Arabische Gnomonik

Schoy, Carl

Altona, 1913

III. Kapitel. Temporäre Stunden und Stundenlinien

$$x = \varrho \cdot \frac{1-(1+2\,cotg^2\,\varepsilon)\,.\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\varrho-q\,.\,tang\,\varphi}{q+\varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XII)}$$

Man erhält die Stellen, wo der Ḥalazûn die X-Achse passiert, wenn man in XI) $y = 0$ setzt oder in II) der Reihe nach $l = 0°$, $90°$ und $180°$ substituiert. Es findet sich für das zugehörige ϱ resp.:

$$\varrho_1 = q\,.\,tang\,\varphi \qquad \varrho_2 = q\,.\,tang\,(\varphi+\varepsilon) \qquad \varrho_3 = q\,.\,(\varphi-\varepsilon)$$

Die Durchschnitte mit der Y-Achse ergeben sich, wenn man in XII) $x = 0$ setzt oder in II) für l 45° und 135° substituiert. Man findet

$$\varrho_1 = q\,.\,\frac{\sqrt{1+2\,cotg^2\,\varepsilon}+tang\,\varphi}{1-tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1+2\,cotg^2\,\varepsilon}} \qquad \varrho_2 = q\,.\,\frac{\sqrt{1+2\,cotg^2\,\varepsilon}-tang\,\varphi}{1+tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1+2\,cotg^2\,\varepsilon}}\,.$$

Eine weitere Diskussion des Ḥalazûn ist mit Schwierigkeiten verknüpft: Für $\varphi = 0$ ist er viel leichter zu behandeln. Abul Hassan beschränkt sich ebenfalls auf den Fall $s = 0$.

III. Kapitel.

Temporäre Stunden und Stundenlinien.

Eine temporäre Stunde ist, wie wir bereits wissen, der zwölfte Teil der Zeit, der zwischen Sonnenauf- und -untergang verfließt, mithin der 6. Teil eines halben Tages. Wir wollen zuerst für ihre Dauer einen allgemeinen Ausdruck ableiten.

Aus der Formel $cos\,s_0 = -tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi$ folgt

$$s_0 = arc\,cos\,(-\,tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi),$$

mithin ist der zu einer Temporärstunde gehörige Stundenwinkel

$$\frac{s_0}{6} = \frac{1}{6}\,arc\,cos\,(-\,tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi)$$

Die Dauer einer solchen Stunde findet man daher, wenn man $\frac{s_0}{6}$ in Zeit verwandelt. Setzt man $r = 1$, so kommt auf 360° der ganze Kreisumfang oder 2π als Bogen, folglich ist der Stundenwinkel einer aequinoktialen Stunde $= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. Man hat daher folgende Proportion:

$$\frac{\text{Tempor. Stunde}}{\text{Aequinokt. Stunde}} = \frac{arc\,cos\,(-\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{6} : \frac{\pi}{12}$$

Also ist

$$1 \text{ Tempor. Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi}\,.\,1 \text{ aequin. Stunde}$$

und wenn man die aequinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählt:

$$\text{Temporäre Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Zum leichteren praktischen Gebrauch verwandeln wir I) in eine Potenzreihe, unter Beachtung, daß $arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x$ und $arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{x^5}{5} + \ldots$ ist. Dann ist:

$$\text{Temp. Stunde} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta + \frac{1}{2}\,.\,\frac{(tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)^3}{3} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{2\,.\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta}{\pi} + \frac{1}{3}\,.\,\frac{tang^3\,\varphi\,.\,tang^3\,\delta}{\pi} + \ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Diese Reihe convergiert stark, wenn δ klein ist und auch $tang\,\varphi < 1$ ist. Sie convergiert nicht für $tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta \geqq 1$

Man kann auch wieder wie früher

$$tang\,\delta = \frac{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\sqrt{1 - sin^2\,\varepsilon\,.\,sin^2\,l}} = sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l\,(1 - sin^2\,\varepsilon\,.\,sin^2\,l)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, oder den Klammerfaktor nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$tang\,\delta = sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l + \frac{1}{2}\,sin^3\,\varepsilon\,.\,sin^3\,l + \dots$$

Bleibt man bei den 3. Potenzen stehen, so läßt sich II) leicht in die Form überführen:

$$\text{Temp. Stunde} = 1 + \frac{2\,tang\,\varphi\,.\,sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\pi} + \frac{tang\,\varphi\,.\,sin^3\,\varepsilon\,.\,sin^3\,l}{\pi} + \frac{tang^3\,\varphi\,.\,sin^3\,\varepsilon\,.\,sin^3\,l}{3\,\pi} + \dots \quad \text{III)}$$

