universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Ein verbessertes Verfahren zur Feststellung der Isomorphie endlicher Graphen

Hinteregger, Josef

1976

1. Kapitel. Einführung

urn:nbn:at:at-ubi:2-12744

1. Kapitel. Einführung

1.1 Definition

Ein endlicher Graph ist ein Paar (X,K) einer nichtleeren endlichen Menge X und einer endlichen Menge $K \subset X \times X \times N$, wobei gilt: $\forall\ (x,y,i) \in K\ \forall\ j,\ 1 \leq j \leq i$: $(x,y,j) \in K$.
Die Elemente von X heißen Knoten, diejenigen von K Kanten.
Für eine Kante $(x,y,j) \in K$ heißt
x Ausgangsknoten,
y Endknoten und
j fortlaufende Zählung der Kanten von x nach y.
Eine Kante (x,x,j) heißt Schleife.
Ein Graph (X,K) heißt symmetrisch oder ungerichtet, falls gilt: $\forall\ (x,y,j) \in K$: $(y,x,j) \in K$.

In dieser Arbeit werden nur endliche Graphen behandelt.

1.2 Definition

Ein Graph (X,K) heißt einfach, falls gilt:
$\forall\ (x,y,j) \in K$: $j=1$ ("Von x nach y höchstens eine Kante").
Üblicherweise wird für einfache Graphen die Menge
$K' := \{(x,y) \in X \times X \mid (x,y,1) \in K\}$ als Kantenmenge definiert.
K' ist eine Relation auf X und ist durch K eindeutig festgelegt, ebenso K durch K'.
Ein einfacher Graph (X,K) heißt vollständig, falls
$\forall\ x,y \in X,\ x \neq y$: $(x,y,1) \in K$.

1.3 Definition

Ein benannter Graph ist ein Graph (X,K) zusammen mit einer Benennungsfunktion $l: K \cup X \longrightarrow L$, L Menge.

Die Angabe der Kantenmenge K erfolgt durch Aufzählung der Elemente oder durch die Adjazenzmatrix (auch Inzidenzm.)
(a_{ij}) mit $a_{ij} := |\{(x,y,j) \in K \mid x=x_i, y=y_j\}|$, falls $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$.
Für einen einfachen Graphen (X,K) sind das die Werte der charakteristischen Funktion von K': $a_{ij} = \chi_{K'}(x_i,x_j)$.

Die Frage, um die es in dieser Arbeit geht, ist folgende: Wie kann man anhand zweier gegebener Graphen feststellen, ob diese isomorph sind, d.h. sich nur durch die Bezeichnung der Knoten unterscheiden, oder ob sie wesentlich verschieden sind?

Diese Frage stellt sich bei den verschiedensten Struktur-Vergleichen:
In der Automatentheorie wird die Funktion eines Automaten durch den "Zustands-Überführungs-Graphen" beschrieben, welcher den jeweils nächsten Zustand des Automaten angibt (Siehe [6]).
Eine chemische Formel ist ein benannter Graph:
Die Atome(=Knoten) haben Namen, die Bindungen(=Kanten) Wertigkeiten. Bei einer gegebenen Formel stellt sich die Frage, ob diese bereits in einer Bibliothek vorhanden ist oder nicht. ([8])
Auch elektrische Schaltungen können als benannte Graphen betrachtet werden. Das Problem des Vergleichs einer "neuen" Schaltung mit den bereits bekannten, in einer Bibliothek gespeicherten Schaltungen stellt sich hier etwa im Patentamt.
Ebenso lassen sich Strukturen in formalen Sprachen durch Graphen beschreiben.

1.4 Definition

Seien (X,K_1), (Y,K_2) zwei Graphen, möglicherweise mit den Benennungen l_1 und l_2.

Eine bijektive Abbildung $s: X \longrightarrow Y$ $(\Rightarrow |X|=|Y|)$ heißt <u>Isomorphismus</u> von (X,K_1) nach (Y,K_2), falls gilt:

$$\forall\ (x,y,j) \in X\times X\times \mathbb{N}: (x,y,j) \in K_1 \Leftrightarrow (s(x),s(y),j) \in K_2.$$

Falls die Graphen benannt sind, muß zusätzlich gelten:

$$\forall\ x\in X: l_1(x) = l_2(s(x)) \text{ und } \forall\ (x,v,j) \in K: l_1(x,y,j) = l_2(s(x),s(y),j)$$

Ein Isomorphismus von (X,K) nach (X,K) heißt <u>Automorphismus</u> von (X,K).
Die Partition von X, welche durch die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt einen Automorphismus } s \text{ von } (X,K) \text{ mit } y \doteq s(x) \ .$$

erzeugt wird, heißt <u>Automorphismenpartition</u>. (bezüglich K)

Da wir es nur mit endlichen Graphen zu tun haben, kann man zu jedem Graphen (X,K) mit $|X| = n$ einen dazu isomorphen Graphen (X',K) finden mit $X' = \{1,..,n\} \subset \mathbb{N}$.
Für das Isomorphismenproblem genügt es also, Graphen mit einer Knotenmenge $X = \{1,..,n\}$ zu betrachten.

