universität innsbruck
Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Arabische Gnomonik

Schoy, Carl

Altona, 1913

urn:nbn:at:at-ubi:2-9003

105426

Arabische Gnomonik.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät

der

Ruprecht-Karls Universität zu Heidelberg

vorgelegt von

Dr.-Ing. **Carl Schoy**

Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen (R).

1913.

Gedruckt bei Hammerich & Lesser in Altona.

UB INNSBRUCK
+C94110109

Vorwort.

Wenn es bei der Abfassung einer Schrift über Sonnenuhrkunde dem Autor nicht erspart bleibt, stichhaltige Gründe anzuführen, die ihn zur Vermehrung der so reichhaltigen Literatur veranlaßten, sei es, daß er einen von den gewöhnlichen Traktaten abweichenden Weg der Methodik einschlägt, sei es, daß er durch sein historisches Wissen Aufklärung in gnomonische Fragen zu bringen sucht, über welche die Akten noch keineswegs geschlossen sind, so befindet sich hingegen der Schreiber einer arabischen Gnomonik in der angenehmen Lage, seine Leser in ein überaus reizvolles Gebiet einführen zu dürfen, in welchem tiefere Kenntnisse sehr wenig verbreitet zu sein scheinen. Schon die ersten Kapitel dieser Abhandlung werden zeigen, daß die Entwicklung der arabischen Sonnenuhrkunde eine ganz andere war, als die der griechischen und occidentalen, deshalb auch Erzeugnisse aufweist, welche der uns geläufigen Gnomonik vollständig fehlen. Der tiefere Grund hiervon ist in dem islamitischen Religionskultus gegeben, in dessen Dienst der arabische Astronom die Sonnenuhr von jeher mit Vorliebe stellte, da er gleichzeitig Diener der Religion war. Leider ist jedoch unser Wissen in der arabischen Gnomonik noch recht lückenhaft, wie ich schon in meinem Aufsatz: „Die Sonnenuhren der Araber in ihrer Bedeutung für die arabische Astronomie und Religion“ (Naturwiss. Wochenschr., Jahrg. 1911, pag. 241 ff.) beklagt habe, und am allerwenigsten sind wir aufgeklärt über den Zusammenhang der Sonnenuhr mit den religiösen Praktiken der Mohamedaner. Es ist nicht richtig, was R. Sonndorfer in seinem sonst so trefflichen Buche: „Theorie und Konstruktion der Sonnenuhren“ (Wien, 1864, pag. 16) behauptet, daß die Konstruktionen in Abul Hassans Werke: „Ǧâmi el-mabâdi welġâjât“, (das Ganze der Anfänge [Prinzipien] und der Enden [Resultate]), welches uns in einer französischen Übersetzung von J. J. Sédillot vorliegt, „fast alle religiösen Gebräuchen dienen“. Abul Hassan teilt uns in dieser Hinsicht nichts mit; von diesbezüglichen Schriften, die in der Regel von Gebetsrufern verfaßt sind, ist noch garnichts in europäische Sprachen übersetzt. Außereuropäischer Sprachen nicht mächtig, mußte ich mich damit begnügen, über diese eigenartige „religiöse Geometrie“ das mitzuteilen, was ich zerstreut in verschiedenen Kompendien und Monographien fand und es zu einer mathematischen Theorie zu vereinen, wie sie sich im 4. und 5. Kapitel findet. Zum ersten Mal ist hier, m. W., eine völlig exakte Behandlung der Temporärstunden und -stundenlinien gegeben, deren graphische Darstellung sich für die Breiten $\varphi = -30°$ und $\varphi = 45°$ findet. Ebenso sind die merkwürdigen Hâfir- und Halazûncurven des Abul Hassan einer mathematischen Diskussion unterworfen worden, wie ich denn keineswegs Bedenken trug, dem Leser nicht nur gnomonische Kenntnisse, sondern auch Bekanntschaft mit den Anfangsgründen der höheren Mathematik zuzumuten.

Essen a. d. R., im Mai 1912.

Dr. **Carl Schoy.**

Arabische Gnomonik

von Dr. **Carl Schoy**, Essen (R.).

Historisch bibliographische Einleitung.

Als der älteste arabische Astronom, bei dem man einiges über die Gnomonik der Araber findet, wird gewöhnlich Al-Battâni, d. i. Mann aus Battan in Syrien, genannt, der im Abendlande unter dem Namen Albategnius bekannt ist. Er lebte anfänglich in Raqqa, später in Bagdad. Gestorben ist er im Jahre 929 unserer Zeitrechnung. In vollständiger lateinischer Ausgabe besitzen wir das Buch: „Über die Bewegung der Sterne“ (de motu stellarum), die wir einem Gelehrten des 12. Jahrhunderts, Plato von Tivoli, verdanken. Sie wurde 1537 zu Nürnberg gedruckt und kommentiert herausgegeben durch Regiomontan als Appendix zu den Rudimenta astronomica des Alfraganus unter dem Titel: de scientia stellarum. Das Vorwort stammt von Melanchton. Im opus astronomicum Al-Battâni, sive Albatenii, ad fidem cod. Escurial. arabice editum, lat. versum, adnotation. instructum a. C. Alfonso Nallino[1]) besitzen wir eine vorzügliche Neuausgabe des berühmten arabischen Astronomen. Aus pars I (pag. 138) derselben erfahren wir, daß sowohl horizontale als auch vertikale Sonnenuhren einen Stylus besitzen, der senkrecht auf dem Zifferblatte steht, also bei Vertikaluhren parallel zum Horizonte läuft. Damit ist schon ein fundamentaler Unterschied zwischen der occidentalen und arabischen Sonnenuhr gegeben, denn bei der ersten weist der Zeiger nach dem Weltpol[2]) (Polos).

Aber längst vor Al-Battâni haben sich ostarabische Astronomen mit der Konstruktion von Sonnenuhren beschäftigt, die gewöhnlich auf Marmor- oder Kupferplatten verzeichnet wurden. So ist es begreiflich, warum die Sonnenuhr im Arabischen „Ruchâmet“ (Marmorplatte) heißt. H. Suter erwähnt in seinem Buche: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“, Leipzig 1900 (Übersetzung des VII. Teiles des Kitâb el-Fihrist [Buch des Verzeichnisses]) den Mohammed ben Mûsâ al-Chowârezmi aus Chowarezm, (Chiwa) der als Astronom in den Diensten des Khalifen Al-Mâmûm stand und zwischen 835 und 845 starb. Nicht nur, daß er auf Befehl dieses berühmten Abasiden einen Auszug aus einem Sindhind der Inder, der schon unter Al-Mansur durch Al-Fazâri übersetzt wurde, anfertigte, schrieb er u. a. auch: „Über die Sonnenuhr“. Dieses Werk scheint jedoch nicht einmal mehr arabisch vorhanden zu sein. Zu dem Gelehrtenstab, den Al-Mâmûm an seinem Hofe hielt, gehörte auch Ahmed ben Abdallâh, bekannter unter dem Namen Habâs el hâsib (der Rechner) el-Merwazî, der in Bagdad lebte († ca. 864—874). Ihm werden u. a. die Abhandlungen zugeschrieben: „Über Sonnenuhren und Gnomone“, sowie: „Über die Konstruktion der horizontalen, senkrechten, geneigten und schiefen (gedrehten) Flächen“.[3]) Es hat ferner Ahmed ben Moh. ben Ketîr al-Fargânî aus Fargan in Transoxanien, der ebenfalls Astronom Al-Mâmûms war, nach Golius, der sein Hauptwerk: „Das Buch der Elemente der Astronomie“ arabisch und lateinisch herausgab, (Amsterdam 1669) ein Buch über die Konstruktion der Sonnenuhren verfasst unter dem Titel: „Marmorplatten“. (Vgl. Golii Notae in Alfraganum, pag. 2). Nach H. Suter a. a. O., pag. 36 muß der berühmte arabische Mathematiker Tabit ben Qorra (826—901) ebenfalls mehrere Bücher

[1]) Publikationen der Sternwarte der Brera bei Mailand (1899—1903).

[2]) In meinem bereits im Vorwort erwähnten Aufsatz habe ich mich eingehend darüber geäußert, weshalb die Araber nur einseitig Gnomone konstruierten. Wiederum sind es religiöse Gründe gewesen.

[3]) Nach Suter, a. a. O. pag. 13, handelt es sich hier wahrscheinlich um Sonnenuhren.

gnomonischen Inhalts geschrieben haben, so „Über die Sonnenuhren", „Über die Konstruktion der Schattenlinien des Gnomons der Sonnenuhr". Tabit kennt also bereits jene Kegelschnittskurven, welche der Schatten der Stabspitze täglich durcheilt. („quas gnomonetrum styli apicis umbra percurrit"). Anscheinend ist die wohl irrige Ansicht verbreitet, daß Gerhard von Cremona (1114—1187) die Schrift des Tabit: „de horometria" übersetzt habe.[1]) Sie befindet sich in der Bibliothek zu Escurial; die anderen angeführten Werke sind nicht mehr erhalten. Auch ein Enkel Tabits hat über Sonnenuhren geschrieben; Suter nennt a. a. O. pag. 53: „Über die Sonnenuhren", (wörtlich: Schatteninstrumente), „Über die Konstruktion und Anwendung der Sonnenuhren", „Über die Schatten und besonders die Einrichtung der Sonnenuhr, bei welcher der Schatten nicht länger und nicht kürzer wird als erforderlich für die Auffindung der Mittagslinie". Von allen 3 Schriften scheint nichts mehr zu existieren.

Verschiedene Astronomen scheinen sich sehr frühzeitig mit der Festsetzung der Gebetsrichtung (Qible = Gesichtswendung gen die Kaaba zu Mekka) befaßt zu haben. Nicht mehr vorhanden ist eine Schrift des Ahmed ben Dâ' ûd, Abû Hanîfa el-Dînawarî (aus Dinawar +895) „Über die Qible"; hingegen findet sich noch als arabisches Manuskript zu Paris eine Abhandlung des El-Fâdil ben Hâtmi el Nairîzî (+922/23) „Über die Gebetsrichtung". Es ist ja sehr verständlich, daß dieses religiöse Moment, worüber Kapitel IV ausführlich handeln wird, schon bei den ersten arabischen Astronomen eine große Rolle spielen mußte. Die Qible wurde auf der Platte aller Horizontalsonnenuhren gezogen. Suter berichtet a. a. O., pag. 39, von Muslin ben Ahmed el-Leitî, bekannt unter dem Namen Ṣâhib el-qible (d. i. Meister oder Bewahrer der Qible) aus Cordova, (+907/908) daß er diesen Beinamen Ṣâhib el-qible nur erhalten habe, weil er so leidenschaftlich um ihre Innehaltung besorgt war.

Zu einer gewissen Berühmtheit sind auch die arabischen Wasseruhren gelangt, die, wie Kapitel III zeigt, mit den gnomonischen Problemen der Araber aufs innigste zusammenhängen. Einhard beschreibt in den Annales Francorum, annus 807, die bekannte Wasseruhr, welche Hârûn ar-Raschid Karl dem Großen zum Geschenke machte. In Tome XVII (1891) des Journal asiatique hat Baron Carra de Vaux unter dem Titel: „Notice sur deux manuscrits arabes" auch den Traktat eines nicht genannten arabischen Autors über Wasseruhren übersetzt, deren Erfindung aber bekanntlich nicht Sache der Araber, sondern der Griechen ist. A. Wittstein bespricht im VI. Band der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" ausführlich genannte Wasseruhren, welche bei den Arabern taǵâr heißen. (Vgl. A. Wittstein: Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Literatur a. a. O. pag. 91). Sie waren in der Regel so eingerichtet, daß sie nach jeder Stunde eine Kugel warfen oder fallen ließen. Die betreffende Stelle lautet nach der Übersetzung Carra de Vaux's: „Alle Stunden kommt ein Loch der oberen Platte mit dem einzigen Loch der unteren Platte zur Deckung; es fällt eine Kugel; sie wird zur Spitze eines Enterhakens hingeführt, welche sich auf der Außenseite der Kiste befindet, deren Schnabel sich vermittelst einer Schaukelbretteinrichtung öffnet und die Kugel auszuwerfen scheint. Man erhält ein Schlagwerk, wenn man unter die Spitze des Enterhakens ein Schallbecken aus Kupfer oder Stahl stellt, welches die Kugel bei ihrem Falle trifft".

