Ueber das Combinieren zu einer bestimmten Summe

Hočevar, Franz

Innsbruck, 1881

Ueber das Combinieren zu einer bestimmten Summe

urn:nbn:at:at-ubi:2-493

Ueber das Combinieren zu einer bestimmten Summe.

Von **Dr. Franz Hočevar,** k. k. Gymnasiallehrer.

Zur Lösung einiger specieller Probleme der Combinations- und der Wahrscheinlichkeitslehre, ferner zur Auflösung gewisser diophantischer Gleichungen ersten Grades u. s. f. ist es manchmal erforderlich, alle Combinationen irgend einer Classe zu bilden, für welche die Summen aller Stellenzeiger oder, wenn man diese selbst als Elemente verwendet, die Summen der Elemente einen gegebenen Wert besitzen. Man nennt das Verfahren, wornach die Combinationen von der angeführten Eigenschaft in einer gesetzmässigen Aufeinanderfolge gebildet werden, „das Combinieren zur bestimmten Summe" und findet die Regeln für jenes Verfahren u. a. in den Werken: „Die combinatorische Analysis" von Ettingshausen, „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra" von Salomon, „Lehrbuch der A. und A." von Haberl u. s. f. Die naheliegende Frage nach der Anzahl jener Combinationen ist nun, so weit ich mich überzeugen konnte, nur in dem zuerst genannten Werke u. zw. nur theilweise beantwortet worden. Ettingshausen leitet nämlich a. a. O. pag. 57 eine Formel ab, welche bis auf die Bezeichnung mit der Gleichung (25) in diesem Aufsatze identisch ist und die recurrierende Bestimmung der Anzahl von Combinationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe gestattet. Er berechnet ferner mit Hilfe jener Formel eine Tafel, welche, etwas erweitert, am Schlusse dieser Arbeit wiedergegeben ist. Eine zweite in dem citierten Werke vorkommende Formel ist nur ein specieller Fall der unten abgeleiteten Gleichung (28).

In der vorliegenden Arbeit werden nun sowohl für Combinationen mit, als auch ohne Wiederholung je drei Recursionsformeln, deren jede zur Beantwortung gewisser Fragen eine besondere Eignung besitzt, und ausserdem indepedente Formeln für die vier niedrigsten Classen abgeleitet. Ferner gelangt der allgemeinste und wohl auch schwierigste Fall zur Betrachtung, dass die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gebildet werden sollen, im vorhinein bestimmt, beziehungsweise beschränkt erscheint. Einzelne den theoretischen Erwägungen eingefügte Beispiele zeigen endlich, von welcher Art die speciellen Anwendungen der erhaltenen Resultate allenfalls sein können.

I. Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe bei einer unbeschränkten Anzahl von Elementen.

Die Anzahl aller möglichen Combinationen ohne Wiederholung von der Classe r und zur Summe s soll mit $C_r(s)$ bezeichnet werden.

Die niedrigste Combination rter Classe hat offenbar zur Summe

$$1+2+3+\ldots\ +r=\binom{r+1}{2},$$

daraus folgt

$$\left.\begin{array}{ll} C_r(s)=0, & s<\binom{r+1}{2} \\ C_r(s)=1, & s=\binom{r+1}{2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Eine Recursionsformel für $C_r(s)$ erhält man durch folgende Ueberlegung:

Wird in allen Combinationen zur Summe s, welche die Einheit als Element enthalten, ein jedes Element um die Einheit erniedrigt und überdies die in jeder Combination erhaltene Null weggelassen, so erhält man alle Combinationen ohne Wiederholung von der Classe $r-1$ und zur Summe $s-r$. Denn würde sich irgend eine Combination wiederholt, oder gar nicht ergeben, so müsste die entsprechende Combination rter Classe, welche man durch den entgegengesetzten Vorgang stets wieder ableiten kann, ebenfalls wiederholt, resp. gar nicht vorhanden sein, was gegen unsere Voraussetzung ist. Also ist $C_{r-1}(s-r)$ die Anzahl der die Einheit als Element enthaltenden Combinationen.

Erniedrigt man ferner in allen Combinationen zur Summe s, in denen das Element 2 als niedrigstes vorkommt, ein jedes Element um zwei Einheiten, so ergeben sich alle Combinationen $(r-1)$ter Classe zur Summe $s-2r$, wovon man sich durch eine analoge Ueberlegung, wie oben, überzeugt. Die Anzahl dieser Combinationen und daher auch jene der Combinationen rter Classe, welche die Zahl 2 als niedrigstes Element enthalten, ist also $C_{r-1}(s-2r)$.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtung erhält man daher die Gleichung

$$C_r(s)=C_{r-1}(s-r)+C_{r-1}(s-2r)+\ldots\ +C_{r-1}(s-qr) \quad . \quad (2),$$

worin q die grösste ganze Zahl bedeutet, welche der Bedingung

$$s-qr \geqq \binom{r}{2}$$

genügt. Mit dem entsprechenden Gliede muss die in (2) enthaltene Reihe mit Rücksicht auf die Relationen (1) abgebrochen werden.

Aus der Gleichung (2) erhält man noch zwei Formeln, welche sich ebenfalls zur recurrierenden Bestimmung von $C_r(s)$ verwenden lassen. Substituiert man nämlich für s der Reihe nach $s+1$, $s+2$, ... $s+r$ und addiert alle so erhaltenen Gleichungen, so folgt

$$C_r(s+1) + C_r(s+2) + \ldots + C_r(s+r) = \sum_{s=\binom{r}{2}}^{s} C_{r-1}(s) \quad . \quad . \quad (3).$$

Ersetzt man ferner in der Gleichung (2) s durch $s + r$, so erhält man

$$C_r(s+r) = C_{r-1}(s) + C_{r-1}(s-r) + \ldots + C_{r-1}(s-qr)$$

und daraus

$$C_r(s+r) = C_r(s) + C_{r-1}(s) \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Diese Formel erscheint zur Berechnung der Grössen $C_r(s)$ besonders geeignet, wenn die Grössen $C_{r-1}(s)$ bereits bekannt sind. Für die r aufeinander folgenden Werte von s

$$\binom{r}{2}, \binom{r}{2} + 1, \ldots . \binom{r}{2} + r - 1 = \binom{r+1}{2} - 1$$

ist nämlich $C_r(s) = 0$, also $C_r(s+r) = C_{r-1}(s)$. Sind so die r ersten Werte gewonnen, so liefert die Gleichung (4) alle übrigen.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, soll die Grösse $C_r(s)$ für $r = 1$, 2, 3, 4 auch in independenter Weise berechnet werden. Für grössere r wird der Gang der Rechnung bereits sehr verwickelt, nur so viel darf aus den weiter unten gewonnenen Resultaten geschlossen werden, dass zur Berechnung von $C_r(s)$ mehrere ganze algebraische Functionen $(r-1)$ten Grades von zwei Variablen u und v dienen, durch welche sich s linear darstellen lässt.

