

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Arabische Gnomonik

Schoy, Carl

Altona, 1913

I. Kapitel. Die Horizontalsonnenuhr oder die Bazithah (Basita)

I. Kapitel.

Die Horizontalsonnenuhr oder die Bazithah (Basita).

Über ihre Herstellung erfahren wir zum ersten Mal Näheres bei Al-Battāni. In seinem schon erwähnten Werke lehrt er die Konstruktion zweier Horizontaluhren (für die Breiten von 36° und 38° , da sein Beobachtungsort Raqqa unter dem 36° Grad n. Br. lag): „Man nehme eine Marmor- oder Kupferplatte von rechteckiger Gestalt, so daß die Breite $\frac{2}{3}$ der Länge ist; in der halben Breite und $\frac{2}{3}$ der Länge markiere man den Mittelpunkt eines Kreises, den man um denselben mit beliebigem Radius beschreibt. Darauf teile man durch 2 senkrecht aufeinander stehende Durchmesser den Umfang in Quadranten von 90° oder, sofern es geeignet erscheint, von 2° zu 2° oder 3° zu 3° , verzeichne hierauf die Schatten des Stabes, wann die Sonne im Krebs und Steinbock läuft, für jede der 6 ungleichen Stunden, desgleichen die Schatten des Widders. (Ost-Westlinie). Darauf nehme man ein Lineal, welches zum wenigsten dem längsten Schatten des Steinbocks gleichkommt und markiere damit auf dem Zifferblatt das Ende des Schattens in der mittels des geteilten Kreises bestimmten Richtung. Besorgt man dies für jede Stunde, so wird man den Tagbogen des ganzen Steinbocks haben. Ist dieselbe Operation auch für den Wendekreis des Krebses durchgeführt, so gibt die Verbindung je zweier entsprechenden Punkte dieser (Tages-) Kurven durch Gerade die Stundenlinien“. Noch zwei andere Vorschriften teilt Albategnius mit, die aber weniger exakt sind als diese. Man findet sie, wie auch die obige, bei Delambre (a. a. O. pag. 56 und 57).

Zur näheren Erläuterung der vorstehenden Konstruktion, die im wesentlichen bei allen arabischen Astronomen dieselbe blieb, sei auf Fig. 1 verwiesen. Es fiel der Fußpunkt des Gnomons, dessen Höhe 12 Einheiten (Finger) des Maßstabs betrug, mit dem Mittelpunkt des erwähnten Kreises zusammen. Diese Höhe sei für ein und alle Mal mit q bezeichnet. Zunächst mußte nun für eine gegebene Breite die Dauer des kürzesten und längsten Tages, wo die Sonne im Anfang des Steinbocks, bzw. Krebses steht, festgestellt werden, welche Aufgabe Al-Battāni, sich ganz an Ptolemaeus anschließend, mit Hilfe der Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck löste¹⁾, wobei er allerdings die halben Sehnen der Griechen durch den Sinus der Inder ersetzt. Der zu einem dieser halben Tage gehörige Stundenwinkel s_0 findet sich einfach dadurch, daß man im sphärischen Dreieck Zenit-Pol-Sonne den Kosinussatz:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \varepsilon) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon) \cdot \cos s$$

d. i.

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon + \cos \varphi \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos s$$

anschreibt und nach dem zum Auf- oder Untergang der Sonne ($h = 0$) gehörigen Stundenwinkel s_0 auflöst, wodurch man erhält:

$$\cos s_0 = -\tan \varphi \cdot \tan \varepsilon,$$

wo ε , die Ekliptikschiefe, für das Wintersolstitium durch $-\varepsilon$ zu ersetzen ist. Der gefundene Tagbogen wurde in beiden Fällen in 12 gleiche Teile geteilt; die Zeitdauer, welche die Sonne brauchte, um den Bogen zwischen 2 aequidistanten Teilpunkten zu durchlaufen, nannte man eine temporäre Stunde. Sie war also im Sommer länger als im Winter. (Vgl. Kapitel III). Die temporäre Stunde beherrschte die Astronomie auch während der ganzen arabischen Zeit, erst Abul Hassan gebrauchte neben den früheren auch die gleichen oder Aequinoctialstunden, die einem Stundenwinkel von 15° entsprechen. Zur Bestimmung der Schattenlänge m für die einzelnen Stunden war erst die Kenntnis der Sonnenhöhe h nötig, womit sich dann sofort ergab

$$m = q \cdot \cotg h$$

Da außer der Breite φ und der Deklination δ (ε) aber durch die temporäre Stunde auch der Stundenwinkel s gegeben war, so ließ sich h aus dem oben bereits angeschriebenen Kosinussatz berechnen. In dieser Gestalt kannten ihn aber weder Al-Battāni, noch spätere arabische Astronomen, vielmehr zerlegten sie

¹⁾ Vgl. A. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig, 1900—1903, 2 Bände, I Bd., pag. 25.

In Fig. 2 ist durch den Stern oder die Sonne S und den Westpunkt Q des Horizonts ein Großkreisbogen gelegt, der in p auf dem Meridian senkrecht steht, ebenso durch das Zenit Z und S ein Höhenkreis. Dann hat man die 2 rechtwinkligen Dreiecke $S p Z$ und $S p P$; in diesem ist $\sphericalangle p P S = s$, $\sphericalangle p Z S = \alpha$; $Z S = 90^\circ - h$; $p S = 90^\circ - S Q = 90^\circ - \text{baad}$, ferner, weil $p Q = Q Z = 90^\circ$ ist, $\sphericalangle p Q Z = \text{Seite } p Z = \text{inhiraf}$. Man hat demnach successive

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - p S) &= \sin P S \cdot \sin \sphericalangle p P S \\ \sin p S &= \cos \delta \cdot \sin s \\ \cos Z S &= \sin h = \cos p S \cdot \cos p Z, \\ \sin h &= \sin Q S \cdot \cos \sphericalangle S Q Z, \\ &= \sin \text{baad} \cdot \cos \text{inhiraf}; \\ \cos \alpha &= \frac{\sin \text{baad} \cdot \sin \text{inhiraf}}{\cos h},\end{aligned}$$

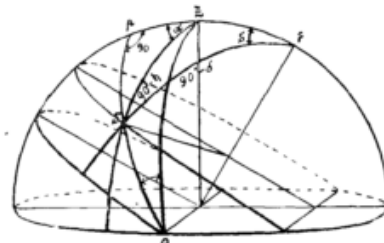


Fig. 2.

womit Höhe und Azimut aus rechtwinkligen Dreiecken bestimmt sind.

Abul Hassan nennt das Produkt $\cos q \cdot \cos \delta \text{ assl}^1$). Es ist ein Bestandteil der Formel

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin q + \cos \delta \cdot \cos q \cdot \cos s.$$

Im Meridian (obere Kulmination) ist $s = 0$, und $h = H$ (Mittagshöhe).

Dann hat man

$$\sin H = \sin \delta \cdot \sin q + \cos \delta \cdot \cos q$$

Und da für den Sechsstundenkreis $\sin \delta \cdot \sin q = \sin h_6$ ist, so folgt weiter:

$$\sin H = \sin h_6 + \text{assl}$$

und endlich

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin h_6 + \text{assl} \cdot \cos s \\ &= \sin H - \text{assl} + \text{assl} \cdot \cos s,\end{aligned}$$

welche Formel ebenfalls sehr bemerkenswert ist.