Noch nicht aufgeklärt ist, was der Astronom Moh. ben el-Hasan ben Achî Ḥisâm unter „motabbile" versteht, von den Übersetzern mit „trommelnder Sonnenuhr" wiedergegeben. G. Flügel sagt in den Anmerkungen zur Herausgabe des Fihrist, (II, 132) es sei dies „unstreitig eine Sonnenuhr, welche die Mittagsstunde durch Beckenschall andeutete".[2])

Wennschon im 10. Jahrhundert einer der bedeutendsten arabischen Mathematiker, Abul Wefâ, lebte, der an dem Ausbau der Trigonometrie unter den mohamedanischen Gelehrten kein geringes Verdienst hatte, und wennschon er dem Kollegium der Sternwarte angehörte, welche der Bujide Scharaf Eddaula (985—989) im Garten seines Palastes zu Bagdad bauen ließ, so scheint er doch über Sonnenuhrkunde nichts geschrieben zu haben, und ein Gleiches gilt von Al-Bîrûnî. Dagegen muß die Gnomonik eine ganz bedeutende Förderung durch Ibn Jûnis (+1009 in Kairo) erfahren haben. Leider sind seine berühmten Hakimitischen

---

[1]) Eine freundliche diesbez. briefliche Mitteilung von Herrn Prof. Suter an den Verfasser besagt, daß das Exemplar im Escurial arabisch sei und er nicht an eine lateinische Übersetzung desselben glauben könne.

[2]) Nach einer freundlichen diesbez. Mitteilung Herrn Prof. Suters an den Verf. mag hier ein Fehler des arabischen Textes vorliegen, selbst wenn die Vermutung Flügels richtig ist, kann man sich kaum vorstellen, wie dies bewerkstelligt wurde.

Tafeln in ihrer Gesamtheit nicht erhalten. Caussin hat die ersten Kapitel des Leydener Manuskripts übersetzt und die folgenden — es sind im ganzen 81 — nach Möglichkeit im Inhaltsverzeichnis aufgeführt.[1]) Eine zusammenhängende Darstellung der Astronomie des Ibn Jûnis hat J. J. Sédillot für Delambre geliefert, der in seiner Histoire de l' astronomie du moyen âge davon Gebrauch machte, (pag. 76—156) aber gerade für die Gnomonik sehr wichtige Kapitel (z. B. XXVII: Trouver la hauteur des heures marquées sur le cadran) fehlen im Manuskript von Ibn Schâtir, welches Sédillot zur Verfügung stand. Soviel aber zu ersehen ist, hat Ibn Jûnis bereits ausgedehnte Tabellen für die Schattenlängen zu den einzelnen Stunden, sowie über die Schattenrichtungen (Azimute) erstellt. Seine vorzügliche Festsetzung des Aṣr an der Vertikaluhr wird uns im VI. Kapitel noch ausführlich beschäftigen. Auch scheint Ibn Jûnis der erste gewesen zu sein, welcher die Horizontaluhr in den Dienst der Polhöhenbestimmung gestellt hat.[2])

Bereits seit Beginn des 8. Jahrhunderts hatten die Araber die Wissenschaft auch nach dem Occident getragen, um ihr in Spanien und Marokko in Al-Zarqâli, Dschabir ibn Aflah (Geber) und Abul Hassan drei Gelehrte zu schenken, die sich den ostarabischen Astronomen würdig an die Seite stellen können. Es ist jedoch nicht möglich, astronomische Leistungen der zwei ersten Gelehrten festzustellen, die speziell für unser Thema in Betracht kämen. Um so überreicher ist die Fülle der gnomonischen Berechnungen, Konstruktionen von Sonnenuhren und anderen astronomischen Instrumenten, mit denen uns Abul Hassan Ali von Marokko (+ ca. 1270[3]) bekannt macht.[4]) Es ist kaum anders möglich, als daß er eine umfassende Literaturkenntnis besaß, die er sich auf seinen weiten Reisen durch Afrika und Spanien erwarb. So zitiert er auch eine Reihe von Autoren als Al-Chwarizmî, Al-Battâni, Al-Fergâni, Abul Wefâ, Al-Bîrûnî u. a. Daß er auf ihren Schultern steht, ist klar, allein ich kann nach eingehender Prüfung der Sachlage nicht anders, als ihn für den größten Astronomen der Westaraber zu erklären, durchaus nicht für einen geschickten Kompilator, sondern einen Meister voller Originalität. Der große Marokkaner ist der letzte namhafte Gnomoniker der Araber, und wir können mit ihm zur eigentlichen Behandlung der Materie übergehen, die ohne sein Werk nicht denkbar und durch dasselbe fast ausschließlich gegeben ist. Möge sie zeigen, daß ich mit den eben ausgesprochenen Worten nicht zu viel behauptet habe.

---

[1]) Notices et Extraits des manuscrits de la biblioth. nation. VII, pag. 16—240.

[2]) Vgl. C. Schoy: Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den älteren Völkern, S-Altenburg, 1911, pag. 19.

[3]) In dem Artikel des F. A. Brockhaus'schen Konversationslexikons (neueste Auflage) Abul Hassan habe ich versucht, die Lebenszeit dieses noch so wenig gekannten Gelehrten etwas näher zu bestimmen.

[4]) Traité des instruments astronomiques des Arabes composé au treizième siècle par Aboul Hhassan Ali de Maroc, par J. J. Sédillot; Paris, 1834, 2 Tomes.

I. Kapitel.

Die Horizontalsonnenuhr oder die Bazithah (Basiṭa).

Über ihre Herstellung erfahren wir zum ersten Mal Näheres bei Al-Battâni. In seinem schon erwähnten Werke lehrt er die Konstruktion zweier Horizontaluhren (für die Breiten von 36° und 38°, da sein Beobachtungsort Raqqa unter dem 36 Grad n. Br. lag): „Man nehme eine Marmor- oder Kupferplatte von rechteckiger Gestalt, so daß die Breite $^2/_3$ der Länge ist; in der halben Breite und $^2/_3$ der Länge markiere man den Mittelpunkt eines Kreises, den man um denselben mit beliebigem Radius beschreibt. Darauf teile man durch 2 senkrecht aufeinander stehende Durchmesser den Umfang in Quadranten von 90° oder, sofern es geeignet erscheint, von 2° zu 2° oder 3° zu 3°, verzeichne hierauf die Schatten des Stabes, wann die Sonne im Krebs und Steinbock läuft, für jede der 6 ungleichen Stunden, desgleichen die Schatten des Widders. (Ost-Westlinie). Darauf nehme man ein Lineal, welches zum wenigsten dem längsten Schatten des Steinbocks gleichkommt und markiere damit auf dem Zifferblatt das Ende des Schattens in der mittels des geteilten Kreises bestimmten Richtung. Besorgt man dies für jede Stunde, so wird man den Tagbogen des ganzen Steinbocks haben. Ist dieselbe Operation auch für den Wendekreis des Krebses durchgeführt, so gibt die Verbindung je zweier entsprechenden Punkte dieser (Tages-) Kurven durch Gerade die Stundenlinien“. Noch zwei andere Vorschriften teilt Albategnius mit, die aber weniger exakt sind als diese. Man findet sie, wie auch die obige, bei Delambre (a. a. O. pag. 56 und 57).

Zur näheren Erläuterung der vorstehenden Konstruktion, die im wesentlichen bei allen arabischen Astronomen dieselbe blieb, sei auf Fig. 1 verwiesen. Es fiel der Fußpunkt des Gnomons, dessen Höhe 12 Einheiten (Finger) des Maßstabs betrug, mit dem Mittelpunkt des erwähnten Kreises zusammen. Diese Höhe sei für ein und alle Mal mit q bezeichnet. Zunächst mußte nun für eine gegebene Breite die Dauer des kürzesten und längsten Tages, wo die Sonne im Anfang des Steinbocks, bezw. Krebses steht, festgestellt werden, welche Aufgabe Al-Battâni, sich ganz an Ptolemaeus anschließend, mit Hilfe der Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck löste[1]), wobei er allerdings die halben Sehnen der Griechen durch den Sinus der Inder ersetzt. Der zu einem dieser halben Tage gehörige Stundenwinkel s_0 findet sich einfach dadurch, daß man im sphärischen Dreieck Zenit-Pol-Sonne den Kosinussatz:

$$cos\,(90°—h) = cos\,(90°—\varphi)\,.\,cos\,(90°—\varepsilon) + sin\,(90°—\varphi)\,.\,sin\,(90°—\varepsilon)\,.\,cos\,s$$

d. i.

$$sin\,h = sin\,\varphi\,.\,sin\,\varepsilon + cos\,\varphi\,.\,cos\,\varepsilon\,.\,cos\,s$$

anschreibt und nach dem zum Auf- oder Untergang der Sonne ($h = 0$) gehörigen Stundenwinkel s_0 auflöst, wodurch man erhält:

$$cos\,s_0 = -\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\varepsilon,$$

wo ε, die Ekliptikschiefe, für das Wintersolstitium durch $-\varepsilon$ zu ersetzen ist. Der gefundene Tagbogen wurde in beiden Fällen in 12 gleiche Teile geteilt; die Zeitdauer, welche die Sonne brauchte, um den Bogen zwischen 2 aequidistanten Teilpunkten zu durchlaufen, nannte man eine temporäre Stunde. Sie war also im Sommer länger als im Winter. (Vgl. Kapitel III). Die temporäre Stunde beherrschte die Astronomie auch während der ganzen arabischen Zeit, erst Abul Hassan gebrauchte neben den früheren auch die gleichen oder Aequinoktialstunden, die einem Stundenwinkel von 15° entsprechen. Zur Bestimmung der Schattenlänge m für die einzelnen Stunden war erst die Kenntnis der Sonnenhöhe h nötig, womit sich dann sofort ergab

$$m = q\,.\,cotg\,h$$

Da außer der Breite φ und der Deklination δ (ε) aber durch die temporäre Stunde auch der Stundenwinkel s gegeben war, so ließ sich h aus dem oben bereits angeschriebenen Kosinussatz berechnen. In dieser Gestalt kannten ihn aber weder Al-Battâni, noch spätere arabische Astronomen, vielmehr zerlegten sie

[1]) Vgl. A. von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Leipzig, 1900—1903, 2 Bände, I Bd., pag. 25.

ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck stets in 2 rechtwinklige; dagegen war ihnen der Sinussatz geläufig.[1]) War h auf diese Weise gefunden, so mußten die Schattenlängen $m = q \,.\, cotg\, h$ vom Fußpunkt des Gnomons unter gewissen Winkeln zur Nord-Südlinie mittels des schon erwähnten Lineals abgetragen werden. Diese Winkel sind aber mit den Azimuten der Sonne zu den einzelnen Stunden des Tages identisch. Zu ihrer Berechnung aus φ, δ und h gibt Al-Battâni (ohne Beweis) die Regel:

$$sin\,(90°-\alpha) = \frac{\left(\frac{r\,.\,sin\,(90°-\delta)}{sin\,(90°-\varphi)} - \frac{sin\,h\,.\,sin\,\varphi}{sin\,(90°-\varphi)}\right).\,r}{sin\,(90°-h)}$$ [2])

welche für $r = 1$ und Einführung der Kosinusse sofort in den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie übergeht. Zur konstruktiven Festlegung der Azimute diente der eingeteilte Kreis. (Fig. 1).

Da also ein und dieselbe Rechenvorschrift oftmals auszuführen war, so lag der Gedanke, eine Kotangententabelle zu erstellen, sehr nahe. Battâni hat auch eine solche besessen; sie ist im III. Teil des Opus astronomicum abgedruckt. Auch Ibn Jûnis hatte eine solche Kotangententabelle, allein er vermied die Rechnung mit Tangenten stets auf das Sorgfältigste. Es dürfte vom rein historischen Standpunkt aus nicht ohne Interesse sein, hier anzuführen, wie Battâni, Ibn Jûnis und Abul Hassan jeweils die Sonnenhöhe rechnerisch ermittelten: Der erste der 3 Astronomen, den man oft auch den Ptolemaeus der Araber nennt, geht aus von der uns schon geläufigen Formel

$$cos\, s_0 = -\, tang\, \varphi \,.\, tang\, \delta$$

Nun wird

$$sin\ vers\, s_0 = 1 - cos\, s_0 = 1 + tang\, \varphi \,.\, tang\, \delta$$
$$= \frac{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta + sin\, \varphi \,.\, sin\, \delta}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta} = \frac{cos\,(\varphi - \delta)}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

gebildet. Also ist auch

$$sin\, h \,.\, sin\ vers\, s_0 = \frac{sin\, h \,.\, cos\,(\varphi - \delta)}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

oder

$$\frac{sin\, h \,.\, sin\ vers\, s_0}{cos\,(\varphi - \delta)} = \frac{sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}.$$

Beachtet man, daß aus

$$sin\, h = sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s$$

$$1 - cos\, s = sin\ vers\, s = \frac{cos\,(\varphi - \delta) - sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$
$$= sin\ vers\, s_0 - \frac{sin\, h}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta}$$

folgt, so kann man weiterhin schreiben

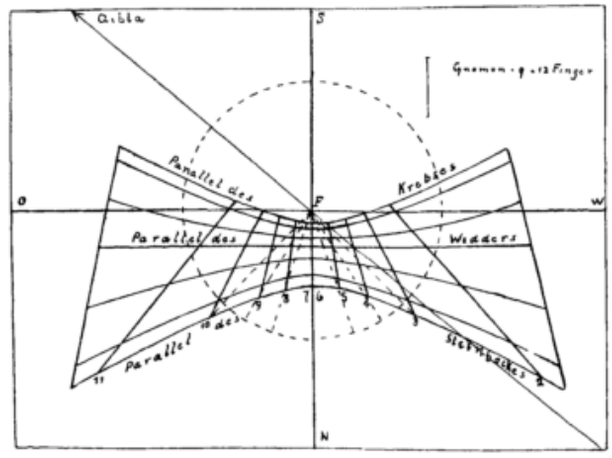


Fig. 1.

$$sin\ vers\, s_0 - sin\ vers\, s_0 \,.\, \frac{sin\, h}{cos\,(\varphi - \delta)} = sin\ vers\, s_0 \left(1 - \frac{sin\ h}{sin\left[90°-(\varphi-\delta)\right]}\right) = sin\ vers\, s,$$

woraus dann folgt:

$$sin\ vers\, s = sin\ vers\, s_0 - \frac{sin\ vers\, s_0 \,.\, sin\, h}{sin\left[90°-(\varphi-\delta)\right]},$$

und dies ist die Regel zur Berechnung von h, wie sie sich bei Battâni findet.