Beide Formeln, II) und III) sind genügend genau zur Verwandlung der temporären Stunden in aequinoktiale und umgekehrt.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung der temporären Stundenlinien aufzustellen. Soviel mir bekannt ist, ist diese Aufgabe in völliger Allgemeinheit noch nicht gelöst worden. Am eingehendsten hat sich mit dem Gegenstand wohl Delambre befaßt in seiner Histoire de l' astronomie ancienne, tome II, pag. 476—82, wo es u. a. heißt: Voyons maintenant, s'il est vrai que les lignes des heures temporaires sont toujours des lignes droites, ou ce qui revient au même, si les courbes horaires sur la sphère sont toujours des arcs du grand cercle, ainsi que tous les auteurs le supposent tacitement.

Cammandin et Clavius ont essayé de demontrer qu'en effet les arcs horaires appartiennent à des grands cercles. Montucla a dit, et Lalande a répété d'après lui, que les lignes horaires sont des courbes assez bizarres, et qu' on ne peut décrire exactement qu' en déterminant un grand nombre de points." Da aber die Araber diese Kurven durch gerade Linien ersetzten, so ist Delambre darauf geführt worden, zu untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler war. Er findet ihn bei der Deklination, welche die Sonne erreichen kann und für die verhältnismäßig niederen Breiten, innerhalb deren sich das mohammedanische Reich erstreckte, sehr gering. Indem er diese eigenartigen Linien aber weiter verfolgte, bemerkte er, „daß ihr Gestalt der eines Integralzeichens nicht unähnlich sei". Zeichnungen und mathematische Ableitungen gibt Delambre nicht bei, wiewohl er solche für sich ausgeführt haben muß.

Um in aller Strenge die Gleichungen der Kurven abzuleiten, die uns hier beschäftigen, gehen wir auf die Formeln IV) und V) des ersten Kapitels zurück. Sie bestimmen zusammen die Koordinaten eines Punktes der Tageshyperbel, der zu einem gewissen Stundenwinkel s der Sonne gehört. Wählt man diesen Stundenwinkel s so, daß er $= \frac{s_0}{6}, \frac{s_0}{3}, \frac{s_0}{2}, \frac{2s_0}{3}$ und $\frac{5s_0}{6}$ wird, so sind x und y der genannten Formeln die Koordinaten eines Punktes der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Temporärstundenlinie. Durch nachherige Elimination von δ erhält man die für alle Punkte einer solchen Kurve gültige Gleichung, die aber wegen ihres sehr hohen Grades in kartesischen Koordinaten nicht diskutabel ist. Indessen bietet sich auch hier eine Parameterdarstellung beinahe von selbst dar. Wie aus IV) und V) des 1. Kapitels ersichtlich, kommt die Variable s in der Sinus- und Kosinusfunktion vor. Es gilt also aus

$$cos\,s_0 = -tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi$$

$sin\,\frac{s_0}{6}$, $cos\,\frac{s_0}{6}$; $sin\,\frac{s_0}{3}$, $cos\,\frac{s_0}{3}$; $sin\,\frac{s_0}{2}$, $cos\,\frac{s_0}{2}$ usw. zu berechnen und in IV) und V) einzusetzen. Dies ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Am leichtesten ist es noch, die Gleichung für die dritte Stundenlinie aufzustellen, wo $s = \frac{s_0}{2}$ wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} cos\,s_0 &= cos^2\frac{s_0}{2} - sin^2\frac{s_0}{2} \\ &= 2\,cos^2\frac{s_0}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\,sin^2\frac{s_0}{2} = -\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta. \end{aligned}$$

Mithin folgt

$$\sin\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1+\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}} \qquad\qquad \cos\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}} \quad .$$

Setzt man diese Ausdrücke für *sin s* und *cos s* in IV) und V) ein, so findet man, wenn man vorher noch Zähler und Nenner der rechten Seiten mit *cos δ* durchdividiert hat, folgende Parameterdarstellung für die dritte Stundenlinie:

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}} - \cos\varphi\,.\,\tan\delta}{\sin\varphi\,.\,\tan\delta + \cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1+\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}}}{\sin\varphi\,.\,\tan\delta + \cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\tan\varphi\,.\,\tan\delta}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Dies ist der einfachste Fall, den wir nachher eingehender studieren werden. Aber auch hier würde die Elimination von *tang δ* (Parameter) schon zu einer Gleichung vom 8. Grade führen.

