\,\mu$$
$$L_{1700} = L_{1800} - 36524\,\mu$$
$$L_{1900} = L_{1800} + 36524\,\mu$$
$$L_{2000} = L_{1900} + 36525\,\mu$$
$$L_{2300} = L_{2000} + 36524\,\mu$$

u. s. w.

Für die dazwischen liegenden Jahre hat man z. B.:

$$L_{1743} = L_{1700} + 43 \cdot 365\,\mu + 10\,\mu$$
$$L_{1876} = L_{1800} + 76 \cdot 365\,\mu + 19\,\mu$$

Für weitere Reduktionen kann man sich Tafel XX, sowie der Zahlen auf Seite 42 mit Vorteil bedienen.

Es ist indessen zu bemerken, dass:

$$365{,}242201\,\mu = 360^0$$

dieser Betrag hat also für das Resultat nichts zu bedeuten, man kann demnach:

$$t - T$$

grösser ist als 365,242201 diese Zahl so oft als möglich von $t - T$ subtrahieren und dann erst den Rest mit μ zu multiplizieren. Da das gemeine Jahr:

365 Tage

das Schaltjahr dagegen:

366 Tage

beträgt, so wird, wenn in:

$$t - T$$

m Schaltjahre, n gemeine Jahre und p Tage vorkommen:

$$L_t = L_T - 0{,}242201\,n\,\mu + 0{,}757799\,m\,\mu + p\,\mu$$

oder kürzer, da:

$$0{,}242201\,\mu = 14'\,19''\,39853$$
$$= 0^m\,57^s\,29324$$

und

$$0{,}757799\,\mu = 44'\,48''\,93189$$
$$= 2^m\,59^s\,26213$$

auch:

$$105\text{c}) \ldots L_t = L_T - 14'\,19''\,39853\,n + 42'\,48''\,93189\,m + 59'\,8''\,3304\,p$$
$$105\text{d}) \ldots L_t = L_T - 57^s\,29324\,n + 2^m\,58^s\,26213\,m + 3^m\,56^s\,5554\,p$$

Erkl. 181. Im Jahre 1582 nach Chr. hat man die noch jetzt gebräuchliche Kalenderreform vorgenommen. Vor diesem Jahre sind ohne Ausnahme alle durch vier teilbare Jahre Schaltjahre von 366 Tagen. Im Jahre 1582 selbst hat man 10 Tage weggenommen, indem man nach dem 4. Oktober dieses Jahres unmittelbar den 15. zählte. Nach dem Jahre 1582 sind wieder alle durch vier teilbare Jahre Schaltjahre, alle Jahre aber, deren zwei letzte Ziffer 00 sind, also 1600, 1700, 1800, 1900 ··· etc. gemeine Jahre. Durch diese Einrichtung ist die Länge des bürgerlichen Jahres:

$365{,}2425^d$

also um:

0,000246

grösser als die des tropischen.

Stellt man die verschiedenen Jahreslängen zusammen, so ergibt sich folgendes:

Astronomisches	Jahr	365^t 24220
Gregorianisches	„	24250
Persisches	„	24286
Julianisches	„	25000

Erkl. 182. $+10$, wegen der Schaltjahre, weil:

$$43 : 4 = 10 + \cdots$$

ebenso $+19$, weil:

$$76 : 4 = 19 + \cdots$$

Erkl. 183.

$$0 \cdot 242201 = 365{,}242201 - 365$$
$$0 \cdot 757799 = 366 - 365{,}242201$$

Um nun in aller Strenge aus der mittleren Länge der Sonne die wahre Länge zu berechnen, hat man nach Le Verriers Sonnentafeln:

$$\begin{aligned} L = \lambda & + 6918'' \, 3 \sin M \\ & + \ 72'' \, 5 \sin 2M \\ & + \ 1'' \, 1 \sin 3M \\ & - \ 17'' \sin ☊☾ \\ & + \ 6'' \sin (M + \pi) \\ & - \ 17'' \, 51 \, t \sin M \\ & - \ 0'' \, 375 \, t \sin 2M \\ & - \ 0'' \, 0564 \, t^2 \sin M \end{aligned}$$

Erkl. 184. ☊☾ ist die Länge des aufsteigenden Mondknotens, π ist die Perihellänge der Erde.

Dabei ist t die seit 1850·0 verflossene Zeit im Julianischen Jahrhundert (36525 Tagen ausgedrückt).

Frage 100. Welches **sind** und wie werden **bestimmt** die Elemente der **Sonnenrotation**?

Antwort. Unter den Elementen der Sonnenrotation versteht man die Angabe der **Neigung des Sonnenäquators** gegen die Ebene der Ekliptik und die **Länge des aufsteigenden Knotens** desselben, sowie die Angabe der **Umdrehungszeit** der Sonne.

Die Beobachtung der Sonnenflecke ergibt für diese Grösse (vergl. Erkl. 185) folgende Werte:

$$\text{Neigung } 7\frac{1}{2}^{0}$$

$$☊ \ 70^0$$

$$\text{Umdrehungszeit } 25\frac{1}{2} \text{ Tag}$$

Diese Elemente sind aber als Näherungswerte anzusehen und selbst die neuesten Bestimmungen weichen von einander bedeutend ab.

Spörer, der sich überhaupt sehr viel mit der Sonne beschäftigt hat, gab im Jahre 1868 folgende Werte an:

$$i = 6^0 \, 58'$$

$$☊ = 74^0 \, 36'$$

$$\text{Umdrehungszeit } 25^{tg} \, 5^{st} \, 37^{m}$$

Nach **Wolf**, einem der bedeutendsten Forscher sowohl auf dem Gebiete der Geschichte als auch auf dem Gebiete der Solarastronomie, beträgt die Rotationsdauer um die Zeit des Maximums der Sonnenflecken:

$$23^{tg} \, 7^{st} \, 15^{m}$$

und um die Zeit des Minimums:

$$25^{tg} \, 14^{st} \, 23^{m}$$

Die älteste Bestimmung von **Scheiner** (1630 Rosa Ursina p. 562) gibt:

$$i = 7^0$$

$$☊ = 70^0$$

$$\text{Rotationsdauer} = 25 \text{ Tage}$$

gültig für das Jahr 1626.

Erkl. 185. Man sieht fast regelmässig auf der Sonne gewisse dunklere Gebiete, die man Sonnenflecken nennt. Die ihnen gemeinsamen Erscheinungen sind folgende:

1) Ihr Eintritt geschieht auf der östlichen Seite, sie bewegen sich also wie die Planeten vom Westen nach Osten, von der Sonne aus gesehen.

2) Ihre Bahn ist eine Gerade zu Ende Mai und Anfang Juni, sodann bis Dezember eine Ellipse, deren hohle Seite gegen Norden gekehrt ist, sodann wieder am Anfang Dezember eine Gerade und von nun an eine Ellipse, deren hohle Seite nunmehr nach Süden gekehrt ist.

3) Am Anfang März, wo die Ellipse am grössten ist, ist das Verhältnis der halben grossen Achse zu der kleinen wie 100 zu 13.

4) Flecke, die lange genug dauern, erscheinen nach 27 Tagen wieder an derselben Stelle der Sonnenscheibe.

Aus 2) folgt, dass sich die Erde zu Ende Mai und anfangs Dezember in der Ebene des Sonnenäquators befindet. Demnach ist die Länge des Knotens ungefähr 70⁰.

Aus 3) folgt, dass, da der Sinus des Neigungswinkels des Auges oder der Ekliptik gleich ist:

$$\frac{13}{100}$$

dass diese Neigung selbst etwa $7\frac{1}{2}^{0}$ beträgt.

Aus 4) folgt endlich die Rotationsdauer zu $25\frac{1}{2}$ Tag, weil in 27 Tagen die Erde etwa 27^0 zurücklegt, einen Winkel, den die Sonnenflecken in 2 Tagen durchlaufen.

Erkl. 186. Wie schon Scheiner (1626) entdeckte, ist die Rotationsgeschwindigkeit der Sonnenflecken eine Funktion der heliozentrischen Breite. Sei dieselbe φ, so ist nach den neuesten Bestimmungen von Spörer (1867) die Winkelgeschwindigkeit in einem Tage gleich:

$$1011'0 - 202'8 \sin(\varphi + 41^0\,13')$$

Auch zeigt die Häufigkeit der Sonnenflecken eine Periode von etwa 11 bis 12 Jahren und zwar nach Wolf (1852) 11,11 und nach Spörer (1881) 11,31.

Es dürfte nicht uninteressant sein, die Neigungen der einzelnen Planetenbahnen gegen den Sonnenäquator kennen zu lernen.

Merkur	$2^0\,54'$
Venus	$4^0\;\;9'$
Erde	$7^0\,30'$
Mars	$5^0\,50'$
Jupiter	$6^0\,24'$
Saturn	$5^6\,57'$
Uranus	$6^0\,44'$
Neptun	$9^0\;\;7'$

b) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Wie gross war der Betrag der mittleren Anomalie am 20. Febr. 1884 im mittleren Greenwicher Mittag?

Auflösung. Es wird offenbar $M = 0$, wenn E und $v = 0$ sind, also ist die mittlere Anomalie gleich Null, wenn sich die Erde im Perihel befindet.

Wir haben also zunächst jene Zeit zu ermitteln, um welche sich die Erde im Anfang des Jahres 1884 im Perihel befand.

Nach der Formel 88) ist für das Jahr:

$$1850 + t$$

$$\pi = 280^0\,21'\,21''\,5 + 61''\,700 \cdot t$$

also da $t = 34$:

$$\pi = 280^0\,56'\,19''\,3$$

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{r} 61''7 \cdot 34 \\ \hline 1851 \\ 2468 \\ \hline 2097''8 = 34'\,57''\,8 \end{array}$$

Da nun nach der Formel 89):

$$v = L - \pi$$

so wird, wenn $v = 0$ ist:

$$L = \pi$$

also:

$$L = 280^0\,56'\,19''\,3$$

Wir haben nun nachzusehen, um welche Zeit die Sonne diese Länge hatte.

Das Nautical-Almanac für 1884 gibt folgende Daten:

$$\begin{array}{rl} \text{Januar 1.} & E = 280^0\,32'\,24''\,8 \\ 2. & L = 281^0\,33'\,35''\,6 \end{array}$$

Wir sehen, dass es zwischen 1. und 2. Januar war. Drücken wir die Zeit in Tagen aus, so wird:

$$L = \alpha + \beta t$$

also für:

$$\begin{array}{ll} L \text{ am 1. Januar} & t = 0 \\ L \;\;„\;\; 2. \;\;\;„ & t = 1 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$L = 280^0\,32'\,24''\,8 + 60'\,10''\,8\,t$$

Wir fragen, wann ist:

$$L = 280^0\,56'\,19''\,3$$

so haben wir die Gleichung:

$$280^0\,56'\,19''\,3 = 280^0\,32'\,24''\,8 + 60'\,10''\,8\,x$$

oder:

$$23'\,54''\,5 = 60'\,18''\,8\,x$$

Hilfsrechnung.

Es ist:

$$60' 18'' 8 = 3618'' 5$$
$$23' 54'' 5 = 1434'' 5$$

also:

$$\log 1434'' 5 = 3,15670$$
$$\log 3618'' 8 = 3\cdot 55772$$
$$\log x = 9\cdot 59908$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{1434'' 5}{3618'' 8} = 0{,}39726$$

Es war daher die Erde im Perihel am:

Jan. 1,39726

Vom Anfang des Jahres 1884 bis 21. Februar sind aber 31 und 20 Tage verflossen, also im ganzen:

51,00000

Tage, daher vom Perihel:

49,60274

Tage. Nach der Formel 97) ist aber:

$$M = t\frac{\mu}{ab}$$

und nach der Formel 94):

$$\mu = \frac{2ab\pi}{T}$$

so dass:

$$107) \ldots M = t\frac{2\pi}{T}$$

Die Grösse $\frac{2\pi}{T}$ kann man demnach die mittlere siderische Bewegung der Erde nennen, es ist dieses diejenige tägliche Bewegung, welche die Erde haben würde, wenn dieselbe den vollen Umkreis um die Sonne in der Zeit T mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschriebe.

Da nun die siderische Umlaufzeit der Erde:

$$T = 365\cdot 25636^d$$

beträgt, so wird:

$$\frac{2\pi}{T} = 3548'' 19826$$

Da nun nach dem Obigen:

$$t = 49{,}60247$$

war, so wird:

$$M = 3548'' 19286 + 49{,}60274$$

oder:

$$M = 48^0 53' 35''$$

Erkl. 187. Es ist sofort klar, dass die mittlere Anomalie = mittleren Länge — Länge des Perihels. Da nun nach Bessel die mittlere Länge der Sonne für das Jahr:

$$1800 + t$$
$$= 280^0 23' 35'' 525 + 27'' 605844 t$$
$$+ 0'' 0001221805 t^2 - 14' 47'' 083 r$$

ist, wobei v der Rest der Division durch 4 von t in einem gemeinen Jahr, dagegen $r = 4$ in einem Schaltjahr ist, so findet man die mittlere Anomalie desselben Jahres zu:

$$53' 27'' 135 - 33'' 9113 t$$
$$- 0{,}000081616 t^2 - 14' 47'' 083 r$$

wobei die Bezeichnungen dieselben sind.

So war z. B. für das

Jahr:	mittl. Länge:	mittl. Anomalie:
1875	280⁰ 13′ 45,4″	359 26′ 4,08″
1876	279 59 25,5	359 11 21,08
1877	280 44 15,2	359 55 7,81
1878	280 29 55,4	359 39 47,39
1879	280 15 35,9	359 24 25,99
1880	280 1 16,4	359 9 5,39
1881	280 46 5,3	359 52 52,91
1882	280 31 45,9	359 37 31,70
1883	280 17 26,4	359 22 10,70
1884	280 3 6,5	359 6 49,69

Mittlere Bewegung in:

30 Tagen	29 34 9,9″	29 34 4,8
10 Tagen	9 51 23,3″	9 51 21,6″
1 Tage	59 8,33″	59 8,6″
12 Stunden	29 34,16″	29 34,08″
1 Stunde	2 27,85″	2 27,84″

Aufgabe 60. Welches war die wahre Länge der Sonne, sowie ihre Rectascension am 20. Februar 1884?

Auflösung. Nachdem wir die mittlere Anomalie an diesem Tage bestimmt haben, bestimmen wir aus der Gleichung 98):

$$E - e\sin E = M$$

die exzentrische Anomalie E und hierauf aus der Gleichung 101) die wahre:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

Sodann wird nach der Formel 89):

$$L = v + \pi$$

oder wir rechnen direkt nach der Formel 104):

$$v = M + 6918''37 \sin M + 72''52 \sin 2M + 1''05 \sin 3M$$

Man hat also, wenn man die letztere Formel benützt, folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl} M = & 48^0\,53'\,35''0 \\ 6918''37 \sin M = & 1^0\,26'\,52''7 \\ 72''52 \sin 2M = & 1'\,11''8 \\ 1''05 \sin 3M = & 0''6 \\ \hline v = & 50^0\,21'\,40''1 \\ \pi = & 280^0\,56'\,27''9 \\ \hline L = & 331^0\,18'\,8''0 \end{array}$$

während das Nautical-Almanac:

$$L = 331^0\,18'\,1''9$$

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{array}{rl} \log 6918''37 = & 3{\cdot}44000 \\ \log \sin M = & 9{\cdot}87706 \\ \hline & 3{\cdot}71706 = \text{numlog}\ 5212''7 \\ \log 72''52 = & 1{\cdot}86046 \\ \log \sin 2M = & 0{\cdot}99598 \\ \hline & 1{\cdot}85644 = \text{numlog}\ 71''8 \\ \log 1''05 = & 0{\cdot}02119 \\ \log \sin 3M = & 9{\cdot}73980 \\ \hline & 9{\cdot}76099 = \text{numlog}\ 0''6 \end{array}$$

Die geringe Abweichung von etwa 6″ kommt auf Rechnung der fünfstelligen Logarithmentafeln und der nichtberücksichtigten kleinen Korrektionen infolge der Nutation. Auch gilt die obige Formel für 1850 und nicht streng für 1884. Für dieses Jahr werden nach der Formel 104b), da die Schiefe der Ekliptik abnimmt, die Koeffizienten kleiner.

Es wird dabei v um etwa 1″ kleiner.

Um die Rectascension zu berechnen, bedienen wir uns der Formel 106a).

Diese liefert:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} L \cos E$$

Nun ist für das Jahr 1884:

$$E = 23^0\,27'\,16''$$

also haben wir:

$$A = 22^h\,13^m\,20^s$$

während das Nautical-Almanac:

$$A = 22^h\,13^m\,21^s\,9$$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rl} \operatorname{tg} L = & 9_n73834 \\ \cos E = & 9{\cdot}96255 \\ \hline \operatorname{tg} A = & 9_n70089 \\ A = & 333^0\,20'\,0'' \end{array}$$

Dieses nach der Tafel in Zeit umgewandelt gibt das nebenstehende Resultat.

Aufgabe 61. Wie gross war die Zeitgleichung am 20. Februar 1884?

Auflösung. Die Zeitgleichung ist nach unserer Definition der Unterschied der Rectascension der wahren und der mittleren Sonne. Die mittlere Länge der Sonne (vergl. p. 152) betrug am 1. Jan. 1850 0^h mittlerer Pariser Zeit:

$$280^0\,46'\,43''5$$

also um 0^h mittlere Greenwicher Zeit:

$$280^0\,46'\,43''5 + 23''0$$

demnach:

$$280^0\,47'\,6''5 = 18^h\,43^m\,8^s\,43$$

Von dieser Zeit bis 20. Februar 1884 sind 8 Schaltjahre 26 Gemeinjahre und 51 Tage.

Erkl. 188. Die Längendifferenz zwischen Paris und Greenwich beträgt:

$$9^m\,21^s$$

Die mittlere tropische Bewegung der Sonne ist (nach der Tafel auf Seite 42):

$$2''46 \text{ in 1 Minute}$$
$$0''041 \text{ in 1 Sekunde}$$

also:

$$9 \cdot 2''46 + 0''041 \cdot 21 = 23''$$

die Korrektion:

Wir haben also (nach Seite 42)

für 8 Schaltjahre	$0^h\ 23^m\ 54^s\ 10$
50 Tage	$3^h\ 17^m\ 7^s\ 77$
	$3^h\ 41^m\ 1^s\ 87$
ab 26 Gemeinjahre	$24^m\ 49^s\ 33$
	$3^h\ 16^m\ 12^s\ 56$
	$18^h\ 43^m\ 8^s\ 43$
	$22^h\ 59^m\ 20^s\ 99$

Es war aber die wahre Rectascension gleich:

$22^h\ 13^m\ 20^s\ 00$

also ist die Zeitgleichung:

$13^m\ 59^s$

während das Nautical Almanac

$13^m\ 58^s\ 4$

hat.

Erkl. 189. Man kann die Zeitgleichung leicht in eine Reihe entwickeln. Bezeichnet L die mittlere Länge der Sonne, so wird dieselbe für 1890:

$$= 93''4 \sin L - 596''2 \sin 2L - 4''0 \sin 3L + 13{,}2'' \sin 4L + \cdots + 432''3 \cos L + 1''8 \cos 2L - 18''6 \cos 3L - \cdots$$

Aufgabe 62. Es ist die Länge der vier Jahreszeiten zu berechnen.

Auflösung. Man hat:

1850 Jan. 1. mittl. Par. Zeit

Länge des Perihels $280^0\ 21'\ 21''\ 5$

" " ♈ 360^0

Daher die wahre Anomalie des Frühlingspunktes:

$79^0\ 38'\ 38''\ 5$

addiert man hinzu:

$90^0\ 180^0\ 270^0$

so erhält man die Anomalien des Sommer-, Herbst- und Winterpunktes.

Rechnen wir damit die exzentrischen Anomalien E nach der Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

und hieraus die mittleren Anomalien nach der Formel:

$$M = E - e \sin E$$

so ergibt sich:

$$M = 77^0\ 45'\ 28''$$
$$= 169^0\ 17'\ 39''$$
$$= 261^0\ 32'\ 19''$$
$$= 349^0\ 59'\ 7''$$

Dividiert man diese durch die mittlere tropische Bewegung der Sonne, so folgt:

78,8902	Tage	Differenz
171,7599	"	92,8697
265,3473	"	93,5874
355,0818	"	89,7345

so dass also die Dauer des

Frühlings $= 92^d\ 20^h\ 52^m$

Sommers $= 93^d\ 14^h\ 6^m$

Herbstes $= 89^d\ 17^h\ 38^m$

Erkl. 190. Die Aequatorial- und Solstitialpunkte liegen je 90^0 von einander entfernt. Da nun die Länge des Perigeums bekannt ist, so ist damit auch die Länge der vier Punkte gegeben. Die Zeiten, die die Sonne braucht, um von einem Punkte zum andern zu gelangen, geben die Länge der Jahreszeiten.

Erkl. 191. Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, nach Connaissance des temps die diesbezüglichen Daten für das Jahr 1864 anzugeben. Es findet sich:

1864

Anfang des Frühlings	20. März	8^h	19^m	früh
" " Sommers	21. Juni	1^h	5^m	"
" " Herbstes	22. Sept.	7^h	25^m	abends
" " Winters	21. Dez.	1^h	13^m	"

1865

" " Frühlings	20. März	2^h	15^m	"

Daraus folgt die Dauer für 1864:

des Frühlings zu $92^d\ 20^h\ 41^m$

" Sommers " $93^d\ 14^h\ 24^m$

" Herbstes " $89^d\ 17^h\ 48^m$

" Winters " $89^d\ 1^h\ 2^m$

Also dauerten Frühling und Sommer:

$186^d\ 11^h\ 5^m$

ferner Herbst und Winter:

$178^d\ 18^h\ 50^m$

Die Differenz ist:

$7^d\ 16^h\ 15^m$

also nahezu 8 Tage.

Wie man sieht, ändern sich diese Verhältnisse sehr wenig. Der Leser kann zur eigenen Uebung die angeführten Daten verifizieren.

Erkl. 192. Es verweilt demnach die Sonne etwa $7\frac{1}{2}$ Tage länger auf der nördlichen Halbkugel und demnach wird im allgemeinen die nördliche Erdhälfte wärmer als die südliche.

und der Rest gibt die Dauer des Winters zu $89^d\ 1^h\ 13^m$

Frühling und Sommer dauern:

$186^d\ 10^h\ 58^m$

Winter und Herbst:

$178^d\ 18^h\ 51^m$

Aufgabe 63. Man soll sämtliche Sonnenelemente für 1875 Mai 6. 0^h mittl. Par. Zeit berechnen.

Auflösung.

1. Mittlere Länge und mittl. Anomalie.

Nach Erkl. 192 folgt aus den mitgeteilten Formeln:

Mittlere Länge der Epoche	=	280° 13′ 45″ 4
Mittl. Bewegung in 4 × 30^t	=	118 16 39″ 6
„ „ „ 5^t	=	4 55 41″ 65
„ „ „ 12^h	=	29 34″ 16
		403° 55′ 40″ 81

also die mittlere Länge der Epoche:

$$\lambda = 43^0\ 55'\ 40''\ 81$$

Analog die mittlere Anomalie:

der Epoche	=	359° 26′ 42″ 08
4 × 30^t	=	118 16 19″ 2
5^t	=	4 55 40″ 8
12^{st}	=	29 34″ 08
		483° 8′ 16″ 16

also die mittlere Anomalie:

$$M = 123^0\ 8'\ 16''\ 16$$

Erkl. 192a. Die Zwischenzeit beträgt:

Januar	31
Februar	28
März	31
April	30
Mai	5 12
	$125^t\ 12^h = 4 \times 30^t + 5^t\ 12^h$

2. Sternzeit im mittl. Pariser Mittag.

Es ist:

Mittl. Länge = Rectascension der mittl. Sonnen und diese ist im Meridian gleich der Sternzeit, also ist in Stunden verwandelt:

$$43^0\ 55'\ 40''\ 81 = 2^h\ 55^m\ 42^s\ 72$$

die Sternzeit im mittl. Par. Mittag 6. Mai 1875.

Hilfsrechnung 1.

$$\log 6918''\,37 = 3{\cdot}830000$$
$$\log\sin 123^0 8' 16''\,16 = 9{\cdot}922915$$
$$3{\cdot}762915\ \text{n.} \quad = 5793{\cdot}15$$
$$\log 72''\,52 = 2{\cdot}860458$$
$$\log\sin 2\cdot 123^0 8' 16''\,16 = 9_n 961654$$
$$1_n 822112\ \text{n} = -66{\cdot}39$$
$$5726{\cdot}76$$

$$5726''\,76$$
$$3600'' = 1^0$$
$$2126''\,76 = 35'\ 26''\ 76$$
$$2100''$$

3. Wahre Länge der Sonne.

Wir fanden:

Wahre Länge = Mittl. Länge + Mittelpunktsgleichung

nach der Formel 105a) zu berechnen.

Man findet:

	Mittelpunktsgleichung	=	1° 35′ 26″ 76
dazu:	Mittlere Länge	=	43° 55′ 40″ 81
daher:	Wahre Länge L	=	45° 37′ 7″ 57

4. Deklination und Rectascension.

Die Deklination ist nach Formel 106a) oder b) zu rechnen.

Man hat:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} L \cos E$$
$$\sin D = \sin L \sin E$$

also da:

$$E = 23^0\ 27'\ 20''$$

Hilfsrechnung 2.

$$\log\operatorname{tg} 45^0\ 31'\ 7''\,57 = 0{\cdot}007864$$
$$\log\cos E = 9{\cdot}962554$$
$$\log\operatorname{tg} A = 9{\cdot}970418$$
$$\log\sin 45^0\ 31'\ 7''\,57 = 9{\cdot}853381$$
$$\log\sin E = 9{\cdot}599924$$
$$\log\sin D = 9{\cdot}453305$$

so findet man:

$$A = 2^h\, 52^m\, 12^s 05$$
$$D = 16^0\, 29'\, 55''$$

5. Zeitgleichung.

Diese ist nach der Definition der Unterschied:

Rectasc. wahre Sonne — Rectasc. mittl. Sonne also:

$$2^h\, 52^m\, 12^s 05 - 2^h\, 55^m\, 42^s 72$$

d. h.:

$$-3^m\, 30^s 67$$

6. Der Radiusvektor.

Wird am bequemsten aus der in der Erkl. 177 mitgeteilten Reihe (hier ist $a = 1$):

$$r = 1 - e\cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) - \cdots$$

berechnet.

Da hier:

$$M = 123^0\, 8'\, 16''16$$
$$e = 0{,}016767$$

so folgt:

$$r = 0{,}0093628$$

Man kann wegen:

$$1 - \cos 2M = 2\sin^2 M$$

auch einfacher:

$$r = 1 - e\cos M + e^2 \sin^2 M - \cdots$$

schreiben.

Stellen wir nun die gewonnenen Resultate mit den Angaben der Pariser Ephemeriden zusammen, so ergibt sich:

Hilfsrechnung 3.

$$\log e = 8\cdot224455$$
$$\log\cos M = 9\cdot737712$$
$$7{,}962167 \quad \text{numlog} = 0\cdot0091657$$
$$2\log e = 6\cdot448910$$
$$2\log\sin M = 9\cdot845830$$
$$6\cdot294740 \quad \text{numlog} = 0\cdot0001971$$
$$\text{Summe} = 0\cdot0093628$$

Erkl. 193. Die Abweichungen der berechneten Werte mit den Beobachteten, sind auf die Rechnung der hier nicht berücksichtigten Störungen infolge der gegenseitigen Einwirkung der Planeten aufeinander, zu setzen.

Element	Berechnet	Beobachtet	Differenz
Sternzeit	$2^h\, 55^m\, 42^s 72$	$2^h\, 55^m\, 42^s 94$	$-0^s 22$
L	$45^0\, 31'\, 7''57$	$45^0\, 31'\, 12''9$	$-5''33$
D	16 29 55	16 30 $2''6$	$-7''6$
A	$2^h\, 52^m\, 12^s 05$	$2^h\, 52^m\, 12^s 12$	$-0''07$
Zeitgleichung	$-\ 3^m\, 30^s 7$	$-\ 3^m\, 30^s 8$	$+0^s 1$
Radiusvektor	1,0093628	1,0093833	$-0{,}0000205$

K. Ueber die Theorie des Mars und der Planetenerscheinungen.

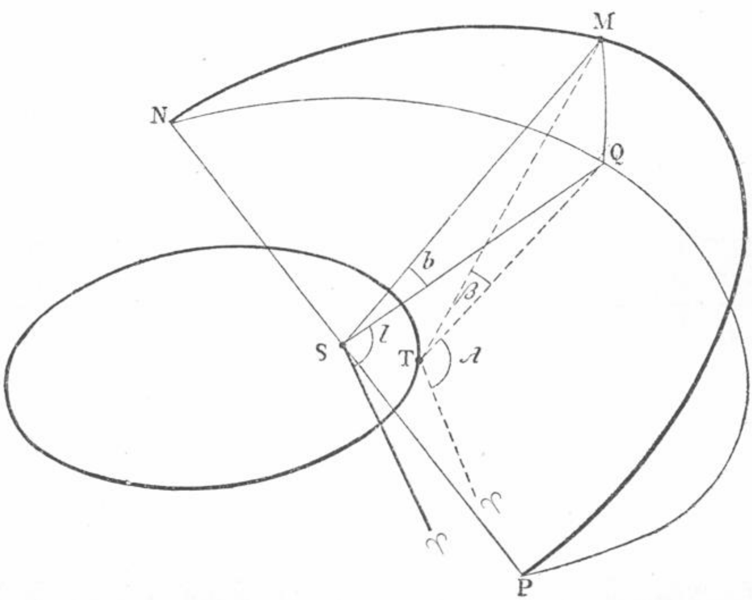
Anmerkung 19. Für die Theorie der Planetenbewegungen liefert uns die Geschichte der Astronomie in Keplers Arbeiten ein wunderbares Beispiel. Tyge Brahe hatte die Beobachtung so verfeinert, dass er auf eine Minute sicher beobachtete, welches Verdienst auch auf seinem Grabstein angeführt wird. Kepler bearbeitete diese Beobachtungen zunächst nach der alten Epicykeltheorie, fand dabei aber Abweichungen, die grösser waren als die Beobachtungsfehler, die man den Tyge-Braheschen Beobachtungen zumuten konnte und als deren Grenze Kepler etwa zwei Bogenminuten annahm. Nun zeigte ihm aber eine Rechnung nach der alten Hypothese eine Abweichung von 8 Minuten. Da war es nun klar, dass die alte Vorstellung unzureichend war und dass man nach einer neuen suchen musste. „Sola igitur haec octo minuta viam praeiverunt ad totam astronomiam reformandam“ sagt dieser unsterbliche Forscher in seinem Hauptwerke de Stella Martis, cap. XIX, p. 114. Kepler gründete seine Theorie einzig und allein auf die Beobachtungen, für ihn war nicht die Philosophie des Almagest (Lib. IX, Cap. 2: „aequales enim circularesque motus divinorum corporum naturae conveniunt, unde inordinatio et dissimilitudo longe abest“) massgebend. Ohne irgend welche Voreingenommenheit suchte er die Hypothesen so lange umzuändern, bis sie den Thatsachen vollkommen entsprachen.

Bei der Auseinandersetzung der Planetenbewegung sind wir ihm in diesem Abschnitt gefolgt, jedoch so, dass wir die Theorie der Sonne als schon bekannt angenommen haben, welche Kepler zugleich mit der Marstheorie erst aufstellen musste. Doch ist der Gang so gehalten, dass er wenigstens die Hauptpunkte der Keplerschen Arbeiten wiedergibt.

Zwei ergänzende Kapitel, die Theorie des scheinbaren Planetenlaufes und der Vorübergänge der unteren Planeten vor der Sonne bilden den Schluss dieses Abschnittes, dessen Hauptpunkte in der theoretischen Astronomie noch einmal auf Grund des Newtonschen Gravitationsgesetzes zur Entwicklung gelangen.

a) Ueber die Verwandlung der geozentrischen Koordinaten in heliozentrische.

Figur 102.



Frage 101. Wie ist Kepler bei der Bestimmung der Marsbahn vorgegangen?

Erkl. 194. Der hier eingeschlagene Weg ist zum Teil der Keplersche. Es wurde schon erwähnt, dass Kepler zugleich mit der Marsbahn auch die Erdbahn bestimmen musste, während wir hier schon die Erdbahn auf Grund der Untersuchungen des vorhergehenden Abschnittes, als bekannt voraussetzen.

Antwort. Die Aufgabe, die sich Kepler gestellt hatte war, die Gestalt einer Planetenbahn zu bestimmen und als geeignetes Objekt zu dieser Bestimmung wählte er den Mars, von dem ihm zahlreiche Beobachtungen Tyge Brahes vorlagen. Der Gang seiner Untersuchung ist ungefähr folgender:

Die Keplersche Methode findet man unter anderen in Gyldéns Grundlehren der Astronomie, p. 133 und Wolfs Geschichte der Astronomie, p. 295 auseinandergesetzs.

Kepler publizierte die zwei ersten nach ihm genannten Gesetze, das der Ellipse und der Flächenräume, in seinem ersten Hauptwerke: „Astronomia nova de motibus stellae Martis ex observationibus Tychonis Brahe" Pragae 1609. Sein drittes Gesetz, dass die Quadrate der Umlaufzeiten sich wie die dritten Potenzen der halben grossen Achsen verhalten, dass wenn also T und T' die Umlaufzeiten und a und a' die halben grossen Achsen bezeichnen, die Gleichungen bestehen:

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3}$$

oder allgemeiner:

$$\frac{T}{a^{3/2}} = \frac{T'}{a'^{3/2}} = \frac{T''}{a''^{3/2}} = \cdots = \text{Konstante}$$

Macht er in einem zweiten, 1619 zu Linz herausgegebenen, Hauptwerke „Harmonices mundi libri V" bekannt: Als Datum der Erfindung gilt der 15. Mai 1618. Kepler hatte nämlich, nachdem er die Planetenbahn für sich allein betrachtet, sich dem Planetensystem als ganzes zugewendet. Da nun das einfache Verhältnis zwischen Zeiten und Entfernungen nicht stattfand, versuchte es Kepler mit verschiedenen höheren Potenzen, verrechnete sich aber durch einen sonderbaren Zufall gerade bei den richtigen Potenzen und gab hierauf die Sache ganz auf. Als er nach einigen Monaten die Rechnungen noch einmal durchging, fand er das oben erwähnte Gesetz.

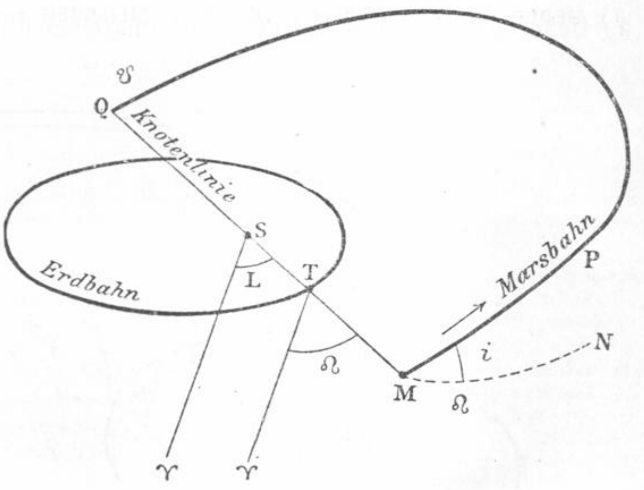
Bevor man sich einlässt in eine Untersuchung der Planetenbahn, wird es nötig, die Lage der Bahnebene in Bezug auf die Ekliptik zu bestimmen.

Diese Lage wird aber bestimmt durch die Lage derjenigen Linie, in der sich die beiden Ebenen schneiden (Knotenlinie) und durch den Winkel, unter dem sie sich schneiden (Neigung der Bahn gegen die Ekliptik).

Die Knotenlinie wird durch ihre Länge bestimmt. Diese ist aber nichts anderes als die heliozentrische Länge des Planeten in dem Augenblicke, wo er sich in der Ekliptik befindet, wo also seine heliozentrische und geozentrische Breite gleich Null ist.

Sei S die Sonne in der Figur 103, T die Erde und M der Mars, MPQ die Marsbahn,

Figur 103.



Erkl. 195. Da sich die Erde um die Sonne und auch der Planet um die Sonne bewegt (vergl. Figur 104), so kann es geschehen, dass sich alle diese Körper einmal in einer Ebene befinden, die senkrecht auf der Ekliptik steht. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sich die Erde ausserhalb oder innerhalb der beiden Körper befindet.

Befindet sich die Erde ausserhalb der beiden Körper, ist also die Stellung so:

Erde, Sonne, Mars

so sagt man, Mars sei in der Konjunktion mit der Sonne und bezeichnet das:

☉ ☌ ♂

wobei ☌ das Zeichen einer Konjunktion ist.

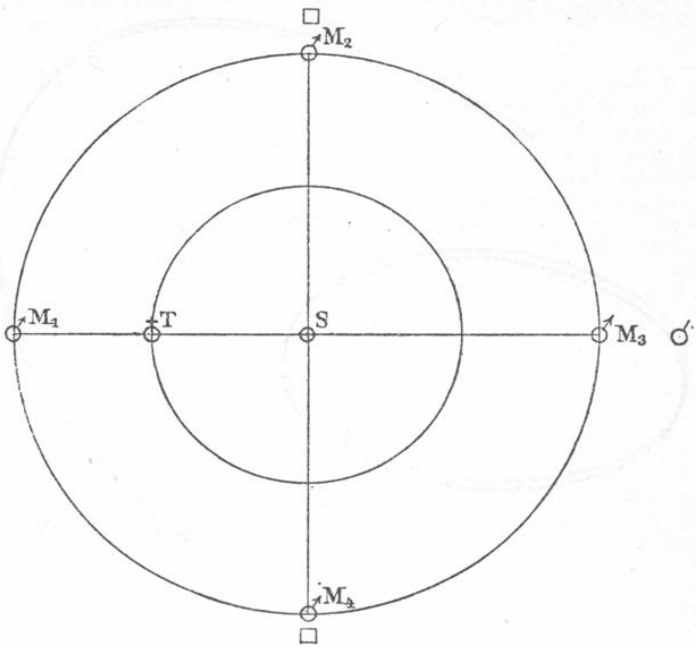
Im entgegengesetzten Falle, also bei der Stellung:

Sonne, Erde, Mars

QM die Schnittlinie derselben mit der Ekliptik, so wird, wenn $S♈$ und $T♈$ die Richtung des Frühlingspunktes bezeichnet, die heliozentrische Länge des Mars $= \sphericalangle MS♈ =$ der geozentrischen, d. h. dem Winkel $MT♈$. Sei MP die Richtung der Bewegung, so wird der Punkt M der aufsteigende Knoten der Marsbahn genannt und mit ☊ bezeichnet, der Punkt Q ist dann der absteigende Knoten und führt die Bezeichnung ☋. Die Knotenlänge ist dann der Winkel ☊ Sonne ♈.

Sei ferner MN ein Stück der Projektion der Marsbahn auf die Ekliptik, so wird der Winkel PMN die Neigung darstellen Diese pflegt man mit i zu bezeichnen.

Figur 104.



sagt man, die Sonne sei in Opposition mit dem Mars und bezeichnet dieses mit:

☉ ☍ ♂

wobei ☍ das Zeichen für die Opposition.

Steht der Mars in einer Ebene, die zu der Verbindungslinie von Erde und Sonne senkrecht ist, so spricht man von einer Quadratur und bezeichnet dieses mit dem Zeichen □.

Die Konjunktion und Opposition führen den gemeinschaftlichen Namen der Syzygien, während alle Stellungen zusammen Aspekten eines Planeten heissen.

In den älteren Schriften finden sich noch der Tertilschein △ und Sextilschein ⚹, wo Sonne und Planet 120° oder 60° von einander entfernt sind. Diese Benennungen sind aus der Astrologie in die Astronomie übergegangen.

Es liegt nun an der Hand, dass, wenn wir einmal den Planeten in der Opposition oder Konjunktion mit der Sonne beobachten, dass dann, wenn zufälliger Weise seine geozentrische Breite gleich Null ist, der Planet sich also im Knoten befindet, wir sofort die Knotenlänge bestimmen können, indem dieselbe einfach gleich der beobachteten geozentrischen Länge der Planeten ist in der Opposition oder gleich der Länge der Planeten, 180° in der Konjunktion.

Dieses wird sich wohl sehr selten ereignen. Daher suchte Kepler jene Oppositionsbeobachtungen auf, wo sich der Mars bei der Opposition nahe am Knoten befand, d. h. wo seine geozentrische Breite sehr gering war und fand so für diesen Augenblick die geozentrische Breite und Länge (vergl. Fig. 105) gleich:

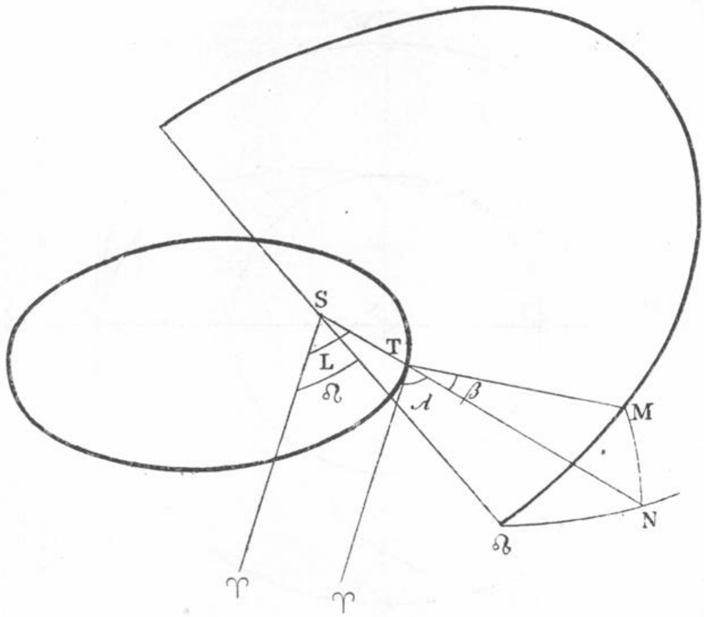
$$\beta \text{ und } \lambda$$

Die Beobachtung des nächsten Tages gab eine Breite β_1, welche kleiner war als β. Demnach war in einem Tage die Breiteänderung gleich:

$$\beta - \beta_1$$

Kepler fragte nun, wann nach der Opposition wird die Breite 0 sein, d. h. sich der Planet im Knoten befinden? Indem er nun die Breiteänderung einfach der Zeit pro-

Figur 105.



Erkl. 196. Man unterscheidet bei den Planeten drei Umlaufzeiten: s i d e r i s c h e, t r o p i s c h e, s y n o d i s c h e.

Die s i d e r i s c h e Umlaufzeit ist der Zeitraum, nach dessen Verlauf ein Planet 360° um die Sonne zurückgelegt hat; nach dieser Zeit nimmt er genau dieselbe Stelle gegen die Fixsterne ein. Die t r o p i s c h e Umlaufzeit ist jener Zeitraum, nach dessen Verlauf der Planet wieder dieselbe Stelle gegen die Nachtgleichepunkte einnimmt. Die s y n o d i s c h e Umlaufzeit ist jener Zeitraum, nach welcher der Planet wieder dieselbe Stellung gegen die Sonne einnimmt. Die s y n o d i s c h e Umlaufzeit ist also die Zeit zwischen den einzelnen Konjunktionen oder Oppositionen eines Planeten. Die s i d e r i s c h e Umlaufzeit ist jene, in welcher sich der Radiusvektor um 360° dreht, also die wahre Anomalie von $v = 0$ bis $v = 360°$ zunimmt.

portional annahm, fand er, dass dazu offenbar

$$\frac{\beta}{\beta_1 - \beta} = t$$

Tage nötig sind.

Nun hatte Kepler gefunden, dass die Umlaufzeit des Mars etwa 687 Tage betrage, es war dieses der Zeitunterschied zweier Beobachtungen, bei welchen Mars genau dieselbe Lage gegen die Fixsterne einnahm. Daraus berechnete er sich die m i t t l e r e t ä g l i c h e B e w e g u n g zu:

$$\frac{360^0}{687}$$

also damit auch die mittlere tägliche heliozentrische Längenänderung. Nun haben wir gesehen, dass der Planet nahezu die Zeit t braucht, um von M zu ☊ (vergl. Figur 105) zu gelangen, also auch nahezu dieselbe Zeit, damit seine Länge von $♈ SN$ bis zu $♈ S ☊$ abnehme. Demnach betrug der Winkel $☊ SN$ nahezu:

$$\frac{360^0}{687} \cdot t$$

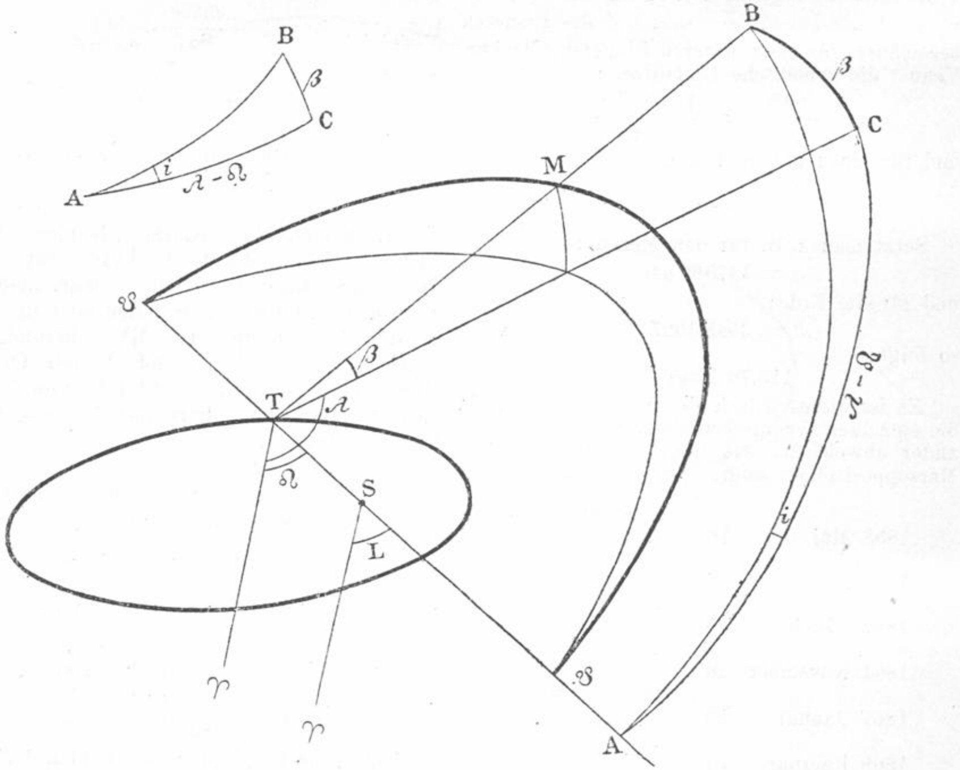
Grade, er war also wenigstens genähert gegeben. Dann war aber die Knotenlänge gleich:

$$☊ = NS♈ - NS☊$$
$$= NT♈ - NS☊$$

oder:

$$☊ = \lambda - \frac{360^0}{687} \cdot t$$

Figur 106.



Erkl. 197. Aus den nebenstehenden Daten ergibt sich zugleich die synodische Umlaufzeit des Mars im Mittel zu 780 Tagen.

Die Zeit der synodischen Umläufe wurde schon von Ptolomäus ziemlich gut bestimmt. Nach seinen Beobachtungen (Almag. L. IX., Cap. 3) sind die Planeten mit der Sonne in ☌ gewesen, wie folgt:

Saturn	57 mal in	59 trop. Jahren		1^d 18^h
Jupiter	65 „ „	76 „	„	360^d 4^h
Mars	37 „ „	79 „	„	3^d 4^h
Venus	5 „ „	7 „	„	362^d 18^h
Merkur	145 „ „	46 „	„	1^d 1^h

Hieraus ergeben sich die synodischen Umläufe von:

Saturn	zu etwa	378^d (378,04)
Jupiter	„ „	427^d (426,62)
Mars	„ „	780^d (779,82)
Venus	„ „	584^d (583,93)
Merkur	„ „	116^d (115,79)

Man hat ferner:

Uranus . .	369,64
Neptun . .	367,45

Stellen wir uns nun die Marsoppositionen von 1875 bis 1885 zusammen, indem wir die Koordinaten auf ganze Grade abrunden:

Mittl. Greenw. Zeit:

Zeit	λ	β
1875 Juni 19·87	269°	— 4°
1877 Sept. 5·50	343°	— 6°
1879 Nov. 12·35	50°	+ 1°
1881 Dez. 26·73	96°	+ 3°
1884 Jan. 31·99	132°	+ 5°

so sehen wir sofort, dass am 12·35 November 1879 der Mars bei der Opposition sehr nahe am Knoten stand. Wir haben für die Opposition genauer:

1879 Nov. 12 $\lambda_1 = 49^0\, 23'\, 43''$ $\beta_1 = 0^0\, 42'\, 53''$
Nov. 13 $\lambda_2 = 49^0\, 56'\, 45''$ $\beta_2 = 1^0\, 15'\, 1''$

Die Breiteänderung beträgt:

$$\beta_1 - \beta_2 =$$

Die Länge zur Zeit der Opposition:

$$\lambda = 49^0\, 35'\, 17''$$

Allgemein wird, wenn:
n die mittlere tägliche Bewegung der Erde
n' „ „ „ „ des Planeten
bezeichnet, für einen unteren Planeten (Merkur, Venus) die synodische Umlaufzeit:

$$= \frac{360^0}{n' - n} = \frac{1296000''}{n' - n}$$

und für einen oberen Planeten:

$$= \frac{360^0}{n - n'} = \frac{1296000''}{n - n'}$$

Setzt man z. B. für den Merkur:

$$n = 14732'' 419$$

und für die Erde:

$$n' = 3548{,}1927$$

so folgt:

115,79 Tage

Es ist dieses jedoch der mittlere Wert, da die einzelnen synonischen Umläufe sehr von einander abweichen, wie nachfolgende Tafel der Marsoppositionen zeigt.

		Zwischenzeit
1858 Mai	16	
		2 Jahre 63 Tage
1860 Juli	17	
		2 „ 80 „
1862 Oktober	5	
		2 „ 55 „
1864 November	28	
		2 „ 43 „
1867 Januar	10	
		2 „ 34 „
1869 Februar	13	
		2 „ 35 „
1871 März	20	
		2 „ 39 „
1873 April	27	
		2 „ 54 „
1875 Juni	20	

Claudius Ptolomäus lebte um 240 vor Chr. zu Alexandrien, nähere Lebensumstände dieses berühmten Mannes kennen wir leider nicht. Seine bedeutendste Leistung war, dass er seine und seiner Vorgänger Arbeiten in einer Art Codex der griechischen Astronomie, in der „Megālē sȳntaxis“ veröffentlichte, welcher Name durch die ihr von den Arabern später gegebene Benennung Almagest verdrängt wurde. Dieser enthält die in jeder populären Astronomie entwickelte und erklärte Theorie der Epicykeln.

Daher die Länge der Knotenlinie für dieses Jahr:

$$107) \ldots ☊ = \lambda - \frac{360^0}{687} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$$

woraus:

$$☊ = 48^0 55'$$

folgt.

Diese Bestimmung wird desto genauer, je näher die Opposition dem Knoten stattfand.

War auf diese Art ein Näherungswert für ☊ gefunden, so benützte Kepler (vergl. Figur 106) eine Marsbeobachtung, für welche die Sonnenlänge L gleich ☊ war, also eine Marsbeobachtung, bei welcher sich die Erde in der Knotenlinie des Mars befand. Sei ☊M☋ die Marsbahn und M der Ort des Mars um diese Zeit, so entsteht von T (dem Erdorte) auf der Sphäre das Dreieck BCA, in welchem:

$$BC = \beta =$$

der beobachteten geozentrischen Marsbreite:

$$AC = CT♈ - ♈TA = \lambda - ☊$$

und der Winkel BAC offenbar i ist.

Nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie ist aber im Dreiecke ABC:

$$\operatorname{tg} i \sin(\lambda - ☊) = \operatorname{tg} \beta$$

Da nun λ, ☊ und β gegeben sind, so folgt:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\lambda - ☊)}$$

Damit hatte Kepler die beiden Grössen:

☊ und i

bestimmt. Wir wollen nun zeigen, wie Kepler aus einer jeden geozentrischen Beobachtung des Mars sofort seine heliozentrischen Koordinaten und seine Entfernung von der Sonne berechnete. Es seien also gegeben:

☊, i, λ, β

und zu suchen:

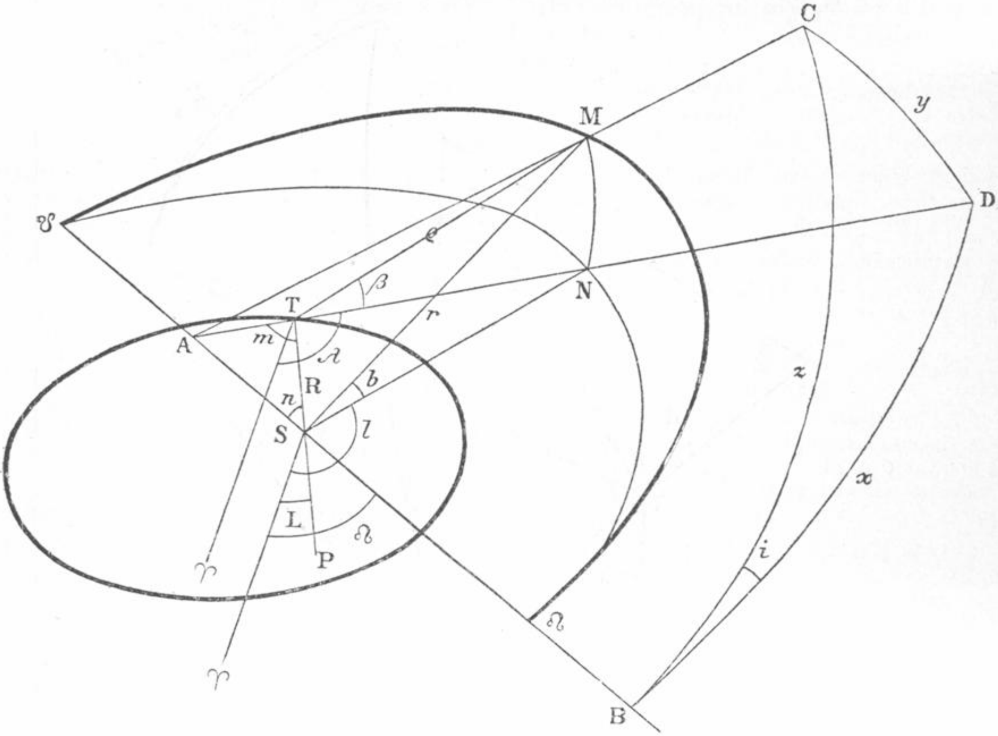
b, l, r

wobei b die heliozentrische Breite, l dieselbe Länge und r die Entfernung von der Sonne bezeichnet.

Es sei (vergl. Figur 107) ☋M☊ die Marsbahn und ☋N☊ ihre Projektion auf die Ekliptik. Die Erde sei in T, der Mars in M, in S sei die Sonne, wir bezeichnen:

$\measuredangle MTN = \beta$ geozentrische Breite
$\measuredangle NT♈ = \lambda$ „ Länge
$TM = \varrho$ „ Distanz
$\measuredangle MSN = b$ heliozentrische Breite
$\measuredangle NS♈ = l$ „ Länge
$MS = r$ „ Distanz
$\measuredangle PS♈ = L$ Sonnenlänge
$TS = R$ Erdradius

Figur 107.



Verbinden wir N mit T bis zum Schnittpunkt A mit der Knotenlinie, so entsteht das Dreieck ATS, in welchem:

$$\sphericalangle ATS = m$$
$$\sphericalangle TSA = n$$

gesetzt wird.

Es wird offenbar:

$$\begin{aligned} n &= \Omega - L \\ m &= 180 - STN \\ &= 180 - (NT\Upsilon - \Upsilon TS) \\ &= 180 - (NT\Upsilon - \Upsilon SP) \\ &= 180 - (\lambda - L) \end{aligned}$$

ferner im Dreiecke ATS nach dem Sinussatze der Trigonometrie:

$$\frac{R}{AT} = \frac{\sin(m+n)}{\sin n}$$

damit ist AT gegeben, denn es wird:

$$AT = \frac{R \sin n}{\sin(m+n)}$$

Sei ferner:

$$\sphericalangle DAB = x$$

so wird:

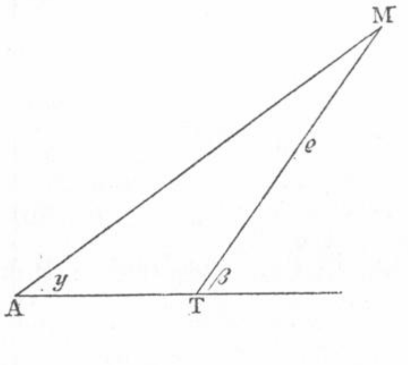
$$x = 180 - (m+n)$$

also:

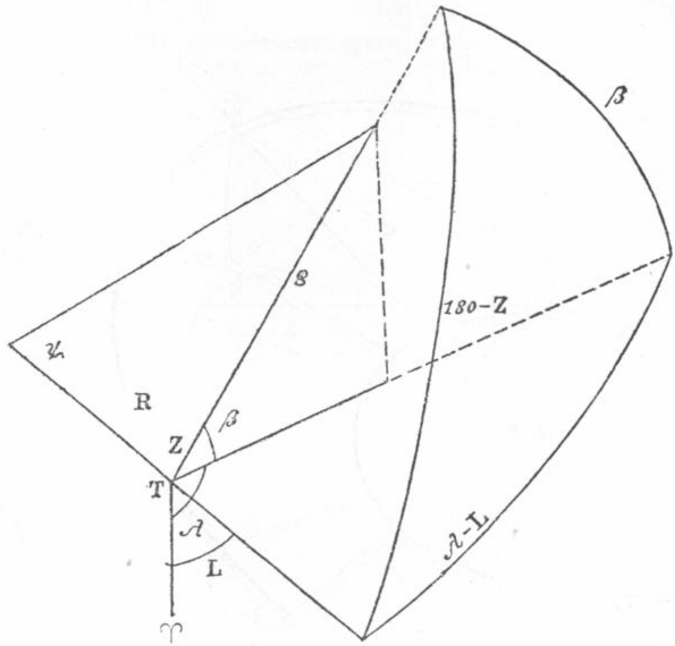
$$\sphericalangle CAD = y$$

Erkl. 198. In einem ebenen Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinuse der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Figur 108.



