Ein verbessertes Verfahren zur Feststellung der Isomorphie endlicher Graphen

Hinteregger, Josef

1976

2. Kapitel. Operationen mit Relationen. Basis eines Mengensystems

2. Kapitel. Operationen mit Relationen, Basis eines Mengensystems.

2.1 Definition

Seien $A,B \subset X \times X$ Relationen auf der Menge $X = \{1,..,n\}$, $(a_{ij}),(b_{ij}) \in \{o,1\}_{(n,n)}$ die zugehörigen o-1-Adjazenzmatrizen.

Operation auf $P(X \times X)$	entsprechende Operation auf $\{o,1\}_{(n,n)}$ mit Ergebnis (c_{ij})	
1. Komplement $\overline{A} = X \times X \setminus A$	$c_{ij} = \overline{a}_{ij}$	entsprechende
2. Vereinigung $A \cup B$	$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$	boole'sche
3. Durchschnitt $A \cap B$	$c_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$	Operation

4. Umkehrung oder Transposition

$A^T := \{(x,y) \mid (y,x) \in A\}$	$c_{ij} = a_{ji}$ (transponierte M.)

5. Produkt oder Hintereinanderausführung

$A \circ B := \{(x,y) \mid \exists\, z \in X: (x,z) \in A \wedge (y,z) \in B\}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists\, k \in X: a_{ik} \wedge b_{ik} = 1 \\ o & \text{sonst} \end{cases}$

Um das Ergebnis einer Multiplikation von (a_{ij}) und (b_{ij}) über den ganzen Zahlen verwenden zu können, definieren wir noch das folgende

6. (m)-Produkt $(m=O..n)$

$A\ (m)\ B := \{(x,y) \mid m = \lvert \{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B\} \rvert \}$	$c_{ij} = \begin{cases} 1 & m = \lvert \{k \in X \mid a_{ik} \wedge b_{kj} = 1\} \rvert \\ o & \text{sonst} \end{cases}$ $[m = \lvert \{k \in X\ a_{ik} \wedge b_{kj} = 1\} \rvert$ $\Leftrightarrow$ (jetzt $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$) $m = \sum_{k \in X} a_{ik} \cdot b_{kj}]$

Bemerkung Die Einheit bezüglich des Produktes 2.2.5 heißt Diagonale: $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$, $\forall\, K \subset X \times X: K \circ \Delta = \Delta \circ K = K$;

ihre Adjazenzmatrix ist die Einheitsmatrix.

2.2 Satz

Zwischen den soeben definierten Operationen gelten folgende Beziehungen: $(A,B \subset X{\times}X)$

1. De-Morgan-Regeln, Distributivität von $\cap$ und $\cup$.
2. $[\overline{A}]^T = \overline{[A^T]}$, $(A \cup B)^T = A^T \cup B^T$ und $(A \cap B)^T = A^T \cap B^T$.
3. $[A \circ B]^T = B^T \circ A^T$ und $[A \ (m)\ B]^T = B^T \ (m)\ A^T$.
4. $A \circ B = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A(j)B$.
5. $A(i)B \cap A(j)B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; i=j$.

Seien zusätzlich $B_1, B_2 \subset X{\times}X$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

6. $$A\ (m) \left[B_1 \cup B_2\right] = \bigcup_{\substack{0 \leq m_1, m_2 \leq m \\ m_1+m_2=m}} \left[A(m_1)B_1\right] \cap \left[A(m_2)B_2\right].$$
7. $$\left[B_1 \cup B_2\right]\ (m)\ A = \bigcup_{\substack{0 \leq m_1, m_2 \leq m \\ m_1+m_2=m}} \left[B_1(m_1)A\right] \cap \left[B_2(m_2)A\right].$$

Beweis

1. bis 3. bekannt, bzw. Einsetzen der Definitionen.