Schwieriger wird der Fall jedoch, wenn man $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ berechnen, d. h. die zweite Temporärstunde darstellen will. Bekanntlich ist

$$\left.\begin{aligned} 4\cos^3\frac{s_0}{2} - 3\cos\frac{s_0}{3} &= \cos s_0 = -\tan\varphi\,.\,\tan\delta \\ 3\,.\,\sin\frac{s_0}{3} - 4\sin^3\frac{s_0}{3} &= \sin s_0 = \sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

so daß also die Errechnung von $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ aus den Formeln V) auf kubische Gleichungen führt.

Man kann aber auch ganz allgemein aus $\cos s_0 = -\tan\varphi\,.\,\tan\delta$ $\sin\frac{m\,s_0}{n}$ und $\cos\frac{m\,s_0}{n}$ berechnen, wenn man vom Moivreschen Satz ausgeht. Man hat dann

$$\cos\frac{m\,s_0}{n} \pm i\sin\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta \pm i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Daraus ergibt sich

$$2\cos\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta + i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta - i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$2\sin\frac{m\,s_0}{n} = \frac{1}{i}\left[\left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta + i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta - i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

Die allgemeinsten Gleichungen von Temporärstundenlinien sind demnach diese

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2}\,.\,\sin\varphi\left[\left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta+i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta-i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\delta\,.\,\tan^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}\right] - \cos\varphi\,.\,\tan\delta}{\sin\varphi\,.\,\tan\delta+\frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta+i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta-i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \\ y &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2i}\left[\left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta+i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta-i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]}{\sin\varphi\,.\,\tan\delta+\frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta+i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\tan\varphi\,.\,\tan\delta-i\,.\,\sqrt{1-\tan^2\varphi\,.\,\tan^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \end{aligned}\right\} \text{VI)}$$

Wir sehen also, daß das Zifferblatt einer Bazithah in der Tat von sehr bizarren Linien hätte durchzogen sein müssen, wäre es mit der nötigen Genauigkeit konstruiert worden. Nach L. Am. Sédillot[1]) enthielt

[1]) Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris, 1841, pag. 221.

eine gute Sonnenuhr außerdem noch die Linie des Zoḥr (Zuḥr) oder Doḥr, welche dem heißesten Zeitpunkt jedes Tages entsprach, der $1^1/_2$ Stunden nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian eintrat. Für diese Linie ist also $s = \frac{s_0}{4}$; ihre Gleichung läßt sich mithin leicht aus derjenigen der dritten Stundenlinie entwickeln, wenn man beachtet, daß

$$\sin\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1-\tang\varphi\ \ \tang\delta}{2}}}{2}}$$

$$\cos\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1-\tang\delta\,.\,\tang\varphi}{2}}}{2}}$$

ist. Es ergibt sich damit folgendes Gleichungspaar für den Zoḥr

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\tang\varphi\,.\,\tang\delta)}}{2}}-\tang\delta\,.\,\cos\varphi}{\sin\varphi\,.\,\tang\delta+\cos\varphi\,.\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\tang\varphi\,.\,\tang\delta)}}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\tang\varphi\,.\,\tang\delta)}}{2}}}{\sin\varphi\,.\,\tang\delta+\cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\tang\varphi\,.\,\tang\delta)}}{2}}} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{VII)}$$

Wenden wir uns jetzt zur näheren Diskussion der Gleichungen für die dritte Stundenlinie und machen wir dabei noch die vereinfachende Voraussetzung, daß $\varphi = 45°$, also $\tang\varphi = 1$ sei. (Für $\varphi = 0$ fallen die temporären Stunden mit den aequinoktialen zusammen). Zuerst ersehen wir aus dem Formelsystem IV), (oder auch VI) daß die Quadratwurzeln nur so lange reell sind, als $\tang\varphi\,.\,\tang\delta < 1$ ist, die Sonne auf- und untergeht. Die Kurven endigen also, sobald $90° - \delta = \varphi$ geworden ist. Für die Mitternachtssonne fallen die temporären Stunden insofern wieder mit den aequinoktialen zusammen, als dann eine Stunde der ersten Art gleich zwei Stunden der zweiten ausmacht. Ist δ negativ, so wird $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{für}\quad 1-\tang\varphi\,.\,\tang(-\delta) &= 0 \\ \text{oder}\quad \tang\varphi\,.\,\tang(-\delta) &= 1 \\ -\delta &= 90°-\varphi \end{aligned}$$