Figur 109.



gesetzt, berechnet aus dem sphärischen Dreiecke (Figur 107) BDC:

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} i \sin x$$

Sodann folgt aus dem Dreiecke ATM (vergl. Figur 107 und 108) nach dem Sinussatze:

$$\frac{\varrho}{AT} = \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)}$$

oder:

$$\varrho = AT \cdot \frac{\sin y}{\sin(\beta - y)}$$

Ferner wird, wenn man im Dreiecke TMS (vergl. Figur 107 und 109):

$$\sphericalangle MTS = z$$

$$\sphericalangle TSM = \psi$$

setzt:

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{\sin \psi}{\sin(z + \psi)}$$

Da aber (vergl. Figur 109):

$$\cos(180 - z) = \cos\lambda \cos\beta$$

oder:

Erkl. 199. $\cos(180 - z) = -\cos z$

$$108) \; \ldots \; \cos z = -\cos\lambda \cos\beta$$

so kann aus der vorhergehenden Gleichung 4 bestimmt werden.

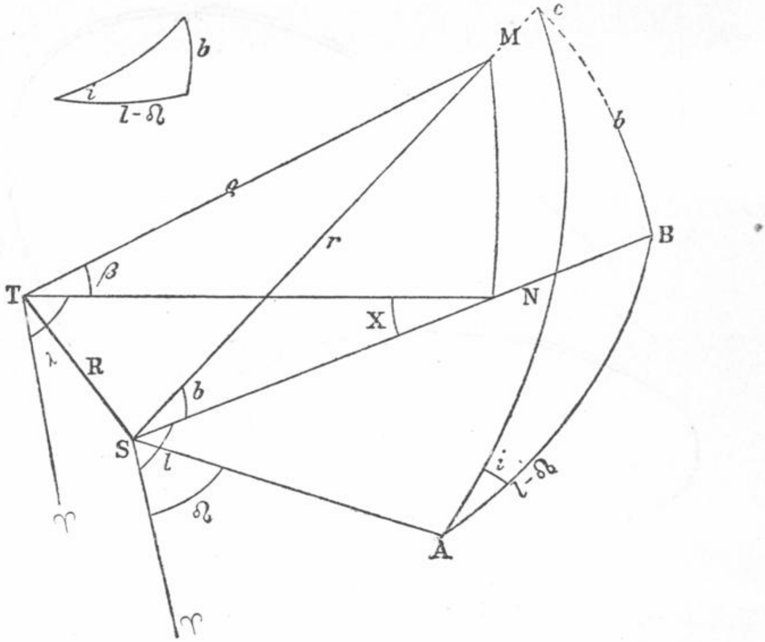
Dann ist aber (vergl. Figur 109):

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin \psi}{\sin z}$$

also:

$$109) \; \ldots \; r = \varrho \frac{\sin \psi}{\sin z}$$

Figur 110.



Rechnen wir nun (vergl. Figur 110) MN, so folgt:

$$MN = \varrho \sin\beta = r \sin b$$

und hieraus:

$$110) \ldots \sin b = \frac{\varrho}{r} \sin\beta$$

Endlich haben wir im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ABC:

$$111) \ldots \operatorname{tg} i = \operatorname{tg} b \sin(l - ☊)$$

woraus:

$$\sin(l - ☊) = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} i}$$

und hiemit endlich auch l folgt.

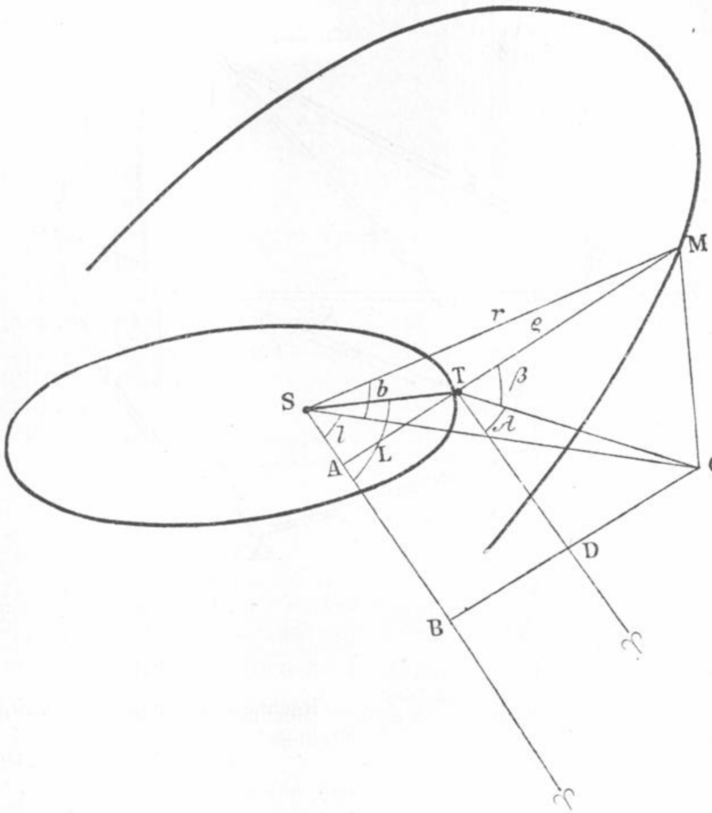
Frage 102. Wie lässt sich die Keplersche Bestimmung der Bahnelemente durch die Methode der Parallaxenbestimmung umformen?

Antwort. Dadurch, dass es möglich ist, zu irgend einer Zeit die Parallaxe des Mars zu bestimmen, kann die Keplersche Methode wesentlich vereinfacht werden.

Sei S der Ort der Sonne (vergl. Fig. 111), T jener der Erde und M jener des Mars, so wird unter Anwendung der früheren Bezeichnungen:

$$MC = r \sin b$$
$$SC = r \cos b$$

Figur 111.



Erkl. 200. Es soll hier zugleich aufmerksam gemacht werden, dass die Formeln 112) eine fundamentale Bedeutung für die ganze Astronomie haben und insbesondere in der Theorie der Bahnbestimmung von grosser Wichtigkeit sind.

Man kann sie auch direkt durch die Elemente der Planetenbahn ausdrücken (vergl. Erkl. 203).

$$SB = SC \cos l = r \cos b \cos l$$
$$BC = SC \sin l = r \cos b \sin l$$

ferner:

$$MC = \varrho \sin \beta, \quad SA = R \cos L$$
$$TC = \varrho \cos \beta, \quad AT = R \sin L$$
$$SB = SA + AB = SA + TD = SA + FC \cos \lambda$$
$$SB = R \cos L + \varrho \cos \beta \cos \lambda$$
$$BC = BD + DC = AT + TC \sin \lambda$$
$$BC = R \sin L + \varrho \cos \beta \sin \lambda$$

Daraus folgt, dass:

$$112\text{a}) \ldots \begin{cases} r \sin b = \varrho \sin \beta \\ r \cos b \cos l = R \cos L + \varrho \cos \beta \cos \lambda \\ r \cos b \sin l = R \sin L + \varrho \cos \beta \sin \lambda \end{cases}$$

Diese Formeln gestatten sofort die geozentrischen Koordinaten in die heliozentrischen umzuwandeln, sobald uns die Erddistanz ϱ des Mars bekannt ist.

Diese kann aber durch Bestimmung der Parallaxe bestimmt werden.

Nehmen wir also für irgend einen Zeitpunkt ϱ als gegeben, so haben wir zur Bestimmung der Grössen:

Erkl. 201. Es ist:

$$\sin^2 b + \cos^2 b \cos^2 l + \cos^2 b \sin^2 l$$
$$= \sin^2 b + \cos^2 b\,(\cos^2 l + \sin^2 l)$$
$$= \sin^2 b + \cos^2 b = 1$$

analog:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta \cos^2\lambda + \cos^2\beta \sin^2\lambda$$

Erkl. 202. Es mögen hier die Grenzen angeführt werden, zwischen welchen sich Neigungen der einzelnen Planeten bewegen. Dieselben sind nach Stockwell (1873) für:

Merkur . . .	9° 10′ 41″	4° 44′ 27″
Venus . . .	3 16 18	?
Erde	3 6	0
Mars	5 56	?
Jupiter . . .	0 28 56	0 14 23
Saturn . . .	1 0 39	0 47 16
Uranus . . .	1 7 10	0 54 25
Neptun . . .	0 47 21	0 33 43

Alle diese Neigungen beziehen sich auf die sogenannte invariable Ebene, d. h. eine Ebene, deren Neigung gegen die Ekliptik von 1850 gleich war:

$$1^0\,55'\,19''4$$

und deren Knotenlänge:

$$☊ = 106^0\,14'\,6{,}0''$$

Es wirken nämlich die Planeten aufeinander und durch diese Einwirkung werden die Bahnelemente derselben geändert, doch sind diese Aenderungen zumeist periodischer Natur. Die angeführten Zahlen sind eben die ganzen, zwischen welchen diese periodischen Aenderungen stattfinden.

$$r \quad b \quad l$$

drei von einander unabhängige Gleichungen.

Quadrieren wir die obigen Gleichungen und addieren sie, so folgt:

112b) . . $r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho\cos\beta\cos(\lambda - L)$

Dadurch ist r gegeben.

Dividieren wir die dritte durch die zweite, so folgt:

112c) . . $\operatorname{tg} l = \dfrac{R\sin L + \varrho\cos\beta\sin\lambda}{R\cos L + \varrho\cos\beta\cos\lambda}$

und endlich, da r gegeben:

110) . . . $\sin b = \varrho\dfrac{\sin\beta}{r}$

Aus der Figur 110 entnimmt man sodann leicht, dass:

$$\operatorname{tg} i \sin(l - ☊) = \operatorname{tg} b$$

Benützt man noch eine zweite Parallaxenbestimmung, so kann man für einen andern Zeitpunkt die Grössen:

$$l' \text{ und } b'$$

erhalten und damit:

$$\operatorname{tg} i \sin(l' - ☊) = \operatorname{tg} b'$$

Addieren und subtrahieren wir die beiden letzten Gleichungen, so folgt:

$$\operatorname{tg} i\,[\sin(l - ☊) \pm \sin(l' - ☊)] = \operatorname{tg} b \pm \operatorname{tg} b'$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

so dass die obige Gleichung zu:

$$2\operatorname{tg} i \sin\left(\frac{l + l'}{2} - ☊\right)\cos\frac{l - l'}{2} = \frac{\sin(b + b')}{\cos b\cos b'}$$

$$2\operatorname{tg} i \cos\left(\frac{l + l'}{2} - ☊\right)\sin\frac{l - l'}{2} = \frac{\sin(b - b')}{\cos b\cos b'}$$

wird. Dividiert man die erste der beiden Gleichungen durch die zweite, so folgt:

113) . . . $\operatorname{tg}\left[\dfrac{1}{2}(l + l') - ☊\right] = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(l - l')\,\dfrac{\sin(b + b')}{\sin(b - b')}$

Diese Gleichung liefert:

$$☊$$

und hierauf ergibt sich i aus:

111) . . . $\operatorname{tg} i = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin(l - ☊)}$

Sind nun einmal diese Elemente bekannt, so kann man sofort nach den Keplerschen Formeln zu einem jeden Wertepaare von:

$$\beta,\ \lambda$$

die Werte:

$$r,\ \varrho,\ b,\ l$$

berechnen.

b) Ueber die Bestimmung der Marselemente.

Frage 103. Was versteht man unter den Elementen einer Planetenbahn?

Antwort. Unter den Elementen einer Planetenbahn versteht man die Angabe der eine Planetenbahn charakterisierenden Stücke und zwar:

der halben grossen Achse a
der Exzentrizität l
der Neigung i
der Länge des aufsteigenden Knotens ☊
der Länge des Perihels π
der mittleren täglichen siderischen Bewegung μ

bezogen auf irgend einen bestimmten Zeitpunkt, die sogenannte Epoche.

Frage 104. Wie bestimmt man die Elemente der Marsbahn?

Erkl. 202a. Es versteht sich, dass die Astronomie jetzt nicht mehr, nachdem schon genäherte Werte der Elemente bekannt sind, diese Wege geht, um zu genauen Marselementen zu gelangen. Unser Zweck war es nur, zu zeigen, wie man aus den Beobachtungen die Elemente ableiten könnte, wenn keine Näherungswerte derselben bekannt sind. Aber auch dann würde man anders verfahren. Man ist eben im Besitze von Methoden, aus drei gegebenen Beobachtungen die Bahn eines Himmelskörpers zu berechnen. (Vergl. den Abschnitt O. Ueber die Bestimmung einer Kometenbahn.)

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{aligned}\log 50''\,24 &= 1{,}70105\\ \log 687 &= \underline{2{,}83696}\\ &\ 4\cdot53801\\ \log 365 &= \underline{2\cdot56229}\\ &\ 1\cdot97572 = 94''\,6\end{aligned}$$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rr} 118\ 12\ 59''\,8 & 118\ 12\ 59''\,8\\ \underline{117\ 45\ 45''\,7} & \underline{118\ 11\ 51''\,6}\\ 27'\,14''\,1 & 1\ \ 8''\,2\\ = 1634''\,1 & = 68''\,2\end{array}$$

$$\begin{aligned}\log 68''\,2 &= 1\cdot83378\\ \log 1634''\,1 &= \underline{3\cdot21328}\\ \text{Diff.} &= 8\cdot62050\\ 1 &= 1\cdot00000\\ \text{numlog Diff.} &= \underline{0\cdot04173}\\ \text{Diff.} &= 0\cdot95827\end{aligned}$$

Antwort. Nach dem Vorhergehenden sind wir im stande, genau:

☊ und i

aus einer Parallaxenbestimmung herzuleiten. Mit Hilfe dieser Elemente können wir sofort die Grössen:

$$r,\ b,\ l$$

berechnen, sobald uns eine geozentrische Beobachtung gegeben ist.

Um nun die Marselemente zu bestimmen, beobachten wir den Mars womöglich täglich und berechnen für jeden Tag die Grössen:

$$r,\ b,\ l$$

Wir werden dabei finden, dass sich dieselben Werte nach etwa 687 Tagen wiederfinden.

Um diese Zeit und hiemit auch die siderische Umlaufzeit zu finden, benützen wir die Daten:

$$\begin{array}{lll} 1884\ \text{Jan.}\ 1 & l_1 = 118^0\,11'\,51''\,6\\ 1885\ \text{Nov.}\ 17 & l_2 = 117^0\,47'\,20''\,3\\ \phantom{1885\ \text{Nov.}\ }18 & l_3 = 118^0\,14'\,34''\,4\end{array}$$

Zu den letzteren Daten müssen wir noch die Präcession für 687 Tage hinzufügen und zwar:

$$-50''\,24\cdot\frac{687}{365} = -94''\,6$$

woraus folgt:

$$l_2 = 117^0\,45'\,45''\,7$$
$$l_3 = 118^0\,12'\,59''\,8$$

Fragen wir, wenn war im Jahre 1885 die reduzierte Länge gleich l, so ergibt sich (vergl. Hilfsrechnung 1):

1885 Nov. 17,95827

Daraus folgt, dass, da vom 1. Jan. 1884 bis Nov. 17,95827 im ganzen 686,9583 Tage

Hilfsrechnung 3.

$$b_1 + b_2 = 3^0\,34'\,50''$$
$$b_1 - b_2 = 5'\,54''$$
$$l_1 - l_2 = -\,13^0\,32'\,48''$$
$$l_1 + l_2 = 303^0\,15'\,16''$$
$$\frac{1}{2}(l_1 - l_2) = -\,6^0\,46'\,24''$$
$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 151^0\,37'\,38''$$

$$\log\sin(b_1 + b_2) = 8{\cdot}7955451$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(l_1 - l_2) = 9_n 0747095$$
$$= 7_n 8702546$$
$$\log\sin(b_1 - b_2) = 7{\cdot}2345365$$
$$\log\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \text{☊}\right] = 0_n 6357181$$
$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \text{☊} = 103^0\ \ 1'\,36''$$
$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 151^0\,37'\,38''$$
$$\text{☊} = 48^0\,36'\ \ 2''$$

Erkl. 203. Mit Hilfe der gewonnenen Relationen sind wir im stande, die Formeln 112) in andere umzuformen, die statt b und l direkt die Bahnelemente enthalten.

Man findet nämlich:

115a) . . . $\cos(v - w) = \cos b \cos(l - \text{☊})$

115b) . . . $\cos i \sin(v - w) = \cos b \sin(l - \text{☊})$

115c) . . . $\sin i \sin(v - w) = \sin b$

Die letzte Formel ist die Formel 114). Die erste Formel drückt den Kosinussatz des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes, dessen Hypotenuse $v - w$ und dessen Katheten b und $l - \text{☊}$ sind. Die zweite Gleichung ergibt sich durch Division von 115) durch die erste der betrachteten Gleichungen. Sodann wird:

117) . . . $r \sin i \sin(v - w) = \varrho \sin\beta$

$$r \cos i \sin(v - w) = R\cos(L - \text{☊}) + \varrho\cos\beta\cos(\lambda - \text{☊})$$
$$r\cos(v - w) = R\sin(L - \text{☊}) + \varrho\cos\beta\sin(\lambda - \text{☊})$$

verflossen sind, die siderische Umlaufzeit etwa:

$$686^d\,9583$$

beträgt, also die mittlere tägliche Bewegung:

$$\mu = \frac{360 \cdot 3600''}{686^d\,9583} = 1886''$$

ist. Hätten wir die Präcession nicht berücksichtigt, so hätten wir die **tropische Umlaufzeit**:

$$686^d\,9066$$

erhalten.

Suchen wir nun den grössten und kleinsten Wert von r, so finden wir:

1884 März 22 $\quad r_1 = 1{,}66590$
1885 Febr. 28 $\quad r_2 = 1{,}38136$

Da nun:

$$r_1 = a + ae$$
$$r_2 = a - ae$$

also:

$$r_1 + r_2 = 2a$$
$$r_1 - r_2 = 2ae$$

ist, so folgt:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 1{,}52363$$

$$e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}09338$$

Um nun nach den Formeln 111) und 113) die Grössen i und ☊ zu bestimmen, denken wir uns, wir hätten am 1. März und 1. April 1884 die Parallaxe des Mars bestimmt und hieraus:

März 1 $\quad l_1 = 144^0\,51'\,14'' \quad b_1 = 1^0\,50'\,22''$
$\quad l_2 = 158^0\,24'\ \ 2'' \quad b_2 = 1^0\,44'\,28''$

berechnet. Damit liefert die Formel 113) (vergl. Hilfsrechnung 3):

$$\text{☊} = 48^0\,36'\,2''$$

ferner die Formel 111), da:

$$l_1 = 144\ \ 51\ \ 14$$
$$\text{☊} = 48\ \ 36\ \ \ 2$$
$$l_1 - \text{☊} = 96\ \ 15\ \ 12$$
$$\operatorname{tg} b_1 = 8{\cdot}5067132$$
$$\sin(l_1 - \text{☊}) = 9{\cdot}9974082$$
$$\operatorname{tg} i = 8{\cdot}5093050$$

auch:

$$i = 1^0\,51'\,2''$$

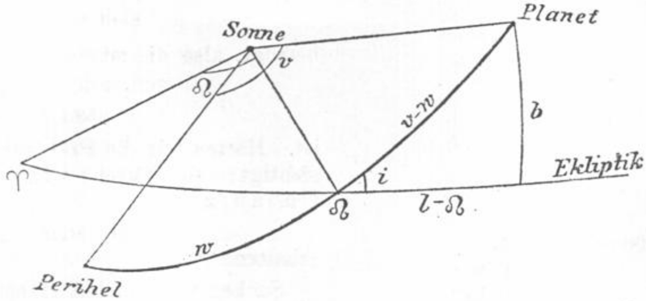
Wir haben nur noch die **Perihellänge** zu definieren und zu bestimmen.

Bezeichnen wir den Bogen zwischen dem Perihel und Knoten am grössten Kugelkreise mit w, so ist die Perihellänge π durch die Gleichung:

114) . . . $\pi = w + \text{☊}$

definiert.

Figur 112.



Erkl. 204. Sei l die Länge in der Ekliptik, so ist offenbar nach 115a):

$$\operatorname{tg}(l-\text{☊}) = \cos i \operatorname{tg}(L-\text{☊})$$

wobei L die Länge in der Ekliptik. Da nun i sehr klein ist, so kann man zur Berechnung der sogenannten Reduktion auf die Ekliptik leicht eine bequeme Formel herleiten. Es ist:

$$\operatorname{tg}(l-L) = \frac{\operatorname{tg}(l-\text{☊}) - \operatorname{tg}(L-\text{☊})}{1+\operatorname{tg}(l-\text{☊})\operatorname{tg}(L-\text{☊})}$$

$$= \frac{(1-\cos i)\operatorname{tg}(L-\text{☊})}{1+\cos i \operatorname{tg}^2(L-\text{☊})}$$

oder da:

$$1-\cos i = 2\sin^2\frac{i}{2}$$

mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von i:

$$(l-L)\sin 1'' = -\frac{2\sin^2\frac{i}{2}\operatorname{tg}(L-\text{☊})}{1+\operatorname{tg}^2(L-\text{☊})}$$

oder:

$$l = L - \frac{\sin^2\frac{i}{2}}{\sin 1''}\sin 2(L-\text{☊})$$

Aus der Figur 112 folgen sofort die Relationen:

$$115\text{c}) \;.\;.\; \sin b = \sin i \sin(v-w)$$

und

$$116) \;.\;.\;.\; \operatorname{tg}(l-\text{☊}) = \cos i \operatorname{tg}(v-w)$$

wobei v die wahre Anomalie bezeichnet, gezählt wie bei der Sonne vom Perihel aus.

Diese kann aus:

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

berechnet werden, aus welcher Gleichung:

$$\cos v = \frac{p-r}{er}$$

folgt und sodann aus einer der vorletzten Gleichungen w und hieraus π. Die Grösse:

$$v-\pi+\text{☊}$$

wird auch das Argument der Breite genannt.

---

c) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Mars stand im Jahre 1840 Januar 8, $9^h\,44^m\,0^s$ mittl. Berliner Zeit im Perihel. Wie gross war die mittlere, wahre und exzentrische Anomalie, sowie der Radiusvektor am 24. April desselben Jahres um $13^h\,25^m\,15^s$ mittlere Berliner Zeit?

Es wird hierbei:

$$e = 0{,}093217$$
$$T \text{ Umlaufzeit} = 686{,}9796 \text{ Tage}$$
$$a = 1{,}52369$$

angenommen.

Auflösung. Wir suchen zunächst die mittlere Anomalie nach Formel 107):

$$M = \frac{2\pi}{T}t$$

Es ist:

April	24^d	13^h	25^m	15^s
Januar	8	9	44	0
$t =$	107	3	41	15

oder in Teilen des Tages:

$$t = 107{,}15365$$

Nun ist:

$$\frac{2\pi}{F} = \frac{360^0}{686{,}97964} = 31'\,26''\,519$$

also:

$$\log \frac{2\pi}{T} = 1{,}49751 \text{ (in Minuten)}$$

$$\begin{aligned} \log t &= 2{,}03001 \\ \log M &= 3{,}52752 \text{ (Minuten)} \\ M &= 56^0\, 9'\, 7'' \end{aligned}$$

Um nun die exzentrische Anomalie zu erhalten, habe ich durch Versuchs die Gleichung:

$$E - e \sin E = 56^0\, 9'\, 7''$$

dabei will ich das Glied $e \sin E$ in Sekunden haben, werde also schreiben:

$$e \sin E \sin 1''$$

demnach:

$$\begin{aligned} \log e &= 8{\cdot}96949 \\ \log \sin 1'' &= 5{\cdot}31442 \\ \log e \sin 1'' &= 4{,}28392 \\ e \sin 1'' &= 19227'' = 5^0\, 20'\, 27'' \end{aligned}$$

Die aufzulösende Gleichung ist also:

$$E - 5^0\, 20'\, 27'' \sin E = 56^0\, 9'\, 7''$$

Hieraus nach der Formel 99):

$$E - M = \frac{e \sin M}{\sqrt{1 - 2e \cos M + e^2}}$$

gibt (vergleiche Hilfsrechnung 1):

$$\begin{aligned} E - M &= 16788'' = 4^0\, 39'\, 48'' \\ M &= 56^0\;\; 9'\;\; 7'' \end{aligned}$$

Also wird:

$$E = 60^0\, 48'\, 55''$$

Sodann haben wir v zu rechnen aus:

$$e = \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Dieses gibt (vergl. Hilfsrechnung 2):

$$v = 65^0\, 35'\, 40''$$

Nun ist der Radiusvektor r aus der Formel:

$$r = a\,(1 - e \cos E)$$

zu rechnen. Es wird:

$$\begin{aligned} \log \cos E &= 9{\cdot}68809 \\ \log e &= 8{\cdot}96949 \\ \log a &= 0{\cdot}84048 \\ \log a e \cos E &= 8{\cdot}84048 \\ a &= 1{,}52369 \\ -\, a e \cos E &= 0{,}06926 \\ r &= 1{,}45443 \end{aligned}$$

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{aligned} \log e \sin 1'' &= 4{\cdot}28392 \\ \log \sin M &= 9{\cdot}91935 \\ & \;\; 4{\cdot}20327 \\ \log e^2 &= 7{\cdot}93898 \\ \log 2 &= 0{\cdot}30103 \\ \log e &= 8{\cdot}96949 \\ \log \cos M &= 9{\cdot}74585 \\ \log 2e \cos M &= 9{\cdot}01637 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= 0{\cdot}008689 \\ 1 &= 1 \\ 1 + e^2 &= 1{\cdot}008689 \\ -\,2e \cos M &= 0{\cdot}10384 \\ & \;\; 0{\cdot}904849 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (1 - 2e \cos M + e^2) &= 9{\cdot}95657 \\ \log e \sin M \sin 1'' &= 4{\cdot}20327 \\ \log \sqrt{1 - 2e \cos M + e^2} &= 9{\cdot}97827 \\ \log (E - M) &= 4{\cdot}22500 \\ E - M &= 16788 \end{aligned}$$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \log e &= 8{\cdot}9694943 \\ &= \log \cos 84^0\, 39'\, 5'' \\ \frac{\varphi}{2} &= 42^0\, 19'\, 32'' \\ \frac{E}{2} &= 30^0\, 24'\, 27'' \\ \log \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= 9{\cdot}7685437 \\ \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= 0{\cdot}0406029 \\ \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= 9{\cdot}8091466 \\ \frac{v}{2} &= 32^0\, 47'\, 50'' \\ v &= 65^0\, 35'\, 40'' \end{aligned}$$

Aufgabe 65. Welches war die heliozentrische Länge und Breite des Planeten an diesem Tage?

Es wird angenommen:

$$\begin{aligned} i &= \;\; 1^0\, 51'\;\; 2'' \\ \Omega &= \;\; 48^0\, 19'\, 13'' \\ \pi &= 333^0\;\; 6'\, 52'' \end{aligned}$$

Auflösung. Wir haben nach den Formeln 114) und 116) die Beziehungen:

$$w = \pi - \Omega$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v - w)$$

also ist damit l gegeben, ferner ist nach der Formel:

$$\sin b = \sin i \sin (v - w)$$

und damit b gegeben.

Wir haben:

$$\begin{aligned} \pi &= 333^0\ 6'\,52'' \\ \Omega &= \underline{\ \ 48^0\,19'\,13''} \\ w &= 284^0\,46'\,39'' \\ v &= \underline{\ \ 65^0\,35'\,40''} \\ -(v-w) &= 219^0\,10'\,59'' \end{aligned}$$

und damit (vergl. Hilfsrechnung 1):

$$\begin{aligned} l - \Omega &= 219^0\,10'\ \ 6'' \\ \Omega &= \underline{\ \ 48^0\,19'\,13''} \\ l &= 267^0\,29'\,19'' \end{aligned}$$

Hilfsrechnung 1.

$$\begin{aligned} \cos i &= 9 \cdot 9997735 \\ \operatorname{tg}(v-w) &= \underline{9_n 9112044} \\ \operatorname{tg}(l-\Omega) &= 9_n 9109779 \end{aligned}$$

Ferner ist (vergl. Hilfsrechnung 2):

$$b = 1^0\,10'\,8''$$

Hilfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \sin i &= 8 \cdot 5091039 \\ \sin(v-w) &= \underline{9 \cdot 8005797} \\ \sin b &= 8 \cdot 3096836 \end{aligned}$$

Es wäre nun leicht vermittels der Formeln 112a) die Grösse:

$$\varrho \quad \beta \quad \lambda$$

zu berechnen und sodann aus λ, α und δ, d. h. die sogenannte Ephemeride zu bestimmen.

Aufgabe 66. Es ist die mittlere Länge des Mars für irgend ein Datum, sowie die mittlere Anomalie dieses Datums zu berechnen.

Auflösung. Im Jahre 1850 Jan. 1 mittl. Par. Zeit betrug die Länge des Mars:

$$83^0\,40'\,31''3$$

und dieses war auch der Betrag desselben nach je einem siderischen Umlaufe, also nach:

686,97979 Tagen

Erkl. 205. Ist die mittlere Anomalie für irgend einen Zeitpunkt gegeben mit den Elementen, so ist es leicht, wie wir oben gesehen haben, die wahre Länge und Breite sowie den Radiusvektor zu bestimmen. Darum war es nötig, die Art und Weise, wie die mittlere Länge bestimmt werden soll, hier mitzuteilen. Wodurch zugleich die Aufgabe gelöst erscheint, aus gegebenen Planetenelementen und dem Datum den scheinbaren Ort am Himmel zu finden.

Sei also k irgend eine ganze positive oder negative Zahl, so haben die Daten:

$$1850 \text{ Jan. } 1{,}00000 + k \cdot 686^d\ 97979$$

dieselbe Länge:

$$83^0\,40'\,31''3$$

Die mittlere tägliche siderische Bewegung ist:

$$\frac{360^0}{686{,}97979} = 1886''\,51831$$

also wird die zu dem Datum:

$$1850 \text{ Jan. } 1{,}00000 + k \cdot 686^d\,97979 + x^d$$

zugehörige mittlere Länge:

$$83^0\,40'\,31''3 + x \cdot 1886''\,51831$$

wobei x^d die Anzahl der Tage bezeichnet.

Erkl. 206. Die mittlere Länge wird stets in der Bahnebene gerechnet, ebenso wie π.

Da nun:

$$M = \text{mittl. Länge} - \pi$$

so folgt sofort die mittlere Anomalie für die Zeit:

$$1850 \text{ Jan. } 1 + 686^d\,97979\,k + x^d$$

ist gleich:

$$83^0\,40'\,31''3 + 1886''\,51831\,x - \pi$$

wobei aber das π für den gesuchten Augenblick zu rechnen ist.

Aufgabe 67. Es soll die siderische Umlaufzeit in tropische und umgekehrt verwandelt werden.

Auflösung. Die siderische Umlaufzeit S bezieht sich auf einen festen Punkt, z. B. auf die Fixsterne. Die tropische T, dagegen auf einen beweglichen, den Frühlingsnachtgleichepunkt.

Sei nun:

$$\frac{360^0}{S}$$

die tägliche siderische Bewegung, sowie m die tägliche Bewegung des Aequinoktialpunktes, so wird die tägliche tropische Bewegung:

$$\frac{360^0}{T} = \frac{360^0}{S} - m$$

oder:

$$118) \ldots m = 360^0\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right)$$

Sei nun:

$$s = \frac{360}{S}$$

$$t = \frac{360}{T}$$

so wird:

$$119) \ldots S = \frac{T}{1+\frac{m}{t}} = T\left(1 - \frac{m}{t} + \frac{m^2}{t^2} - \cdots\right)$$

$$120) \ldots T = \frac{S}{1-\frac{m}{s}} = S\left(1 + \frac{m}{s} + \frac{m^2}{s^2} + \cdots\right)$$

Erkl. 207. Es ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

so lange der absolute Betrag von x kleiner bleibt als 1.

Wir fanden speziell für den Mars:

$$S = 686^d\,9583$$

$$s = \frac{360^0}{686,9583}$$

$$m = -\frac{50''\,2}{3600 \cdot 365} = -0,00004$$

Man hat:

$$T = S + S\frac{m}{s} + \cdots$$

oder:

$$S\frac{m}{s} = 686^d\,96 \cdot \frac{0,00004}{\frac{360}{686^d\,96}}$$

also:

$$S\frac{m}{s} = (686^d\,96)^2\,\frac{0,00004}{360^0}$$

Wir haben also (siehe Hilfsrechnung):

$$\begin{array}{r} 686^d\,9583 \\ -\,0^d\,0524 \\ \hline 686^d\,9059 \end{array}$$

während wir früher:

$$686^d\,9066$$

fanden.

Hilfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 686 \cdot 96 & = 2 \cdot 83693 \\ 2\log 686 \cdot 96 & = 5 \cdot 67386 \\ \log 0 \cdot 00004 & = 5 \cdot 60206 \\ \hline & \ 1 \cdot 27592 \\ \log 360 & = 2 \cdot 55630 \\ \hline & \ 8 \cdot 71962 \\ \text{numlog} & = 0 \cdot 05243 \end{array}$$

Aufgabe 68. Man berechne aus der gegebenen Zeit und den Elementen den geozentrischen Ort des Planeten (die Ephemeridenrechnung).

Auflösung. Man bestimme sich nach vorletzter Aufgabe die mittlere Anomalie M und aus dieser die exzentrische und wahre nach den Formeln:

98) . . . . $E - e \sin E = M$

103b) . . . $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\frac{E}{2}$

wobei:

103a) . . . $\cos\varphi = e$

Sodann ist:

114) . . . $w = \pi - \Omega$

und

115c) . . . $\sin b = \sin i \sin(v - w)$

116) . . . $\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v - w)$

90) . . . $r = \frac{p}{1 + e\cos v}$

wobei:

$$p = a(1 - e^2) = a \sin^2\varphi$$

Nun hat man die Formeln:

$$r \sin b = \varrho \sin\beta$$
$$r \cos b \cos l = R \cos L + \varrho \cos\beta \cos\lambda$$
$$r \cos b \sin l = R \sin L + \varrho \cos\beta \sin\lambda$$

Aus diesem folgt:

121) . . . $\varrho^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos b \cos(l - L)$

sodann:

122) . . . . $\sin\beta = \frac{r}{\varrho} \sin b$

und

123) . . . $\operatorname{tg}(\lambda - L) = -\frac{r \cos b \sin(l - L)}{R - r \cos b \cos(l - L)}$

Damit ist die Ephemeridenrechnung beendet, wenn man etwa noch die Koordinaten:

λ und β

auf bekannte Weise in:

α und δ

verwandelt.

Erkl. 208. Man schreibe:

$$r \sin b = \lambda \sin\beta$$
$$r \cos b \cos l - R \cos L = \varrho \cos\beta \cos\lambda$$
$$r \cos b \sin l - R \sin L = \varrho \cos\beta \sin\lambda$$

Erhebt man jede dieser Gleichungen zum Quadrat und addiert sie, und beachtet, dass:

$$\sin^2 b + \cos^2 b \cos^2 l + \cos^2 b \sin^2 l =$$
$$\sin^2 b + \cos^2 b (\cos^2 l + \sin^2 l) =$$
$$\sin^2 b + \cos^2 b = 1$$

ferner:

$$\cos b \cos l \cos L + \cos b \sin l \sin L =$$
$$\cos b (\cos l \cos L + \sin l \sin L) = \cos b \cos(l - L)$$

so folgt die obige Gleichung.

Erkl. 209. Um die Formel zu erhalten, multipliziere man die zweite und dritte der Gleichungen A) mit $\sin L$ und $\cos L$ und subtrahiere sie, so folgt:

$$r \cos b \sin(l - L) = \varrho \cos\beta \sin(\lambda - L)$$

und ferner mit $\cos L$ und $\sin L$ und addiere sie, so folgt:

$$r \cos b \cos(l - L) - R = \varrho \cos\beta \cos(\lambda - L)$$

Dividiert man nun die vorhergehende Gleichung durch diese letzte, so folgt die Formel 123).

d) Ueber den scheinbaren Planetenlauf.

Frage 105. Wie gestaltet sich der scheinbare Lauf der Planeten?

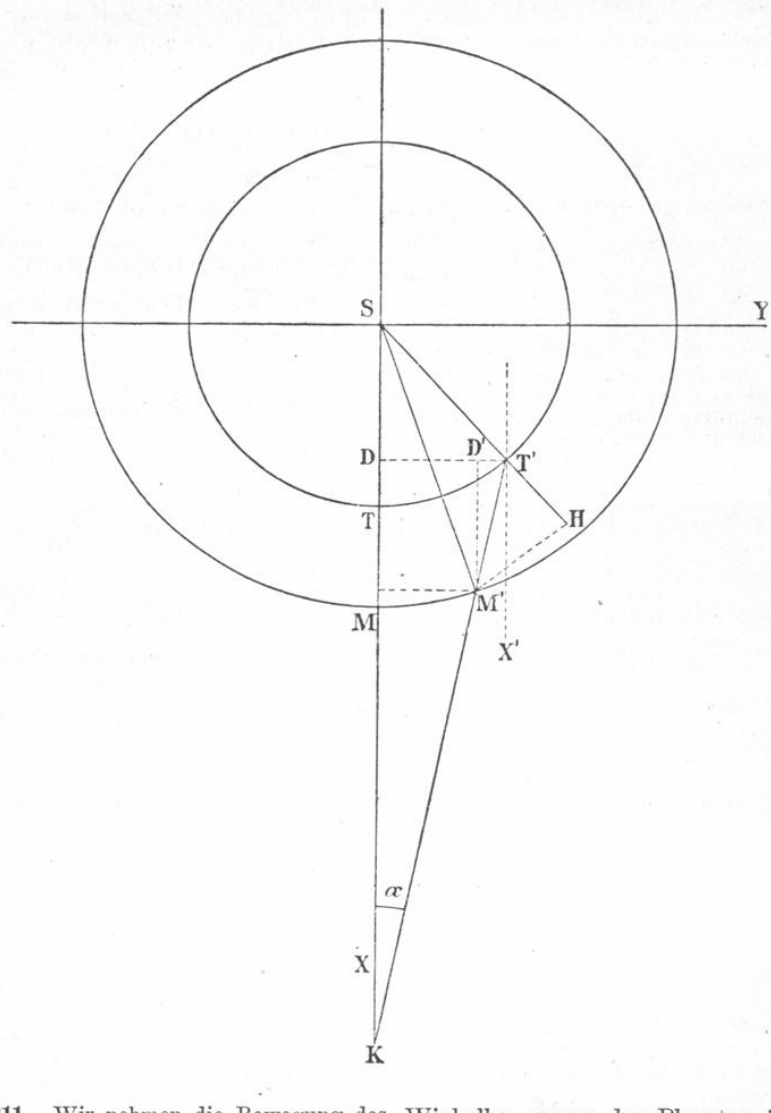
Antwort. Um den scheinbaren Lauf eines Planeten auf theoretischem Wege zu untersuchen, stellen wir folgende Betrachtungen an:

Sei M ein oberer Planet (vgl. Figur 113), welcher zur Zeit $t = 0$ mit der Erde T in Konjunktion ist. Wir wollen voraussetzen, dass beide Bahnen kreisförmig und in einer Ebene gelegen sind, was nicht sehr bei den Planeten von der Wahrheit abweicht.

In der Zeit t sei der Planet in M' und die Erde in T'. Bezeichnen wir nun die

Erkl. 210. Die Erscheinungen des scheinbaren Laufes der Planeten findet man in jeder populären Astronomie ausführlich dargelegt und graphisch erklärt. Unsere Aufgabe kann es hier nur sein, die Erscheinungen in mathematische Formeln anzukleiden.

Figur 113.



Erkl. 211. Wir nehmen die Bewegung des Planeten einfach als gleichförmig an, wodurch wir allerdings nur Mittelwerte erhalten, die jedoch der Wahrheit sehr nahe kommen, weil die wirklichen Abweichungsgrenzen der Zahlenangaben vom Mittel sehr gering sind.

Erkl. 212. Sei:

$$y_1 = f(t)$$

eine Funktion, die wir als stetig annahmen, so wird es immer ein y_1 vor dem Maximum und ein y_2 nach dem Maximum derart geben, dass:

$$y_1 = y_2$$

oder:

$$y_1 - y_2 = f(t_1) - f(t_2) = 0$$

Winkelbewegung des Planeten in der Zeiteinheit mit u und mit r den Radiusvektor, und mit u' und r' die analogen Grössen bei der Erde. Bezeichnen wir mit α den Winkel, den die Richtungen TM und $T'M'$ mit einander einschliessen, so wird:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D'T'}{D'M'} = \frac{DT' - EM'}{SE - SD}$$

oder:

$$124) \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{r'\sin u't - r\sin ut}{r\cos ut - r'\cos u't}$$

Ist der Planet stationär, so wird α ein Maximum, wir haben also jene Zeit t zu

In dem Maximum wird offenbar auch $t_1 = t_2$, also muss, da allgemein:

$$y_1 - y_2 = 0$$

im Augenblicke des Maximums:

$$y_1 - y_2 = 0$$

zugleich:

$$y_1 = y_2$$

für:

$$t_1 = t_2$$

d. h.:

$$dy = 0$$

suchen, für welche α ein Maximum wird, um die Zeit des Stationärwerdens zu erhalten. Bezeichnen wir $\operatorname{tg}\alpha$ mit y, so wird:

$$y = \frac{r' \sin u' t - r \sin u t}{r \cos u t - r' \cos u' t}$$

Maximum, wenn:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

ist, also wenn:

$$0 = \frac{(r' \sin u' t - r \sin u t)(u r \sin u t - r' u' \sin u' t) + (r \cos u t - r' \cos u' t)(u' r' \cos u' t - u r \cos u t)}{(r \cos u t - r' \cos u' t)^2}$$

Hier muss offenbar der Zähler gleich Null werden, also:

$$125) \ldots \cos\gamma = \cos(u' - u)t = \frac{r'^2 u' + r^2 u}{r r' (u + u')}$$

Erkl. 213. Steht ein unterer Planet am weitesten von der Sonne ab, so sagt man, er sei in grösster Elongation (Digression, Ausweichung). Die grösste Elongation beträgt beim Merkur etwa 27° 45′, bei der Venus etwa 48°. Bei den anderen Planeten kann offenbar von einer grössten Elongation gar keine Rede sein.

Um den sogenannten Elongationswinkel, d. h. den Winkel $ST'M' = E$ zu erhalten, ziehen wir $M'H$ rechtwinklig auf die Verlängerung von ST', so wird:

$$\operatorname{tg} M'T'H' = \frac{M'H}{T'H}$$

oder:

$$-\operatorname{tg} E = \frac{r \sin\gamma}{r \cos\gamma - r'}$$

Erkl. 214. Es ist nämlich:

$$u = \frac{360}{T}, \quad u' = \frac{360}{T'}$$

und demnach:

$$\frac{u'^2}{u^2} = \frac{T^2}{T'^2}$$

Nun ist nach dem Keplerschen Gesetze:

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{r^3}{r'^3}$$

also auch:

$$u' = u\left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2}$$

Erhebt man zum Quadrat, so folgt:

$$\operatorname{tg}^2 E = \frac{r^2(1 - \cos^2\gamma)}{(r\cos\gamma - r')^2}$$

Substituiert man nun den obigen Wert für γ, so folgt:

$$126) \ldots \operatorname{tg}^2 E = \frac{r'^2 u'^2 - r^2 u^2}{(r^2 - r'^2) u^2}$$

Bedenkt man, dass nach Keplers Gesetz:

$$\left(\frac{u'}{u}\right) = \frac{r^{3/2}}{r'^{3/2}}$$

so lassen sich die Formeln noch einfacher schreiben, es wird:

$$127) \ldots \cos\gamma = \frac{(r r')^{1/2}}{r' - (r r')^{1/2} + r}$$

$$128) \ldots \operatorname{tg}^2 E = \frac{r^2}{r(r + r')}$$

Erkl. 215. Die äusserst komplizierten Erscheinungen der scheinbaren Bewegung der Planeten suchten die Alten durch die Theorie der Epicykeln zu bemeistern. Aber schon Seneca (Quest. nat. lib. VII, Cap. 25, 26) glaubte, dass so komplizierte Erscheinungen der natürlichen Einfachheit widersprechen, mit der sich Wirklichkeit stets zu zeigen pflegt.

Die Ehre, diese Erscheinungen auf die einfachste Weise erklärt zu haben, gebührt ganz Kopernikus (De revol. 1543, lib. V, Kap. 35, 36).

Apollonius war der erste, der im Altertum eine Theorie des Stillstandes gegeben. Die neueste mathematische Bearbeitung des Theorems lieferte Cagnoli (Delle stazioni de' pianeti, Mem. della Soc. ital., vol. III. Verona 1786, Seite 369).

Man kann umgekehrt, wenn man den Erdradius $r' = 1$ setzt und den Winkel E beobachtet, aus der letzten Formel einen Näherungswert für r ableiten. Es ist:

$$129) \ldots r = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 E + \operatorname{tg} E \sqrt{1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 E}$$

Der Rücklaufbogen seit der Opposition ist offenbar gleich dem Winkel $X'T'M'$, wenn man annimmt, dass T' und M' die Positionen der Erde und der Planeten in dem Augenblicke sind, wo letzterer stationär ist. Nun ist offenbar:

$$X'T'M' = X'T'S - M'T'S = 180 - u't - E$$

Apollonius aus Perga in Pamphylien lebte etwa 200 v. Chr.

Seneca, Lucius Annäus, geb. in Corduba, Lehrer und Günstling von Nero, lebte im ersten Jahrhundert nach Chr. Hauptwerk: Naturalium quaestionum Libri VII.

Kopernikus, Nikolaus, geb. 19. Febr. 1473 zu Thorn an der Weichsel, bildete sich in Italien in der Theologie und Medizin aus, wurde Kanonikus zu Frauenberg, wo er auch am 24. Mai 1543 starb. Sein Hauptwerk ist: „De revolutionibus orbium ecelestium“. 1543 zu Nürnberg. Seine Verdienste sind zu bekannt, als dass sie hier noch einmal wiederholt werden sollten.

und demnach, da der ganze Rücklaufbogen durch den Oppositionspunkt in zwei Teile geteilt wird, der ganze Rücklaufbogen β:

$$130) \ldots \beta = 2\,(180^0 - u' t - E)$$

wobei offenbar $2t$ die Zeit des Rücklaufes ist.

Die Dauer des Rückganges variiert beim

Merkur	zwischen	21,5	und	23,5	Tagen
Venus	„	41	„	43,5	„
Mars	„	61,0	„	81,5	„
Jupiter	„	117	„	122,5	„
Saturn	„	135	„	139	„
Uranus	„	150	„	153	„

und ihr Winkel beim

Merkur	zwischen	9^0	und	16^0
Venus	„	14^0	„	17^0
Mars	„	10^0	„	20^0
Jupiter	„	$9{,}8^0$	„	10^0
Saturus	„	$6{,}7^0$	„	$6{,}9^0$
Uranus	„	$3{,}5^0$	„	4^0

Die Retrogradation beginnt bei den unteren Planeten ein wenig vor ihrer unteren Konjunktion und bei den oberen kurze Zeit vor der Opposition.

e) Theorie der Vorübergänge der unteren Planeten.

Frage 106. Was versteht man unter dem Vorübergang eines unteren Planeten vor der Sonne?

Antwort. Steht ein unterer Planet in seiner unteren Konjunktion einem seiner Knoten genügend nahe (Merkur näher als $3^0\,28'$, Venus näher als $1^0\,49$), so muss er uns (vergl. die Finsternisse) als ein schwarzer Fleck auf der Sonnenscheibe erscheinen. Man spricht dann von einem Merkur- oder Venusdurchgang.

Die analog bei den Finsternissen [vergl. Abschnitt N, e)] berechneten Näherungsbrüche zeigen, dass die Merkurdurchgänge in Zwischenräumen von $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, 6, 7, $9\frac{1}{2}$ und 13, also auch 20, 26, 46, 263 Jahren zurückkehren. Analog ist die Periode der Venusdurchgänge:

7 Jahre 363 Tage

und

113 Jahre 185 Tage

Da die Erde in den Merkurknoten etwa am 9., 10. Mai und 10., 11. November, in den Venusknoten aber am 7. Dez. und 6. Juni kommt, so können sich Merkur- resp. Venusdurchgänge nur an diesen Tagen ereignen.

Um aus dem beobachteten Venusdurchgang die Sonnenparallaxe zu bestimmen, kann man

Erkl. 216. Die erste Nachricht von einem Vorübergang der unteren Planeten vor der Sonne rührt von Kepler her, der schon 1629 in seiner Ephemeride für das Jahr 1631 aufmerksam machte, dass sowohl Merkur als auch Venus vor die Sonne treten werden. Und in der That gelang es am 7. Nov. 1631 mehreren, den Merkur in der Sonne zu beobachten, während Venus (die zufolge der späteren Rechnungen schon vor dem Aufgange der Sonne ausgetreten war) nicht gesehen werden konnte.

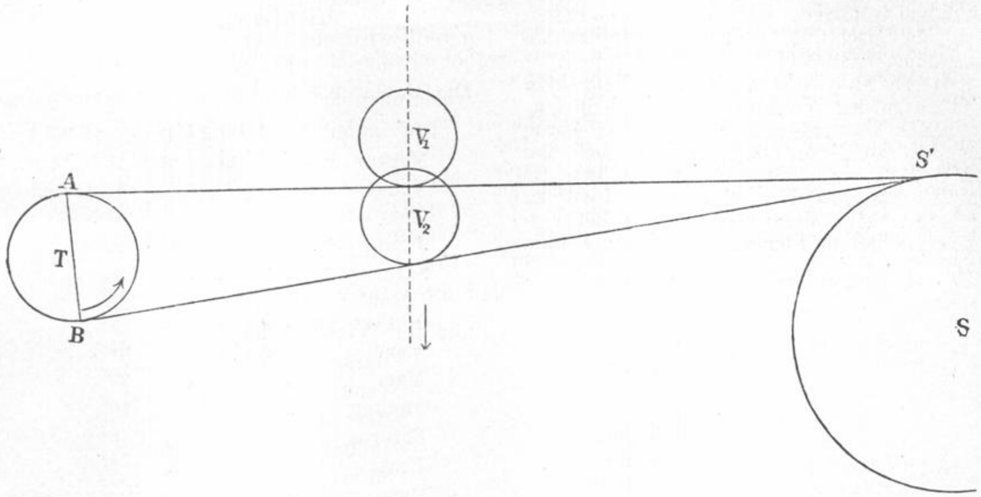
Halley war der erste, der auf die Wichtigkeit der Vorübergänge der Planeten für die Parallaxenbestimmung aufmerksam machte.

Seine, sowie die später von Delisle entwickelte Art der Berechnung wird in der Folge auseinandergesetzt.

Weiteres über die Geschichte dieses Gegenstandes findet man in Wolfs Geschichte der Astronomie p. 639 bis 649

Halley, Edmund, zu Haggerston bei London 1656 geboren, wurde 1720 nach Flamsteeds Tode Direktor der Sternwarte zu Greenwich, woselbst er im Jahre 1742 starb. Berühmt ist er geworden durch seine Kometenrechnungen, durch welche er den nach ihm benannten Komet als einen periodischen erwiesen hatte.

Figur 114.



Delisle, Joseph (1658 bis 1768), ein französischer Geograph, wegen dessen Verdienste um die Geographie auf Peschel, Geschichte der Erdkunde, bis auf A. v. Humboldt und K. Ritter, München 1865, verwiesen werden mag.

Erkl. 217. Die nächsten Vorübergänge des Merkurs und der Venus sind:

1) Merkur.

1891 am 10. Mai

1894 am 10. November

nur der letztere wird in unseren Gegenden sichtbar sein.

2) Was die Venusvorübergänge betrifft, so sind sie ungleich seltener als die Merkurvorübergänge (die etwa 13 im Jahrhundert stattfinden). Man findet solche in den Jahren:

	Zwischenzeit
1761 Juni 5	
	8
1769 Juni 3	
	$105\frac{1}{2}$
1874 Dezember 8	
	8
1882 Dezember 6	
	$121\frac{1}{2}$
2004 Juni 7	
	8
2012 Juni 5	
	$105\frac{1}{2}$
2117 Dezember 10	
	8
2125 Dezember 8	
	$121\frac{1}{2}$

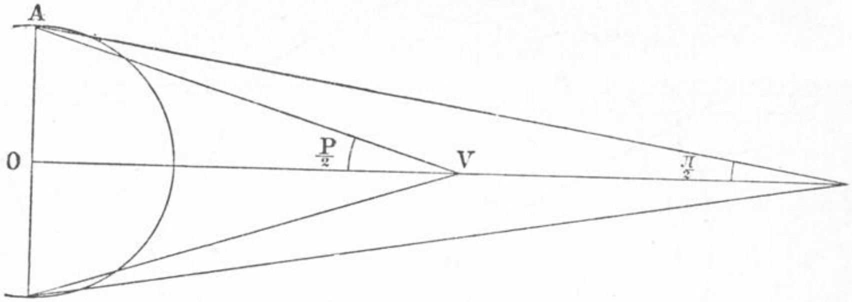
Eine recht übersichtliche und leicht verständliche Darstellung der auf die Periodizität dieser Erscheinungen bezüglichen Daten und Berechnungen gibt Martus, Astronomische

dem Prinzipe nach verfahren wie folgt (Methode von Delisle): Sei (vergl. Figur 114) T die Erde und S die Sonne. Denke man sich der Einfachheit wegen die Erde als stillstehend, so wird man, wenn die Venus in V_1 ist, die Berührung der Venus und der Sonne von A aus in S' sehen und nach einer Zeit, wenn die Venus nach V_2 gelangt, dasselbe Phänomen von B aus beobachten können. In dem Zeitunterschied t beschreibt aber die Venus (relativ zur Erde genommen) den Bogen π, welcher eben die Sonnenparallaxe ist. Es ist die tägliche Bewegung der Venus $= 5768'$, also die stündliche $240''$, analog der Erde $= 3548''$ resp. $148''$. Die Venus eilt demnach der Erde stündlich um $92''$ voraus. Dieser Winkel, multipliziert mit der Zeitdifferenz, ausgedrückt in Stunden der Berührungen für A und B, gibt die Sonnenparallaxe. Da aber diese Zeitdifferenz wenige Minuten beträgt, so ist die Fixierung des Eintrittes von grossem Einfluss. Dies ist aber eine sehr schwierige Sache, man erblickt nämlich den Planeten erst dann, wenn er in die Sonne eingetreten ist und selbst dann ist die innere Berührung sehr schwer zu beobachten, wie ich mich selbst beim Merkudurchgang vom Jahre 1878 überzeugt habe.

Darum dürfte sich immer die Methode von Halley empfehlen, die von dieser Schwierigkeit der Fixierung des Zeitmoments des Eintrittes resp. Austrittes weniger beeinflusst wird.

Das Wesen dieser Methode besteht in folgendem: Sei (vergl. Figur 115) S die

Figur 115.



Geographie, zweite Aufl. 1888, p. 274 bis 290; ferner Epstein, Geonomie (math. Geographie) 1888, p. 398 bis 420.

Die Geschichte und Theorie findet man in Wolfs Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie II. Band, 1872, sowie in der Geschichte der Astronomie von demselben Verfasser.

Sonne, V die Venus und O der Erdmittelpunkt, ferner:

$$SO = R$$
$$SV = r$$

so folgt aus dem Dreiecke OAS:

$$\text{tg}\, ASO + \text{tg}\, \frac{\pi}{2} = \frac{AO}{R}$$

ferner aus dem Dreiecke AVO:

$$AVO = \text{tg}\, \frac{P}{2} = \frac{AO}{R - r}$$

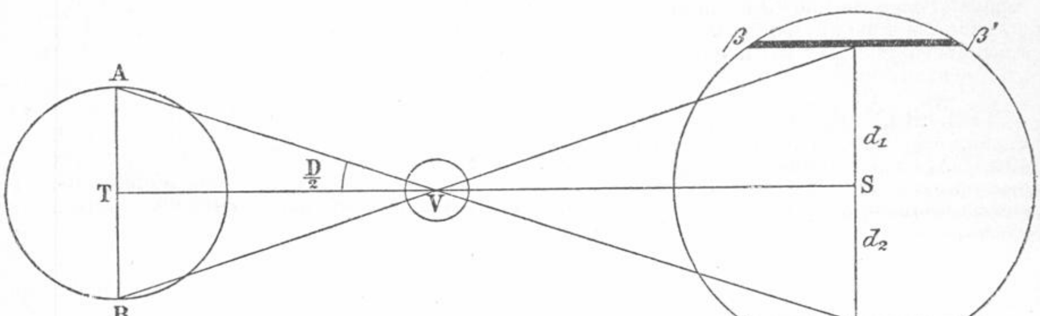
Dabei ist offenbar π die Sonnen- und P die Venusparallaxe. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\text{tg}\, \frac{\pi}{2}}{\text{tg}\, \frac{P}{2}} = \frac{R - r}{R}$$

oder da die Winkel klein sind:

$$131) \ldots \frac{\pi}{P} = \frac{R - r}{R}$$

Figur 116.

