universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Arabische Gnomonik

Schoy, Carl

Altona, 1913

VI. Kapitel. Die arabischen Vertikaluhren

urn:nbn:at:at-ubi:2-9003

VI. Kapitel.

Die arabischen Vertikaluhren.

Sie alle zeichnen sich durch einen Stylus aus, der senkrecht auf der Uhrebene steht und niemals zum Himmelspol gerichtet ist. Daß bei den Islamiten neben dem Gnomon auch der Polos, das ist ein zur Weltachse paralleler Sonnenweiser, konstruiert wurde, ist eine öfters ausgesprochene aber nicht bewiesene Behauptung.[1]) Wir haben bei der Lektüre derjenigen arabischen Astronomen, deren Schriften in europäische Sprachen übersetzt sind, von Al-Battâni bis auf Abul Hassan keinen einzigen Polos gefunden. Und doch sollen nach R. Wolf[1]) sich abendländische Schriftsteller dahin ausgesprochen haben, daß sie die Kenntnis des Polos den Arabern verdanken.[2]) Wir sind jedoch mit Marie[3]) der Meinung, daß das mohammedanische Volk aus religiösen Gründen nur einseitig Gnomone konstruierte. Bereits im 1. Kapitel dieser Abhandlung erwähnten wir, daß wir uns über diese Frage in unserem Aufsatz: „Die arabische Sonnenuhr in ihrer Bedeutung usw." S. 246 schon eingehend geäußert hätten. Wir haben daselbst ausgeführt, daß ein eigener Beamter am Minareh oder auf dem freien Platz, wo sich eine Bazithah befand, diese unausgesetzt zu bewachen und dann durch Ausruf den Moment bekannt zu geben hatte, wo der Schatten des senkrechten Zeigers auf die Qibla fiel. Dann wies aber auch der Körperschatten eines jeden Gläubigen ihm von selbst die Richtung zur Ka'ba, und die in diesem Falle so einfache Orientierung wird ihm, falls er sich fern von der Moschee im Felde befand, bei der Verrichtung seiner täglichen Gebete von Nutzen gewesen sein. Außerdem würde ein Polos, besonders in sehr niedren Breiten durch seine geringe Neigung zum Horizont unpraktisch geworden sein; ein vertikaler Stab schien dem Muselmann bei der Erfüllung seiner religiösen Pflichten am zweckdienlichsten.

Die Vertikaluhren waren auch dem Altertum nicht unbekannt, und die Araber haben hinsichtlich derselben verschiedene Vorschriften von den Griechen übernommen. Die Gnonomik Al-Battânis weist jedoch nichts derartiges auf, erst bei Ibn Jûnis erfahren wir interessante Details. Alle gnomonischen Fragen an den Vertikaluhren, deren Ebenen in den 4 Kardinalrichtungen liegen, löst er ausschließlich mit Hilfe des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks; seine eigenartige Bestimmung des Aṣr, deren wir bereits gedachten, wird uns nächstdem noch eingehend beschäftigen. Er sagt, daß noch niemand vor ihm von einer solchen Behandlung der Vertikaluhren gesprochen habe. Zuletzt (Cap XXVI seiner Hakimitischen Tafeln, Vgl. Delambre a. a. O. pag. 129 - 131) gibt er noch Vorschriften für einen Vertikalcadran, dessen Deklination (Abweichung vom Meridian) bekannt ist.

Aber erst bei Abul Hassan treffen wir auch in dieser Hinsicht wiederum die nötigen Ausführlichkeit. Er behandelt gleichmäßig

1) Vertikale in der Meridianebene,
2) Solche über der Ost-Westlinie,
3) Von den Kardinalrichtungen um irgend ein Azimut α (Deklination) abweichende Vertikale (französ. Déclinants),
4) Zum Horizont inklinierende und zu den Kardinalrichtungen deklinierende Uhrebenen, wobei jedoch der Gnomon eine dem Horizont parallele Richtung hat.

