Ueber das Combinieren zu einer bestimmten Summe

Hočevar, Franz

Innsbruck, 1881

Zur Lehre von der Theilbarkeit der ganzen Zahlen

Zur Lehre von der Theilbarkeit der ganzen Zahlen.

Von demselben.

Das Verfahren, nach welchem hier die bekannten Regeln für die Theilbarkeit dekadischer Zahlen abgeleitet werden, weicht von dem sonst üblichen in einigen Punkten ab und scheint demselben in manchen Fällen vorzuziehen zu sein. Vor allem sind die abgeleiteten Regeln insoferne allgemeiner, als sie für alle ganzen, einem beliebigen Zahlensysteme angehörigen Zahlen gelten, ohne dass sich durch diesen Umstand der Gang der Rechnung irgendwie complicierter gestaltet. Ferner ist es bei dem hier befolgten Vorgange unmittelbar ersichtlich, in Bezug auf welche Theiler einfache und daher brauchbare Theilbarkeitsregeln überhaupt zu erwarten sind. Endlich tritt auch hiebei der Grund, warum bezüglich einiger Theiler gleichlautende Theilbarkeitsregeln bestehen, möglichst klar zum Vorschein.

Alle Beweise stützen sich auf ganz elementäre Lehrsätze der Algebra; sie werden jedoch auch auf einem zweiten, meist kürzeren Wege geführt, wobei aus der Zahlentheorie die Definition der Congruenzen, sowie die Sätze über die Addition und Multiplication derselben als bekannt vorausgesetzt werden

Die Sätze, auf welche wir uns in der Folge vorzugsweise berufen werden und deren Begründung wir an dieser Stelle übergehen können, lauten:

1) Geben zwei Zahlen bei der Division durch eine dritte denselben Rest, so ist ihre Differenz durch die dritte Zahl theilbar und umgekehrt.

1*) Folgesatz: Ist die Differenz zweier Zahlen und eine derselben durch eine dritte theilbar, so ist es auch die zweite.

2) Zwei Zahlen a und b heissen in Bezug auf eine dritte m (den Modulus) congruent, wenn dieselben durch m dividiert den gleichen Rest liefern. In Zeichen: $a \equiv b \pmod{m}$, wenn $a = mq + r$ und $b = mq' + r$ ist.

3) Gelten die Congruenzen $a \equiv b$, $c \equiv d$, $e \equiv f, \ldots$ alle in Bezug auf den Modulus m, so besteht auch die Congruenz

$$a + c + e + \ldots \equiv b + d + f + \ldots \pmod{m},$$

oder allgemeiner

$$\alpha a + \beta c + \gamma e + \ldots \equiv \alpha b + \beta d + \gamma f + \ldots \pmod{m}.$$

4) Unter derselben Voraussetzung hat man auch

$$ace \ldots \equiv bdf \ldots \pmod{m}$$

4*) Folgesatz: Aus $a \equiv b \pmod{m}$ folgt

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

(S. z. B. Lejeune-Dirichlet's „Vorlesungen über Zahlentheorie" pag. 32—34).

Ist b die Basis eines Zahlensystems, so erscheint irgend eine diesem System angehörige ganze Zahl in der Form

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n,$$

worin jede Zahl a kleiner als b ist.

1. Es sei vor allem m ein Theiler von b, also $b = hm$. Dann ist

$$N = a_0 + m\,(a_1 h + a_2 h^2 m + \ldots + a_n h^n m^{n-1}),$$

somit $N - a_0$ theilbar durch m. Daraus folgt nach 1*) der Satz:

Eine Zahl ist durch einen Theiler ihrer Grundzahl theilbar, wenn es die an niedrigster Stelle stehende Ziffer ist und umgekehrt.

Ist $b = 10$, so sind darin die Theilbarkeitsregeln für die Theiler 2, 5, 10 enthalten.

[Aus der Gleichung $N = a_0 + m\,(a_1 h + \ldots + a_n h^n m^{n-1})$ folgt nach 1) und 2) $N \equiv a_0 \pmod{m}$, wenn $b \equiv 0 \pmod{m}$].

2. Ist wieder $b = hm$, so kann N auch in der folgenden Weise geschrieben werden

$$N = a_0 + a_1 b + m^2(a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n m^{n-2}),$$

woraus hervorgeht, dass die Differenz

$$N - (a_0 + a_1 b)$$

durch m^2 theilbar ist.