Vor allem ergibt sich von selbst die Gleichung

$$C_1(s) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Setzen wir ferner in (2) $r = 2$, $s = 2u + 2$ und in (3) $r = 2$, $s = 2u$, so folgt

$$C_2(2u+2) = C_1(2u) + C_1(2u-2) + \ldots . + C_1(2) = u,$$

$$C_2(2u+1) + C_2(2u+2) = \sum_{s=1}^{s=2u} C_1(s) = 2u.$$

Es ist also

$$C_2(2u+1) = C_2(2u+2) = u \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Um $C_3(s)$ indepedent darzustellen, addieren wir die folgenden, durch wiederholte Specialisierung von (4) gebildeten Gleichungen

$$C_3(v+3) = C_3(v) + C_2(v),$$
$$C_3(v+6) = C_3(v+3) + C_2(v+3),$$
$$C_2(v+3) = C_2(v+1) + 1$$

und finden

$$C_3(v+6) = C_3(v) + C_2(v) + C_2(v+1) + 1.$$

Aus (3) ergibt sich ferner

$$C_2(v) + C_2(v+1) = \sum_{s=1}^{s=v-1} C_1(s) = v-1.$$

Diese Ableitung gilt für $v \geq 2$, weil für $v = 0$ und $v = 1$ das Summenzeichen jede Bedeutung verliert. Ersetzt man jedoch die Summe durch $v - 1$, so zeigt sich wegen $C_2(1) = 0$, $C_2(2) = 0$ auch der Wert $v = 1$ als zulässig, so dass nur der Wert $v = 0$ ausgeschlossen bleibt.

Man hat somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_3(v+6) &= C_3(v) + v, \\ C_3(v+12) &= C_3(v+6) + v + 6, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ C_3(v+6u) &= C_3(v+6\overline{u-1}) + v + 6(u-1), \end{aligned}$$

deren Summierung die folgende liefert

$$C_3(6u+v) = C_3(v) + 3u(u-1) + uv.$$

Nun ist $C_3(v) = 0$ für $v = 1, 2, 3, 4, 5$, daher auch

$$C_3(6u+v) = 3u(u-1) + uv \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$
$$v = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Für $v = 6$ erhalten wir, da nach (1) $C_3(6) = 1$ ist,

$$C_3(6u+6) = 3u(u-1) + 6u + 1,$$

oder, wenn u durch $u - 1$ ersetzt wird

$$C_3(6u) = 3u(u-1) + 1 \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Gleichungen (7) und (8) liefern also, wie man sieht, die Werte von $C_3(s)$ in independenter Form.

Um $C_4(s)$ zu erhalten, summieren wir die folgenden durch Specialisierung von (4) sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} C_4(v+4) &= C_4(v) + C_3(v), \\ C_4(v+8) &= C_4(v+4) + C_3(v+4), \\ C_4(v+12) &= C_4(v+8) + C_3(v+8), \\ C_3(v+4) &= C_3(v+1) + C_2(v+1), \\ C_3(v+8) &= C_3(v+5) + C_2(v+5), \\ C_3(v+5) &= C_3(v+2) + C_2(v+2), \end{aligned}$$

und finden nach einigen Reductionen

$$\begin{aligned} C_4(v+12) = C_4(v) + C_3(v) + C_3(v+1) + C_3(v+2) + C_2(v+1) \\ + C_2(v+2) + C_2(v+5) \quad . \quad . \quad . \quad (9). \end{aligned}$$

Indem wir vor allem v als g e r a d e voraussetzen, erhalten wir mittelst der Gleichungen (3) und (6)

$$C_3(v) + C_3(v+1) + C_3(v+2) = \sum_{s=3}^{s=v-1} C_2(s)$$

$$= 2.\left[1 + 2 + \ldots + \left(\frac{v}{2} - 2\right)\right] + \left(\frac{v}{2} - 1\right) = \left(\frac{v}{2} - 1\right)^2.$$

Wird nun von der Summe $\sum$ abgesehen, so bleibt nur der Wert $v = 0$ ausgeschlossen, da für $v = 2$ die Ausdrücke $C_3(v)$, $C_3(v+1)$, $C_3(v+2)$, $\left(\frac{v}{2} - 1\right)^2$ sämmtlich verschwinden.

Ferner ist nach (3)

$$C_2(v+1) + C_2(v+2) = \sum_{s=1}^{s=v} C_1(s) = v$$

und nach (6)

$$C_2(v+5) = \frac{v}{2} + 2.$$

Die Gleichung (9) geht sonach über in

$$C_4(v+12) = C_4(v) + \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Hiezu addieren wir noch die folgenden daraus abgeleiteten Gleichungen

$$C_4(v+2.12) = C_4(v+12) + \left(\frac{v+1}{2} + 6\right)^2 + \frac{11}{4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$C_4(v+u.12) = C_4(v+\overline{u-1}.12) + \left(\frac{v+1}{2} + \overline{u-1}.6\right)^2 + \frac{11}{4}$$

und finden

$$C_4(12u+v) = C_4(v) + \sum_{z=0}^{z=u-1}\left(\frac{v+1}{2} + 6z\right)^2 + \frac{11u}{4}.$$

Die in dieser Gleichung enthaltene arithmetische Reihe zweiter Ordnung lässt sich nun nach der Formel

$$\sum_{z=0}^{z=u-1}(a+bz)^2 = u.a^2 + \binom{u}{2}(2a+b)b + \binom{u}{3}.2b^2$$

summieren und man erhält schliesslich nach einigen Reductionen

$$C_4(12u+v) = C_4(v) + 12u^3 + 3(v-5)u^2 + \frac{(v-5)^2-1}{4}.u \qquad (10)$$

$$v = 2, 4, 6, 8, 10.$$

Darin ist übrigens nach (1) $C_4(v) = 0$ für die vier ersten Werte von v und $C_4(10) = 1$, so dass die Gleichung (10) die independente Berechnung von $C_4(s)$ für alle geraden, nicht durch 12 theilbaren Werte von s gestattet.

Um den noch ausgeschlossenen Fall zu erledigen, setzen wir in (10) $v = 12$, $u-1$ für u und $C_4(12) = C_3(8) = C_2(5) = 2$, worauf sich die Gleichung ergibt

$$C_4(12u) = 12u^3 - 15u^2 + 6u - 1 \quad . \quad . \qquad (11).$$

Ist jedoch v ungerade, so wird die Gleichung (9) in der nachfolgenden Weise transformiert. Es ist nach (3)

$$C_3(v) + C_3(v+1) + C_3(v+2) = \sum_{s=3}^{s=v-1} C_2(s)$$

$$= 2\left(1 + 2 + \ldots + \frac{v-1}{2}\right) = \frac{(v-1)(v-3)}{4},$$

Dieses Resultat ist, wie man sich nachträglich überzeugt, auch noch für $v = 1$ und $v = 3$, somit für alle ungeraden v giltig. Ferner hat man

$$C_2(v+1) + C_2(v+2) = v,$$

$$C_2(v+5) = \frac{v+3}{2},$$

also verwandelt sich die Gleichung (9) in

$$C_4(v+12) = C_4(v) + \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 + 2$$

Addiert man dazu alle Gleichungen, welche sich daraus durch Ersetzung von v durch $v + 12$, $v + 2.12, \ldots v + \overline{u-1}.12$ ergeben, so erhält man

$$C_4(12u+v) = C_4(v) + \sum_{z=0}^{z=u-1}\left(\frac{v+1}{2} + 6z\right)^2 + 2u,$$

oder

$$C_4(12u + v) = C_4(v) + 12u^3 + 3(v-5)u^2 + \left[\left(\frac{v-5}{2}\right)^2 - 1\right]u \quad (12)$$

$$v = 1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Hierin ist $C_4(v) = 0$ für die fünf ersten Werte von v und $C_4(11) = C_3(7) = C_2(4) = 1$. Somit ermöglicht die Gleichung (12) die independente Bestimmung von $C_4(s)$ für alle ungeraden Werte von s.

Beispiele: Es ist die Anzahl N aller aus den ganzen Zahlen gebildeten Amben zu berechnen, deren Elementensummen die Zahl 50 nicht überschreiten.