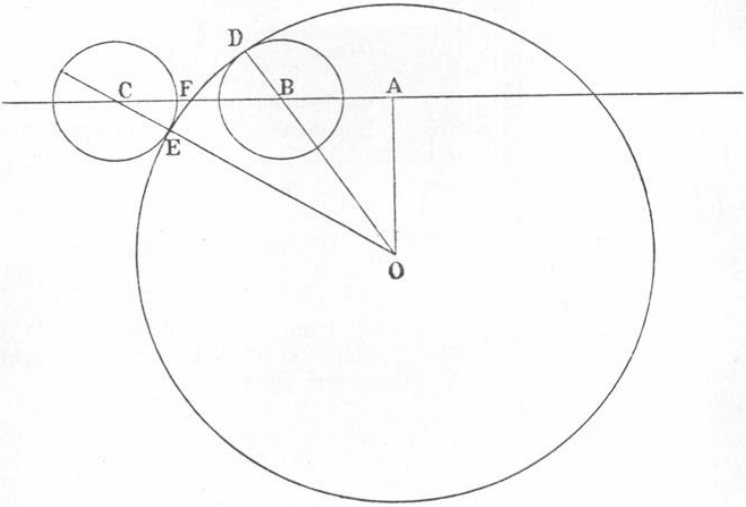


Erkl. 218. Es mögen hier einige Parallaxen, Schätzungen und Bestimmungen angeführt werden:

Ptolomäus (136 n. Chr.) . . .	170″
T. Brahe (1602)	180″
Kepler (1620)	60″

Dieses ist die erste Fundamentalgleichung. Beobachtet man nun (vergl. Figur 116) die Venus V von zwei Erdorten A und B aus, so wird sie auf die Sonne zwei parallele Sehnen $\beta\beta'$ und $\alpha\alpha'$ beschreiben, deren schein-

Figur 117.



Sodann folgen wirkliche Beobachtungen:

Halley (1697) aus dem Merkurdurchgang von 1677	25″
Mayer (1753) in seiner Mondtheorie	8″

Aus dem Venusdurchgang von 1874 folgt noch:

Stone (1878, 1881)	8″ 88
Todd (1881)	8″ 88

Als Mittelwert kann als den verschiedenartigen neueren Bestimmungen

8″ 85

angenommen werden. Es mag bemerkt werden, dass einem Plus oder Minus von 0,01″ eine Ab- oder Zunahme der Entfernung der Erde von der Sonne um 26,3 Erdradien entspricht.

Eine Zusammenstellung der gewonnenen Bestimmungen gibt Houzeau im Vade-mecum de l'astronomie 1882, Seite 404 bis 411.

Erkl. 219. Es wäre noch zu erklären, warum man lieber die Venus als die Merkurdurchgänge zur Parallaxenbestimmung verwendet, da sich doch die letzteren fast so oft in einem Jahrhundert als die ersteren in einem Jahrtausend ereignen. Es rührt daher, weil beim Merkur die Zeit, welche zum Durchlaufen der Sonnensehne nötig ist, fast die Hälfte derjenigen der Venus beträgt, so dass die Bestimmung im allgemeinen nur halb so genau wird. Der Winkel D ist hier viel kleiner und da die Genauigkeit der Parallaxenbestimmung von ihm abhängt, auch der Beobachtungsfehler von grösserem Einfluss. Es seien nämlich:

$$r \text{ und } r_1$$

die Entfernungen der Venus und des Merkurs von der Sonne.

$$D \text{ und } D_1$$

barer Winkelabstand D leicht berechnet werden kann, wie wir unten zeigen werden.

Sodann wird offenbar:

$$\sphericalangle AVT = \frac{D}{2}$$

Stünde die Sonne in unendlicher Entfernung, so wäre offenbar:

$$D = P$$

wegen der Sonnenparallaxe ist aber:

$$132) \ldots D = P - \pi$$

Dieses ist die zweite Fundamentalgleichung. Da in diesen Gleichungen R, r, D gegeben sind, so lassen sich P und π berechnen, man erhält:

$$133) \ldots P = D\,\frac{R}{r}$$

und

$$134) \ldots \pi = D\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

Wir haben nun noch zu zeigen, wie D zu berechnen ist aus den beobachteten Berührungen der Planeten mit der Sonnenscheibe.

Sei O (vergl. Fig. 117) der Mittelpunkt der scheinbaren Sonnenscheibe, C der Mittelpunkt der Venus beim Eintritt, B jener bei der ersten inneren Berührung, so haben wir:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FO}^2$$

Nun ist aber:

$\overline{OA} = d =$ der Sehne vom Mittelpunkt

$\overline{AF} = \frac{s}{2} =$ der halben Sehne die gemessenen Winkel, sowie $\triangle D$ der beiden gemeinsame gleiche Fehler, so wird:

$$\pi = (D + \triangle D)\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

$$\pi_1 = (D_1 + \triangle D)\left(\frac{R}{r_1} - 1\right)$$

$$\pi = D\left(\frac{R}{r} - 1\right) + \triangle D\left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

$$\pi_1 = D_1\left(\frac{R}{r_1} - 1\right) + \triangle D\left(\frac{R}{r_1} - 1\right)$$

Da nun:

$$\frac{R}{r_1} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{0{,}7} = 1{,}4$$

so folgt:

$$\pi_1 = D_1\left(\frac{R}{r_1} - 1\right) + 1{,}5 \triangle D$$

$$\pi = D\left(\frac{R}{r} - 1\right) + 0{,}4 \triangle D$$

Wir sehen, dass beim Merkur der Fehler etwa mit 1,5, bei der Venus aber bloss mit 0,4 multipliziert erscheint, demnach von viel geringerem Einfluss als beim Merkur ist.

Seien ϱ und ϱ' die Radien der Sonne und der Venus, so wird:

$$OB = \varrho - \varrho'$$

ferner:

$$\triangle AOB \sim \triangle DBF$$

wenigstens genähert, wenn man den kleinen Bogen als eine Gerade auffasst. Demnach:

$$BF : BD = BO : AB$$

$$135) \ldots BF : \varrho' = \varrho - \varrho' : \left(\frac{s}{2} - BF\right)$$

Da nun nach dem Obigen:

$$136) \ldots (\varrho - \varrho')^2 = \left(\frac{s}{2} - BF\right)^2 + d^2$$

so kann, da ϱ, ϱ' und s teils durch Rechnung (ϱ, ϱ') teils durch Beobachtung (s) gegeben sind:

$$BF \text{ und } d$$

aus den letzten Gleichungen berechnet werden.

L. Ueber die Theorie der Planetenbegleiter.

Anmerkung 20. Sowie wir den Mars als den typischen Planeten gelten liessen, so wollen wir zu den typischen Vertretern der Planetenbegleiter, die Monde des Jupiters und den Saturnring wählen. Die Mondtheorie, die streng genommen, auch hieher gehört, soll im nächsten Kapitel abgehandelt werden.

a) Theorie der Jupitermonde.

Frage 107. Welche Eigentümlichkeiten zeigt die Bewegung der Jupitermonde?

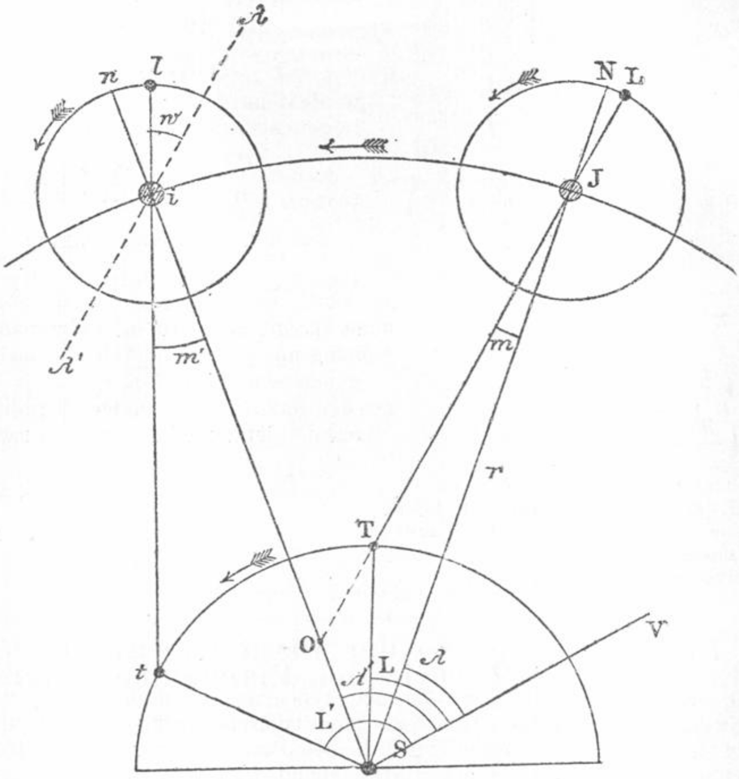
Antwort. Die erste Thatsache, die die Beobachtung der Bewegung des Jupitertrabanten liefert, ist die, dass sie sich von Westen nach Osten um Jupiter, also genau so wie die Planeten um die Sonne bewegen.

Die siderische Umlaufzeit der Monde ist jene Zeit, welche verfliesst bis zu dem Augenblicke, in welchem der Trabant von dem Jupiterzentrum aus nach derselben Richtung gesehen wird, oder wo sein jovizentrischer Ort wieder dieselbe Länge hat. Seien L, l die Orte des Trabanten, J, i jene des Jupiters und T, t jene der Erde zur Zeit, wo Trabant, Jupiter und Erde in einer geraden Linie sich befinden und sei τ die Zeit, welche zwischen diesen zwei Konjunktionen des Jupiters verflossen ist, ferner $\lambda\lambda' \parallel$ zu LT, so hat der Trabant während dieser Zeit einen ganzen Umlauf um den Jupiter und überdieses noch den Winkel $\lambda i l$ beschrieben.

Erkl. 220. Wie aus der populären Astronomie bekannt, besitzt Jupiter vier Monde. Man sieht, dass sie sich vom Jupiter bis auf gewisse Grenzen entfernen. Man sieht sie zuweilen über die Jupiterscheibe vorübergehen und ihren Schatten auf sie werfen, oft sieht man sie in einiger Entfernung von der Jupiterscheibe verschwinden, was sich nur aus ihrem Gang durch den Schattenkegel erklären lässt, den Jupiter auf der von der Sonne abgewendeten Seite von sich wirft.

Was hier von den Jupitermonden gesagt wird, lässt sich leicht auch auf die Uebrigen übertragen.

Figur 118.



Erkl. 221. Zieht man in dem Dreiecke ABC (vergl. Figur 119) die Senkrechte BD, so wird:

$$\operatorname{tg} m = \frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin n}{AC - AD}$$

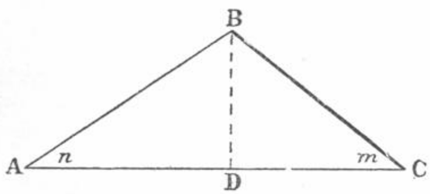
oder da:

$$AD = AB \cos n$$

auch:

$$\operatorname{tg} m = \frac{AB \sin n}{AC - AB \cos n}$$

Figur 119.



Erkl. 222. Die Finsternisse bieten ein durchaus bequemes Mittel, die Zeiten der Oppositionen zu beobachten. Die Mitte der Finsternis ist zugleich die Zeit der Opposition.

Man wird übrigens nur jene Oppositionen dazu wählen, wo sich der Jupiter in der Nähe

Seien λ und λ' die Jupiterlängen, L und L' die zu ihnen zugehörigen Erdlängen, so wird, wenn:

$$ST = R \qquad St = R'$$
$$SJ = r \qquad Si = r'$$

gesetzt wird:

$$\operatorname{tg} m = \frac{R \sin (L - \lambda)}{r - R \cos (L - \lambda)}$$

Ebenso:

$$\operatorname{tg} m' = \frac{R' \sin (L' - \lambda')}{r' - R' \cos (L' - \lambda')}$$

Damit sind die Winkel m und m' gegeben. Dieses gibt:

$$w = \sphericalangle \lambda' i S - m'$$

Nun ist:

$$\sphericalangle \lambda' i S = \sphericalangle i O T = m + (\lambda' - \lambda)$$

also wird:

$$w = (m - m') - (\lambda - \lambda')$$

In der Zeit τ hat also der Trabant einen Winkel von:

$$360^0 + w$$

zurückgelegt, also in einem Tag, wenn τ in Tagen ausgedrückt ist:

des Knotens befindet, weil alsdann seine und die der Trabantenbahn nahezu mit der Ebene der Ekliptik zusammenfällt und die soeben gegebene Entwicklung voraussetzt, dass sich alle vier Körper in einer Ebene befinden. Wegen der geringen Neigungen des Jupiters und seiner Trabanten wird dieses jedoch immer nahezu der Fall sein.

Erkl. 223. Berechnet man aus den Beobachtungen auf die soeben mitgeteilte Art und Weise die mittlere tägliche siderische Bewegung des 1., 2. und 3. Trabanten:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$$

so sieht man, dass:

$$\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3 = 0$$

ist. Ebenso findet man für die drei jovizentrischen Längen:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$$

die diese Trabanten zu gleicher Zeit haben, die Beziehung:

$$\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 180^0$$

Daraus folgt, dass die drei ersten Sateliten nie zu gleicher Zeit verfinstert werden können. Diese Beziehung wurde im Jahre 1718 von Bradley entdeckt. Lagrange zeigte (1766), dass diese Beziehung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler als ganz exakt betrachtet werden muss.

In der physischen Astronomie werden die gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnisse der einzelnen Monde entwickelt. Da uns der Umfang des Werkes verbietet, auf diese Entwicklungen einzugehen, so wollen wir wenigstens die Resultate hersetzen. Seien:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$$

die mittleren,

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$$

die wahren Längen des 1., 2., 3., 4. Trabanten,

$$\pi_3,\ \pi_4$$

die Perijovien des 3. und 4., sowie J die mittlere Anomalie des Jupiters, so bestehen folgende Gleichungen:

$$l_1 = \lambda_1 + 27'\,16''\sin 2(\lambda_1 - \lambda_2) + \cdots$$

$$l_2 = \lambda_2 + 1^0\,4'\,22''\sin 2(\lambda_2 - \lambda_3) - 36''\sin J \cdots$$

$$l_3 = \lambda_3 + 9'\,14''\sin(\lambda_3 - \pi_3) + 4'\,5''\sin(\lambda_3 - \pi_4) - 4'\,22''\sin(\lambda_2 - \lambda_3) - 48''\sin J + \cdots$$

$$l_4 = \lambda_4 + 50'\,2''\sin(\lambda_4 - \pi_4) - 1'\,12''\sin(\lambda_4 - \pi_3) - 1'\,53''\sin J + \cdots$$

$$\frac{360^0 + w}{\tau}$$

dieses ist seine mittlere tägliche Bewegung.

Sei U die Umlaufzeit, so wird seine mittlere tägliche Bewegung auch durch:

$$\frac{360^0}{U}$$

dargestellt werden können, wir haben also, wenn wir die reciproken Werte nehmen:

$$\frac{U}{360^0} = \frac{\tau}{360^0 + w}$$

also:

$$137) \ldots U = \frac{360^0\,\tau}{360^0 + w}$$

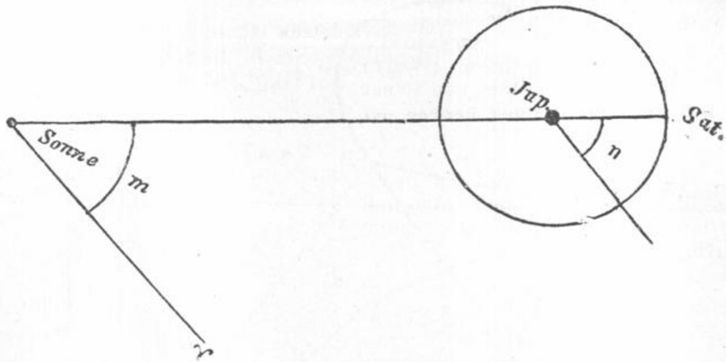
Ist so die Umlaufzeit genähert bekannt, so lässt man möglich viele Umlaufzeiten zwischen der ersten und letzten Opposition vergehen und berechnet sodann aus diesen beiden den genaueren Mittelwert derselben. Auf diese Weise wird die Umlaufzeit bestimmt.

Frage 108. Wie findet man die Neigung und die Knotenlänge der Trabanten?

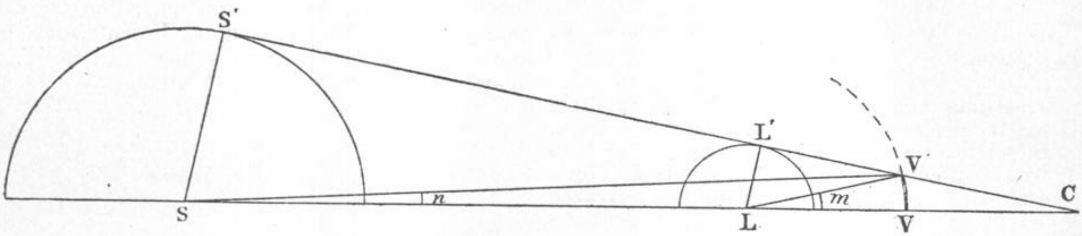
Antwort. Die gewöhnliche beim Mars verwendete Methode der Bestimmung der Neigung und der Knotenlänge ist hier nicht gut verwendbar; weil es äusserst schwer sein würde, die geozentrische Länge und Breite der Trabanten auf die jovizentrische, mit der nötigen Genauigkeit zurückzuführen.

Man benützt hierzu die Finsternisse und zwar jene von grösster und kleinster Dauer.

Figur 120.



Figur 121.



Erkl. 224. Die Dreiecke CSS' und CLL' sind ähnlich. Aus der Aehnlichkeit folgt:

$$LC : CS = \varrho' : \varrho$$

also:

$$LC : r + LC = \varrho' : \varrho$$

demnach:

$$LC\varrho = (r + LC)\,\varrho'$$

oder:

$$LC(\varrho - \varrho') = r\varrho'$$

woraus:

$$LC = \frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'}$$

folgt.

Erkl. 225. Es ist:

$$VV' : LL' = CV : CL$$

also:

$$VV' = \frac{CV \cdot LL'}{CL}$$

Da nun:

$$CV = \frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'} - d$$

$$LL' = \varrho'$$

$$CL = \frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'}$$

so folgt:

$$VV' = \frac{\frac{r\varrho' - d(\varrho - \varrho')}{\varrho - \varrho'} \cdot \varrho'}{\frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'}}$$

also:

$$VV' = \frac{r\varrho' - d(\varrho - \varrho')}{r}$$

oder:

$$VV' = \frac{\varrho'(r + d) - d\varrho}{r}$$

Wenn die Dauer der Finsternis am grössten ist, so liegt die Achse des Schattenkegels in der Ebene der Bahn des Satelliten. Für die Mitte der Finsternis ist aber offenbar die jovizentrische Länge des Satelliten gleich der heliozentrischen Länge des Jupiters und zugleich der Länge des Knotens der Satellitenbahn mit dem Hauptplaneten (vergl. Fig. 120, $\sphericalangle m = \sphericalangle n$).

Um die Neigung zu bestimmen, müssen wir ein wenig ausholen. Sei in der Figur 121:

$SS' = \varrho =$ Radius der Sonne
$LL' = \varrho' =$ Radius des Jupiters
VV' ein Stück der Satellitenbahn
C die Spitze des Schattenkegels

Sei ferner:

$SL = r$ der Entfernung des Jupiters von der Sonne
$LV = d$ „ „ „ Satelliten von Jupiter

sowie:

$$\sphericalangle V'LV = m$$
$$\sphericalangle V'SV = n$$

so folgt (vergl. Erkl. 224):

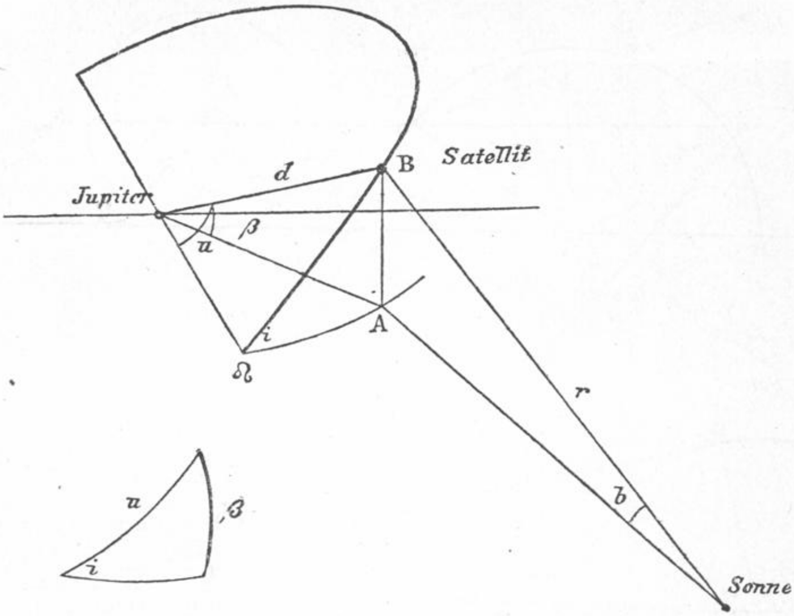
$$LC = \frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'}$$

$$CV = \frac{r\varrho'}{\varrho - \varrho'} - d$$

Ferner wird (vergl. Erkl. 225):

$$138) \ldots w = VV' = \frac{(r + d)\,\varrho' - d\varrho}{r}$$

Figur 122.



Man hat auch:

$$\operatorname{tg} m = \frac{VV'}{LV} = \frac{w}{d}$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{VV'}{SV} = \frac{w}{r+d}$$

Sei nun (vergl. Figur 122) u das Argument der Breite für den Satelliten, i die Neigung der Satellitenbahn gegen die Ekliptik, sowie β die jovizentrische Breite des Satelliten, so wird nach dem Sinussatze der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin\beta = \sin u \sin i$$

ferner, da:

$$AB = d\sin\beta = r\sin b$$

wobei b die heliozentrische Breite des Satelliten bezeichnet, auch:

$$\sin b = \frac{d}{r}\sin\beta$$

oder:

$$139) \ldots \sin b = \frac{d}{r}\sin u \sin i$$

Sei nun (vergl. Figur 123) $BCA☊$ ein Stück der Jupiterbahn, $RV☊$ ein Stück der Satellitenbahn, ferner $AVRB$ ein Schnitt des Schattenkegels Jupiter. Die Sonne wird in der Senkrechten zur Ebene des Papiers gedacht, die durch den Punkt C, das Zentrum des Schattenschnittes, geht. Sei ferner $CM \perp RV$ und $Cm \perp AB$, so ist:

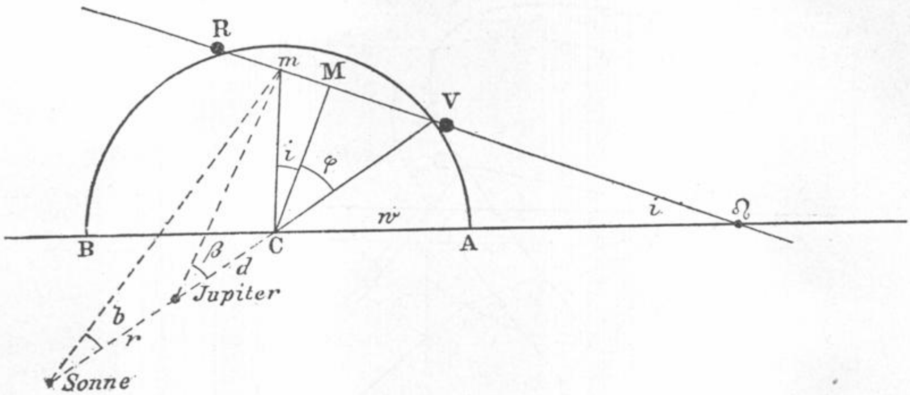
$$\sphericalangle mCM = i = \text{Neigung der Satellitenbahn}$$

ferner:

$$CV = CA = w$$

Erkl. 226. In der Figur 118 erscheint das, was eigentlich senkrecht auf die Ebene des Papiers zu zeichnen wäre, schief gezeichnet und punktiert und auch unverhältnismässig gezeichnet. Es wird wohl leicht sein, sich den wahren Sachverhalt vorzustellen. Es sei hier noch angeführt, dass m der Ort der Satelliten ist im Augenblicke der Konjunktion des Jupiters, wo also die jovizentrische Länge des Satelliten gleich der heliozentrischen Länge des Jupiters ist.

Figur 123.



Man hat:

$$Cm = d \sin\beta = (r + d) \sin b$$

Nun ist:

$$CM = Cm \cos i$$

also:

$$CM = d \sin\beta \cos i$$

oder da, wie oben gezeigt:

$$\sin\beta = \sin u \sin i$$

auch:

$$CM = d \sin\beta \cos i \sin i$$

oder:

$$CM = d \sin\beta \sin i$$

Es ist, wie man sofort einsieht:

$$CM = CV \cos\varphi = w \cos\varphi$$

also:

$$d \sin\beta \sin i = w \cos\varphi$$

daraus folgt aber:

$$140) \ldots \cos\varphi = \frac{d}{w} \sin\beta \sin i$$

damit ist φ gegeben.

Dann ist aber:

$$RV = 2MV = 2CV \sin\varphi$$

oder wenn man die Sehne RV mit σ bezeichnet:

$$141) \ldots \sigma = 2w \sin\varphi$$

Dieses ist die Fundamentalgleichung für die Theorie der Finsternisse.

Will man die Dauer der Finsternis haben, so muss man wissen, wie lange der Trabant braucht, um die Sehne σ zu durchlaufen.

Drückt man die Zeit t in Tagen aus und ist μ die mittlere tägliche jovizentrische Bewegung des Satelliten, so wird die **Dauer der Finsternis** offenbar gegeben sein durch:

$$142) \ldots t = \frac{\sigma}{\mu}$$

Ist umgekehrt die Dauer der Finsternis

Erkl. 227. $\cos i \sin i = \frac{1}{2} \sin 2i$

ist nun i sehr klein, so wird:

$$\sin 2i = 2i \sin 1''$$

also:

$$\frac{1}{2} \sin 2i = i \sin 1''$$

wofür man wieder $\sin i$ setzen kann.

Erkl. 228. Es ist offenbar der Weg = Geschwindigkeit $\times$ Zeit, also:

$$\sigma = \mu t$$

woraus:

$$t = \frac{\sigma}{\mu}$$

Erkl. 229. Galilei hatte die Jupitermonde entdeckt und diese Entdeckung in seiner Schrift: „Sidereus nuntius, magna longeque admirabilia spectacula pandens, suspiciendaque proponens unicumque, praesertim vero philosophis atque astronomis etc. Venetiis 1610" bekannt gemacht. Er hat drei dieser Monde am 7. Januar 1610 gesehen, von denen die beiden äussersten unter günstigen Bedingungen sogar den blossen freilich sehr scharfen Augen sichtbar werden und daher den Chinesen und Japanesen schon lange vorher bekannt waren. Den vierten entdeckte er einige Tage später und beobachtete alle bis zum Jahre 1619. Galilei bezeichnete sie mit dem Namen der „Mediceischen Gestirne", während Marius, der sie schon 1609 gesehen haben will, sie „Sidera Brandenburgica" nannte. Aber weder die eine noch die andere Benennung hat das Bürgerrecht in der Astronomie erhalten.

Ueber Galilei vergl. Erkl. 239.

Simon Mayr oder Marius, geboren im Jahre 1570 zu Gunzenhausen, weilte im Jahre 1601 in Prag, um sich in der Astronomie bei Tycho und Kepler auszubilden. Starb 1624 zu Ansbach als Hofastronom und Kalendermacher. Er war auch der erste Entdecker eines Himmelnebels, des ersten, der auf der nördlichen Halbkugel mit Sicherheit beobachtet wurde (1612 Andromeda-Nebel).

bekannt, so liefert die Gleichung 126) σ, dann die Gleichung 125):

$$\sin\varphi = \frac{\sigma}{2w}$$

und damit, da w nach der Gleichung 122) berechnet werden kann, den Winkel φ.

Ferner liefert die Gleichung 124) das Produkt:

$$\sin i \sin\beta = \frac{w\cos\varphi}{d}$$

fügt man noch hinzu die allgemeine Gleichung III):

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \Omega)$$

und bemerkt, dass zur Zeit der Konjunktion des Jupiters die jovizentrische Länge des Satelliten λ gleich ist der heliozentrischen Länge des Jupiters l, so folgt:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega)$$

Da nun Ω gegeben ist, so findet man aus dieser und der Gleichung:

$$\sin i \sin\beta = \frac{w\cos\varphi}{d}$$

die Unbekannten β und i.

Will man auch noch Ω als unbekannt annehmen, dann muss man für zwei Konjunktionen die Grössen:

$$w \quad \varphi \quad d \quad l$$

besitzen, also:

$$w' \quad \varphi' \quad d' \quad l'$$

sodann hat man für die vier Unbekannten:

$$\beta \quad \beta' \quad i \quad \Omega$$

die vier Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega)$$

$$\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg} i \sin(l' - \Omega)$$

$$\sin i \sin\beta = \frac{w\cos\varphi}{d}$$

$$\sin i \sin\beta' = \frac{w'\cos\varphi'}{d'}$$

aus denen sie sich berechnen lassen.

Frage 109. Wie bestimmt man die synodische Umlaufzeit und die Lichtgeschwindigkeit aus den Beobachtungen der Jupitermondfinsternisse?

Antwort. Sei T (vergl. Fig. 124) der Erdort und J der Jupiter, sowie M der beobachtete Jupitermond in der Nähe der Opposition.

Beobachtet man zur Zeit T_0 das Verschwinden des Trabanten, so wird, wenn v die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet und genähert:

$$TM = TJ = \varrho_0$$

gesetzt wird, ferner der Augenblick des Verschwindens mit τ bezeichnet wird:

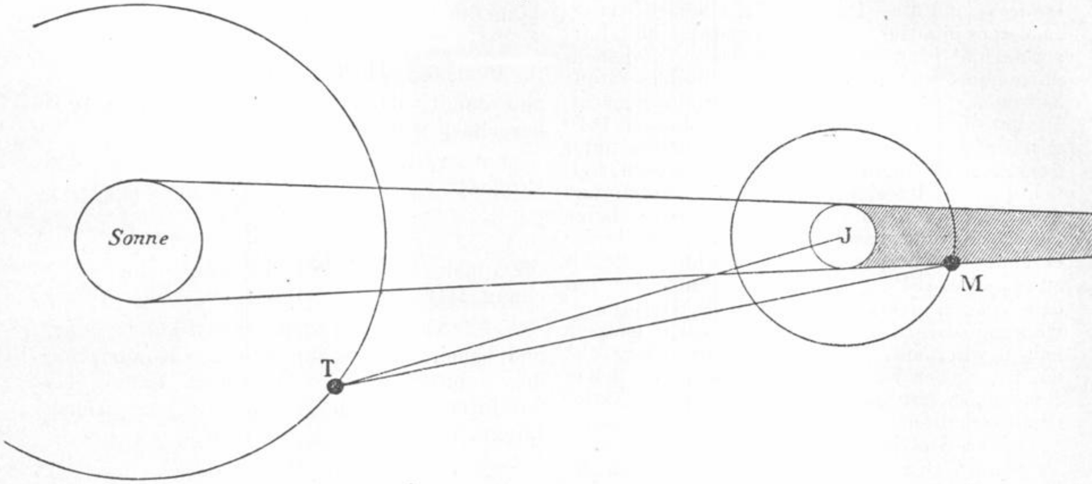
$$T_1 = \tau + \frac{\varrho_0}{v}$$

Erkl. 230. Es ist immer:

Weg : Geschwindigkeit = Zeit

wie aus der Definition der Geschwindigkeit folgt.

Figur 124.



Wäre v unendlich gross, so wäre $T_1 = \tau$, d. h. wir würden den Mond in dem Augenblicke nicht mehr sehen, wo er in den Schatten eintritt, während wir ihn doch, weil v nicht unendlich gross ist, noch durch die Zeit:

$$\frac{\varrho_0}{v}$$

beleuchtet sehen. Nach einer Zeit t_1 kommt die Erde in eine Entfernung ϱ_1 vom Jupiter und wir beobachteten wieder das Verschwinden zur Zeit T_2, so wird:

$$T_2 = \tau + s_1 + \frac{\varrho_1}{v}$$

Erkl. 231. Man definiert eben die synodische Umlaufzeit als jene Zeit, die zwischen zwei Eintritten oder Austritten eines und desselben Mondes verfliesst.

Dabei ist s_1 die synodische Umlaufzeit. Auf diese Art beobachten wir weiter solche Phänomene, für welche:

Erkl. 232. Wir haben schon früher an Beispielen dargethan, dass die synodischen Umlaufzeiten einander nicht gleich sind, sondern beständig um einen Mittelwert schwanken.

$$T_0 = \tau + \frac{\varrho_0}{v}$$

$$T_1 = \tau + s_1 + \frac{\varrho_1}{v}$$

$$T_2 = \tau + s_2 + \frac{\varrho_2}{v}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{n-1} = \tau + s_{n-1} + \frac{\varrho_{n-1}}{v}$$

Bilden wir die Differenzen, so folgt:

$$T_1 - T_0 = s_1 - \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{v}$$

$$T_2 - T_1 = s_2 - s_1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{v}$$

$$T_3 - T_2 = s_3 - s_2 - \frac{\varrho_2 - \varrho_3}{v}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{n-1} - T_{n-2} = s_{n-1} - s_{n-2} - \frac{\varrho_{n-2} - \varrho_{n-1}}{v}$$

Bilden wir nun die Summe, so folgt:

$$T_{n-1} - T_0 = (s_{n-1} - s_1) - \frac{\varrho_0 - \varrho_{n-1}}{v}$$

Beachten wir nun, dass:

$$s_{n-1} = n$$

synodischen Umlaufzeiten, dass also:

$$s_{n-1} - s_1 = (n-1)\,s$$

wenn s die mittlere synodische Umlaufzeit ist, so folgt:

$$143) \;\ldots\; T_{n-1} - T_0 = (n-1)\,s - \frac{\varrho_0 - \varrho_{n-1}}{v}$$

Beobachten wir nun auf gleiche Weise das Wiedererscheinen des Satelliten so folgt:

$$T'_{n-1} - T'_0 = (n-1)\,s + \frac{\varrho'_0 - \varrho'_{n-1}}{v}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich leicht s und v bestimmen. Man erhält:

$$144) \;\ldots\; s = \frac{(\varrho'_0 - \varrho'_{n-1})\,(T_{n-1} - T_0) + (\varrho_0 - \varrho_{n-1})\,(T'_{n-1} - T_0)}{(n-1)\,[(T_0 + T'_0) - (T_{n-1} + T'_{n-1})]}$$

$$145) \;\ldots\; v = \frac{(\varrho_0 + \varrho'_0) - (\varrho_{n-1} + \varrho'_{n-1})}{(T_0 - T'_0) - (T_{n-1} - T'_{n-1})}$$

Erkl. 233. Beim Verschwinden leuchtete uns noch der Trabant einige Zeit, beim Erscheinen bleibt er aus gleichem Grunde noch dieselbe Zeit für uns unsichtbar.

Da nun aus den Beobachtungen $v =$ 40,000 Meilen folgt, also kein unendlich grosser Wert, so schliessen wir hieraus, dass das Licht sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Geschieht die eine Beobachtung in der Jupiternähe, die andere in der Jupiterferne, so wird jene Zeit gefunden, die das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen. Auf diese Art hat man gefunden, dass das Licht etwa $8^m 18^s$ braucht, um die grosse Achse der Erdbahn zu durchlaufen.

Erkl. 234. Das Verdienst, auf diese Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit aufmerksam gemacht zu haben, gebührt Olaf Römer (vergl. Erkl. 147 und 148). Seine Entdeckung teilte er am 22. November 1675 der Pariser Akademie mit. Er lebte damals auf der Pariser Sternwarte, wo er mit Cassini beobachtete. Die Lichtgeschwindigkeit bestimmte er etwa zu 40000 Meilen, anfänglich 1676 zu 48000, also wie wir sehen, ziemlich genau.

Die Lichtgeschwindigkeit ist seit Römer oft und auf verschiedenen Wegen bestimmt worden. So fand Delambre aus 1000 Verfinsterungen des ersten Trabanten, dass das Licht etwa $493^s\,2$ braucht, um die mittlere Distanz der Erde zu durchlaufen. W. Struve aus Abberationserscheinungen $497^s\,8$. Ausserdem durch physikalische Methoden, Fizeau (1849), die Lichtgeschwindigkeit zu 42000. Foucault (1862) zu 40,200 u. s. w. Oppolzer nimmt in seinem Lehrbuch zur Bahnbestimmung die Zahl $498^s\,65$ als die richtigste an.

---

b) Ueber die Theorie des Saturnringes.

Frage 110. Wie lassen sich die Erscheinungen der Saturnringe theoretisch erklären?

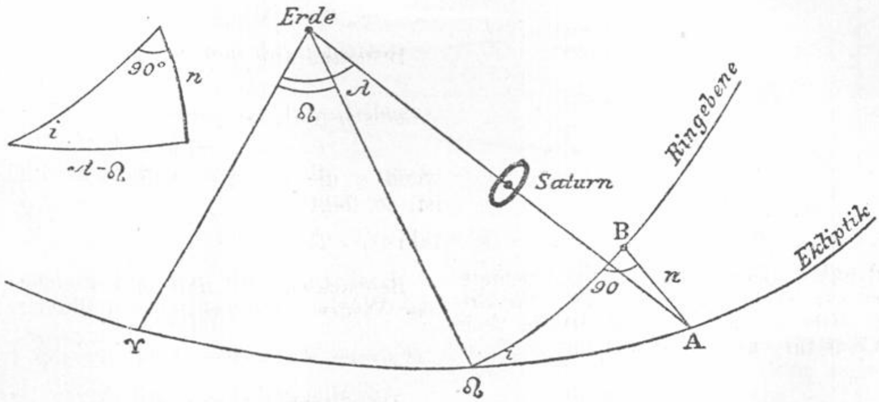
Antwort. Da die Breite Saturns sehr gering ist, etwa $2\frac{1}{2}{}^0$, so können wir für unsere Zwecke einfach den Saturn in die Ebene der Ekliptik verlegen.

Trifft sodann (vergl. Figur 125) die Verbindende der Erde mit dem Saturn die Projektion der Ekliptik in A, so wird offenbar, wenn ΩB die Ebene des Ringes ist:

$$\sphericalangle B \Omega A = i$$

Erkl. 235. Bekanntlich erscheint uns Saturn mit einem System von Ringen umgeben, von denen der erste etwa 2000 Meilen von der Oberfläche des Saturns entfernt ist und der letzte etwa 8000 Meilen von ihm absteht. Die Ringe sind in der Ebene des Saturnäquators und infolge dessen wie derselbe etwa 30^0 gegen die Ebene der Saturnbahn, also etwa 28^0 gegen die Ebene der Ekliptik geneigt. Demzufolge zeigt Saturn je nach seiner Stellung in der

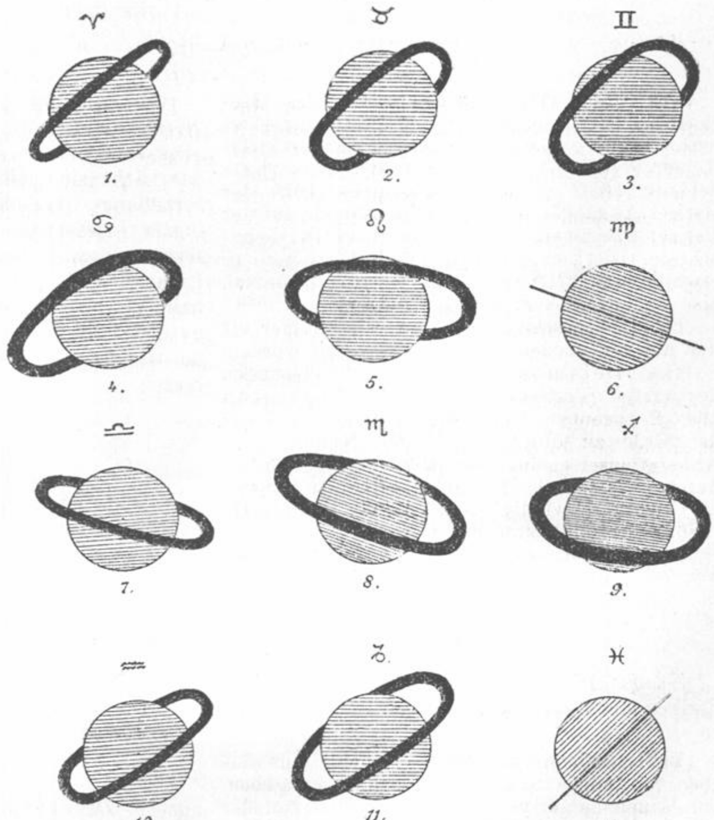
Figur 125.



Ekliptik verschiedene Gestalten (vergl. Figur 126). Im Februar 1889 erschien er, etwa wie Figur 5 zeigt. Etwa im Mai 1891 wird für uns der Ring ganz verschwinden, um uns fortan etwa durch 14½ Jahre die nördliche Seite zu zeigen, worauf er wieder in einer feinen Linie sich zeigen und uns durch 14½ Jahre die südliche Ringseite zeigen wird. In einem Zeitraum von 29 Jahren und 167 Tagen wiederholt sich derselbe Vorgang. Die Figuren 7 und 8 zeigen uns sein Aussehen etwa im November 1893 und März 1896.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Saturnringe vollkommene Kreisringe sind und höchst wahrscheinlich nur eine Vereinigung von sehr vielen kugelförmigen Satalliten bilden, worauf die Photometrie hinzuweisen scheint.

Figur 126.

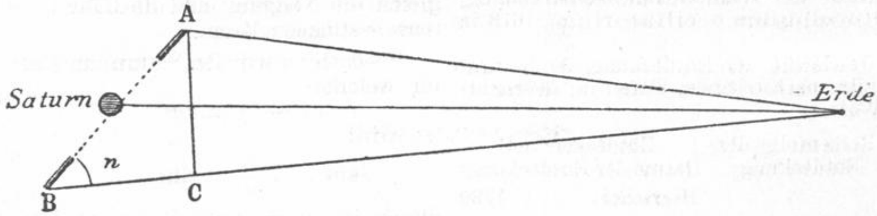


gleich der Neigung des Ringes über der Ekliptik:

$$☊ \text{ Erde } A = \lambda - ☊$$

wo λ die geozentrische Länge des Saturn und ☊ die Länge des Ringknotens bezeichnet.

Figur 127.



Erkl. 236. Vergl. Figur 127, in welcher offenbar:

$$AC = AB \sin n$$

Erkl. 237. Bessel gibt folgende Elemente des Ringes gültig für 1800:

$$\Omega = 166^0\,53'\;8''9 + 46''\,462t$$
$$i = 28^0\,10'\,44''7 - 0''\,350t$$

Huygens fand für das Jahr 1655:

$$\Omega = 152^0\,30' \qquad i = 23^0\,30'.$$

Für das Jahr 1880 hat man in Bezug auf die Ekliptik:

$$\Omega = 167^0\,53' \qquad i = 28^0\,10'$$

auf den Erdäquator:

$$\Omega = 126^0\,16' \qquad i = 7^0\;3'$$

auf die Saturnbahn:

$$\Omega = 171^0\,53' \qquad i = 26^0\,48'$$

Erkl. 238. Die genaueren Formeln liefern:

$$\sin(\lambda - \Omega) = \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg} i$$
$$\sin(l - \Omega) = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} i$$

Da nun b im Maximum $= 2\frac{1}{2}^0$ und i etwa 30^0, so wird:

$$\log \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} i = 8{\cdot}8787 = \sin 4^0\,20'$$

es wird also strenger:

$$\lambda - \Omega$$

zwischen den Grenzen 0 und $4^0\,20'$ enthalten sein.

Erkl. 239. Der Saturnring wurde von Galilei etwa im Jahre 1610 entdeckt, jedoch vermochte sein schwaches Fernrohr ihm nicht die wahre Gestalt zu zeigen. Er hielt ihn einfach für dreifach. Die wahre Ringgestalt erkannte erst Huygens. Derselbe entdeckte auch den 6. Saturnmond.

Galileo Galilei, Professor der Mathematik zu Pisa, geb. 18. Februar 1564 zu Pisa, gest. 8. Januar 1642 in einer Villa bei Arcetri in Toskana als Gefangener der Inquisition, welche ihn wegen der Verteidigung der Kopernikanischen Lehre verurteilt hatte.

Huygens Christian, geb. 14. April 1629 zu Haag, gest. 8. Juni 1695 dasselbst. Von 1666 an als Mitglied der neuen Académie des Sciences in Paris bis 1681. Hauptwerke: „De

Ist nun:

$$AB \perp \Omega B$$

so ist offenbar:

$$\sphericalangle B \,\text{Erde}\, A$$

derjenige, unter welchem uns der Ring erscheint. Nennen wir ihn n, so folgt aus dem Dreiecke ΩAB sofort:

$$146) \;\ldots\; \sin n = \sin i \sin(l - \Omega)$$

Die genauere Formel unter Berücksichtigung der Breite lautet:

$$147) \;\ldots\; \sin n = \sin i \sin(l - \Omega)\cos\beta + \cos i \sin\beta$$

Da nun der Saturnring ein vollkommener Kreisring ist, so ist es klar, dass uns ein Durchmesser, nämlich derjenige der parallel der Ebene der Ekliptik ist, stets gleich lang erscheint, dagegen der auf die Ekliptik senkrechte unter dem Winkel n. Sei also R der wahre und R' der scheinbare Schnitt einer Ebene senkrecht zur Ekliptik mit dem Ring, so besteht die Beziehung (vergl. Erkl. 236):

$$148) \;\ldots\; R' = R \sin n$$

Demzufolge erscheint uns der Ring als eine Ellipse mit den beiden Achsen R und R'. Bezeichnen wir sie mit b und a, so wird für den Ring, von der Erde aus gesehen:

$$\frac{b}{a} = \sin i \sin(\lambda - \Omega)$$

Ebenso von der Sonne aus gesehen:

$$\frac{b'}{a'} = \sin i' \sin(l - \Omega)$$

wobei l die heliozentrische Länge des Saturn bezeichnet.

Ist also:

$$\lambda = \Omega$$

oder:

$$l = \Omega$$

so verschwindet der Ring gänzlich oder zeigt sich als eine feine Lichtlinie auch dem mächtigsten Fernrohr.

Der Ring verschwindet aber auch, wenn b und b' entgegengesetzte Zeichen haben, weil sodann die von der Sonne beleuchtete Seite des Ringes von der Erde abgekehrt ist.

ratiociniis in ludo aleae" (enthält die Fundamente der Wahrscheinlichkeitsrechnung) 1657, „Horologium oscillatorium" 1673 in Paris.

Die Geschichte der Entdeckung der Saturnmonde gibt nachstehende Tafel in übersichtlicher Weise:

Mond:	Reihenfolge der Entdeckung:	Entdecker und Datum der Entdeckung:
I.	7	Herrschel . . . 1789
II.	6	" . . . 1789
III.	5	Cassini . . . 1684
IV.	5	" . . . 1684
V.	3	" . . . 1672
VI.	1	Huygens . . . 1655
VII.	8	Bond und Lassel 1848
VIII.	2	Cassini . . . 1671

Die Uranusmonde wurden sämtlich von Herschel in den Jahren 1787 bis 1794 entdeckt.

Kirkwood (1878) fand für die Saturnsatelliten folgende, der bei den Jupitersatelliten analoge Beziehung zwischen den mittleren Bewegungen. Es bezeichne:

$$n_1, \ n_2, \ n_3, \ n_4$$

bei den vier inneren Satelliten die mittlere Bewegung, so folgt:

$$5(n_1 - n_2) + (n_3 - n_2) + 4(n_4 - n_2) = 0$$

wenn man nur zu der für n_1 geltenden Zahl 0⁰ 62 hinzufügt.

Die obige Gleichung zeigt, wie man zugleich die Neigung und die Länge des Knotens bestimmen kann.

Beobachten wir den Saturn an einer Stelle, für welche:

$$\lambda - ☊ = 90^0$$

so wird:

$$149) \ldots \frac{b}{a} = \sin i$$

dieses ist aber zugleich der grösste Wert, den $\frac{b}{a}$ erreichen kann, weil $\sin i$ immer grösser ist als $\sin i \sin(l - ☊)$.

Um daher i zu finden, messe man die beiden Achsen b und a, dann, wann b am grössten erscheint, sodann wird:

$$\sin i = \frac{b}{a}$$

Ist sodann i bestimmt, so liefert eine jede Messung von b und a vermöge der Gleichung:

$$\frac{b}{a} = \sin i \sin(\lambda - ☊)$$

die Knotenlänge ☊.

Planetentafel.

a) Merkur ☿ (Quecksilber, Mittwoch).

Elemente nach Leverrier (1850). Epoche 1850 1. Jan. 0^h mittlere Pariser Zeit.

Mittlere Länge	$L = 327^0\ 15'\ 20''\ 43 + 5381066''\ 5449\ t$	$(74^0\ 4'\ 14''\ 49)$
Länge des Perihels	$\pi = 75^0\ 7'\ 13''\ 93 + 55''\ 9138\ t$	$(1^0\ 33'\ 11''\ 38)$
Länge des Knotens	$☊ = 46^0\ 33'\ 8''\ 75 + 42''\ 6430\ t$	$(1^0\ 11'\ 4''\ 30)$
Exzentrizität	$e = 0{\cdot}2056048 + 0{,}0000002034\ t$	
Neigung	$i = 7^0\ 0'\ 7''\ 71 + 0{,}06314\ t$	
Halbe grosse Achse	$a = 0{\cdot}3870988$	

Mittlere tägliche siderische Bewegung $\mu = 14723''\ 41967$
Siderische Umlaufzeit $U_s = 87^t\ 96926$
Tropische Umlaufzeit $U_t = 87^t\ 96843$
Grösste Entfernung von der Sonne in Millionen km $E_g = 69{\cdot}37$
Kleinte Entfernung von der Sonne in Millionen km $E_k = 45{\cdot}71$
Dichte (Wasser = 1) d etwa 4,5

Scheinbarer Durchmesser 6″ 68. Wahrer in geographische Meilen = 670

Masse noch nicht hinreichend genau bestimmt. Nach Encke und Leverrier etwa 1 : 5000000, nach Asten und Tisserand etwas kleiner und zwar 1 : 7000000. (Sonnenmasse = 1 gesetzt).

Rotationszeit um die Achse nach Bessel $24^h\ 0^m\ 53^s$

Anmerkung. Die Zahlen in der Klammer bezeichnen die Werte der Korrektion für $t = 100$, also ist z. B.:

$$42''\ 3430 \cdot 100 = 1^0\ 11'\ 4''\ 30$$

b) Venus ♀ (Kupfer, Freitag).

Elemente nach Hill (1872). Epoche 1850 0. Januar 0^h mittlere Washingtoner Zeit.

$$\begin{aligned}
L &= 244^0\ 18'\ 18''\ 32 + 2106691''\ 6218\, t \\
\pi &= 129^0\ 27'\ 42''\ 86 + \quad 50''\ 0494\, t \\
\text{☊} &= 75^0\ 19'\ 53''\ 10 + \quad 32''\ 5150\, t \\
i &= 3^0\ 23'\ 31''\ 01 + \quad 0''\ 03814\, t \\
e &= 0{,}0068431 - 0{,}0000005397\, t \\
a &= 0{,}7233322 \\
\mu &= 5767''\ 66982 \\
U_s &= 224^t\ 70079 \\
U_t &= 224^t\ 69544 \\
E_g &= 108\cdot 25 \text{ Millionen km} \\
E_k &= 106\cdot 78 \\
d &= 4\cdot 5
\end{aligned}$$

Scheinbarer Durchmesser 17″. Wahrer in geographischen Meilen = 1666.

Masse nicht viel von 1 : 400000 abweichend, gleich etwa 0,8 der Erdmasse.

Rotationselemente. Epoche 1839 (nach de Vico).

Neigung des Venusäquators gegen die Ekliptik $49^0\ 57'\ 34''$
☊ in Bezug auf die Ekliptik $57^0\ 19'\ 48''$
Siderische Dauer der Rotation $23^h\ 21^m\ 22^s$

c) Erde ♁.

Erdelemente nach Leverrier (1858). Epoche 1850 1. Jan. 0^h mittlere Pariser Zeit.

$$\begin{aligned}
L &= 100^0\ 46'\ 43''\ 51 + 1296027''\ 678\, t + 0''\ 00011073\, t^2 \\
\pi &= 100^0\ 21'\ 21''\ 5 + \quad 61''\ 6995\, t + 0''\ 0001823\, t^2 \\
e &= 0{,}0167708 - 0{,}0000004244\, t \\
a &= 1{,}0000000 \\
\mu &= 3548''\ 19286 \\
U_s &= 365''\ 25636 \\
U_t &= 365''\ 24220 \\
E_g &= 151\cdot 13 \text{ Millionen km} \\
E_k &= 146\cdot 14 \\
d &= 5{,}6
\end{aligned}$$

Masse (nach Leverrier) 1 : 324439

Anmerkung. Um die Sonnenelemente L und π zu erhalten, hat man einfach statt L, $180^0 + L$ und statt π, $180^0 + \pi$ zu setzen.

d) Mars ♂ (Eisen Dienstag).

Marselemente nach Leverrier (1861). Epoche 1. Januar 1850 0^h mittlere Pariser Zeit.

$$\begin{aligned}
L &= 83^0\ 40'\ 31''\ 33 + 689101''\ 05375\, t \\
\pi &= 333^0\ 17'\ 53''\ 67 + \quad 66''\ 241\, t \\
\text{☊} &= 48^0\ 23'\ 53''\ 1 + \quad 27''\ 992\, t \\
i &= 1^0\ 51'\ 2''\ 28 - \quad 0''\ 02431\, t \\
e &= 0{,}09326113 + 0{,}00000095408\, t \\
a &= 1{,}5236914 \\
\mu &= 1886''\ 51831 \\
U_s &= 686{,}97979 \\
U_t &= 686{,}92972 \\
E_g &= 247{,}60 \text{ Millionen km} \\
E_k &= 205{,}36 \\
d &= 4{,}0
\end{aligned}$$

Der scheinbare Durchmesser: 9″ 4. (Leverrier nahm in seinen Tafeln 11″ 1 an.) Der wahre in geogr. Meilen = 938.

Masse 1 : 3000000 ziemlich sicher bis auf 1 : 3000000 ± 200000.

Rotationselemente nach Schiaparelli.

Epoche 1880. $\left.\begin{aligned} \text{☊} &= 226^0\ 47'\ 7 \\ i &= 24^0\ 52'\ 0 \end{aligned}\right\}$ bezogen auf die Marsbahn

Wahrscheinliche Rotationsdauer (nach Schmidt, Wolf und Kaiser): $24^h\ 37^m\ 23^s$

Marsmonde.

Phobos. Entdeckt von Hall, 12. August 1877 in Washington.

Deimos. Entdeckt von Hall, 11. August 1877 in Washington.

Benennung von Madan nach Homer Illias (XV, Vers 119) wo Phobos und Deimos als Begleiter des Mars genannt werden. Als eine Merkwürdigkeit mag erwähnt werden, dass Voltaire in seinem Roman Micromegas 1750, chap. III dem Mars zwei Begleiter zuschreibt, die wegen ihrer Kleinheit nicht gesehen werden können.

Elemente von Hall (1878). Epoche 1877, August 28. mittlere Greenwicher Zeit.

	Phobos	Deimos
Rotationsdauer	$7^h\,39^m\,15^s$	$30^h\,17^m\,54^s$
☊ in Bezug auf den Erdäquator	$47^0\,13'$	$48^0\,6'$
i in Bezug auf den Erdäquator	$36^0\,47'$	$35^0\,39'$
Exzentrizität	0,032	0,006
Halbe grosse Achse für die Erddistanz = 1	$12''\,95$	$32''\,35$
Länge des Knotens in Bezug auf die Marsbahn	$82^0\,10'$	$89^0\,59'$
Neigung gegen die Marsbahn	$24^0\,47'$	$24^0\,20'$

e) Asteroiden.

1. **Ceres.** Entdeckt von Piazzi am 1. Januar 1801.

Es wird $\sin\varphi = e$ gesetzt und statt e, φ gegeben.

Epoche 1881. Juni 9. 0 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{aligned} L &= 242^0\,15'\,34''\,4 \\ \pi &= 149^0\,15'\,34''\,5 \\ ☊ &= 80^0\,49'\,7''\,6 \\ i &= 10^0\,37'\,18''\,2 \\ \varphi &= 4^0\,32'\,43''\,7 \\ \mu &= 770''\,83321 \\ \log a &= 0{,}4420308 \end{aligned}$$

Grösse bei der Opposition etwa 7,5.

2. **Pallas.** Entdeckt von Olbers am 28. März 1802.