Eine Zahl ist also durch das Quadrat eines Theilers ihrer Grundzahl theilbar, wenn dies von der Zahl gilt, welche durch die an den zwei niedrigsten Stellen befindlichen Ziffern in demselben Zahlensysteme gebildet wird.

Für $b = 10$ erhält man die bekannten Theilbarkeitsregeln bezüglich der Zahlen 4, 25, 100.

[Aus der Gleichung $N = a_0 + a_1 b + m^2\,(a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n m^{n-2})$ erhält man nach 1) und 2) $N \equiv a_0 + a_1 b \pmod{m^2}$, wenn $b \equiv 0 \pmod{m}$].

3. Für $b = hm$ erhält man auf ähnliche Weise

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + m^3(a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n m^{n-3}).$$

Eine Zahl ist somit durch den Cubus eines Theilers ihrer Grundzahl theilbar, wenn dies von der Zahl gilt, welche von den an den drei niedrigsten Stellen stehenden Ziffern in demselben Zahlensysteme gebildet wird.

Hieraus folgen für $b = 10$ die Theilbarkeitsregeln bezüglich der Theiler 8, 125, 1000.

[Aus $N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + m^3(a_3 h^3 + \ldots + a_n h^n m^{n-3})$ ergibt sich nach 1) und 2)

$$N \equiv a_0 + a_1 b + a_2 b^2 (\text{mod } m^3), \text{ wenn } b \equiv o \ (\text{mod. } m).]$$

Auf demselben Wege können offenbar die Theilbarkeitsregeln bezüglich m^4, m^5, ... abgeleitet werden, wenn m einen Theiler von b bedeutet.

Auch ist zu bemerken, dass man die Zahl b selbst als einen Theiler von b auffassen kann und dass somit, entsprechend den vorausgegangenen Sätzen, eine Zahl durch die erste, zweite, dritte, ... Potenz ihrer Grundzahl theilbar ist, wenn sie von der niedrigsten Stelle an gerechnet eine, zwei, drei ... aufeinanderfolgende Nullen enthält.

4. Nun sei m ein Theiler von $b - 1$, also $b - 1 = h_1 m$ und $b = h_1 m + 1$. Hieraus folgt weiter

$$b^2 = (h_1{}^2 m + 2h_1)\, m + 1 = h_2 m + 1,$$
$$b^3 = (h_1 m + 1)(h_2 m + 1) = h_3 m + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

worin die Grössen h_2, h_3, ... zur Abkürzung für leicht auffindbare ganzzahlige Ausdrücke gesetzt sind. Es ist dann

$$N = a_0 + a_1(h_1 m + 1) + a_2(h_2 m + 1) + \ldots + a_n(h_n m + 1),$$
$$N = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + m\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots + a_n h_n).$$

Eine Zahl im Systeme mit der Grundzahl b ist also durch einen Theiler von $b - 1$ theilbar, wenn es ihre Ziffernsumme ist und umgekehrt.

Für $b = 10$ erhält man die Theilbarkeitsregeln bezüglich der Zahlen 3 und 9.

[Ist $b \equiv 1$ (mod. m), so folgt $b^2 \equiv 1$, $b^3 \equiv 1, \ldots$ (mod. m),
ferner $a_0 \equiv a_0$, $a_1 b \equiv a_1$, $a_2 b^2 \equiv a_2, \ldots\ a_n b^n \equiv a_n$, (mod. m),
somit $N \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ (mod. m), wenn $b \equiv 1$ (mod. m)].

Bemerkung. Haben zwei Zahlen gleiche Ziffernsummen, so ist ihre Differenz durch jeden Theiler von $b - 1$ theilbar, (oder anders ausgedrückt: sie sind congruent in Bezug auf jeden Theiler von $b - 1$). Hieraus ergibt sich durch Specialisierung der bekannte Satz: Verändert man in einer dekadischen Zahl die Aufeinanderfolge der Ziffern und subtrahirt die so erhaltene Zahl von der ursprünglichen, so ist die Differenz durch 9 theilbar.