Das Isomorphismenproblem ist theoretisch immer lösbar: da X endlich ist, ist auch die Menge aller Anordnungen (Permutationen) von X endlich, und es brauchen nur alle diese Anordnungen durchprobiert zu werden;
da die Mächtigkeit dieser Menge aber gleich $n!$ ist, bedeutet "endlich" bereits für $n=15$ "einige Jahrzehnte".
Man wird also die Anordnungen nicht wahllos durchprobieren, sondern ihre Anzahl einschränken durch die Berechnung verschiedener Isomorphismus-invarianter Eigenschaften der Knoten, Kanten etc.: Durch diese Invarianten wird eine Partition der Knotenmenge X (der Menge $X \times X$) erzeugt, sodaß dann nur noch Knoten (Kanten) der entsprechenden Partitionsmengen einander zugeordnet werden können. Falls eine Partitionsmenge des einen Graphen beim anderen keine entsprechende hat, so schließt dies einen Isomorphismus bereits aus.
Alle bisher bekannten Verfahren arbeiten nach diesem Prinzip, sie unterscheiden sich nur durch die gewählten Invarianten.
In günstigen Fällen erreicht man auf diese Art die jeweilige Automorphismenpartition, die aber selber erst eine relativ grobe Beschreibung der Automorphismengruppe ist.

Gesucht wäre ein vollständiges System von Invarianten, d.h. ein System von Invarianten, aus deren Gleichheit für zwei Graphen die Existenz eines Isomorphismus folgt. Es ist nicht einmal ein System von Invarianten bekannt, die sicher zur Automorphismenpartition führen.

Aus der Algebra ist die Menge der Invariantenteiler als vollständiges System für die Ähnlichkeit zweier Matrizen über Z bekannt: Falls zwei Matrizen $A,B \in \mathbb{Z}_{(n,n)}$ dieselben Invariantenteiler besitzen, so gibt es eine n,n-Matrix P mit $\det(P) = 1$, sodaß $B = PAP^{-1}$ ist.

Zwei einfache Graphen (X,G_1), (X,G_2) mit den Adjazenzmatrizen A und B sind genau dann isomorph, falls es eine Permutationsmatrix P (in jeder Zeile und Spalte genau eine 1) gibt, sodaß $B = PAP^{-1}$ ist.

"$\det(P) = 1$" ist jedoch leider nicht hinreichend dafür, daß P eine Permutationsmatrix ist.
In [6] werden Zusammenhänge zwischen den Invariantenteilern der Adjazenzmatrix und den Eigenschaften des Graphen untersucht.

Die Invariantenteiler der Adjazenzmatrix liefern zwar eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Isomorphismus, jedoch keine Information darüber, welche Knoten einander zugeordnet werden können im Fall, daß die Invariantenteiler einen Isomorphismus nicht ausschließen. Da ihre Berechnung einen beträchtlichen Rechenaufwand erfordert, wird diese invariante Eigenschaft nur selten verwendet.

Die am leichtesten zu bestimmende invariante Knoteneigenschaft ist die folgende:

<u>1.5 Definition</u> (X,G) Graph.

$N_G: X \longrightarrow \{o,..,|X|\}$

$x \longmapsto |\{z \in X \mid \exists j \in N: (x,z,j) \in G\}|$ bzw. für einfache Graphen:

$|\{z \in X \mid (x,z) \in G\}|$, die Anzahl der Nachfolger von x,

heißt <u>Ausgangsgrad</u> oder <u>Grad</u> von x bezüglich G.

1.6 Folgerung

Seien (X,A), (X,B) zwei einfache Graphen mit $A,B \subset X \times X$ und $A \cap B = \emptyset$.

Dann ist $\forall\, x \in X$: $N_{A \cup B}(x) = N_A(x) + N_B(x)$.

Beweis $\{z \in X \mid (x,z) \in A \cup B\} = \{z \in X \mid (x,z) \in A\} \,\dot{\cup}\, \{z \in X \mid (x,z) \in B\}$.

Der folgende Satz zeigt, daß man sich für das Isomorphismenproblem auf k-Tupel einfacher Graphen beschränken kann:

1.7 Satz

Seien (X,G_1) und (X,G_2) zwei Graphen mit den Benennungen

$l_1 : X \cup G_1 \longrightarrow \mathbb{N}$ und $l_2 : X \cup G_2 \longrightarrow \mathbb{N}$.