Diese Gruppe von Sonnenuhren ist auch in modernen wissenschaftlichen Werken über Gnonomik schon behandelt worden. Man findet darüber näheres bei J. J. von Littrow: Gnomonik, 2. Aufl., Wien, 1838 (pag. 54 ff.) und bei J. Mollet: Gnomonique graphique, 7. Aufl., Paris 1884 (pag. 16 ff.). Allein

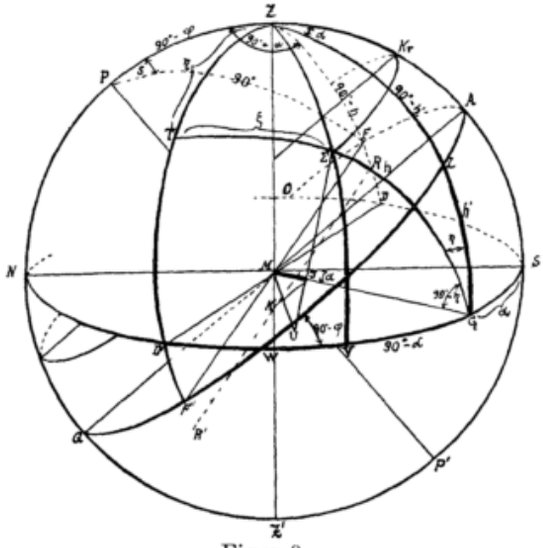
---

[1]) Vergl. dazu: R. Wolf: Geschichte der Astronomie, München, 1877 pag. 143, sowie Handbuch der Astronomie, Zürich 1891—93, II. Bd., pag. 429, und auch: J. Drecker: Gnomone und Sonnenuhren, Aachen, 1909 S. 21.

[2]) Möglich ist ja, daß die Araber den Polos wohl kannten, sowie ihnen schon von Al-Battâni ab die aequinoktialen Stunden bekannt waren, ohne daß sie sich ihrer bedienten. (Vergl. Opus astronom. I, p. 29 und 95) daß auch Ibn Jûnis mit den gleichen Stunden Bescheid wußte, folgt aus J. J. Sédillot: Traité usw. pag. 247. Nach R. Wolf: Geschichte der Astronomie, pag. 5, sollen schon die Chaldäer, Babylonier und Griechen die gleichen Stunden gekannt haben, doch sind seine Angaben ohne Quellennachweis und deshalb fast wertlos.

[3]) Vgl. Marie: Histoire des sciences mathématiques et physiques (II. Vol. pag. 141).

wir vermissen sowohl eine durchsichtige Ableitung als auch — was in diesem Fall nicht unwesentlich ist — eine anschauliche Zeichnung. Wir wollen deshalb im folgenden eine neue Theorie der Vertikaluhren vortragen, die von den angedeuteten Mängeln frei ist. Voraussetzung ist für uns dabei, daß der Zeiger senkrecht auf dem Zifferblatt steht, da wir ja eine arabische Gnomonik schreiben. In allen anderen Werken ist solche Voraussetzung nicht gemacht.



Figur 9.

a) Die Abbildung des Himmelsaequators auf dem Zifferblatt.

Zuerst entwickeln wir die Theorie des Déclinants, aus der sich dann die Formeln für die Vertikaluhren über den Kardinalrichtungen sehr einfach ergeben. Wir beziehen uns dabei auf die sehr anschauliche Figur 9, welche Herr Geheimrat Martus in Halensee vor 2 Jahren für den Verfasser zeichnete.[1])

Das Zifferblatt dieser Uhr ist in der Ebene $D\,Z\,D'\,Z'$ enthalten, welche von der Aequinoctiale um den Winkel α abweicht. Der Gnomon $J\,M$ ist horizontal nach dem Punkte G gerichtet ($\sphericalangle\, S\,M\,G = \alpha$). Die Schnittlinie des Horizontes mit dem Déclinant ist $D\,D'$, über ihr steigt der Durchschnitt mit der Aequatorebene $F\,F'$ ostwärts an zu der Höhe h, welche sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $F\,D\,O$ mittels der Formel

$$tang\, h = sin\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

findet. Das nach Süden gewandte Zifferblatt dieser Sonnenuhr wird von der Sonne beschienen erst t Stunden vor dem Mittagsaugenblicke $\left(t = \frac{s}{15}\right)$. Diese Zeit t ergibt sich aus dem Dreieck $P\,Z\,F$ durch den Sinussatz zu