5. Ist nun m ein Theiler von $b + 1$, also $b + 1 = h_1 m$ und

$$b = h_1 m - 1,$$

so folgt

$$b^2 = (h_1{}^2 m - 2h_1)\, m + 1 = h_2 m + 1,$$
$$b^3 = (h_2 m + 1)(h_1 m - 1) = h_3 m - 1,$$
$$b^4 = (h_3 m - 1)(h_1 m - 1) = h_4 m + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Daher ist

$$N = a_0 + a_1(h_1 m - 1) + a_2(h_2 m + 1) + a_3(h_3 m - 1) + \ldots$$
$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots + m(a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots)$$
$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) + m\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots).$$

Eine Zahl im Systeme mit der Grundzahl b ist durch einen Theiler von $b+1$ theilbar, wenn dies von der Differenz der Summen der an geraden und der an ungeraden Stellen stehenden Ziffern gilt und umgekehrt.

Für $b = 10$ ist $m = 11$.

[Aus $b \equiv -1$ folgt $b^2 \equiv +1$, $b^3 \equiv -1$, $b^4 \equiv +1$ etc. (mod. m) ferner $a_0 \equiv a_0$, $a_1 b \equiv -a_1$, $a_2 b^2 \equiv a_2$, $a_3 b^3 \equiv -a_3 \ldots$ (mod. m), daher $N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots$ (mod. m), wenn $b \equiv -1$ (mod. m)].

6. Ist m ein Theiler von $b^2 - 1$, also $b^2 - 1 = h_2 m$,

$$b^2 = h_2 m + 1,$$

so erhält man hier aus auf ähnlichem Wege, wie unter 4),

$$b^4 \equiv h_4 m + 1,\ b^6 \equiv h_6 m + 1, \ldots .$$

Also ist

$$\begin{aligned} N &= (a_0+a_1 b) + (a_2+a_3 b)(h_2 m+1) + (a_4+a_5 b)(h_4 m+1) + \ldots \\ &= (a_0+a_1 b) + (a_2+a_3 b) + (a_4+a_5 b) + \ldots + m[(a_2+a_3 b)h_2 \\ &\qquad + (a_4+a_5 b)h_4 + \ldots]. \end{aligned}$$

Theilt man also eine dem Zahlensysteme mit der Basis b angehörige Zahl von der niedrigsten Stelle an in lauter zweiziffrige demselben System angehörige Zahlen, so ist stets die Summe derselben gleichzeitig mit der gegebenen Zahl durch einen Theiler von $b^2 - 1$ theilbar. Da $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$ ist, so sind die unter 4. und 5. betrachteten Fälle in dem vorliegenden als specielle Fälle enthalten.

Für $b = 10$ kann man $m = 3, 9, 11, 33, 99$ setzen.

[Aus $b^2 \equiv 1$ folgt $b^4 \equiv 1$, $b^6 \equiv 1, \ldots$ (mod. m),

ferner

$a_0 + a_1 b \equiv a_0 + a_1 b$, $(a_2+a_3 b)\, b^2 \equiv a_2 + a_3 b$, $(a_4+a_5 b)\, b^4 \equiv a_4+a_5 b \ldots$ (mod. m), daher auch

$N \equiv (a_0+a_1 b) + (a_2+a_3 b) + (a_4+a_5 b) + \ldots$ (mod. m) für $b^2 \equiv 1$ (mod. m)].

7. Ist hingegen m ein Theiler von $b^2 + 1$, also

$$b^2 = h_2 m - 1,$$

so ist weiter

$$\begin{aligned} b^4 &= (h_2 m-1)\,.\,(h_2 m-1) = h_4 m + 1, \\ b^6 &= (h_4 m+1)(h_2 m-1) = h_6 m - 1, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= a_0 + a_1 b + (a_2+a_3 b)(h_2 m-1) + (a_4+a_5 b)(h_4 m+1) + \ldots . \\ &= (a_0+a_1 b) - (a_2+a_3 b) + (a_4+a_5 b) - \ldots + m[(a_2+a_3 b)h_2 \\ &\qquad + (a_4+a_5 b)h_4 + \ldots]. \end{aligned}$$

Theilt man somit eine dem System mit der Grundzahl b angehörige Zahl von der niedrigsten Stelle an in zweiziffrige Zahlen desselben Systems (wie unter 6.) und subtrahiert die Summe der an zweiter, vierter,... Stelle stehenden Zahlen von der Summe der an ungeraden Stellen befindlichen, so ist die erhaltene Differenz gleichzeitig mit der gegebenen Zahl durch jeden Theiler von $b^2 + 1$ theilbar.