4. $\exists\, z \in X\colon (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B \iff$

$$1 \leq |\{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B\}| \leq |X| = n .$$

5. $(x,y) \in [A(i)B] \cap [A(j)B] \Rightarrow$

$$i = |\{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B\}| = j .$$

6. $C(x,y) := \{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B_1 \cup B_2\}$

$D(x,y) := \{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B_1\}$

$E(x,y) := \{z \in X \mid (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B_2\}$

Es gilt dann: $C(x,y) = D(x,y) \cup E(x,y)$, $D(x,y) \cap E(x,y) \neq \emptyset$,

also $|C(x,y)| = |D(x,y)| + |E(x,y)|$ (*).

$\underline{\subseteq}$: $(x,y) \in A(m)[B_1 \cup B_2] \Rightarrow |C(x,y)| = m \Rightarrow$

$(m_1 := |D(x,y)|, m_2 := |E(x,y)| \quad m_1+m_2 \overset{(*)}{=} |C(x,y)| = m) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, m_1, m_2$: $o \leq m_1, m_2 \leq m$, $m_1+m_2=m$, $(x,y) \in A(m_1)B_1 \wedge$

$\wedge\ (x,y) \in A(m_2)B_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (x,y) rechte Seite.

$\underline{\supseteq}$: $(x,y) \in A(m_1)B_1 \wedge (x,y) \in A(m_2)B_2$, $m_1+m_2=m \Rightarrow$

$m_1 = |D(x,y)| \wedge m_2 = |E(x,y)| \quad \underline{|C(x,y)| \overset{(*)}{=} m_1+m_2 = m}$

$\Rightarrow$ $(x,y) \in A(m)[B_1 \cup B_2]$.

7.: 6. auf $A^T(m)[B_1^T \cup B_2^T]$ anwenden und die Gleichung transponieren (Regeln 2. und 3.).

2.3 Folgerung

Seien $A,B \subset X\times X$, $A = \bigcup_{i\in I_A} A_i$, $B = \bigcup_{i\in I_B} B_i$,

$(A_i)_{i\in I_A}$ disjunkt und $(B_i)_{i\in I_B}$ disjunkt.

Dann gilt:

$$A(m)B = \bigcup_{(m_{st}) \in I} \ \bigcap_{(s,t)\in I_A\times I_B} A_s(m_{st})B_t$$

$$\text{mit} \quad I := \{(m_{st}) \in \{o..m\}^{I_A\times I_B} \mid m = \sum_{(s,t)\in I_A\times I_B} m_{st} \}$$

Beweis:

Aus 2.2.6 erhält man durch Induktion nach $|I_B|$:

a) $$A(m)B = \bigcup_{(m_t) \in I_1} \ \bigcap_{t\in I_B} A(m_t)B_t,$$

$$I_1 := \{(m_t) \in \{o..m\}^{I_B} \mid m = \sum_{t\in I_B} m_t \}$$

und aus 2.2.7 durch Induktion nach $|I_A|$:

b) $$A(m_t)B_t = \bigcup_{(m_{st})\in I_2} \ \bigcap_{s\in I_A} A_s(m_{st})B_t ,$$

$$I_2 := \{(m_{st}) \in \{o..m\}^{I_A} \mid m_t = \sum_{s\in I_A} m_{st} \}$$

Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen von b) in a) und Anwendung des Distributivgesetzes für $\cap$ und $\cup$.

Beweis (2.5)

$\forall\ (x,y) \in X \times X$: $\quad \begin{array}{l} (x,y) \in A \iff (s(x),s(y)) \in A' \\ (x,y) \in B \iff (s(x),s(y)) \in B' \end{array}$.

Daß dann $(x,y) \in \begin{array}{c} \overline{A} \\ A^T \\ A \cup B \\ A \cap B \end{array} \iff (s(x),s(y)) \in \begin{array}{c} \overline{A'} \\ A'^T \\ A' \cup B' \\ A' \cap B' \end{array}$

ist leicht zu sehen.