$$sin\, s = cos\, \alpha \,.\, cos\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Um diese Zeit läuft der Schatten des Zeigers $M\,J = q$ auf $M\,F'$ hin ins Unendliche. Wenn die Sonne das Azimut α hat, also in L steht, kommt der Strahl $L\,M$ herab aus der Höhe h', die aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $L\,G\,W$ hervorgeht durch

$$tang\, h' = cos\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Der Schatten des Gnomons geht in diesem Augenblick senkrecht herab, also rechtwinklig gegen die Wagerechte $D\,D'$ und wird begrenzt von dem durch seine Spitze J gehenden Sonnenstrahl, welcher parallel $L\,M$ ist. Also ist

$$\sphericalangle\, M\,J\,K = \sphericalangle\, L\,M\,J = h' \text{ (Wechselwinkel)}$$

Daher die Schattenlänge

$$M\,K = q \,.\, tang\, h' = q \,.\, cos\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

In der durch K parallel mit $F\,F'$ gehenden Graden liegen zur Zeit der Aequinoctien die Endpunkte aller Schatten. Soviel zur Ablotung des Himmelsaequators.

b) Abbildung eines beliebigen Sonnenparallels.

Wir lösen jetzt die allgemeinere Aufgabe, die Schattenlinien des Zeigers für eine beliebige Stunde bei beliebiger Sonnendeklination zu finden. Es seien also gegeben: s, δ, φ und α; gesucht sind Schattenrichtung und Schattenlänge, die der Stylus q auf der Uhrebene des Déclinants verzeichnet. Zuerst wollen wir jedoch auch für diesen Fall Eintritt und Dauer der Besonnung eines solchen Zifferblattes berechnen. Wenn das Azimut des Stylus $= \alpha$ ist, so hat die Uhrebene das Azimut $\alpha_1 = 90° - \alpha$ (auf der Ostseite). Die Sonne möge beim Stundenwinkel s $\left(t = \frac{s}{15}\right)$ dies Azimut erreichen. Dann ergibt sich s aus der Gleichung:

$$sin\, \varphi \,.\, cos\, s = cos\, \varphi \,.\, tang\, \delta + sin\, s \,.\, cotg\, \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

---

[1]) Seit 9. September 1912 haben wir den Heimgang dieses ausgezeichneten Gelehrten zu beklagen.

Sie ist quadratisch, und die Auflösung nach $\cos s$ liefert die Wurzelwerte

$$\cos s = \frac{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \tan\delta}{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha} \pm \frac{\tan\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha - \cos^2\varphi \,.\, \tan^2\delta}}{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha} \quad \ldots \ldots \text{VI)},$$

wenn man in V) α_1 durch $90° - \alpha$, d h. $\cot\alpha_1$ durch $\tan\alpha$ ersetzt. Dabei entspricht das obere Vorzeichen offenbar dem Beginn, das untere dem Ende der Beleuchtung dieses Zifferblattes durch die Sonne. Die Dauer der Besonnung wird gefunden aus der Formel

$$s_1 - s_2 = \arccos\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \,.\, \tan\delta - \tan\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha - \cos^2\varphi \,.\, \tan^2\delta}}{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha}\right] -$$

$$\arccos\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \,.\, \tan\delta + \tan\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha - \cos^2\varphi \,.\, \tan^2\delta}}{\sin^2\varphi + \tan^2\alpha}\right] \quad \ldots \text{VII)},$$

die sich unter Anwendung des Additionstheorems für cyklometrische Funktionen nicht vereinfacht.