Für $b = 10$ ist $m = 101$.

[Aus $b^2 \equiv -1 \pmod{m}$ erhält man weiter

$$b^4 \equiv 1,\ b^6 \equiv -1,\ b^8 \equiv 1, \ldots \pmod{m},$$

$$a_0 + a_1 b \equiv a_0 + a_1 b,\ (a_2 + a_3 b)\, b^2 \equiv -(a_2 + a_3 b),\ (a_4 + a_5 b)\, b^4 \equiv a_4 + a_5 b,$$

$$N \equiv (a_0 + a_1 b) - (a_2 + a_3 b) + (a_4 + a_5 b) - \ldots \pmod{m}$$

wenn $b^2 \equiv -1 \pmod{m}$].

8. Nehmen wir nun m als einen Theiler von $b^3 - 1$ an, so ist

$$b^3 = h_3 m + 1,$$
$$b^6 = h_6 m + 1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + (a_3 + a_4 b + a_5 b^2)(h_3 m + 1) + \ldots.$$
$$= (a_0 + a_1 b + a_2 b^2) + (a_3 + a_4 b + a_5 b^2) + \ldots + m.[(a_3 + a_4 b + a_5 b^2) h_3 + \ldots].$$

Theilt man also eine dem System b angehörige Zahl von der niedrigsten Stelle an in dreiziffrige Zahlen desselben Systems, so ist die Summe derselben gleichzeitig mit der gegebenen Zahl durch jeden Theiler von $b^3 - 1$ theilbar.

Für $b = 10$ ist $b^3 - 1 = 999 = 3^3 . 37$, daher $m = 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999$.

[Ist $b^3 \equiv 1 \pmod{m}$, so ist weiter $b^6 \equiv 1,\ b^9 \equiv 1, \ldots$

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 \equiv a_0 + a_1 b + a_2 b^2,\ (a_3 + a_4 b + a_5 b^2)\, b^3 \equiv a_3 + a_4 b + a_5 b^2, \ldots$$

$$N = (a_0 + a_1 b + a_2 b^2) + (a_3 + a_4 b + a_5 b^2) + (a_6 + a_7 b + a_8 b^2) + \ldots \pmod{m}$$

für $b^3 \equiv 1 \pmod{m}$].

9. Es sei endlich m ein Theiler von $b^3 + 1$. Dann ist

$$b^3 = h_3 m - 1,\ b^6 = h_6 m + 1,\ b^9 = h_9 m - 1,$$

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + (a_3 + a_4 b + a_5 b^2)(h_3 m - 1) + (a_6 + a_7 b + a_8 b^2)$$
$$(h_6 m + 1) + \ldots$$
$$= (a_0 + a_1 b + a_2 b^2) - (a_3 + a_4 b + a_5 b^2) + (a_6 + a_7 b + a_8 b^2) \ldots$$
$$+ m\, [(a_3 + a_4 b + a_5 b^2)\, h_3 + \ldots].$$

Theilt man die gegebene Zahl ebenso, wie unter 8), in dreiziffrige Zahlen und ist die Differenz aus den Summen der an ungeraden und der an geraden Stellen befindlichen Zahlen durch einen Theiler von $b^3 + 1$ theilbar, so ist es auch die gegebene Zahl und umgekehrt.

Für $b = 10$ ist $b^3 + 1 = 1001 = 7 . 11 . 13$. Man kann somit $m = 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001$ setzen.

[Aus $b^3 \equiv -1 \pmod{m}$ erhält man $b^6 \equiv 1,\ b^9 \equiv -1, \ldots,$

$$a_0 + a_1 b + a_2 b^2 \equiv a_0 + a_1 b + a_2 b^2$$
$$(a_3 + a_4 b + a_5 b^2)\, b^3 \equiv -(a_3 + a_4 b + a_5 b^2)$$
$$(a_6 + a_7 b + a_8 b^2)\, b^6 \equiv a_6 + a_7 b + a_8 b^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$N \equiv (a_0 + a_1 b + a_2 b^2) - (a_3 + a_4 b + a_5 b^2) + (a_6 + a_7 b + a_8 b^2) \ldots \pmod{m},$$

wenn $b^3 \equiv -1 \pmod{m}$.]