$(x,y) \in A(m)B \iff m = |\{z \in X|\ (x,z) \in A \wedge (z,y) \in B\}| =$

$= |\{z \in X|(s(x),s(z)) \in A' \wedge (s(z),s(y)) \in B'\}| =$

$=$(s bijektiv) $|s(\{z \in X|(s(x),s(z)) \in A' \wedge (s(z),s(y)) \in B'\})| =$

$= |\{s(z) \in X|(s(x),s(z)) \in A' \wedge (s(z),s(y)) \in B'\}| = m \iff$

$\iff (s(x),s(y)) \in A'(m)B'$.

$(x,y) \in A \circ B \iff (s(x),s(y)) \in A' \circ B'$ gilt dann wegen 2.2.4 .

2.6 Definition

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{B}$ Mengensysteme.

$\mathcal{B}$ heißt Basis von $\mathcal{M}$, falls gilt:

$\forall\ M \in \mathcal{M}\ \ \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}: M = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}'} B$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Eine Basis heißt disjunkt, falls $\forall\ B,C \in \mathcal{B}: B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B=C$.

2.7 Satz

Falls für eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{M}$ zusätzlich gilt:

$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{B}$ disjunkt, so ist diese disjunkte Basis $\mathcal{B}$ eindeutig.

Beweis

Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ eine weitere disjunkte Basis von $\mathcal{M}$.

Sei $B_o \in \mathcal{B}: \exists\ \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}: B_o = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}'} C = (\forall\ C \in \mathcal{C}'\ \exists\ \mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}: C = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_C} B)$

$B_o = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}'} \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_C} B \Rightarrow \forall\ C \in \mathcal{C}'\ \forall\ B \in \mathcal{B}_C: B_o \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B = B_o$

$\forall\ C \in \mathcal{C}': \mathcal{B}_C = \{B_o\}, C = B_o \in \mathcal{C}$, also $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ und durch Vertauschen von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Für vorgegebene Relationen wird jetzt eine "Hülle" bezüglich der Operationen von 2.1 definiert:

2.4 Definition

Seien $G_1,..,G_k \subset X{\times}X$ Relationen auf der Menge $X = \{1,..,n\}$, Λ die Diagonale von X.

Dann bezeichne $H(\Delta,G_1,..,G_k)$ die Menge aller aus Δ, $G_1,..,G_k$ mittels der Operationen von 2.1 ableitbaren Relationen auf X.

Formal: $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Teilmengen von $X{\times}X$,

definiert durch: $H_o := \{\Lambda,G_1,..,G_k\}$

$$H_{i+1} := H_i \cup \left\{ G\subset X{\times}X \;\middle|\; \left[\exists\, A\in H_i,\ G=\overline{A} \vee G=A^T\right] \vee \left[\begin{array}{l}\exists\, A,B\in H_i,\ G=A\cup B \vee G=A\cap B \vee \\ \quad \vee(\exists\, m,\ o\leq m\leq n:\ G=A(m)B\ )\end{array}\right]\right\}$$

$$(\forall\, i\in\mathbb{N}:\ H_i \subset P(X{\times}X) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \subset P(X{\times}X)\quad)$$

$$H(\Delta,G_1,..,G_k) := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \quad \text{endlich.}$$

Bemerkung: Auf Grund von 2.2.4 ist $H(\Delta,G_1,..,G_k)$ auch gegenüber "o" abgeschlossen.

Die soeben definierte Menge ermöglicht es, aus einer gegebenen Isomorphismus-Invarianten weitere abzuleiten: Jede Invariante eines $K \in H(\Delta,G_1,..,G_k)$ ist auch eine Invariante der G_i, denn es gilt der Satz:

2.5 Satz

Seien $A,B,A',B' \subset X{\times}X$ Relationen auf $X = \{1,..,n\}$.
Ein Isomorphismus $s:X \longrightarrow X$ von A nach A' und von B nach B' ist dann auch ein Isomorphismus

von	A	nach	A',
"	A^T	"	A'^T,
"	$A \cup B$	"	$A' \cup B'$,
"	$A \cap B$	"	$A' \cap B'$,
"	$A \circ B$	"	$A' \circ B'$ und
von	$A(m)B$	nach	$A'(m)B'$ $(m=o..n)$.