Epoche 1881. Juni 9. 0 mittl. Berl. Zeit

$$\begin{aligned} L &= 223^0\,9'\,16''\,1 \\ \pi &= 122^0\,9'\,18''\,6 \\ ☊ &= 172^0\,43'\,57''\,4 \\ i &= 34^0\,43'\,11''\,2 \\ \varphi &= 13^0\,53'\,34''\,2 \\ \mu &= 769''\,73246 \\ \log a &= 0{,}4424445 \end{aligned}$$

Grösse bei der Opposition etwa 7,9.

Die Zahl der kleinen Planeten mehrt sich von Tag zu Tag. Ihre Ephemeriden findet man in jedem Berliner Jahrbuch nach den neuesten Berechnungen dargestellt, zugleich mit den besten Elementen derselben. Es sei noch bemerkt, dass diese zwei ersten Planeten zugleich die hellsten sind, sie gleichen Sternen 7. und 8. Grösse und erscheinen in rötlichem Lichte. Aus photometrischen Beobachtungen hat man auf einen Durchmesser geschlossen, der bei Ceres = 49 und bei Pallas = 34 geogr. Meilen ist. Vesta scheint der grösste Planetoid mit einem Durchmesser von ca. 60 geogr. Meilen zu sein. Sie gleicht einem Stern $6^1/_2$ Grösse.

f) Jupiter ♃. (Zink, Donnerstag.)

Elemente nach Leverrier (1876). Epoche 1850, Januar 1. 0^h mittl. Pariser Zeit.

$$\begin{aligned} L &= 160^0\,1'\,10''\,26 + 109306''\,87213\,t \\ \pi &= 11^0\,54'\,58''\,41 + 57''\,90321\,t \\ ☊ &= 98^0\,56'\,17''\,0 + 36''\,36617\,t \\ i &= 1^0\,18'\,41''\,37 - 0''\,2052\,t \\ e &= 0{,}0482520 + 0{,}0000016678\,t \\ a &= 5{,}20280 \\ \mu &= 299''\,12836 \\ U_s &= 4332_t\,59 \\ U_t &= 4330_t\,60 \\ E_g &= 810{,}64 \text{ Millionen km} \\ E_k &= 736{,}01 \\ d &= 1{,}4 \end{aligned}$$

Scheinbarer Durchmesser 37″ 5. Wahrer in geogr. Meilen 20000. Abplattung 1 : 17 ± 1. Masse 1 : 1047.

Rotationselemente. Umdrehungszeit 9^h 55^m 38^s nach Trouvelot (1881).

Elemente der Jupitermonde.

	Umlaufzeit nach Damoiseu:	Halbe grosse Achse nach Bessel:	Entfernung vom Jupiter in geogr. Meilen:
I.	1^t 18^h 28^m 35^s 94537	111″ 742	56,500
II.	3^t 13^h 17^m 53^s 73523	117″ 797	89,800
III.	7^t 3^h 59^m 35^s 85420	283″ 606	143,300
IV.	16^t 18^h 5^m 6^s 92833	498″ 866	252,100

	Durchmesser in geogr. Meilen:	Neigung in Bezug auf die Jupiterbahn:	Exzentrizität:
I.	510	3^0 5′ 24″	—
II.	460	3^0 4′ 25″	—
III.	750	3^0 0′ 28″	0,001338
IV.	640	2^0 40′ 58″	0,007278

g) Saturn ♄ (Blei, Samstag).

Elemente nach Leverrier (1876). Epoche 1850 Januar 1,5 mittlere Pariser Zeit.

$$
\begin{aligned}
L &= 14^0\,52'\,28''\,30 + 44046''\,30321\,t \\
\pi &= 90^0\,6'\,56''\,7 + 70''\,41338\,t \\
\Omega &= 112^0\,20'\,53''\,0 + 31''\,39594\,t \\
i &= 2^0\,29'\,39''\,80 - 0''\,14002\,t \\
a &= 9\cdot 53886 \\
l &= 0\cdot 0560717 - 0{,}0000034276\,t \\
\mu &= 120''\,45465 \\
U_s &= 10759^t\,23 \\
U_t &= 10746^t\,95 \\
E_g &= 1497\cdot 32 \text{ Millionen km} \\
E_k &= 1338\cdot 32 \\
d &= 0{,}7
\end{aligned}
$$

Der scheinbare Aequatorealdurchmesser beträgt nach Struve (1851) 17″ 6, mit welchem auch der Besselsche Wert 17″ 01 (1831 am Heliometer) und der neuere von Mayer (1881) 17″ 45 ziemlich übereinstimmen. Der wahre Durchmesser ist gleich 17214 geogr. Meilen. Die Abplattung ist Bessel und Mayer gleich $\frac{1}{14}$.

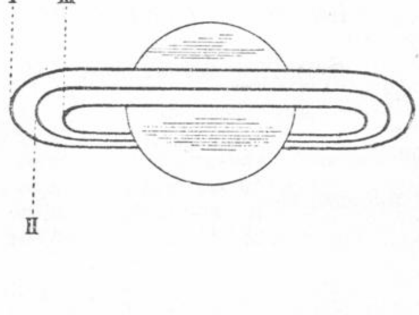
Seine Masse wird von Leverrier (1876) zu 1 : 3529,6, von Mayer (1881) zu 1 : 3518,7 angenommen.

Nach Hall (1877) beträgt die Rotationsdauer 10^h 15^m, welcher Wert von dem Herschelschen (1794) 10^h 16^m nicht viel abweicht.

Saturnring.

Der Saturnring besteht aus mehreren Ringen. Wir fassen folgende ins Auge: I. Aeusserste Lage des Ringes A, II. Cassinische Teilung, III. Innere Länge des gut sichtbaren scharf beleuchteten Ringes (vergl. Figur 128).

Figur 128.



	I.	II.	III.
Secchi 1857	40″ 66	34″ 64	—
Mayer 1881	40″ 48	—	26″ 32
Kaiser 1872	39″ 47	34″ 63	27″ 86

Dicke des Ringes $< 0'' 01$

Situation des Ringes für die Epoche 1800 bez. auf die Ekliptik von 1800.

Bessel (1835) $☊ = 166^0\, 53'\, 8''\, 9 + 46''\, 462t \quad i = 28^0\, 10'\, 44''\, 7 - 0''\, 35t$

Saturnmonde.

	Umlaufzeit trop.:	Sterngrösse nach Pickering:	e	i in Bezug auf den Erdäquator:	Epoche u. Autor:
I. Mimas . .	$0^t\, 22^{st}\, 37^m\, 5^s 6$	13	—	—	Holden
II. Enceladus	$1^t\, 8^{st}\, 52^m\, 40^s 5$	12	0,066	$4^0\, 38'$	1880 nach Mayer
III. Thetis . .	$1^t\, 21^{st}\, 18^m\, 8^s 4$	11	0,007	$7^0\, 1'$	
IV. Dione . .	$2^t\, 17^{st}\, 40^m\, 54^s 1$	11,5	0,017	$6^0\, 41'\, 5$	
V. Rhea . .	$4^t\, 12^{st}\, 25^m\, 25^s 4$	11	0,015	$6^0\, 36'$	
VI. Titan . .	$15^t\, 22^{st}\, 41^m\, 22^s 2$	9,5	0,027	$6^0\, 35'$	
VII. Hyperion .	$21^t\, 6^{st}\, 49^m$	14	0,119	$6^0\, 12$	Hall 1875
VIII. Japetus .	$79^t\, 7^{st}\, 54^m$	12	0,030	—	

	Mittlere Entfernung vom Saturn in geogr. Meilen:	Halbe grosse Achse in der mittl. Entfernung von der Sonne:
I.	24800	27″ 40
II.	31900	34″ 29
III.	39500	42″ 48
IV.	50900	54″ 58
V.	70500	75″ 97
VI.	163700	176″ 89
VII.	198200	216″ 56
VIII.	466900	514″ 37

h) Uranus. ♅

Elemente nach Leverrier (1877). Epoche 1850 0. Januar 0^h mittlere Pariser Zeit.

$$
\begin{aligned}
L &= 29^0\, 17'\, 50''\, 91 + 15475''\, 11138t \\
\pi &= 170^0\, 50'\, 7''\, 1 + 53''\, 4582t \\
☊ &= 73^0\, 13'\, 54''\, 4 + 18''\, 0570t \\
i &= 0^0\, 46'\, 19''\, 72 - 0''\, 01732t \\
l &= 0{,}0463592 + 0{,}0000027387\, t \\
a &= 19\cdot 18336 \\
\mu &= 42''\, 23079 \\
U_s &= 30688\cdot 51 \\
U_t &= 30588\cdot 90 \\
E_g &= 2983{,}53 \text{ Millionen km} \\
E_{kl} &= 2719{,}16 \\
d &= 1{,}1
\end{aligned}
$$

Der scheinbare äquatoreale Durchmesser beträgt 3″ 6, der wahre dagegen 8226 geogr. Meilen. Abplattung, etwa $\frac{1}{10}$. Die Masse wird von Hall (1878) zu 1 : 22800 angegeben. Dieser Wert scheint ziemlich sicher zu stehen. Er gleicht einem Stern 6. Grösse.

Der Saturnäquator hat nach Newcomb (1875, bezogen auf die Ekliptik) für die Epoche 1850 die Elemente:

$$☊ = 165^0\, 29' \qquad i = 97^0\, 51'$$

Satelliten des Uranus.

(1876) Epoche 1872.

	Umlaufzeit:	Mittl. scheinbare Entfernung:	Exzentrizität:	Neigung gegen die Ekliptik:
I. Ariel	$2^t\, 520383$	13″ 78	0,02	$75^0\, 08$
II. Umbriel	$4^t\, 144181$	19″ 20	0,01	$75^0\, 79$
III. Titania	$8^t\, 705897$	31″ 43	0,001	$75^0\, 06$
IV. Oberon	$13^t\, 463269$	42″ 09	0,004	$75^0\, 21$

	Länge des Knotens:	Mittl. Entf. vom ♁ in geogr. Meilen:	Sterngrösse:	Helligkeitstufe:
I.	167° 01	27700	16	III.
II.	163° 76	38500	16,5	IV.
III.	165° 15	63100	14	II.
IV.	164° 91	84100	14	I.

i) Neptun ♆.

Vor der Entdeckung.

Elemente nach Leverrier (1849).

$$a = 36,154$$
$$U_s = 217^j\,387$$
$$\pi = 284^0\,45'$$
$$☊ = 156^0\,0'$$
$$i = 6^0\,0'$$
$$e = 0,10761$$
$$\text{Masse} = \frac{1}{9300}$$

Mittlere Länge am 1. Januar 1847: $318^0\,47'$

Elemente nach Adams (1847).

$$a = 37,25$$
$$U^s = 227^j\,323$$
$$\pi = 299^0\,11'$$
$$e = 0,12062$$
$$\text{Masse} = \frac{1}{6665}$$

Mittlere Länge am 1. Oktober 1846: $323^0\,2'$

Elemente nach Leverrier (1877). Epoche 0. Jan. 1850 0^h mittlere Pariser Zeit.

$$L = 334^0\,33'\,28''\,89 + 7915''\,89825\,t$$
$$\pi = 45^0\,59'\,43''\,1 + 51''\,12675\,t$$
$$☊ = 130^0\,6'\,25''\,1 + 39''\,56306\,t$$
$$i = 1^0\,47'\,2''\,13 - 0''\,34570\,t$$
$$e = 0,00896425 + 0,00000005672\,t$$
$$a = 29,92788$$
$$\mu = 21''\,53302$$
$$U_s = 60186^t\,64$$
$$U_t = 59804^t\,81$$
$$E_g = 4505,48 \text{ Millionen km}$$
$$E_k = 4429,57 \quad „ \quad „$$
$$d = 1,7$$

Scheinbarer Durchmesser nach Kaiser (1872) 2″ 9, der wahre ist 7653 geogr. Meilen. Masse 1 : 9000. Er gleicht einem Stern 8. Grösse.

Neptunmond.

Entdeckt von Lassel am 10. Oktober 1846. Elemente nach Newcomb (1875). Epoche 0. Januar 1874. Sterngrösse 14.

$$L = 285^0$$
$$☊ = 176^0 \,*$$
$$\pi = 184^0$$
$$e = 0,0088$$
$$i = 145^0\,12 \,*$$
$$a = 16''\,275$$

Umlaufzeit nach Hind (1855) $= 5^t\,8769 = 5^t\,21^{st}$. Mittlere Entfernung vom Neptun 47500 geogr. Meilen.

* bedeutet „in Bezug auf die Ekliptik der Epoche“.

M. Ueber die Theorie des Mondes.

Anmerkung 21. Als eine der schwierigsten Partien sowohl der beobachtenden als auch der theoretischen Astronomie gilt die Mondtheorie. Die grosse Sonnenmasse, die auf den Mond einwirkt, modifiziert die Mondbahn derart, dass sie gar keine Aehnlichkeit mit den Planetenbahnen zeigt. Gleich der Schwierigkeit ist ihre Wichtigkeit für die Chronologie, indem uns die leider spärlich erhaltenen Nachrichten über Finsternisse ermöglichen, einzelne Zeitpunkte der Geschichte unabhängig von den Zeitangaben der Alten zu fixieren. Eine vollständige Darstellung der Mondtheorie kann nicht die Aufgabe dieses Abschnittes, auch nicht dieses Werkes sein, doch sollen immerhin die Wege gezeigt werden, die man geht und gehen muss, um zu einer befriedigenden Mondtheorie zu gelangen. Das hier Fehlende findet man in der zweiten Hälfte des Werkes, der theoretischen Astronomie.

Frage 111. Welche sind die wichtigsten Bewegungserscheinungen beim Mond?

Antwort. Bei dem Mond unterscheidet man folgende Monate, d. h. Umlaufzeiten:

1) den siderischen, d. h. die Zeit von einer Konjunktion des Mondes mit einem Fixstern bis zur nächsten;

2) den tropischen, d. h. die Zeit von einer Konjunktion des Mondes mit den Aequinoktialpunkten bis zur nächsten;

3) den anomalistischen, d. h. die Zeit von einer Erdferne oder Erdnähe bis zur nächsten;

4) den Knoten- oder Drachenmonat, d. h. die Zeit, welche der Mond braucht, um von einem Knoten wieder zu demselben zu gelangen;

5) den synodischen Monat, d. h. die Zeit von einem Neu- oder Vollmond bis zum nächsten.

Nach den neueren Bestimmungen sind die Längen der einzelnen Monate nach der Reihenfolge:

1) . . . 27^t 7^s 43^m 11^s 5
2) . . . 27^t 7^s 43^m 4^s 7
3) . . . 27^t 13^s 18^m 37^s 4
4) . . . 27^t 5^s 5^m 35^s 8
5) . . . 29^t 12^s 44^m 2^s 9

oder in Teilen des Tages:

1) . . . 27,321661
2) . . . 27,321582
3) . . . 27,554600
4) . . . 27,212220
5) . . . 29,530589

Erkl. 240. Alle diese Monate findet man schon im Almagest des Ptolomäus angeführt, derselbe hat auch ihre Längen sehr genau bestimmt.

Erkl. 241. Beim Monde heisst der aufsteigende Knoten Drachenkopf und der absteigende Drachenschwanz, daher die Benennung Drachenmonat. Die Knotenlinie wird daher auch Drachenlinie genannt.

Erkl. 242. Die Zahlen sind jene von Hansen gegebene.

Hansen, Peter Andreas, 1795 zu Tondern in Schleswig geboren, 1874 als Direktor der Sternwarte zu Gotha gestorben. Ursprünglich Uhrmacher, später 1857 Direktor der neuerbauten Sternwarte zu Gotha. Machte 1838 sein Hauptwerk über den Mond zu Gotha bekannt: „Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat“, denen 1857 auf Kosten der englischen Regierung gedruckten „Tables de la lune construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle“ und später, 1862 bis 1864, „Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen“ folgten.

Frage 112. Wie wurde die Länge der einzelnen Monate bestimmt?

Antwort. Um die Länge der einzelnen Monate zu bestimmen, bediente man sich schon in uralter Zeit der Finsternisse, mit deren Hilfe man die ganze Mondbahn bestimmt hatte.

Ptolomäus hat uns (Alm. Lib. IV, Kap. 6) eine Finsternis aufbewahrt (die älteste, die er anführt), welche am

19. März 720 vor Chr. 6^h 48^m mittl. Par. Zeit

stattfand.

Eine ihr in allen Stücken ähnliche fand am

9. Sept. 1717 nach Chr. 6^h 2^m mittl. Par. Zeit

Erkl. 243. Die Dauer des synodischen Monats prägt sich am deutlichsten in der Phasenveränderung aus und demnach wurde sie auch schon frühzeitig genau bestimmt. So überzeugte man sich schon frühzeitig, dass seine Dauer etwa $29\frac{1}{2}$ Tage beträgt. Die Finsternisse boten, da sie sich nur zur Zeit des Voll- oder Neumondes ereignen können, bald Gelegenheit, die Dauer genauer zu bestimmen.

Man hat gesehen, dass wenn der Neumond auf den ersten Tag eines Jahres von 365 Tagen fällt, dass er im folgenden Jahre auf den 20. fällt und so fort in jedem folgenden Jahre um etwa 19 Tage später. Daraus schloss man, dass das Jahr aus 12 synodischen Monaten und 11 Tagen besteht, welche 11 Tage unter dem Namen der Epakten im Kalender angeführt werden.

Ferner hat man gesehen, dass der Neumond etwa nach 19 Jahren wieder auf den 1. Januar fiel, woraus man schloss, dass 19 Jahre nahezu 235 synodische Monate enthalten.

Diese Entdeckung, die Meton (etwa 450 v. Chr.) bekannt machte, schien den alten Griechen so wichtig, dass man die Periode in goldenen Buchstaben an öffentlichen Orten aufbewahrte, woher sie auch in unseren Kalendern die goldene Zahl benannt wird. Aus dieser Periode folgt für die Dauer des synodischen Monats:

$$29^t\ 12^s\ 44^m\ 25^s\ 5$$

also ein um 22 Sekunden zu grosser Betrag.

Bezeichnet man mit S den synodischen, mit A den anomalistischen und D den drakonischen Monat, so gibt der Metonsche Cyklus:

$$19\,J = 6939^t\ 75$$
$$235\,S = 6939^t\ 69$$
$$252\,A = 6943^t\ 76$$

Bezeichne ferner J das Julianische Jahr im Mittel $= 365{,}25$ (gegen das Gregorianische $= 365{,}2425$), so ist die Periode von Hipparch:

$$441\,J = 161075^t\ 75$$
$$5458\,S = 161177^t\ 93$$
$$5923\,D = 161177^t\ 96$$
$$5849\,A = 161166^t\ 86$$

Erkl. 244. Um dieses besser einzusehen, denke man sich der Analogie wegen den Mond an einem Minutenzeiger einer Uhr befestigt, während die Erde resp. die Sonne am Stundenzeiger festgemacht ist, und frage, nach welcher Zeit die Zeiger wieder übereinander sein werden.

Erkl. 245. Zur Berechnung setzt man am bequemsten:

$$\frac{T_{sy}}{t_{si}} = \mathrm{tg}^2\,\alpha$$

woraus:

$$T_{si} = T_{sy}\sin^2\alpha$$

folgen wird. Es ist nämlich:

$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

und

$$\frac{T_{si}}{T_{sy}} = \frac{\frac{t_{si}}{T_{sy}}}{1+\frac{t_{si}}{T_{sy}}}$$

woraus die obigen Formeln folgen.

Im zweiten Falle ist zu setzen:

$$\frac{T_{si}}{t_{si}} = \sin^2\alpha$$

statt. Bei beiden Finsternissen war der mittlere Ort derselbe.

Die Zwischenzeit beträgt:

2437 Jahre (worunter 609 Schaltjahre sind) und 173 Tage 23 Stunden 14 Minuten

oder:

$$890287{,}968055 \text{ Tage}$$

Da in dieser Zeit:

30148 synodische Monate

verflossen, so ist die Länge des synodischen Monats:

$$= \frac{890287{,}968055}{30148} \text{ Tagen}$$

oder:

$$29^t\ 12^s\ 44^m\ 2^s$$

Um aus diesem Werte, für den wir den genaueren:

$$29^t\ 12^s\ 44^m\ 2^s\ 9$$

substituieren wollen (den wir erhalten hätten, wenn die Umstände der Finsternis völlig identisch gewesen wären), die tropische und siderische Umlaufzeit des Mondes zu bestimmen, beachten wir folgendes:

Sei die siderische Umlaufzeit des Mondes T_{si}, so dreht sich der Radiusvektor des Mondes täglich um:

$$\frac{370^0}{T_{si}} \text{ Grade}$$

Sei ferner t_{si} die siderische Umlaufzeit der Erde, so beschreibt der Radiusvektor der Erde in derselben Richtung täglich:

$$\frac{360^0}{t_{si}} \text{ Grade}$$

Fallen die Radienvektoren zur Zeit einer Konjunktion zusammen, so werden sie nach T_{sy}, d. h. nach einem synodischen Monat, wieder zusammenfallen, d. h. es wird:

$$T_{sy}\cdot\frac{360}{T_{si}} = 360^0 + T_{sy}\frac{360}{T_{si}}$$

woraus:

$$150)\ \ldots\ T_{si} = \frac{t_{si}\,T_{sy}}{T_{sy}+t_{si}}$$

folgt. Ebenso wäre:

$$151)\ \ldots\ T_{sy} = \frac{t_{si}\,T_{si}}{t_{si}-T_{si}}$$

Man sieht hieraus, wie man aus dem synodischen den siderischen Monat und umgekehrt berechnen kann.

Genau dieselbe Ueberlegung hätten wir für den tropischen Monat anzustellen, woraus wir folgen, dass wenn T_{tr} den tropischen Monat und t_{tr} das tropische Jahr bezeichnet:

$$152)\ \ldots\ T_{tr} = \frac{t_{tr}\,T_{sy}}{T_{sy}+t_{tr}}$$

$$153)\ \ldots\ T_{sy} = \frac{t_{tr}\,T_{tr}}{t_{tr}\,T_{tr}}$$

woraus:

$$T_{sy} = T_{si} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

folgt, wegen der allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

folgt. Auf diese Weise bekommen wir die oben angeführten Werte. Die Bestimmung der Länge des drakonischen und anomalistischen Monats erfordert einige Vorausbestimmungen, die wir behandeln wollen.

Frage 113. Wie werden die Mondelemente bestimmt und welche sind die Ergebnisse einer derartigen Bestimmung?

Erkl. 246. Die Theorie des Mondes, auf die wir erst in der physischen Astronomie eingehen können, war seit jeher das schwierigste Problem der Astronomie; auch heutzutage sind trotz der wirklich meilenweiten Formeln mit mehreren hundert Gliedern genaue Mondkoordinaten für nur etwas längere Zeit eine wünschenswerte Sache.

Die Veränderungen der Mondelemente, die wir anführen, sind nur die allergrössten, deren Betrag grösser als 20''; die kleineren, deren Betrag mitunter recht anwachsen kann, anzuführen, würde das ganze Werk nicht hinreichen.

Die ersten genauen Mondtafeln, nach welchen man die Elemente und die Positionen rechnen konnte, gab Tob. Mayer in London 1760 heraus: „Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae“, indem er sich auf die von Euler (1753) publizierte „Theoria motus Lunae“ stützte. Die Fehler der Mayerschen Tafeln betrugen im allgemeinen höchstens 2m. Die besten neueren Tafeln rühren von Hansen her: „Tables du mouvement de la Lune, construites uniquement d'apres le principe de la gravitation universelle“ in London 1857. Diese wiesen im Anfang Differenzen nur um 2'' gegen die Beobachtungen. Seitdem sind diese aber wieder so angewachsen, dass sie heutzutage 16'' bis 18'' betragen, so dass man nun daran geht, neue Tafeln zu konstruieren auf Grund einer weiter geführten Theorie von Delaunay.

Antwort. Bei der Bestimmung der Mondbahn werden wir die bei der Sonnen- und Marsbahn angewendeten Methoden wieder in Anwendung bringen.

Zunächst werden wir uns durch Beobachtungen täglich den scheinbaren Durchmesser des Mondes bestimmen. Wir finden so ein Maximum von:

$$16' \, 26'' \, 57 = 986'' \, 57$$

und ein Minimum von:

$$14' \, 43'' \, 87 = 883'' \, 87$$

Aus diesen beiden Werten schliessen wir, dass die Exzentrizität:

$$e = 0{,}054907$$

Sodann bestimmen wir uns (nach Frage 84) den einmaligen Abstand des Mondes aus der beobachteten Parallaxe und hieraus [nach Frage 93, Formel 87)] den grössten Erdabstand zu

63,64695 Erdradien

und den kleinsten zu

57,02143 Erdradien

woraus der mittlere Abstand von ca. 60 Erdradien folgt.

Nun wissen wir, dass der Mond mehrmals des Jahres in die Nähe der Erde kommt und ebenso oft in die Erdferne und zwar durchschnittlich einmal im Monat.

Wir wollen nun untersuchen, ob sich die Mondellipse nicht ändert. Aendert sie sich nicht, so muss das jedesmalige Maximum des Monddurchmessers gleich sein 986'' 57 und das jedesmalige Minimum gleich 883'' 87, also der Durchmesser doppelt so gross.

Stellt man die Beobachtungen eines Jahres zusammen, so sieht man, dass dieses nicht der Fall ist, das Maximum nimmt bald zu bald ab, ebenso das Minimum, wie die folgende Tafel zeigt:

Tafel XXIII.

Beobachtete Maxima und Minima des scheinbaren Monddurchmessers im Jahre 1884.

Monat	Maximum	Differenz	Minimum	Differenz	Konstellation von $\odot - \pi$
Januar	16′ 21″ 6		14′ 47″ 8		
Februar	9″ 7	— 12″ 1	48″ 2	+ 0″ 4	
März	18″ 0	+ 8″ 3	47″ 0	— 1″ 2	□
April	32″ 0	+ 14″ 0	45″ 0	— 2″ 0	
Mai	42″ 4	+ 10″ 4	44″ 0	— 1″ 0	
Juni	44″ 8	+ 2″ 4	44″ 1	+ 0″ 1	☍
Juli	39″ 5	— 5″ 3	45″ 5	+ 1″ 4	
Juli	28″ 4	— 11″ 1	47″ 6	+ 2″ 1	
August	15″ 2	— 13″ 2	48″ 4	+ 0″ 8	□
September . . .	12″ 2	— 3″ 0	47″ 5	— 0″ 9	
Oktober	24″ 9	+ 12″ 7	45″ 2	— 2″ 3	
November . . .	38″ 7	+ 13″ 8	43″ 5	— 1″ 7	
Dezember . . .	46″ 3	+ 7″ 6	43″ 0	— 0″ 5	☌

Erkl. 247. Charl. Eugène Delaunay, geboren 1816 zu Lusigny im Dep. de l'Aube, erst Schüler, dann Professor an der „Ecole des mines", auch Mitglied des „Bureau des longitudes", sodann Astronom der Pariser Sternwarte und auch kurze Zeit, während der Belagerung von Paris und Petroleumherrschaft daselbst, Direktor derselben. Verunglückte im Jahre 1872 auf einer Spazierfahrt auf dem Meere bei Cherbourg durch Umschlagen des Bootes. Sein Epoche machendes Werk: „Theorie de la lune" blieb unvollendet.

Erkl. 248. Es soll hier noch erwähnt werden, dass sich die obigen Bezeichnungen der Konstellationen nicht wie gewöhnlich auf die Stellung des Mondes gegen die Sonne, sondern auf die Stellung des Mondperigeums gegen die Sonne beziehen, weil ja die gewöhnlichen Konstellationen jeden Monat wechseln, die hier angeführten aber bloss einmal im Jahre stattfinden.

Erkl. 249. Man kann allgemein verfahren wie folgt: Sei E irgend ein Mondelement, so ist es klar, dass dasselbe vorzüglich abhängen wird (die Einwirkung der Sonne vorausgesetzt) von den gegenseitigen Lagen des Mondes und der Sonne. Diese sind aber durch die Grössen:

$$☾ \quad ☊_{☾} \quad \pi_{☾}$$
$$\odot \qquad \pi_{\odot}$$

von der Neigung sehen wir zunächst ab. Dann wird aber, wenn:

$$\varkappa\lambda \quad \varkappa\mu \quad \varkappa\nu \quad \varkappa\sigma \quad \varkappa\tau$$

Hieraus entnehmen wir zunächst, dass die Exzentrizität variiert und demnach auch die Mondellipse, doch zeigen die Variationen einen geregelten Gang.

Rechnen wir die Exzentrizitäten aus, so erhalten wir das grösste Maximum im Dezember:

$$= 0{,}0655$$

und das kleinste Minimum im Februar:

$$= 0{,}0439$$

Ueberhaupt sehen wir, dass in den Quadraturen die Exzentrizität ein Minimum, in den Syzygien dagegen ein Maximum ist; dieses führt uns zur Vermutung, ob nicht vielleicht die Exzentrizität eine Funktion der Differenz von $\odot$, der Sonnen-, und π, der Mondperigeumslänge wäre. In den Quadraturen ist:

$$\odot - \pi = 90^0 \text{ oder } 270^0$$

in den Syzygien:

$$= 0^0 \text{ oder } 180^0$$

Denken wir uns nun die Exzentrizität als eine Funktion von der Form:

$$\text{Exzentrizität} = \text{Mittlere Exzentrizität} + \text{Periodische Funktion}$$

also etwa:

$$e = e_0 + \alpha f(\odot - \pi)$$

wobei α ein konstanter Faktor ist.

Setzen wir:

$$e_0 = \frac{1}{2}(\text{Max.} + \text{Min.})$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\text{Max.} - \text{Min.})$$

alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen, Null eingeschlossen, bezeichnen, allgemein:

$$E = E_o + \Sigma A_\varkappa \sin (\varkappa\lambda \,☾ + \varkappa\mu \odot + \varkappa\nu \,☊☾ + \varkappa\sigma\, \pi_☾ + \varkappa\tau\, \pi_\odot + B_\varkappa)$$

wobei E_o einen Mittelwert von E bezeichnet. Die Koëffizienten $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ kann man in ähnlicher Weise, wie wir es bei der Sonne thaten, bestimmen. Und dieses ist beim Monde in der That der sicherste Weg.

Erkl. 250. Nach Hansen beträgt die Bewegung der Apsiden in 100 Julianischen Jahren:

$$11 \cdot 360^0 + 109^0\, 3'\, 2''\, 46$$

also in 360 Tagen:

$$40^0\, 39'\, 45''\, 56$$

und täglich:

$$6'\, 41''\, 056$$

Die Bewegung der Knoten und Apsiden war schon vielleicht im 7. Jahrhundert vor Chr. bekannt, aber erst Newton gab (vergl. Principia ed. 1687 lib. I prop. 9 und lib. III, prop. 30 bis 33) eine Erklärung dieser Phänomene.

so sehen wir, dass:

$$f(90^0) = f(270^0) = -1$$
$$f(180^0) = f(0^0) = f(360^0) = +1$$

sein muss. Die Funktion $f\,(\odot - \pi)$ wird also eine solche sein, wie:

$$\cos 2\,(\odot - \pi)$$

denn diese genügt den obigen Bedingungen.

Zu den weiteren Elementen gehört offenbar die Lage des Perigeums oder der Apsidenlinie. Wir finden:

1882 Jan. 7.	Apogeum:	Mondlänge	148⁰
Dez. 31.	„	„	184⁰
		Differenz	36⁰

Hieraus schliessen wir auf eine Bewegung der Apsiden. Bilden wir noch:

1884 Jan. 20.	Apogeum:	Mondlänge	224⁰
Dez. 16.	„	„	263⁰
		Differenz	39⁰

Daher ergibt sich, dass die Bewegung der Apsiden eine unregelmässig vorschreitende ist und jährlich ca. 38⁰ beträgt.

Nehmen wir eine längere Periode:

1839 Jan. 19.	Apogeum:	Mondlänge	350⁰
1885 „ 22.	„	„	468⁰
		Differenz	118⁰

Die Anzahl der Zwischentage ist hier 17139. Während dieser Zeit hat der Mond 622 Umläufe vollendet, also im Mittel einen in:

$$\frac{17139}{622} = 27{,}5547 \text{ Tagen}$$

Dieses gibt die Dauer des anomalistischen Monats.

Da zwischen 1885 und 1889 etwa 46 Jahre liegen und die Apsiden in ca. 9 Jahren einen Umlauf vollenden, so haben sie in dieser Zeit:

$$5 \cdot 360^0 + 118^0$$

also jährlich:

$$\frac{5 \cdot 360^0 + 118^0}{46} = 41^0\, 42'$$

Aus der Bewegung der Apsiden schliessen wir auf die Bewegung der Knotenlinie. Bestimmen wir aus der Formel 113) die Längen des Knotens, so finden wir:

1880 Jan. 1./2.	☊ =	285⁰ 33′
Dez. 26./27.	☊ =	267⁰ 20′
	Differenz = —	18⁰ 13′

Hieraus folgt, dass die Knotenlinie etwa in 20 Jahren einen Umlauf in retrograder Richtung zurücklegt.

Um den genaueren Betrag dieser Gleichung zu finden, benützen wir die Daten:

1839 März 15.	☊ =	354⁰ 57′
1884 Jan. 19.	☊ =	207⁰ 31′
	Differenz = —	147⁰ 26′

Erkl. 251. Nach Hansen beträgt der mittlere tropische Rückgang der Knotenlinie in 100 Julianischen Jahren:

$$5 \cdot 360^0 + 134^0\, 8'\, 59'' 61$$

also in:

365 Tagen $19^0\, 19'\, 41'' 73$
und tägliche $3'\, 10'' 63$

Es war die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens z. B.:

1885 = $189^0\, 15' 5$
1886 = $169^0\, 55' 8$
1887 = $150^0\, 36' 1$
1888 = $131^0\, 16' 4$
1889 = $111^0\, 53' 5$
1890 = $92^0\, 33' 8$

Vergleiche die Tafel der Mondelemente.

Da die Zwischenzeit 45 Jahre beträgt und daher 20 Jahre in ihr zweimal enthalten sind, so folgt der Rückgang:

$$2 \cdot 360^0 + 147^0\, 26'$$

Demnach beträgt der Rückgang jährlich:

$$\frac{867^0}{45} = 19^0\, 21'$$

Da die Zwischenzeit 16381 Tage und 602 solcher Umläufe enthält, so kommen auf einen Umlauf:

$$\frac{16381}{602} = 27{,}212 \text{ Tage}$$

Dieses ist die Dauer des drakonischen Monats.

Was endlich die Neigung anbetrifft, so wird diese auf bekannte Art wie beim Mars bestimmt [Formel 111)]. Auch sie ist veränderlich und schwankt um den Mittelwert von:

$$5^0\, 8'\, 47'' 9 \quad (1850)$$

etwa um den Betrag von 9', jedoch sind diese Schwankungen blosse jährliche und keine fortschreitende.

Frage 114. Von welcher Beschaffenheit sind die Veränderungen der Mondelemente?

Erkl. 252. Diese Gleichungen sind nur die allergrössten Anfangsglieder sehr ausgedehnter Reihen, wie in der physischen Astronomie ausführlich dargethan wird. Ihre allgemeine Form haben wir in der Erkl. 249 dargethan. Wollte man, wie wir es beim Mars gethan haben, aus diesen Elementen die Mondkoordinaten (Länge, Breite, Parallaxe) rechnen, so wäre dieses eine sehr ausgedehnte Arbeit, da von den Reihen, wenn man bloss sich auf Sekunden beschränkt, schon mehr als 100 Glieder für jedes Element zu nehmen wären. Daher hat man es vorgezogen, für die Länge, Breite und Parallaxe aus den Beobachtungen selbst, derartige Reihen abzuleiten, die dann die Berechnung der Elemente ersparen.

Antwort. Wir haben schon oben gesehen, dass sich die Exzentrizität wie cos 2 $(\odot - \pi)$ ändert. Durch ähnliche Untersuchung würden wir dahin gelangen, dass im allgemeinen:

$$\pi = \pi_0 + \varDelta\pi\, t + \beta \sin 2\,(☾ - \odot) + \cdots$$
$$☊ = ☊_0 + \varDelta ☊\, t + \gamma \sin 2\,(\odot - ☊) + \cdots$$
$$i = i_0 + \delta \cos 2\,(\odot - ☊) + \cdots$$

Zu jedem Ausdrucke sind noch kleinere Glieder hinzuzufügen. Dabei ist:

$\odot$ die Sonnenlänge
☾ die Mondlänge
☊ die Länge des Mondknotens

t die Anzahl der Tage vom Jahresanfang. $\varDelta\pi$ und $\varDelta$☊ die mittlere tägliche Zunahme dieser Elemente, ferner π_0, ☊$_0$, i_0 die für den Jahresaufgang geltenden Mittelwerte endlich β, γ, δ gewisse Konstanten. Um diese Konstanten zu bestimmen, stellen wir uns eine kleine Tafel der mittleren und beobachteten Werte auf. Bleiben wir zunächst bei der Neigung stehen.

Man hat:

$$i_0 = 5^0\, 8'\, 48''$$

und für 1880:

Januar 1./2.	$i = 5^0\, 17'\, 39''$	$\odot = 280^0$	☊ $= 285^0$
März 1./2.	$i = 5^0\, 5'\, 39''$	$\odot = 341^0$	☊ $= 284^0$

Hilfsrechnung 1.

$$i = 5^0\,17'\,39''$$
$$i_0 = 5^0\,8'\,48''$$
$$8'\,51'' = 531''$$

$$\odot = 280^0$$
$$☊ = 285^0$$
$$\text{Diff.} = -5^0 \quad 2(\odot - ☊) = -10$$

$$\log 531'' = 2{\cdot}72509$$
$$\log\cos(\odot - ☊) = 9{\cdot}99335$$
$$2{\cdot}72164$$

Erkl. 253. Euler gibt folgende Gleichung an (Theoria motus Lunae):

$$i = 5^0\,8'\,52'' + 484''\cos 2(\odot - ☊) + 38''\cos 2(☾ - ☊) - 42''\cos 2(☾ - \odot) + \cdots$$

die als eine grössere Näherung betrachtet werden muss, weswegen die Differenz 25″ eine sehr kleine genannt werden muss.

Berechnen wir den Koëffizienten δ aus der ersten Angabe Januar 1./2. aus, so folgt (siehe Hilfsrechnung):

$$\frac{i - i_0}{2\cos(\odot - ☊)} = 527''$$

so dass:

$$i = 5^0\,8'\,48'' + 527''\cos 2(\odot - ☊)$$

sein wird. Diese Formel wollen wir an der zweiten Angabe prüfen. Es ergibt sich:

	Beobachtet:	Berechnet:	Differenz:
März 1./2.	5⁰ 5′ 39″	5⁰ 5′ 14″	25″

In der That haben wir den Koëffizienten nur genähert berechnet, so dass die Uebereinstimmung eine gute genannt werden muss.

Um auch ähnlich die Formel für die Knotenlinie zu bestimmen, wollen wir uns wieder für zwei Daten die beobachteten Werte verschaffen und ausserdem die Werte von:

$$☊_0 + \varDelta ☊ t$$

die sich im Nautical-Almanac p. 1 angegeben finden.

Es ist:

	☊	$☊_0 + \varDelta ☊ \cdot t$	$2(\odot - ☊)$
März 1./2.	280⁰ 51′ 18″	282⁰ 46′ 46″	114⁰
Juli 29./30.	276⁰ 3′ 59″	274⁰ 50′ 11″	120⁰

Rechnen wir γ, so folgt aus dem ersten Datum:

$$\frac{☊ - ☊_0 - \varDelta ☊ t}{\sin^2(\odot - ☊)} = \gamma = -7583''$$

und aus dem zweiten:

$$\gamma = -5780''$$

Wir müssten längere Reihen nehmen, um den Koëffizienten zu bestimmen und aus den so erhaltenen Werten das Mittel.

Analog wäre die Bewegung der Apsidenlinie zu behandeln.

Hilfsrechnung 2.

$$☊_0 + \varDelta ☊ t = 282^0\,46'\,46''$$
$$☊ = 280^0\,51'\,18''$$
$$\text{Differenz} \quad 1^0\,55'\,28'' = 6928''$$

$$\log 6928'' = 3{\cdot}84061$$
$$\log 2\sin(\odot - ☊) = 9{\cdot}96073$$
$$\log\gamma = 3{\cdot}87988$$

Erkl. 254. Euler gibt (Theoria motus lunae, p. 189) die variabeln Glieder für ☊ an wie folgt:

$$5426''\sin 2(\odot - ☊) + 431''\sin 2(☾ - ☊) - 468''\sin 2(☾ - \odot) + 551''\cdot\sin M_\odot + \cdots$$

wodurch sich die grossen Abweichungen bei unserer γ Konstante genügend erklären.

Erkl. 255. Wenn:

$$A = \alpha_0 + \alpha_1\sin f + \alpha_2\sin 2f + \alpha_3\sin 3f + \cdots$$

und wir den Koëffizienten α_1 rechnen wollen, so müssen wir die Gleichung:

$$\frac{A - \alpha_0}{\sin f} = \alpha_1 + \alpha_2\frac{\sin 2f}{\sin f} + \alpha_3\frac{\sin 3f}{\sin f} + \cdots$$

für sehr viele Werte berechnen und hieraus das Mittel nehmen. Haben wir sehr viele Werte, so steht zu erwarten, dass die periodischen Glieder:

$$\frac{\sin 2f}{\sin f},\ \frac{\sin 3f}{\sin f},\ \ldots$$

Aus allen diesen Erörterungen sieht man zur Genüge ein, wie schwer die Berechnung der Mondkoordinaten sein muss. Man müsste dabei zunächst die veränderlichen Elemente und aus diesen erst die Länge und Breite auf die bei der Sonne und Mars angegebene Art berechnen. Man hat daher (vgl. Erkl. 252) die Länge des Mondes direkt als Funktion der Zeit darzustellen versucht, um alle diese endlosen Rechnungen (die Reihen für die Elemente, wenn sie nur halbwegs genau sein sollen, umfassen Hunderte von Gliedern) zu vermeiden.

Die grössten Koëffizienten dieser Reihe hat man schon früher erkannt und aus den Beobachtungen abgeleitet. Sie führen besondere Namen und zwar: Evektion, Variation und jährliche Gleichung.

ebenso oft oder nahezu ebenso oft positiv oder negativ werden, wodurch sie entweder auf das Resultat gar keinen oder doch nur geringen Einfluss haben. Analog werden die übrigen Glieder berechnet.

Erkl. 256. Um überhaupt die Periode einer Ungleichheit:

$$\sin f$$

zu finden, bestimmt man den Betrag der täglichen Bewegung derselben μ, sodann wird, wenn T die Periode bezeichnet:

$$\mu T = 360^0$$

dabei ist natürlich μ in Graden zu nehmen. Der synodische Monat (die relative Bewegung des Mondes gegen die Sonne) beträgt 29,53 Tage, ferner ist:

$M_☾$ = anomalistischen Monat = 27,55 Tagen

so dass für die Evektion:

$$\mu = 2\cdot\frac{360^0}{29{,}53} - \frac{360^0}{27{,}55}$$

wird, hieraus folgt:

$$T = 31\,\frac{3}{4}\text{ Tage}$$

Erkl. 257. Horrox, der 1641 in einem Alter von 22 Jahren starb, war ein Engländer. Er war der erste, der den Venusdurchgang vom 4. Dez. 1639 auf Grund eigener Berechnungen beobachtete und in der posthumen Schrift „Venus in Sole visa“ berechnete.

Erkl. 258. Alle Mondtafeln stimmen eine Zeitlang (vergl. Erkl. 246) mit der Wirklichkeit überein, dann aber weichen sie immer mehr und mehr von derselben ab und zwar wachsen diese Abweichungen fast proportional der Zeit. Solange diese Abweichungen klein sind, begnügt man sich damit, zu ihnen die Korrektionen anzugeben; werden sie aber grösser, so müssen die Mondtafeln von neuem gerechnet werden. Solche Abweichungen rühren zumeist von Gliedern mit einer sehr langen Periode her.

Die Evektion wurde schon von Ptolomäus entdeckt (Alm. lib. IV, Kap. 3, 6, 11), ihr Wert beträgt nach demselben Autor:

$$1^0\,19'\,30''\sin[2\,(☾ - ⊙) - M_☾]$$

was nicht viel von den neuesten Bestimmungen abweicht. Ihre Periode (vergl. Erkl. 256) beträgt fast 32 Tage. In dieser Zeit durchläuft sie alle Werte von:

$$-1^0\,20'\,30''\text{ bis }+1^0\,20'\,30''$$

Die Variation, von Tyge Brahe 1590 entdeckt, der sie zu:

$$37'\,6''\sin 2\,(☾ - ⊙)$$

angibt, hat eine Periode von etwa 15 Tagen.

Die jährliche Gleichung, von Kepler entdeckt (vergl. Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik B. 31), die zum erstenmale von Horrox (Horrocius „Astronomia Kepleriana“ und „Opera posthuma“, Londini 1678, p. 473) zu:

$$11'\,16''\sin M_⊙$$

berechnet wurde, hat zur Periode das Jahr selbst.

Endlich hat Mason (1787 „Mayers Tables of the Moon improved“, London 1787) die sogen. parallaktische Gleichung eingeführt, deren Betrag nach ihm:

$$2'\,3''\,5\sin(☾ - ⊙)$$

oder nach Newcomb:

$$2'\,5''\,5\sin(☾ - ⊙)$$

beträgt. Diese Gleichung wird deswegen parallaktische Gleichung genannt, weil sie vorzüglich von der Parallaxe der Sonne abhängt. Ist sie also durch Beobachtungen bestimmt, so kann sie umgekehrt zur Bestimmung der Sonnenparallaxe dienen. Was auch Laplace that (Connaissance des Temps aux XII, 1804, p. 496). So fand Stone aus 2075 Greenwicher Beobachtungen die Sonnenparallaxe im Jahre 1867 zu:

$$8''\,85$$

welcher Wert mit den neuesten Bestimmungen übereinstimmt.

Um die Koordinaten des Mondes zu berechnen, bedient man sich der sogenannten Mondtafeln, die alle Elemente, sowie ihre Störungen für bestimmte Zeiten enthalten, so dass man durch blosse Addition und Interpolation sofort die gewünschten Koordinaten erlangt. Die neuesten sind von Hansen, zu welchen Newcomb die nötigen Korrektionen berechnet hat. Diese Korrektionen finden sich immer am Schlusse des Nautical-Almanac mitgeteilt.

Mondelemente.

B = Bewegung in 100 Julianischen Jahren. (1800, Januar 1. Julianisch = 1800, Januar 12. Gregorianisch).
t = „ in 1 Tag; τ_1 = Zeit in Zeiten des Julianischen Jahrhunderts.

Epoche 1800, 0. Januar 0^h mittlere Greenwicher Zeit.

L (mittlere Länge) $= 335^0\,43'\,26''\,7 + 12''\,557\,\tau^2 + 0''\,01256\,\tau^3$
B $= 1336\cdot 360^0 + 307^0\,53'\,39''\,61$
$13^0\,10'\,35''\,0286$

π (mittleres Perigeum) $= 225^0\,23'\,53''\,06 - 38''\,577\,\tau^2 - 0''\,03859\,\tau^3$
B $= 11\cdot 360^0 + 109^0\,3'\,2''\,46$
t $= 6'\,41''\,056$

☊ (mittlere Länge) $= 33^0\,16'\,31''\,15 + 6''\,623\,\tau^2 + 0''\,006625\,\tau^3$
B $= -(5\cdot 360^0 + 134^0\,8'\,59''\,61)$
t $= 3'\,10''\,63$

$e = 0{,}05490809$
$i = 5^0\,8'\,39''\,96$

Diese Zahlen sind den Angaben Hansens entnommen (Tables de la Lune und Leipz. Berichte, VII. Band). Newcomb hat etwas andere Werte gefunden (Washingt. Observ. 1875. app. II). Er findet für dieselbe Epoche:

$$L = 335^0\,43'\,30''\,60 + 8''\,82\,\tau^2$$
$$B = 1336\cdot 360^0 + 307^0\,53'\,20''\,58$$

Ist immer L die wahre und L_m die mittlere Länge und analog bei den übrigen Elementen, so folgt:

$$L = L_m + \Delta L$$
$$\pi = \pi_m + \Delta\pi$$
$$☊ = ☊_m + \Delta ☊$$
$$e = e_m + \Delta e$$
$$i = i_m + \Delta i$$

wobei die einzelnen Korrektionen Reihen von sehr vielen Gliedern und verschiedenartigen Argumenten darstellen. So ist z. B.:

ΔL = Mittelpunktsgleichung + Evektion + Variation + jährliche Gleichung + kleine Glieder die von der gegenseitigen Einwirkung des Mondes, der Sonne und der Planeten aufeinander herrühren.

Diese wollen wir Störungen nennen.

Man hat folgende Werte für diese Korrektionen, wobei H. den Wert nach Hansen und D. jenen nach Delaunay bezeichnet. Ferner M die mittlere Anomalie, ☾ die Mondlänge, ☉ die Sonnenlänge.

Mittelpunktsgleichung H.

$$6^0\,17'\,22''\,67 \sin M_☾ + 12'\,56''\,47 \sin 2M_☾ + 39''\,92 \sin 3M_☾ + 2''\,01 \sin 4M_☾$$

Evektion. $\left.\begin{array}{ll}\text{H.} & 1^0\,14'\,27''\,02\\ \text{D.} & 16'\,26''\,22\end{array}\right\}\sin[2(☾-☉)-M_☾]$

Variation. $\left.\begin{array}{ll}\text{H.} & 35'\,45''\,01\\ \text{D.} & 39'\,29''\,74\end{array}\right\}\sin 2(☾-☉)$

Jährliche Gleichung. $\left.\begin{array}{ll}\text{H.} & -10'\,57''\,52\\ \text{D.} & -11'\,8''\,91\end{array}\right\}\sin M_☉$

Bezeichnet man die mittlere Anomalie des Mondes mit g, jene der Sonne mit g', ferner mit w und w' die Grössen $☊_☾ - \pi_☾$, $☊_☾ - \pi_☉$, so wird:

$$\begin{aligned}\varDelta L = {} & 22640'' \sin g + 769'' \sin 2g - 670'' \sin g' + 4587'' \sin(g - 2g' + 2w - 2w') \\ & + 2370'' \sin(2g - 2g' + 2w - 2w') - 412'' \sin(2g + 2w - 2w') \\ & + 206'' \sin(g - 3g' + 2w - 2w') + 212'' \sin(-2g' + 2w - 2w') \\ & + 192'' \sin(3g - 2g' + 2w - 2w') + 148'' \sin(g - g') - 110'' \sin(g + g') \\ & + 166'' \sin(2g - 3g' + 2w - 2w') - 126'' \sin(g - g' + w - w') \\ & - 55'' \sin(2g' + 2w') + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mondparallaxe} = {} & 3422''3 + 186''5 \sin g + 10''2 \sin 2g + 34''3 \sin(g - 2g' + 2w - 2w') \\ & + 28''2 \sin(2g - 2g' + 2w - 2w') \\ & + 3''1 \sin(3g - 2g' + 2w - 2w') + \cdots\end{aligned}$$

Beide Gleichungen nach Newcomb (Astr. Papers. of the Am. Eph. 1882)

$$\begin{aligned}\varDelta \Omega_0 = {} & 5491'' \sin 2(\odot - \Omega_☾) + 528'' \sin M_\odot + 431'' \sin 2(☾ - \Omega_☾) \\ & + 468'' \sin 2(\odot - ☾) + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varDelta i = {} & 490'' \cos 2(\odot - \Omega_☾) + 47'' \sin M_\odot + 42'' \cos 2(☾ - \odot) \\ & + 38'' \cos 2(☾ - \Omega) + \cdots\end{aligned}$$

Diese letzteren Gleichungen entsprechen den Rechnungen im Abschnitte B. der physischen Astronomie.

N. Ueber die Berechnung der Finsternisse.

Anmerkung 22. Die Theorie der Finsternisse ist eine der wichtigsten der ganzen Astronomie. Nicht nur für die Astronomie selbst, sondern auch für die Chronologie besitzt sie ihre Bedeutung. Durch genaue Nachrechnung einer Finsternis wird es möglich, ein Datum der Geschichte festzustellen und umgekehrt dienen die Finsternisse dazu, um mit ihrer Hilfe die Mondelemente genauer zu berechnen. Ja Ptolomäus hatte in seinem berühmten Hauptwerke über Astronomie, dem Almagest, die Mondtheorie fast einzig und allein auf die Finsternisse gegründet und ist so zu Resultaten gelangt, die von den neueren nur wenig abweichen.

Mit den Finsternissen verwandt sind die Sternbedeckungen, deren Theorie mit jener der Finsternisse fast zusammenfällt. Daher wurde ihnen in diesem Werke weiter keine Beachtung zu teil. Aber auch die Theorie der Finsternisse findet sich nur so weit abgehandelt, als es dem Zwecke dieses Werkes angemessen erschien, jedoch so, dass sie die Grundzüge aller dabei vorkommenden Rechnungen darstellt.

a) Ueber die Mondfinsternis.

Frage 115. Zwischen welchen Grenzen muss bei den Syzygien die Mondbreite liegen, damit eine Finsternis stattfinde?

Erkl. 259. Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, dass eine Mondfinsternis ein durchaus objektives Phänomen ist, dessen Grösse und Verlauf für alle Orte der Erde dieselbe ist. Nicht so bei den Sonnenfinsternissen, die sich je nach dem Orte, wo man sich befindet, verschieden darstellen. Daher ist auch die Berechnung aller Umstände einer Sonnenfinsternis eine im allgemeinen mehr Arbeit und Umsicht erfordernde Sache, als jene der Mondfinsternis. Da ferner eine Mondfinsternis während ihrer Dauer auf dem Sichtbarkeitsgebiete des Mondes, d. h. auf der Nachtseite der Erde, sich überall zeigt, die Sonnenfinsternis nur aber an bestimmten Orten, so erklärt sich hieraus, warum die Sonnenfinsternisse viel seltener sind als die Mondfinsternisse.

Antwort. Es sei (vergl. Figur 129) S die Sonne, T die Erde und L der Mond, so wird die Grenze des Kernschattens offenbar durch die beiden Geraden mm' und nn' gegeben.

Seien ferner d der Halbmesser der Sonne, δ jener des Mondes und p die Horizontalparallaxe der Sonne, π jene des Mondes und β die Breite des Mondes in dem Augenblicke, wo er den Kernschatten berührt, so wird (vergl. Figur 130) sehr nahe:

$$\sphericalangle KTO = \sphericalangle AKT - \sphericalangle AOT$$

also:

$$\beta - \delta = \pi - \sphericalangle AOT$$

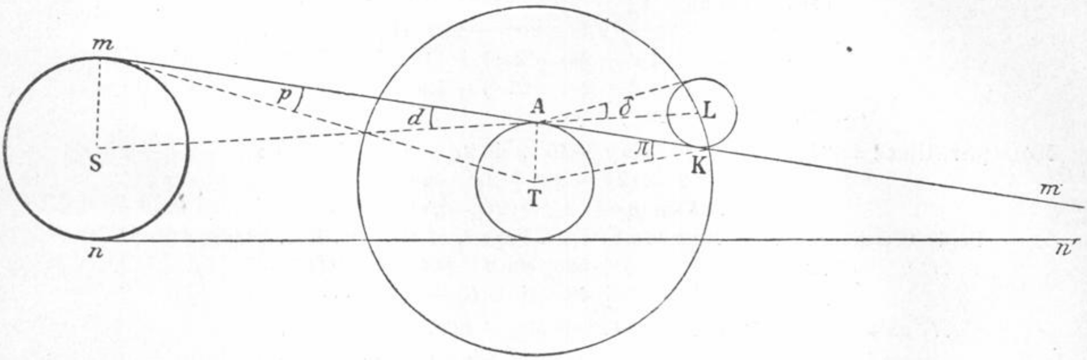
Nun ist aber:

$$\sphericalangle AOT = \sphericalangle DOS = \sphericalangle DAS - AST = d - p$$

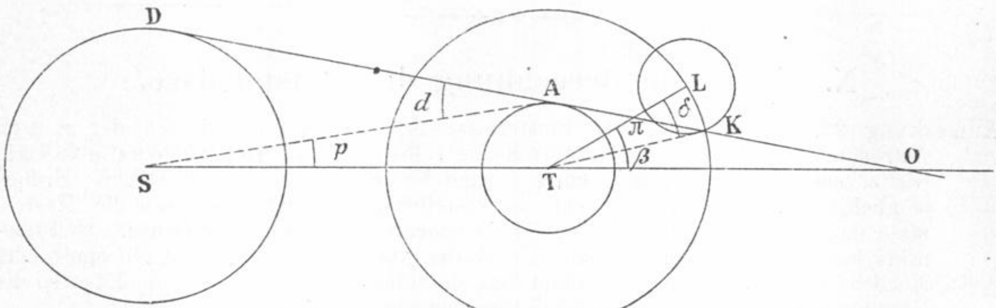
so dass:

$$154) \ldots \beta = \pi - d + p + \delta$$

Figur 129.



Figur 130.



Während wir also bei einer Mondfinsternis bloss anzugeben haben, wann sie stattfindet, müssen wir bei einer Sonnenfinsternis auch sagen, wo sie stattfindet, d. h. jene Erdorte bezeichnen, an denen sie sichtbar wird.