Dann ist aber nach der zweiten der Formeln IV) auch $y = 0$, woraus folgt, daß sich die temporären Stundenlinien um das Wintersolstitium am meisten nähern und sich für den eben gefundenen Wert von δ auf einen Punkt der Y-Achse (Mittagslinie) zusammendrängen, der aber nach IV_1) im Unendlichen liegt; denn sie geht, wie eine einfache Rechnung zeigt, über in

$$x = q\,.\,\frac{\sin\varphi + \cos\varphi\,.\,\cotg\varphi}{\sin\varphi\,.\,(-\cotg\varphi) + \cos\varphi} = \infty\ ,$$

ein Resultat, das übrigens *a priori* zu erwarten war.

a) **Bestimmung der wagerechten Tangenten.**

Wir setzen in den Formeln IV) $\tang\delta = u$, so wird für $\varphi = 45°$:

$$\frac{y}{q\,.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}} \qquad\qquad \frac{x}{q} = \frac{\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}}\ ,$$

und falls man den Nenner beider Gleichungen mit N bezeichnet:

$$\frac{1}{q\,.\sqrt{2}}\cdot\frac{d\,y}{d\,u}=\left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(+\frac{1}{2\sqrt{1+u}}\right)-\sqrt{1+u}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{d\,y}{d\,u}=\frac{-\sqrt{1-u}\,.\,(u+2)+\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{d\,x}{d\,u}=\left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$=\frac{(u-2)\,.\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}}{\sqrt{2}\;(u-2)\;\sqrt{1+u}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \text{VIII)}$$

Die wagerechten Tangenten bestimmen sich aus der Gleichung

$$u^3+3\,u^2-2=0$$

Ihre Wurzeln sind:

$$u_1=-1,\quad\text{oder}\quad\delta_1=-45^\circ$$
$$u_2=-1+\sqrt{3},\quad\text{oder}\quad\delta_2=+36^\circ\,12'\!.3$$
$$u_3=-1-\sqrt{3},\quad\text{oder}\quad\delta_3=-69^\circ\,53'\!.8$$

b) **Für senkrechte Tangenten** folgt aus VIII):

$$(u-2)^2\,.\,(1+u)=0,$$

woraus man zieht:

$$u_1=-1,\quad\text{oder}\quad\delta_1=-45^\circ$$
$$u_2=+2,\quad\text{oder}\quad\delta_2=+63^\circ\,26'\!.1$$

Hieraus ersieht man, daß nur der einen wagerechten Tangente $\delta_2=36^\circ\,12'\!.3$ eine geometrische Bedeutung zukommt; $\delta_1=-45^\circ$ definiert eine Asymptote (Mittagslinie).

c) **Für Wendepunkte** muß $\dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}=\dfrac{d\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)}{d\,u}\cdot\dfrac{d\,u}{d\,x}=0$ sein.

Daraus folgt: $\dfrac{d\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)}{d\,u}=0$ und auch $\dfrac{d\,u}{d\,x}=0$

Man findet aus VIII), wenn man den Nenner mit N_1 bezeichnet:

$$\sqrt{2}\,.\,\frac{d\,y'}{d\,u}=\left\{(u-2)\sqrt{1+u}\,.\left(\frac{2+u}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{1-u}\right)-\left[\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}\right]\left(\frac{u-2}{2\sqrt{1+u}}+\sqrt{1+u}\right)\right\}:N_1^2$$

$$=\left\{(u-2)(1+u)\left(\frac{u+2}{2}-1+u\right)-\left[\sqrt{2(1-u)}-(2+u)(1-u)\right]\left(\frac{u-2}{2}+1+u\right)\right\}:N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

$$=\left\{(u^2-u-2)\,3\,u-\left[\sqrt{2(1-u)}+2-u-u^2\right]\,3\,u\right\}:2\,N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

Dieser Ausdruck ist $=0$, wenn es der Inhalt der geschwungenen Klammer ist.

Das gibt: $3\,u\left(2\,u+\sqrt{2(1-u)}\right)=0,$

woraus folgt:

$$u_1=0;\quad\text{d. h.}\quad\delta_1=0$$
$$u_2=-1;\quad\text{d. h.}\quad\delta_2=-45^\circ$$
$$u_3=\frac{1}{2};\quad\text{d. h.}\quad\delta_3=26^\circ\,56'\!.4$$

Ferner muß auch sein:

$$\frac{d\,u}{d\,x}=0,\quad\text{d. h.}\quad\sqrt{1-u}\,.\left(u\sqrt{2}+\sqrt{1-u}\right)^2=0$$

Hieraus entnehmen wir:

$$u_4 = 1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_4 = +45^\circ$$
$$u_5 = -1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_5 = -45^\circ$$
$$u_6 = \frac{1}{2}; \quad \text{d. h.} \quad \delta_6 = 26^\circ\, 56.'4^{1)}$$