Man findet mit Hilfe der Gleichungen (3) und (7)

$$N = \sum_{s=3}^{s=50} C_2(s) = C_3(51) + C_3(52) + C_3(53)$$

$$= 192 + 200 + 208 = 600$$

Es ist ferner die Anzahl N' aller aus den ganzen Zahlen gebildeten Ternen zu berechnen, deren Elementensummen die Zahl 100 nicht überschreiten. Man erhält aus (3)

$$N' = \sum_{s=6}^{s=100} C_3(s) = C_4(101) + C_4(102) + C_4(103) + C_4(104),$$

und aus den Gleichungen (10) und (12) für $v = 5, 6, 7, 8$

$$C_4(12u+5) = 12u^3 - u$$
$$C_4(12u+6) = 12u^3 + 3u^2$$
$$C_4(12u+7) = 12u^3 + 6u^2$$
$$C_4(12u+8) = 12u^3 + 9u^2 + 2u.$$

Also ist

$$\sum_{s=6}^{s=12u+4} C_3(s) = 48u^3 + 18u^2 + u$$

und für $u = 8$

$$\sum_{s=6}^{s=100} C_3(s) = N' = 25736.$$

II. Combinationen ohne Wiederholung zu einer bestimmten Summe bei einer gegebenen, beschränkten Anzahl von Elementen.

Als Elemente der Combinationen wollen wir wieder die Glieder der natürlichen Zahlenreihe verwenden und mit $\overset{(n)}{C_r}(s)$ die Anzahl der Combinationen rter Classe zur Summe s bezeichnen, welche sich aus den Elementen 1, 2, 3, . . n bilden lassen.

Die höchste Combination aus den Zahlen 1, 2, 3, . . . n hat zur Elementensumme

$$n + (n-1) + \ldots . + (n-r+1) = nr - \binom{r}{2}.$$

Ist diese Summe kleiner als s, also

$$n < \frac{s + \binom{r}{2}}{r},$$

so ist

$$\overset{(n)}{C_r}(s) = 0, \quad n < \frac{s + \binom{r}{2}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

d. h. die Bildung von Combinationen mit den verlangten Eigenschaften unmöglich.

Das höchste Element, welches beim Combinieren zur Summe s noch verwendet wird, ist dasjenige, welches zu den r — 1 niedrigsten addiert die Summe s liefert, somit

$$= s - (1+2+3\ldots+r-1) = s - \binom{r}{2}.$$

Daraus folgt

$$\overset{(n)}{C_r}(s) = C_r(s), \quad n > s - \binom{r}{2} - 1 \quad . \quad . \quad (14)$$

Es bleibt somit noch übrig, den Wert der Grösse $\overset{(n)}{C_r}(s)$ für das Intervall

$$\frac{s + \binom{r}{2}}{r} \leqq n < s - \binom{r}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

zu untersuchen. Um später die Ableitung von Recursionsformeln nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir vorerst zwei Eigenschaften jener Grösse nachweisen, welche für die folgenden Betrachtungen von Wichtigkeit sind.

Bildet man sämmtliche Combinationen rter Classe zur Summe s aus n Elementen und ersetzt hierauf überall das Element 1 durch n, 2 durch n — 1 u. s. f., überhaupt e durch n + 1 — e, so erhält man Combinationen rter Classe zu einer leicht zu berechnenden Summe s'. Da nämlich jedes Element zu dem an seine Stelle tretenden addiert die Summe n + 1 liefert, so ist $s + s' = (n+1)r$, also $s' = (n+1)r - s$. Ferner ergibt sich durch eine einfache Ueberlegung, dass die oben beschriebene Vertauschung von Elementen alle Combinationen $r$ter Classe zur Summe s' liefert, die sich aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n$ überhaupt bilden lassen u. zw. jede Combination nur einmal. Denn so wie man nach dem angegebenen Verfahren aus jeder Combination zur Summe s eine u. zw. nur eine zur Summe s' erhält, so führt die letztere bei nochmaliger Anwendung desselben Verfahrens zur ersteren wieder zurück. Es lassen sich somit aus n Elementen, wo n der Bedingung (15) entspricht, ebensoviele Combinationen $r$ter Classe zu einer Summe s, als zur Summe $s' = (n+1)r - s$ bilden, oder es ist

$$\overset{(n)}{C}_r(s) = \overset{(n)}{C}_r(\overline{n+1}\, r - s) \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Sondert man von den aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n$ gebildeten Combinationen $r$ter Classe zur Summe s jene ab, welche das Element n enthalten und lässt hierauf dasselbe weg, so verbleiben alle Combinationen $(r-1)$ter Classe zur Summe $s-n$, welche sich aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n-1$ bilden lassen. Es besteht somit die Gleichung

$$\overset{(n)}{C}_r(s) = \overset{(n-1)}{C}_r(s) + \overset{(n-1)}{C}_{r-1}(s-n),$$

welche offenbar zur recurrierenden Bestimmung von $\overset{(n)}{C}_r(s)$ verwendbar ist.

Von grösserer Wichtigkeit, jedoch schwieriger abzuleiten und anzuwenden, ist eine zweite Recursionsformel, welche durch folgende Betrachtung gewonnen wird. Man bilde alle $C_r(s)$ Combinationen $r$ter Classe zur Summe s und scheide hierauf jene aus, in welchen die Elemente $n+1,\ n+2, \ldots,$ $s - \binom{r}{2}$ vorkommen. Die auszuscheidenden Combinationen vertheile man derart in Gruppen, dass in allen Combinationen der ersten das Element $n+1$, in jenen der zweiten das Element $n+2$ u. s. f., endlich in jenen der letzten Gruppe das Element $s - \binom{r}{2}$ als das höchste auftritt. Doch kann die zweite Gruppe auch $n+1$, die dritte $n+1$ und $n+2$ enthalten u. s. f. Unterdrücken wir nun in der ersten Gruppe das Element $n+1$, so bleiben Combinationen $(r-1)$ter Classe zur Summe $s - n - 1$ übrig u. zw. so viele, als sich solche aus n Elementen bilden lassen. Diese Anzahl ist daher mit $\overset{(n)}{C}_{r-1}(s-n-1)$ zu bezeichnen. Lassen wir in der zweiten Gruppe das Element $n+2$ weg, so erhalten wir alle Combinationen $(r-1)$ter Classe zur Summe $s-n-2$ aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots n+1$, somit in der Anzahl $\overset{(n+1)}{C}_{r-1}(s-n-2)$ u. s. w. Daher ist

$$\overset{(n)}{C}_r(s) = C_r(s) - \Big[\overset{(n)}{C}_{r-1}(s-n-1) + \overset{(n+1)}{C}_{r-1}(s-n-2) + \ldots$$
$$+ \overset{\left(s-\binom{r}{2}-1\right)}{C}_{r-1}\Big[\binom{r}{2}\Big]\Big],$$

oder compendiöser geschrieben

$$\nu_1 = s - \binom{r}{2} - 1$$

$$\overset{(n)}{C_r}(s) = C_r(s) - \sum_{\nu_1 = n}^{(\nu_1)} C_{r-1}(s - \nu_1 - 1) \quad \ldots \quad (17,a).$$

Hieraus folgen weiter die Gleichungen

$$\nu_2 = \sigma_1 - \binom{r-1}{2} - 1$$

$$\overset{(\nu_1)}{C_{r-1}}(\sigma_1) = C_{r-1}(\sigma_1) - \sum_{\nu_2 = \nu_1}^{(\nu_2)} C_{r-2}(\sigma_1 - \nu_2 - 1) \quad . \quad (17,b),$$

$$\nu_3 = \sigma_2 - \binom{r-2}{2} - 1$$

$$\overset{(\nu_2)}{C_{r-2}}(\sigma_2) = C_{r-2}(\sigma_2) - \sum_{\nu_3 = \nu_2}^{(\nu_3)} C_{r-3}(\sigma_2 - \nu_3 - 1) \quad . \quad (17,c),$$

u. s. w., worin $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Operationszahlen und die Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = s - \nu_1 - 1 \\ \sigma_2 = \sigma_1 - \nu_2 - 1 \\ \quad . \quad . \quad . \\ \sigma_{k-1} = \sigma_{k-2} - \nu_{k-1} - 1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

definiert sind.