Der unseren Voraussetzungen entsprechende Sonnenort sei Σ. Von ihm sendet die Sonne einen Strahl herab, der, die Spitze des Gnomons in J durchsetzend, in U auf das Zifferblatt aufstößt. Nehmen wir $D\,D'$ und $Z\,Z'$ als Koordinatenachsen, und zwar $D\,D'$ als X-Achse, $Z\,Z'$ als Y-Achse, so ist die Richtung, welche die Stundenlinie $M\,U$ mit der Y-Achse bildet, $= \sphericalangle\, U\,M\,Z' = \eta$. Die Ebene der Uhr steht senkrecht auf der Gnomonsrichtung $M\,G$; G ist also Pol des Zifferblattes der Uhr, und alle Großkreisbögen, die man von G nach der Peripherie $Z'\,F'\,D'\,Z$ dieser Ebene zieht, stehen senkrecht auf ihr, wie die Meridiane der Erdkugel auf dem Aequator. Ein solcher Vertikalkreis ziehe von G durch den Sonnenort Σ und treffe die Ebene des Déclinants in T. Dann ist Bogen $T\,Z = \eta$. Die Länge $M\,U$ des Schattens ist abhängig von der Erhebung der Sonne über die Uhrebene. Sie ist $=$ Bogen $T\,\Sigma = \xi$. Diese zwei Größen gilt es also in den bekannten Stücken α, δ, φ und s auszudrücken. Ist z. B. η gefunden, so zieht man auf dem zu konstruierenden Zifferblatt einen Strahl durch M unter eben diesem Winkel η zur Y-Achse und trägt auf ihm die Schattenlänge $M\,U = q.\cot\xi$ ab, womit ein Punkt U der Schattenkurve gefunden ist. Setzt man für s der Reihe nach 0°, 15°, 30° usw., so repräsentieren die entsprechenden $M\,U$, $M\,U_1$, $M\,U_2$ usw. die Stundenlinien. Der Vertikalkreis vom Zenit durch Σ trifft den Horizont in V, und es werde Bogen $G\,V$ mit $\Delta\alpha$ bezeichnet. Aus dem bei T rechtwinkligen sphärischen Dreieck $T\,Z\,\Sigma$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\xi &= \cos h \,.\, \cos\Delta\alpha \\ \cos\xi \,.\, \cos\eta &= \sin h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{VIII)}$$

Die Anwendung des Sinus- und Kosinussatzes auf das Zenitpolsonne-Dreieck ergibt die 2 weiteren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\delta}{\cos h} &= \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha)}{\sin s} \\ \sin h &= \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{IX)}$$

Zur Berechnung von ξ entwickeln wir erst IX_1):

$$\frac{\cos\delta}{\cos h} = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\Delta\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin\Delta\alpha}{\sin s} \quad \ldots\ldots \text{X)}$$

Aus VIII_1) folgt:

$$\cos\Delta\alpha = \frac{\sin\xi}{\cos h}; \qquad \sin\Delta\alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\cos h}$$

Setzt man diese Werte in X) rechter Hand ein, so wird

$$\cos\delta = \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\xi + \cos\alpha \,.\, \sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\sin s}$$

Um hieraus $\cos^2 h$ zu eliminieren, benützen wir IX_2), aus welcher man zieht:

$$\cos^2 h = 1 - (\sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s)^2$$

Die Schlußgleichung zur Errechnung der Unbekannten ξ ist demnach diese:

$$\sin s \,.\, \cos\delta = \sin\alpha \,.\, \sin\xi + \cos\alpha \,.\, \sqrt{\cos^2\xi - (\sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s)^2}$$

Man findet hieraus

$$\sin \xi = \sin \alpha \,.\, \sin s \,.\, \cos \delta \pm \cos \alpha \,.\, \sqrt{1 + (\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s)^2 - \sin^2 s \,.\, \cos^2 \delta} \quad \ldots \text{ XI)}$$

Mit der Kenntnis von ξ wird man dann leicht aus VIII_2) η berechnen.

Um auch die Natur der Schattenkurve zu ermitteln, auf welcher U liegt, gehe man von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi \,.\, \cos s &= \cos \varphi \,.\, \tan \delta + \sin s \,.\, \cot g\,(\alpha + \Delta \alpha) \\ \sin s &= \frac{\sin (\alpha + \Delta \alpha) \,.\, \cos h}{\cos \delta} \\ \cos s &= \frac{\cos \eta \,.\, \cos \xi - \sin \delta \,.\, \sin \varphi}{\cos \delta \,.\, \cos \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{ XII)}$$

aus, deren letzte aus der Verbindung von VIII_2) mit IX_2) hervorgeht. Da die Schattenlinie für alle Stunden des Tages gilt, so ist ihre Gleichung das Resultat der Elimination von s aus XII). Das gibt:

$$\sin \varphi \,.\, \frac{\cos \eta \,.\, \cos \xi - \sin \delta \,.\, \sin \varphi}{\cos \delta \,.\, \cos \varphi} = \cos \varphi \,.\, \tan \delta + \frac{\sin (\alpha + \Delta \alpha) \,.\, \cos h}{\cos \delta} \,.\, \cot g\,(\alpha + \Delta \alpha) \quad \ldots \text{ XIII)}$$