Ganz eigenartig ging zur Bestimmung derselben Größe Ibn Jûnis zu Werke. Um ganz im rechtwinkligen Dreieck verbleiben zu können, führt er folgende 2 Begriffe ein:

Der Baad ist die Distanz der Sonne oder des Sterns vom Westpunkt des Horizontes; der Inhiraf ist der Winkel dieser Distanz mit dem ersten Vertikal.

[1]) Dies folgt aus vielen Stellen arabischer Handschriften; vgl. auch den Nachweis von H. Suter: „Zur Trigonometrie der Araber" (Bibl. math. (3) 10, pag. 156—160, 1910), wonach ihn sicherlich schon der Lehrer Al-Bêrûnîs, nämlich Abû Nasr ben Jrâq (+ ca. 1000—1020) gekannt hat.

[2]) Vgl. hierzu: Opus astron., Cap. XI und v. Braunmühl a. a. O., pag. 33.

In Fig. 2 ist durch den Stern oder die Sonne S und den Westpunkt Q des Horizonts ein Großkreisbogen gelegt, der in p auf dem Meridian senkrecht steht, ebenso durch das Zenit Z und S ein Höhenkreis. Dann hat man die 2 rechtwinkligen Dreiecke $S\,p\,Z$ und $S\,p\,P$; in diesem ist $\sphericalangle\, p\,P\,S = s$, $\sphericalangle\, p\,Z\,S = \alpha$; $Z\,S = 90° - h$; $p\,S = 90° - S\,Q = 90° -$baad, ferner, weil $p\,Q = Q\,Z = 90°$ ist, $\sphericalangle\, p\,Q\,Z =$ Seite $p\,Z =$ inhiraf. Man hat demnach successive

$$\begin{aligned} \cos(90° - p\,S) &= \sin P\,S \,.\, \sin \sphericalangle\, p\,P\,S \\ \sin p\,S &= \cos\delta \,.\, \sin s \\ \cos Z\,S &= \sin h = \cos p\,S \,.\, \cos p\,Z, \\ \sin h &= \sin Q\,S \,.\, \cos \sphericalangle\, S\,Q\,Z, \\ &= \sin baad \,.\, \cos inhiraf; \\ \cos\alpha &= \frac{\sin baad \,.\, \sin inhiraf}{\cos h}, \end{aligned}$$

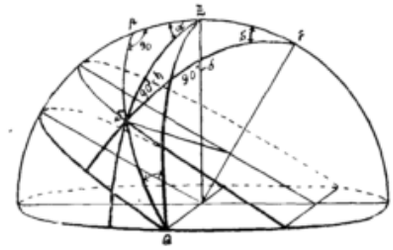


Fig. 2.

womit Höhe und Azimut aus rechtwinkligen Dreiecken bestimmt sind.

Abul Hassan nennt das Produkt $\cos\varphi \,.\, \cos\delta$ $assl$[1]). Es ist ein Bestandteil der Formel

$$\sin h = \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s.$$

Im Meridian (obere Kulmination) ist $s = 0$, und $h = H$ (Mittagshöhe).

Dann hat man $$\sin H = \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi$$

Und da für den Sechsstundenkreis $\sin\delta \,.\, \sin\varphi = \sin h_6$ ist, so folgt weiter:

$$\sin H = \sin h_6 + assl$$

und endlich

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin h_6 + assl \,.\, \cos s \\ &= \sin H - assl + assl \,.\, \cos s, \end{aligned}$$

welche Formel ebenfalls sehr bemerkenswert ist.

Daß die Araber auch den Kurven, welche das Ende des Schattens eines lotrechten Stäbchens während eines Tages auf der Horizontalebene beschreibt, schon sehr frühe ihre Aufmerksamkeit zuwandten, ist uns aus der Einleitung bekannt. Abul Hassan, der auch ein Buch über die Kegelschnitte verfaßt hat, das aber verloren gegangen ist, gibt in seinem schon erwähnten Hauptwerk sowohl im Text als auch auf sehr kostbaren Tafeln, eine durchaus richtige Darstellung der Schattenlinien für jeden einzelnen Fall. Es sind bekanntlich Kegelschnitte als Zentralprojektionen der Parallelkreise, welche die Sonne am Himmel täglich durchwandert, auf die Uhrfläche als Projektionsebene und mit der Stabspitze als Projektionszentrum. Wir wollen die Gleichung der Kegelschnittskurve für die Horizontalebene hier entwickeln, da sie auch fernerhin in unseren Untersuchungen eine Rolle spielt: Sei (Fig. 3) S die Stabspitze, welche der Sonnenstrahl $S\,\Sigma$ durchsetzt, so ist $F\,\Sigma$ der Schlagschatten des Stabes und Σ ein Punkt der Schattenkurve, deren Hauptachse die Nord-Südlinie ist, weil sich auf derselben der Scheitel A der Kurve befindet, der dem Augenblick der Sonnenkulmination entspricht, die stets im Südpunkt stattfindet. Die rechtwinkligen Koordinaten von Σ, bezogen auf genannte Achse und den Fußpunkt F des Gnomons als Koordinatenanfang seien x und y. Da die Schattenrichtung vom Azimut der Sonne bedingt wird, so ist $\sphericalangle\, B\,F\,\Sigma = \alpha$. Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck $F\,B\,\Sigma$ liest man ab:

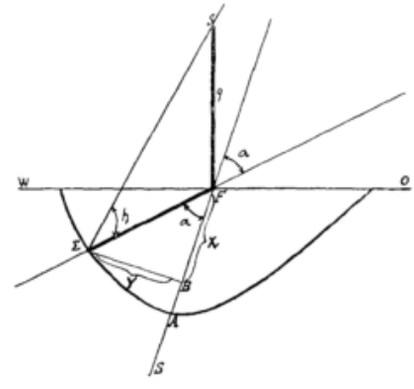


Fig. 3.

$$y = F\,\Sigma \,.\, \sin\alpha,$$

und aus dem bei F rechtwinkligen Triangel $\Sigma\,F\,S$:

$$F\,\Sigma = q \,.\, \mathrm{cotg}\, h,$$

wobei h die dem Schattenpunkt Σ entsprechende Sonnenhöhe ist.

Damit wird $$y = q \,.\, \mathrm{cotg}\, h \,.\, \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

[1]) assl = Wurzel, Anfang. Solche Termini finden sich bei Abul Hassan sehr häufig.

Nach dem Sinussatz hat man im Zenit-Pol-Sonnedreieck:

$$\sin \alpha = \frac{\cos \delta \,.\, \sin s}{\cos h} \quad \text{II)}$$

und nach dem Kosinussatz:

$$\sin h = \sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s \quad \text{III)}$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\sin \alpha$ aus II) in I) wird

$$y = q \,.\, \frac{\cos \delta \,.\, \sin s}{\sin h},$$

und wenn man jetzt noch $\sin h$ durch den Ausdruck III) ersetzt:

$$y = q \,.\, \frac{\cos \delta \,.\, \sin s}{\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s} \quad \text{IV)}$$

Ferner ist

$$\frac{x}{y} = \operatorname{cotg} \alpha,$$

$$x = y \,.\, \operatorname{cotg} \alpha = q \,.\, \frac{\cos \delta \,.\, \sin s \,.\, \operatorname{cotg} \alpha}{\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s} \quad \text{IVa)}$$

Der Kotangentensatz auf das besagte Dreieck angewandt, gibt

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos s \,.\, \sin \varphi - \cos \varphi \,.\, \operatorname{tang} \delta}{\sin s}$$

Setzt man diesen Wert von $\operatorname{cotg} \alpha$ in IVa) ein, so ergibt sich

$$x = q \,.\, \frac{\cos s \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos \delta - \cos \varphi \,.\, \sin \delta}{\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s} \quad \text{V)}$$

Eliminiert man aus IV) und V) die Variable s, so hat man die für jede Zeit des ganzen Tages gültige Gleichung in x und y:

$$y^2 \,.\, \sin^2 \delta - x^2 \,.\, \cos(\varphi - \delta) \,.\, \cos(\varphi + \delta) + x \,.\, q \,.\, \sin 2\varphi - q^2 \,.\, \sin(\varphi - \delta) \,.\, \sin(\varphi + \delta) = o \quad \text{VI)}$$

Um zu entscheiden, welcher Art der durch VI) definierte Kegelschnitt ist, bedenke man, daß eine auf- und untergehende Sonne 2 unendlich lange Schatten, also 2 unendlich ferne Punkte erzeugt, mithin die Schattenkurve eine Hyperbel ist, daß eine um Mitternacht den Horizont gerade berührende Sonne einen unendlich fernen Punkt, d. h. eine Parabel erzeugt, daß endlich bei Mitternachtssonne jeder Schattenpunkt im Endlichen liegt, d. h. die Kurve ein geschlossener Kegelschnitt wird. Wie aber aus einer einfachen Projektion der Himmelskugel auf die Meridianebene ersichtlich ist,

muß im ersten Fall $\varphi + \delta < 90°$

„ zweiten „ $\varphi + \delta = 90°$

und im dritten „ $\varphi + \delta > 90°$ sein.

Und welche Gestalt haben die Verbindungslinien „aequihorärer" Punkte der einzelnen Tageskurven? Wir stehen damit vor der Frage nach der Natur der Stundenlinien. Sie ist für gleiche oder aequinoktiale Stunden sehr leicht zu beantworten, ungelöst noch für die temporären Stunden. Doch wird Kapitel III Aufschluß über diese interessante Frage geben, soweit eine mathemathische Behandlung tunlich ist. Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die temporären Stundenlinien durchaus keine Geraden sind, wie die Araber irrtümlich annahmen. Für gleiche Stunden jedoch ist der fragliche Ort auf der Sphäre ein Meridian, der von Pol zu Pol zieht. Auf ihm befindet sich die Sonne das ganze Jahr beim Stundenwinkel s, gleichviel, welches ihre Deklination sei. Der Durchschnitt eines Großkreises mit einer Ebene ist stets eine gerade Linie, und eine solche muß also der zu erwartende geometrische Ort in der Ebene sein. Da er für das ganze Jahr gültig ist, so muß die Gleichung desselben von dsr Sonnendeklination unabhängig sein; man findet die fragliche Gleichung also durch Elimination von δ aus IV) und V). Dazu dividiert man in beiden Zähler und Nenner rechter Hand durch $\cos \delta$, wodurch nur noch $\operatorname{tang} \delta$ vorkommt. Rechnet man dies aus IV) heraus, so hat man

$$tang\ \delta = \frac{q\ .\ sin\ s - y\ .\ cos\ \varphi\ .\ cos\ s}{y\ .\ sin\ \varphi},$$

und dieser Ausdruck in V) eingesetzt läßt dieselbe übergehen in

$$y = x\ .\ tang\ s - q\ .\ cos\ \varphi\ .\ tang\ s \quad \text{VII),}$$

welches offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist. Setzt man für s der Reihe nach 0°, 15°, 30° usw., so erhält man der Reihe nach die verschiedenen Stundenlinien, die sich für gleiche Stunden in einem Punkte der X-Achse schneiden. (Projektion des Pols.) Für diese ist $y = 0$; der Schnittpunkt hat also die Abscisse

$$x = q\ .\ cos\ \varphi\ ,$$

ist mithin nicht indentisch mit dem Fußpunkt des Gnomons.