Daß die Araber auch den Kurven, welche das Ende des Schattens eines lotrechten Stäbchens während eines Tages auf der Horizontalebene beschreibt, schon sehr frühe ihre Aufmerksamkeit zuwandten, ist uns aus der Einleitung bekannt. Abul Hassan, der auch ein Buch über die Kegelschnitte verfaßt hat, das aber verloren gegangen ist, gibt in seinem schon erwähnten Hauptwerk sowohl im Text als auch auf sehr kostbaren Tafeln, eine durchaus richtige Darstellung der Schattenlinien für jeden einzelnen Fall. Es sind bekanntlich Kegelschnitte als Zentralprojektionen der Parallelkreise, welche die Sonne am Himmel täglich durchwandert, auf die Uhrfläche als Projektionsebene und mit der Stabspitze als Projektionszentrum. Wir wollen die Gleichung der Kegelschnittskurve für die Horizontalebene hier entwickeln, da sie auch fernerhin in unseren Untersuchungen eine Rolle spielt: Sei (Fig. 3) S die Stabspitze, welche der Sonnenstrahl $S \Sigma$ durchsetzt, so ist $F \Sigma$ der Schlagschatten des Stabes und Σ ein Punkt der Schattenkurve, deren Hauptachse die Nord-Südlinie ist, weil sich auf derselben der Scheitel A der Kurve befindet, der dem Augenblick der Sonnenkulmination entspricht, die stets im Südpunkt stattfindet. Die rechtwinkligen Koordinaten von Σ , bezogen auf genannte Achse und den Fußpunkt F des Gnomons als Koordinatenanfang seien x und y . Da die Schattenrichtung vom Azimut der Sonne bedingt wird, so ist $\sphericalangle B F \Sigma = \alpha$. Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck $F B \Sigma$ liest man ab:

$$y = F \Sigma \cdot \sin \alpha,$$

und aus dem bei F rechtwinkligen Triangel $\Sigma F S$:

$$F \Sigma = q \cdot \cotg h,$$

wobei h die dem Schattenpunkt Σ entsprechende Sonnenhöhe ist.

Damit wird

$$y = q \cdot \cotg h \cdot \sin \alpha \quad \dots \dots \dots \text{I)}$$

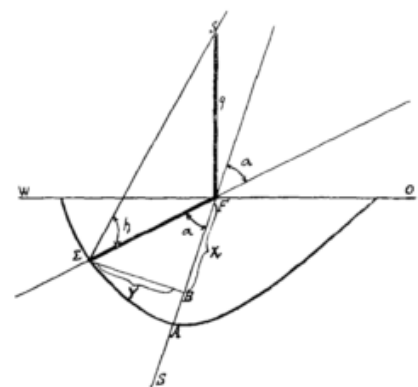


Fig. 3.

¹⁾ assl = Wurzel, Anfang. Solche Termini finden sich bei Abul Hassan sehr häufig.

Nach dem Sinussatz hat man im Zenit-Pol-Sonnendreieck:

$$\sin \alpha = \frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\cos h} \dots \dots \dots \text{II)}$$

und nach dem Kosinussatz:

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s \dots \dots \dots \text{III)}$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\sin \alpha$ aus II) in I) wird

$$y = q \cdot \frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\sin h},$$

und wenn man jetzt noch $\sin h$ durch den Ausdruck III) ersetzt:

$$y = q \cdot \frac{\cos \delta \cdot \sin s}{\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s} \dots \dots \dots \text{IV)}$$

Ferner ist

$$\frac{x}{y} = \cotg \alpha,$$

$$x = y \cdot \cotg \alpha = q \cdot \frac{\cos \delta \cdot \sin s \cdot \cotg \alpha}{\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s} \dots \dots \dots \text{IVa)}$$

Der Kotangentsatz auf das besagte Dreieck angewandt, gibt

$$\cotg \alpha = \frac{\cos s \cdot \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \tan \delta}{\sin s}$$

Setzt man diesen Wert von $\cotg \alpha$ in IVa) ein, so ergibt sich

$$x = q \cdot \frac{\cos s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta - \cos \varphi \cdot \sin \delta}{\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos s} \dots \dots \dots \text{V)}$$