Die dritte temporäre Stundenlinie für $\varphi = 45^\circ$ hat also nur 2 Wendepunkte, die geometrische Bedeutung haben ($\delta_1 = 0$, und $\delta_3 = 26^\circ\, 56.'4$). Wie die Zeichnung beweist, (Tafel I, Fig. 3) verlaufen auch die anderen Stundenlinien durchaus einfach und nicht „bizarr." Und dasselbe ist für andere Breiten (z. B. $\varphi = -30^\circ$) der Fall (Tafel II[2]). Man könnte auch ohne allzugroße Mühe die Differentialquotienten der Gleichungen IV) bilden, ohne die beschränkende Annahme, daß $\varphi = 45^\circ$ ist. Eine kurventheoretische Behandlung der Formeln VI) müssen wir jedoch den Mathematikern von Fach überlassen und uns hier damit begnügen, den allgemeinsten Gleichungen der Stundenlinien eine Form gegeben zu haben, die uns für ihre Diskussion am geeignetsten erscheint.[3])

Jetzt läßt sich auch die Frage nach den Hassanschen Ḥâfirkurven, welchen temporäre Stunden zugrunde liegen, erschöpfend dahin beantworten, daß in die Gleichungen VIII) und IX) des zweiten Kapitels für $\cos s$ der Ausdruck einzusetzen ist, der sich auf S. 19 findet.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch in Kürze eine Theorie jener merkwürdigen arabischen Wasseruhren geben, die wir schon in der Einleitung erwähnten, und die nach Carra de Vaux folgende Einrichtung hatten:

Einem Gefäß von Umdrehungsoberfläche entströmt durch ein am unteren Rande angebrachtes Ansatzrohr Wasser, wobei dasselbe jedoch nicht auf unveränderlichem Niveau erhalten wird, wie dies bei den gewöhnlichen Wasseruhren der Fall ist. Das Gefäß entleert sich, und eine seiner Außenseite entlang angebrachte Teilung läßt jederzeit erkennen, welcher Stunde die augenblickliche Wasserhöhe zukommt.

Diese Teilung kann nun zweierlei Art sein:

1) Sie entspricht den gleichen oder aequinoktialen Stunden,
2) Sie gilt den temporären oder ungleichen Stunden.

Es ist klar, daß die „Niveaucurven", wie sie A. Wittstein (a. a. O.) nicht unpassend nennt, bei den gleichen Stunden Kreise sind, die parallel zu einander und zum Horizont die Gefäßwand umziehen, und deren Abstände für die einzelnen Stunden nur von der Art der Rotationsfläche abhängen, welche man für die Wasseruhr gewählt hat.

---

[1]) Daß $u_6 = \frac{1}{2}$ ist, obwohl es die Gleichung $u\sqrt{2} + \sqrt{1-u} = 0$ nicht befriedigt, ersieht man, wenn man sie auf die Form $\cos\varphi \,.\, \sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\varphi} = 0$ bringt, was erlaubt ist, da ja $u < 1$ sein muß. Es ergibt sich alsdann

$$\cos\varphi\, \sqrt{2} + \sin\frac{\varphi}{2} \,.\, \sqrt{2} = 0$$

oder

$$\cos\varphi + \sin\frac{\varphi}{2} = 0$$
$$\frac{\varphi}{2} = +60^\circ$$

[2]) Diese Figur hat Herr Dr. Wedemeyer für den Verf. gezeichnet, wofür ihm an dieser Stelle herzlichst gedankt sei.

[3]) Delambre hat dem II. Tome seiner Histoire de l'astronomie ancienne vor allem Text, sofort nach dem Inhaltsverzeichnis folgende Bemerkungen als Korrektion zu seinen Ausführungen auf S. 476 ff. über die temporären Stundenlinien vorangestellt:

„Depuis l'impression de ce chapitre, pour mieux connaître la figure de ces lignes, j'ai calculé un cadran pour le cercle polaire; j'en ai déterminé tous les points horaires pour toutes les déclinaisons de degré en degré et même pour quelques fractions de degrés de 23° à 23° 28'. Il en est résulté que les lignes horaires pour cette latitude ont à fort peu près la figure du signe d'integration $\int$, c'est-à-dire que dans le voisinage du solstice d'hiver, la ligne a une courbure sensible; que pendant la plus grande partie de l'année, la ligne est sensiblement droite, et qu'elle acquiert de nouveau une courbure, mais moins sensible; vers le solstice d'été. Au solstice d'hiver, la durée du jour est $= 0$; toutes les lignes horaires doivent donc se confondre avec la méridienne. Aux environs de ce solstice, les lignes horaires sont si voisines, qu'il est presque impossible de les distinguer, quelque grande que soit l'échelle: en sorte qu'en cette partie le cadran est aussi inutile que difficile à tracer. Au solstice d'été, au contraire les lignes sont plus espacées que jamais, parceque le jour est de 24 heures équinoxiales, qui ne font que 12 heures temporaires. La construction est donc très-facile; au lieu que pour l'hiver le meilleur parti est de supprimer la portion de ces lignes qui ne peut être d'aucune utilité."