Hat man alle Grössen $\overset{(n)}{C_{r-1}}(s)$ bereits gefunden, so genügt die Gleichung (17,a) zur recurrierenden Berechnung von $\overset{(n)}{C_r}(s)$. Sonst ist man dem ersten Anscheine nach gezwungen, sämmtliche $r - 1$ Gleichungen des Systems (17) (von $r = r$ bis $r = 2$) zu benützen und die Grössen $\overset{(n)}{C_1}(s)$ direct zu berechnen.

Bei genauerer Untersuchung zeigt sich jedoch, dass man die eben angedeutete, für grössere r allerdings sehr complicierte Rechnung mittelst der Gleichung (16) bedeutend abkürzen kann, so zwar, dass im ungünstigsten Falle nur $\frac{r}{2}$ Gleichungen des Systems (17) zu benützen sind, wenn r eine gerade, und $\frac{r+1}{2}$, wenn r eine ungerade Zahl bedeutet.

Um diese Behauptung zu begründen, nehmen wir an, dass in der kten Gleichung des Systems (17) die Summe wegfällt, so dass man einfach hat

$$\overset{(\nu_{k-1})}{C_{r-k+1}}(\sigma_{k-1}) = C_{r-k+1}(\sigma_{k-1}).$$

Soll diese Gleichung stattfinden, so muss, wie aus (14) hervorgeht, die Bedingung

$$\nu_{k-1} > \sigma_{k-1} - \binom{r-k+1}{2} - 1 \quad . \quad . \quad (19)$$

erfüllt sein. Zu derselben Bedingung gelangt man auch, wenn man in der kten Gleichung des Systems (17) vorläufig die Summe anschreibt, die Grenzen derselben nach dem in (17,a), (17,b), ... ausgesprochenen Gesetze bildet und, um die Summe zum Verschwinden zu bringen, die untere Grenze als grösser annimmt, als die obere.

Durch Addition der Gleichungen (18) erhalten wir ferner

$$\sigma_{k-1} = s - (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1}) - k + 1,$$

so dass die Bedingung (19) auch in der folgenden Weise geschrieben werden kann

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-2} + 2\nu_{k-1} > s - \binom{r-k+1}{2} - k.$$

Diese Relation muss nun für alle Werte bestehen, welche den Operationszahlen ν beigelegt werden können, und dies ist der Fall, wenn sie auch dann noch giltig bleibt, sobald für jene Zahlen gleichzeitig ihre kleinsten Werte eingesetzt werden. Der kleinste Werth nun, den ν_1 annehmen kann, ist n, wie aus den Grenzen der Summe in (17,a) ersichtlich ist. Die Gleichung (17,b) zeigt ferner, dass der kleinste Wert von ν_2 mit jenem von ν_1 zusammenfällt, also ebenfalls n ist u. s. f. Es muss also

$$kn < s - \binom{r-k+1}{2} - k$$

oder

$$n \geqq \frac{s - \binom{r-k+1}{2}}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

sein, damit die Summe in der kten Gleichung des Systems (17) wegfällt.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (16) ist es ferner stets erlaubt, von den beiden Summen s und $s' = (n+1)r - s$, für welche die Grösse $\overset{(n)}{C_r}(s)$ gleiche Werte annimmt, die kleinere zu wählen, also

$$s \leqq \frac{(n+1)r}{2} \text{ oder } n \geqq \frac{2s}{r} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

vorauszusetzen. Aus dieser stets erfüllbaren Bedingung ergibt sich nun die Relation (20) als unmittelbare Folge, wenn wir k so wählen, dass

$$\frac{2s}{r} - 1 \geqq \frac{s - \binom{r-k+1}{2}}{k}$$

ist. Dazu reicht es hin, $k = \frac{r}{2}$ zu setzen, denn durch diese Substitution verwandelt sich die letzte Bedingung in die einfachere $r \geqq 2$, welche man für alle überhaupt in Betracht kommenden Fälle als erfüllt ansehen kann. Substituirt man hingegen $k = \frac{r+1}{2}$, wie es für ungerade r erforderlich ist, so wird der Zähler des Bruches

$$\frac{s - \binom{r-k+1}{2}}{k}$$

kleiner und der Nenner grösser, als für $k = \frac{r}{2}$, somit auch der Bruch selbst kleiner, als $\frac{2s}{r} - 1$.

Damit ist bewiesen, dass im ungünstigsten Falle $\frac{r}{2}$, resp. $\frac{r+1}{2}$ Gleichungen des Systems (17) zur Berechnung von $\overset{(n)}{C_r}(s)$ heranzuziehen sind.

Nun sollen die erhaltenen allgemeinen Resultate auf die speciellen Fälle angewendet werden, die sich für $r = 1, 2, 3, 4$ ergeben.

Für $r = 1$ erhält man aus (13) und (14) unmittelbar

$$\overset{(n)}{C_1}(s) = 0,\ n < s$$

$$\overset{(n)}{C_1}(s) = C_1(s) = 1,\ n \geqq s.$$

Für $r = 2$ ist $k = 1$, d. h. es reicht stets die erste Gleichung des Systems (17) zur Berechnung von $\overset{(n)}{C_2}(s)$ hin. Man findet somit in Uebereinstimmung mit der Gleichung (14)

$$\overset{(n)}{C_2}(s) = C_2(s),\, n \geqq s - 1.$$

Ist hingegen $n < s - 1$, so folgt aus der Gleichung (16)

$$\overset{(n)}{C_2}(s) = C_2(2n+2-s)\,,\ n < s - 1.$$

Als Beispiel diene die Aufgabe, die Anzahl der Amben zur Summe 60 zu berechnen, welche sich aus den Elementen 1 bis 40 bilden lassen. Hier ist $n = 40$, $s = 60$, also $n < s - 1$. Daraus folgt mit Benützung der Gleichungen (6)

$$\overset{(40)}{C_2}(60) = C_2(22) = 10.$$

Für $r = 3$ ist $k = \frac{r+1}{2} = 2$, d. h. man kann es stets so einrichten, dass die Summe bereits in der zweiten Gleichung des Systems (17) wegfällt. Man hat dann

$$\overset{(n)}{C_3}(s) = C_3(s) - \sum_{\nu_1 = n}^{\nu_1 = s-4} \overset{(\nu_1)}{C_2}(s-\nu_1-1),$$

$$\overset{(\nu_1)}{C_2}(s) = C_2(s),$$

oder

$$\overset{(n)}{C_3}(s) = C_3(s) - \sum_{\nu_1 = n}^{\nu_1 = s-4} C_2(s-\nu_1-1)$$

$$= C_3(s) - \sum_{\sigma_1 = 3}^{\sigma_1 = s-n-1} C_2(\sigma_1)$$

$$= C_3(s) - [C_3(s-n) + C_3(s-n+1) + C_3(s-n+2)] \quad . \qquad (22).$$

(S. Gleichung (3).) Hier muss $n > \frac{2s}{3} - 1$ vorausgesetzt werden, wie sich aus (21) für $r = 3$ ergibt.