Eliminiert man aus IV) und V) die Variable s , so hat man die für jede Zeit des ganzen Tages gültige Gleichung in x und y :

$$y^2 \cdot \sin^2 \delta - x^2 \cdot \cos (\varphi - \delta) \cdot \cos (\varphi + \delta) + x \cdot q \cdot \sin 2 \varphi - q^2 \cdot \sin (\varphi - \delta) \cdot \sin (\varphi + \delta) = 0 \dots \dots \text{VI)}$$

Um zu entscheiden, welcher Art der durch VI) definierte Kegelschnitt ist, bedenke man, daß eine auf- und untergehende Sonne 2 unendlich lange Schatten, also 2 unendlich ferne Punkte erzeugt, mithin die Schattenkurve eine Hyperbel ist, daß eine um Mitternacht den Horizont gerade berührende Sonne einen unendlich fernen Punkt, d. h. eine Parabel erzeugt, daß endlich bei Mitternachtssonne jeder Schattenpunkt im Endlichen liegt, d. h. die Kurve ein geschlossener Kegelschnitt wird. Wie aber aus einer einfachen Projektion der Himmelskugel auf die Meridianebene ersichtlich ist,

muß im ersten Fall $\varphi + \delta < 90^\circ$

„ zweiten „ $\varphi + \delta = 90^\circ$

und im dritten „ $\varphi + \delta > 90^\circ$ sein.

Und welche Gestalt haben die Verbindungslinien „aequihorärer“ Punkte der einzelnen Tageskurven? Wir stehen damit vor der Frage nach der Natur der Stundenlinien. Sie ist für gleiche oder aequinoctiale Stunden sehr leicht zu beantworten, ungelöst noch für die temporären Stunden. Doch wird Kapitel III Aufschluß über diese interessante Frage geben, soweit eine mathematische Behandlung tunlich ist. Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die temporären Stundenlinien durchaus keine Geraden sind, wie die Araber irrtümlich annahmen. Für gleiche Stunden jedoch ist der fragliche Ort auf der Sphäre ein Meridian, der von Pol zu Pol zieht. Auf ihm befindet sich die Sonne das ganze Jahr beim Stundenwinkel s , gleichviel, welches ihre Deklination sei. Der Durchschnitt eines Großkreises mit einer Ebene ist stets eine gerade Linie, und eine solche muß also der zu erwartende geometrische Ort in der Ebene sein. Da er für das ganze Jahr gültig ist, so muß die Gleichung desselben von der Sonnendeklination unabhängig sein; man findet die fragliche Gleichung also durch Elimination von δ aus IV) und V). Dazu dividiert man in beiden Zähler und Nenner rechter Hand durch $\cos \delta$, wodurch nur noch $\tan \delta$ vorkommt. Rechnet man dies aus IV) heraus, so hat man

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{q \cdot \sin s - y \cdot \cos \varphi \cdot \cos s}{y \cdot \sin \varphi},$$

und dieser Ausdruck in V) eingesetzt läßt dieselbe übergehen in

$$y = x \cdot \operatorname{tang} s - q \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tang} s \dots\dots\dots \text{VII),}$$

welches offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist. Setzt man für s der Reihe nach 0° , 15° , 30° usw., so erhält man der Reihe nach die verschiedenen Stundenlinien, die sich für gleiche Stunden in einem Punkte der X -Achse schneiden. (Projektion des Pols.) Für diese ist $y = 0$; der Schnittpunkt hat also die Abscisse

$$x = q \cdot \cos \varphi,$$

ist mithin nicht identisch mit dem Fußpunkt des Gnomons.

II. Kapitel.

Der Hâfir und Halazûn.