Ganz anders aber verhält sich dies wieder mit dem temporären Niveaukurven. Sie können in keiner Parallelebene zum Horizont verlaufen, da die temporären Stunden im Sommer viel länger sind als im Winter, folglich im Sommer während einer solchen Stunde bedeutend mehr Wasser ausfließt als im Winter. Die Niveaukurve sinkt deshalb, während die Sonne die astronomische Länge von 0° bis 180° hat, sich also vom Widder bis zur Wage bewegt, auf dem Mantel des Gefäßes herab, um sich zwischen der Sonnenlänge von 180° bis 360° wieder über das Niveau der gleichen Stunden hinauf zu heben.

Wir wollen den Sachverhalt an einer Kugeluhr näher studieren.

1) Um für die aequinoktialen Stunden die Schichtlinien ziehen zu können, nehmen wir an, die Kugel entleere sich in 12 solcher Stunden einmal. Sei das Wasser nach der ersten Stunde um x Einheiten des Durchmessers $d = 2r$ gesunken, so muß $1/6$ des Rauminhaltes der Halbkugel ausgeflossen sein, $1/3$ nach 2 Stunden, $1/2$ nach 3 Stunden usw. Nun ist für das Volumen eines Umdrehungskörpers nach der Formel für die Kubatur:

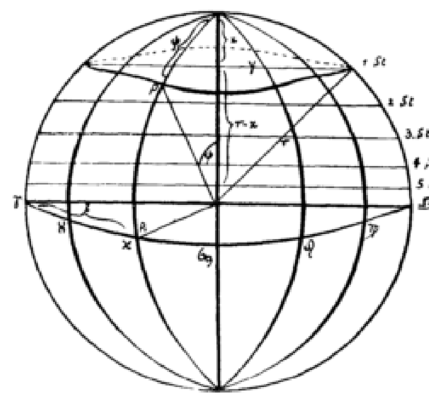

Fig 4.

$$V = \pi \cdot \int_0^x y^2 \cdot dx$$

Nach Fig. 4 hat man:

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (r-x)^2 \\ &= y^2 + x^2 - 2rx + r^2 \\ y^2 &= 2rx - x^2 \end{aligned}$$

Damit wird

$$V = \pi\left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IX)}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Für die 1. Stundenlinie ist:} & V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{9} r^3 \pi & & \\
\text{» » 2. » » »} & V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{9} r^3 \pi & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\
\text{» » } n. \text{ » » »} & V_n = \frac{n}{6} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{n}{9} r^3 \pi & \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{X)}
\end{array}$$

Man findet also die Entfernungen der einzelnen Stundenmarken x_1, x_2, x_3 usw. vom obersten Endpunkt des Durchmessers durch Auflösung der folgenden kubischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 - 3r x_1^2 + \frac{r^3}{3} &= 0 \\ x_2^3 - 3r x_2^2 + \frac{2r^3}{3} &= 0 \\ x_3^3 - 3r x_3^2 + r^3 &= 0 \\ \cdot\quad \cdot\quad &\cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad &\cdot \\ \cdot\quad \cdot\quad &\cdot \\ x_n^3 - 3r x_n^2 + \frac{n}{3} r^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XI)}$$

Um jedoch die Teilung auf der Oberfläche der durchsichtig zu denkenden Kugel anbringen zu können, wird man am besten den sphärischen Radius ψ berechnen, mit welchem die einzelnen konzentrischen Schichtkreise zu ziehen sind. Die Fig. 4 gibt unmittelbar:

$$\cos\psi = \frac{r-x}{r}$$

$$x = r(1 - \cos\psi) = 2r \cdot \sin^2\frac{\psi}{2}$$

womit sich die Gleichungen XI) verwandeln in:

$$\left.\begin{array}{l} 8 \,.\, sin^6 \frac{\psi_1}{2} - 12 \,.\, sin^4 \frac{\psi_1}{2} + \frac{1}{3} = 0 \\ 8 \,.\, sin^6 \frac{\psi_2}{2} - 12 \,.\, sin^4 \frac{\psi_2}{2} + \frac{2}{3} = 0 \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ 8 \,.\, sin^6 \frac{\psi_n}{2} - 12 \,.\, sin^4 \frac{\psi_n}{2} + \frac{n}{3} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad XII)$$