II. Kapitel.

Der Hâfir und Halazûn.

Zu ihrem Verständnis müssen wir noch einmal auf die im 1. Kapitel gelehrte Höhenbestimmung zurückkommen, wie sie von den einzelnen arabischen Astronomen vorgenommen wurde. Natürlich besaß auch Abul Hassan ausgedehnte Tabellen, aus denen er die Sonnenhöhen für jede Stunde jedes Tages entnehmen konnte. Aber der Marokkanische Astronom ging noch weiter. Um sich ganz von der Rechnung freizumachen, — der 2. Band seines astronomischen Werkes handelt ja ausschließlich von den Konstruktionen — lehrt er uns ein rein graphisches Verfahren, wie man die Schattenlänge für jeden Tag des Jahres und zu jeder Stunde des Tages an einem gegebenen Orte mit einem Zirkel abgreifen könne: Die Konstruktion des Hâfir.[1]) Sie ist die folgende: Man beschreibe einen Kreis, dessen Radius mindestens dem längsten Schatten der 5. Nachmittagsstunde zur Zeit der Wintersonnenwende gleichkommt und teile seine Peripherie in 36 gleiche Teile. Der Kreis selbst stellt die Ekliptik vor. Dann entfallen auf jedes Zeichen des Tierkreises 3 Teile. Sämtliche Teilpunkte der Peripherie verbinde man mit dem Kreismittelpunkt. Aus den Kotangententabellen entnehme man alsdann die Längen der Schatten für den wahren Mittag jener Jahrestage, welche einer Länge der Sonne (in der Ekliptik) von 0°, 10°, 20°, 30° . . . 360° entsprechen. Ebenso entnehme man den Tabellen die Schattenlängen für dieselben Jahrestage der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften[2]) Nachmittagsstunde und trage sie auf den entsprechenden Kreisradien ab. Wenn man zum Schluß die Endpunkte, welche der wahre Mittag, die erste, zweite Stunde usw. auf den 30 Linien, die unter gleichen Winkeln vom Mittelpunkt des Kreises ausstrahlen, liefern, durch einen stetigen Linienzug verbindet, so erhält man in ihnen die oben genannten Hâfirkurven. Ein beliebiger Tag des Jahres definiert dann eine ganz bestimmte Länge l der Sonne in der Ekliptik, und ein Strahl, unter diesem Winkel vom Mittelpunkte an die Peripherie des Kreises gezogen, wird auf den einzelnen Hâfirkurven die Schattenlängen eines gegebenen Gnomons, für welchen natürlich der ganze Cadran konstruiert wird, für die verschiedenen Stunden des Tages in interpolatorischer Weise ausschneiden. Für nicht allzugroße Ansprüche an Genauigkeit ist also der Nutzen solcher Hâfire einleuchtend.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, diese merkwürdigen Gebilde arabischer Gnomonik, die sich vor Abul Hassan anscheinend nirgends finden, einer Diskussion zu unterwerfen, soweit dies bei der Kompliziertheit der mathematischen Ausdrücke, die dabei auftreten, angängig ist. Der Kreismittelpunkt oder Fußpunkt des Gnomons sei der Koordinatenanfang. Dann ist die Länge ϱ des Schattens eine Funktion des Ortes der Sonne in der Ekliptik. Wir nehmen die astronomische Länge derselben als Polarwinkel; es ist also $O\Upsilon$ die X-Achse; sie definiert die Länge Null, und 180°, während die Y-Achse die Länge $l = 90°$ und 270° aus-

[1]) Das Wort Hâfir bedeutet in buchstäblichem Sinne: Huf, Klaue (französ. sabot) und es scheint sich direkt auf die im allgemeinen ovale Gestalt der Kurven zu beziehen, um die es sich hier handelt.

[2]) Abul Hassan denkt also an temporäre Stunden, wo bei der 6. Nachmittagsstunde die Sonne stets untergeht. Im deutschen Mittelalter und später, bis gegen 1880, sprach man von „Judenstunden" oder führte sie auch auf babylonisches und griechisches Vorbild zurück.

schneidet. Wir behandeln zunächst den Hâfir des wahren Mittags. Die Mittagshöhe der Sonne ist $H = 90° - (\varphi - \delta)$, folglich

$$\varrho = q \,.\, cotg\left[90°-(\varphi-\delta)\right] = q \,.\, tang\,(\varphi-\delta)$$

$$\varrho = q \cdot \frac{tang\,\varphi - tang\,\delta}{1+tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

Die Deklination δ der Sonne drückt sich aber bekanntlich durch

$$sin\,\delta = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l$$

aus, so daß

$$tang\,\delta = \frac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l}}$$

wird.

Setzt man diesen Wert für $tang\,\delta$ rechter Hand in I) ein, so hat man schon die Polargleichung der Hâfirkurve für den wahren Mittag.

$$\varrho = q \cdot \frac{tang\,\varphi - \dfrac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l}}}{1+tang\,\varphi \,.\, \dfrac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Dabei ist l von 0° bis 360° zu zählen.

Für einen Ort des Äquators, wo $tang\,\varphi = 0$ ist, vereinfacht sich II) zu

$$\varrho = q \,.\, tang\,\delta = q \,.\, \frac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1-sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

und diese vereinfachte Gleichung III) ist es, die wir weiter diskutieren wollen. Wir gehen mittels der Beziehung

$$\frac{y}{x} = tang\,l$$

auf rechtwinklige Koordinaten über und finden durch einfache Rechnung aus III) eine Parameterdarstellung für x und y, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\,\varrho \cdot \frac{\sqrt{q^2 sin^2\varepsilon - \varrho^2 sin^2\varepsilon}}{sin\,\varepsilon \,.\sqrt{\varrho^2+q^2}} \\ y &= \pm\,\frac{\varrho^2}{sin\,\varepsilon \,.\sqrt{\varrho^2+q^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß dieser Hâfir aus 2 kongruenten Hälften besteht, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenhängen, denn dort ist für $x = 0$ und $y = 0$ auch $\varrho = 0$. (Tafel I, Fig. 1.)

Bildet man aus IV) den ersten Differentialquotienten, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho\,(\varrho^2+2\,q^2) \,.\, \sqrt{q^2 sin^2\varepsilon - \varrho^2 cos^2\varepsilon}}{q^4 sin^2\varepsilon - \varrho^4 cos^2\varepsilon - 2\,\varrho^2 q^2 \,.\, sin^2\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

a) Für wagerechte Tangenten ist der Zähler von V) gleich Null zu setzen. Dies führt zu den 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 0 \\ \varrho_2 &= \pm\, i\,q \,.\, \sqrt{2} \\ \varrho_3 &= \pm\, q \,.\, tang\,\varepsilon \end{aligned}$$

welch letzteres Resultat man auch unschwer aus IV) findet, indem man $x = 0$ setzt.

b) Für senkrechte Tangenten ist der Nenner von V) gleich Null zu setzen. Hieraus folgt für ϱ:

$$\varrho = \pm\,\sqrt{-q^2\,tang^2\varepsilon \pm q \,.\, tang\,\varepsilon \,.\, \sqrt{1+q^2\,tang^2\varepsilon}}$$

c) Zur Bestimmung von Wendepunkten haben wir $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ zu machen und die hieraus entfließende Gleichung nach ϱ aufzulösen. Nun ist in unserem Fall

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dx}$$

Soll der Ausdruck rechter Hand $= 0$ werden, so muß entweder

$$\frac{d\varrho}{dx} \text{ oder } \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varrho} = 0 \text{ sein.}$$

Für $\frac{d\varrho}{dx}$ findet man durch Differentiation von IV_1):

$$\frac{1}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{d\varrho}{dx} = \frac{(q^2+\varrho^2)^{3/2} \cdot (q^2 \sin^2\varepsilon - \varrho^2 \cos^2\varepsilon)^{1/2}}{q^4 \sin^2\varepsilon - \varrho^4 \cos^2\varepsilon - 2\, q^2 \varrho^2 \cos^2\varepsilon}$$

Dieser Differentialquotient ist Null, wenn es sein Zähler ist, oder wenn sein Nenner bei endlichem Zähler unendlich groß wird. Indem wir die letztere Möglichkeit ausscheiden, bleiben die Resultate

$$\varrho = \pm i\, q$$
$$\varrho = q \,.\, tang\,(\pm\varepsilon)$$

Indessen definiert dieser 2. Wert von ϱ keine eigentlichen Wendepunkte, sondern nur wagerechte Tangenten. Es ist ja selbstverständlich, daß da, wo die Neigung der Kurve, d. h. $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, auch die Zunahme der Neigung, d. i. $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ sein muß. Somit bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varrho} = 0$ ist. Wir schreiben zur leichteren Ausführung dieser Differentiation die Gleichung V) so:

$$\frac{dy}{dx} = (q^4 \sin^2\varepsilon - \varrho^4 \cos^2\varepsilon - 2\,\varrho^2 q^2 \sin^2\varepsilon)^{-1} \cdot (\varrho^3 + 2\, q^2 \varrho) \cdot (q^2 \sin^2\varepsilon - \varrho^2 \cos^2\varepsilon)^{1/2}$$

Dann folgt nach bekannten Differentiationsregeln

$$\begin{aligned}\frac{dy'}{d\varrho} = \quad & 4\,(\varrho^4 + 2\, q^2 \varrho^2)\,(\varrho^2 \cos^2\varepsilon + q^2 \sin^2\varepsilon)\,(q^2 \sin^2\varepsilon - \varrho^2 \cos^2\varepsilon) \\ & - (\varrho^4 + 2\, q^2 \varrho^2)\,(q^4 \sin^2\varepsilon - \varrho^4 \cos^2\varepsilon - 2\,\varrho^2 q^2 \sin^2\varepsilon) \,.\, \cos^2\varepsilon \\ & + (3\,\varrho^2 + 2\, q^2)\,(q^4 \sin^2\varepsilon - \varrho^4 \cos^2\varepsilon - 2\,\varrho^2 q^2 \sin^2\varepsilon)\,(q^2 \sin^2\varepsilon - \varrho^2 \cos^2\varepsilon)\end{aligned}$$

Entwickelt man den Ausdruck rechts und ordnet nach Potenzen von ϱ, so erhält man zur Bestimmung der Wendepunkte die folgende Gleichung 6. Grades:

$$\varrho^6 \cot g^2\varepsilon\,(5 - 9\cos^2\varepsilon) - \varrho^4 q^2\,(2 - 4\cos^2\varepsilon) + \varrho^2 q^4\,(7 - 11\cos^2\varepsilon) + 2\, q^6 \sin^2\varepsilon = o \quad \ldots\ldots \quad VI)$$

Da sie nur gerade Potenzen von ϱ enthält, so läßt sie sich auf den 3. Grad herunterbringen, indem man $\varrho^2 = \varrho_1$ setzt. Dann gilt es die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho_1^3 \cot g^2\varepsilon\,(5 - 9\cos^2\varepsilon) - \varrho_1^2 q^2\,(2 - 4\cos^2\varepsilon) + \varrho_1 q^4\,(7 - 11\cos^2\varepsilon) + 2\, q^6 \sin^2\varepsilon = o \quad \ldots\ldots \quad VII)$$

zu finden. Da jedoch ihre algebraische Auflösung äußerst mühsam würde, so suchen wir die reelle Wurzel durch Näherung zu bestimmen. Der längste Mittagsschatten ist am Aequator $= q \,.\, tang\,(\pm\varepsilon)$, alle anderen sind $= q \,.\, tang\,(\pm\delta)$, wo δ die augenblickliche Sonnendeklination vorstellt. Setzen wir jetzt in VI) den längsten Mittagsschatten ein, so werden wir nicht erwarten dürfen, daß er die Gleichung zu Null macht. Sei die rechte Seite $= \Delta$, so haben wir

$$\begin{aligned}\Delta &= q^6 \left[tang^4\varepsilon\,(5 - 9\cos^2\varepsilon) - tang^4\varepsilon\,(2 - 4\cos^2\varepsilon) + tang^2\varepsilon\,(7 - 11\cos^2\varepsilon) + 2\sin^2\varepsilon\right] \\ &= q^6\, tang^2\varepsilon \left[7 - 9 - 5\sin^2\varepsilon + 3\, tang^2\varepsilon\right]\end{aligned}$$

Und da $\sin^2\varepsilon$ in roher Annäherung $= 0{,}16$; $tang^2\varepsilon = 0{,}19$ ist, so wird annähernd $\Delta = -0{,}418\ldots q^6$, also $\Delta < o$, d. h. der Wert, welcher VI) befriedigt, ist nicht $= q \,.\, tang\,\varepsilon$, sondern kleiner. Mithin sind reelle

Wendepunkte da. Setzt man $q = 1$, so wird Gleichung VII) annähernd befriedigt durch den Wert $\varrho_1 = 0.106$, woraus man zieht:

$$\varrho = \pm \sqrt{0.106} = \pm 0.302,$$

während der längste Mittagsschatten für $q = 1$ zu $\varrho = \pm 0.43$ wird. Die Wendepunkte treten etwa bei $\delta = \pm 17°$ ein.