Eine Bijektion $s : X \longrightarrow X$ ist ein Isomorphismus von (X,G_1) nach (X,G_2) genau dann, wenn gilt:

$\forall\ (a,b,c) \in \{1,\ldots,\max\{j \mid (x,y,j) \in G_1\}\} \times l_1(G_1) \times l_1(X)$:

s ist ein Isomorphismus der einfachen Graphen (X,H^1_{abc}) und (X,H^2_{abc}), wobei

$H^i_{abc} := \{(x,y) \in X \times X \mid (x,y,a) \in G_i \wedge l_i(x,y,a)=b \wedge l_i(x)=c\}$.

Beweis

$\Rightarrow$: $\underline{(x,y) \in H^1_{abc}} \iff (x,y,a) \in G_1 \wedge l_1(x,y,a)=b \wedge l_1(x)=c$

$$\left(\begin{array}{l} (x,y,a) \in G_1 \iff (s(x),s(y),a) \in G_2, \quad l_1(x,y,a)=l_2(s(x),s(y),a)=b \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l_1(x) = l_2(s(x)) = c \end{array} \right)$$

$\iff \underline{(s(x),s(y)) \in H^2_{abc}}$

$\Leftarrow$: $(x,y,j) \in G_1$, $b := l_1(x,y,j)$, $c := l_1(x)$. $\iff$

$(x,y) \in H^1_{jbc} \iff (s(x),s(y)) \in H^2_{jbc}$

$\iff (s(x),s(y),j) \in G_2$, $l_2(s(x),s(y),j)=l_1(x,y,j)=b$

$l_2(s(x)) = l_1(x) = c$.

Wir werden uns also jetzt auf k-Tupel einfacher Graphen $((X,G_1),\ldots,(X,G_k))$ beschränken, falls die zugehörige Knotenmenge X außer Zweifel steht, sogar auf die k-Tupel $(G_1,\ldots,G_k)$ der jeweiligen Kantenmengen oder Relationen(1.2!).

Tinhofer hat in [9] gezeigt, daß die Grade bezüglich aller Graphen aus $E := \left\{ K \subset X \times X \,\middle|\, \begin{array}{l} s \text{ ist Automorphismus von } (G_1,\ldots,G_k) \Rightarrow \\ \Rightarrow s \text{ ist Automorphismus von } K \end{array} \right\}$ ausreichen, die Automorphismenpartition der Knotenmenge X zu bestimmen. Diese Menge ist gegenüber den Operationen von Definition 2.1 (Durchschnitt, Produkt etc.) nach Satz 2.5 abgeschlossen.

In meiner Arbeit habe ich die Menge $H(\Delta,G_1,\ldots,G_k)$ (Def 2.4) der mit den Operationen von 2.1 von $G_1,\ldots,G_k,\Delta$ ableitbaren Relationen untersucht. Durch die Grade bezüglich der Relationen aus $H(\Delta,G_1,\ldots,G_k)$ kommt man jedoch nur in bestimmten Fällen (Satz 4.11) zur Automorphismenpartition. Daß dies nicht allgemein der Fall ist, zeigt der symmetrische Graph der Ordnung 26 aus [3], siehe 4.15.

In Kapitel 4 wird ein Verfahren zur Konstruktion einer disjunkten Basis von $H(\Delta,G_1,\ldots,G_k)$ angegeben. Diese Basis enthält eine Partition der Diagonale Δ, durch die wiederum eine Partition der Knotenmenge $X = \{1,\ldots,n\}$ erzeugt wird, die nach Satz 4.8 durch keinen Grad bezüglich irgendeiner Relation $K \in H(\Delta,G_1,\ldots,G_k)$ mehr verfeinert werden kann. Die disjunkte Basis ermöglicht also die systematische Verwendung der Grade bezüglich aller Relationen $K \in H(\Delta,G_1..G_k)$, während die bisher bekannten Verfahren als Invarianten hauptsächlich die Grade bezüglich willkürlich aus $H(\Delta,G_1..G_k)$ ausgewählter Relationen verwenden und mit diesen die Knotenpartition verfeinern. Auch die Berechnung der Knoten-Quotienten-Graphen nach Corneil([1],[2]) führt nicht aus $H(\Delta,G_1..G_k)$ hinaus, wie in der Bemerkung nach 4.12 angedeutet wird. Zum Unterschied von dem in [5] beschriebenen Verfahren wird bei der Konstruktion der Basis ganz $X \times X$ aufgeteilt und nicht nur, wie dort, die Kantenmenge. Außerdem ist durch Satz 4.4 gesichert, daß keine Eigenschaften mehr separat berechnet werden müssen, dies geschieht schon durch die fortschreitende Partition von $X \times X$.