Nun ist im Maximum:
$d = 16' 18''$, $\delta = 16' 45''$, $\pi = 61' 24''$, $p = 9''$
und im Minimum:
$d = 15' 45''$, $\delta = 14' 41''$, $\pi = 53' 38''$, $p = 8{,}8''$
also wird: $\quad \pi - d + p + \delta$
im Maximum: $\quad = 63'$
und im Minimum: $= 52'$

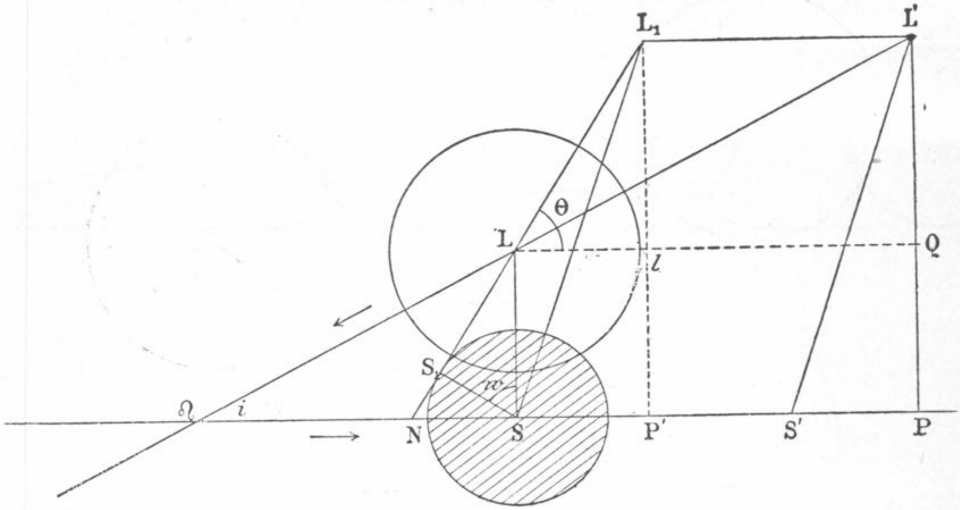
Daraus findet man, dass wenn im Augenblick der Opposition:
$$\beta < 52'$$
die Finsternis sicher eintritt;
$$\beta > 63'$$
die Finsternis sicher nicht stattfindet. Eine Finsternis kann stattfinden, wenn:
$$63' > \beta > 52'$$

Frage 116. Wie werden die näheren Umstände für die Mitte einer Finsternis berechnet?

Antwort. Es sei (vergl. Figur 131) $☊P$ die Ebene der Ekliptik, $☊L'$ die Ebene der Mondbahn, L der Mittelpunkt des Mondes und S der Mittelpunkt des Erdschattens im Augenblicke der Opposition. SS' sei der Weg, den der Kernschatten in einer Stunde zurücklegt, also die stündliche Aenderung der Sonnenlänge $\Delta ⊙$, ferner LL' der Weg, den der Mond in einer Stunde in seiner Bahn zurücklegt. Sei ferner:
$$LQ = LL' \cos i = \Delta\lambda \cos i$$

Erkl. 260. Diese relative Bahn ist jene, die der Mond beschreiben würde bei stillstehender Sonne.

Figur 131.



wo i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik bezeichnet. Sei ferner $\varDelta\beta = QL'$ die stündliche Aenderung der Mondbreite.

Sodann sieht man. dass man sich den Mond statt in $L'L$ ♌ auch in der Bahn $L_1 L N$ bewegt denken kann, die wir die relative Bahn nennen wollen.

Sei nun Θ die Neigung dieser relativen Bahn gegen die Ekliptik, so folgt:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{L_1 l}{l L} = \frac{L'Q}{SP'} = \frac{L'Q}{SP - SS'}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\varDelta\beta}{\varDelta\lambda\cos i - \varDelta\odot}$$

Dann wird auch die stündliche Bewegung in der relativen Bahn h definiert sein durch:

$$h = \frac{Ll}{\cos\Theta} = \frac{\varDelta\lambda\cos i - \varDelta\odot}{\cos\Theta}$$

Erkl. 261. Es ist im Dreiecke $L l L_1$:

$$\cos\Theta = \frac{Ll}{LL_1} = \frac{Ll}{h}$$

also:

$$h = \frac{Ll}{\cos\Theta} = \frac{SP'}{\cos\Theta} = \frac{S'P}{\cos\Theta}$$

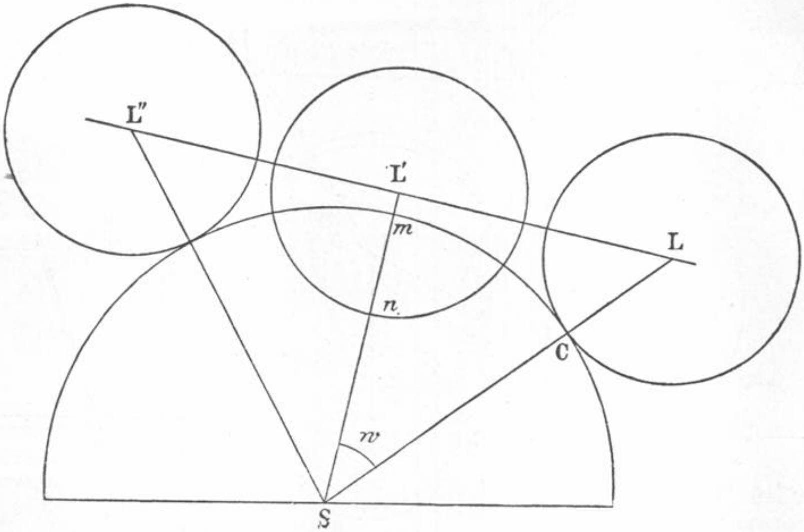
Es ist nun offenbar leicht, den Augenblick der Mitte der Finsternis zu bestimmen. Sei T die Zeit zwischen der Opposition und der Mitte der Finsternis, so sieht man leicht, dass zu dieser Zeit sich der Mond in S_1 befindet, wenn SS_1 senkrecht auf der relativen Bahn steht und man hat:

$$\frac{T}{\text{eine Stunde}} = \frac{S_1 L}{L L_1}$$

oder da $S_1 L = LS \sin S_1 S L = \beta \sin\Theta$:

$$155) \ldots T^{st} = \frac{\beta \sin\Theta \cos\Theta}{\varDelta\lambda \cdot \cos i - \varDelta\odot}$$

Figur 132.



Frage 117. Wie berechnet man Ende und Anfang der Finsternis?

Antwort. Sei L (vergl. Figur 132) der Ort des Mondes in der relativen Bahn im Anfange der Finsternis und L' in der Mitte derselben. Sei SL' die Senkrechte auf die relative Bahn, so folgt:

$$LL' = \sqrt{\overline{LS}^2 - \overline{L'S}^2} = \sqrt{LS - L'S}\,\sqrt{LS + L'S}$$

Es ist aber beim Anfange der Finsternis:

$$SL = SC + CL = \pi + p - d + \delta$$

ferner:

$$S'L = \beta \cos\Theta$$

Sei nun R der Radiusvektor des Schattens, so hat man:

$$LL' = \sqrt{R + \delta - \beta\cos\Theta}\,\sqrt{R + \delta + \beta\cos\Theta}$$

Sei nun t jene Zeit, die der Mond braucht, um von L' nach L zu kommen, so wird:

$$t : 1^h = LL' : L'S$$

oder:

$$t = \frac{LL'}{L'S}$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden:

$$L'S = \frac{\cos\Theta}{\Delta\lambda\cos i - \Delta\odot}$$

also ist, wenn man noch mit 3600 multipliziert, um die Zeit in Sekunden zu erhalten:

$$156) \ldots t = \frac{3600^s \cos\Theta}{\Delta l \cos i - \Delta\odot} \sqrt{(R+\delta)^2 - (\beta\cos\Theta)^2}$$

und demnach der Anfang der Finsternis um:

$$157) \ldots t_a = T - t$$

und das Ende um:

$$158) \ldots t_e = T + t$$

Erkl. 262. Gewöhnlich pflegt man nach T. Mayer statt:

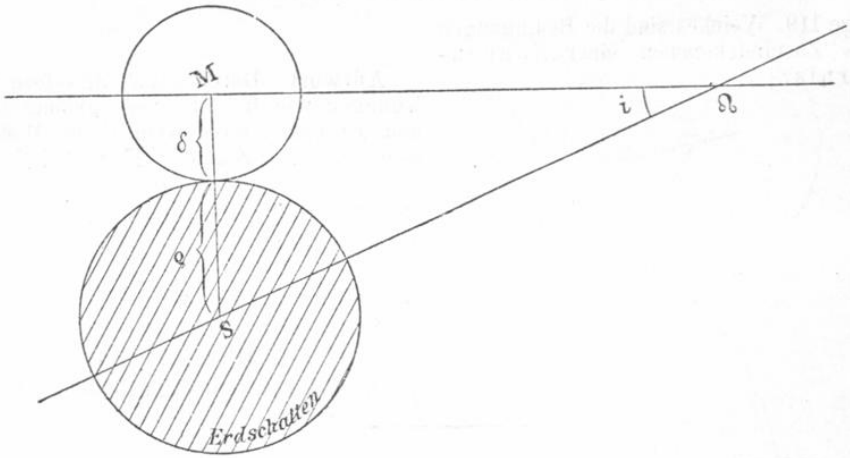
$$\pi + p - d + \delta$$

$$\frac{61}{60}(\pi + p - d) + \delta$$

zu schreiben, wodurch man eine bessere Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit erhält.

Tob. Mayer, zu Marbach in Württemberg 1723 am 17. Febr. geboren, starb am 26. Febr. 1762. War seit 1751 Professor der Mathematik in Göttingen. Er war neben Bradley einer der tüchtigsten Astronomen des vorigen Jahrhunderts, der sich insbesondere mit dem Monde beschäftigte, für dessen Lauf er auch seine berühmten Tafeln entwarf, zumeist nach den von Euler und Clairaut entworfenen Theorien.

Figur 133.



Frage 118. Wie bestimmt man die G r ö s s e der F i n s t e r n i s?

Erkl. 263. Man kann noch die Grenzen der Finsternis anders ausdrücken. Sei M der Mittelpunkt des Mondes, S jener des Erdschattens und ☊ der Ort des Knotens auf der scheinbaren Himmelskugel, so folgt, vergl. Fig. 133:

$$\sin S☊ = \frac{\sin SM}{\sin i}$$

wobei i die Neigung der Mondbahn ist.

Da nun:

$$SM = \varrho + \delta = \begin{cases} 52' \, 27'' \, 5 \text{ Min.} \\ 62' \, 36'' \, 7 \text{ Max.} \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} 5^0 \, 18' \text{ Max.} \\ 5^0 \;\; 0' \text{ Min.} \end{cases}$$

so folgt:

$$S☊ = \begin{cases} 9^0 \, 30' \, 5 \text{ Min.} \\ 12^0 \, 3' \, 7 \text{ Max.} \end{cases}$$

Eine Finsternis wird t o t a l, wenn:

$$SM = \varrho - \delta = \begin{cases} 29' \, 3'' \, 7 \text{ Max.} \\ 23' \, 1'' \, 5 \text{ Min.} \end{cases}$$

woraus:

$$S☊ = \begin{cases} 4^0 \;\; 9' \, 5 \text{ Min.} \\ 5^0 \, 34' \, 0 \text{ Max.} \end{cases}$$

folgt. Hieraus ergibt sich:

Beträgt beim Vollmonde die Entfernung der Sonne vom nächsten Knoten:

1) weniger als $4^0 \, 9' \, 5$, so m u s s eine t o t a l e,
2) zwischen $4^0 \, 9' \, 5$ um $5^0 \, 34' \, 0$, m u s s eine t o t a l e oder p a r t i a l e,
3) zwischen $5^0 \, 34' \, 0$ und $9^0 \, 30' \, 5$, m u s s eine p a r t i a l e,
4) zwischen $9^0 \, 30' \, 5$ und $12^0 \, 3' \, 7$, k a n n eine p a r t i a l e,
5) mehr als $12^0 \, 3' \, 7$, so k a n n k e i n e Mondfinsternis entstehen.

Antwort. Man sieht sofort, dass wenn:

$$R - \delta < \beta \cos \Theta$$

die Finsternis eine partielle,

$$R - \delta > \beta \cos \Theta$$

die Finsternis eine totale sein wird, dass ferner, wenn:

$$R + \delta < \beta \cos \Theta$$

gar keine Finsternis stattfinden kann. Was nun die G r ö s s e d e r F i n s t e r n i s, die offenbar durch mn (vergl. Figur 132) dargestellt wird, betrifft, so ist offenbar:

$$mn = nL' - mL' = \delta - mL'$$

es ist aber:

$$mL' = L'S - mS = \beta \cos \Theta - R$$

demnach wird:

$$mn = R + \delta - \beta \cos \Theta$$

oder wenn man diese Grösse in Teilen des Monddurchmessers darstellen will:

$$159) \; . \; . \; . \; mn = \frac{1}{2\delta} (R + \delta - \beta \cos \Theta)$$

b) Ueber die Sonnenfinsternis.

Frage 119. Welches sind die Bedingungen für das Zustandekommen einer Sonnenfinsternis?

Antwort. Durch genau dieselben Ueberlegungen wie in der Frage gelangt man zu dem Ergebnis, dass, wenn β die Mondbreite bezeichnet zur Zeit der Konjunktion für:

$$\beta < 1^0\,24'$$

eine Finsternis sicher stattfindet, dass dagegen, wenn:

$$\beta > 1^0\,34'\,18,'$$

eine Finsternis unmöglich ist.

Zwischen den Grenzen:

$$1^0\,24' \text{ und } 1^0\,34'\,18''$$

kann eine Finsternis stattfinden.

Frage 120. Was versteht man unter dem Anfangs- und Endorte der Finsternis auf der Erdoberfläche?

Antwort. Beim Fortrücken des Mondes kommt der Kegel des Schattens zur ersten Berührung mit der Oberfläche der Erde in dem Punkte, wo der Anfang der Sonnenfinsternis früher als an anderen Orten gesehen wird. Gleich darauf tritt der Kegel in die Erde hinein, um später auszutreten; vor dem gänzlichen Verlassen der Erde gelangt er zu dem Punkte, wo das späteste Ende der Finsternis auf der Erde stattfindet. In beiden Fällen liegt die berührende Seite des Kegels im Horizonte des Berührungspunktes und die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes erscheinen nahezu am Horizont des betreffenden Ortes.

Sei also BS (vergl. Figur 134) der Horizont des Beobachtungsortes B und M und S die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne (die etwa in 400facher Entfernung des Mondes zu denken ist und in der sich die Strahlen BS und OS vereinigen). Sodann wird:

$$\sphericalangle MOS = \Delta = \text{wahren Abstand}$$

der beiden Mittelpunkte,

$$\sphericalangle MBS = \Delta' = \text{scheinbaren Abstand}$$

derselben. Ferner:

$$\sphericalangle BMO = \varrho\pi$$

wobei ϱ der Erdradius und π die Mondparallaxe für $\varrho = 1$ ist. Ferner wenn $BS \parallel O\vartheta$:

$$\sphericalangle SO\vartheta = \varrho p$$

gleich der Sonnenparallaxe.

Ziehen wir:

$$O\zeta \parallel BM$$

so folgt:

$$160) \;.\;.\;.\; \Delta = \Delta' + \varrho(\pi - p)$$

Erkl. 264. Man findet auf Grund ganz elementarer Rechnungen für den Neumond:

die grösste Länge des Mondschattens 51046
„ kleinste „ „ „ 49344

den grössten Durchmesser des Kernschattens etwa 35 Meilen, während der grösste Durchmesser des Halbschattens etwa 1000 Meilen ist.

Erkl. 265. Wir können auch fragen, wie weit muss die Sonne vom Mondknoten entfernt sein. Bezeichne S die Sonne, M den Mond und ☊ den Mondknoten, sowie i die Neigung der Mondbahn, so folgt aus dem Dreieck $S☊M$ sofort:

$$\sin S☊ = \frac{\sin SM}{\sin i}$$

also da $SM = \Delta$:

$$\sin S☊ = \frac{\sin \Delta}{\sin i}$$

Nun ist Δ:

im Maximum $= 94'\,22''$
„ Minimum $= 84'\,12''$

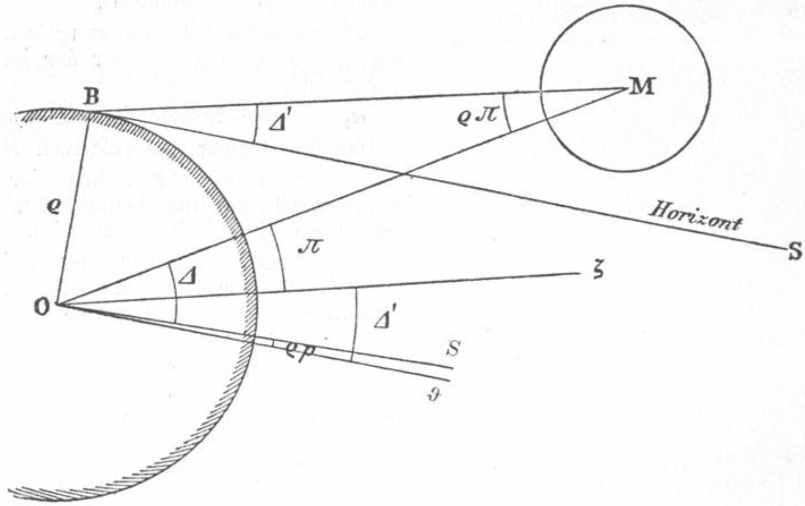
also wird:

$$S☊ = \begin{cases} 18^0\,21' \text{ Max.} \\ 15^0\,23' \text{ Min.} \end{cases}$$

Für eine wenigstens partielle Finsternis ist also $15^0\,22'$ die notwendige Grenze, d. h. steht der Mond im Augenblicke der Konjunktion weniger als $15^0\,22'$ vom Knoten entfernt, so muss eine Sonnenfinsternis eintreten bei einer Entfernung von weniger als $18^0\,21'$ und mehr als $15^0\,22'$ kann eine solche eintreten.

Genauere Uebersetzung der nebenstehenden Formeln in Knotenentfernung gibt folgende Resultate:

Figur 134.



Beträgt beim Neumonde der Abstand der Sonne vom nächsten Knoten weniger

als 9° 33′, so muss eine totale oder ringförmige Finsternis entstehen. Liegt dieser Abstand zwischen

9° 33′ und 11° 54′, so kann eine totale oder ringförmige, oder partiale Finsternis entstehen. Liegt er zwischen

11° 54′ und 15° 23′, so muss eine partiale Finsternis entstehen. Liegt er endlich zwischen

15° 23′ und 18° 21′, so kann eine partiale Finsternis entstehen. Ueber 18° 21′ ist keine Finsternis mehr möglich.

Nun ist, wenn d den scheinbaren Halbmesser der Sonne und δ jenen des Mondes bezeichnet, im Augenblicke der äusseren Berührung (vergl. Figur 134):

$$\Delta' = d + \delta$$

also:

$$161) \ldots \Delta = \varrho(\pi - p) + d + \delta$$

Setzen wir:

$$\Delta' = 0$$

so folgt:

$$162) \ldots \Delta = \varrho(\pi - p)$$

Dann haben wir offenbar eine zentrale Sonnenfinsternis.

Sei endlich:

$$\Delta' = \begin{cases} \delta - d \\ d - \delta \end{cases}$$

je nachdem:

$$\delta \gtrless d$$

ist. So ist offenbar eine totale Finsternis, wenn:

$$\delta > d$$

d. h. der Monddurchmesser grösser als der Sonnendurchmesser. Dann muss:

$$163) \ldots \Delta = \varrho(\pi - p) + \delta - d$$

sein. Ist:

$$\delta < d$$

dann haben wir eine ringförmige, für welche:

$$164) \ldots \Delta = \varrho(\pi - p) - \delta + d$$

ist.

Frage 121. Wie berechnet man Anfang und Ende der Sonnenfinsternis?

Antwort. Es sei:

D die Deklination des Mondes,

α die Differenz: Rectascension der

Sonne — jener des Mondes oder umgekehrt (immer positiv zu nehmen),

D_1 die stündliche Bewegung in der Deklination des Mondes — jener der Deklination der Sonne,

α_1 derselbe Betrag der Rectascensionen,

Θ die Neigung der relativen Mondbahn,

w der Winkel zwischen der Distanz Sonne-Mond und der Senkrechten von der Sonne auf die relative Mondbahn,

d die Differenz der Deklinationen im Augenblicke der Konjunktion, so folgt mit Benützung der Figur 131 Seite 213:

$$L_1 l = D_1$$
$$L l = \alpha_1 \cos D$$
$$L_1 L l = \Theta$$

also aus dem Dreiecke $L_1 L l$:

$$165) \ldots \operatorname{tg} \Theta = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos D}$$

und stündliche Bewegung in der relativen Bahn $L L_1$:

$$= \frac{D_1}{\sin \Theta}$$

Ferner folgt aus dem bei S_1 rechtwinkligen Dreiecke $L S S_1$:

$$n = S S_1 = D \cos \Theta, \quad L S_1 = n \operatorname{tg} \Theta$$

Die Zeit t, in welcher die Strecke $L S_1$ zurückgelegt wird, d. h. die Zeit zwischen der Mitte der Finsternis und der Konjunktion, wird gleich:

$$t = \frac{n \operatorname{tg} \Theta}{\text{stündl. Bewegung in der relativen Bahn}}$$

also:

$$t = \frac{n \sin \Theta}{D_1} \operatorname{tg} \Theta$$

Setzt man:

$$166) \ldots c = 3600 \cdot \frac{n \sin \Theta}{D_1}$$

so wird in Sekunden:

$$167) \ldots t^s = c \operatorname{tg} \Theta$$

Bezeichnen wir mit T_m die Zeit der Mitte der Finsternis, so folgt offenbar:

$$168) \ldots T_m = \text{Zeit der Konjunktion} - t$$

Wir haben ferner (vergl. Figur 131):

$$169) \ldots \cos w = \frac{S L'}{S L} = \frac{n}{\Delta}$$

$$L L' = n \operatorname{tg} w$$

Ist also τ jene Zeit, die nötig ist, damit der Mond die Strecke $L L'$ in der relativen Bahn zurücklegt, so wird:

$$\tau = \frac{L L'}{\text{stündl. Bewegung in der relativen Bahn}}$$

also:

$$\tau = \frac{n \operatorname{tg} w}{D_1} \sin \Theta$$

oder wenn man wieder:

$$c = 3600 \cdot \frac{n \sin \Theta}{D_1}$$

setzt, τ in Sekunden:

$$170) \; . \; . \; . \; \tau^s = c \operatorname{tg} w$$

Damit wird die Zeit für den Anfang der Finsternis:

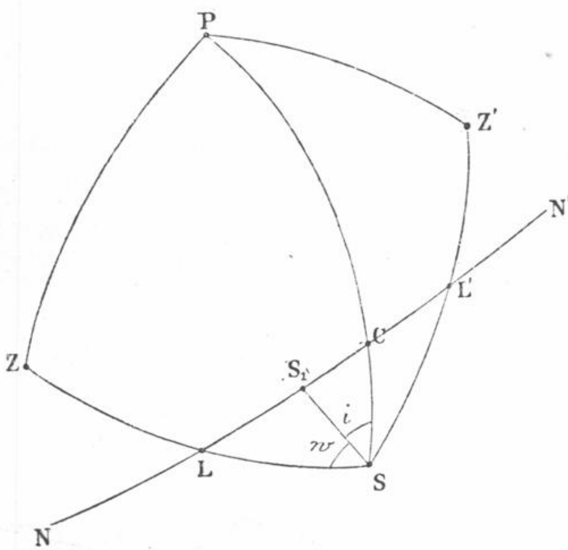
$$171) \; . \; . \; . \; T_m - \tau$$

und die Zeit für das Ende:

$$172) \; . \; . \; . \; T_m + \tau$$

Frage 122. Wie werden die Grenzen der Sichtbarkeit der Sonnenfinsternis berechnet?

Figur 135.



Antwort. Um die Grenzen der Sichtbarkeit, d. h. jene Stellen festzustellen, an denen der Kernschatten in die Erdoberfläche eintritt und sie verlässt, haben wir folgende Betrachtung anzustellen:

Sei NN' (vergl. Figur 135) die relative Mondbahn und P der Pol des Aequators. Ferner S der als Fix vorausgesetzte Sonnenort, SS_1 die Senkrechte auf die relative Mondbahn. C der Punkt, wo sich der Mond im Momente der Konjunktion befindet. Ferner L und L' die Mondorte beim ersten und letzten Kontakt. So haben wir, wenn Z und Z' die Zenithe jener Erdorte sind, an welchen Anfang und Ende der Finsternis beobachtet wird, offenbar (vergleiche Figur 136) für den Eintritt:

$$ZS = 90^0 - p + d$$

für den Austritt (vergleiche Figur 137):

$$ZS = 90^0 - p - d$$

und endlich für die Berührung der beiden Centra:

$$ZS = 90^0 - p$$

wobei p die Horizontalparallaxe der Sonne und d ihr scheinbarer Halbmesser ist.

Setzen wir:

$$PSZ = a$$

für den Anfang,

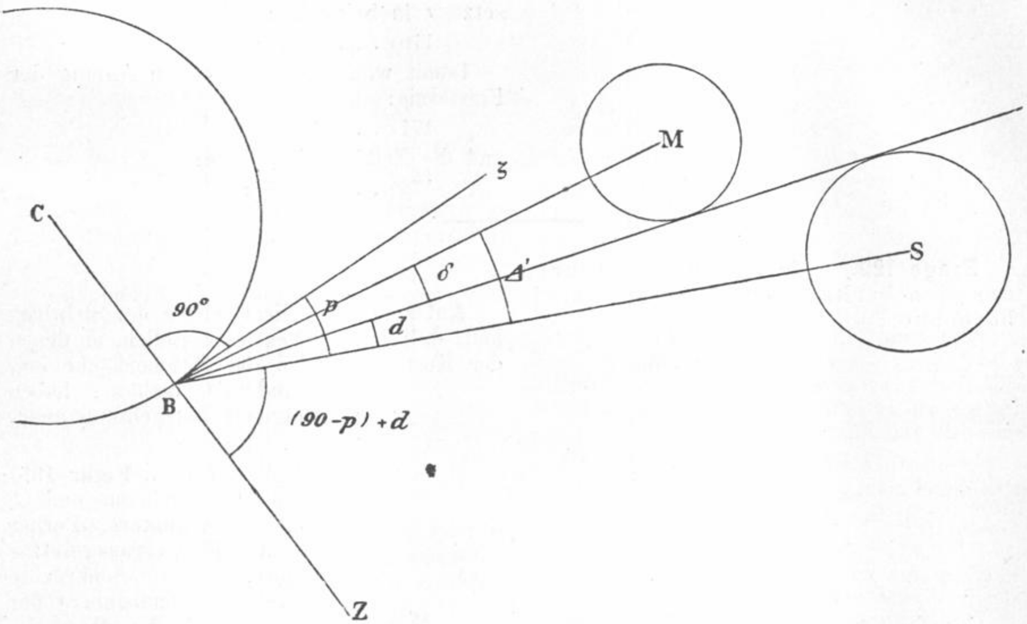
$$PSZ' = b$$

für das Ende der Finsternis, so wird:

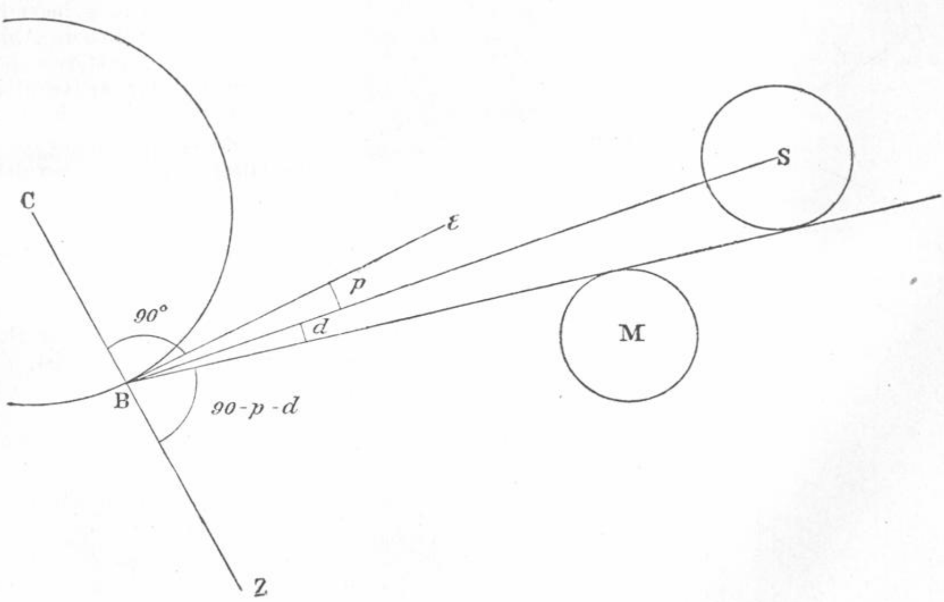
$$a = (-\Theta) + w$$
$$b = (-\Theta) + w$$

wenn man alle Winkel von Nord gegen Ost zählt. Da nun nach dem Vorhergehenden ZS und $Z'S$ sehr wenig von 90^0 verschieden

Figur 136.



Figur 137.



sind, so folgt aus den Dreiecken PZS und $PZ'S$:

$$\cos PZ = \cos PSZ \sin PS$$
$$\cos PZ' = \cos PSZ' \sin PS$$
$$\operatorname{tg} ZPS = -\frac{\operatorname{tg} PSZ}{\cos PS}$$
$$\operatorname{tg} Z'PS = -\frac{\operatorname{tg} PSZ'}{\cos PS}$$

Nun ist offenbar:

$$PS = \text{Deklination der Sonne}$$

im Augenblicke der Konjunktion. Es werde diese mit $\delta_{\odot}$ bezeichnet. Ferner ist:

$$PSZ = a, \quad PSZ' = b$$

also gegeben durch die obige Rechnung.

Wir haben also:

$$\cos PZ = \cos a \cos \delta_{\odot}$$
$$\cos PZ' = \cos b \cos \delta_{\odot}$$
$$\operatorname{tg} ZPS = -\frac{\operatorname{tg} a}{\sin \delta_{\odot}}$$
$$\operatorname{tg} Z'PS = -\frac{\operatorname{tg} b}{\sin \delta_{\odot}}$$

Hier sind offenbar PZ und PZ' Poldistanzen des Anfangs- und Endortes. Bezeichnen wir diese mit:

$$l \text{ und } l'$$

Ferner ist $\sphericalangle ZPS$ offenbar nichts anderes als der Stundenwinkel der Sonne (weil ja P und Z zugleich im Meridian liegen müssen). Wir wollen sie mit:

$$h \text{ und } h'$$

bezeichnen. Sodann wird, wenn:

$$\varphi \text{ und } \varphi'$$

die geozentrischen Breiten des Anfangs- und Endortes sind:

$$\varphi = 90^0 - l$$
$$\varphi' = 90^0 - l'$$

also:

173) . . . $\sin \varphi = \cos a \cos \delta_{\odot}$

174) . . . $\sin \varphi' = \cos b \cos \delta_{\odot}$

Um die östliche geographische Länge zu erfahren, hat man die Formel:

östliche geographische Länge = Zeit der Mitte der Finsternis — h

weil die Zeit der Mitte der Finsternis eben der Stundenwinkel der Sonne um diese Zeit ist.

Stellen wir also alles zusammen, so ergibt sich zur Berechnung einer Sonnenfinsterni folgendes Schema:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos D}$$
$$n = D \cos \Theta$$
$$c = 3600 \frac{n \sin \Theta}{D_1}$$
$$t^s = c \operatorname{tg} \Theta$$

Mitte der Finsternis T_m = Zeit der Konjunktion —

Erkl. 266. Um die geographischen Breiten zu erhalten, muss man nach Frage 59 noch eine Korrektion an die geozentrischen anbringen. Da wir die betreffenden Grössen hier brauchen, seien sie angeführt:

$$\varphi' = \varphi - 11' \, 30'' 65 \sin 2\varphi + 1'' \, 16 \sin 4\varphi$$

also hinreichend genau:

$$\varphi' = \varphi - 11' \, 30'' \sin 2\varphi$$
$$\varphi = \varphi' + 11' \, 30'' \sin 2\varphi'$$

wobei φ' die geozentrische und φ die geographische Breite bezeichnet.

Ferner ist, da wir für die Parallachsen:

$$\varrho(\pi - p)$$

ϱ brauchen:

$$\log \varrho = 9 \cdot 9992747 + 0 \cdot 0007271 \cos 2\varphi$$

wofür man für die mittleren Breiten 45° einfach immer:

$$\log \varrho = 9 \cdot 99929$$

nehmen kann, so dass immer:

$\varrho(\pi - p)$ einfach $(9{,}99929)(\pi - p)$

zu setzen ist, da die Abweichungen sehr gering sind.

Nun wird:

$$\text{für eine}\left\{\begin{array}{l}\text{partielle}\\ \text{zentrale}\\ \text{totale}\\ \text{ringförmige}\end{array}\right\}\text{Finsternis } \varDelta = \left\{\begin{array}{l}\varrho(\pi-p)+d+\delta\\ \varrho(\pi-p)\\ \varrho(\pi-p)+\delta-d\\ \varrho(\pi-p)-\delta+d\end{array}\right.$$

gesetzt.

Sodann wird weiter:

$$\cos w = \frac{n}{\varDelta}$$

$$\tau = c \operatorname{tg} w$$

Damit ist:

$$H \text{ die Zeit} \left\{\begin{array}{l}\text{vom Anfang}\\ \text{Ende}\end{array}\right\} = T \mp \tau$$

$$a = (-\Theta) - w \qquad wb = (-\Theta) + w$$

$$\sin\varphi = \cos a \cos\delta_{\odot}$$

$$\operatorname{tg} h = -\frac{\operatorname{tg} a}{\sin\delta_{\odot}}$$

Damit ist die westliche Länge des Anfangsortes:

$$h = H$$

geographische Breite desselben φ.

Analog:

$$\sin\varphi' = \cos b \cos\delta_{\odot}$$

$$\operatorname{tg} h' = -\frac{\operatorname{tg} b}{\sin\delta_{\odot}}$$

und hiermit westliche Länge des Erdortes:

$$h' - H$$

und seine geographische Breite φ'.

Erkl. 267. Die Grösse h muss auf derselben Seite des Meridians liegen, wie a. Die Länge

$$h - H$$

ist auf jenen Ort zu beziehen, auf welchen die Daten zur Berechnung der Finsternis reduziert vorliegen, also im folgenden Beispiel, auf Paris.

---

c) Numerisches Beispiel.

16. April 1874.

Elemente entnommen aus Connaissance des Temps.

Zeit der Konjunktion . . . . $1^h\ 26^m\ 24^s\ 5$

Rectascension des Mondes und der Sonne in diesem Augenblicke $1^h\ 37^m\ 47^s\ 9$

Deklination des Mondes $+\ 9^0\ 13'\ 40''\ 2$

„ der Sonne $+10^0\ 10'\ 54''\ 5$

Stündliche Bewegung
- in Rectascension ☉ $2'\ 18''\ 9$; ☾ $34'\ 26''\ 9$
- in Deklination ☉ $+53''$; ☾ $+16'\ 55''\ 4$

Aequatorial-Horizontalparallaxe ☉ $8''\ 9$; ☾ $61'\ 12''\ 8$.

Halbmesser ☉ $15'\ 57''\ 8$; ☾ $16'\ 42''\ 4$

A) Rechnung der Hilfsgrössen $d,\ \alpha_1,\ D_1,\ \varrho(\pi - p)$.

Deklination des	☾ ···	$+\ 9^0\ 13'\ 42''2$
„ „	☉ ···	$+10^0\ 10'\ 54''5$
	d ···	$-\ 57'\ 14''3$
Stündl. Bewegung in Dekl.	☾ ···	$+16'\ 55''4$
„ „ „ „	☉ ···	$+\ 53''1$
	D_1 ···	$+16'\ 2''3$

Stündl. Bewegung in Rectasc.	☾ ···	$34'\ 26''9$
„ „ „ „	☉ ···	$2'\ 18''9$
	α_1 ···	$32'\ 8''0$
Horizont. Aequator.-Parallaxe	☾ ···	$61'\ 12''8$
„ „ „	☉ ···	$8''9$
Relative Parallaxe	☾ ···	$61'\ 3''9$

$$\begin{aligned}\log 61'\,3''9 &= 3{,}56394\\ \log \varrho &= 9{,}99929\\ \hline \log \varrho\,(\pi' - p) &= 3{,}56323\\ \varrho\,(\pi' - p) &= 60'\,58''\end{aligned}$$

B) Berechnung der Zeit der Mitte der Finsternis.

$$\begin{array}{rl} \log D_1 \cdots & 2{,}98331\\ \log \alpha_1 \cdots & 3{,}28511\\ \hline & 9{,}69820\\ \log \cos D \cdots & 9{,}99435\\ \hline \log \operatorname{tg} \Theta \cdots & 9{,}70384\\ \Theta \cdots & 26^0\,49'\,24'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log d \cdots & 3_n\,53584\\ \log \cos \Theta \cdots & 9{,}\,95056\\ \hline \log n \cdots & 3_n\,48640\\ n = & -51'\,4''7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log n \cdots & 3_n\,48640\\ \log \sin \Theta \cdots & 9{,}\,65441\\ \log 3600 \cdots & 3{,}\,55630\\ \hline & 6_n\,69711\\ \log D_1 \cdots & 2{,}\,98331\\ \hline \log c \cdots & 3_n\,71380\\ \log \operatorname{tg} \Theta \cdots & 9{,}\,70385\\ \hline \log t \cdots & 3_n\,41765\\ t \cdots & -\,0^h\,43^m\,36^s\\ \text{Zeit der Konjunktion} \cdots & 1^h\,26^m\,24^s\\ \hline \text{Zeit der Mitte der Finsternis } T_m \cdots & 2^h\,10^m\,0^s \text{ wahre Pariser Zeit.} \end{array}$$

Wir wollen nun die Grenzen der zentralen Finsternis bestimmen. Dann haben wir:

$$\varDelta = \varrho\,(\pi - p) = 60'\,58''$$

zu setzen.

C) Bestimmung des Anfangs und Endes der zentralen Finsternis.

$$\begin{array}{rl} \log n \cdots & 3_n\,48640\\ \log \varDelta \cdots & 3{,}\,56324\\ \hline \log \cos w \cdots & 9{,}\,92316\\ \log c \cdots & 9\cdot 71380\\ \hline \log \tau \cdots & 3_n\,52770 \end{array} \qquad w \cdots 145^0\,53'$$

$$\begin{aligned} -\Theta &= -\;26^0\,49'\,24''\\ w &= \;\;146^0\,55'\;\;0''\\ \hline a &= -\,173^0\,44'\,24''\\ b &= +\,120^0\;\;5'\,36'' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} \tau \cdots & 0^h\,56^m\,11^s\\ \tau_m \cdots & 2^h\,10^m\;\;0^s\\ \hline T_m - \tau \cdots & 1^h\,13^m\,49^s \quad \text{Anfang}\\ T_m + \tau \cdots & 3^h\;\;6^m\,11^s \quad \text{Ende} \end{array} \Big\} \text{ der Finsternis in wahrer Pariser Zeit.}$$

D) Geographische Lage der Endpunkte.

$$\begin{array}{rl} a \cdots & -\,173^0\,44'\,24''\\ \delta_\odot \cdots & 10^0\,10'\,55'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \cos a \cdots & 9_n\,99740\\ \log \cos \delta_\odot \cdots & 9\cdot 99310\\ \hline \log \sin \varphi \cdots & 9_n\,99050 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} a \cdots & 9{,}\,04017\\ \log \sin \delta_\odot \cdots & 9\cdot 24740\\ \hline \log \operatorname{tg} h \cdots & -\,9{,}\,79277 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \varphi \cdots & -\,78^0\,4' \text{ geozentrisch}\\ = & -\,78^0\,9' \text{ geographisch} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_m - \tau \cdots & 1^h\,13^m\,49^s \text{ in wahrer Zeit}\\ \text{Zeitgleichung} & 14^s\\ \hline T_m - \tau \cdots & 1^h\,14^m\;\;3^s \text{ in mittlerer Zeit}\\ T_m - \tau \cdots & +\,14^0\,31' \text{ in Bogen}\\ h \cdots & -\,31^0\,49'\\ \hline \text{Länge} \cdots & 50^0\,20' \text{ westlich} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} b \cdots & +\,120^0\;\;5'\,36''\\ \delta_\odot \cdots & +\;\;10^0\,10'\,55'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \cos b \cdots & 9_n\,70019\\ \log \cos \delta_\odot \cdots & 9\cdot 99310\\ \hline \log \sin \varphi' \cdots & 9_n\,69329 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} b \cdots & 0_n\,23690\\ \log \sin \delta_\odot \cdots & 9\cdot 24740\\ \hline \log \operatorname{tg} h' \cdots & 0\cdot 98950 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \varphi' \cdots & 29^0\,34' \text{ geozentrisch}\\ = & 29^0\,44' \text{ geographisch} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_m + \tau \cdots & 3^h\;6^m\;11^s\\ \text{Zeitgleichung} & +\,14^s\\ \hline T_m + \tau \cdots & 3^h\;6^m\;25^s \text{ in mittlerer Zeit}\\ T_m + \tau \cdots & 46^0\,36' \text{ in Bogen}\\ h' \cdots & 84^0\;\;9'\\ \hline \text{Länge} \cdots & 37^0\,33' \text{ östlich} \end{array}$$

Wir haben also:

Anfang der zentralen Finsternis:

16. April 1h 14m mittlerer Pariser Zeit an einem Orte mit der Position: geographische Breite = 78° 9′ südlich; geographische Länge 50° 20′ westlich von Paris.

Ende der zentralen Finsternis:

16. April 3h 6m mittlerer Pariser Zeit an einem Orte mit der Position: geographische Breite = 29° 44′ südlich; geographische Länge 37° 33′ östlich von Paris.

Wollte man die partielle Finsternis rechnen, so hätte man:

$$\varDelta = \varrho(\pi - p) + \delta + d = 93' \, 38''$$

nehmen müssen. Damit ergibt sich (was nachzuweisen wir dem Leser überlassen):

Anfang: 15. April 23h 57m, Position φ = 58° 31′ südlich, Länge = 73° 33′ westlich
Ende: 16. „ 4h 22m, „ φ' = 6° 10′ „ „ = 23° 9′ östlich

Erkl. 268. Man findet immer, dass für den Anfang die Koordinaten vermindert und für das Ende vergrössert werden durch die Refraktion oder umgekehrt.

Es soll hier noch angeführt werden, dass wir hierbei den Einfluss der Refraktion vernachlässigt haben. Diese kann die geographischen Positionen etwa um 1° vergrössern resp. verkleinern, also ein Betrag, der bei den hier eingehaltenen Grenzen gar nicht in Betracht kommt.

---

d) Eine zu berechnende Finsternis.

5. April 1875.

Zeit der Konjunktion (mittlere Pariser Zeit) ··· 18h 39m 18s6
Rectascension der ☉ und des ☾ ··· 0h 59m 9s33

Deklination { ☾ ··· + 6° 10′ 20″4
{ ☉ ··· + 6° 19′ 14″7

Stündliche Bewegung { Rectascension { ☾ ··· 33′ 17″7
{ ☉ ··· 2′ 17″1
{ Deklination { ☾ ··· + 17′ 32″9
{ ☉ ··· + 0′ 56″8

Horizontale Aequatoreal-Parallaxe { ☾ ··· 60′ 47″0
{ ☉ ··· 9″9

Halbmesser { ☾ ··· 16′ 35″4
{ ☉ ··· 16′ 0″6

Man findet:

Anfang der partiellen Finsternis	16h 7m		
	Länge	32° 56′	östlich von Paris
	Breite	33° 5′	südlich „ „
Anfang der totalen Finsternis	17h 2m		
	Länge	19° 29′	östlich von Paris
	Breite	35° 35′	südlich „ „
Ende der totalen Finsternis	20h 30m		
	Länge	145° 27′	östlich von Paris
	Breite	20° 53′	nördlich „ „
Ende der partiellen Finsternis	21h 25m		
	Länge	131° 59′	östlich von Paris
	Breite	23° 27′	nördlich „ „

---

e) Ueber die Wiederkehr der Finsternisse.

Frage 123. Wovon hängt die Vorausbestimmung einer Finsternis ab?

Antwort. Eine Finsternis kann nur dann stattfinden, wenn einerseits der Mond in der Nähe des Knotens und andererseits in den Syzygien ist. Demnach wird die periodische Wiederkehr der Finsternisse nicht nur von der Länge des synodischen Monats, sondern auch von jener des drakonischen abhängig sein.

Da nun der drakonische Monat gleich:

27,21222 Tagen

der synodische gleich:

29,53059 Tagen

ist, so folgt, dass wenn einmal der Mond in den Syzygien, z. B. bei der Konjunktion im Knoten war, er das nächste Mal schon zwei Tage vor der Konjunktion in den Knoten kommen wird.

Fragen wir, nach wie viel drakonischen Monaten x und synodischen y wieder der Mond in die Syzygien und in die Knoten kommt, so muss offenbar:

$$x \cdot 27{,}21222 = y \cdot 29{,}53059$$

Es wird demnach dieses nach:

$$x \cdot 27{,}21222 \text{ Tagen}$$

stattfinden. Nun findet man (siehe Erkl. 270) für x und y die Werte:

$$\begin{array}{llllllll} x & 12, & 13, & 38, & 51, & 242, & 777 & \cdots \\ y & 11, & 12, & 35, & 47, & 223, & 716 & \cdots \end{array}$$

und es wird z. B.:

$$\left.\begin{array}{l} 223\,y = 6585{,}32 \\ 242\,x = 6585{,}36 \end{array}\right\} \text{Differenz } 0{,}04$$

$$\left.\begin{array}{l} 716\,y = 21143{,}90 \\ 777\,x = 21143{,}89 \end{array}\right\} \text{Differenz } 0{,}01$$

Die erste oder Sarosperiode umfasst:

$$6585\,\frac{1}{3} \text{ Tage}$$

oder:

$$18 \text{ Jahre } 10\,\frac{1}{3} \text{ bis } 11\,\frac{1}{3} \text{ Tage}$$

(je nachdem vier oder fünf Schaltjahre in den 18 Jahren vorkommen).

War z. B. 1848 März 5,1 eine Finsternis, so wird sich auch in:

$$1848 \text{ März } 5{,}1 + 18 \text{ Jahre } 11\,\frac{1}{3} \text{ Tagen}$$

d. h.:

$$1866 \text{ März } 16{,}4 = 16. \text{ März } 9^h\,36^m$$

und

$$1866 \text{ März } 16{,}4 + 18 \text{ Jahre } 10\,\frac{1}{3} \text{ Tagen}$$

d. h.:

$$1884 \text{ März } 26{,}7 = 26. \text{ März } 16^h\,48^m$$

Erkl. 269. Nehmen wir einmal an, der synodische Monat wäre genau gleich dem drakonischen, dann gäbe es bei jedem Umlauf entweder eine Sonnen- und Mondfinsternis oder nie eine solche. Es würde dann immer eine Finsternis geben, wenn der Mond in den Syzygien zugleich in den Knoten wäre, was dann immer stattfinden müsste.

Erkl. 270. Die Aufgabe x und y in ganzen Zahlen zu bestimmen, löst die Theorie der Kettenbrüche. Es ist:

$$\frac{27{,}21222}{29{,}53059} = 1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}}}$$

und man findet die Näherungswerte:

$$\frac{12}{11}, \quad \frac{13}{12}, \quad \frac{38}{35}, \quad \frac{51}{47}, \quad \frac{242}{223}, \quad \frac{777}{716} \ldots$$

Erkl. 271. Die von Saros angegebene Periode ist mit einer Ungenauigkeit von:

$$0{,}035893 \text{ Tagen} = 51^m\,41^s\,2$$

Gehen wir daher von einem Vollmond aus, so wird nach 223 synodischen Umläufen wieder Vollmond sein, aber der Mond wird dabei nicht genau in den Knoten fallen, sondern erst in $51^m\,42^s\,2$. In dieser Zeit macht der Mond einen Weg von:

$$\frac{360^0 \cdot 51^m\,42'\,2}{27{,}321582^d} = 28'\,22''\,6$$

Um diesen Betrag wird er vom Knoten abstehen.

Diese den alten Chaldäern bekannte Periode muss auch Thales gekannt haben, der nach dem Zeugnisse von Herodot die Sonnenfinsternis am 28. Mai 585 voraussagen konnte.

genähert stattfinden. In der That waren:

1848	März	5	$2^h\ 25^m$
1866	„	16	$10^h\ 45^m$
1884	„	26	$18^h\ 2^m$

Sonnenfinsternisse zu beobachten. Wie wir sehen, stimmen die Vorausberechnungen ziemlich genau. Weiss man aber einmal den Tag, so kann man die genaue Dauer der Finsternis nach den früher mitgeteilten Vorschriften berechnen.

O. Ueber die Bestimmung einer parabolischen Kometenbahn.

Anmerkung 23. Als die Aufgabe der Bahnbestimmung betrachten wir in diesem Abschnitte das Problem, aus drei gegebenen Beobachtungen eines Kometen seine parabolische Bahn abzuleiten, d. h. alle Bahnelemente anzugeben. Die Behandlung teilen wir in zwei Hälften, indem wir zunächst einige für die Folge wichtigen Formeln und Beziehungen ableiten, sodann das Problem selbst präzissieren und es auf ein Beispiel anwenden. Die in diesem Abschnitte behandelte Methode ist unter dem Namen der Olbers'schen bekannt. Beim Studium ist der Anfang der Abschnitt b) zuerst zu lesen und dann a) zu studieren, worauf man wiederum zum genauen Studium von b) übergehen kann.

a) Ueber einige wichtige Relationen.

Frage 124. Wie lässt sich die von dem Perihel aus vom Radiusvektor beschriebene Fläche durch die wahre Anomalie allein ausdrücken?

Antwort. Wir fanden für das Flächenelement den allgemeinen Ausdruck:

$$df = \frac{1}{2} r^2 dv$$

Da nun bei der Parabel $e = 1$ ist, also:

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2\cos^2\frac{v}{2}}$$

so folgt:

$$r^2 dv = \frac{p^2 dv}{4\cos^2\frac{v}{2}}$$

Diesen Ausdruck wollen wir noch anders schreiben. Es ist offenbar (vergl. Erkl. 85):

$$\frac{d \cdot \operatorname{tg}\frac{v}{2}}{dv} = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{v_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\frac{v_1}{2} - \frac{v}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{v_1 - v}{2}}{\frac{v_1 - v}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{v_1}{2}\cdot\cos\frac{v}{2}}$$

wobei rechter Hand $v_1 = v$ zu setzen ist. Da nun (vergleiche Erkl. 273):

$$\frac{\sin\frac{v_1 - v}{2}}{\frac{v_1 - v}{2}} = 1$$

Erkl. 272. Es ist:

$$\frac{1}{1+\cos v} = \frac{1}{1+\cos\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\cos^2\frac{v}{2} - \sin^2\frac{v}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\cos^2\frac{v}{2} - \left(1-\cos^2\frac{v}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}$$

Erkl. 273. Für kleine Winkel wird:

$$\sin\alpha = \alpha \sin 1''$$

also:

$$\sin\alpha - \alpha = \alpha\,(1 - \sin 1'')$$

d. h. wenn $\alpha = 0$ wird:

$$\sin\alpha - \alpha = 0$$

also auch:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

wenn $\alpha = 0$ ist.

Erkl. 274. Es ist:

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}}} = \frac{\cos^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}}$$

$$= \cos^2\frac{v}{2}$$

Erkl. 275. Denn dann ist:

$$f_1 - f = \frac{p^2}{2}\left[(x_1 - x) + \frac{1}{3}(x_1^3 - x^3)\right]$$

$$= \frac{p^2}{2}(x_1 - x)\left[1 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x x_1 + x^2)\right]$$

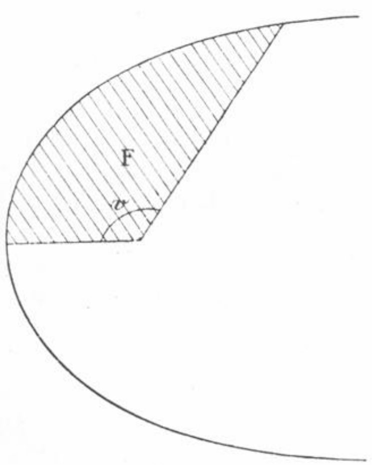
oder:

$$\frac{f_1 - f}{x_1 - x} = \frac{p^2}{2}\left[1 + \frac{1}{3}(x_1^2 + x x_1 + x^2)\right]$$

wird nun $f = f_1$, $x = x_1$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{p^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot 3x^2\right)$$

Figur 138.



so folgt:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}}{dv} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}$$

oder:

$$\frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}} = d\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}$$

Da nun:

$$r^2 dv = \frac{p^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}\,\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}}$$

so folgt:

$$r^2 dv = \frac{p^2}{2}\,\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}}$$

oder:

$$r^2 dv = \frac{p^2}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\right) d\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}$$

demnach auch:

$$df = \frac{p^2}{4}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{v}{2}\right) d\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}$$

Setzen wir:

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2} = x$$

so folgt weiter:

$$\frac{df}{dx} = \frac{p^2}{2}(1 + x^2)$$

Demnach kann f nur von der Form:

$$f = \frac{p^2}{2}\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)$$

sein. Wir erhalten also:

$$175) \;\ldots\; F = \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{v}{2}\right)$$

als den Ausdruck für die Parabelfläche vom Perihel bis zum Radiusvektor, der zu der wahren Anomalie v gehört (vergl. Figur 138).

Frage 125. Zu welchen Resultaten führt die soeben entwickelte Relation?

Antwort. Vermittels der soeben entwickelten Gleichung sind wir sofort im stande, den Flächeninhalt eines beliebigen Parabelsektors BAA' durch die wahre Anomalie allein auszudrücken. Es wird, da:

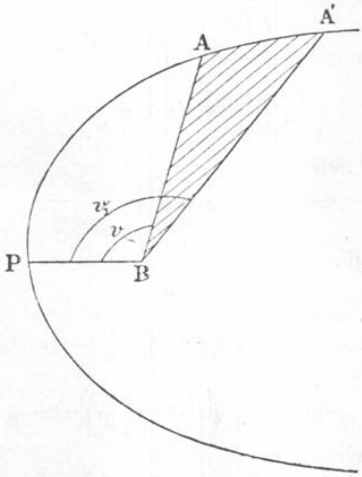
$$BAA' = PBA' - PBA$$

offenbar:

$$BAH' = \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{tg}\frac{v_1}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{v_1}{2}\right)$$

$$- \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\frac{v}{2}\right)$$

Figur 139.



Nun wissen wir aber, dass bei den Planeten und allen Angehörigen unseres Sonnensystems ein solcher Flächenraum der Zeit proportional ist, dass also:

$$BAA' = \frac{\mu}{2}t$$

wobei t die Zeit ist, welche der Radiusvektor braucht, um von OA zu BA' zu gelangen oder umgekehrt. Wir finden also:

$$\frac{\mu}{2}t = \frac{p^2}{\psi}\left[\operatorname{tg}\frac{v_1}{2} - \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3\frac{v_1}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right)\right]$$

Diese Gleichung wollen wir umformen. Setzen wir:

$$\operatorname{tg}\frac{v_1}{2} = x_1$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = x$$

so folgt:

$$\mu t = p^2\left[x_1 - x + \frac{1}{3}(x_1{}^3 - x^3)\right]$$

$$= p^2(x_1 - x)\left[1 + \frac{1}{3}(x_1{}^2 + xx_1 + x)\right]$$

oder:

$$\text{a)} \ldots 2\mu t = p^2(x_1 - x)\left[1 + \frac{1}{3}(x_1 - x)^2 + x_1 x\right]$$

Nun ist offenbar (vergleiche Erkl. 276):

$$\text{b)} \ldots 1 + xx_1 = \frac{2\cos\left(\frac{v_1 - v}{2}\right)\sqrt{rr_1}}{p}$$

$$\text{c)} \ldots x_1 - x = \frac{2\sin\left(\frac{v_1 - v}{2}\right)\sqrt{rr_1}}{p}$$

Bezeichnet nun $\varkappa$ die die beiden Radien verbindende Sehne, so wird offenbar:

$$\varkappa^2 = r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1\cos(v_1 - v)$$

oder:

$$\varkappa^2 = (r + r_1)^2 - 4rr_1\cos^2\frac{v_1 - v}{2}$$

woraus:

$$\cos\frac{v_1 - v}{2} = \frac{\sqrt{(r + r_1)^2 - \varkappa^2}}{2\sqrt{rr_1}}$$

folgt, oder wenn man:

$$\sqrt{r + r_1 - \varkappa} = n$$
$$\sqrt{r + r_1 + \varkappa} = m$$

setzt, auch:

$$2\sqrt{rr_1}\cos\frac{v_1 - v}{2} = mn$$

so dass also:

$$\text{d)} \ldots 1 + xx_1 = \frac{mn}{p}$$

wird. Weiter ist:

$$\sin\frac{v_1 - v}{2} = \sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2} - \cos\frac{v_1}{2}\sin\frac{v}{2}$$

Erkl. 276. Es ist:

$$1 + \operatorname{tg}\frac{v_1}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2} + \sin\frac{v_1}{2}\sin\frac{v}{2}}{\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{v_1 - v}{2}}{\cos\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2}}$$

oder da:

$$r_1 = \frac{\frac{p}{2}}{\cos^2\frac{v_1}{2}}$$

also:

$$\cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{p}{2r_1}}$$

auch:

$$1 + \operatorname{tg}\frac{v_1}{2}\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{2}{p}\cos\left(\frac{v_1 - v}{2}\right)\sqrt{rr_1}$$

ebenso ist die zweite Formel abzuleiten.