Man kann sich nach dem Vorausgehenden leicht ein genaueres Bild eines Mittagsḥâfirs machen, so wie ihn Fig. 1 auf Tafel I zeigt. Zweimal im Jahre passiert die Sonne den Aequator, (21. III und 23 IX) erreicht mithin unter $\varphi = 0°$ das Zenit, so daß an diesen Tagen der Mittagsschatten $= 0$ ist. Dieser Ḥâfir muß daher eine 2mal durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehende Kurve, ein zur X-Achse symmetrisch liegendes Doppeloval sein. Da vom Aequinoktium δ schnell wächst oder abnimmt, so muß ein solches Oval von O aus erst ziemlich weit nach rechts und links ausscheeren, um dann allmählich anzusteigen oder nach unten zu fallen.[1])

Ebenso muß ϱ nach I) für jeden anderen Ort der Erde 2mal $= 0$ werden, wenn $\varphi = \delta$ ist (also nur innerhalb der heißen Zone). Doch sind nicht mehr beide Hälften des Hâfir symmetrisch.

Außerhalb der heißen Zone hat ϱ das ganze Jahr einen endlichen Wert. Nach I bleiben die Schatten für $\delta = +\varepsilon$ am kürzesten. Tafel I, Fig. 2 zeigt einen von mir berechneten Mittagsḥâfir für $\varphi = 30°$. Er hat eine herzförmige Gestalt mit deutlicher Spitze.

Man kann auch die Gleichung eines Ḥâfir für eine beliebige Stunde und unter der Annahme, daß $\varphi \neq 0$ sei, entwickeln, allein ihre Diskussion wird bei der Kompliziertheit der Ausdrücke naturgemäß sehr unübersichtlich. Trotzdem will ich die allgemeinste Gleichung eines Ḥâfir noch ableiten und für $\varphi = 0$, $s \neq$ eine Parameterdarstellung angeben. Für eine beliebige Sonnenhöhe h ist die Schattenlänge

$$\varrho = q \,.\, cotg\, h$$

Aus dem Zenit-Pol-Sonnedreieck folgt:

$$sin\, h = sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s$$

und hieraus:

$$cotg\, h = \frac{\sqrt{1-sin^2 h}}{sin\, h} = \frac{\sqrt{1-(sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, sos\, s)^2}}{sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s}$$

Mithin wird

$$\varrho = q \,.\, \frac{\sqrt{1-(sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s)^2}}{sin\, \delta \,.\, sin\, \varphi + cos\, \delta \,.\, cos\, \varphi \,.\, cos\, s}$$

---

[1]) Der Mittagsḥâfir am Aequator ist eine leicht quadrierbare Kurve. Nach der bekannten Quadraturformel fur Polarcoordinaten: $F = \frac{1}{2}\int \rho^2 \,.\, d\, l$ hat man nach III

$$F = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{q^2\, sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l}{1-sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l} \,.\, d\, l = \frac{q^2}{2}\int_0^l \frac{sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l}{1-sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l}\, d\, l\,.$$

Der Bruch unter dem letzten Integral läßt sich in eine sehr rasch convergierende Potenzreihe entwickeln, da $sin\, \varepsilon = \frac{2}{5}$ ist Es ist:

$$\frac{sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l}{1-sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l} = sin^2\, \varepsilon \,.\, sin^2\, l + sin^4\, \varepsilon \,.\, sin^4\, l + sin^6\, \varepsilon \,.\, sin^6\, l + \ldots$$

Mithin

$$F = \frac{q^2 \,.\, sin^2\, \varepsilon}{2}\left[\int_0^l sin^2\, l\, d\, l + sin^2\, \varepsilon \int_0^l sin^4\, l\, d\, l + sin^4\, \varepsilon \int_0^l sin^6\, l\, d\, l + \ldots\right]$$

Nach der bekannten Reduktionsformel

$$\int sin^m\, l\, d\, l = \frac{-sin^{m-1}\, l \,.\, cos\, l}{m} + \frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}\, l\, d\, l$$

lassen sich die vorliegenden Integrale leicht bestimmen.

Nach der Methode der Partialbruchzerlegung findet man auch

$$F = \frac{q^2}{4}\left[\int_0^l \frac{d\, l}{1-sin\, \varepsilon\, sin\, l} - \int_0^l \frac{1+2\, sin\, \varepsilon\, sin\, l}{4+sin\, \varepsilon\, sin\, l}\, d\, l\right]$$

Das erste Integral hat den Wert: $\frac{-2}{cos\, \varepsilon}\, arc\, tang\left(\sqrt{\frac{1+sin\, \varepsilon}{1-sin\, \varepsilon}} \,.\, tang\left(45° + \frac{l}{2}\right)\right)$

Das 2. aber ist ein elliptisches.

Es war aber $\sin\delta = \sin\varepsilon \,.\, \sin l$; $\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\varepsilon \,.\, \sin^2 l}$, womit wir erhalten:

$$\varrho = q \,.\, \frac{\sqrt{1-(\sin\varepsilon \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin l + \cos\varphi \,.\, \cos s \,.\, \sqrt{1-\sin^2\varepsilon \,.\, \sin^2 l)^2}}}{\sin\varepsilon \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin l + \cos\varphi \,.\, \cos s \,.\, \sqrt{1-\sin^2\varepsilon \,.\, \sin^2 l}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VIII)}$$

Dies ist die Polargleichung eines Ḥâfir, konstruiert für eine beliebige Stunde bei beliebiger Polhöhe. Setzt man hierin zur Vereinfachung wiederum $\varphi = 0$ (Aequator), so findet sich nach einigen Umrechnungen leicht die IV) analoge Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\varrho \,.\, \frac{\sqrt{q^2-(\varrho^2+q^2)\cos^2 s \,.\, \cos^2\varepsilon}}{\cos s \,.\, \sin\varepsilon \,.\, \sqrt{\varrho^2+q^2}} \\ y &= \pm\varrho \,.\, \frac{\sqrt{\varrho^2\cos^2 s - q^2 \sin^2 s}}{\cos s \,.\, \sin\varepsilon \,.\, \sqrt{\varrho^2+q^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IX)}$$

Ausdrücke, die für $s = 0$, d. h. den wahren Mittag, sofort in die Formeln IV) übergehen.

Noch weit verwickelter werden die Gleichungen der Ḥâfire, falls man temporäre Stunden zugrunde legt. Für solche hat A b u l H a s s a n die Kurven konstruiert. Wir kommen im nächsten Kapitel auf diesen Gegenstand nochmals zurück.

Den H a l a z û n oder die Schraubenlinie, Spirale (Hélice) erhält H a s s a n dadurch, daß er wiederum die Schattenlängen auf den 36 Radien eines Kreises abträgt, jedoch diesmal so, daß die Schatten eines h a l b e n Jahres schon den ganzen Kreis erfüllen, also der Polarwinkel l stets doppelt so groß ist wie beim Ḥâfir. Der Grund, die Kurve so in die Breite zu ziehen, liegt wohl in der Erkenntnis, daß damit ein viel deutlicheres Bild als beim Ḥâfir erzeugt wird, welches für die Interpolation günstiger ist, und schließlich genügt ja auch die Serie der Schatten eines halben Jahres, weil Schatten, die zu gleichweit von den Solstitien liegenden Daten gehören, an Länge gleich sind. Aus dieser Definition folgt zunächst:

$$\begin{aligned} y &= \varrho \,.\, \sin 2l \\ &= 2\,\varrho \,.\, \sin l \,.\, \cos l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{X)} \end{aligned}$$

Andrerseits ist nach II):

$$\varrho = q \,.\, \frac{\operatorname{tang}\varphi + \dfrac{\sin\varepsilon \,.\, \sin l}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \,.\, \sin^2 l}}}{1-\operatorname{tang}\varphi \,.\, \dfrac{\sin\varepsilon \,.\, \sin l}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \,.\, \sin^2 l}}}$$

Hieraus gilt es, $\sin l$ und $\cos l$ in ε, q, ϱ und φ auszudrücken und in X) einzusetzen, womit auch eine Parameterdarstellung für den Halazûn gefunden ist. Man findet aus II):

$$\sin l = \frac{\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}}{\sin\varepsilon \,.\, \sqrt{1+\left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2}}$$

und hieraus

$$\cos l = \frac{1}{\sin\varepsilon} \,.\, \sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon - \left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2}}$$

womit X) übergeht in

$$y = \frac{2\,\varrho}{\sin^2\varepsilon} \,.\, \frac{\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2}} \,.\, \sqrt{\frac{\sin^2\varepsilon - \left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2 \cos^2\varepsilon}{1+\left(\dfrac{\varrho - q \,.\, \operatorname{tang}\varphi}{q + \varrho \,.\, \operatorname{tang}\varphi}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \text{XI)}$$

für x aber findet man aus $x = \varrho \,.\, \cos 2l = \varrho \,.\, (\cos^2 l - \sin^2 l)$:

$$x = \varrho \cdot \frac{1 - (1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon) \cdot \left(\frac{\varrho - q\,.\,tang\,\varphi}{q + \varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\varrho - q\,.\,tang\,\varphi}{q + \varrho\,.\,tang\,\varphi}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XII)}$$

Man erhält die Stellen, wo der Ḥalazûn die X-Achse passiert, wenn man in XI) $y = 0$ setzt oder in II) der Reihe nach $l = 0°$, $90°$ und $180°$ substituiert. Es findet sich für das zugehörige ϱ resp.:

$$\varrho_1 = q\,.\,tang\,\varphi \qquad \varrho_2 = q\,.\,tang\,(\varphi + \varepsilon) \qquad \varrho_3 = q\,.\,(\varphi - \varepsilon)$$

Die Durchschnitte mit der Y-Achse ergeben sich, wenn man in XII) $x = 0$ setzt oder in II) für l 45° und 135° substituiert. Man findet

$$\varrho_1 = q \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon} + tang\,\varphi}{1 - tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon}} \qquad \varrho_2 = q \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon} - tang\,\varphi}{1 + tang\,\varphi\,.\,\sqrt{1 + 2\,cotg^2\,\varepsilon}}$$

Eine weitere Diskussion des Ḥalazûn ist mit Schwierigkeiten verknüpft: Für $\varphi = 0$ ist er viel leichter zu behandeln. A b u l H a s s a n beschränkt sich ebenfalls auf den Fall $s = 0$.

III. Kapitel.

Temporäre Stunden und Stundenlinien.

Eine temporäre Stunde ist, wie wir bereits wissen, der zwölfte Teil der Zeit, der zwischen Sonnen-auf- und -untergang verfließt, mithin der 6. Teil eines halben Tages. Wir wollen zuerst für ihre Dauer einen allgemeinen Ausdruck ableiten.

Aus der Formel $cos\,s_0 = -tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi$ folgt

$$s_0 = arc\,cos\,(-tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi),$$

mithin ist der zu einer Temporärstunde gehörige Stundenwinkel

$$\frac{s_0}{6} = \frac{1}{6}\,arc\,cos\,(-tang\,\delta\,.\,tang\,\varphi)$$

Die Dauer einer solchen Stunde findet man daher, wenn man $\frac{s_0}{6}$ in Zeit verwandelt. Setzt man $r = 1$, so kommt auf 360° der ganze Kreisumfang oder 2π als Bogen, folglich ist der Stundenwinkel einer aequinoktialen Stunde $= \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$. Man hat daher folgende Proportion:

$$\frac{\text{Tempor. Stunde}}{\text{Aequinokt. Stunde}} = \frac{arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{6} : \frac{\pi}{12}$$

Also ist

$$1 \text{ Tempor. Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi}\,.\ 1 \text{ aequin. Stunde}$$

und wenn man die aequinoktiale Stunde zur Zeiteinheit wählt:

$$\text{Temporäre Stunde} = \frac{2\,.\,arc\,cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

Zum leichteren praktischen Gebrauch verwandeln wir I) in eine Potenzreihe, unter Beachtung, daß $arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,x$ und $arc\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\,.\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,.\,\frac{x^5}{5} + \ldots$ ist. Dann ist:

$$\text{Temp. Stunde} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta + \frac{1}{2}\,.\,\frac{(tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)^3}{3} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{2\,.\,tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta}{\pi} + \frac{1}{3}\,.\,\frac{tang^3\,\varphi\,.\,tang^3\,\delta}{\pi} + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

Diese Reihe convergiert stark, wenn δ klein ist und auch $tang\,\varphi < 1$ ist. Sie convergiert nicht für $tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta \geq 1$

Man kann auch wieder wie früher

$$tang\,\delta = \frac{sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\sqrt{1 - sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l}} = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l\,(1 - sin^2\varepsilon \,.\, sin^2 l)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, oder den Klammerfaktor nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$tang\,\delta = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l + \frac{1}{2}\,sin^3\varepsilon \,.\, sin^3 l + \ldots$$

Bleibt man bei den 3. Potenzen stehen, so läßt sich II) leicht in die Form überführen:

$$\text{Temp. Stunde} = 1 + \frac{2\,tang\,\varphi \,.\, sin\,\varepsilon \,.\, sin\,l}{\pi} + \frac{tang\,\varphi \,.\, sin^3\varepsilon \,.\, sin^3 l}{\pi} + \frac{tang^3\varphi \,.\, sin^3\varepsilon \,.\, sin^3 l}{3\,\pi} + \ldots \quad \text{III)}$$

Beide Formeln, II) und III) sind genügend genau zur Verwandlung der temporären Stunden in aequinoktiale und umgekehrt.