Ist hingegen $n < \frac{2s}{3} - 1$, also $s > \frac{3(n+1)}{2}$, so erhält man mit Hilfe der Gleichung (16)

$$\overset{(n)}{C_3}(s) = C_3(3n+3-s) - [C_3(2n+3-s) + C_3(2n+4-s) + C_3(2n+5-s)] \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23).$$

Man soll z. B. die Anzahl N der Ternen zur Summe 60 berechnen, wenn nur die Elemente 1 bis 40 combiniert werden dürfen. Hier ist $n = 40$, $s = 60$, also $n > \frac{2s}{3} - 1$. Somit erhält man mit Benützung von (22), (7) und (·)

$$N = \overset{(40)}{C_3}(60) = C_3(60) - [C_3(20) + C_3(21) - C_3(22)]$$
$$= 271 - (24+27+30) = 190.$$

Schwieriger gestaltet sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit w zu berechnen, dass aus einem Gefässe mit den Nummern 1 bis n drei gezogen werden, deren Summe die Zahl s nicht übersteigt. Ist $n \geqq \frac{2s}{3} - 1$, so findet man

$$\binom{n}{3} w = \sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} \overset{(n)}{C_3}(\sigma) = \sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} C_3(\sigma)$$

$$- \sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} [C_3(\sigma-n) + C_3(\sigma-n+1) + C_3(\sigma-n+2)].$$

Nun ist

$$\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} C_3(\sigma) = C_4(s+1) + C_4(s+2) + C_4(s+3) + C_4(s+4),$$

$$\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} C_3(\sigma-n) = \sum_{\tau=6}^{\tau=s-n} C_3(\tau),$$

$$\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} C_3(\sigma-n+1) = \sum_{\tau=6}^{\tau=s-n+1} C_3(\tau),$$

$$\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s} C_3(\sigma-n+2) = \sum_{\tau=6}^{\tau=s-n+2} C_3(\tau).$$

Durch Addition der letzten drei Gleichungen ergibt sich

$$\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s}[C_3(\sigma-n)+C_3(\sigma-n+1)+C_3(\sigma-n+2)]=$$
$$=3.\sum_{\tau=6}^{\tau=s-n}C_3(\tau)+2C_3(s-n+1)+C_3(s-n+2).$$

Es ist also für $n \geqq \frac{2s}{3}-1$

$$\binom{n}{3}.w=C_4(s+1)+C_4(s+2)+C_4(s+3)+C_4(s+4)$$
$$-3[C_4(s-n+1)+C_4(s-n+2)+C_4(s-n+3)+C_4(s-n+4)]$$
$$-2\ C_3(s-n+1)-C_3(s-n+2).$$

Ist hingegen $n<\frac{2s}{3}-1$, oder also $s>\frac{3}{2}(n+1)$, so schlägt man am Besten den folgenden Weg ein. Man hat

$$\binom{n}{3}.w=\sum_{\sigma=6}^{\sigma=s}\overset{(n)}{C_3}(\sigma)=\sum_{\sigma=6}^{\sigma=3n-3}\overset{(n)}{C_3}(\sigma)-\sum_{\sigma=s+1}^{\sigma=3n-3}\overset{(n)}{C_3}(\sigma),$$

worin $3n-3$ als die Elementensumme der höchsten Terne aufzufassen ist. Mit Hilfe der Gleichung (16) erhält man daraus für gerade n

$$\binom{n}{3}.w=2\sum_{\sigma=6}^{\sigma=\frac{3n}{2}+1}\overset{(n)}{C_3}(\sigma)-\sum_{\sigma'=6}^{\sigma'=3n+2-s}\overset{(n)}{C_3}(\sigma')$$

und für ungerade n

$$\binom{n}{3}..w=2\sum_{\sigma=6}^{\sigma=\frac{3n+1}{2}}\overset{(n)}{C_3}(\sigma)-\sum_{\sigma'=6}^{\sigma'=3n+2-s}\overset{(n)}{C_3}(\sigma')+\overset{(n)}{C_3}\left(\frac{3n+1}{2}\right)$$

Da nun in diesen beiden Gleichungen alle Werte, welche den Grössen σ und σ' ertheilt werden, $\leqq\frac{3(n+1)}{2}$ sind, so kann der Ausdruck $\binom{n}{3}w$ mit Hilfe der Gleichung (22) wieder durch mehrere Grössen C_4 und C_3 dargestellt werden.

Es sei speciell $n=90$, $s=100$, also $n>\frac{2s}{3}-1$, dann ist:

$$\binom{90}{3}.w=C_4(101)+C_4(102)+C_4(103)+C_4(104)$$
$$-3[C_4(11)+C_4(12)+C_4(13)+C_4(14)]$$
$$-2.C_3(11)-C_3(12)=25736-3(1+2+3+5)-10-7,$$
$$w=25686:117480=0\cdot 2186\ldots.$$

Somit hat man die Wahrscheinlichkeit $0\cdot 2186$ .. mit den Näherungswerten $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{5}{23}, \frac{7}{32}, \ldots$, aus 90 Nummern drei zu ziehen, deren Summe $\leqq 100$ ist.

Für $r = 4$ endlich ist $k = 2$, d. h. wählt man von beiden Summen s und s', denen nach (16) gleiche Grössen $\overset{(n)}{C_4}$ entsprechen, die kleinere, so fällt die Summe in der zweiten Gleichung des Systems (17) weg. Dann ist also

$$\overset{(n)}{C_4}(s) = C_4(s) - \sum_{\nu_1 = n}^{\nu_1 = s-7} \overset{(\nu_1)}{C_3}(s - \nu_1 - 1),$$

$$\overset{(\nu_1)}{C_3}(\sigma_1) = C_3(\sigma_1),$$

oder

$$\overset{(n)}{C_4}(s) = C_4(s) - \sum_{\nu_1 = n}^{\nu_1 = s-7} C_3(s - \nu_1 - 1)$$

$$= C_4(s) - \sum_{\sigma_1 = 6}^{\sigma_1 = s-n-1} C_3(\sigma_1),$$

also schliesslich

$$\overset{(n)}{C_4}(s) = C_4(s) - [C_4(s-n) + C_4(s-n+1) + C_4(s-n+2) + C_4(s-n+3)].$$

Diese Gleichung gilt für $n \geqq \frac{s}{2} - 1$. Ist hingegen $n < \frac{s}{2} - 1$, so erhält man

$$\overset{(n)}{C_4}(s) = \overset{(n)}{C_4}(4n+4-s)$$

$$= C_4(4n+4-s) - [C_4(3n+4-s) + C_4(3n+5-s) + C_4(3n+6-s) + \\ + C_4(3n+7-s)].$$

Es sei z. B. die Anzahl der Quaternen zu berechnen, welche sich aus den Elementen $1, 2, \ldots 29$ zur Summe 100 bilden lassen. Hier ist $n = 29$, $s = 100$, $n < \frac{s}{2} - 1$, daher

$$\overset{(29)}{C_4}(100) = \overset{(29)}{C_4}(20) = C_4(20) = 23.$$

Die verlangten Quaternen bildet man am Besten, indem man jene zur Summe 20 anschreibt und hierauf ein jedes Element durch dasjenige ersetzt, welches es auf 30 ergänzt, wie folgt:

1	2	3	14	29	28	27	16
1	2	4	13	29	28	26	17
1	2	5	12	29	28	25	18
1	2	6	11	29	28	24	19
1	2	7	10	29	28	23	20
1	2	8	9	29	28	22	21

1	3	4	12	29	27	26	18
1	3	5	11	29	27	25	19
1	3	6	10	29	27	24	20
1	3	7	9	29	27	23	21
1	4	5	10	29	26	25	20
1	4	6	9	29	26	24	21
1	4	7	8	29	26	23	22
1	5	6	8	29	25	24	22
2	3	4	11	28	27	26	19
2	3	5	10	28	27	25	20
2	3	6	9	28	27	24	21
2	3	7	8	28	27	23	22
2	4	5	9	28	26	25	21
2	4	6	8	28	26	24	22
2	5	6	7	28	25	24	23
3	4	5	8	27	26	25	22
3	4	6	7	27	26	24	23

III. Combinationen mit Wiederholung zu einer bestimmten Summe.

Es sei $\mathfrak{C}_r(s)$ die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung von der Classe r und zur Summe s, wenn die Anzahl der Elemente eine unbeschränkte ist und habe $\overset{(n}{\mathfrak{C}}_r(s)$ dieselbe Bedeutung, jedoch mit der Beschränkung, dass nur die Elemente 1, 2, 3, ... n beim Combinieren zu verwenden sind.