2) Da die Kugel keine in die Ebene abwickelbare Fläche ist, so lassen sich die Niveaulinien für die Temporärstunden nur an der Oberfläche der Kugel selbst punktweise konstruieren durch Berechnung der Kugelkoordinaten eines jeden Punktes einer solchen sphärischen Kurve. Zu dem Zweck teilen wir den Kugelumfang (Aequator) gemäß der Tierkreisbilder in 12 gleiche Teile, wie es Fig. 4 zeigt. Dann sind die Koordinaten des Punktes P, nämlich seine Länge l und seine Poldistanz ψ anzugeben, wodurch P vollständig bestimmt ist. Die Länge l ergibt sich aus dem D a t u m; ψ findet sich durch folgende Ueberlegung:

Es verlangt 1 aequinoktiale Stunde $\frac{1}{9} r^3 \pi$ des Kugelinhalts, folglich 1 temporäre Stunde

$$\frac{1}{9} r^3 \pi \,.\, \frac{2 \, arc \, cos \, (- tang \, \varphi \,.\, tang \, \delta)}{\pi} = \frac{2}{9} r^3 \, arc \, cos \, (- tang \, \varphi \,.\, tang \, \delta)$$

des Kugelinhalts. Und da sich die Senkung des Wasserspiegels jeweils aus der kubischen Gleichung

$$\left(r \, x_n^2 - \frac{x_n^3}{3} \right) \pi = V_n$$

ergibt, so hat man für die n.te Temporärstundenlinie

$$\left(r \, x_n^2 - \frac{x_n^3}{3} \right) \pi = \frac{2 \, n}{9} \,.\, r^3 \, arc \, cos \, (- tang \, \varphi \,.\, tang \, \delta) \ ,$$

und wenn man wieder $x = r \, (1 - cos \, \psi) = 2 \ r \ sin^2 \frac{\psi}{2}$ setzt und außerdem, wie es zu Anfang dieses Kapitels gelehrt wurde, die Deklination δ der Sonne in ihrer Länge l ausdrückt:

$$\left(2 \, sin^4 \, \frac{\psi_n}{2} - \frac{4}{3} \ sin^6 \, \frac{\psi_n}{2} \right) \pi = \frac{n}{9} \, arc \, cos \left(- tang \, \varphi \,.\, \frac{sin \, \varepsilon \,.\, sin \, l}{\sqrt{1 - sin^2 \, \varepsilon \,.\, sin^2 \, l}} \right) \ , \quad \ldots . \quad XIII)$$

aus der sich, wie zu erwarten war, der Radius der Kugel forthebt.

Wir behandeln noch die Frage, w e l c h e N i v e a u l i n i e mit ihrer tiefsten Stelle (Sommeranfang) den Aequator gerade berühre. Dann ist in XIII) $\psi = 90^\circ$ und $l = 90^\circ$ zu setzen. Für $\varphi = 45^\circ$ ergibt Gleichung XIII)

$$\pi \,.\, \left(2 \,.\, \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \ .\ \frac{1}{8} \right) = \frac{n}{9} \, arc \, cos \, (- tang \, \varepsilon)$$

$$\pi = \frac{n}{3} \,.\, arc \, cos \, (- tang \, \varepsilon)$$

$$cos \, \frac{3 \, \pi}{n} = - tang \, \varepsilon$$

$$cos \left(180^\circ - \frac{3 \, \pi}{n} \right) = tang \, \varepsilon$$

$$n = 4{,}7 \text{ (abgerundet)}$$

Für das Wintersolstitium ergibt sich auf gleiche Weise

$$n = 8{,}4 \text{ (abgerundet).}$$

Ein gerader Kreiskegel oder -zylinder liefern für solche Tagars einfachere Verhältnisse, zumal sich die Niveaukurven bei abgerolltem Mantel als e b e n e Kurven konstruieren lassen. Verallgemeinernd könnte man irgend eine Rotationsfläche als Wassergefäß annehmen. Allein solche, wenn auch noch so reizvollen Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der antiken Zeitmessung liegen uns hier zu ferne, als daß ein näheres Eingehen auf dieselben in Rücksicht auf unseren Traktat angezeigt wäre.

IV. Kapitel.

Die Qibla, Kiblah, Kebla, Keble oder Kebleheh.