Erkl. 277. Es ist allgemein:

$$\varkappa^2 = r^2 + r_1{}^2 \pm 2rr_1\cos(v_1 - v)$$

je nachdem:

$$v_1 - v \gtreqless 90^0$$

wir wollen jedoch immer den letzteren Fall voraussetzen.

Erkl. 278.

$$\sin^2\frac{v_1-v}{2}=\left(\sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2}-\cos\frac{v_1}{2}\sin\frac{v}{2}\right)^2$$

$$=\sin^2\frac{v_1}{2}\cos^2\frac{v}{2}$$

$$-\,2\sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v_1}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$+\cos^2\frac{v_1}{2}\sin^2\frac{v}{2}$$

$$=\left(1-\cos^2\frac{v_1}{2}\right)\cos^2\frac{v}{2}$$

$$-\,2\sin\frac{v_1}{2}\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v_1}{2}\sin\frac{v}{2}$$

$$+\left(1-\cos^2\frac{v}{2}\right)\cos^2\frac{v_1}{2}$$

$$=\frac{p}{2r_1}+\frac{p}{2r}-2\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v_1}{2}\cdot\left(\cos\frac{v}{2}\cos\frac{v_1}{2}+\sin\frac{v}{2}\sin\frac{v_1}{2}\right)$$

$$=\frac{p}{2r_1}+\frac{p}{2r}-2\,\frac{p}{2}\,\frac{\cos\frac{v_1-v}{2}}{\sqrt{rr_1}}$$

$$=\frac{p}{2rr_1}\left(r+r_1-2\cos\frac{v_1-v}{2}\sqrt{rr_1}\right)$$

Erkl. 279.

$$2\mu t=p^2\left(\frac{\sqrt{p}\,(m-n)}{p}\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{p}\,(m-n)}{p}\right)^2+\frac{mn}{p}\right]$$

oder:

$$2\mu t=\sqrt{p}\,(m-n)\left[\frac{1}{3}(m-n)^2+mn\right]$$

d. h.:

$$2\mu t=\frac{\sqrt{p}}{3}(m-n)\,(m^2+mn+n)$$

oder:

$$6\mu t=\frac{\sqrt{p}}{3}(m^3-n^3)$$

Erkl. 280. In der physischen Astronomie wird gezeigt, dass eigentlich:

$$\mu=k\sqrt{p}\sqrt{1+m}$$

wobei m die Masse des Himmelskörpers ist, zu dem p gehört. Wir können aber bei den Kometen immer $m=0$ setzen, da ihre Masse sehr gering ist.

also (vergleiche Erkl. 278):

$$\sin^2\frac{v_1-v}{2}=\frac{p}{2rr_1}\left(r+r_1-2\sqrt{rr_1}\cos\frac{v_1-v}{2}\right)$$

oder:

$$\sqrt{rr_1}\sin\frac{v_1-v}{2}=\sqrt{\frac{p}{2}}\sqrt{r+r_1-2\sqrt{rr_1}\cos\frac{v_1-v}{2}}$$

Da nun:

$$r+r_1=\frac{1}{2}(m^2+n^2)$$

$$2\sqrt{rr_1}\cos\frac{v_1-v}{2}=mn$$

so folgt:

$$\sqrt{rr_1}\sin\frac{v_1-v}{2}=\sqrt{\frac{p}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2)-mn}$$

oder:

$$\sqrt{rr_1}\sin\frac{v_1-v}{2}=\sqrt{\frac{p}{4}}\sqrt{m^2+n^2-2mn}$$

d. h.:

$$2\sqrt{rr_1}\sin\frac{v_1-v}{2}=\sqrt{p}\,(m-n)$$

oder:

$$\text{e)}\ \ldots\ x_1-x=\frac{\sqrt{p}\,(m-n)}{p}$$

Setzt man die Werte e) und d) in die Gleichung a) ein, so folgt (vergl. Erkl. 279):

$$\text{f)}\ \ldots\ 6\mu t=\sqrt{p}\,(m^3-n^3)$$

Wir wollen nur noch die Konstante μ etwas näher betrachten. Die Formel 94) lieferte für die Ellipse:

$$\frac{\mu}{2}=\frac{ab\pi}{T}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist aber:

$$1:a^3=365{,}256:T^2$$

wobei 365,256 der Umlaufzeit der Erde und 1 dem Erdradius gleichkommt.

Daher wird:

$$T=365{,}256\,a^{3/2}$$

oder:

$$\frac{\mu}{2}=\frac{b\pi}{365{,}256\sqrt{a}}$$

setzt man noch:

$$\frac{b}{\sqrt{a}}=\sqrt{p}$$

so folgt:

$$\frac{\mu}{2}=\frac{\pi}{365{,}256}\sqrt{p}$$

oder wenn man:

$$k=\frac{\pi}{365{,}256}$$

setzt:

$$\mu=k\sqrt{p}$$

Erkl. 281. Die Grösse k, welche die Gausssche Attraktionskonstante genannt wird, wurde von Gauss eingeführt in seinem epochemachenden Werke „Theoria motus corporum coelestium".

Gauss, Karl Friedrich, zu Braunschweig 1777 am 30. April geboren. Starb als Professor der Mathematik und Direktor der Sternwarte zu Göttingen am 23. Februar 1855.

Sein astronomisches Hauptwerk ist „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium." Hamburgi 1809. Seine übrigen Verdienste sind zu bekannt, als dass sie hier erwähnt werden sollten.

Erkl. 282. Diese Formel findet sich zum erstenmal im 7. Bande der Miscellanea Berolin. von Euler publiziert. Lagrange macht in seiner analyt. Mechanik darauf aufmerksam, dass sie in sehr einfacher Weise aus dem Lemma X des III. Buches der Prinzipia von Newton, abgeleitet werden kann.

Daraus folgt, wenn wir diesen Ausdruck auf die Parabel (die wir ja als eine Ellipse, deren grosse Achse unendlich gross ist, wodurch der Parameter endlich bleibt, da ja dann auch die kleine Achse unendlich gross ist) übertragen:

$$6kt = (m^3 - n^3)$$

oder:

176) . . . $6kt = (r + r_1 + z)^{3/2} - (r + r_1 - z)^{3/2}$

Für die Grösse k hat man nach Gauss:

$$k = 0{,}0172021$$
$$\log k = 8 \cdot 2355814$$

Setzt man:

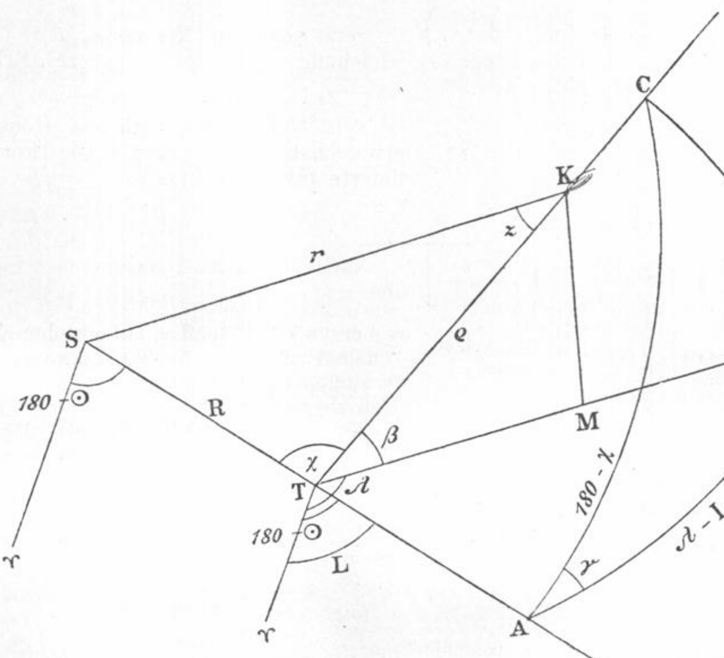
$$k'' = \frac{k}{\operatorname{arc} 1''}$$

so wird nach:

$$\log k'' = 3 \cdot 5500066$$

Die Gleichung 176) ist in der Astronomie unter dem Namen der Lambertschen Gleichung bekannt, obschon sie früher von Euler entwickelt wurde und Lambert sie nur auf Ellipse und Hyperbel ausgedehnt hat.

Figur 140.



Frage 126. Welches sind die wichtigsten der bei der Bahnbestimmung gebrauchten Relationen zwischen den gegebenen und gesuchten Grössen?

Antwort. Sei (vergl. Figur 140) S der Ort der Sonne, T derjenige der Erde und K jener des Kometen, so wird:

Erkl. 283. Dass Kometen gleich den Planeten Angehörige unseres Sonnensystems und nicht irdischer Zugehörigkeit sind, haben Tyge Brahe und Kepler zuerst behauptet. Hevel, der eine grosse Kometographie im Jahre 1668 publizierte, machte es wahrscheinlich, dass die Kometen parabolische oder doch gegen die Sonne konkave Bahnen verfolgen, eine Meinung, die Dörfel 1680 dadurch ergänzte, indem er aus den Beobachtungen des Kometen vom Jahre 1680 auf eine parabolische Bahn mit dem Brennpunkt in der Sonne schloss.

Nachdem nun später durch Newtons Arbeiten diese Vermutungen auf Grund der Beobachtungen zur Gewissheit wurden, versuchte man die Bahn aus den Beobachtungen selbst zu berechnen. Eine ganz merkwürdige Stelle Senecas aus dem grauen Altertum möge hier als besonders interessant angeführt werden. Derselbe sagt: „Wundern wir uns nicht, dass wir die Gesetze des Laufes der Kometen, deren Erscheinung so selten ist, noch nicht erforscht haben. Wir erblicken weder Anfang noch das Ende dieser Bahnen, in denen sie aus unermesslichen Weiten zu uns herniedersteigen. Kaum sind es 1500 Jahre, dass Griechland die Gestirne gezählt und ihnen Namen gegeben hat. Es wird einst der Tag anbrechen, wo man nach Jahrhunderten des Forschens klar erkennen wird, was jetzt verborgen liegt.“

$$SK = r$$
$$ST = R$$
$$TK = \varrho$$

zu setzen sein.

Ferner bezeichnen wir den Winkel am Komet mit z, also:

$$\sphericalangle SKT = z$$

sowie:

$$\sphericalangle STK \text{ mit } \chi$$

Sei $S\Upsilon$ die Richtung nach dem Frühlingspunkte, so wird:

$$\Upsilon ST = 180 - \odot = \Upsilon TA = L$$

Ist nun M die Projektion von K auf die Ebene der Ekliptik, so folgt:

$$\sphericalangle KTL = \beta =$$

geozentrischen Breite des Kometen,

$$\sphericalangle MT\Upsilon = \lambda =$$

geozentrischen Länge des Kometen.

Sei noch γ derjenige Winkel, den die Ebene STK mit der Ekliptik macht, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke ABC:

$$177) \ldots \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda - L)}$$

$$178) \ldots \sin\chi = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$179) \ldots \cos\chi = \cos\beta \cos(\lambda - L)$$

Sodann aus dem ebenen Dreiecke STK:

$$180) \ldots r = \frac{R \sin\chi}{\sin z}$$

$$181) \ldots r = \frac{\varrho \sin\chi}{\sin(\chi + z)}$$

$$182) \ldots r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\chi$$

Frage 127. Wie lautet der Olbers'sche Ausdruck für das Verhältnis zweier Distanzen ϱ und ϱ'' von der Erde?

Erkl. 284. Olbers, Heinrich Wilhelm, geb. 1758 in Arbergen. Starb 1840 zu Bremen, wo er als Arzt lebte. Mit der Astronomie beschäftigte er sich nur in seinen freien Stunden. Seine Hauptleistung ist die von ihm erfundene Relation zwischen zwei Erddistanzen, welche im Jahre 1797 in der „Abhandlung über die leichteste Methode die Bahn eines Kometen zu berechnen,“ die als ein klassisches Werk angesehen werden muss, publiziert wurde.

Antwort. Um den Olbersschen Ausdruck für das Verhältnis zweier Distanzen ϱ und ϱ'' von der Erde abzuleiten, haben wir folgende Ueberlegung anzustellen.

Es sei (vergl. Figur 141) S der Sonnenort, sowie K, $K_,$, $K_{,,}$ die drei beobachteten Kometenorte, welche zu den Beobachtungszeiten t, $t_,$, $t_{,,}$ gehören.

Dann ist offenbar nach dem zweiten Keplerschen Gesetze:

$$\frac{\text{Sektor } KSK_,}{\text{Sektor } K_,SK_{,,}} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t_,}$$

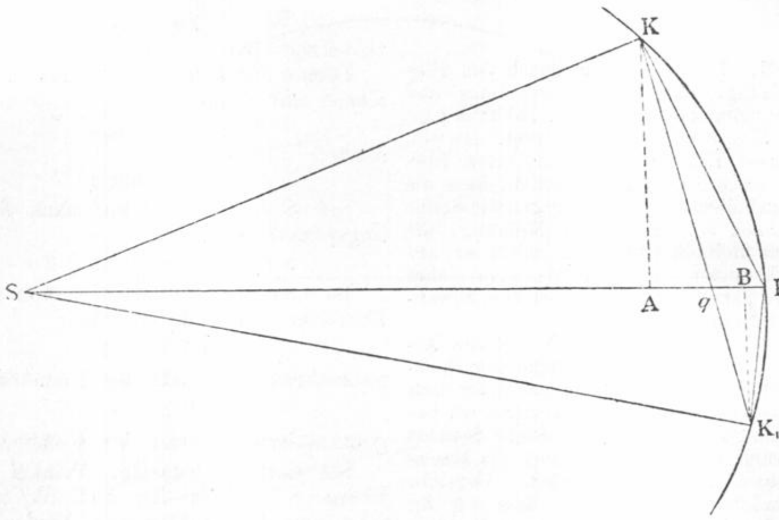
Erlaubt man sich statt der Sektoren die Dreiecke zu setzen, so wird auch:

$$\frac{\text{Dreieck } KSK_,}{\text{Sektor } K_,SK_{,,}} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t_,}$$

Nun ist:

$$\text{Dreieck } KSK_, = \frac{1}{2} SK_, \cdot AK$$

Figur 141.



Dreieck $K, S K,, = \frac{1}{2} S K, \cdot B K,,$

also wird auch:

$$\frac{A K,}{B K,,} = \frac{t, - t}{t,, - t,}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A K q$ $B K,, q$ folgt aber:

$$\frac{A K}{B K,,} = \frac{K q}{q K,,}$$

so dass auch:

$$\frac{K q}{q K,,} = \frac{t, - t}{t,, - t,}$$

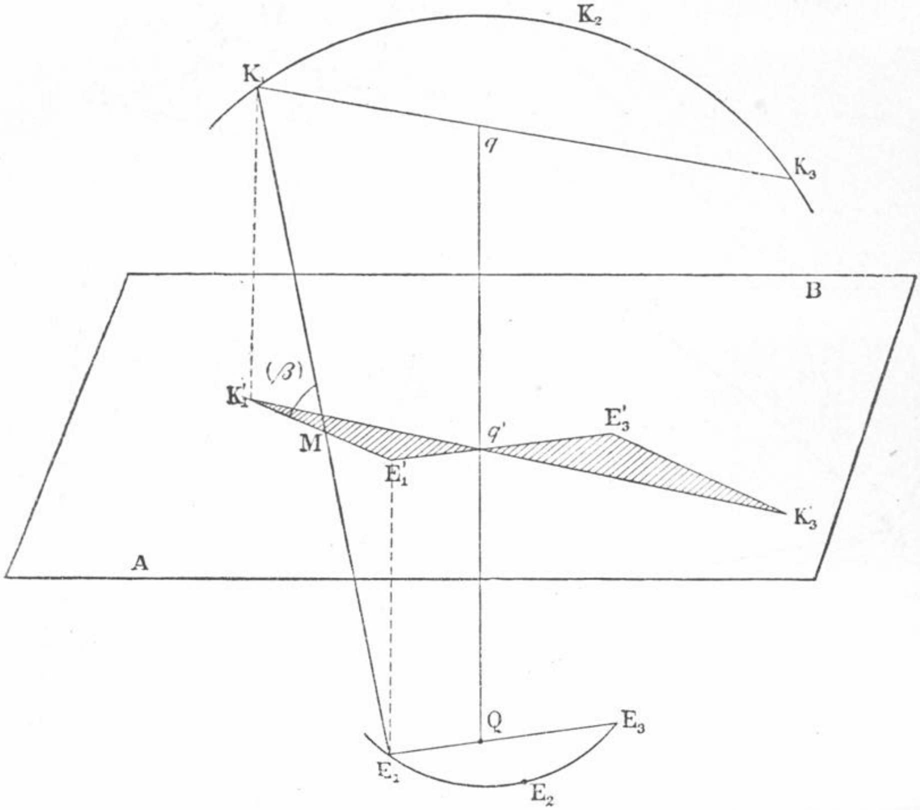
Da man dasselbe auch von der Erdsehne beweisen kann, so folgt hieraus die fundamentale Bemerkung: dass die Sehne zwischen den beiden äusseren Oertern, sowohl bei den Kometen als auch bei der Erde, vom mittleren Radiusvektor sehr nahe im Verhältnis der Zwischenzeiten geschnitten wird.

Seien nun (vergl. Figur 142) K_1, K_2, K_3 die drei Kometenorte und E_1, E_2, E_3 die ihnen entsprechenden Erdorte, ferner q und Q die Schnittpunkte der Sehnen mit dem mittleren Radiusvektor, so ist nach dem soeben bewiesenen Satze:

$$\frac{K_1 q}{q K_3} = \frac{E_1 Q}{Q E_3} = \frac{t, - t}{t,, - t,}$$

Denkt man sich nun die beiden Sehnen auf eine Ebene $A B_1$, welche auf der Richtung $q Q$ senkrecht steht, projiziert, so schneiden sich die Projektionen in einem Punkte q' und es wird wieder:

Figur 142.



$$\frac{q' K_1'}{q' K_3'} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t}$$
$$\frac{q' E_1'}{q' E_3'} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t}$$

und demnach:

$$\triangle\, q' K_1' E_1' \sim \triangle\, q' K_3' E_3'$$

woraus:

$$\frac{K_1' E_1'}{K_3' E_3'} = \frac{q' E_1'}{q' E_3'} = \frac{q' K_1'}{q' K_3'}$$

also auch:

$$\frac{K_1' E_1'}{K_3' E_3'} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t}$$

folgt. Nun ist aber $K_1' E_1'$ nichts anderes als die Projektionen von $E_1 K_1 = \varrho$ auf die Ebene AB, also wenn (β) der Projektionswinkel ist:

$$K_1' E_1' = \varrho \cos(\beta)$$

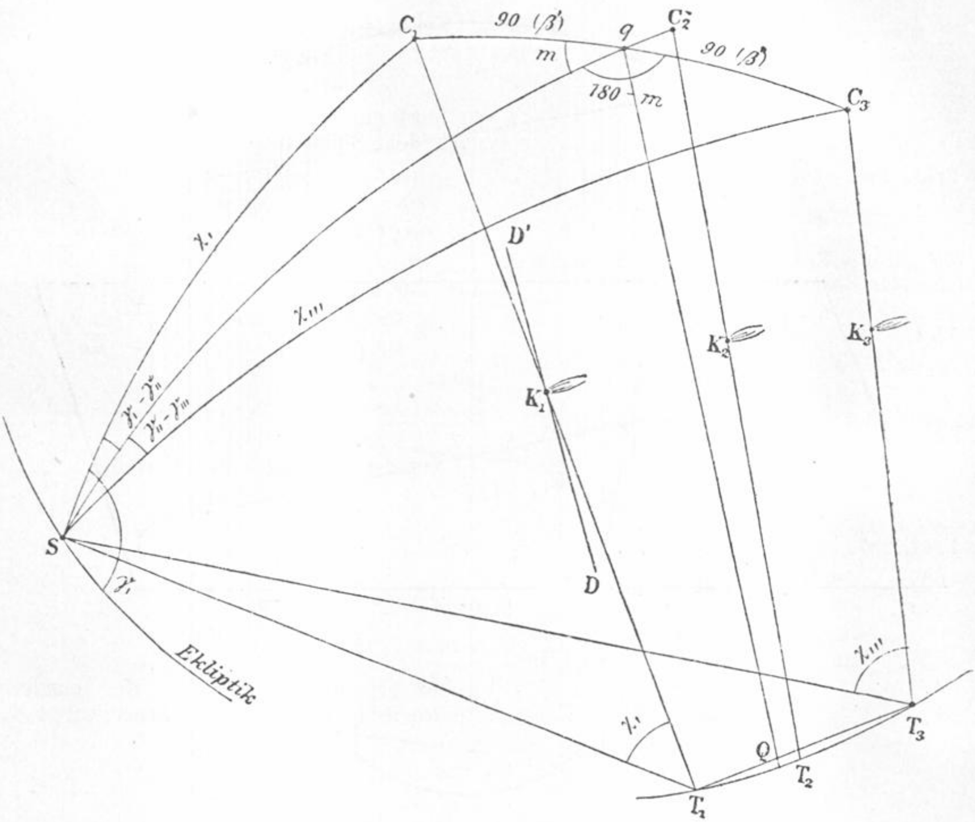
Ebenso folgt, wenn $E_3 K_3 = \varrho''$ gesetzt wird:

$$K_3' E_3' = \varrho'' \cos(\beta'')$$

So dass also:

$$\frac{\varrho \cos(\beta)}{\varrho'' \cos(\beta'')} = \frac{t_, - t}{t_{,,} - t_,}$$

Figur 143.



Erkl. 285. Um einzusehen, dass $Cq = 90 - (\beta)$, beachte man zunächst, dass wenn man durch K_1 den Kometenort:

$$DD' \parallel Qq$$

zieht, der Punkt D' mit dem Punkte q an der Himmelskugel zusammenfallen muss, weil alle parallele Strahlen, die wir im Bereiche des Sonnensystems ziehen können auf der scheinbaren Himmelskugel, wegen ihrer ungeheuren Entfernung in einem Punkte zusammenfallen.

Also wird:

$C_1 q$ der Winkel zwischen DK_1 und $C_1 K_1$

Da nun die Projektionsebene AB senkrecht auf Qq, also auch senkrecht auf $K_1 D$ steht und $K_1 C_1$ mit ihr einen Winkel (β) einschliesst, so muss der Winkel:

$$D' K_1 C_1 = 90 - (\beta)$$

also auch:

$$q C_1 = 90 - (\beta)$$

oder:

$$\varrho'' = \frac{t_{,,} - t_{,}}{t_{,} - t} \; \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')} \varrho$$

Setzen wir:

$$M = \frac{t_{,,} - t_{,}}{t_{,} - t} \; \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')}$$

so folgt:

$$183) \;\ldots\; \varrho'' = M\varrho$$

Wir wollen nun zeigen, wie sich M aus den Beobachtungen berechnen lässt. Sei zu diesem Zwecke (vergl. Figur 143) S der Sonnenort der mittleren Beobachtung projiziert auf die Himmelskugel um C_1, C_2, C_3 die Projektionen der Kometenorte, so wird offenbar:

$$Cq = 90 - (\beta)$$
$$C_3 q = 90 - (\beta'')$$

Wir haben also:

$$\sin qC = \sin[90 - (\beta)] = \cos(\beta)$$
$$\sin qC_3 = \sin[90 - (\beta'')] = \cos(\beta'')$$

Bezeichnen wir nun die Winkel, die die Richtungen $C_3 S$, $C_2 S$, $C_1 S$ mit der Ekliptik machen, mit $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,}$, so wird offenbar:

$$\sphericalangle\, C_3 S C_2 = \gamma_{,,} - \gamma_{,,,}$$
$$\sphericalangle\, C_2 S C = \gamma_{,} - \gamma_{,,}$$

Sei wie gewöhnlich:

$$\sphericalangle\, S T_1 C_1 = \chi_{,}$$
$$\sphericalangle\, S T_3 C_3 = \chi_{,,,}$$

so folgt aus den Dreiecken SC_1q und SC_3q nach dem Sinussatze:

$$\frac{\sin q C_1}{\sin \chi_1} = \frac{\sin(\gamma_{,} - \gamma_{,,})}{\sin m}$$
$$\frac{\sin q C_3}{\sin \chi_{,,,}} = \frac{\sin(\gamma_{,} - \gamma_{,,,})}{\sin(180 - m)} = \frac{\sin(\gamma_{,,} - \gamma_{,,,})}{\sin m}$$

also durch Division:

$$\frac{\sin q C_1}{\sin q C_3} = \frac{\sin(\gamma_{,} - \gamma_{,,})}{\sin(\gamma_{,,} - \gamma_{,,,})} \cdot \frac{\sin \chi_{,,,}}{\sin \chi_{,}}$$

oder:

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta_{,,})} = \frac{\sin \chi_{,,,}}{\sin \chi_{,}} \cdot \frac{\sin(\gamma_{,} - \gamma_{,,})}{\sin(\gamma_{,,} - \gamma_{,,,})}$$

Nun ist aber nach der Formel:

$$\sin \chi_{,} = \frac{\sin \beta_{,}}{\sin \gamma_{,}}$$
$$\sin \chi_{,,,} = \frac{\sin \beta_{,,,}}{\sin \gamma_{,,,}}$$

ferner:

$$\operatorname{tg} \gamma_{,} = \frac{\operatorname{tg} \beta_{,}}{\sin(\odot_{,,} - \lambda_{,})}$$

wobei $\odot_{,,}$ die Sonnenlänge der mittleren Beobachtung bezeichnet. Ebenso wird:

$$\operatorname{tg} \gamma_{,,} = \frac{\operatorname{tg} \beta_{,,}}{\sin(\odot_{,,} - \lambda_{,,})}$$
$$\operatorname{tg} \gamma_{,,,} = \frac{\operatorname{tg} \beta_{,,,}}{\sin(\odot_{,,} - \lambda_{,,,})}$$

Setzt man diese Werte in die letzte Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta_{,,})} = \frac{\cos \beta_{,}}{\cos \beta_{,,,}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{,} \sin(\lambda' - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,} \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,} \sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$$

so dass:

$$184) \ldots M = \frac{t_{,,} - t_{,}}{t_{,} - t} \cdot \frac{\cos \beta_{,}}{\cos \beta_{,,,}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{,} \sin(\lambda_{,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,} \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,} \sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$$

Erkl. 286. Die Formel 177) liefert:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\lambda - L)}$$

Da nun die Erdlänge L zu der Sonnenlänge in folgender Beziehung steht:

$$L = \odot + 180^0$$

so folgt:

$$\sin(\lambda - L) = \sin[\lambda - (\odot + 180^0)]$$
$$= \sin(\odot - \lambda)$$

und damit die angewendete Formel.

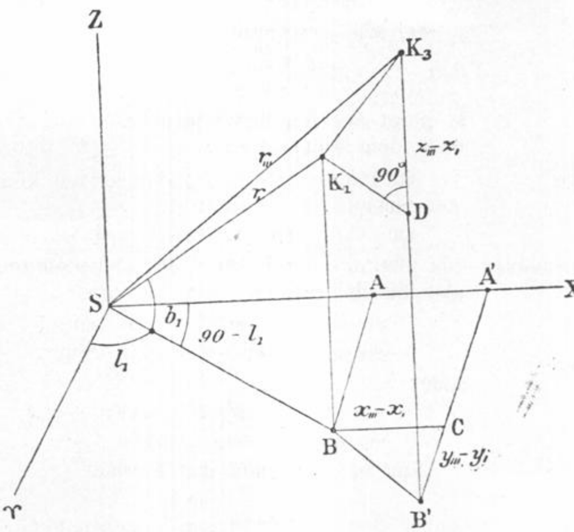
Erkl. 287. Es ist:

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta_{,,})} = \frac{\sin \beta_{,}}{\sin \beta_{,,,}} \cdot \frac{\sin \gamma_{,,,}}{\sin \gamma_{,}} \cdot \frac{\sin(\gamma_{,} - \gamma_{,,})}{\sin(\gamma_{,,} - \gamma_{,,,})}$$
$$= \frac{\sin \beta_{,}}{\sin \beta_{,,,}} \cdot \frac{\sin \gamma_{,,,}}{\sin \gamma_{,}} \cdot \frac{\sin \gamma_{,,} \cos \gamma_{,} - \cos \gamma_{,,} \sin \gamma_{,}}{\sin \gamma_{,,,} \cos \gamma_{,,} - \cos \gamma_{,,,} \sin \gamma_{,,}}$$

Frage 128. Wie lässt sich die Sehne als alleinige Funktion der unbekannten Entfernung ϱ der Erde vom Kometen berechnen?

Antwort. Um die Sehne als alleinige Funktion der unbekannten Erdentfernung ϱ vom Kometen darzustellen, denke man sich von der Sonne aus eine Gerade nach dem Frühlingspunkte gezogen ($S\Upsilon$ in der Figur 144), sodann eine zweite dort, wo die heliozentrische Länge 90^0 wird (SX), und endlich eine dritte (SZ) senkrecht auf diese beiden Richtungen. Der Kometenort der ersten und der dritten Beobachtung sei K_2 und K_3.

Figur 144.



Zieht man SK_1 und SK_3, so wird offenbar:

$$SK_1 = r_{,},$$
$$SK_3 = r_{,,,}$$

Ferner:

$$K_1 K_3 = \varkappa$$

gleich der Kometensehne.

Denkt man sich K_1 und K_3 auf die Ebene ΥSX projiziert, so erhält man die Projektionen B und B'. Sei nun:

$$BA \parallel S\Upsilon$$
$$B'A' \parallel S\Upsilon$$

gezogen, ferner:

$$BC \parallel SX$$
$$K_1 D \parallel BB'$$

so folgt zunächst, wenn man:

$$SA = x_{,}, \qquad SA' = x_{,,,}$$
$$AB = y_{,}, \qquad A'B' = y_{,,,}$$
$$BK_1 = z_{,}, \qquad B'K_3 = z_{,,,}$$

setzt, wegen:

$$BC = x_{,,,} - x_{,}, \qquad CB' = y_{,,,} - y_{,},$$

offenbar:

$$BB'^2 = (x_{,,,} - x_{,})^2 + (y''' - y_{,})^2$$

Da nun:

$$BB' = K_1 D$$

und

$$(K_1 D)^2 + (DK_3)^2 = (K_1 K_3)^2$$

auch:

$$(K_1 K_3)^2 = (x_{,,,} - x_{,})^2 + (y_{,,,} - y_{,})^2 + (z_{,,,} - z_{,})^2$$

oder:

$$\varkappa^2 = (x_{,,,} - x_{,})^2 + (y_{,,,} - y_{,})^2 + (z_{,,,} - z_{,})^2$$

Nun ist:

$$SB = r_{,} \cos b_{,}$$
$$SA = x_{,} = r_{,} \cos b_{,} \sin l_{,}$$
$$BA = y_{,} = r_{,} \cos b_{,} \cos l_{,}$$
$$BK_1 = z_{,} = r_{,} \sin b_{,}$$

und ebenso:

$$SA' = x_{,,,} = r_{,,,} \cos b_{,,,} \sin l_{,,,}$$
$$B'A' = y_{,,,} = r_{,,,} \cos b_{,,,} \cos l_{,,,}$$
$$B'K_3 = z_{,,,} = r_{,,,} \sin b_{,,,}$$

Nach den Formeln 112a) folgt aber auch:

$$x_{,} = R_{,} \sin L_{,} + \varrho_{,} \cos \beta_{,} \sin \lambda_{,}$$
$$y_{,} = R_{,} \cos L_{,} + \varrho_{,} \cos \beta_{,} \cos \lambda_{,}$$
$$z_{,} = \varrho_{,} \sin \beta_{,}$$
$$x_{,,,} = R_{,,,} \sin L_{,,,} + \varrho_{,,,} \cos \beta_{,,,} \sin \lambda_{,,,}$$
$$y_{,,,} = R_{,,,} \cos L_{,,,} + \varrho_{,,,} \cos \beta_{,,,} \cos \lambda_{,,,}$$
$$z_{,,,} = \varrho_{,,,} \sin \beta_{,,,}$$

Da nun nach der Formel:

$$\varrho_{,,,} = M \varrho_{,}$$

ist, so ist offenbar damit $\varkappa$ als alleinige Funktion von $\varrho_{,}$ gegeben, weil alle übrigen

Grössen durch die Beobachtungen gegeben sind.

Als weitere aus der Figur 144 unmittelbar zu entnehmende Relationen seien angeführt:

$$r_,^2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2$$
$$r_{,,,}^2 = x_{,,,}^2 + y_{,,,}^2 + z_{,,,}^2$$

Auch diese beiden Radienvektoren können auf Grund der Gleichung:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho,$$

als alleinige Funktionen der Uebekannten $\varrho,$ dargestellt werden. Man hat also:

$$r_,^2 = A + B\varrho_, + C\varrho_,^2$$
$$r_{,,,}^2 = A' + B'\varrho_, + C'\varrho_,^2$$
$$\varkappa^2 = A'' + B''\varrho_, + C''\varrho_,^2$$

wobei die Koëffizienten:

$$\begin{matrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{matrix}$$

durch die Beobachtungen gegeben sind.

b) Ueber die Bahnberechnung.

Frage 129. Welches sind die Grundlagen der Bahnberechnung?

Antwort. Im vorhergehenden Abschnitte haben wir gezeigt, dass:

$$r_,^2 = A + B\varrho_, + C\varrho_,^2$$
$$r_{,,,}^2 = A' + B'\varrho_, + C'\varrho_,^2$$
$$\varkappa^2 = A'' + B''\varrho_, + C''\varrho_,^2$$

ist, wobei die Koëffizienten:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{matrix}$$

durch Beobachtungen gegeben sind. Wir haben auch gesehen, dass die Grössen:

$$\varkappa \quad r_, \quad r_{,,,}$$

jederzeit die Gleichung:

$$6k(t_{,,,} - t_,) = (r_, + r_{,,,} + \varkappa)^{3/2} - (r + r_{,,,} - \varkappa)^{3/2}$$

erfüllen müssen. Wir haben also vier Unbekannte:

$$r_, \quad r_{,,,} \quad \varkappa \quad \varrho_,$$

und auch vier Gleichungen, demnach können die Grössen:

$$r_, \quad r_{,,,} \quad \varkappa \quad \varrho_,$$

gefunden werden.

Dann ist aber auch wegen:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho,$$

zugleich $\varrho_{,,,}$ gegeben und infolge der Gleichungen 112a) zugleich:

$$\begin{matrix} l_, & l_{,,,} \\ b_, & b_{,,,} \end{matrix}$$

woraus wir auf bekannte Weise sofort alle Elemente der Bahn herleiten können.

Stellen wir also alles übersichtlich zusammen, so ergibt sich folgendes Schema zur Bestimmung einer Kometenbahn:

Seien:

$t_,$	$t_{,,}$	$t_{,,,}$	die drei Beobachtungszeiten
$\lambda_,$	$\lambda_{,,}$	$\lambda_{,,,}$	die drei beobachteten geozentrischen Längen
$\beta_,$	$\beta_{,,}$	$\beta_{,,,}$	die drei beobachteten geozentrischen Breiten
$\varrho_,$		$\varrho_{,,,}$	die Abstände von der Erde
$\odot_,$	$\odot_{,,}$	$\odot_{,,,}$	die drei Sonnenlängen
$R_,$	$R_{,,}$	$R_{,,,}$	die drei Radienvektoren der Erde

Man berechne:

$$M = \frac{t_{,,,} - t_{,,}}{t_{,,} - t_,} \frac{\cos\beta_,}{\cos\beta'''} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_, - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_,\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$$

sodann:

$$R_,\sin L_, = n_, \qquad R_{,,,}\sin L_{,,,} = n_{,,,}$$
$$R_,\cos L_, = m_, \qquad R_{,,,}\cos L_{,,,} = m_{,,,}$$
$$\cos\beta_,\sin\lambda_, = p_, \qquad \cos\beta_{,,,}\sin\lambda_{,,,} = p_{,,,}$$
$$\cos\beta_,\cos\lambda_, = q_, \qquad \cos\beta_{,,,}\cos\lambda_{,,,} = q_{,,,}$$
$$\sin\beta_, = s_, \qquad \sin\beta_{,,,} = s_{,,,}$$

Alsdann rechne man mit einem angenommenen Wert von $\varrho_,$ folgende Grössen:

$$\varrho_{,,,} = M\varrho_,$$
$$x_, = n_, + \varrho_, p_, \qquad x_{,,,} = n_{,,,} + \varrho_{,,,} p_{,,,}$$
$$y_, = m_, + \varrho_, q_, \qquad y_{,,,} = m_{,,,} + \varrho_{,,,} q_{,,,}$$
$$z_, = s_, \varrho_, \qquad z_{,,,} = s_{,,,} \varrho_{,,,}$$

ferner:

$$r_, = \sqrt{x_,^2 + y_,^2 + z_,^2}$$
$$r_{,,,} = \sqrt{x_{,,,}^2 + y_{,,,}^2 + z_{,,,}^2}$$
$$\varkappa = \sqrt{(x_{,,,} - x_,)^2 + (y_{,,,} - y_,)^2 + (z_{,,,} - z_,)^2}$$

und untersuche, ob diese Grössen der Gleichung:

$$(r_, + r_{,,,} + \varkappa)^{3/2} - (r_, + r_{,,,} - \varkappa)^{3/2} = 6k(t_{,,,} - t_,)$$

genügen.

Ist dieses der Fall, so hat man den wahren Wert von $\varrho_,$ angenommen. Ist dieses nicht der Fall, so muss $\varrho_,$ so lange abgeändert werden, bis man auf einen solchen Wert kommt, der in die Rechnung eingeführt der letzten Gleichung Genüge leistet.

Mit diesem Werte rechnet man aus:

$$x_, = n_, + \varrho_, p_, = r_, \cos b_, \sin l_,$$
$$y_, = m_, + \varrho_, q_, = r_, \cos b_, \cos l_,$$

zunächst:

$$\operatorname{tg} l_, = \frac{x_,}{y_,}$$

sodann:

$$\sin b_, = \frac{z_,}{r_,}$$

und ebenso:

$$\operatorname{tg} l_{,,,} = \frac{x_{,,,}}{y_{,,,}}$$

$$\sin b_{,,,} = \frac{z_{,,,}}{r_{,,,}}$$

Sodann hat man nach der Formel 113):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}[(l_{,}+l_{,,,})-\Omega]=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(l_{,}-l_{,,,})\frac{\sin(b_{,}+b_{,,,})}{\sin(b_{,}-b_{,,,})}$$

woraus sich:

$$\Omega$$

die Knotenlänge ergibt.

Damit nach der Formel 111):

$$\operatorname{tg} i=\frac{\operatorname{tg} b}{\sin(l_{,}-\Omega)}$$

Die Formel 116) liefert weiter:

$$\operatorname{tg}(v_{,}-w)=\frac{\operatorname{tg}(l_{,}-\Omega)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg}(v_{,,,}-w)=\frac{\operatorname{tg}(l_{,,,}-\Omega)}{\cos i}$$

woraus:

$$v_{,}-w$$

$$v_{,,,}-w$$

also:

$$v_{,}-v_{,,,}$$

d. h. die Differenz der wahren Anomalien abgeleitet werden kann.

Ferner wird, wenn man $\frac{p}{2}=q$ setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{v_{,}}{2}=\frac{1}{\sqrt{r_{,}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{v_{,,,}}{2}=\frac{1}{\sqrt{r_{,,,}}}$$

also:

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\cos\frac{v_{,}}{2}+\cos\frac{v_{,,,}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{r_{,}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{,,,}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\cos\frac{v_{,}}{2}-\cos\frac{v_{,,,}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{r_{,}}}-\frac{1}{\sqrt{r_{,,,}}}$$

also durch Division:

$$\operatorname{ctg}\frac{v_{,}+v_{,,,}}{4}=\frac{\sqrt{r_{,,,}}-\sqrt{r_{,}}}{\sqrt{r_{,,,}}+\sqrt{r_{,}}}\operatorname{tg}\frac{v_{,}-v_{,,,}}{4}$$

Daraus ergibt sich:

$$v_{,}+v_{,,,}$$

was mit dem früheren Werte von:

$$v_{,}-v_{,,,}$$

verbunden:

$$v_{,}\text{ und }v_{,,,}$$

liefert. Sodann ist:

$$q=r_{,}\cos^2\frac{v_{,}}{2}$$

ferner, da:

$$v_{,}-w$$

und $v_{,}$ bekannt, ist auch w bekannt, d. h.:

$$w=\pi-\Omega$$

und demnach, weil Ω bekannt ist:

$$\pi=w+\Omega$$

Frage 130. Was versteht man unter kurtierten Erddistanzen?

Antwort. Gauss hat eine Modifikation der vorhergehenden Formeln eingeführt, wobei er an die Stelle der einfachen Erddistanzen $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$, $\varrho_{,,,}$ die Grössen:

$$\varrho_{,} \cos\beta_{,} \qquad \varrho_{,,} \cos\beta_{,,} \qquad \varrho_{,,,} \cos\beta_{,,,}$$

einführt, welche er kurtierte Erddistanzen nennt.

Bezeichnet man diese mit:

$$\varrho_{,} \qquad \varrho_{,,} \qquad \varrho_{,,,}$$

und benützt die früheren Bezeichnungen, so wird:

$$M = \frac{t_{,,,} - t_{,,}}{t_{,,} - t_{,}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{,,} \sin(\lambda_{,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,} \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,,} \sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,} \sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$$

ferner ergibt sich:

$$r_{,}^2 = (\varrho_{,} \cos\lambda_{,} - R_{,} \cos\odot')^2 + (\varrho_{,} \sin\lambda_{,} - R_{,} \sin\odot_{,})^2 + \varrho_{,}^2 \operatorname{tg}^2\beta_{,}$$

$$r^2_{,,,} = (M\varrho_{,} \cos\lambda_{,,,} - R_{,,,} \cos\odot_{,,,})^2 + (M\varrho_{,} \sin\lambda_{,,,} - R_{,,,} \sin\odot_{,,,})^2 + M^2\varrho_1^2 \operatorname{tg}^2\beta_{,,,}$$

$$\begin{aligned} \varkappa^2 = {} & (M\varrho_{,} \cos\lambda_{,,,} - \varrho_{,} \cos\lambda_{,} - R_{,,,} \cos\odot_{,,,} + R_{,} \cos\odot_{,})^2 \\ & + (M\varrho_{,} \sin\lambda_{,,,} - \varrho_{,} \sin\lambda_{,} - R_{,,,} \sin\odot_{,,,} + R_{,} \sin\odot_{,})^2 \\ & + (M\varrho_{,} \operatorname{tg}\beta_{,,,} - \varrho_{,} \operatorname{tg}\beta_{,})^2 \end{aligned}$$

Rechnet man die Klammerausdrücke wirklich aus, so folgt:

$$r_{,}^2 = \frac{\varrho_{,}^2}{\cos\beta_{,}^2} - 2R\varrho_{,} \cos(\lambda_{,} - \odot_{,}) + R_{,}^2$$

$$r^2_{,,,} = \frac{M^2\varrho_{,}^2}{\cos\beta^2_{,,,}} - 2M\varrho_{,} R_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \odot_{,,,}) + R^2_{,,,}$$

Setzt man also:

$$\cos\psi_{,} = \cos\beta_{,} \cos(\lambda_{,} - \odot_{,})$$
$$\cos\psi_{,,,} = \cos\beta_{,,,} \cos(\lambda_{,,,} - \odot_{,,,})$$
$$R_{,} \sin\psi_{,} = B_{,}$$
$$R_{,,,} \sin\psi_{,,,} = B_{,,,}$$

so folgt:

$$r^2_{,} = \left(\frac{\varrho_{,}}{\cos\beta_{,}} - R_{,} \cos\psi_{,}\right)^2 + B_{,}^2$$

$$r^2_{,,,} = \left(\frac{M\varrho_{,}}{\cos\beta_{,,,}} - R_{,,,} \cos\psi_{,,,}\right)^2 + B^2_{,,,}$$

Aehnlich lässt sich auch der Ausdruck für $\varkappa$ vereinfachen. Setzt man:

$$R_{,,,} \cos\odot_{,,,} - R_{,} \cos\odot_{,} = g \cos G$$
$$R_{,,,} \sin\odot_{,,,} - R_{,} \sin\odot_{,} = g \sin G$$
$$M \cos\lambda_{,,,} - \cos\lambda_{,} = h \cos\zeta \cos H$$
$$M \sin\lambda_{,,,} - \sin\lambda_{,} = h \cos\zeta \sin H$$
$$M \operatorname{tg}\beta_{,,,} - \operatorname{tg}\beta_{,} = h \sin\zeta$$

so geht die Formel für $\varkappa^2$ in folgende über:

$$\varkappa^2 = (\varrho_{,} h \cos\zeta \cos H - g \cos H)^2 + (\varrho_{,} h \cos\zeta \sin H - g \sin G)^2 + \varrho_{,}^2 h^2 \sin^2\zeta$$

oder:

$$\varkappa^2 = \varrho_{,}^2 h^2 - 2\varrho' h g \cos\zeta \cos(G - H) + g^2$$

Setzt man noch:

$$\cos\zeta \cos(G - H) = \cos\varphi$$
$$g \sin\varphi = A$$

so folgt:

$$\varkappa^2 = (\varrho_{,} h - g \cos\varphi)^2 + A^2$$

Nun führt Gauss eine neue Variable statt $\varrho_{,}$ ein, indem er:

$$\varrho_{,} h - g\cos\varphi = u$$

setzt. Dadurch wird:

$$z = \sqrt{u^2 + A^2}$$

Führt man diese Variable auch in die Ausdrücke von $r_{,}$ und $r_{,,,}$ ein, so folgt, da:

$$\varrho_{,} = \frac{u + g\cos\varphi}{h}$$

$$r^2_{,} = \left(\frac{u + g\cos\varphi}{h\cos\beta_{,}} - R_{,}\cos\psi_{,}\right)^2 + B_{,}^2$$

$$r^2_{,,,} = \left(M\cdot\frac{u + g\cos\varphi}{h\cos\beta_{,,,}} - R_{,,,}\cos\psi_{,,,}\right)^2 + B^2_{,,,}$$

Setzt man also:

$$g\cos\varphi - hR_{,}\cos\psi_{,}\cos\beta_{,} = c_{,}$$

$$g\cos\varphi - hR_{,,,}\cos\psi_{,,,}\cos\beta_{,,,} = c_{,,,}$$

$$h\cos\beta_{,} = b_{,}$$

$$\frac{h\cos\ {}_{,,,}}{M} = b_{,,,}$$

so folgt:

$$r_{,} = \sqrt{\left(\frac{u + c_{,}}{b_{,}}\right)^2 + B^2_{,}}$$

$$r_{,,,} = \sqrt{\left(\frac{u + c_{,,,}}{b_{,,,}}\right)^2 + B^2_{,,,}}$$

Man hat dabei die Unbekannte u so zu bestimmen, dass:

$$(r_{,} + r_{,,,} + z)^{3/2} - (r_{,} + r_{,,,} - z)^{3/2} = 6k(t_{,,,} - t_{,})$$

wird.

---

c) Aufgelöstes Beispiel.

Gauss beobachtete im Jahre 1813 den von Harding entdeckten Kometen und zwar am:

$t_{,} =$ April 7	13^h	12^m	2^s	mittlere Göttinger Zeit	=	April	7,55002
$t_{,,} =$ „ 14	13^h	7^m	36^s	„ „ „	=	„	14,54694
$t_{,,,} =$ „ 21	14^h	23^m	0^s	„ „ „	=	„	21,59931

Die Beobachtungen ergaben:

$$\lambda_{,} = 271^0\,16'\,38'' \qquad \beta_{,} = +29^0\;2'\;0''$$

$$\lambda_{,,} = 266^0\,27'\,22'' \qquad \beta_{,,} = +22^0\,52'\,18''$$

$$\lambda_{,,,} = 256^0\,48'\;8'' \qquad \beta_{,,,} = +\;9^0\,53'\,12''$$

Aus den Ephemeriden entnimmt man:

$$\odot_{,} = 17^0\,47'\,41'' \qquad \log R_1 = 0{,}00091$$

$$\odot_{,,} = 24^0\,38'\,45'' \qquad \log R_2 = 0{,}00175$$

$$\odot_{,,,} = 31^0\,31'\,15'' \qquad \log R_3 = 0{,}00260$$

Mit diesen Daten rechnet man zunächst:

$$M = \frac{t_{,,,} - t_{,,}}{t_{,,} - t_{,}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,}\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,,}\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$$

Es findet sich:

$$\log M = 9{,}75799$$

Alsdann sind die Grössen:

$$g,\ G,\ h,\ H,\ \zeta$$

zu bestimmen aus:

$$R_{,,,} \cos \odot_{,,,} - R_{,} \cos \odot_{,} = g \cos G$$
$$R_{,,,} \sin \odot_{,,,} - R_{,} \sin \odot_{,} = g \sin G$$
$$M \cot \lambda_{,,,} - \cos \lambda_{,} = h \cos \zeta \cos H$$
$$M \sin \lambda_{,,,} - \sin \lambda_{,} = h \cos \zeta \sin H$$
$$M \operatorname{tg} \beta_{,,,} - \operatorname{tg} \beta_{,} = h \sin \zeta$$

Man findet in unserem Beispiele:

$$G = 113^0\, 43'\, 57''$$
$$H = 109^0\, 5'\, 49,,$$
$$\zeta = 44^0\, 13'\, 9''$$

ferner:

$$\log g = 9{,}38029 \qquad \log h = 9{,}81477$$

Ferner ist zu berechnen:

$$\cos \zeta \cos (G - H) = \cos \varphi$$
$$\cos \beta_{,} \cos (\lambda_{,} - \odot_{,}) = \cos \psi_{,}$$
$$\cos \beta_{,,,} \cos (\lambda_{,,,} - \odot_{,,,}) = \cos \psi_{,,,}$$
$$G \sin \varphi = A$$
$$R_{,} \sin \psi_{,} = B_{,}$$
$$R_{,,,} \sin \psi_{,,,} = B_{,,,}$$

Man erhält:

$$\log A = 9{,}22527$$
$$\log B_{,} = 9{,}98706$$
$$\log B_{,,,} = 9{,}86038$$

Setzt man noch:

$$h \cos \beta_{,} = b_{,}$$
$$\frac{h \cos \beta_{,,,}}{M} = b_{,,,}$$
$$g \cos \varphi - b_{,} R_{,} \cos \psi_{,} = c_{,}$$
$$g \cos \varphi - b_{,,,} R_{,,,} \cos \psi_{,,,} = c_{,,,}$$

so erhält man:

$$\log b_{,} = 9{,}75645$$
$$\log b_{,,,} = 0{,}05028$$
$$c_{,} = +0{,}31365$$
$$c_{,,,} = +0{,}95443$$

Ferner wird:

$$\log 6k\,(t_{,,,} - t_{,}) = 0{,}16138$$

also:

$$6k\,(t_{,,,} - t_{,}) = 1{,}45040$$

Man hat nun durch Versuche u so zu bestimmen, dass wenn:

$$r_{,} = \sqrt{\left(\frac{u + c_{,}}{b_{,}}\right)^2 + B_{,}^2}$$
$$r_{,,,} = \sqrt{\left(\frac{u + c_{,,,}}{b_{,,,}}\right)^2 + B_{,,,}}$$
$$z = \sqrt{u^2 + A^2}$$

ist, zugleich:

$$(r_{,} + r_{,,,} + z)^{3/2} - (r_{,} + r_{,,,} - z)^{3/2} = 1{,}45040$$

werde.

Durch einige Versuche findet man, dass diesen Gleichungen durch:

$$u = 0{,}24389$$

Erkl. 288. Bei der Berechnung von $r_{,}$ und $r_{,,,}$ kann man:

$$\frac{b_{,} B_{,}}{u + c_{,}} = \operatorname{tg} \Theta_{,}$$

setzen, wodurch:

$$r_{,} = \frac{B}{\cos \Theta_{,}}$$

wird, analog bei $r_{,,,}$.

genügt wird, woraus:

$$\log \varkappa = 9{,}47150$$
$$\log r_{,} = 0{,}13896$$
$$\log r_{,,,} = 0{,}11068$$
$$\log \varrho_{,} = \log \frac{u + g\cos\varphi}{h} = 9{,}80366$$
$$\log \varrho_{,,,} = \log M\varrho_{,} = 9{,}56165$$

Sodann folgt:

$$\varrho_{,}\cos\lambda_{,} - R_{,}\cos\odot_{,} = -0{,}93997 = x_{,}$$
$$\varrho_{,}\sin\lambda_{,} - R_{,}\sin\odot_{,} = -0{,}94239 = y_{,}$$
$$\varrho_{,}\operatorname{tg}\beta_{,} = +0{,}35319 = z_{,}$$

und

$$\varrho_{,,,}\cos\lambda_{,,,} - R_{,,,}\cos\odot_{,,,} = -0{,}94076 = x_{,,,}$$
$$\varrho_{,,,}\sin\lambda_{,,,} - R_{,,,}\sin\odot_{,,,} = -0{,}88082 = y_{,,,}$$
$$\varrho_{,,,}\operatorname{tg}\beta_{,,,} = +0{,}06352 = z_{,,,}$$

Man hat also die Gleichungen:

$$r_{,}\cos b_{,}\cos l_{,} = -0{,}93997$$
$$r_{,}\cos b_{,}\sin l_{,} = -0{,}94239$$
$$r_{,}\sin b_{,} = +0{,}35319$$

ferner:

$$r_{,,,}\cos b_{,,,}\cos l_{,,,} = -0{,}94076$$
$$r_{,,,}\cos b_{,,,}\sin l_{,,,} = -0{,}88082$$
$$r_{,,,}\sin b_{,,,} = +0{,}06352$$

Damit wird:

$$\log r_{,} = 0{,}13896$$
$$\log r_{,,,} = 0{,}11069$$

wie oben, was eine gute Probe abgibt. Ferner:

$$l_{,} = 225^0\,4'\,25''$$
$$l_{,,,} = 223^0\,6'\,56''$$
$$b_{,} = +14^0\,51'\,40''$$
$$b_{,,,} = +\ 2^0\,49'\,18''$$

Rechnet man mit diesen Werten nach der Formel, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2}(l_{,,,} + l_{,}) - \Omega = 181^0\,25'\,32''$$

also:

$$\Omega = 42^0\,40'\,8''$$

ferner:

$$i = 98^0\,59'\,5''$$

Weiter geben die Formeln 115 a):

$$v_{,} + \pi - \Omega = 164^0\,56'\,57''$$
$$v_{,,,} + \pi - \Omega = 177^0\,\ 8'\,32''$$

also:

$$v_{,,,} - v_{,} = 12^0\,11'\,56''$$

Die Formel auf Seite 239 gibt ferner:

$$\frac{v_{,,,} + v_{,}}{2} = -33^0\,59'\,38''$$

also ist:

$$v_{,,,} = -27^0\,53'\,51''$$
$$v_{,} = -40^0\,\ 5'\,26''$$

Hieraus folgt:

$$\log\frac{p}{2} = \log q = 0{,}08468$$

Erkl. 289. Man beachte, dass hier statt $\varrho_{,}\cos\beta_{,}$ in den Formeln 112 a) $\varrho_{,}$ gesetzt wurde, weil dieses hier die Bedeutung von $\varrho_{,}\cos\beta_{,}$ hat, so dass aus:

$$\varrho_{,}\cos\beta_{,}\cos\lambda_{,} - R_{,}\cos\odot_{,}$$

einfach:

$$\varrho_{,}\cos\lambda_{,} - R_{,}\cos\odot_{,}$$

wird. Ebenso wird:

$$\varrho_{,}\sin\beta_{,} = \cdots\ \varrho_{,}\operatorname{tg}\beta_{,}$$

Erkl. 289 a. Es ist (vergl. S. 239):

$$\frac{p}{2} = q$$

und

$$q = r\cos^2\frac{v}{2}$$

Da nun:

$$v_{,} + \pi - \Omega = 164^0\,56'\,57''$$

so folgt:

$$\pi - \Omega = 205^0\,2'\,23''$$

Um nun die Perihelzeit zu bestimmen, haben wir mit dem Werte von v in die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{v^3}{3} = \frac{2kt}{p^{3/2}}$$

einzugehen und hieraus t zu berechnen; man findet:

$$t = 41^t\,97$$

also ist die Zeit des Perihels:

April $(7{,}55 + 41{,}97) =$ Mai 19,52

wodurch alle Elemente bestimmt sind.

d) Elemente der periodischen Kometen von Halley und Encke.

	Halley.	Encke.
Durchgang durch das Perihel m. Par. Zeit	1835 Nov. 15. $22^h\,41^m\,22^s$	1881 Nov. 15. $1^h\,43^m\,9^s$
Perihellänge	$304^0\,30'\,48''$	$158^0\,30'\,5''$
Ω	$55^0\;9'\,15''$	$334^0\,34'\,3''$
i	$17^0\,45'\;5''$	$12^0\,53'\,0''$
Periheldistanz	0,586569	0,343005
e	0,9673909	0,845497
Berechner	Westphalen	Backlund
Umlaufzeit etwa	76 Jahre	$3\frac{1}{2}$ Jahre
Bewegung	Retrograd.	Direkt.