Bildet man alle Combinationen mit Wiederholung zur Summe s und erhöht hierauf die an erster, zweiter, ... rter Stelle befindlichen Elemente beziehungsweise um 0, 1, ... $r - 1$, so erhält man alle Combinationen ohne Wiederholung zur Summe $s + 1 + 2 + \ldots + r - 1 = s + \binom{r}{2}$. Davon überzeugt man sich leicht durch folgende Betrachtung.

Vor allem ist es klar, dass die Elementensumme der neuen Combinationen wirklich $s + \binom{r}{2}$ beträgt und dass man nach dem beschriebenen Verfahren Combinationen rter Classe **ohne Wiederholung** gewonnen hat. Da nämlich in einer geordneten Combination mit Wiederholung auf irgend ein Element nie ein niedrigeres folgt und alle folgenden Elemente um 1, 2, 3 ... mehr erhöht worden sind, als das betrachtete, so müssen nun alle Elemente einer Combination von einander verschieden sein. Man erhält ferner **alle** möglichen Combinationen ohne Wiederholung von der Classe r und zur Summe $s + \binom{r}{2}$ u. zw. eine jede nur einmal. Denn würde eine derselben fehlen, oder sich wiederholen, so müsste dasselbe mit der entsprechenden Combination zur Summe s der Fall sein, da man ja diese aus der ersteren u. zw. nur aus derselben erhalten kann, indem man die an erster, zweiter, ... rter Stelle befindlichen Elemente um 0, 1, ... r — 1 erniedrigt. Es ist also

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}_r(s) &= C_r\left[s + \binom{r}{2}\right],\\ C_r(s) &= \mathfrak{C}_r\left[s - \binom{r}{2}\right]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen können die im Art. I für die Grösse $C_r(s)$ gewonnenen Resultate ohneweiters auf die Grösse $\mathfrak{C}_r(s)$ übertragen werden. Man überzeugt sich leicht, dass den Gleichungen (1) bis (4) die folgenden Relationen entsprechen:

$$\mathfrak{C}_r(s) = 0, \; s < r$$
$$\mathfrak{C}_r(s) = 1, \; s = r$$
$$\mathfrak{C}_r(s) = \mathfrak{C}_{r-1}(s-1) + \mathfrak{C}_{r-1}(s-r-1) + \ldots \; + \mathfrak{C}_{r-1}(s-qr-1),$$

worin q die grösste ganze Zahl bedeutet, welche der Bedingung $s - qr \geqq r$ entspricht; ferner

$$\mathfrak{C}_r(s+1) + \mathfrak{C}_r(s+2) + \ldots + \mathfrak{C}_r(s+r) = \sum_{\sigma = r-1}^{\sigma = s+r-1} \mathfrak{C}_{r-1}(\sigma);$$
$$\mathfrak{C}_r(s) = \mathfrak{C}_r(s-r) + \mathfrak{C}_{r-1}(s-1) \quad . \quad . \quad (25).$$

Die letzte Gleichung ist bereits von Ettingshausen l. c. durch folgende Betrachtung direct gefunden worden: „Sondert man von allen Combinationen der rten Classe, die mit dem ersten Element anfangen, dieses Element ab, so bleiben alle Combinationen der (r—1)ten Classe zur Summe s — 1 zurück; vermindert man ferner in allen Complexionen mit einem höheren Anfangselement jedes Element um die Einheit, so erhält man sämmtliche Combinationen der rten Classe zur Summe s — r u. s. f.“

Auch die Untersuchung der Grössen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}_r}(s)$ lässt sich in ähnlicher Weise durchführen, wie jene der Grössen $\overset{(n)}{C_r}(s)$ im Art. II.

Die höchste Combination rter Classe, welche man mit Wiederholungen aus n Elementen bilden kann, hat zur Elementensumme $n + n + \ldots + n = nr$. Es ist also

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_r}(s) = 0, \; n < \frac{s}{r}.$$

Das höchste Element, welches bei den hier betrachteten Combinationen noch verwendet wird, ist dasjenige, welches mit der (r—1)mal genommenen Einheit die Summe s liefert, d. i. $s - r + 1$. Daraus folgt:

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_r}(s) = \mathfrak{C}_r(s), \; n \geqq s - r + 1 \quad . \quad . \quad (26).$$

Ersetzt man ferner in allen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s)$ Combinationen das Element 1 durch n, 2 durch n — 1, .. e durch n + 1 — e, so erhält man alle Combinatio- derselben Art, jedoch zur Summe $s' = (n+1)\,r - s$. Also ist

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s) = \overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r[(n+1)r-s] \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Erniedrigt man ferner in allen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s)$ Combinationen ein jedes Element um die Einheit und lässt die erhaltenen Nullen weg, so erhält man alle Combinationen der ersten r Classen, welche sich mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, ... n — 1 zur Summe s — r bilden lassen. Also bestehen die Gleichungen

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \overset{(n-1)}{\mathfrak{C}}_\sigma(s-r),$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=r} \overset{(n)}{\mathfrak{C}}_\sigma(s) = \overset{(n+1)}{\mathfrak{C}}_r(s+r) \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Für $n > s - r + 1$ gehen die Grössen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r$ in die Grössen $\mathfrak{C}_r$ über und in diesem Falle stimmt die Gleichung (28) mit der von Ettingshausen pag. 59 gefundenen überein.

Die Recursionsformel

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s) = \overset{(n-1)}{\mathfrak{C}}_r(s) + \overset{(n-1)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-n)$$

lässt sich in ganz gleicher Weise, wie die analoge für die Combinationen ohne Wiederholung, ableiten und begründen.

Von grösserer Wichtigkeit sind die dem Systeme (17) entsprechenden Recursionsformeln, welche man durch folgenden Vorgang gewinnen kann. Man bilde zuerst alle $\mathfrak{C}_r(s)$ Combinationen und lasse dann diejenigen weg, welche die Elemente n + 1, n + 2, ... s — r + 1 enthalten. Die zu eliminierenden Complexionen vertheile man hierauf derart in Gruppen, dass in der ersten n + 1, in der zweiten n + 2, ... in der letzten s — r + 1 als höchstes Element auftritt. Doch kann in einigen Combinationen der ersten Gruppe n + 1 wiederholt vorkommen, ebenso in jenen der zweiten n + 2 u. s. f. Lässt man endlich in allen Combinationen der ersten Gruppe je ein (n+1), in jenen der zweiten je ein (n+2) u. s. f. weg, so bleiben beziehungsweise alle $\overset{(n+1)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-n-1)$, $\overset{(n+2)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-n-2)$ ... Combinationen. Also erhält man die Gleichungen

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s) = \mathfrak{C}_r(s) - \sum_{\nu_1=n+1}^{\nu_1=s-r+1} \overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-\nu_1) \quad . \quad . \quad (29,a),$$

$$\overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(\sigma_1) = \mathfrak{C}_{r-1}(\sigma_1) - \sum_{\nu_2=\nu_1+1}^{\nu_2=\sigma_1-r+2} \overset{(\nu_2)}{\mathfrak{C}}_{r-2}(\sigma_1-\nu_2) \quad . \qquad (29,b),$$

$$\overset{(\nu_2)}{\mathfrak{C}}_{r-2}(\sigma_2) = \mathfrak{C}_{r-2}(\sigma_2) - \sum_{\nu_3=\nu_2+1}^{\nu_3=\sigma_2-r+3} \overset{(\nu_3)}{\mathfrak{C}}_{r-3}(\sigma_2-\nu_3) \quad . \qquad (29,c),$$

u. s. w., wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= s - \nu_1 \\ \sigma_2 &= \sigma_1 - \nu_2 \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \\ \sigma_{k-1} &= \sigma_{k-2} - \nu_{k-1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

gesetzt wird.