Wir gehen jetzt dazu über, die Gleichung der temporären Stundenlinien aufzustellen. Soviel mir bekannt ist, ist diese Aufgabe in völliger Allgemeinheit noch nicht gelöst worden. Am eingehendsten hat sich mit dem Gegenstand wohl D e l a m b r e befaßt in seiner Histoire de l' astronomie ancienne, tome II, pag. 476—82, wo es u. a. heißt: Voyons maintenant, s'il est vrai que les lignes des heures temporaires sont toujours des lignes droites, ou ce qui revient au même, si les courbes horaires sur la sphère sont toujours des arcs du grand cercle, ainsi que tous les auteurs le supposent tacitement.

C a m m a n d i n et C l a v i u s ont essayé de demontrer qu'en effet les arcs horaires appartiennent à des grands cercles. M o n t u c l a a dit, et L a l a n d e a répété d'après lui, que les lignes horaires sont des courbes assez bizarres, et qu' on ne peut décrire exactement qu' en déterminant un grand nombre de points." Da aber die Araber diese Kurven durch gerade Linien ersetzten, so ist D e l a m b r e darauf geführt worden, zu untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler war. Er findet ihn bei der Deklination, welche die Sonne erreichen kann und für die verhältnismäßig niederen Breiten, innerhalb deren sich das mohammedanische Reich erstreckte, sehr gering. Indem er diese eigenartigen Linien aber weiter verfolgte, bemerkte er, „daß ihr Gestalt der eines Integralzeichens nicht unähnlich sei". Zeichnungen und mathematische Ableitungen gibt D e l a m b r e nicht bei, wiewohl er solche für sich ausgeführt haben muß.

Um in aller Strenge die Gleichungen der Kurven abzuleiten, die uns hier beschäftigen, gehen wir auf die Formeln IV) und V) des ersten Kapitels zurück. Sie bestimmen zusammen die Koordinaten eines Punktes der Tageshyperbel, der zu einem gewissen Stundenwinkel s der Sonne gehört. Wählt man diesen Stundenwinkel s so, daß er $= \frac{s_0}{6}, \frac{s_0}{3}, \frac{s_0}{2}, \frac{2s_0}{3}$ und $\frac{5s_0}{6}$ wird, so sind x und y der genannten Formeln die Koordinaten eines Punktes der ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Temporärstundenlinie. Durch nachherige Elimination von δ erhält man die für alle Punkte einer solchen Kurve gültige Gleichung, die aber wegen ihres sehr hohen Grades in kartesischen Koordinaten nicht diskutabel ist. Indessen bietet sich auch hier eine Parameterdarstellung beinahe von selbst dar. Wie aus IV) und V) des 1. Kapitels ersichtlich, kommt die Variable s in der Sinus- und Kosinusfunktion vor. Es gilt also aus

$$cos\,s_0 = -tang\,\delta \,.\, tang\,\varphi$$

$sin\frac{s_0}{6}$, $cos\frac{s_0}{6}$; $sin\frac{s_0}{3}$, $cos\frac{s_0}{3}$; $sin\frac{s_0}{2}$, $cos\frac{s_0}{2}$ usw. zu berechnen und in IV) und V) einzusetzen. Dies ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Am leichtesten ist es noch, die Gleichung für die dritte Stundenlinie aufzustellen, wo $s = \frac{s_0}{2}$ wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} cos\;s_0 &= cos^2\frac{s_0}{2} - sin^2\frac{s_0}{2} \\ &= 2\,cos^2\frac{s_0}{2} - 1 \\ &= 1 - 2\,sin^2\frac{s_0}{2} = -tang\,\varphi \,.\, tang\,\delta. \end{aligned}$$

Mithin folgt

$$\sin\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}} \qquad \cos\frac{s_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\sin s$ und $\cos s$ in IV) und V) ein, so findet man, wenn man vorher noch Zähler und Nenner der rechten Seiten mit $\cos\delta$ durchdividiert hat, folgende Parameterdarstellung für die dritte Stundenlinie:

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}} - \cos\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}}}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV)}$$

Dies ist der einfachste Fall, den wir nachher eingehender studieren werden. Aber auch hier würde die Elimination von $\operatorname{tang}\delta$ (Parameter) schon zu einer Gleichung vom 8. Grade führen.

Schwieriger wird der Fall jedoch, wenn man $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ berechnen, d. h. die zweite Temporärstunde darstellen will. Bekanntlich ist

$$\left.\begin{aligned} 4\cos^3\frac{s_0}{2} - 3\cos\frac{s_0}{3} &= \cos s_0 = -\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta \\ 3\,.\,\sin\frac{s_0}{3} - 4\sin^3\frac{s_0}{3} &= \sin s_0 = \sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{V)}$$

so daß also die Errechnung von $\sin\frac{s_0}{3}$ und $\cos\frac{s_0}{3}$ aus den Formeln V) auf kubische Gleichungen führt.

Man kann aber auch ganz allgemein aus $\cos s_0 = -\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta$ $\sin\frac{m\,s_0}{n}$ und $\cos\frac{m\,s_0}{n}$ berechnen, wenn man vom Moivreschen Satz ausgeht. Man hat dann

$$\cos\frac{m\,s_0}{n} \pm i\sin\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta \pm i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Daraus ergibt sich

$$2\cos\frac{m\,s_0}{n} = \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$2\sin\frac{m\,s_0}{n} = \frac{1}{i}\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

Die allgemeinsten Gleichungen von Temporärstundenlinien sind demnach diese

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2}\,.\,\sin\varphi\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\delta\,.\,\operatorname{tang}^2\varphi}\right)^{\frac{m}{n}}\right] - \cos\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + \frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \\ y &= q\,.\,\frac{\frac{1}{2i}\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} - \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]}{\sin\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + \frac{1}{2}\cos\varphi\left[\left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta + i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta - i\,.\,\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\varphi\,.\,\operatorname{tang}^2\delta}\right)^{\frac{m}{n}}\right]} \end{aligned}\right\} \text{VI)}$$

Wir sehen also, daß das Zifferblatt einer Bazithah in der Tat von sehr bizarren Linien hätte durchzogen sein müssen, wäre es mit der nötigen Genauigkeit konstruiert worden. Nach L. Am. Sédillot[1]) enthielt

[1]) Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, Paris, 1841, pag. 221.

eine gute Sonnenuhr außerdem noch die Linie des Zohr (Zuhr) oder Dohr, welche dem heißesten Zeitpunkt jedes Tages entsprach, der $1^1/_2$ Stunden nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian eintrat. Für diese Linie ist also $s = \frac{s_0}{4}$; ihre Gleichung läßt sich mithin leicht aus derjenigen der dritten Stundenlinie entwickeln, wenn man beachtet, daß

$$\sin\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\varphi\ \operatorname{tang}\delta}{2}}}{2}}$$

$$\cos\frac{s_0}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{s_0}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1-\operatorname{tang}\delta\,.\,\operatorname{tang}\varphi}{2}}}{2}}$$

ist. Es ergibt sich damit folgendes Gleichungspaar für den Zohr

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}} - \operatorname{tang}\delta\,.\,\cos\varphi}{\sin\varphi\,.\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\,.\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}} \\ y &= q\,.\,\frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}}{\sin\varphi\,.\operatorname{tang}\delta + \cos\varphi\,.\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta)}}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

Wenden wir uns jetzt zur näheren Diskussion der Gleichungen für die dritte Stundenlinie und machen wir dabei noch die vereinfachende Voraussetzung, daß $\varphi = 45°$, also $\operatorname{tang}\varphi = 1$ sei. (Für $\varphi = 0$ fallen die temporären Stunden mit den aequinoktialen zusammen). Zuerst ersehen wir aus dem Formelsystem IV), (oder auch VI) daß die Quadratwurzeln nur so lange reell sind, als $\operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}\delta < 1$ ist, die Sonne auf- und untergeht. Die Kurven endigen also, sobald $90° - \delta = \varphi$ geworden ist. Für die Mitternachtssonne fallen die temporären Stunden insofern wieder mit den aequinoktialen zusammen, als dann eine Stunde der ersten Art gleich zwei Stunden der zweiten ausmacht. Ist δ negativ, so wird $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} \text{für}\quad & 1 - \operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}(-\delta) = 0 \\ \text{oder}\quad & \operatorname{tang}\varphi\,.\,\operatorname{tang}(-\delta) = 1 \\ & -\delta = 90° - \varphi \end{aligned}$$

Dann ist aber nach der zweiten der Formeln IV) auch $y = 0$, woraus folgt, daß sich die temporären Stundenlinien um das Wintersolstitium am meisten nähern und sich für den eben gefundenen Wert von δ auf einen Punkt der Y-Achse (Mittagslinie) zusammendrängen, der aber nach IV_1) im Unendlichen liegt; denn sie geht, wie eine einfache Rechnung zeigt, über in

$$x = q\,.\,\frac{\sin\varphi + \cos\varphi\,.\,\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\varphi\,.\,(-\operatorname{cotg}\varphi) + \cos\varphi} = \infty\ ,$$

ein Resultat, das übrigens *a priori* zu erwarten war.

a) **Bestimmung der wagerechten Tangenten.**

Wir setzen in den Formeln IV) $\operatorname{tang}\delta = u$, so wird für $\varphi = 45°$:

$$\frac{y}{q\,.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u} + u\sqrt{2}} \qquad \frac{x}{q} = \frac{\sqrt{1-u} - u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u} + u\sqrt{2}}\ ,$$

und falls man den Nenner beider Gleichungen mit N bezeichnet:

$$\frac{1}{q\,.\sqrt{2}}\cdot\frac{dy}{du}=\left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(+\frac{1}{2\sqrt{1+u}}\right)-\sqrt{1+u}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dy}{du}=\frac{-\sqrt{1-u}\,.\,(u+2)+\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dx}{du}=\left[\left(\sqrt{1-u}+u\sqrt{2}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{1-u}-u\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-u}}+\sqrt{2}\right)\right]:N^2$$

$$=\frac{(u-2)\,.\sqrt{2}}{\sqrt{1-u}\,.\,N^2}\;;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}}{\sqrt{2}\;(u-2)\;\sqrt{1+u}}\qquad\text{VIII)}$$

Die wagerechten Tangenten bestimmen sich aus der Gleichung

$$u^3+3u^2-2=0$$

Ihre Wurzeln sind:

$$u_1=-1,\quad\text{oder}\quad\delta_1=-45°$$
$$u_2=-1+\sqrt{3},\quad\text{oder}\quad\delta_2=+36°\,12{,}3$$
$$u_3=-1-\sqrt{3},\quad\text{oder}\quad\delta_3=-69°\,53{,}8$$

b) **Für senkrechte Tangenten** folgt aus VIII):

$$(u-2)^2\,.\,(1+u)=0,$$

woraus man zieht:

$$u_1=-1,\quad\text{oder}\quad\delta_1=-45°$$
$$u_2=+2,\quad\text{oder}\quad\delta_2=+63°\,26{,}1$$

Hieraus ersieht man, daß nur der einen wagerechten Tangente $\delta_2=36°\,12{,}3$ eine geometrische Bedeutung zukommt; $\delta_1=-45°$ definiert eine Asymptote (Mittagslinie).

c) **Für Wendepunkte** muß $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=0$ sein.