Zu ihrem Verständnis müssen wir noch einmal auf die im 1. Kapitel gelehrt Höhenbestimmung zurückkommen, wie sie von den einzelnen arabischen Astronomen vorgenommen wurde. Natürlich besaß auch *Abul Hassan* ausgedehnte Tabellen, aus denen er die Sonnenhöhen für jede Stunde jedes Tages entnehmen konnte. Aber der Marokkanische Astronom ging noch weiter. Um sich ganz von der Rechnung freizumachen, — der 2. Band seines astronomischen Werkes handelt ja ausschließlich von den Konstruktionen — lehrt er uns ein rein graphisches Verfahren, wie man die Schattenlänge für jeden Tag des Jahres und zu jeder Stunde des Tages an einem gegebenen Orte mit einem Zirkel abgreifen könne: Die Konstruktion des *Hâfir*.¹⁾ Sie ist die folgende: Man beschreibe einen Kreis, dessen Radius mindestens dem längsten Schatten der 5. Nachmittagsstunde zur Zeit der Wintersonnenwende gleichkommt und teile seine Peripherie in 36 gleiche Teile. Der Kreis selbst stellt die Ekliptik vor. Dann entfallen auf jedes Zeichen des Tierkreises 3 Teile. Sämtliche Teilpunkte der Peripherie verbinde man mit dem Kreismittelpunkt. Aus den Kotangententabellen entnehme man alsdann die Längen der Schatten für den wahren Mittag jener Jahrestage, welche einer Länge der Sonne (in der Ekliptik) von 0° , 10° , 20° , 30° . . . 360° entsprechen. Ebenso entnehme man den Tabellen die Schattenlängen für dieselben Jahrestage der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften²⁾ Nachmittagsstunde und trage sie auf den entsprechenden Kreisradien ab. Wenn man zum Schluß die Endpunkte, welche der wahre Mittag, die erste, zweite Stunde usw. auf den 30 Linien, die unter gleichen Winkeln vom Mittelpunkt des Kreises ausstrahlen, liefern, durch einen stetigen Linienzug verbindet, so erhält man in ihnen die oben genannten Hâfirkurven. Ein beliebiger Tag des Jahres definiert dann eine ganz bestimmte Länge l der Sonne in der Ekliptik, und ein Strahl, unter diesem Winkel vom Mittelpunkt an die Peripherie des Kreises gezogen, wird auf den einzelnen Hâfirkurven die Schattenlängen eines gegebenen Gnomons, für welchen natürlich der ganze Cadran konstruiert wird, für die verschiedenen Stunden des Tages in interpolatorischer Weise ausschneiden. Für nicht allzugroße Ansprüche an Genauigkeit ist also der Nutzen solcher Hâfire einleuchtend.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, diese merkwürdigen Gebilde arabischer Gnomonik, die sich vor *Abul Hassan* anscheinend nirgends finden, einer Diskussion zu unterwerfen, soweit dies bei der Kompliziertheit der mathematischen Ausdrücke, die dabei auftreten, angängig ist. Der Kreismittelpunkt oder Fußpunkt des Gnomons sei der Koordinatenanfang. Dann ist die Länge ϱ des Schattens eine Funktion des Ortes der Sonne in der Ekliptik. Wir nehmen die astronomische Länge derselben als Polarwinkel; es ist also $O \vee$ die X -Achse; sie definiert die Länge Null, und 180° , während die Y -Achse die Länge $l = 90^\circ$ und 270° aus-

¹⁾ Das Wort *Hâfir* bedeutet in buchstäblichem Sinne: Huf, Klaue (französ. sabot) und es scheint sich direkt auf die im allgemeinen ovale Gestalt der Kurven zu beziehen, um die es sich hier handelt.

²⁾ *Abul Hassan* denkt also an temporäre Stunden, wo bei der 6. Nachmittagsstunde die Sonne stets untergeht. Im deutschen Mittelalter und später, bis gegen 1880, sprach man von „Judenstunden“ oder führte sie auch auf babylonisches und griechisches Vorbild zurück.