Auch hier lässt sich in ganz ähnlicher Weise, wie im Art. II für die Grössen $\overset{(n)}{C}_r(s)$, der Beweis führen, dass zur Berechnung von $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s)$ im ungünstigsten Falle $\frac{r}{2}$ Gleichungen des Systems (29) erforderlich sind, wenn r eine gerade, und $\frac{r+1}{2}$, wenn r eine ungerade Zahl bedeutet.

Damit nämlich die Summe in der kten Gleichung des Systems (29) wegfalle, muss mit Rücksicht auf (26) festgesetzt werden, dass die Bedingung

$$\nu_{k-1} > \sigma_{k-1} - r + k - 1 \quad . \quad . \quad . \qquad (31)$$

stets erfüllt sei. Nun erhält man durch Addition der Gleichungen (30)

$$\sigma_{k-1} = s - (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1}).$$

Die Relation (31) kann somit auch auf die folgende Form gebracht werden

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-2} + 2\nu_{k-1} > s - r + k - 1.$$

Diese Bedingung soll für alle möglichen Werte der Operationszahlen ν bestehen und dies ist der Fall, wenn sie für die kleinsten Werte derselben erfüllt ist. Nun hat ν_1 den kleinsten Wert $n + 1$, für ν_2 fällt derselbe mit dem kleinsten Werte von $\nu_1 + 1$ zusammen, ist also $= n + 2$ u. s. w., für ν_{k-1} ist er $= n + k - 1$. Es muss also

$$kn + (1+2+\ldots+k-1) + k - 1 > s - r + k - 1,$$

oder

$$n > \frac{s-r-\binom{k}{2}}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32)$$

sein. Die Gleichung (27) gestattet uns ferner,

$$n \geqq \frac{2s}{r} - 1$$

vorauszusetzen und daher ist die Bedingung (32) erfüllt, wenn durch passende Wahl der Grösse k

$$\frac{2s}{r}-1 \geqq \frac{s-r-\binom{k}{2}}{k}$$

gemacht wird. Damit dieser Bedingung durch die Annahme $k=\frac{r}{2}$ Genüge geleistet wird, braucht nur $r > o$ vorausgesetzt zu werden. Für $k=\frac{r+1}{2}$ verwandelt sich dieselbe Bedingung in

$$s \geqq \frac{r(r+5)(1-r)}{8},$$

was stets erfüllt ist, da für $r > 1$ der rechtsstehende Ausdruck negativ wird.

Dadurch ist die oben aufgestellte Behauptung erwiesen.

Mit Hilfe der vorausgeschickten Betrachtungen kann man nun die Grösse $\overset{(n)}{\mathfrak{C}_r}(s)$ für $r=1, 2, 3, 4$ sehr einfach durch die Grössen $\mathfrak{C}_r(s)$, oder auch $C_r(s)$ ausdrücken.

Der Fall $r=1$ lässt sich durch die Bemerkung erledigen, dass bei den Combinationen erster Classe keine Wiederholung der Elemente vorkommen kann. Somit ist

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_1}(s) = \overset{(n)}{C_1}(s) = \left.\begin{matrix} o \\ 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} n < s, \\ n \geqq s. \end{matrix}$$

Für $r=2$ ist $k=1$, also

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_2}(s) = \mathfrak{C}_2(s) = C_2(s+1)\,,\, n \geqq s-1$$

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_2}(s) = \overset{(n)}{\mathfrak{C}_2}(2n+2-s) = \mathfrak{C}_2(2n+2-s) = C_2(2n+3-s),\, n < s-1.$$

Für $r=3$ ist $k=2$. Nimmt man somit $n \geqq \frac{2s}{3}-1$ an, so ist

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_3}(s) = \mathfrak{C}_3(s) - \sum_{\nu_1=n+1}^{\nu_1=s-2} \overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}_2}(s-\nu_1),$$

$$\overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}_2}(\sigma_1) = \mathfrak{C}_2(\sigma_1).$$

Daraus folgt

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_3}(s) = \mathfrak{C}_3(s) - \sum_{\nu_1=n+1}^{\nu_1=s-2} \mathfrak{C}_2(s-\nu_1)$$

$$= \mathfrak{C}_3(s) - \sum_{\sigma_1=2}^{\sigma_1=s-n-1} \mathfrak{C}_2(\sigma_1).$$

$$\begin{aligned}\overset{(n)}{\mathfrak{C}_3}(s) &= \mathfrak{C}_3(s) - [\mathfrak{C}_3(s-n-2) + \mathfrak{C}_3(s-n-1) + \mathfrak{C}_3(s-n)] \\ &= C_3(s+3) - [C_3(s-n+1) + C_3(s-n+2) + C_3(s-n+3)].\end{aligned}$$

Für $n < \frac{2s}{3}-1$ findet man dagegen mit Hilfe von (27)

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_3}(s) = \overset{(n)}{\mathfrak{C}_3}(3n+3-s)$$
$$= \mathfrak{C}_3(3n+3-s) - [\mathfrak{C}_3(2n+1-s) + \mathfrak{C}_3(2n+2-s) + \mathfrak{C}_3(2n+3-s)]$$
$$= C_3(3n+6-s) - [C_3(2n+4-s) + C_3(2n+5-s) + C_3(2n+6-s)].$$

Für $r = 4$ ist auch $k = 2$. Unter der Annahme $n \geqq \frac{s}{2} - 1$ findet man also

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_4}(s) = \mathfrak{C}_4(s) - \sum_{\nu_1 = n+1}^{\nu_1 = s-3} \overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}_3}(s-\nu_1)$$

$$\overset{(\nu_1)}{\mathfrak{C}_3}(\sigma_1) = \mathfrak{C}_3(\sigma_1).$$

Daraus folgt weiter

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_4}(s) = \mathfrak{C}_4(s) - \sum_{\nu_1 = n+1}^{\nu_1 = s-3} \mathfrak{C}_3(s-\nu_1) = \mathfrak{C}_4(s) - \sum_{\sigma_1 = 3}^{\sigma_1 = s-n-1} \mathfrak{C}_3(\sigma_1)$$
$$= \mathfrak{C}_4(s) - [\mathfrak{C}_4(s-n-3) + \mathfrak{C}_4(s-n-2) + \mathfrak{C}_4(s-n-1) + \mathfrak{C}_4(s-n)]$$
$$= C_4(s+6) - [C_4(s-n+3) + C_4(s-n+4) + C_4(s-n+5) + C_4(s-n+6)].$$

Wenn jedoch $n < \frac{s}{2} - 1$ ist, so hat man

$$\overset{(n)}{\mathfrak{C}_4}(s) = \overset{(n)}{\mathfrak{C}_4}(4n+4-s) =$$
$$= \mathfrak{C}_4(4n+4-s) - [\mathfrak{C}_4(3n+1-s) + \mathfrak{C}_4(3n+2-s) + \mathfrak{C}_4(3n+3-s) + \mathfrak{C}_4(3n+4-s)]$$
$$= C_4(4n+10-s) - [C_4(3n+7-s) + C_4(3n+8-s) + C_4(3n+9-s) + C_4(3n+10-s)].$$

Schliesslich wollen wir noch mit Hilfe der vorausgehenden und einiger neu anzustellenden Betrachtungen eine hie und da erwähnte Aufgabe auflösen, welche folgendermassen lautet:

Es ist die Anzahl der ganzzahligen Auflösungen der diophantischen Gleichung

$$1x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = s \quad . \quad . \quad (33)$$

zu berechnen.