Anmerkung 24. Ausser diesen gibt es noch mehrere periodische Kometen, so jenen von Tuttle mit einer Umlaufzeit von $12\frac{2}{5}$ Jahren, jenen von Faye mit einer Periode von $7\frac{1}{2}$ Jahren, ferner jenen von Biela mit einer Umlaufzeit von $6\frac{3}{4}$ Jahren und noch mehrere andere, deren Perioden zwischen und in der Nähe von 5 und 6 Jahren liegen. Ueber den Zusammenhang dieser Kometen mit Meteorschwärmen kann jede populäre Astronomie zu Rate gezogen werden. Wir geben nachstehend die Elemente der vier hauptsächlichsten Meteorschwärme für die Epoche 1870:

	π	Ω	i	Perihel-distanz	Berechner
April 30	280^0	38^0	22^0	0,737	Kirkwood
August 11 (Perseiden) . .	344^0	138^0	64^0	0,964	Schiaparelli
November 13 (Leoniden) .	63^0	232^0	16^0	0,961	Tupman
November 27	109^0	246^0	15^0	0,854	Bruns

Die Exzentrizitäten sind von 1 wenig verschieden, die Bewegung der drei ersten ist eine direkte, bei dem letzteren eine retrograde. Vergleicht man die Elemente des letzten Schwarmes mit jenen des Kometen von Biela $\left(6\frac{3}{4}\text{ Umlaufzeit}\right)$, für welchen nach Hubbart für das Aequinoktium 1852:

π	Ω	i	Periheldistanz
$109^0\,8'\,16''$	$245^0\,51'\,28''$	$12^0\,33'\,19''$	0,860622

so findet offenbar eine grosse Uebereinstimmung statt.

P. Ueber die Längenbestimmungen.

Anmerkung 25. Nachdem wir die Bewegungen der Sonne und des Mondes, sowie die Theorie der Verfinsterungen kennen gelernt haben, haben wir zum Abschluss unserer Betrachtungen einiges über die Längenbestimmungen zu sagen. Dieselben sollen hier nur kurz besprochen werden, da ihre genaue Ausführung nicht die Sache eines Einzelnen ist, sondern in der Regel von den Staatsanstalten unternommen wird.

Frage 131. Welche sind die gebräuchlichsten Methoden zur Bestimmung der Längendifferenz?

Erkl. 289. Die Alten bedienten sich zur Längenbestimmung nur der Finsternisse, erst mit der Ausdehnung der Schiffahrt auf längere Strecken, also etwa um das Jahr 1500, benützte man die Bewegungserscheinungen des Mondes zur Lösung dieses Problems.

Antwort. Man hat ja (vergl. Frage 35) den Längenunterschied zweier Erdorte, wenn man die Uhrzeit eines bestimmten Augenblickes für dieselben kennt. Um zu dieser Kenntnis zu gelangen, bieten sie verschiedene Wege.

1) Beobachtung einer Himmelserscheinung, die an beiden Orten zugleich sichtbar ist. Dazu kann man z. B. das Aufleuchten der Sternschnuppen, die Finsternisse der Jupitermonde verwenden. Besser eignen sich dazu die Sternbedeckungen durch den Mond, weil dieselben, wenn sie auf der dunkeln Mondpartie geschehen, momentan erfolgen. Auch die Sonnenfinsternisse eignen sich gut hierzu, weniger die Mondfinsternisse.

So beobachtete ich am 9. Oktober 1884 den Austritt von 130 Tauri und zwar fand derselbe um:

$$11^h\ 34^m\ 52^s\ 9 \text{ mittl. Prager Zeit}$$

statt. Die Rechnung für Greenwich lieferte für denselben:

$$10^h\ 38^m\ 11^s$$

Bildet man also die Differenz, so folgt:

$$57^m\ 41^s\ 9$$

als Längendifferenz zwischen Prag und Greenwich.

2) Beobachtung der Monddistanzen. Der Mond nimmt (vergl. Frage 86) wegen der Parallaxe für jeden Erdenort eine andere Stelle gegen die Gestirne. Diesen Umstand kann man auch zur Bestimmung der Länge benützen. Indessen erfordert diese Methode umfangreiche Rechnungen und ist nicht genau genug.

3) Beobachtung der Mondkulminationen. Es kulminieren nämlich die beweglichen Gestirne nicht an allen Orten zu derselben Sternzeit, weil ja ihre Deklinationen und Rectascensionen veränderlich sind. Der beweglichste unter den beweglichen ist aber der Mond. Deshalb wird derselbe vorzüglich benützt. Die Rectascension des Mondes ändert

sich so schnell, dass sie im Laufe zweier Zeitminuten sich beinahe um eine Bogenminute ändert. Beobachtet man daher die Rectascensionen des Mondes an zwei verschiedenen Meridianen, so kann man aus dem Unterschiede der Rectascensionen auf die geographische Längendifferenz schliessen.

4) Die Bestimmung der Längendifferenz durch den elektrischen Telegraphen ist die genaueste, die es gibt. Man wechselt zwischen zwei Orten telegraphische Zeichen und merkt die Zeiten an. Die Differenz der Uhrzeiten gibt sodann unmittelbar die Längendifferenz.

Erkl. 290. Mit den Längendifferenzen hängt auch die Thatsache zusammen, dass man einen Tag verliert, wenn man die Erde von Osten nach Westen umschifft.

5) Auf der See ist die Methode der Chronometerübertragung die gebräuchlichste. Jedes Schiff führt eine nach der Greenwicher Zeit gehende Chronometeruhr vom bekannten täglichen Gange. Wird nun mittels der Sonnenhöhen an irgend einer Stelle der Fahrt die mittlere Ortszeit bestimmt, so gibt ihre Differenz gegen die Uhrzeit unmittelbar die Längendifferenz.

So einfach aber alle diese Methoden zu sein scheinen, so schwierig ist ihre praktische Ausführung. Die einfachste dürfte die Methode der Mondkulminationen sein.

II. Theoretische Astronomie.

Q. Das Gravitationsgesetz und die ungestörte Planetenbewegung.

Anmerkung 26. Bis zu Newton war die Astronomie im Stadium des Sammelns, mit Newton trat sie in das Stadium des Erklärens. Das „Wie“ hatte man schon ziemlich genau untersucht und nun gab Newton als Antwort auf das zu stellende „Warum“ das epochale „Weil“ sich die Himmelskörper mit einer Kraft anziehen, welche den Massen direkt und dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist. Dass dieses „Weil“ alle „Warum“ der Astronomie beantwortet, das zu zeigen ist die Aufgabe der theoretischen Astronomie.

a) Ueber die Bewegungsgleichungen.

Frage 132. Was ist und was bedingt das Gravitationsprinzip?

Antwort. Das Gravitationsprinzip sagt aus, dass sich alle Himmelskörper mit einer Kraft anziehen, die den Massen direkt und dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional wirkt.

Auf dieses Prinzip war Newton zunächst durch eine induktorische Betrachtung geleitet worden, lieferte aber später einen mathematisch genauen Beweis.

Wir verzichten auf die Reproduktion dieses Beweises, indem wir ja a posteriori zeigen, dass die aus diesem Prinzip folgenden Thatsachen mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmen.

Dass die Anziehungskraft auf unserer Erde identisch ist mit der allgemeinen Gravitation, bewies Newton, indem er die Beschleunigung der Schwere aus der Bewegung des Mondes um die Erde berechnete.

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt nämlich etwa 60 Erdradien. Sei aber g die Beschleunigung der Schwere in der Entfernung des Erdradius, so wird dieselbe auf dem Monde gleich:

$$g_0 = g \cdot \frac{1}{60^2} = \frac{g}{3600}$$

Dieselbe ist aber zugleich der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung, also wird:

$$g_0 = \frac{4\pi^2 \varrho}{t^2}$$

Erkl. 291. Das Gravitationsprinzip, welches die gegenseitige Anziehung der Materie nach dem Newtonschen Gesetze behauptet, ist ein Prinzip, dessen wohl dunkle Anfänge bis in das Altertum reichen. Von Plato rührt jenes „to homoion pheretai pros to homoion“ und Plutarch hält dafür, dass die Anziehung die einzelnen Teile unseres Erdglobus zusammenhält.

Zu Keplers Zeiten war diese Idee ganz allgemein, nur konnte man nicht das Gesetz, nach welchem die Kraft wirkt. Da stellte Newton (Principia lib. III, p. 3) sein Prinzip auf und zeigte, dass die Schwere eine allgemein wirkende, alle Himmelskörper umfassende Kraft ist. Die Vermutung, dass dieses Gesetz in der besagten Form existiere, findet man schon bei Bullialdus (Astronomia Philolaica, 1645). Newtons Verdienst ist der mathematische genaue Nachweis. Littrow sagt ganz treffend: „Die Auffindung und Begründung des Gravitationsgesetzes ist das Eigentum des ganzen Zeitalters und Newton nur gleichsam notgedrungen der Träger des Ausdruckes dieser Zeit. Seine Befähigung zwang ihn, diesen Beruf zu übernehmen.“

Erkl. 292. Newton nahm zuerst in Ermangelung eines genaueren Wertes den Erdumfang = 21600 engl. Meilen (= 34760 km), wodurch er für g den Wert 8,6 m erhielt, also fast um einen Meter weniger, als der schon früher von Galilei gefundene Wert für g haben sollte. Darum gab Newton die Sache ganz auf. Als nun Picard in Frankreich im Jahre 1670 den Meridiangrad zu 57060 Toisen gefunden, so dass der Erdumfang zu 40,035,600 m genommen werden konnte, nahm Newton seine Rechnung wieder auf und sah zu seiner grossen Freude die vollständige Uebereinstimmung des gefundenen und beobachteten Wertes von g.

wobei $\varrho = 60$ Erdhalbmessern und t die siderische Umlaufzeit des Mondes, also 2360580 Sekunden bezeichnet. Wir erhalten also, wenn wir:

$$2\pi \cdot \text{Erdradius} = 40,000,000 \text{ m}$$

setzen:

$$g_0 = \frac{120 \cdot \pi \cdot 40,000,000}{(2360580)^2}$$

Dieses soll sein gleich:

$$\frac{g}{3600}$$

und in der That folgt hieraus:

$$g = 9 \cdot 74 \text{ m}$$

ein Wert, der mit dem aus den Pendelbeobachtungen abgeleiteten sehr gut übereinstimmt.

Frage 133. Wie lauten die Bewegungsgleichungen eines Planeten um die Sonne, wenn die gegenseitige Einwirkung der Planeten vernachlässigt wird?

Erkl. 293. Die Methode der Zerlegung der Beschleunigungen, resp. der Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, parallel festen Achsen rührt von Maclaurin her, der sie in seinem Werke „Treatise of Fluxions", Vol. I, art. 465 et sequ., im Jahre 1742 herausgegeben. Früher zerlegte man nach Newtons Beispiel die Bewegung in eine tangentiale und normale. Eulers „Theoria motus", welche 1736 erschienen, basiert noch ganz auf dieser alten Methode. In der neuesten Zeit hat man infolge der hohen Ausbildung der Methode der Schraubenbewegung in der Mehrheit der Fälle beide Methoden verlassen und bedient sich zumeist anderer Methoden, die durch die Arbeiten Grassmanns eingeleitet wurden.

Erkl. 294. Es ist offenbar:

$$\cos(xr) = \frac{\xi - \xi'}{r}$$

$$\cos(yr) = \frac{\eta - \eta'}{r}$$

$$\cos(zr) = \frac{\zeta - \zeta'}{r}$$

Da sich die Bewegungsgleichungen der ungestörten Bewegung in jedem Lehrbuch der Mechanik ausführlich hergeleitet finden, so sehen wir von ihrer tieferen Begründung ab.

Erkl. 295. Wirken auf die miteinander verbundenen Massenpunkte:

$$m_1, \; m_2, \; m_3 \cdots$$

die Kräfte:

$$m_1 P_1, \; m_2 P_2, \; m_3 P_3 \cdots$$

Antwort. Es sei M die Masse der Sonne, m jene des Planeten, ferner ξ', η', ζ' die Koordinaten der Sonne, ξ, η, ζ jene des Planeten in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dann ist die Entfernung der beiden Körper offenbar:

$$r^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2$$

und die anziehende Wirkung nach dem Gravitationsgesetz:

$$k^2 \frac{Mm}{r^2}$$

seien nun:

$$\cos(xr) \quad \cos(yr) \quad \cos(zr)$$

die Richtungskosinuse des Radiusvektors r, so werden die auf den Massenpunkt M wirkenden Kraftkomponenten von:

$$k^2 \frac{Mm}{r^2}$$

der Reihe nach sein:

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(xr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\xi - \xi')$$

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(yr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\eta - \eta')$$

$$k^2 \frac{mM}{r^2} \cos(zr) = k^2 \frac{mM}{r^3} (\zeta - \zeta')$$

welche nach dem d'Alembertschen Prinzip den Ausdrücken:

$$M \frac{d^2 \xi'}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \eta'}{dt^2}, \quad M \frac{d^2 \zeta'}{dt^2}$$

gleich zu setzen sind. Daraus folgen:

$$\frac{d^2 \xi'}{dt^2} = k^2 \frac{m}{r^3} (\xi - \xi')$$

$$\frac{d^2 \eta'}{dt^2} = k^2 \frac{m}{r^3} (\eta - \eta')$$

so werden dieselben, wegen ihrer Verbindungen, andere Beschleunigungen erhalten, als wenn sie frei wären.

Denkt man sich die Punkte frei und dieselben Bewegungen ausführend wie verbunden infolge der Kräfte P, so müssten auf sie die Kräfte:

$$m_1 p_1,\ m_2 p_2,\ m_3 p_3 \cdots$$

wirken.

Bringt man diese letzteren Kräfte an ihre Angriffspunkte, jedoch in entgegengesetzter Richtung an, so werden sie den Kräften P Gleichgewicht halten. Nennt man die Kraft mP die bewegende, mp die wirksame, so besagt das d'Alembertsche Prinzip, dass die bewegenden Kräfte den in entgegengesetzter Richtung angebrachten wirksamen Kräften das Gleichgewicht halten.

D'Alembert, Jean le Roud, geboren 17. November 1717, gestorben 29. Oktober 1783 in Paris. Sein Prinzip findet sich in dem Werke „Traité de dynamique", Paris 1743. Es führt die Bewegungsgleichungen auf Bedingungen des Gleichgewichts. Von seinen vielen Abhandlungen sei nur die eine: „Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre", Paris 1749, erwähnt, worin eine vollständige Lösung des Problems der Präcession und Nutation gegeben ist.

$$\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = k^2\frac{m}{r^3}(\zeta - \zeta')$$

als Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt M. Analog ergibt sich für m:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2\frac{M}{r^3}(\xi' - \xi)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k^2\frac{M}{r^3}(\eta' - \eta)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = k^2\frac{M}{r^3}(\zeta' - \zeta)$$

Führt man nun ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in M und setzt:

$$\xi - \xi' = x$$

$$\eta - \eta' = y$$

$$\zeta - \zeta' = z$$

so folgt, wenn zugleich $M = 1$ gesetzt wird (so dass m in Einheiten der Sonnenmasse ausgedrückt angenommen wird):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = 0$$

Dieses sind die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung.

Frage 134. Wie integriert man die Bewegungsgleichungen?

Antwort. Diese drei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefern uns sechs Konstanten. Diese sind die Bahnelemente im mathematischen Sinne und müssen aus den Beobachtungen bestimmt werden.

Multipliziert man die erste Gleichung mit $-y$, die zweite mit x und addiert, so erhält man:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

oder:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

also durch Integration:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k_1$$

wo k_1 die Integrationskonstante bezeichnet.

Analog ergibt sich:

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = k_2$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_3$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit z, y und x und addiert, so folgt:

Erkl. 296. Es ist:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{d^2y}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2}$$

wie nebenstehend.

Erkl. 297. Multipliziert man die erste der Gleichungen mit z, die dritte mit $-x$ und addiert, so folgt:

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt^2} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0$$

also:

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = k_2$$

Wird nun die zweite Gleichung mit $-z$ und die dritte mit y multipliziert und beide addiert, so folgt:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

also:

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k_3$$

Erkl. 298. Man sieht hieraus, dass zur Feststellung der Ebene, in welcher sich der Planet bewegt, zwei Konstanten nötig sind. In den früheren Abschnitten haben wir diese Ebene durch die Knotenlänge ☊ und die Neigung fixiert. Es fragt sich, in welcher Beziehung stehen diese Grössen zu den Konstanten C_1 und C_2.

Es ist, die Masse $m = 0$ gesetzt:

$$k_1 = k\sqrt{p}\cos i$$
$$k_2 = k\sqrt{p}\sin i \cos ☊$$
$$k_3 = k\sqrt{p}\sin i \sin ☊$$

also wird:

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1} = \operatorname{tg} i \cos ☊$$
$$C_2 = \frac{k_3}{k_1} = \operatorname{tg} i \sin ☊$$

Erkl. 299. Es ist:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos v + r\sin v\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin v + r\cos v\frac{dv}{dt}$$

also:

$$x\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}\sin v\cos v + r^2\cos^2 v\frac{dv}{dt}$$
$$y\frac{dx}{dt} = r\frac{dr}{dt}\sin v\cos v - r^2\sin^2 v\frac{dv}{dt}$$

woraus:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2(\sin^2 v + \cos^2 v)\frac{dv}{dt} = r^2\frac{dv}{dt}$$

folgt.

Erkl. 300. Man kann sofort die Bedeutung der Constante C_4 aus dieser Gleichung finden. Setzt man $t = 0$, so folgt:

$$2f_0 = C_4$$

Demnach kann die Integrationskonstante C_4 als jene doppelte Sektorfläche aufgefasst werden, die zwischen einem als fixe Ausgangslinie zu wählenden und dem für die Zeit $t = 0$ stattfindenden Radiusvektor eingeschlossen ist.

Die Bedeutung der Konstante C_3 haben wir Seite 146 kennen gelernt. Wir setzen:

$$C_3 = k\sqrt{p}\sqrt{1+m} = k\sqrt{a(1-e^2)(1+m)}$$

$$k_1 z + k_2 y + k_3 x = 0$$

oder:

$$z + \frac{k_2}{k_1}y + \frac{k_3}{k_1}x = 0$$

wofür, wenn:

$$\frac{k_2}{k_1} = C_1 \qquad \frac{k_3}{k_1} = C_2$$

gesetzt wird:

$$z + C_1 y + C_2 x = 0$$

geschrieben werden kann. Dieses ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems geht.

Vereinfachen wir uns nun die Rechnung, indem wir die Koordinatenebene in die Planetenebene selbst verlegen, so wird $z = 0$, wir haben also die beiden Gleichnngen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = 0$$

Multiplizieren wir zunächst die erste Gleichung mit $-y$ und die zweite mit $+x$ und addieren, so folgt:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3$$

wie früher. Setzen wir nun:

$$x = r\cos v$$
$$y = r\sin v$$

so folgt:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{dv}{dt} = C_3$$

Nun ist aber (vergl. Erkl. 229):

$$\frac{1}{2}r^2\frac{dv}{dt} = \frac{df}{dt}$$

das Differential eines Sektors, so dass:

$$2\frac{df}{dt} = C_3$$

also durch Integration:

$$2f = C_3 t + C_4$$

Diese Gleichung sagt, dass die Flächen, die durch den Radiusvektor beschrieben werden, der Zeit proportional sind.

Multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen mit $2\frac{dx}{dt}$ und die zweite mit $2\frac{dy}{dt}$, so folgt nach Addition der beiden Produkte:

$$2\left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{2k^2(1+m)}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

Nun folgt aber aus:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

durch Differentiation:

$$r\,\frac{dr}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}$$

ferner ist:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

so dass die frühere Gleichung übergeht in:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + \frac{2k^2}{r^2}(1+m)\,\frac{dr}{dt} = 0$$

oder wenn:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g^2$$

wobei ds ein Wegelement und demgemäss g die Geschwindigkeit bezeichnet, gesetzt wird, in:

$$\frac{dg^2}{dt} - 2k^2(1+m)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$g^2 - 2k^2(1+m)\,\frac{1}{r} = C_5$$

oder:

$$g = \sqrt{C_5 + 2k^2(1+m)\,\frac{1}{r}}$$

Für die Konstante C_5 empfiehlt es sich, den Wert:

$$C_5 = -\,\frac{k^2(1+m)}{a}$$

einzuführen, so dass:

$$g = k\,\sqrt{1+m}\,\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

Wir hatten:

$$C_3 = x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}$$

also wird:

$$C_3^2 = x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2xy\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$$

oder:

$$C_3^2 = (x^2+y^2)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] - \left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right)^2$$

also:

$$C_3^2 = r^2 g^2 - r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Demnach ist:

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2 g^2 - C^2$$

oder da nach der Gleichung:

$$g^2 = C_5 + 2k^2(1+m)\,\frac{1}{r}$$

ist, auch:

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r^2 C_5 + 2k^2(1+m)\,r - C_3^2$$

Erkl. 301. Es ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2\,\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

woraus durch Addition:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Erkl. 302.

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{dt} = -\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Erkl. 303. Wir werden später die Bedeutung der eingeführten Werte der Konstanten:

$$a,\ e^2,\ k^2$$

noch näher bestimmen. Es mag hier sofort bemerkt werden, dass a die halbe grosse Achse, e die Exzentrizität und k die Gausssche Konstante bezeichnet.

Erkl. 304. Es ist eine allgemeine Identität (vergl. meine Formelnsammlung, Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1888, Band I, p. 14):

$$(a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$$

Setzt man:

$$a = x \qquad \alpha = \frac{dy}{dt}$$

$$b = y \qquad \beta = \frac{dx}{dt}$$

so erhält man sofort die nebenstehende Formel:

$$(a\beta - b\alpha)^2 = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) - (a\alpha + b\beta)^2$$

Erkl. 305. Es wird zunächst:

$$\pm dv = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,dv}{r\sqrt{2ra-r^2-a^2(1-e^2)}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{er}$$

so folgt:

$$\pm dv = \frac{\frac{a(1-e^2)\,dr}{er^2}}{\sqrt{[2ra-r^2-a^2(1-e^2)]\frac{1-e^2}{e^2r^2}}}$$

$$= \frac{\frac{a(1-e^2)}{er^2}dr}{\sqrt{2\frac{a(1-e^2)}{e^2r}-\frac{1-e^2}{e^2}-\frac{a^2(1-e^2)}{e^2r^2}}}$$

$$= \frac{\frac{a(1-e^2)\,dr}{er^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{e^2r^2}(1-e^2)^2+2\frac{a(1-e^2)}{er}\cdot\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}}}$$

woraus die obige Gleichung sofort folgt.

Erkl. 306. Setzt man:

$$\cos v = m$$

so wird:

$$v = \arccos m$$

also:

$$-dv\sin v = dm$$

oder:

$$-dv = \frac{dm}{\sqrt{1-\cos^2 v}} = \frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

so dass:

$$dv = -\frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

woraus:

$$d(\arccos m) = -\frac{dm}{\sqrt{1-m^2}}$$

folgt.

woraus:

$$\pm dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{C_5r^2+2k^2(1+m)r-C_3^2}}$$

folgt. Es war aber:

$$dt = \frac{r^2dv}{C_3}$$

also wird:

$$\pm dv = \frac{C_3dr}{r\sqrt{C_5r^2+2k^2(1+m)r-C_3^2}}$$

Setzen wir nun wie oben:

$$C_5 = -\frac{k^2(1+m)}{a}$$

$$C_3^2 = a(1-e^2)k^2(1+m)$$

so folgt:

$$\pm dv = \frac{\frac{a(1-e^2)}{er^2}dr}{\sqrt{1-\left(\frac{a(1-e^2)}{er}-\frac{1}{e}\right)^2}}$$

Setzt man:

$$x = \frac{a(1-e^2)}{er}-\frac{1}{e}$$

so wird:

$$dx = -\frac{a(1-e^2)}{er^2}dr$$

also:

$$\pm dv = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arccos x)$$

woraus durch Integration:

$$\pm v = \arccos x \mp \vartheta$$

folgt, wobei ϑ eine Integrationskonstante ist.

Demzufolge wird:

$$\cos(v+\vartheta) = x = \frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right)$$

oder:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v+\vartheta)}$$

Hieraus sehen wir, dass a die halbe grosse Achse, e die Exzentrizität bedeutet, da selbstverständlich diese Gleichung jene des Kegelschnittes ist. Die Planetenbahnen sind also Kegelschnitte.

Setzt man:

$$a(1-e^2) = p$$

so folgt:

$$r = \frac{p}{1+e\cos(v+\vartheta)}$$

und zählt man den Winkel v vom Perihel aus, so wird $\vartheta = 0$, also:

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

Frage 135. Zu welchen Folgerungen führen uns die gewonnenen Gleichungen?

Antwort. Wir fanden:

$$2S_1 = C_3t_1 + C_4$$

Erkl. 307. Es ist zunächst:

$$2\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}\, k \sqrt{1+m}\ T$$

also:

$$2\pi a^{3/2} \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2} = \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}\, k \sqrt{1+m}\, T$$

oder:

$$2\pi a^{3/2} = k\ \sqrt{1+m}\ T$$

woraus die nebenstehende Gleichung folgt.

Erkl. 308. $k'' = \frac{k}{\text{arc } 1''}$

Die Grösse k führt den Namen der Gaussschen Attraktionskonstante.

Erkl. 309. Da m und m' für die Planeten sehr klein sind, so kann man:

$$a_1^3 : a^3 = T_1^2 : T$$

mit grosser Annäherung setzen, wie dieses in der That Kepler gefunden hat.

Erkl. 310. Es ist:

$$\frac{p^2}{(1+e\cos v)^2}\, \frac{dv}{dt} = k\ \sqrt{p}\ \sqrt{1+m}$$

also:

$$\frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = dt \cdot \frac{k\ \sqrt{1+m}}{p^{3/2}}$$

woraus durch Integration die nebenstehende Formel folgt.

und ebenso wird für eine Zeit t_2:

$$2S_2 = C_3 t_2 + C_4$$

also:

$$2(S_2 - S_1) = C_3 (t_2 - t_1)$$

entspricht nun die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ einem vollen Umlauf in der Zeit T, so wird $S_2 - S_1$ gleich der Ellipsenfläche, also:

$$S_2 - S_1 = ab\pi = a^2 \sqrt{1-e^2}\,\pi$$

so dass:

$$a^2 \sqrt{1-e^2}\,\pi = C_3 T$$

Nun war aber:

$$C_3 = k\ \sqrt{1+m}\ \sqrt{a}\ \sqrt{1-e^2}$$

also haben wir:

$$k = \frac{2a^{3/2}\pi}{T\sqrt{1+m}}$$

Hieraus kann k berechnet werden. Setzt man:

$t = 1 =$ dem mittleren Sonnentag,

$a = 1 =$ der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne,

$1 =$ Sonnenmasse,

also:

$T = 365{,}25638$ mittlere Sonnentage

$m = 1 : 354710$

so folgt:

$$k = 0\cdot017202099$$
$$\log k = 8{,}235581441$$
$$\log k'' = 3\cdot550006575$$

Da diese für alle Planeten identisch ist, so folgt:

$$\frac{a^{3/2}}{T\sqrt{1-m}} = \frac{a_1^{3/2}}{T_1\sqrt{1+m_1}}$$

oder:

$$\frac{a_1^3}{1+m_1} : \frac{a^3}{1+m} = T_1^2 : T^2$$

wodurch wir die genauere Darstellung des Keplerschen Gesetzes erhalten.

Wir wollen nun noch eine Beziehung zwischen v und t finden.

Es war:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\ \sqrt{p}\ \sqrt{1+m}$$

also da:

$$r^2 = \frac{p^2}{(1+e\cos v)^2}$$

auch:

$$\frac{p^{3/2}}{k\ \sqrt{1+m}\ t} = \int \frac{dv}{(1+e\cos v)^2}$$

Die Anwendung dieses Integrals führt uns sofort zu einer Relation zwischen v und t.

Um diese Auswertung durchzuführen, setze man:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \tau$$

so folgt:

$$d\tau = \frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{1+\tau^2}{2}\,dv$$

$$\cos v = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad dv = \frac{2\,d\tau}{1+\tau^2}$$

also:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t}{2p^{3/2}} = \int\frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{[1+e+\tau^2(1-e)]^2}$$

Setzt man noch:

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}$$

so wird:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{2p^{3/2}} = \int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} + \int\frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

Wird:

$$e = 1$$

also:

$$\varepsilon = 0$$

so folgt:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \int d\tau + \int\tau^2\,d\tau$$

oder:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \tau + \frac{1}{3}\tau^3 + \text{Konst.}$$

Da nun für $t = 0$ auch $v = 0$ und demnach auch $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \tau = 0$ wird, so ist Konst. $= 0$ zu setzen, vorausgesetzt natürlich, dass wir v vom Perihel aus zählen. Wir haben also:

$$\frac{2\sqrt{1+m}\,t}{p^{3/2}} = \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}$$

eine Beziehung, wie wir sie bei der Parabel gefunden haben.

Um das allgemeine Integral auszuwerten, beachten wir, dass für $e < 1$ ε immer positiv sein muss und

$$\int\frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

also:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)}$$

Da nun:

$$\int\frac{d\varepsilon}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} =$$

so folgt:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(1+e)^2\,t}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\int\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2}$$

oder:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,(1+e)^2\,t}{p^{3/2}} = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2} + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{arc\,tg}\tau\sqrt{\varepsilon}$$

Erkl. 311. Es ist:

$$\int\frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{[1+e+\tau^2(1-e)]}$$

$$= \int\frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{\left(1+\tau^2\frac{1-e}{1+e}\right)^2(1+e)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+e)^2}\int\frac{(1+\tau^2)\,d\tau}{\left(1+\tau^2\frac{1-e}{1+e}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+e)^2}\left(\int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} + \int\frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\right)$$

Erkl. 312. Es ist:

$$\int\frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\varepsilon\tau^2}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{1+\varepsilon\tau^2-1}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{d\tau}{(1+\varepsilon\tau^2)^2}$$

Erkl. 313. Es ist:

$$\int\frac{d\tau}{1+\varepsilon\tau^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\frac{d\tau\sqrt{\varepsilon}}{1+(\tau\sqrt{\varepsilon})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{arc\,tg}\tau\sqrt{\varepsilon}$$

wobei die Integrationskonstante aus gleichen Gründen, wie früher, gleich Null gesetzt wurde.

Setzt man:

$$\tau\sqrt{\varepsilon}=\operatorname{tg}\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

so folgt:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)=\frac{E}{2}$$

Ferner wird:

$$\frac{\tau}{1+\varepsilon\tau^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\;\frac{\operatorname{tg}\frac{E}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sin E$$

demnach:

$$\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{2k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\sin E+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)E$$

woraus:

$$\frac{2k\sqrt{1+m}\,t\,(1+e)^2}{p^{3/2}}\;\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}}=E+\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}}\sin E$$

Erkl. 314. Es ist:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon+1}$$

$$\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1+\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$$

Nun ist:

$$\varepsilon+1=\frac{e-1}{e+1}+1=\frac{2e}{e+1}$$

$$\varepsilon-1=\frac{e-1}{e+1}-1=-\frac{2}{e+1}$$

also:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}=\frac{e-1}{e+1}\cdot\frac{e+1}{2e}=\frac{e-1}{2e}$$

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}=-e$$

oder wenn man abkürzend

$$\mu=\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$$

setzt:

$$E-e\sin E=\mu t$$

folgt.

Die analoge Formel würde man auch für den Fall einer Hyperbel, also für:

$$e>1$$

ableiten können, was wir jedoch hier unterlassen wollen, weil die Hyperbel selbst bei den Kometen eine höchst seltene Erscheinung ist.

---

b) Bestimmung der Masse der Himmelskörper.

Frage 136. Wie bestimmt man die Masse eines Himmelskörpers, der einen Begleiter hat?

Antwort. Um die Masse eines Himmelskörpers zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass diejenige seines Begleiters gegen die des Hauptplaneten vernachlässigt werden kann, kann man verfahren wie folgt:

Sei 1 die Sonnenmasse,

μ jene des Satelliten,

m jene des Planeten.

Sei ferner T und A die Umlaufzeit und die halbe grosse Achse des Planeten, t und

Erkl. 315. Auf die hier angezeigte Art fand Newton für den Jupiter die Masse gleich 1 : 1067 der Sonnenmasse. Wendet man genauere Zahlen an, so wird:

$$A = 5{,}20284$$
$$T = 4330{,}5936$$

und für den ersten Mond:

$$a = 0{,}00282$$
$$t = 1{,}76914$$

woraus:

$$m = \frac{1}{1048}$$

folgt. Für die Erde ist:

$$A = 1 \qquad T = 365{,}25638$$

und den Mond:

$$a = 0{,}00259 \quad t = 27{,}32165$$

woraus:

$$m + \mu = \frac{1}{322420}$$

folgt. Hier darf μ gegen m nicht vernachlässigt werden, weil nach anderweitigen Untersuchungen:

$$\mu = \frac{1}{80}\,\mathrm{m}$$

Am unsichersten ist die Masse des Merkurs bekannt. Encke fand aus den Störungen des nach ihm bekannten Kometen dieselbe zu 1 : 500,000, ungefähr denselben Wert fand Leverrier aus den Venusstörungen, während die neueren Untersuchungen von Asten und Tisserand auf den Wert 1 : 700,000 hinweisen. Dagegen scheint die Venusmasse nach übereinstimmenden Resultaten nicht viel von 1 : 400,000 abzuweichen.

Erkl. 316. Schon Newton fand (Principia lib. II), dass die Erddichte nicht viel von 5 abweicht und zwar so, dass sie zwischen 5 und 6 liegen muss. Die erste experimentelle Bestimmung führte Cavendish 1798 aus; diese lieferte den Wert 5,48, die späteren Versuche nach seiner Methode lieferten etwas grössere Werte. [Baily (1842) fand 5,66, Reich (1852) 5,28]. Der neueste von Cornu und Baille (1873) erhaltene Wert 5,56 dürfte der Wahrheit am meisten entsprechen.

Was von der Masse des Merkurs gesagt wurde, kann von seiner Dichte wiederholt werden. Laplace hat durch Vergleichung der Dichtigkeiten der Erde, des Jupiters und Saturns gefunden, dass dieselbe im umgekehrten Verhältnis der mittleren Entfernungen stehen und so auf eine Dichte von 2,7 für Merkur (Erde = 1) geschlossen. Doch dürfte dieser Wert zu gross sein. Nach Leverrier dürfte die Merkurdichte etwa = 1,2, also nicht viel von der Erddichte verschieden sein.

Man vergleiche hierzu die Angaben (Theorie und Literatur der Versuche von Cavendish) in Kraft. Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Stuttgart 1885. II. Band. p. 554.

a dieselben Grössen für den Satelliten, ferner k die Gausssche Konstante, so ist:

$$k = \frac{2A^{3/2}\pi}{T\sqrt{1+m}}$$

oder:

$$1 + m = \frac{4A^3\pi^2}{T^2k^2}$$

Analog für den Begleiter:

$$k = \frac{2a^{3/2}\pi}{t\sqrt{\mu+m}}$$

also:

$$\mu + m = \frac{4a^3\pi^2}{t^2k^2}$$

so dass durch Division:

$$\frac{m+\mu}{1+m} = \frac{t^2A^3}{T^2a^3}$$

oder wenn μ gegen m und m gegen 1 vernachlässigt wird:

$$m = \frac{t^2}{a^3}\cdot\frac{A^3}{T^2}$$

Sind die Dimensionen des Planeten bekannt, so findet man hieraus sofort die Dichte d, indem ja, wenn m die Masse und v das Volumen bezeichnet:

$$d = \frac{m}{v}$$

Um die Erdmasse zu bestimmen, muss man andere Wege gehen, weil die Mondmasse nahezu $^1/_{80}$ der Erdmasse ist, also gegen die Erdmasse nicht vernachlässigt werden darf.

Es ist bekannt, dass die Anziehung, mit welcher die Erde auf die auf ihr befindlichen Gegenstände wirkt, sich zusammensetzt aus der Schwere und der vertikalen Komponente der Zentrifugalkraft.

Nehmen wir die Erde als vollkommen rund mit dem Radius:

$$r = 6364551\ \mathrm{m}$$

und der Beschleunigungskonstante:

$$g = 9{,}79586\ \mathrm{m}$$

So hat man gefunden, dass durch die vertikale Komponente der Zentrifugalkraft die Schwere um:

$$\frac{2}{867}$$

ihres Betrages vermehrt wird, so dass also die Kraftwirkung:

$$G = 9{,}79586\left(1 + \frac{2}{867}\right) = 9{,}81645$$

ist. Sei also m die Erdmasse, so hat man:

$$G = k^2\frac{m}{r^2}$$

Erkl. 317. Man findet für:

$$a = 23964\,r$$

$$\frac{1}{m} = 354592$$

also:

$$m = \frac{1}{354592}$$

Nun war aber vergl. Erkl. 315:

$$m + \mu = \frac{1}{322420}$$

so wird:

$$\mu = \frac{354592 - 322420}{322420 \cdot 354592}$$

Dadurch ist auch die Mondmasse bestimmt.

Die hier erhaltene Masse der Erde dürfte etwas zu klein sein. Newton (Principia lib. III. prop. 8) fand den Wert 1 : 169300 also einen zu hohen, während Leverrier (1876) sich für den Wert 1 : 324439 entschied. Auch die Mondmasse fand Newton doppelt so gross, nämlich 1 : 40 der Erdmasse, während man jetzt den Wert 1 : 81 als den wahrscheinlichsten hält.

Erkl. 318. Man hat nach Arago die Erdschwere $\gamma = 1$ angenommen, für

die Sonne	$\gamma = 28{,}5$
den Merkur	$\gamma = 0{,}5$
die Venus	$\gamma = 0{,}9$
den Mond	$\gamma = 0{,}2$
den Mars	$\gamma = 0{,}5$
den Jupiter	$\gamma = 2{,}5$
den Saturn, Uranus und Neptun	$\gamma = 1{,}1$

Erkl. 319. Um zu ersehen, was es heisst, dass die Schwerkraft auf der Sonne 28 mal grösser als auf der Oberfläche der Erde ist, mögen Mädlers Worte über diesen Gegenstand angeführt werden. „Ein Körper, der bei uns kaum 4 Pfund wiegt, würde dort nur durch eine Kraft bewegt werden können, die auf der Erde zur Bewegung eines Zentners erfordert wird. Ein Geschöpf von unserer Kraft und unserem Körperbau vermöchte dort kaum den Fuss empor zu heben und liefe beim Auftreten Gefahr, ihn zu zerschmettern; schon nach wenigen sehr kurzen Schritten würde völlige Erschöpfung eintreten. Ein Sekundenpendel würde dort die Länge von 86 Par. Fuss haben; ein mit aller unserer Kraft emporgeworfener Körper sich nur sehr wenig über unserem Kopf erheben.“ Umgekehrtes fände natürlich auf dem Monde statt.

oder:

$$k^2 = \frac{G r^2}{m}$$

Dieses in die Gleichung:

$$\frac{4\pi^2 A^3}{T^2} = k^2 (1 + m)$$

eingesetzt, liefert:

$$\frac{4\pi^2 A^3}{G T^2 r^2} = \frac{1 + m}{m}$$

oder:

$$\frac{1}{m} = \frac{4\pi^2 A^2}{g T^2 r^2} - 1$$

Um noch die Intensität der Schwere für irgend einen Planeten zu finden, hat man zu bedenken, dass dieselbe nichts anderes ist als die Gesamtanziehung des Gestirnes auf die Masseneinheit. Sei also ϱ der mittlere Radius und μ die Masse des Himmelskörpers, so wird, wenn γ die Intensität der Schwere bezeichnet:

$$\frac{k m}{\varrho^2} = \gamma$$

Da nun für die Erde:

$$\frac{k m}{r^2} = g$$

so folgt:

$$\gamma = g \frac{\mu}{m} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2$$

Für die Sonne ist:

$$\frac{\mu}{m} = 357922$$

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{112}$$

Setzt man daher:

$$g = 15{,}106 \text{ Par. Fuss}$$

so folgt:

$$p = 28 \cdot 53\, g = 431 \cdot 4 \text{ Par. Fuss}$$

Es fällt demnach auf der Sonne ein Körper in der ersten Sekunde 431 · 4 Par. Fuss und 1 Pfund lastet auf der Sonne ebenso stark wie 28,5 Pfund bei uns.

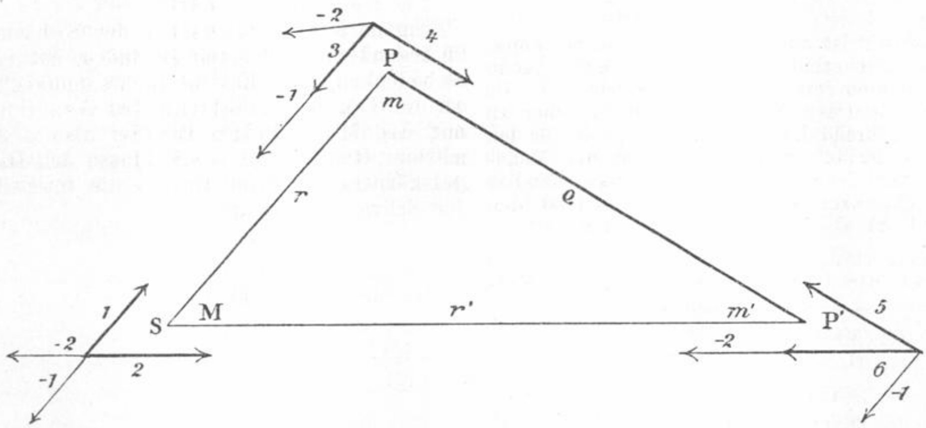
R. Ueber die Theorie des Mondes.

Anmerkung 27. In diesem Abschnitt sollen wenigstens die Grundzüge der schwierigen Mondtheorie, wenn auch nicht vollständig entwickelt, so doch wenigstens angedeutet werden.

Die vorgesteckten Grenzen machen es uns unmöglich, die Variationen aller Elemente zu entwickeln, doch wird die Art und Weise der Berechnung an der Variation der Knoten und der Neigung durchgeführt in einer Weise, dass der Leser sich ein klares Bild davon machen kann, wie in anderen Fällen vorgegangen werden muss.

Die Mondtheorie soll ferner auch ein Beispiel bieten für die Berechnung der Störungen der Planeten, die im allgemeinen, wegen der kleinen Planetenmassen, viel bequemer ist als diejenige der Störungen der Mondbewegung, bei welcher die Sonnenmasse als der störende Körper auftritt, dagegen geht ein Vorteil der Mondtheorie, nämlich die Kleinheit des Verhältnisses zwischen der Entfernung des störenden und gestörten Planeten verloren.

Figur 145.



Frage 137. Wie lauten die Grundgleichungen der Mondbewegung?

Erkl. 320. Der erste, dem es gelang, die wichtigsten Erscheinungen der Mondbewegung theoretisch darzustellen, war Newton. In seinen Prinzipien behandelt er (lib. III, prop. 29 bis 34) die Variation, Knotenbewegung und die Störungen der Neigung. Eine wenigstens abgeschlossene Mondtheorie lieferten Clairaut (Theorie de la lune, déduite du princip de l'attraction, Saint-Petersbourg 1762) und Euler (Theoria motus lunae, Petrop 1772).

Eine ziemlich elementare und dabei interessante Auseinandersetzung dieses Themas findet man in dem Werke von Möbius (Die Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843, auch in dessen Gesamtwerken IV. Band, Seite 1 bis 318, Leipzig 1887).

Antwort. Die Grundgleichungen der Mondbewegung sind genau jene, welche für die allgemeine Bewegung eines Planeten P unter der Einwirkung eines zweiten P' gelten.

Seien m und m' die Massen dieser Körper, sowie M die Masse der Sonne S; seien ferner die Entfernungen:

$$SP = r, \quad SP' = r', \quad PP' = \varrho$$

sei endlich k^2 die Gausssche Konstante, so folgt, dass nach dem Prinzip der Gravitation auf S die Kräfte:

$$(1) \ldots k^2 \frac{m}{r} \text{ von } S \text{ nach } P$$

$$(2) \ldots k^2 \frac{m'}{r} \text{ von } S \text{ nach } P'$$

wirken und analog auf P die Kräfte:

$$(3) \ldots k^2 \frac{M}{r} \text{ von } P \text{ nach } S$$

$$(4) \ldots k^2 \frac{m'}{\varrho} \text{ von } P \text{ nach } P'$$

und auf P' endlich die Kräfte:

$$(5) \ldots k^2 \frac{M}{r'} \text{ von } P' \text{ nach } S$$

$$(6) \ldots k^2 \frac{m}{\varrho} \text{ von } P' \text{ nach } P$$

Da es sich uns nicht um die absolute Bewegung dieser drei Körper SPP', sondern nur um die relative Bewegung von P und P' aus S handelt, so wollen wir uns S als ruhend vorstellen, dann müssen wir aber die Kräfte (1) und (2) auf P und P' übertragen (vergl. Figur 145). Auf P wirken dann die ursprünglichen Kräfte (3) und (4) und ausserdem die Kräfte (— 1) und (— 2), so dass man also die drei Kräfte:

$$(-1)+(3)=k^2\frac{M+m}{r^2} \text{ in der Richtung } PS$$

$$(4)=k^2\frac{m'}{\varrho^2} \text{ in der Richtung } PP'$$

$$(-2)=k^2\frac{m'}{r'^2} \text{ parallel mit } P'S$$

hat.

Analog auf P' die Kräfte:

$$(-2)+(6)=k^2\frac{M+m'}{r^2} \text{ in der Richtung } P'S$$

$$(5)=k^2\frac{m}{\varrho^2} \text{ in der Richtung } P'P$$

$$(-1)=k^2\frac{m}{r^2} \text{ parallel mit } PS$$

Damit haben wir die Bewegung von S auf die Punkte P und P' übertragen, so dass wir nun S als ruhend annehmen können.

Nun wollen wir annehmen, dass die Bewegung von P' bekannt sei und nur jene von P gesucht werde. Die auf diesen Körper wirkenden Kräfte wollen wir, wie es in der Mechanik üblich ist, in drei Komponenten:

$$T \quad V \quad W$$

und zwar T in der Richtung des Radiusvektors SP, V senkrecht darauf in der Ebene der Bewegung und W normal auf diese Ebene richten.

Erkl. 321. Dieses ist in der Astronomie zumeist der Fall. Der Mond wirkt z. B. auch auf die Sonne, allein diese Wirkung ist so klein, dass sie immer vernachlässigt werden kann. Gleiches gilt von den Asteroiden und noch mehr von den Kometen in Bezug auf die Hauptplaneten.

Die erste Kraft soll positiv sein, wenn sie P von S zu entfernen sucht; die zweite ist es, wenn ihre Richtung mit der Richtung der Bewegung übereinstimmt; die dritte ist positiv nach Norden hin.

Zu der ersten Kraft gehört also die Kraft $(-1)+3$, also die Kraft:

$$k^2\frac{M+m}{r^2}$$

Die zweite Kraft (4):

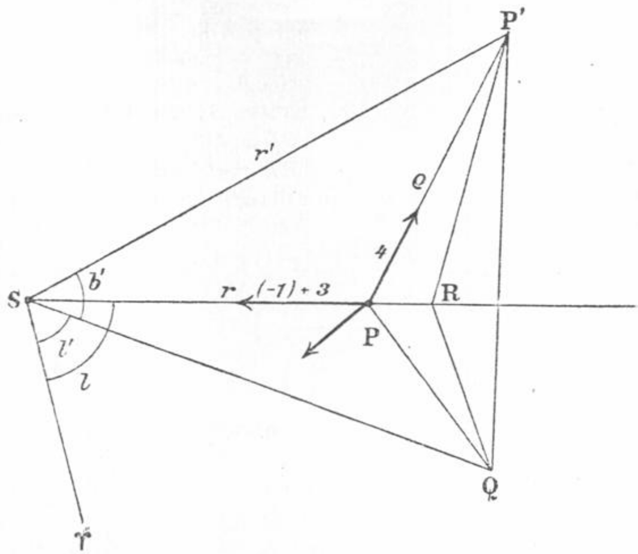
$$k^2\frac{m'}{\varrho^2}$$

muss zerlegt werden. Seien:

$$\cos\alpha \qquad \cos\beta \qquad \cos\gamma$$

die Kosinuse zwischen der Richtung dieser Kraft und den Kräften T, V, W, so dass:

Figur 146.



$$\cos[(4), T] = \cos\alpha$$
$$\cos[(4), V] = \cos\beta$$
$$\cos[(4), W] = \cos\gamma$$

so sind die Komponenten:

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\alpha$ in der Richtung von T

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\beta$ „ „ „ „ V

$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cos\beta$ „ „ „ „ W

Nun ist aber (vergl. Figur 146):

$$\cos\alpha = \frac{PR}{\varrho}$$
$$\cos\beta = \frac{QR}{\varrho}$$
$$\cos\gamma = \frac{QP'}{\varrho}$$

demnach werden die drei Komponenten:

$$k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cdot \frac{PR}{\varrho},\ k^2 \frac{m'}{\varrho^2} \cdot \frac{QR}{\varrho},\ k^2 \frac{m'}{\varrho^2}\ \frac{QP'}{\varrho}$$

Analog lässt sich die Kraft (— 2) nach denselben Richtungen zerlegen und es sind die Komponenten:

$$-k^2 \frac{m'}{r'^2} \cdot \frac{SR}{r'},\ -k^2 \frac{m'}{r'^2}\ \frac{RQ}{r'},\ -k^2 \frac{m'}{r'^2}\ \frac{QP'}{r'}$$

Wir haben also:

$$T = -k^2 \left(\frac{M+m}{r^2} + \frac{m'}{\varrho^3} PR - \frac{m'}{r'^3} SR \right)$$
$$V = -k^2 m' RQ \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$
$$W = k^2 m' QP' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

Seien nun l und l' die Längen der Planeten, sowie b' die Breite von P', so ist (vergl. Fig. 146):

$$QP' = r' \sin b'$$
$$SQ = r' \cos b'$$
$$RQ = SQ \sin(l'-l) = -r' \cos b' \sin(l-l')$$
$$SR = SQ \cos(l'-l) = r' \cos b' \cos(l-l')$$
$$PR = r' \cos b' \cos(l-l') - r$$

Damit gehen die Werte von T, V, W über in die folgenden:

$$T = -k^2\left[\frac{M+m}{r^2} + m'\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \cos(l-l') - \frac{m'}{\varrho^3} r\right]$$
$$V = -k^2 m' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos b' \sin(l-l')$$
$$W = k^2 m' \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \sin b'$$

Ferner wird:

$$\varrho^2 = PQ^2 + QP'^2 = PR^2 + RQ^2 + QP'$$

oder:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos b' \cos(l-l') + r'^2}$$

In der analytischen Mechanik wird gezeigt, dass diese Gleichungen noch anders ausgedrückt werden können.

Es ist:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{db}{dt}\right)^2 = T$$
$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \cos^2 b \frac{dl}{dt}\right) = V$$
$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{db}{dt}\right) + r^2 \cos b \sin b \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = W$$

Man kann immer diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \cos^2 b \frac{dl}{dt}\right) = V$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(r\cos b) - r\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = T\cos b - \frac{1}{r} W \sin b$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(r \sin b) = T \sin b + \frac{1}{r} W \cos b$$

welche für manche Untersuchungen eine bequemere Gestalt haben.

Das Störungsproblem oder wie man auch sagt das Problem der drei Körper besteht nun in der Integration eines der beiden letzten Gleichungssysteme. Diese kann aber nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nicht geleistet werden, darum ist man gezwungen, sich mit Näherungsmethoden zu begnügen, die je nach dem zu behandenden Spezialfall auch spezielle Gestalten annehmen.

Seien nun, um die allgemeinen Formeln auf die Mondbahn anzuwenden, M, m, m' die Massen der Erde, Mond und Sonne, also:

Erkl. 322. Die soeben entwickelten Gleichungen gelten ganz allgemein. Sie sind der Ausgangspunkt sehr vieler Untersuchungen seit ihrer Aufstellung (1747) durch Euler. Ihre für die Astronomie bequemste Integration lieferte Laplace in seinem epochalen Werke: „Traité de mécanique céleste. Paris 1799 bis 1825. V vol.“ Einem der grossartigsten Werke, welche je der menschliche Geist geschaffen. Die Untersuchungen dieses Werkes sind so geführt, dass man zu ihnen heutzutage nur wenig hinzufügen kann. Das Werk behandelt alle auf die Astronomie bezüglichen Probleme und muss von einem jeden, der sich der theoretischen Astronomie widmen will, auf das Genaueste studiert werden. Mathematischerseits erfuhr das Problem manche vorteilhafte Erweiterung durch Lagrange, Jacobi und manche andere. Vom Standpunkte der Funktionentheorie sind insbesondere die neuesten darauf bezüglichen Arbeiten von Gyldén (Konvergenz der Reihen) und Bruns (Form der Integrale) zu erwähnen.

$$M = 1 : 354710$$
$$m = \frac{1}{81} M$$
$$m' = 1$$

r und r' die Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, also im Mittel:

$$r = 0{,}002712 = a$$
$$r' = 1{,}000000 = a'$$

l und l' die in der Mondbahn gerechneten Längen von Mond und Sonne, b' die Breite der Sonne in Bezug auf die Mondbahn.

Die mittlere Neigung des Mondes beträgt etwa $5^0\,9'$, also wird im Mittel:

$$b' < 5^0\,9'$$

daher:

$$\cos b < 0{,}99596$$

also nahezu 1, wir werden daher stets für $r \cos b'$ einfach r' schreiben. Sodann ist:

$$\varrho = r' \sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos(l - l') + \frac{r^2}{r'^2}}$$
$$= r'\left[1 - \frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

weil:

$$\frac{r}{r'} = 0{,}002712$$

also $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$ sehr klein und somit:

$$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{r'^3}\left[1 + 3\frac{r}{r'}\cos(l - l')\right]$$

und

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = 3\frac{r}{r'^4}\cos(l - l')$$

Setzt man diese Werte in die Ausdrücke für T, V, W ein und vernachlässigt die Glieder mit:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

so ergibt sich:

$$T = -k^2\left(\frac{M+m}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{m'r}{r'^3}\left[1 + 3\cos 2(l - l')\right]\right)$$
$$V = -\frac{3}{2}k^2\frac{m'r}{r'^3}\sin 2(l - l')$$
$$W = 3k^2\frac{m'r}{r'^3}\cos(l - l')\cdot\sin b'$$

Nun wollen wir noch fernere Vereinfachungen vornehmen, indem wir $l = ☾$, d. h. gleich der Mondlänge in Bezug auf die Ekliptik und analog $l' = \odot$.

Ferner ist:

$$k^2(M + m) = n^2 a^3$$
$$k^2(M + m') = n'^2 a'^3$$

wobei n und n' die mittleren Bewegungen von Mond und Sonne und a und a' die Mittelwerte von r und r' bezeichnen.

Erkl. 323. Man überzeugt sich durch Ausziehen der Quadratwurzel, dass:

$$\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)x^2 + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\alpha^2}{4} - \beta\right)x^3 + \cdots$$

Vernachlässigt man die mit x^2 behafteten Glieder, so folgt:

$$\sqrt{1 + \alpha x + \beta x^2} = 1 + \frac{\alpha}{2}x$$

Analog ist, wenn x sehr klein, so dass das Quadrat von x vernachlässigt werden kann:

$$(1 - x)^3 = 1 - 3x$$

und

$$\frac{1}{(1 - x)^3} = \frac{1}{1 - 3x} = 1 + 3x$$

Es ist:

$$n' = 3548'' 2 = \frac{360^0}{365{,}256374}$$

$$n = 47434'' 9 = \frac{360^0}{27{,}3216609}$$

Setzt man also:

$$\left(\frac{n'}{n}\right)^2 = w = \frac{1}{178{,}72} = 0{,}0055953$$

so wird:

$$T = n^2 a \left[-\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a}\cdot\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w\,[1 + 3\cos 2\,(☾ - ⊙)]\right]$$

$$V = n^2 a \left[-\frac{3}{2}\,\frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \sin 2\,(☾ - ⊙)\right]$$

$$W = n^2 a \left[3\,\frac{r}{a}\cdot\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \cos(☾ - ⊙)\sin b'\right]$$

Damit haben wir die Fundamentalgleichungen der Mondtheorie gewonnen, diese lauten:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = n^2 a\left[-\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w\,[1 + 3\cos 2\,(☾ - ⊙)]\right]$$

$$r\,\frac{d^2 l}{dt^2} - 2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dl}{dt} = n^2 a\left[-\frac{3}{2}\,\frac{1}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 w \sin 2\,(☾ - ⊙)\right]$$

Die dritte Gleichung ist von der Ordnung der Störungen.

Erkl. 324. Diese Gleichungen gehen aus den allgemeinen, wenn man darin:

$$\cos b = 1$$
$$\sin b = 0$$

setzt. Wobei man annimmt, dass die Mondbahn zugleich die Fundamentalebene der Polarkoordinaten r, l, b ist. Würde diese Ebene unveränderlich feststehen, so wäre $b = 0$, aber sie verändert sich sehr wenig, demnach ist b sehr klein, d. h. klein von der Ordnung der Störungen dieser Ebene um ihre Gleichgewichtslage.

Wir wollen die Integration dieser Gleichungen succesive durchführen.

Setzen wir:

$$r = a\,(1 + cw)\,(1 + fw\cos\lambda_1)$$
$$l = ☾ + gw\sin\lambda_1$$

wobei:

$$f,\quad c,\quad g$$

gewisse, noch näher zu bestimmende Konstanten bezeichnet und:

$$\lambda_1 = knt$$

gesetzt wird. k ist eine neue Konstante und t die Zeit, sowie n die mittlere siderische Sonnenbewegung.