Zu den verbindlichsten Vorschriften des Korans gehört die Innehaltung der Qibla beim Gebet. Diese Orientierung nach dem Heiligtum ist übrigens nicht arabischen Ursprungs, sondern wurzelt im Judentum. Nach der Ueberlieferung ist sie so alt, wie der Tempel selbst. Die Weiherede, (Kön. I, 8, danach Chron. II, 6) noch deutlicher aber das Buch Daniel (VI, 11) zeigen uns dies. So heißt es in dem letzteren: „Als David nun vernahm, daß der Erlaß ausgefertigt war, begab er sich in sein Haus, in dessen Obergemach er in der Richtung nach Jerusalem geöffnete Fenster hatte, kniete täglich dreimal nieder, und betete zu seinem Gotte und dankte ihm, ganz wie er es bisher zu tun gepflegt hatte". Nach J. Hamburger: Real-Encyklopädie für Bibel und Talmud, 1883, II, pag. 1134, besteht für den Betenden folgende Vorschrift: Außerhalb Palästinas wendet sich der Gläubige diesem Lande zu, innerhalb Palästinas nach Jerusalem, in Jerusalem nach dem Tempel, im Tempel nach dem Heiligtum.

„Selbst in den Gebetsriten war Mohammed anfänglich von den Juden abhängig, er wandte sein Antlitz zeitweilig beim Gebet nach Jerusalem; die älteste Moschee in Medina ist nach Jerusalem orientiert. Aber der mächtigen Judenherrschaft gegenüber war der Liebe Mühen umsonst. Da trat am 16. Januar 624 nach Sonnenuntergang ein Mann in die Moschee und rief den zum Gottesdienst versammelten Gläubigen zu: ‚Ich komme vom Propheten und bringe Euch die Nachricht, daß Gott die Qibla abgeändert, wendet Euer Gesicht gegen die Ka'ba zu Mekka; denn diese ist von nun an Eure Qibla!' Alle drehten sich um, so daß die Kinder und Frauen, die sonst in den letzten Reihen standen, nun vorn waren. Die Neuerung machte großes Aufsehen: mit gutem Grund, weil sie endgültig mit dem Judentum brach und die Stiftung der arabischen Nationalkirche einleitete." (H. Nissen, „Orientation", I, p. 70—72).

Selbst ein religiös gleichgültiger Islamite weicht von dieser Vorschrift nicht ab. Carsten Niebuhr berichtet in seiner „Reisebeschreibung nach Arabien", (I. Bd., pag. 226) daß ihn in der Wüste herumschweifende Beduinen öfters angefleht hätten, ihnen die Qibla zu bestimmen, wenn sie ganz ohne Orientierung waren. Der Behauptung A. Müllers („Der Islam im Morgen- und Abendlande", 1883—1885, I. Bd., pag. 193), daß man im Zweifelsfalle die Richtung nach Mekka durch einen Blick auf einen zu diesem Zweck angefertigten Kompaß festzustellen pflege, steht folgende Angabe Carsten Niebuhrs (a. a. O. pag. 226) entgegen: „Die Direktion des Weges fand ich leicht nach einem kleinen Kompaß, ohne daß es die Araber merkten oder daß es einigen Argwohn erwecken konnte; denn, obgleich die mohammedanischen Gelehrten Kompasse haben, um danach die Keblah in ihren Mosquéen zu bauen, so schien doch keiner der herumstreifenden Araber den Gebrauch desselben zu kennen. Es ist also wohl nicht sehr zuverlässig, wenn man in den Beschreibungen von Arabien lieset, daß die Karawanen daselbst nach dem Kompaß reisen".

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wurde die Qibla stets auf dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr gezogen, aber auch in den Nischen aller Moscheen und auf öffentlichen Plätzen mit freier Aussicht pflegte ihre Festlegung zu geschehen.[1]) Reiche Muselmänner lassen sich sogar die Qibla in ihrem eigenen Gebetszimmer (Oratoire) ziehen. Hier ist der Ort, auf die schöne Konstruktion der Qibla einzugehen, die sich in den Récréations mathématiques et physiques, 1790, Tome III, pag. 63 (nouvelle édition par M. Montucla) findet. Montucla behandelt die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: Gegeben 2 Seiten eines sphärischen Dreiecks und der eingeschlossene Winkel; einen der 2 anderen Winkel zu finden, und löst dieselbe in folgender Weise:

[1]) Das reich ausgestattete Werk von Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, Paris, 1788 gibt auf Tafel XVI eine Abbildung eines solchen öffentlichen Gebetsplatzes. Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderfläche mit der ewigen Lampe geschmückt ist, markiert die Qibla. Der Betende, der auf dem Gebetsteppich kniet und die Lampe anblickt, wendet damit von selbst sein Gesicht gen Mekka.