Man findet bekanntlich jene Auflösungen, indem man alle möglichen Combinationen mit Wiederholung aus den Elementen 1, 2, . . n zur Summe s bildet. Jede Combination liefert eine Auflösung, indem für jedes x jene Zahl gesetzt wird, welche anzeigt, wie oft der Coefficient jenes x in der Gleichung (33) als Element in der betrachteten Combination vorkommt. (S. z. B. Frischauf, Lehrbuch der allg. Arithmetik, pag. 115).

Die gesuchte Anzahl ist somit durch

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \overset{(n)}{\mathfrak{C}_\sigma}(s) = \overset{(n+1)}{\mathfrak{C}_s}(2s)$$

gegeben, wie man aus der Gleichung (28) für $r = s$ findet. Doch lässt sich dieser Ausdruck für grössere s mittelst der vorausgehenden Formeln nur äusserst mühsam berechnen und es erscheint wünschenswert, denselben durch einen einfacheren, oder doch leichter berechenbaren zu ersetzen. Zu diesem Ziele gelangen wir durch die nachfolgenden Betrachtungen.

Es seien alle Combinationen $r$ter Classe zur Summe s gegeben und man leite aus einer jeden Combination eine neue nach einem Verfahren ab, das sich am besten an einem speciellen Falle erläutern lässt. Ist z. B. die Combination

$$1\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 6 \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

gegeben, so zerlege man ein jedes Element in die darin enthaltenen Einheiten und schreibe die den einzelnen Elementen angehörenden Einheiten in je einer Verticalreihe unter einander. Man erhält im vorliegenden Falle

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 1
\end{array}$$

Nun summiere man, von unten angefangen, die in den einzelnen Horizontalreihen befindlichen Einheiten und bilde aus den erhaltenen Partialsummen eine neue Complexion. Diese lautet

$$2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 7 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (B).$$

Die Summe der Elemente in (B) ist natürlich 26, wie in (A). Die Combination (B) ist von der sechsten Classe, weil 6 das grösste in (A) vorkommende Element ist und das grösste Element in (B) ist 7, weil (A) von der siebenten Classe ist. Transformiert man (B) in gleicher Weise, wie vorhin (A), so erhält man offenbar wieder (A).

Verfahren wir in gleicher Weise mit allen Combinationen $r$ter Classe zur Summe s, deren Gesammtheit wir ebenfalls kurz mit (A) bezeichnen wollen, so ergeben sich ebensoviele Combinationen (B), welche auch die Elementensumme s besitzen und alle das Element r u. zw. als höchstes enthalten. Das höchste Element in irgend einer der Combinationen (A) gibt die Classe der entsprechenden daraus abgeleiteten an und eine nochmalige Anwendung desselben Verfahrens auf das System (B) liefert das System (A) in der ursprünglichen Anordnung. Hieraus folgt auch, dass es keine Combination geben kann, welche alle hier genannten Eigenschaften der Combinationen (B) besitzen und sich nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren aus (A) nicht ergeben würde. Es müsste in diesem Falle eine entsprechende Combination $r$ter Classe zur Summe s geben, welche in (A) nicht enthalten ist. Daher sind die Combinationen (A) und (B) stets in gleicher Anzahl vorhanden. Der analytische Ausdruck für diese Gleichheit, welchen wir allsogleich ableiten wollen, spricht nun eine bemerkenswerte Eigenschaft der in dieser Arbeit betrachteten Grössen aus und liefert ausserdem eine einfache Lösung des oben gestellten Problems.

Die Anzahl der Combinationen (A) ist $\mathfrak{C}_r(s)$. Um jene der Combinationen (B) zu erhalten, lassen wir in jeder das Element r einmal weg, worauf alle möglichen Combinationen zur Summe s — r aus den Elementen 1, 2, 3, .. r verbleiben. Das System (B) besteht somit aus

$$\overset{(r)}{\mathfrak{C}}_1(s-r) + \overset{(r)}{\mathfrak{C}}_2(s-r) + \ldots + \overset{(r)}{\mathfrak{C}}_{s-r}(s-r) = \overset{(r+1)}{\mathfrak{C}}_{s-r}(2s-2r)$$

Complexionen. (S. Gleichung (28)). Daraus folgt

$$\overset{(r+1)}{\mathfrak{C}}_{s-r}(2s-2r) = \mathfrak{C}_r(s),$$

oder wenn s — r durch s und r durch n ersetzt wird,

$$\overset{(n+1)}{\mathfrak{C}}_s(2s) = \mathfrak{C}_n(s+n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Demnach hat die Gleichung (33) $\mathfrak{C}_n(s+n)$ verschiedene Auflösungen und es ist dieser Ausdruck für kleinere Werte von n und s aus der beigeschlossenen Tabelle zu entnehmen und auch sonst bedeutend leichter berechenbar, als der Ausdruck $\overset{(n+1)}{\mathfrak{C}}_s(2s)$ nach den für die Grössen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s)$ aufgestellten Reductionsformeln.

So hat z. B. die Gleichung

$$1x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} = 20$$

$\mathfrak{C}_{10}(30) = 530$ verschiedene Auflösungen.

Die zur Ableitung der Relation (34) angestellten Betrachtungen liefern unmittelbar eine Eigenschaft der Grössen $\overset{(n)}{\mathfrak{C}}_r(s)$, welche auch noch angeführt werden soll.

Fassen wir aus den Combinationen rter Classe zur Summe s diejenigen heraus, welche alle das Element ρ, jedoch kein höheres enthalten, so ist die Anzahl derselben durch $\overset{(\rho)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-\rho)$ bestimmt. Werden nun diese Combinationen nach dem zur Ableitung der Gleichung (34) benützten Verfahren transformiert, so ergeben sich alle Combinationen ρter Classe zur Summe s, welche alle das Element r u. zw. als höchstes enthalten. Hieraus folgt

$$\overset{(r)}{\mathfrak{C}}_{\rho-1}(s-r) = \overset{(\rho)}{\mathfrak{C}}_{r-1}(s-\rho),$$

eine durch die symmetrische Stellung von r und ρ ausgezeichnete Gleichung.

Die nachfolgende Tafel gibt Werte der Grössen $\mathfrak{C}_r(s)$, d. h. die Anzahl der Combinationen rter Classe zur Summe s mit Wiederholung an und ist mittelst der Gleichung (25) berechnet worden. Auch die Grössen $C_r(s)$, d. i. die Anzahl der Combinationen rter Classe zur Summe s ohne Wiederholung kann man mit Hilfe dieser Tafel und der Gleichungen (24) auffinden. Die directe Herstellung einer Tafel auch für diese Grössen erscheint wegen der wenig compendiösen Form, die dieselbe annehmen müsste, als unzweckmässig.

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r=1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	—	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15
3	—	—	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52	56	61	65	70	75
4	—	—	—	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136	150	169	185	206
5	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255	291	333	377
6	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391	454	532
7	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522	618
8	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638
9	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
16	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15	22
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	7	11	15