Aus der Figur liest man ohne Weiteres ab:

$$\tan \Delta \alpha = \frac{x}{q} \,,$$

woraus sich ergibt

$$\sin \Delta \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + q^2}} \,; \qquad \cos \Delta \alpha = \frac{q}{\sqrt{x^2 + q^2}} \,.$$

Ebenso ersieht man, daß

$$\cos \eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,; \qquad \cos \xi = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

ist. Aus

$$\cos h = \frac{\sin \xi}{\cos \Delta \alpha}$$

findet sich

$$\cos h = \sqrt{\frac{x^2 + q^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

Entwickelt man jetzt XIII) und ersetzt darin $\sin \Delta \alpha$, $\cos \Delta \alpha$, $\cos \eta$, $\cos \xi$ und $\cos h$ durch die eben gefundenen Werte, so folgt

$$\sin \varphi \,.\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,.\, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin \delta \,.\, \sin^2 \varphi + \sin \delta \,.\, \cos^2 \varphi + \cos \varphi \left[\frac{q \,.\, \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x \,.\, \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] \,.\, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

oder vereinfacht

$$\frac{y \,.\, \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin \delta + \frac{q \,.\, \cos \alpha - x \,.\, \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} \,.\, \cos \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ XIV)}$$

Durch Quadrieren und Beseitigen der Nenner geht XIV) über in die Kegelschnittsgleichung

$$\begin{aligned} y^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x^2 (\sin^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x \,.\, y \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin 2\varphi - x \,.\, q \,.\, \cos^2 \varphi \,.\, \sin 2\alpha - y \,.\, q \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin 2\varphi \\ + q^2 \,.\, (\cos^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ XV)} \end{aligned}$$

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem, wie aus der analytischen Geometrie bekannt.

$\Delta = (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) \,.\, (\sin^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \,.\, \sin^2 \alpha \gtrless 0$ ist, ein Ausdruck, der sich auch so schreiben läßt

$$\Delta = \sin^2 \delta \left[\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi \,(1 + \sin^2 \alpha \,.\, \cot g^2 \varphi)\right]$$

Δ kann, falls α sehr klein ist, > 0 sein unter der Bedingung, daß $\delta > \varphi$ ist. Es ist also die Schattenkurve nur in der heißen Zone eine Ellipse und auch dort nur für sehr schwach deklinierende Vertikaluhren, in der gemäßigten Zone ist sie stets eine Hyperbel.

Auf die Frage nach der Lage der Hauptachsen des durch XV) ausgedrückten Kegelschnitts gibt die Formel

$$tang\, 2\,\psi = \frac{sin\,\alpha\,.\,sin\,2\,\varphi}{sin^2\,\alpha\,.\,cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XVI)}$$

näheren Aufschluß. Dabei bedeutet ψ den Winkel, welchen die Hauptachsen mit unseren eingangs definierten Koordinatenachsen bilden. Man erkennt aus XVI), daß im allgemeinen ein mit der geographischen Breite wachsender Richtungsunterschied zwischen den Hauptachsen und den Koordinatenachsen vorhanden ist. ψ ist $= 0$, wenn entweder

$\varphi = 0$ ist oder
$\alpha = 0$ angenommen wird (Ost-West-Vertikal)

Für $\alpha = 90°$ findet man

$$tang\, 2\,\psi = \frac{sin\,2\,\varphi}{cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi} = \frac{sin\,2\,\varphi}{cos\,2\,\varphi} = tang\,2\,\varphi\ ,$$

$$\psi = \varphi \text{ (Nord-Süd-Vertikal).}$$

Spezialfälle beim Déclinant:

1) Für $\delta = 0$ erhalten wir die Gleichung des Aequatorbildes. Man findet aus XIV) sofort:

$$y\,.\,sin\,\varphi = q\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\varphi - x\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\varphi\ ,$$

d. i. die Gleichung der Geraden $R\,R'$, die also nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht, sondern die Y-Achse im Abstande $M\,K$ von M durchsetzt. Für $x = 0$ folgt

$$y = M\,K = q\,.\,cos\,\alpha\,.\,cotg\,\varphi\ ,$$

ein Resultat, welches wir bereits in IV), freilich auf ganz anderem Wege gefunden hatten.

2) Für $\alpha = 0$ gibt XV:

$$y^2\,(sin^2\,\varphi - sin^2\,\delta) - x^2\,sin^2\,\delta - y\,.\,q\,.\,sin\,2\,\varphi + q^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\delta) = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{XVII)}$$

Uns interessiert hier vor allem der Nord-Süd-Vertikal, für den also

3) $\alpha = 90°$ ist.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung XV) gibt für diesen Fall

$$y^2\,(sin^2\,\varphi - sin^2\,\delta) - x^2\,.\,sin^2\,\delta - y\,.\,q\,.\,sin\,2\,\varphi + q^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\delta) = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{XVIII)}$$

Dreht man die Achsen des durch XVIII) dargestellten Kegelschnittes um den Winkel φ, d. h. ersetzt x durch: $y\,.\,sin\,\varphi + x\,.\,cos\,\varphi$ und y durch: $y\,.\,cos\,\varphi - x\,.\,sin\,\varphi$, so erhält man ohne Schwierigkeit die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{q^2\,tang^2\,\delta} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XIX)}$$

deren Halbachsen also $q\,.\,tang\,\delta$ und q sind.

Wie schon erwähnt hatte Ibn Jûnis zur Bestimmung des Aṣr diesen Cadran erwählt. Nach den Festsetzungen des berühmten Astronomen begann das Aṣr bei Gleichheit von Stäbchen- und Schattenlänge. Damit diese Bedingung eintritt, muß $\xi = 45°$ sein. Aus Gleichung XI) folgt dann für den Beginn des Aṣr:

$$sin\,s = \frac{sin\ 45°}{cos\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XX)}$$

Wie man sofort sieht, ist der Stundenwinkel s von der Breite φ unabhängig; alle Orte unter demselben Meridian haben zu gleicher Zeit Aṣr.

Freilich läßt sich das Ende des Aṣr nicht auf den Eintritt der doppelten Schattenlänge festsetzen, wie dies bei der Bazithah möglich war; denn man fände für diesen Zeitpunkt

$$sin\,s_1 \text{ oder } sin\,(180° - s_1) = \frac{1}{cos\,\delta\,.\,\sqrt{5}}\ ,$$

woraus folgt, daß das Ende des Aṣr entweder vor dessen Beginn erreicht würde, oder aber, da s_1 ein spitzer Winkel ist, erst nach 6 Uhr nachmittags eintreten müßte. Wahrscheinlich dauerte das Aṣr bis Sonnenuntergang.

Delambre (a. a. O. p. 131) teilt uns mit, daß Ibn Jûnis bereits eine Tafel erstellt habe, welche für alle Sonnenlängen des ganzen Jahres von Grad zu Grad den Stundenwinkel s angibt, der dem Beginn des Aṣr entspricht. Nach den von Delambre vorgenommenen Stichproben ist die Tafel äußerst exakt.