Daraus folgt: $\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{du}=0$ und auch $\dfrac{du}{dx}=0$

Man findet aus VIII), wenn man den Nenner mit N_1 bezeichnet:

$$\sqrt{2}\,.\,\frac{dy'}{du}=\left\{(u-2)\sqrt{1+u}\,.\left(\frac{2+u}{2\sqrt{1-u}}-\sqrt{1-u}\right)-\left[\sqrt{2}-(2+u)\sqrt{1-u}\right]\left(\frac{u-2}{2\sqrt{1+u}}+\sqrt{1+u}\right)\right\}:N_1^2$$

$$=\left\{(u-2)(1+u)\left(\frac{u+2}{2}-1+u\right)-\left[\sqrt{2(1-u)}-(2+u)(1-u)\right]\left(\frac{u-2}{2}+1+u\right)\right\}:N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

$$=\left\{(u^2-u-2)\,3u-\left[\sqrt{2(1-u)}+2-u-u^2\right]3u\right\}:2N_1^2\,.\sqrt{1-u^2}$$

Dieser Ausdruck ist $=0$, wenn es der Inhalt der geschwungenen Klammer ist.

Das gibt: $3u\left(2u+\sqrt{2(1-u)}\right)=0,$

woraus folgt:

$$u_1=0;\quad\text{d. h.}\quad\delta_1=0$$
$$u_2=-1;\quad\text{d. h.}\quad\delta_2=-45°$$
$$u_3=\frac{1}{2};\quad\text{d. h.}\quad\delta_3=26°\,56{,}4$$

Ferner muß auch sein:

$$\frac{du}{dx}=0,\quad\text{d. h.}\quad\sqrt{1-u}\;.\left(u\sqrt{2}+\sqrt{1-u}\right)^2=0$$

Hieraus entnehmen wir:

$$u_4 = 1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_4 = +45°$$
$$u_5 = -1; \quad \text{d. h.} \quad \delta_5 = -45°$$
$$u_6 = \frac{1}{2}; \quad \text{d. h.} \quad \delta_6 = 26° 56'.4^1)$$

Die dritte temporäre Stundenlinie für $\varphi = 45°$ hat also nur 2 Wendepunkte, die geometrische Bedeutung haben ($\delta_1 = 0$, und $\delta_3 = 26° 56'.4$). Wie die Zeichnung beweist, (Tafel I, Fig. 3) verlaufen auch die anderen Stundenlinien durchaus einfach und nicht „bizarr." Und dasselbe ist für andere Breiten (z. B. $\varphi = -30°$) der Fall (Tafel II[2]). Man könnte auch ohne allzugroße Mühe die Differentialquotienten der Gleichungen IV) bilden, ohne die beschränkende Annahme, daß $\varphi = 45°$ ist. Eine kurventheoretische Behandlung der Formeln VI) müssen wir jedoch den Mathematikern von Fach überlassen und uns hier damit begnügen, den allgemeinsten Gleichungen der Stundenlinien eine Form gegeben zu haben, die uns für ihre Diskussion am geeignetsten erscheint.[3])

Jetzt läßt sich auch die Frage nach den Hassanschen Hâfirkurven, welchen temporäre Stunden zugrunde liegen, erschöpfend dahin beantworten, daß in die Gleichungen VIII) und IX) des zweiten Kapitels für $\cos s$ der Ausdruck einzusetzen ist, der sich auf S. 19 findet.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch in Kürze eine Theorie jener merkwürdigen arabischen Wasseruhren geben, die wir schon in der Einleitung erwähnten, und die nach Carra de Vaux folgende Einrichtung hatten:

Einem Gefäß von Umdrehungsoberfläche entströmt durch ein am unteren Rande angebrachtes Ansatzrohr Wasser, wobei dasselbe jedoch nicht auf unveränderlichem Niveau erhalten wird, wie dies bei den gewöhnlichen Wasseruhren der Fall ist. Das Gefäß entleert sich, und eine seiner Außenseite entlang angebrachte Teilung läßt jederzeit erkennen, welcher Stunde die augenblickliche Wasserhöhe zukommt.

Diese Teilung kann nun zweierlei Art sein:

1) Sie entspricht den gleichen oder aequinoktialen Stunden,
2) Sie gilt den temporären oder ungleichen Stunden.

Es ist klar, daß die „Niveaucurven", wie sie A. Wittstein (a. a. O.) nicht unpassend nennt, bei den gleichen Stunden Kreise sind, die parallel zu einander und zum Horizont die Gefäßwand umziehen, und deren Abstände für die einzelnen Stunden nur von der Art der Rotationsfläche abhängen, welche man für die Wasseruhr gewählt hat.

---

[1]) Daß $u_6 = \frac{1}{2}$ ist, obwohl es die Gleichung $u\sqrt{2} + \sqrt{1-u} = 0$ nicht befriedigt, ersieht man, wenn man sie auf die Form $\cos\varphi \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\varphi} = 0$ bringt, was erlaubt ist, da ja $u < 1$ sein muß. Es ergibt sich alsdann

$$\cos\varphi\sqrt{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{2} = 0$$

oder
$$\cos\varphi + \sin\frac{\varphi}{2} = 0$$
$$\frac{\varphi}{2} = +60°$$

[2]) Diese Figur hat Herr Dr. Wedemeyer für den Verf. gezeichnet, wofür ihm an dieser Stelle herzlichst gedankt sei.

[3]) Delambre hat dem II. Tome seiner Histoire de l'astronomie ancienne vor allem Text, sofort nach dem Inhaltsverzeichnis folgende Bemerkungen als Korrektion zu seinen Ausführungen auf S. 476 ff. über die temporären Stundenlinien vorangestellt:

„Depuis l'impression de ce chapitre, pour mieux connaître la figure de ces lignes, j'ai calculé un cadran pour le cercle polaire; j'en ai déterminé tous les points horaires pour toutes les déclinaisons de degré en degré et même pour quelques fractions de degrés de 23° à 23° 28'. Il en est résulté que les lignes horaires pour cette latitude ont à fort peu près la figure du signe d'integration $\int$, c'est-à-dire que dans le voisinage du solstice d'hiver, la ligne a une courbure sensible; que pendant la plus grande partie de l'année, la ligne est sensiblement droite, et qu'elle acquiert de nouveau une courbure, mais moins sensible; vers le solstice d'été. Au solstice d'hiver, la durée du jour est = 0; toutes les lignes horaires doivent donc se confondre avec la méridienne. Aux environs de ce solstice, les lignes horaires sont si voisines, qu'il est presque impossible de les distinguer, quelque grande que soit l'échelle: en sorte qu'en cette partie le cadran est aussi inutile que difficile à tracer. Au solstice d'été, au contraire les lignes sont plus espacées que jamais, parceque le jour est de 24 heures équinoxiales, qui ne font que 12 heures temporaires. La construction est donc très-facile; au lieu que pour l'hiver le meilleur parti est de supprimer la portion de ces lignes qui ne peut être d'aucune utilité."

Ganz anders aber verhält sich dies wieder mit dem temporären Niveaukurven. Sie können in keiner Parallelebene zum Horizont verlaufen, da die temporären Stunden im Sommer viel länger sind als im Winter, folglich im Sommer während einer solchen Stunde bedeutend mehr Wasser ausfließt als im Winter. Die Niveaukurve sinkt deshalb, während die Sonne die astronomische Länge von 0° bis 180° hat, sich also vom Widder bis zur Wage bewegt, auf dem Mantel des Gefäßes herab, um sich zwischen der Sonnenlänge von 180° bis 360° wieder über das Niveau der gleichen Stunden hinauf zu heben.

Wir wollen den Sachverhalt an einer Kugeluhr näher studieren.

1) Um für die aequinoktialen Stunden die Schichtlinien ziehen zu können, nehmen wir an, die Kugel entleere sich in 12 solcher Stunden einmal. Sei das Wasser nach der ersten Stunde um x Einheiten des Durchmessers $d = 2r$ gesunken, so muß $^1/_6$ des Rauminhaltes der Halbkugel ausgeflossen sein, $^1/_3$ nach 2 Stunden, $^1/_2$ nach 3 Stunden usw. Nun ist für das Volumen eines Umdrehungskörpers nach der Formel für die Kubatur:

$$V = \pi \cdot \int_0^x y^2 \cdot dx$$

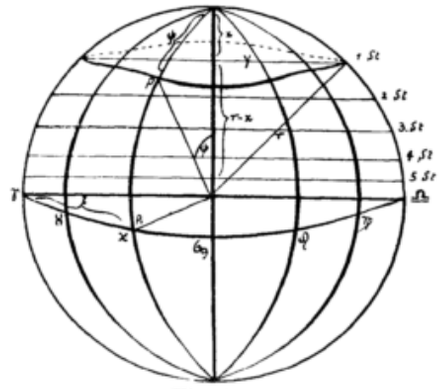


Fig 4.

Nach Fig. 4 hat man:

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (r-x)^2 \\ &= y^2 + x^2 - 2rx + r^2 \\ y^2 &= 2rx - x^2 \end{aligned}$$

Damit wird

$$V = \pi\left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ IX)}$$

Für die 1. Stundenlinie ist: $V_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{9} r^3 \pi$

» » 2. » » » $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{9} r^3 \pi$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

» » n. » » » $V_n = \frac{n}{6} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{n}{9} r^3 \pi$ ..... X)

Man findet also die Entfernungen der einzelnen Stundenmarken x_1, x_2, x_3 usw. vom obersten Endpunkt des Durchmessers durch Auflösung der folgenden kubischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1^3 - 3rx_1^2 + \frac{r^3}{3} &= 0 \\ x_2^3 - 3rx_2^2 + \frac{2r^3}{3} &= 0 \\ x_3^3 - 3rx_3^2 + r^3 &= 0 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\ x_n^3 - 3rx_n^2 + \frac{n}{3} r^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ XI)}$$

Um jedoch die Teilung auf der Oberfläche der durchsichtig zu denkenden Kugel anbringen zu können, wird man am besten den sphärischen Radius ψ berechnen, mit welchem die einzelnen konzentrischen Schichtkreise zu ziehen sind. Die Fig. 4 gibt unmittelbar:

$$\cos\psi = \frac{r-x}{r}$$

$$x = r(1 - \cos\psi) = 2r \cdot \sin^2\frac{\psi}{2}$$

womit sich die Gleichungen XI) verwandeln in:

$$\left.\begin{array}{l} 8\,.\,sin^6\frac{\psi_1}{2} - 12\,.\,sin^4\frac{\psi_1}{2} + \frac{1}{3} = 0 \\ 8\,.\,sin^6\frac{\psi_2}{2} - 12\,.\,sin^4\frac{\psi_2}{2} + \frac{2}{3} = 0 \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \\ 8\,.\,sin^6\frac{\psi_n}{2} - 12\,.\,sin^4\frac{\psi_n}{2} + \frac{n}{3} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XII)}$$

2) Da die Kugel keine in die Ebene abwickelbare Fläche ist, so lassen sich die Niveaulinien für die Temporärstunden nur an der Oberfläche der Kugel selbst punktweise konstruieren durch Berechnung der Kugelkoordinaten eines jeden Punktes einer solchen sphärischen Kurve. Zu dem Zweck teilen wir den Kugelumfang (Aequator) gemäß der Tierkreisbilder in 12 gleiche Teile, wie es Fig. 4 zeigt. Dann sind die Koordinaten des Punktes P, nämlich seine Länge l und seine Poldistanz ψ anzugeben, wodurch P vollständig bestimmt ist. Die Länge l ergibt sich aus dem D a t u m; ψ findet sich durch folgende Ueberlegung:

Es verlangt 1 aequinoktiale Stunde $\frac{1}{9} r^3 \pi$ des Kugelinhalts, folglich 1 temporäre Stunde

$$\frac{1}{9} r^3 \pi \,.\, \frac{2\, arc\, cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)}{\pi} = \frac{2}{9} r^3\, arc\, cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)$$

des Kugelinhalts. Und da sich die Senkung des Wasserspiegels jeweils aus der kubischen Gleichung

$$\left(r\,x_n^2 - \frac{x_n^3}{3}\right)\pi = V_n$$

ergibt, so hat man für die n.te Temporärstundenlinie

$$\left(r\,x_n^2 - \frac{x_n^3}{3}\right)\pi = \frac{2\,n}{9}\,.\,r^3\, arc\, cos\,(-tang\,\varphi\,.\,tang\,\delta)\ ,$$

und wenn man wieder $x = r\,(1 - cos\,\psi) = 2\,r\,sin^2\frac{\psi}{2}$ setzt und außerdem, wie es zu Anfang dieses Kapitels gelehrt wurde, die Deklination δ der Sonne in ihrer Länge l ausdrückt:

$$\left(2\,sin^4\frac{\psi_n}{2} - \frac{4}{3}\,sin^6\frac{\psi_n}{2}\right)\pi = \frac{n}{9}\, arc\, cos\left(-tang\,\varphi\,.\,\frac{sin\,\varepsilon\,.\,sin\,l}{\sqrt{1 - sin^2\,\varepsilon\,.\,sin^2\,l}}\right)\ , \quad \ldots\ldots \text{XIII)}$$

aus der sich, wie zu erwarten war, der Radius der Kugel forthebt.