Vernachlässigt man die Quadrate der Grössen fw und gw, so folgt durch Substitution in die Grundgleichungen:

$$1 + cw + [(1 + k^2)f + 2kg]\,w\cos\lambda_1 = 1 - \left(\frac{1}{2} + 2cw\right) - \frac{3}{2}\,w\cos 2\,(☾ - ⊙) - 2fw\cos\lambda_1$$

$$(2kf + k^2 g)\,w\sin\lambda_1 = \frac{3}{2}\,w\sin 2\,(☾ - ⊙)$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn man:

$$\lambda_1 = 2\,(☾ - ⊙)$$

$$-c = \frac{1}{2} + 2c$$

$$-(1 - k^2)f - 2kg = \frac{3}{2} + 2f$$

$$2kf + k^2 g = \frac{3}{2}$$

setzt. Hieraus folgt:

$$c = -\frac{1}{6}$$

$$f = +\frac{3}{2} \cdot \frac{k+2}{k(k^2-1)}$$

$$g = +\frac{3}{2} \frac{k^2+2k+3}{k^2(k^2-1)}$$

Da nun in erster Annäherung:

$$☾ = nt$$

$$\odot = n't$$

so wird:

$$\lambda_1 = 2(n-n')t = knt$$

also:

$$k = 2\frac{n-n'}{n} = 1{,}8504$$

damit findet sich:

$$f = -1{,}2876$$

$$g = 1{,}8297$$

und

$$fw = -0{,}007204$$

$$gw = 0{,}010238 = 35'\,12''$$

so dass also:

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{178{,}72}\right)[1 - 0{,}007204 \cos 2(☾ - \odot)]$$

$$l = ☾ + 35'\,12'' \sin 2(☾ - \odot)$$

Dieses stimmt mit dem von Hansen angegebenen Werte für die Variation:

$$35'\,45''\,01 \sin 2(☾ - \odot)$$

fast genau überein. Indem wir statt der einfachen Form für r und l die allgemeinere:

$$r = a(1 + cw)(1 + w\Sigma f_k \cos\lambda_k)$$

$$l = ☾ + w\Sigma g_k \sin\lambda_k$$

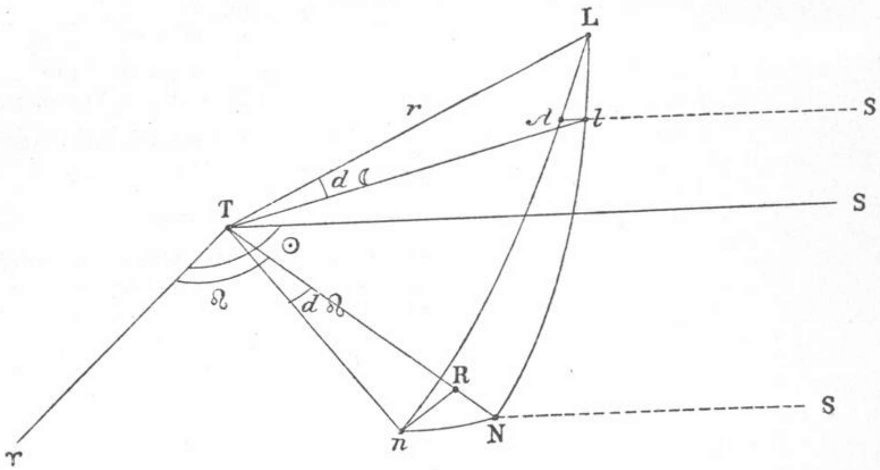
wählen und analoge Rechnungen durchführen, erhalten wir die genauen Werte für r und l. Da es sich nur um die Angabe des Weges handelt, auf welchem man die Werte l und r erlangen kann, so dürfte das Gesagte genügen.

Erkl. 325. Man findet diese Rechnungen durchgeführt in Moebius „die Elemente der Mechanik des Himmels" § 117 u. folg., auch Ges. Werke, IV. Band, Seite 154 bis 242.

Um die Störungen der Knotenbewegung und der Neigung zu erhalten, kann man folgenden Weg einschlagen.

Es sei (vergl. Figur 147) T die Erde, C die Sonne (etwa in 400facher Entfernung gedacht, so dass in der Figur CS, TS, NS parallel erscheinen) und L sei der Mondort in der Entfernung r. Nehmen wir an, dass infolge der ungestörten Bewegung der Mond in der Zeit dt die Strecke Ll zurücklegen würde. Da aber die Sonne auf ihn anziehend einwirkt, so würde er unter ihrer Anziehung allein in dieser Zeit die Strecke $l\lambda$ durchmessen, so dass er in der Wirklichkeit die Bahn $L\lambda$ beschreibt. Verlängern wir Ll und $L\lambda$ bis zur Ekliptik, so erhalten wir die Punkte N und n.

Figur 147.



Wegen der grossen Entfernung der Sonne können wir:

λl und Nn

einfach als parallel annehmen.

Sodann ist:

$$Ll = r\,d\text{☾}$$

und wegen der Proportion:

$$nN : \lambda L = Ll : LN$$

auch:

$$nN = \frac{l\lambda}{r\,d\text{☾}}\, LN$$

Nun ist, da:

$$\sphericalangle\, TNn = \odot - \text{☊}$$

$$nR = Nn \sin(\odot - \text{☊})$$

so dass also:

$$nR = \frac{l\lambda}{r\,d\text{☾}}\, LN \sin(\odot - \text{☊})$$

Nun ist offenbar:

$$d\text{☊} = -\frac{nR}{TR} = -\frac{nR}{TN + NR}$$

oder wenn wir NR als klein gegen TN vernachlässigen:

$$d\text{☊} = -\frac{nR}{TN}$$

also:

$$d\text{☊} = -\frac{l\lambda}{r\,d\text{☾}} \cdot \frac{LN}{TN} \sin(\odot - \text{☊})$$

Wir haben ferner:

$$\sphericalangle\, TLN = 90^0$$

$$\sphericalangle\, LTN = 180^0 - (\text{☾} - \text{☊})$$

also:

$$\frac{LN}{TN} = \sin LTN = \sin(\text{☾} - \text{☊})$$

so dass:

$$d\text{☊} = -\frac{\lambda l}{r\,d\text{☾}} \cdot \sin(\text{☾} - \text{☊}) \sin(\odot - \text{☊})$$

Nun ist nach den Grundsätzen der Dynamik:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = k^2 \varphi$$

wobei φ die beschleunigende Kraft, k deren Intensität in der Einheit der Entfernung und $\frac{d^2 s}{d t^2}$ gleich der Geschwindigkeitszunahme, also:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} \cdot d t^2 = k^2 \varphi \, d t^2$$

gleich dem Weg, der infolge der Geschwindigkeitszunahme zurückgelegt wird, so dass wir also, wenn φ geeignet bestimmt wird:

$$l \lambda = k^2 \varphi \, d t^2$$

setzen können. Nun ist aber in unserem Falle:

$$\varphi = \frac{3 m' r}{r'^3} \cos (☉ - ☾)$$

so dass also:

$$l \lambda = \frac{3 k^2 m' r}{r'^3} \cos (☉ - ☾) \, d t^2$$

und demnach:

$$d ☊ = -3 \frac{k^2 m'}{r'^3} \cdot \frac{d t}{d ☾} \cdot \cos (☉ - ☾) \sin (☾ - ☊) \sin (☉ - ☊) \, d t$$

wird. Diese Gleichung wollen wir umformen, indem wir:

$$☉ - ☾ = m$$
$$☉ - ☊ = m'$$
$$☾ - ☊ = m''$$

setzen und beachten, dass:

$$4 \cos m \sin m' \sin m'' = \cos (m + m' - m'') + \cos (m - m' + m'')$$
$$- \cos (m + m' + m'') - \cos (m - m' - m'')$$

und wegen:

$$m = m' - m''$$

auch:

$$4 \cos m \sin m' \sin m'' = 1 + \cos 2 m - \cos 2 m' - \cos 2 m''$$

so dass wir:

$$d ☊ = - \frac{3}{4} \frac{k^2 m'}{r^3} \frac{d t}{d ☾} [1 + \cos 2 (☉ - ☾) - \cos 2 (☾ - ☊) - \cos 2 (☉ - ☊)] \, d t$$

Setzt man nun:

$$\frac{d ☾}{d ☉} = h \qquad \frac{d ☊}{d ☉} = - j$$

so wird:

$$d m = d ☉ - d ☾ = d ☉ (1 - h)$$
$$d m' = d ☉ - d ☊ = d ☉ (1 + j)$$
$$d m'' = d ☾ - d ☊ = d ☉ (h + j)$$

so dass man also hat:

$$d ☊ = - \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{r'^3} \frac{d t}{d ☾} \cdot \frac{d t}{d ☉} \left(d ☉ + \frac{\cos 2 m \, d m}{1 - h} - \frac{\cos 2 m' \, d m'}{1 + j} - \frac{\cos 2 m'' \, d m''}{h + j} \right)$$

Setzen wir:

$$d ☊ = d ☊_1 + d ☊_2$$

Erkl. 326. Es ist (vergleiche jene Teile der Encyklopädie, die über Integralrechnung handeln):

$$\int \cos \alpha x \cdot dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + \text{Konst.}$$

$$\int \sin \alpha x \cdot dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + \text{Konst.}$$

Erkl. 327. Es ist offenbar:

$$\frac{d\odot}{dM'} \cdot dM' = d\odot$$

oder weil:

$$\frac{d\odot}{dM'} = 1$$

auch:

$$dM' = d\odot$$

Hilfsrechnung.

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{360^0}{365{,}256358\cdots} = 0{,}098561$$

$$\frac{d☾}{dt} = \frac{360^0}{27{,}32166} = 13^0\,17667$$

$$e' = 0{,}0167607$$

$$\odot = 360^0 \text{ für ein Jahr}$$

so dass:

$$\log\frac{3}{4} = 9\cdot8750613$$

$$\log\frac{d☾}{d\odot} = 1\cdot1261001$$

$$8\cdot7489612$$

$$\log 360 = 2\cdot5563025$$

$$1\cdot3052637$$

$$\frac{3}{4}\,\frac{d☾}{d\odot}\cdot 360^0 = 20{,}19592 = 20^0\,11'\,47''$$

$$\log\frac{3}{4}\cdot\frac{d\odot}{d☾} = 8\cdot7489612$$

$$\log 3e' = 8\cdot7014125$$

$$7\cdot4503737$$

$$\text{num} = 0{,}0028208 = 9'\,42'' = 528''$$

so dass:

$$d☊_1 = \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{r'^3}\,\frac{dt}{d☾}\cdot dt$$

beachtet man nun, dass hier genähert:

$$r'^3 = a'^3(1+3e'\cos M')$$

gesetzt werden kann, wo e' die Exzentrizität und M' die mittlere Anomalie bezeichnet, so folgt:

$$d☊_1 = \frac{3}{4} k^2 \frac{m'}{a'^3}(1-3e'\cos M')\frac{dt}{d☾}\,dt$$

Nun ist ferner:

$$k^2 = \frac{n'^2 a'^3}{m'} = \left(\frac{d\odot}{dt}\right)^2 \frac{a'^3}{m'}$$

so dass:

$$d☊_1 = \frac{3}{4}\,\frac{d\odot}{d☾}(1-3e'\cos M')\,d\odot$$

folgt oder:

$$d☊_1 = \frac{3}{4}\,\frac{d\odot}{d☾}\cdot d\odot - \frac{9}{4}e'\frac{d\odot}{d☾}\cos M'\,dM'$$

Integriert man diese Gleichung, so folgt:

$$d☊_1 = \frac{3}{4}\,\frac{d\odot}{d☾}\cdot\vartheta\odot - \frac{9}{4}e'\frac{d\odot}{d☾}\cdot\sin M'$$

oder (vergl. nebenstehende Hilfsrechnung):

$$☊_1 = ☊_0 - 0{,}056100\cdot\odot + 528''\sin M'$$

Wir sehen, dass die Theorie ein Zurückweichen der Knoten um jährlich:

$$20^0\,11'\,47''$$

ergibt, statt:

$$19^0\,19'\,42''$$

also fast 1^0 mehr, als die Beobachtungen liefern. Der Fehler liegt aber in den Vernachlässigungen, die wir uns erlaubt haben.

Entwickelt man den zweiten Teil von $d☊$, nämlich $d☊_2$, so liefert uns die Integration der Gleichung:

$$d☊_2 = \frac{3}{4}\,\frac{d\odot}{d☾}\left(\frac{\cos 2m}{h-1}\,dm + \frac{\cos 2m'}{1+j}\,dm' + \frac{\cos 2m''\,dm''}{h+j}\right)$$

einfach:

$$☊_2 = \frac{3}{8}\,\frac{d\odot}{d☾}\left(\frac{\sin 2m}{h-1} + \frac{\sin 2m'}{1+j} + \frac{\sin 2m''}{h+j}\right)$$

oder wenn man analoge Rechnung durchführt:

$$☊_2 = 5491''\sin 2(\odot - ☊) + 431''\sin 2(☾ - ☊) + 468''\sin 2(\odot - ☾)$$

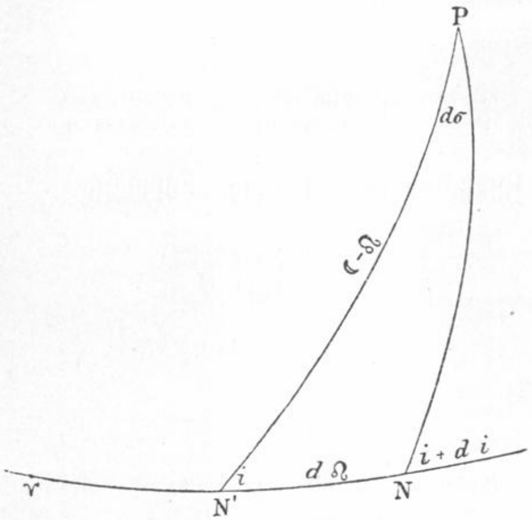
so dass wir jetzt allgemein:

$$☊ = ☊_0 - 0{,}056100\,\odot + 528''\sin M' + 431''\sin 2(☾ - ☊) + 5491''\sin 2(\odot - ☊) + 468''\sin 2(\odot - ☾) + \cdots$$

schreiben können. Es sei bemerkt, dass dieses nur die Anfangsglieder einer sehr ausgedehnten Reihe sind.

Um endlich die Störungen der Neigung zu berechnen, wenigstens die grössten Glieder der Reihe für die Neigung, betrachten wir die Figur 148. Sei P der Mondort, PKN

Figur 148.



die ungestörte, PN' die gestörte Mondbahn, $♈NN'$ ihr Schnitt mit der Ekliptik, alles auf die scheinbare Himmelskugel übertragen gedacht, ferner RN' senkrecht auf PN, so folgt aus dem Dreieck PNN':

$$\cos(i+di) = \cos d\sigma \cos i - \sin d\sigma \sin i \cos(☾ - ☊)$$

$$\sin(i+di) : \sin d\sigma = \sin(☾ - ☊) : \sin d☊$$

woraus nach Vernachlässigung der höheren Potenzen von:

$$di \quad d\sigma \quad d☊$$

$$di = \cos(☾ - ☊)\, d\sigma$$

$$d☊ = \frac{\sin(☾ - ☊)}{\sin i}\, d\sigma$$

folgt. Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{di}{\sin i} = \operatorname{ctg}(☾ - ☊)\, d☊$$

Da nun i klein, so kann man $\sin i$ durch i ersetzen, woraus:

$$\frac{di}{i} = \operatorname{ctg}(☾ - ☊)\, d☊$$

Rechter Hand sind bekannte Grössen. Integriert man, so folgt:

$$\log(i_0 + di) - \log i_0 = \int \operatorname{ctg}(☾ - ☊)\, d☊$$

oder:

$$\log\left(1 + \frac{di}{i_0}\right) = \int \operatorname{ctg}(☾ - ☊)\, d☊$$

woraus unter Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$di = i_0 \int \operatorname{ctg}(☾ - ☊)\, d☊$$

folgt. Führt man die angedeuteten Operationen aus, so folgt:

$$i = 5^0\, 8'\, 40'' + 490'' \cos 2(\odot - ☊) + 38'' \cos 2(☾ - ☊) - 42'' \cos 2(☾ - \odot) + 47'' \sin M' + + \cdots$$

Erkl. 328. Es ist (vergleiche Kleyers Lehrbuch der Integralrechnung):

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{Konst.}$$

oder:

$$\int \frac{dx}{x} = \log(x \cdot \text{Konst.})$$

Zusammenstellung der in diesem Buche vorkommenden Formeln.

Anmerkung. Die Zahlen in der Klammer bezeichnen die Seite, auf welcher die betreffende Formel zu suchen ist.

1) $\varrho = (3{,}58589)\sqrt{h}$ (6) — ϱ Radius des Sichtbarkeitskreises. h Augenhöhe.

2) $h + z = 90^0$ (7) — h Höhe. z Zenithdistanz.

3) $dz = 57''\,717\,\mathrm{tg}\,z$ (11)

4) $dz = \dfrac{57''\,717\,\mathrm{tg}\,z}{1 + 0{,}006364\,\mathrm{tg}\,z}$ (12)

— dz Korrektion wegen Refraktion. z Zenithdistanz.

5) $\Theta = \alpha + t$ (17) Θ Sternzeit.

$$\mathrm{I})\ \begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos a \\ \cos\delta\sin t = \cos h\sin a \\ \cos\delta\cos t = \sin h\cos\varphi + \cos h\sin\varphi\cos a \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathrm{II})\ \begin{cases} \sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \\ \cos h\sin a = \cos\delta\sin t \\ \cos h\cos a = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t \end{cases} \quad (22)$$

δ Deklination.
α Rectascension.
h Höhe.
a Azimut.
φ Polhöhe.
t Stundenwinkel.

Zur Berechnung dienen die Formeln.

6) $\mathrm{tg}\,M = \cos a\,\mathrm{ctg}\,h$

7) $m = \dfrac{\sin h}{\cos M} = \dfrac{\cos h\cos a}{\sin M}$ (22)

8) $\mathrm{tg}\,t = \dfrac{\cos h\sin a}{m\cos(\varphi - M)}$

9) $\mathrm{tg}\,\delta = \cos t\,\mathrm{tg}\,(\varphi - M)$

10) $\begin{cases} \cos\delta\cos t = m\cos M \\ \sin\delta = m\sin M \end{cases}$ (22)

11) $\mathrm{tg}\,a = \dfrac{\cos M\,\mathrm{tg}\,t}{\sin(\varphi - M)}$ (23)

12) $\mathrm{tg}\,h = \dfrac{\cos a}{\mathrm{tg}\,(\varphi - M)}$

13) Zeitgleichung = mittlere Zeit — wahre Zeit
14) mittlere Zeit = wahre Zeit + Zeitgleichung (29)
15) wahre Zeit = mittlere Zeit — Zeitgleichung
16) 1 mittlerer Tag = 1 Sterntag + $3^m\,56^s\,555$ Sternzeit
17) 1 mittlerer Tag = $24^h\,3^m\,56^s$ Sternzeit (32)
18) 1 Sterntag = $23^h\,56^m\,4^s$ mittlere Zeit

19) 1 mittlerer Tag $= \dfrac{366{,}242201}{365{,}242201}$ Sterntagen $= 1{,}002738$ Sterntagen.

20) 1 Sterntag $= \dfrac{365{,}242201}{366{,}242201}$ mittleren Tagen $= 0{,}997270$ mittleren Tagen.

Längendifferenzen.

21) Berlin-Paris $= + 0^h\,44^m\,13^s\,9$
22) Berlin-Greenwich $= + 0^h\,53^m\,34^s\,9$ (36)
23) Paris-Greenwich $= + 0^h\,9^m\,21^s\,0$

Verwandlung der Zeiten.

24) $S = T + t + \Delta$
25) $t = S - T - \Delta$ (42)

T = Sternzeit im Berliner Mittag.
t = mittlere Ortszeit.
S = Sternzeit eines Ortes.
Δ = Korrektion der Ortszeit für Sternzeit.

Auf- und Untergang der Gestirne.

$$26)\quad \cos t_0 = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

$$27)\quad \Theta_0 = \alpha + t_0 \qquad (48)$$

$$28)\quad \Theta_1 = 360^0 + (\alpha - t_0)$$

$$29)\quad \Theta' = 360^0 - \Theta, \qquad (49)$$

$$30)\quad \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}} \qquad (50)$$

$$31)\quad dt_0{}^s = \frac{140^s}{\cos\varphi \cos\delta \sin t_0}$$

t_0 der Stundenwinkel des Aufganges.
Θ_0 Sternzeit des Aufganges.
Θ_1, Θ' Sternzeit des Unterganges.
$dt_0{}^s$ Korrektion wegen Refraktion.

Bestimmung der Uhrkorrektion.

$$32)\quad \cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} \qquad (54)$$

$$33)\quad T = T' + \tau$$

T wahre Zeit der Beobachtung.
T' wahre Uhrzeit.

$$34)\quad \sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \delta + z)\sin\frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}} \qquad (55)$$

$$35)\quad \tau = T' - \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \qquad (56)$$

t_1 und t_2 Zeiten der korrespondierenden Fixsternhöhen.

Bestimmung der Polhöhe.

$$36)\quad \varphi = \frac{1}{2}(z + z') \qquad (56)$$

$$37)\quad \varphi = \delta - z$$

$$38)\quad \begin{cases} \cos\delta \cos t = \varrho \sin\sigma \\ \sin\delta = \varrho \cos\sigma \\ \sin(\varphi + \sigma) = \dfrac{\sin h}{\varrho} \end{cases} \qquad (57)$$

z und z' Zenithdistanzen eines Fixsternes in oberer und unterer Kulmination.
h eine Sternhöhe.
ϱ, σ Hilfsgrössen.

Bestimmung des Azimuts.

$$39)\quad \begin{cases} \cos\delta \cos t = \varrho \cos v \\ \sin\delta = \varrho \sin v \end{cases} \qquad (59)$$

$$40)\quad \operatorname{tg} a = \frac{\cos\delta \sin t}{\varrho \sin(\varphi - v)}$$

δ, t, a, φ übliche Bezeichnung.
ϱ und v Hilfsgrössen.

Geodäsie.

$$41)\quad l = S\cos m - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R^2}\operatorname{tg}\alpha \sin^2 m \qquad (70)$$

$$42)\quad (\beta - \alpha)'' = \frac{S\cos m}{R}\sin 1'' - \frac{1}{2}\frac{S^2}{R^2}\operatorname{tg}\alpha \sin^2 m \sin 1''$$

$$43)\quad (L_A - L_B)'' = \frac{\sin m}{\cos\beta}\cdot\frac{S}{R}\sin 1''$$

$$44)\quad R = \frac{648000''}{(\beta - \alpha)''}\cdot\frac{l}{\pi} \qquad (71)$$

$$45)\quad \lambda = \frac{3600''\cdot l}{(\beta - \alpha)''}$$

$$46)\quad \lambda = l - 2l\sin^2\frac{i}{2} \qquad (73)$$

$$47)\quad L = \lambda - \lambda\frac{H}{R}$$

$$48)\quad y = x\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi \qquad (81)$$

l = Länge d. Meridianbogens.
S = geogr. Entfernung zweier Stationen.
m = Richtungswinkel von S gegen l.
α = geogr. Breite der Endpunkte von S.
β = geogr. Länge der Endpunkte von S.
R = Erdradius.
L_A = geogr. Länge der Endpunkte von S.
L_B = geogr. Breite der Endpunkte von S.

$$49)\quad \varrho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \tag{82}$$

$$50)\quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$51)\quad e^2 = \frac{\lambda_1^{2/3} - \lambda_2^{2/3}}{\lambda_1^{2/3}\sin^2\varphi_1 - \lambda_2^{2/3}\sin^2\varphi_2}$$

$$52)\quad e^2 = \frac{\varrho_1^{2/3} - \varrho_2^{2/3}}{\varrho_1^{2/3}\sin^2\varphi_1 - \varrho_2^{2/3}\sin^2\varphi_2}$$

$$53)\quad \frac{a-b}{b} = 1 - \sqrt{1-e^2} \tag{83}$$

$$54)\quad a = \frac{\varrho_1}{1-e^2}(1-e^2\sin^2\varphi_1)^{3/2}$$

$$55)\quad b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$56)\quad e^2 = \frac{2}{3}\,\frac{\varrho_1\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\varrho_1-\varrho_2}$$

λ = Länge eines Grades.
i = Neigungswinkel gegen den Horizont.
L = der auf dem Meereshorizont reduzierten Länge von λ.
a = der halben grossen Achse des Erdsphäroids.
b = der halben kleinen Achse des Erdsphäroids.
φ = geogr. Breite eines Erdortes, dessen Koordinaten x und y sind.
e = Exzentrizität.

$$57)\quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi = (1-e^2)\operatorname{tg}\varphi \tag{84}$$

$$58)\quad \operatorname{tg}\varphi' = 0{,}993211\operatorname{tg}\varphi$$

$$59)\quad \varrho = \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}} \tag{85}$$

φ geographische Breite.
φ' geozentrische Breite.
ϱ Erdradius für die geographische Breite φ.

Schiefe der Ekliptik.

$$60)\quad \varepsilon = 23^0\,27'\,15''\,65 - 0''\,476\,t$$

$$61)\quad \Delta\varepsilon = 9''\,224\cos\Omega + 0''\,551\cos 2\odot \tag{95}$$

t = 0 am 1. Januar 1884.
ε = die Schiefe der Ekliptik.

Das ekliptikale System.

$$\text{III)}\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\beta &= -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon \end{aligned}\right. \tag{101}$$

β = Breite.
λ = Länge.

$$\text{IV)}\quad \left\{\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon \\ \sin\delta &= \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon \end{aligned}\right. \tag{102}$$

$$62)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= m + n\operatorname{tg}\delta\sin\alpha \\ \delta - \delta_0 &= n\cos\alpha \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Ueber m und n vergleiche Frage 76, Seite 102.

$$63)\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\delta_\odot}{\sin\alpha_\odot} \tag{106}$$

$\alpha_\odot$ = Rectascension der Sonne.
$\delta_\odot$ = Deklination der Sonne.

Theorie der Sonnenuhren.

$$64)\quad \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}p\cdot\sin\varphi \tag{111}$$
Horizontale Sonnenuhr.

$$65)\quad \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}p\cos\varphi \tag{113}$$
Vertikale Sonnenuhr.

Ueber die Parallaxe.

$$66)\quad \sin p = \frac{r}{d}\sin z' \tag{115}$$

$$67)\quad \sin\pi = \frac{r}{d} \tag{116}$$

$$68)\quad \sin p = \sin\pi\sin z' \tag{116}$$

p = Parallaxe.
z' = scheinbare Zenithdistanz.
r = Erdradius.
d = Entfernung des Gestirns vom Erdzentrum.
π = Horizontalparallaxe.

$$69)\quad \left\{\begin{aligned} p + p' &= z_1' + z_2' - (\varphi_1 + \varphi_2) \\ \operatorname{tg}\frac{p'-p}{2} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{z_1'-z_2'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z_1'+z_2'}{2}}\operatorname{tg}\frac{p+p'}{2} \end{aligned}\right. \tag{116}$$

Siehe Antwort auf die Frage 84.

70) $\sin \pi = \frac{a}{r} \sin \pi_1$
71) $\pi_{\odot} = 8{,}85''$ (117)
72) $\pi_{☾} = 57'\,2{,}06''$

a der Halbmesser des Aequators.
π Horizontalparallaxe des Ortes.
π Aequatorealhorizontalparallaxe.

73) $\sin(a' - a) = \frac{\sin \pi \sin a}{\sin z} \sin(\varphi - \varphi')$ (122)
74) $\sin(z - z') = \sin \pi \sin[z - (\varphi - \varphi') \cos a]$ (123)

Korrektion wegen Parallaxe in Azimut und Zenithdistanz.

75) $\pi_{\odot} = D \cdot \pi'$ (126)

π' = Parallaxe eines Planeten.
D = seine Entfernung vom Erdzentrum.

Ueber die Aberration.

76) $A = 20''445 \sin w$
77) $\beta - \beta' = 20''\,445 \sin(L - \lambda) \sin \beta$ (130)
78) $\lambda - \lambda' = \frac{20''\,445 \cos(L - \lambda)}{\cos \beta}$

A = Aberration.
20'' 445 = Aberrationskonstante.
w = Winkel zwischen der Erd- und Lichtrichtung.
Korrektion wegen Aberration in Breite u. Länge.

79) $\left(\frac{\lambda - \lambda'}{20''\,445}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \beta'}{20''\,445 \sin \beta}\right)^2 = 1$ (131) Aberrationsellipse.

Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper.

80) $\Delta = \frac{a}{\pi_{\odot} \sin 1''}$ (133)

a = Erdradius.
$\pi_{\odot}$ = Horizontal-Aequatoreal-Parallaxe der Sonne.
Δ = mittlere Entfernung der Erde von der Sonne.

Theorie der Sonne und Bahn der Erde.

81) $\varepsilon = a \frac{m - n}{m + n}$

e die numerische Exzentrizität.
ε die lineare Exzentrizität.

82) $\varepsilon = ae$ (138)
83) $e = 0{,}016734$
84) $e = 0{,}01679207 - 0{,}0000004135\, t$ (für $1800 + t$)
85) 961'' 82 = 16' 1'' 82 = mittleren Halbmesser der Sonne (139)
86) $961''\,82 = rm$
87) $r = \frac{961''\,82}{m}$ (139)

m der scheinbare Sonnenhalbmesser.
r die Entfernung der Erde von der Sonne.

88) $\pi = 280^0\,21'\,21''\,5 + 61''\,700\, t$ (139)
89) $v = L - \pi$ (140)
90) $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ (143)

π = Perihellänge.
L = der Erdlänge.
v = wahrer Anomalie.

91) $\frac{dv}{dt} = 59'\,10''\,6 + 120''\,1 \cos v$

92) $\frac{dv}{dt} = m(1 + e \cos v)^2$ (145)

93) $r^2 \frac{dv}{dt} = \text{Konst.}$

94) $\mu = \frac{2ab\pi}{T}$
95) $\frac{\mu}{2} = \frac{\pi}{T} \cos \varphi$ (147)

μ = mittlere tägliche Bewegung.
T = Umlaufzeit.
$e = \sin \varphi$

96) $E - e \sin E = \frac{\mu}{ab} t$
97) $M = \frac{\mu}{ab} t$ (149)

E = der exzentrischen Anomalie.
M = der mittleren Anomalie.
a = halbe grosse Achse der Erdbahn.

98) $E - e \sin E = M$ (149)
99) $E = M + \frac{e \sin M \sin 1''}{\sqrt{1 - 2e \cos M + e^2}}$ (150)

Siehe Antwort auf die Frage 96.

$$100)\quad r = a\,(1 - e\cos E) \qquad (150)$$

$$101)\quad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

$$102)\quad \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\operatorname{tg}\frac{v}{2} \qquad (151)$$

$$103)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \\ e = \cos\varphi \end{cases}$$

Siehe Antwort auf die Frage 97.

$$104)\quad v - M = \begin{cases} 6918''\,37 \sin M + 72''\,52 \sin 2M + 1''\,05 \sin 3M + \cdots \\ \left(2e - \frac{e^3}{4}\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \cdots \end{cases} \qquad (152)$$

$$105)\quad L = \lambda + 6918''\,37 \sin M + 72''\,52 \sin 2M + 1''\,05 \sin 3M + \cdots$$

$$L_t = \begin{cases} L_T + (t - T)\,\mu \\ L_T - 14'\,19''\,39853\,n + 42'\,48''\,93189\,m + 59'\,8''\,3304\,p \\ L_T - 57^s\,29324\,n + 2^m\,58^s\,26213\,m + 3^m\,56^s\,5554\,p \end{cases} \qquad (153)$$

$$106)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} L \cos E \qquad (152) \\ A = L - 8891''\,56 \sin 2L + 191''\,65 \sin 4L - 5''\,51 \sin 6L + \cdots \end{cases}$$

Die Planetenbahn.

$$107)\quad \text{☊} = \lambda - \frac{360^0}{687}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \qquad (166)$$

☊ = Knotenlänge.

$$108)\quad \cos z = -\cos\lambda\cos\beta$$

$$109)\quad r = \varrho\,\frac{\sin\psi}{\sin z} \qquad (168)$$

$$110)\quad \sin b = \frac{\varrho}{r}\sin\beta$$

$$111)\quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} i \sin(l - \text{☊}) \qquad (169)$$

r = Radiusvektor.
ϱ = Erddistanz.
λ, β die geozentriscse Länge und Breite.
l, b die heliozentrische Länge und Breite.
i = Neigung.
R = Radiusvektor der Erde.
L = Erdlänge = 180° — Sonnenlänge.
π = Perihellänge.

$$112a)\quad \begin{cases} r\sin b = \varrho\sin\beta \\ r\cos b\cos l = R\cos L + \varrho\cos\beta\cos\lambda \\ r\cos b\sin l = R\sin L + \varrho\cos\beta\sin\lambda \end{cases} \qquad (170)$$

$$112b)\quad r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho\cos\beta\cos(\lambda - L)$$

$$112c)\quad \operatorname{tg} l = \frac{R\sin L + \varrho\cos\beta\sin\lambda}{R\cos L + \varrho\cos\beta\cos\lambda} \qquad (171)$$

$$113)\quad \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(l + l') - \text{☊}\right] = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(l - l')\,\frac{\sin(b + b')}{\sin(b - b')} \qquad (171)$$

$$114)\quad \pi = w + \text{☊} \qquad (173)$$

Siehe Antwort auf die Frage 102.

$$115a)\quad \cos(v - w) = \cos b\cos(l - \text{☊})$$

$$115b)\quad \cos i\sin(v - w) = \cos b\sin(l - \text{☊}) \qquad (173)$$

$$115c)\quad \sin b = \sin i\sin(v - w)$$

Siehe Erkl. 203.

$$116)\quad \operatorname{tg}(l - \text{☊}) = \cos i\operatorname{tg}(v - w) \qquad (174)$$

Siehe Antwort auf die Frage 104.

$$117)\quad \begin{cases} r\sin i\sin(v - w) = \varrho\sin\beta \qquad (173) \\ r\cos i\sin(v - w) = R\cos(L - \text{☊}) + \varrho\cos\beta\cos(\lambda - \text{☊}) \\ r\cos(v - w) = R\sin(L - \text{☊}) + \varrho\cos\beta\sin(\lambda - \text{☊}) \end{cases}$$

Siehe Erkl. 203.

$$118)\quad m = 360^0\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{T}\right)$$

$$119)\quad S = \frac{T}{1 + \frac{m}{t}} \qquad (177)$$

$$120)\quad T = \frac{S}{1 - \frac{m}{s}}$$

m = tägliche Bewegung der Aequinoktialpunkte.
S = siderische Umlaufzeit.
T = tropische Umlaufzeit.

121) $\varrho^2 = r^2 + R^2 - 2R\varrho \cos b \cos(l - L)$

122) $\sin\beta = \frac{r}{\varrho} \sin b$ (178) Vergleiche Aufgabe 68.

123) $\operatorname{tg}(\lambda - L) = -\frac{r \cos b \sin(l - L)}{R - r \cos b \cos(l - L)}$

Ueber den scheinbaren Planetenlauf.

124) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r' \sin u' t - r \sin u t}{r \cos u t - r' \cos u' t}$ (179)

125) $\cos\gamma = \cos(u' - u)\,t = \frac{r'^2 u' + r^2 u}{r r' (u + u')}$ γ = Disgressionswinkel.

126) $\operatorname{tg}^2 E = \frac{r'^2 u'^2 - r^2 u^2}{(r^2 - r'^2) u^2}$ E = Elongationswinkel.

127) $\cos\gamma = \frac{(r r')^{1/2}}{r' - (r r')^{1/2} + r}$ (180)

128) $\operatorname{tg}^2 E = \frac{r^2}{r(r + r')}$

129) $r = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 E + \operatorname{tg} E \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 E}$

r = Entfernung des Planeten von der Sonne.

130) $\beta = 2(180^0 - u' t - E)$ (181) β = Rücklaufbogen.

Theorie der Vorübergänge der unteren Planeten.

131) $\frac{\pi}{P} = \frac{R - r}{R}$ (183)

132) $D = P - \pi$ (184)

π = Sonnenparallaxe.
P = Venusparallaxe.
R = Erdentfernung von der Sonne.
r = Venusentfernung von der Sonne.

133) $P = D \frac{R}{r}$

134) $\pi = D\left(\frac{R}{r} - 1\right)$ (184)

ϱ = scheinbarer Sonnenradius.
ϱ' = scheinbarer Venushalbmesser.
s = die Sehne des Planetenvorüberganges.

135) $BF\left(\frac{s}{2} - BF\right) = \varrho'(\varrho - \varrho')$

136) $(\varrho - \varrho')^2 = \left(\frac{s}{2} - BF\right)^2 + d^2$ (185) Siehe Antwort auf die Frage 106.

Theorie der Jupitermonde.

137) $U = \frac{360^0 \tau}{360^0 + w}$ (187) Siehe Antwort auf die Frage 107.

138) $w = \frac{(r + d)\varrho' - d\varrho}{r}$ (188)

139) $\sin b = \frac{d}{r} \sin u \sin i$ (189)

140) $\cos\varphi = \frac{d}{w} \sin\beta \sin i$ (190)

141) $\sigma = 2w \sin\varphi$

142) $t = \frac{\sigma}{\mu}$

Siehe Antwort auf die Frage 108.

143) $T_{n-1} - T_0 = (n-1)\,s - \frac{\varrho_0 - \varrho_{n-1}}{v}$ (195)

144) $s = \frac{(\varrho'_0 - \varrho'_{n-1})(T_{n-1} - T_0) + (\varrho_0 - \varrho_{n-1})(T'_{n-1} - T_0)}{(n-1)\left[(T_0 + T'_0) - (T_{n-1} + T'_{n-1})\right]}$

145) $v = \frac{(\varrho_0 + \varrho'_0) - (\varrho_{n-1} + \varrho'_{n-1})}{(T_0 - T'_0) - (T_{n-1} - T'_{n-1})}$

Siehe Antwort auf die Frage 109.

Theorie des Saturnringes.

146) $\sin n = \sin i \sin (l - \text{☊})$

147) $\sin n = \sin i \sin (l - \text{☊}) \cos\beta + \cos i \sin\beta$ (195)

148) $R' = R \sin n$

149) $\frac{b}{a} = \sin i$ (196)

Siehe Antwort auf die Frage 110.

Die Theorie des Mondes.

150) $T_{si} = \frac{t_{si}\, T_{sy}}{T_{sy} + t_{si}}$

151) $T_{sy} = \frac{t_{si}\, T_{si}}{t_{si} - T_{si}}$

152) $T_{tr} = \frac{t_{tr}\, T_{sy}}{T_{sy} + t_{tr}}$

153) $T_{sy} = \frac{t_{tr}\, T_{tr}}{t_{tr} - T_{tr}}$

(203)

T_{si} = siderische Umlaufzeit des Mondes.
T_{sy} = synodische Umlaufzeit des Mondes.
T_{tr} = tropische Umlaufzeit des Mondes.
t_{si} = siderische Umlaufzeit der Erde.
t_{tr} = tropische Umlaufzeit der Erde.

Mondfinsternisse.

154) $\beta = \pi - d + p + \delta$ (211)

d = Halbmesser der Sonne.
δ = Halbmesser des Mondes.
p = Horizontalparallaxe der Sonne.
π = Horizontalparallaxe des Mondes.
β = Mondbreite.

155) $T_{st} = \frac{\Delta\lambda \cos i - \Delta\odot}{\beta \sin\Theta \cos\Theta}$ (213) Siehe Antwort auf die Frage 116.

156) $t = \frac{3600^s \cos\Theta}{\Delta\lambda \cos i - \Delta\odot} \sqrt{(R+\delta)^2 - \beta\cos\Theta}$ (214)

157) $t_a = T - t$

158) $t_e = T - t$

Siehe Antwort auf die Frage 117.

159) $mn = \frac{1}{2\delta}(R+\delta)^2 - \beta\cos\Theta$ (215) Siehe Antwort auf die Frage 118.

Sonnenfinsternisse.

160) $\Delta = \Delta' + \varrho(\pi - p)$ (216)

161) $\Delta = \varrho(\pi - p) + d + \delta$

162) $\Delta = \varrho(\pi - p)$ (217)

Δ der wahre Abstand des Sonnen- und Mondmittelpunktes.
Δ' der scheinbare Abstand des Sonnen- und Mondmittelpunktes.
π die Mondparallaxe.

163) $\Delta = \varrho(\pi - p) + \delta - d$

164) $\Delta = \varrho(\pi - p) - \delta + d$ (217)

d = scheinbarer Halbmesser der Sonne.
δ = scheinbarer Halbmesser des Mondes.

165) $\operatorname{tg}\Theta = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos D}$

166) $c = 3600 \cdot \frac{n \sin\Theta}{D_1}$

167) $t^s = c \operatorname{tg}\Theta$

168) T_m = Zeit der Konjunktion $- t$

169) $\cos w = \frac{n}{\Delta}$

(218)

D = der Deklination des Mondes.
D_1 = der stündlichen Bewegung des Mondes in der Deklination weniger jener der Sonne.
Θ = der Neigung der relativen Mondbahn.
α_1 = der stündlichen Bewegung des Mondes in der Rectascension weniger jener der Sonne.

170) $\tau^s = \operatorname{ctg} w$

171) $T_m - \tau$ (219) Anfang der Finsternis.

172) $T_m + \tau$ Ende der Finsternis.

173) $\sin\varphi = \cos a \cos\delta_\odot$

174) $\sin\varphi' = \cos b \cos\delta_\odot$ (221)

Vergleiche Frage 122.

Berechnung einer parabolischen Bahn.

175) $F = \frac{p^2}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right)$ (227) F = Parabelfläche. v = der wahren Anomalie. p = Parameter.

176) $(r + r_1 + \varkappa)^{3/2} - (r + r_1 - \varkappa)^{3/2} = 6kt$ (230) r, r_1 Radiusvektoren. $\varkappa$ die Sehne.

177) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda - L)}$ (231)

178) $\sin\chi = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

179) $\cos\chi = \cos\beta\cos(\lambda - L)$

180) $r = \frac{R\sin\chi}{\sin z}$

181) $r = \frac{\varrho\sin\chi}{\sin(\chi + z)}$

182) $r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\chi$

Vergleiche Frage 126.

183) $\varrho'' = M\varrho$ (234)

184) $M = \frac{t_{,,} - t_,}{t_, - t} \cdot \frac{\cos\beta_,}{\cos\beta_{,,,}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_,\sin(\lambda_, - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,})}{\operatorname{tg}\beta_{,,}\sin(\lambda_{,,} - \odot_{,,}) - \operatorname{tg}\beta_,\sin(\lambda_{,,,} - \odot_{,,})}$ (235)

Resultate zu den ungelösten Aufgaben.

Zu Aufgabe 6. $dz = 1' 39''$
„ „ **7.** $dz = 2' 2''$
„ „ **8.** $14^h 32^m 55^s$
„ „ **9.** $232^0 26' 30''$
„ „ **10.** $\delta = -24^0 2' 18''$
$t = 328^0 44' 28''$
„ „ **11.** $h = 54^0 22' 44''$
$a = 55^0 42' 52''$
„ „ **12.** $\alpha = 0^h 20^m 39^s$

Zu Aufgabe 21. $9^h 4^m 18^s 63$
„ „ **22.** 4. März 7^h und 4. März 15^h
„ „ **23.** $0^h 31^m 9^s$
„ „ **24.** $15^h 19^m 4^s$
„ „ **25.** $4^h 22^m 30^s$
„ „ **26.** $14^h 16^m 26^s 35$

Zu Aufgabe 29. Arcturus geht um $6^h 17^m$ Sternzeit auf und um $22^h 2^m$ unter.

Zu Aufgabe 31. Um $3^h 8^m 41^s$ Morgens.

Zu Aufgabe 37. $\varphi = 20^0 11'$
„ „ **38.** $\varphi = 37^0 53'$

Zu Aufgabe 51. $\lambda = 74^0 37' 17''$ $\beta = -31^0 8' 36''$
„ „ **52.** $\alpha = 6^h 39^m 57^s$ $\delta = -16^0 33' 20''$
„ „ **53.** $\alpha = 10^h 0^m 27^s$ $\delta = +12^0 41' 53''$
„ „ **54.** $\alpha = 14^h 43^m 30^s$ $\delta = -15^0 27' 17''$
„ „ **55.** $\alpha = 6^h 39^m 57^s$ $\delta = -16^0 33' 20''$

Register.

(Die Zahlen geben die Seite an.)

A.

Aberration 126.
Abplattung 83.
Abweichung 15.
Aequator 13.
Aequatoreal-System 15. 21. 22. 102.
— -Projektion 91.
— -Horizontal-Parallaxe 116.
Aequatoreale Sonnenuhr 109.
Aequinoktialpunkte 16.
Anfangsrichtung 3.
Anomalie der Ellipse 76.
— exzentrische 148.
— mittlere 149. 156.
— wahre 140.
Anomalistischer Monat 206.
— Umlaufzeit 206.
Anziehung 247.
Apogeum 139.
Apsidenlinie 139.
Argument der Breite 174.
Ascentio recta 16.
— obliqua 16.
Aspecten 163.
Asteroiden 198.
Astronomie 1. 2.
Attraktionskonstante 253.
Aufgang der Gestirne 48.
Ausweichung 180.
Achse 13.
Azimut 7.
— Bestimmung desselben 58. 64.

B.

Bahn der Erde 143.
— -Elemente 172.
— -Bestimmung 237.
Basis der Triangulation 71.
Bedeckung 211.
Bogengrössen 17.
Brechung 10.
— Winkel 11.
— Exponent 11.
Breite, geozentrische eines Erdortes 82.
Breite, eines Sternes 100.
— geographische 14. 27.
— Bestimmung desselben 56. 60. 62.

C.

Chronologie 2.

D.

Datum, astronomisches 42.
Deklination 15.
Depression des Horizonts 5.
Dichte 256.
Dissgression 180.
Drachenkopf 202.
Drakonischer Monat 202.
Durchmesser des Mondes 204.
— der Sonne 146.

E.

Einfallswinkel 11.
Ekliptik 16. 95.
Ekliptikale System 100.
Elemente der Bahn 172.
Ellipse 76.
Elongation 180.
Entfernung der Himmelskörper 132.
Epakten 203.
Ephemeriden 178.
Epicykeln 166.
Epoche 95. 172.
Erdbahn 143.
— elemente 152. 197.
— ellipsoid 82.
— masse 256.
— messung 65.
— radius 84.
— sphäroid 77.
— weite 119.
Eulersche Gleichung 230.
Evektion 208. 209.
Exzentrizität der Erbahn 138.
— -Grenzen 139.
— lineare 76.

Exzentrizität, numerische 76.
Exzentrische Anomalie 148.

F.

Finsternisse der Jupiterstrabanten 134. 190.
— des Mondes 211.
— der Sonne 216.
— Periode derselben 225.
Fixsternparallaxe 118.
Frühling, ewiger 96.
— Dauer desselben 158.
Frühlingspunkte 16. 100.
Fundamentalebene 3.

G.

Gegenpol 100.
Geozentrische Breite 83.
— Koordinaten 161.
Geodäsie 65.
Geographische Breite 14.
— Länge 36. 245.
Gerade Aufsteigung 16.
Geschwindigkeit des Lichtes 193.
Gesichtskreis 5.
Gleichung, Eulersche 230.
— jährliche 209.
— Keplersche 149.
— Lambertsche 230.
Gnomon 99.
Gradmessung 71.
Gradnetz 72.
Gravitation 247.
Gregorianischer Kalender 153.
Grosses Jahr 102.
Grösse des Horizonts 6.

H.

Heliozentrische Breite 162.
— Koordinaten 161.
— Länge 162.
Herbstpunkt 100.
Himmels-Aequator 13.
— -Achse 13.
— -Gegend 7.
— -Gewölbe 138.
— -Zeichen 16.
Hipparchs Periode 203.
Höhe, scheinbare 8.
— wahre 7. 8.
— korrespondierende 55.
Horizont, natürlicher 5.
— wahrer 5.
Horizontale System 5. 21.
— Sonnenuhr 110.
— Parallaxe 115.

J.

Jahr, Gregorianische 153.
— grosse Platonische 102.
— julianische, 153.
— persische, 153.
— siderische 32. 147.
— tropische 31. 44. 153.
Jahr, Länge desselben 44.
Jährliche Gleichung 208.
— Parallaxe 118.
Jnvariable Ebene 171.
Julianische Zeitrechnung 153.
Jupitermasse 256.
— monde 185. 199.
— elemente 198.

K.

Kalenderreform 153.
Kartengradnetze 92.
Keplers Gesetze 28.
— Gleichung 149.
Kernschatten 211.
Kimm 5.
Knoten 96.
— Linie 162.
— Länge 187.
Koluren 100.
Kometenbahn 226.
Kometen, periodische 244.
Konjunktion 162.
Konstante der Aberration 126.
— der Attraktion 253.
— der Präzession 102.
— der Refraktion 11.
Konstruktion einer Sonnenuhr 110.
Koordinaten 3.
Korrektion wegen Aberration 129.
— wegen Parallaxe 122.
— wegen Refraktion 10.
— der Uhr 54.
Korrespondierende Höhen 55.
Krümmungskreis 80.
Kulmination 8. 53.
Kurtierte Erddistanzen 240.

L.

Lage eines Sterns 3.
Landkartennetze 92.
Länge 100.
— Bestimmung derselben 245.
— eines Erdortes 34.
— des Jahres 44. 147.
— heliozentrische 162.
— des Knotens 162.
— des Perihels 139.
Lichtgeschwindigkeit 191. 193.

M.

Mars-Bahn 160.
— Elemente 199.
— Monde 198.
Masse 255.
Mathemathische Geographie 2.
Meridian eines Erdortes 7.
— -Linie 59. 110.
— -Bogen 67. 70.
Merkurs Durchgang 181.
— Elemente 196.
Meteoriten 244.
Metons Cyklus 203.
Mittaglinie 110.

Mittelpunktsgleichung 151.
Mittlere Anomalie 149.
— Länge 152.
— Sonne 29.
— Zeit 29.
Monat 202.
Mond 201.
— -Bahn 204. 210.
— -Bewegung 204.
— -Distanzen 245.
— -Durchmesser 205, am Horizont kleiner 138.
— -Finsternis 211.
— -Knoten 206.
— -Kulminationen 245.
— -Masse 256.
— -Neigung 207. 267.
— -Tafeln 209.

N.

Nadir 7.
Nachtgleichenlinie 16.
Nautik 2.
Neigung 162. 187.
Neptun 201.
— -Monde 201.
Netze für Landkarten 92.
Nordpunkt 7.
Normale 77.
Nutation 95.

O.

Obere Kulmination 8.
Opposition 163.
Ordinate 76.
Ort, geometrischer 3. 4.
Ostpunkt 7.

P.

Parabolische Bahn 226.
Parallaxe 115.
— jährliche 117.
Parallaktische Gleichung 209.
Parallelkreis 4.
Perigeum 139.
Perihel 139.
Periheldistanz 141.
Perihellänge 139. 173.
Periode der Finsternisse 225.
— der Sonnenflecken 155.
— der Störungsglieder 209.
Periodische Kometen 244.
Planetenbewegung 247.
— elemente 196.
— lauf 178.
Planetoiden 198.
Polargleichung der Ellipse 76.
Polarprojektion 89.
Pol des Aequators 15.
— der Ekliptik 100.
Polhöhe 14.
— Bestimmung derselben 56.
Präzession 16. 95.
— -Tafeln 103. 104.
Problem der drei Körper 261.
Projektion 3.
— äquatoreale 91.
— polare 89.
— stereographische 87.
Projektionszentrum 88.
Prostaphäresis 152.

Q.

Quadratur 163.

R.

Radiusvektor 76. 150. 160.
Reduktion auf den Horizont 72.
— „ das Meeresniveau 72.
— „ die Ekliptik 152. 174.
Reflexionswinkel 9.
Refraktion 9.
— Korrektion wegen 10.
— Konstante 11.
— Tafel 12.
Relative Mondbahn 213.
Rotation der Sonne 154.
Rücklaufbogen 180.

S.

Sarosperiode 225.
Satelliten 185.
Saturn 199.
Saturnring 193. 199.
Saturnmonde 200.
Schaltjahr 153.
Schiefe der Ekliptik 95.
— Bestimmung derselben 99.
— Folgen derselben 96.
Schiffahrt 2.
Schwere 247.
Sektor 228.
Sextilschein 163.
Skaphe 66.
Solstitien 97.
Sonnenäquator 154.
Sonnenfinsternis 216.
Sonnenflecken 154.
Sonnenparallaxe 181. 183.
Sonnenrotation 154.
Sonne, mittlere 29.
„ wahre 29.
Sonnenuhr 108.
Sternkatalog 17.
— parallaxe 120.
Sternschnuppen 244.
Sterntag 27.
Sternzeit 27.
Sternweite 119.
Störungen 258. 264. 267.
Stundenlinie 15.
Stundenwinkel 15.
Syzygien 163.

T.

Tagbogen 50.
Tangente 77.
Tertilschein 163.
Tierkreis 16.
Triangulation 71.

Tropen 97.
Tropisches Jahr 31.

U.

Uhrkorrektion 54.
Uhrwürfel 114.
Umlaufzeit, anomalistische 202.
— drakonische 202.
— siderische 164. 177. 202.
— synodische 164. 177. 202.
— tropische 164. 177. 202.
Untere Kulmination 8.
Uranuselemente 200.
— monde 200.

V.

Variation 209.
Venuselemente 197.
— durchgang 181.
Verfinsterungen der Jupitermonde 134.
Vertikale Sonnenuhr 109.
Verwandlung der Koordinaten 21. 101.
— „ Zeiten 32.
— „ Zeitgrössen 37.

W.

Weltachse 13.
— gegend 7.
— pol 13.
Wendekreise 97.
Westpunkt 7.
Widderpunkt 16.
Wintersolstitium 100.

Z.

Zeit, mittlere 29.
— wahre 28.
Zeitbestimmung 54.
— gleichung 29. 157. 158. 160.
— rechnung 54.
Zenith 7.
Zentralbewegung 248.

LÁSKA ASTRONOMIE.

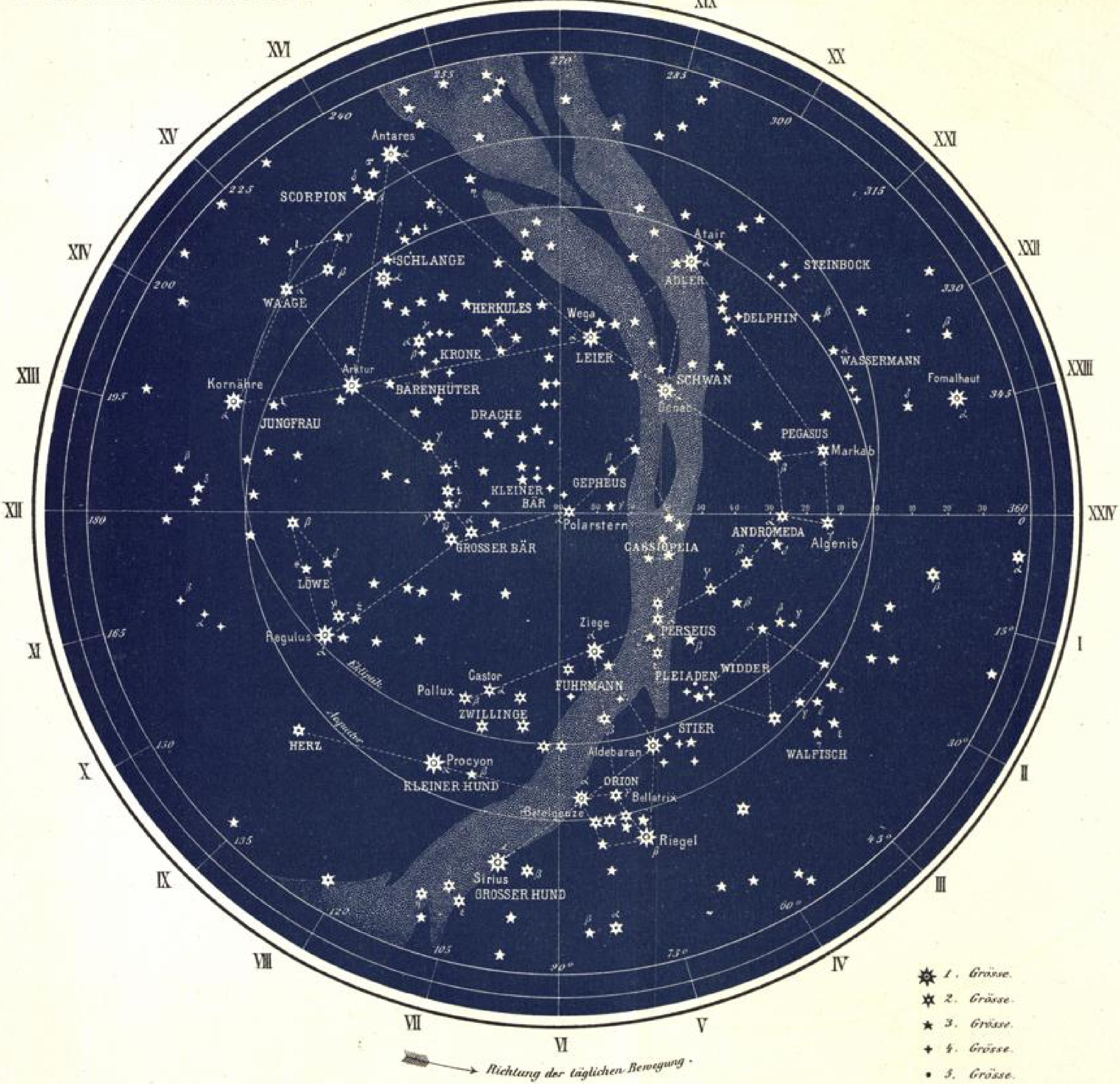


Fig. 58, zu Seite 93.