Wie Formel XX) lehrt, ist s für $\delta = 0$ gerade 45°, also $t = 3^h$. An allen anderen Tagen ist $t > 3^h$, da der $\cos(\pm\delta) < 1$ ist. Für $\delta = \varepsilon = 23^\circ 30'$ findet sich $t = 3^h\, 20^m$. Der Beginn des Aṣr nach Ibn Jûnis liegt mithin innerhalb eines Interwalls von 20 Zeitminuten nach aequinoktialem Stundenmaß. Die dritte Temporärstundenlinie durchschneidet die Ost-Westlinie (Aequinoktiale, $\delta = 0°$) beim Stundenwinkel $s = 45°$. Für die Breiten des mohammedanischen Reiches ($\varphi = 20° - 30°$) entfernt sich besagte Stundenlinie ungefähr um denselben Betrag von $t = 3^h$, wenn man δ bis $23^1/_2°$ wachsen läßt, wie das von Ibn Jûnis inaugurierte Aṣr. Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß Ibn Jûnis mittels der Formel XX) einen das ganze Jahr möglichst konstanten Augenblick in temporärem Zeitmaß fixieren wollte.

Ein Vergleich mit den Aṣr-Linien der verschiedenen Bazithas lehrt, daß das Aṣr nach Ibn Jûnis für $\varphi = 0°$ mit demjenigen der Imâme Mâleh und Hambeleh sich sehr gut deckt; für höhere Breiten dagegen das letztere stets später eintritt als das erstere.

VII. Kapitel.

Konstruktion arabischer Cylinder- und Kugeluhren.

Nach Delambre (a. a. O., pag. 522) findet sich vor Abul Hassan nichts derartiges in der arabischen Gnomonik. Ja, Abul Hassan ist sogar der Meinung, daß niemand vor ihm jemals eine Sonnenuhr auf krummer Oberfläche entworfen habe, aber Delambre entgegnet hierauf: „ . . . il est bien mal informé. ou il ne parle que des Arabes; car sans parler de Bérose, ni d'Aristarque de Samos, nous avons dans Vitruve et Stuart, la preuve qu'on avait fait des cadrans de toute espèce". Zu bemerken ist, daß der Marokkaner sowohl auf die konvexe als konkave Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kugel die Schattenlinien des Gnomons verzeichnet, welcher bei vertikal stehendem Cylinder und Kegel horizontal gerichtet ist, bei der Verzeichnung der Stundenlinien auf der konvexen Außenseite einer Halbkugel auf der Uhrfläche senkrecht steht, niemals aber die Richtung der Weltachse hat. Wir greifen aus den vielen Fällen, welche Abul Hassan behandelt, zwei heraus, nämlich

1) Eine Sonnenuhr auf dem konvexen Mantel eines vertikal stehenden Cylinders zu konstruieren,

2) Dieselbe Konstruktion auf der Innenfläche einer Halbkugel auszuführen.

Sämtliche anderen Möglichkeiten weisen nur unwesentliche Unterschiede von den zwei vorstehenden Fällen auf.

Zur Konstruktion einer solchen Cylinderuhr, wie sie unter 1) angeführt ist, gibt Hassan folgende merkwürdigen Vorschriften:

Man entnehme für den Wendekreis des Krebses die Länge der Vertikalschatten, die man bei gegebener Ortsbreite und Gnomonshöhe — diese letztere betrug immer 12 Finger — berechnet hat, einer Tabelle und trage sie vom oberen Rande des Cylinders auf dessen Mantellinien nach unten ab. Zuvor aber sind die Deckkreise des Cylinders in 360 Grade eingeteilt. Die Zählung dieser Grade beginnt beim Südpunkt, so daß die fortschreitende Gradzahl gleichzeitig mit dem Azimut (α) der Sonne indentisch ist. Durch Verbindung gleicher Azimute erhält man auf dem Cylinder die eben besagten Mantellinien. Man hat also zu einem gegebenen Stundenwinkel erst das Azimut der Sonne zu bestimmen, vielmehr aus Azimuttabellen zu entnehmen und die Vertikalschattenlänge dem ihr entsprechenden Azimut zuzuordnen. Tut man dies für alle 12 (temporären) Stunden des Tages, so erhält man in der Verbindung aller Schattenenden auf dem Cylinderumfang das Abbild des Wendekreises des Krebses. Auf ganz dieselbe Weise ermittelt man das Bild des Steinbocks und des Aequators, welches natürlich keine gerade Linie sein kann.

Die Abbildungen dieser 3 Kugelkreise auf den Cylindermantel bestehen zunächst aus 12 Stundenmarken. Eine Stundenlinie ist die Verbindung aller aequihorären Punkte der Projektionen sämtlicher