Wir behandeln noch die Frage, w e l c h e N i v e a u l i n i e mit ihrer tiefsten Stelle (Sommeranfang) den Aequator gerade berühre. Dann ist in XIII) $\psi = 90°$ und $l = 90°$ zu setzen. Für $\varphi = 45°$ ergibt Gleichung XIII)

$$\pi\,.\left(2\,.\,\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\,.\,\frac{1}{8}\right) = \frac{n}{9}\, arc\, cos\,(-tang\,\varepsilon)$$

$$\pi = \frac{n}{3}\,.\, arc\, cos\,(-tang\,\varepsilon)$$

$$cos\,\frac{3\,\pi}{n} = -tang\,\varepsilon$$

$$cos\left(180° - \frac{3\,\pi}{n}\right) = tang\,\varepsilon$$

$$n = 4{,}7 \text{ (abgerundet)}$$

Für das Wintersolstitium ergibt sich auf gleiche Weise

$$n = 8{,}4 \text{ (abgerundet).}$$

Ein gerader Kreiskegel oder -zylinder liefern für solche Tagars einfachere Verhältnisse, zumal sich die Niveaukurven bei abgerolltem Mantel als e b e n e Kurven konstruieren lassen. Verallgemeinernd könnte man

irgend eine Rotationsfläche als Wassergefäß annehmen. Allein solche, wenn auch noch so reizvollen Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der antiken Zeitmessung liegen uns hier zu ferne, als daß ein näheres Eingehen auf dieselben in Rücksicht auf unseren Traktat angezeigt wäre.

IV. Kapitel.

Die Qibla, Kiblah, Kebla, Keble oder Kebleheh.

Zu den verbindlichsten Vorschriften des Korans gehört die Innehaltung der Qibla beim Gebet. Diese Orientierung nach dem Heiligtum ist übrigens nicht arabischen Ursprungs, sondern wurzelt im Judentum. Nach der Ueberlieferung ist sie so alt, wie der Tempel selbst. Die Weiherede, (Kön. I, 8, danach Chron. II, 6) noch deutlicher aber das Buch Daniel (VI, 11) zeigen uns dies. So heißt es in dem letzteren: „Als David nun vernahm, daß der Erlaß ausgefertigt war, begab er sich in sein Haus, in dessen Obergemach er in der Richtung nach Jerusalem geöffnete Fenster hatte, kniete täglich dreimal nieder, und betete zu seinem Gotte und dankte ihm, ganz wie er es bisher zu tun gepflegt hatte". Nach J. Hamburger: Real-Encyklopädie für Bibel und Talmud, 1883, II, pag. 1134, besteht für den Betenden folgende Vorschrift: Außerhalb Palästinas wendet sich der Gläubige diesem Lande zu, innerhalb Palästinas nach Jerusalem, in Jerusalem nach dem Tempel, im Tempel nach dem Heiligtum.

„Selbst in den Gebetsriten war Mohammed anfänglich von den Juden abhängig, er wandte sein Antlitz zeitweilig beim Gebet nach Jerusalem; die älteste Moschee in Medina ist nach Jerusalem orientiert. Aber der mächtigen Judenherrschaft gegenüber war der Liebe Mühen umsonst. Da trat am 16. Januar 624 nach Sonnenuntergang ein Mann in die Moschee und rief den zum Gottesdienst versammelten Gläubigen zu: ‚Ich komme vom Propheten und bringe Euch die Nachricht, daß Gott die Qibla abgeändert, wendet Euer Gesicht gegen die Ka'ba zu Mekka; denn diese ist von nun an Eure Qibla!' Alle drehten sich um, so daß die Kinder und Frauen, die sonst in den letzten Reihen standen, nun vorn waren. Die Neuerung machte großes Aufsehen: mit gutem Grund, weil sie endgültig mit dem Judentum brach und die Stiftung der arabischen Nationalkirche einleitete." (H. Nissen, „Orientation", I, p. 70—72).

Selbst ein religiös gleichgültiger Islamite weicht von dieser Vorschrift nicht ab. Carsten Niebuhr berichtet in seiner „Reisebeschreibung nach Arabien", (I. Bd., pag. 226) daß ihn in der Wüste herumschweifende Beduinen öfters angefleht hätten, ihnen die Qibla zu bestimmen, wenn sie ganz ohne Orientierung waren. Der Behauptung A. Müllers („Der Islam im Morgen- und Abendlande", 1883—1885, I. Bd., pag. 193), daß man im Zweifelsfalle die Richtung nach Mekka durch einen Blick auf einen zu diesem Zweck angefertigten Kompaß festzustellen pflege, steht folgende Angabe Carsten Niebuhrs (a. a. O. pag. 226) entgegen: „Die Direktion des Weges fand ich leicht nach einem kleinen Kompaß, ohne daß es die Araber merkten oder daß es einigen Argwohn erwecken konnte; denn, obgleich die mohammedanischen Gelehrten Kompasse haben, um danach die Keblah in ihren Mosquéen zu bauen, so schien doch keiner der herumstreifenden Araber den Gebrauch desselben zu kennen. Es ist also wohl nicht sehr zuverlässig, wenn man in den Beschreibungen von Arabien lieset, daß die Karawanen daselbst nach dem Kompaß reisen".

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wurde die Qibla stets auf dem Zifferblatt der Horizontalsonnenuhr gezogen, aber auch in den Nischen aller Moscheen und auf öffentlichen Plätzen mit freier Aussicht pflegte ihre Festlegung zu geschehen.[1]) Reiche Muselmänner lassen sich sogar die Qibla in ihrem eigenen Gebetszimmer (Oratoire) ziehen. Hier ist der Ort, auf die schöne Konstruktion der Qibla einzugehen, die sich in den Récréations mathématiques et physiques, 1790, Tome III, pag. 63 (nouvelle édition par M. Montucla) findet. Montucla behandelt die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: Gegeben 2 Seiten eines sphärischen Dreiecks und der eingeschlossene Winkel; einen der 2 anderen Winkel zu finden, und löst dieselbe in folgender Weise:

[1]) Das reich ausgestattete Werk von Mudgea d'Ohsson: Tableau général de l'empire othoman, Paris, 1788 gibt auf Tafel XVI eine Abbildung eines solchen öffentlichen Gebetsplatzes. Ein pyramidenförmig zugespitzter Stein, dessen Vorderflache mit der ewigen Lampe geschmückt ist, markiert die Qibla. Der Betende, der auf dem Gebetsteppich kniet und die Lampe anblickt, wendet damit von selbst sein Gesicht gen Mekka.

Es sei φ_1 die Breite des Ortes (z. B. Kairo), für welchen die Qibla zu ziehen ist, φ_2 diejenige von Mekka. Ebenso seien λ_1 und λ_2 bez. die Längen der beiden Orte. Man beschreibe mit möglichst großem Halbmesser einen Kreis, der den Horizont von Kairo vorstellt. Jetzt ziehe man 2 rechtwinklige Durchmesser $A\,B$ und $C\,D$ (Fig. 5) und mache $D\,N$ gleich der Poldistanz von Kairo; dann ist $M\,E \perp M\,N$ ein Stück des Aequators. $E\,K$ sei gleich der Distanz Mekkas vom Aequator. Darauf ziehe man $K\,F$ und $K\,G \perp M\,B$ und $M\,N$, fälle von G das Lot $G\,O$ auf den Durchmesser $A\,B$ und verlängere es nach rechts und links. Nunmehr beschreibe man mit dem Radius $G\,K$ um O als Zentrum den Halbkreis $R\,H\,Q$, welcher notwendig innerhalb des Kreises liegt. Von H aus trage man auf $R\,H\,Q$ den Bogen $I\,H$ gleich dem

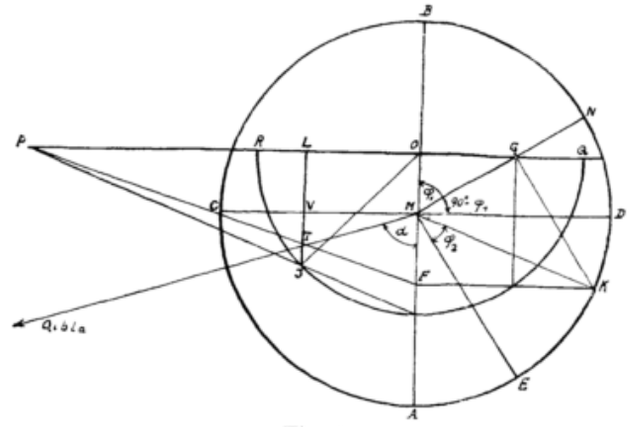


Fig. 5.

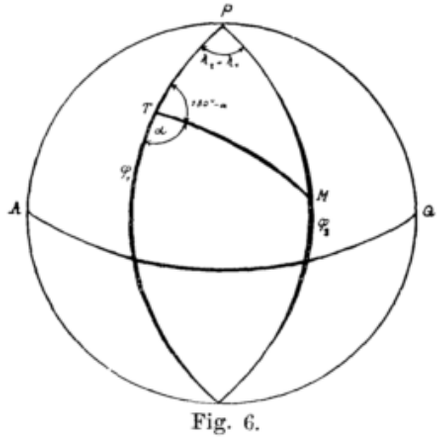


Fig. 6.

Längenunterschied $\lambda_2 - \lambda_1$ der 2 Orte ab, fälle das Lot $I\,L$ auf den Durchmesser $R\,Q$, ziehe $H\,I$ bis zu einem Durchschnitt P mit dem verlängerten Durchmesser, und ziehe endlich $P\,F$, welches $L\,I$ in T schneidet. Dieser Punkt T repräsentiert die Projektion von Mekka auf den Horizont von Kairo, und dementsprechend wird die Linie $M\,T$ mit $A\,B$ den gesuchten Richtungswinkel α bilden.

Wir geben den Beweis dieser schönen Konstruktion, der sich bei Montucla nicht findet, nachstehend wieder. In Fig. 6 seien T und M die 2 Orte mit den Breiten φ_1 und φ_2 und den Längen λ_1 und λ_2, P sei der Nordpol, $A\,Q$ der Aequator, und $\sphericalangle\,\alpha$ repräsentiere die Qiblarichtung. Dann errechnet sich dieselbe leicht nach dem Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie. Man hat nämlich im sphärischen Dreieck $T\,M\,P$:

$$\cos(90°-\varphi_1)\,.\,\cos(\lambda_2-\lambda_1) = \sin(90°-\varphi_1)\,.\,\operatorname{cotg}(90°-\varphi_2) - \sin(\lambda_2-\lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}(180°-\alpha)$$

$$\sin\varphi_1\,.\,\cos(\lambda_2-\lambda_1) = \cos\varphi_1\,.\,\operatorname{tang}\varphi_2 + \sin(\lambda_2-\lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I)}$$

Aus dieser Gleichung I) läßt sich α bestimmen. Falls aber die Montuclasche Konstruktion richtig ist, muß sich I) aus ihr wieder ableiten lassen.

Tatsächlich ist:

$$\begin{aligned} TL &= TV + VL \\ &= VM\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + MG\,.\,\cos\varphi_1 \\ &= OJ\,.\,\sin(\lambda_2-\lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + r\,.\,\sin\varphi_2\,.\,\cos\varphi_1\ , \end{aligned}$$

wenn man $ME = r$ setzt, oder

$$TL = r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\sin(\lambda_2-\lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + r\sin\varphi_2\,.\,\cos\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ II)}$$

Andererseits ist auch

$$PO = OH\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\ ,$$

da die Winkel bei H und J im gleichschenkligen Dreieck OJH jeweils $= 90°-\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$ sind, und da $OH = OJ = r\,.\,\cos\varphi_2$ ist:

$$PO = r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\ ,$$

und ebenso

$$\begin{aligned} PL &= LJ\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} \\ &= r\,.\,\cos\varphi_2\,.\,\cos(\lambda_2-\lambda_1)\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} \end{aligned}$$

In den ähnlichen Dreiecken PLT und POF besteht aber die Proportion:

$$\frac{LT}{OF} = \frac{PL}{OP} = \frac{r \,.\, cos\,\varphi_2 \,.\, cos\,(\lambda_2 - \lambda_1) \,.\, cotg\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}}{r \,.\, cos\,\varphi_2 \,.\, cotg\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}} \;,$$

woraus folgt:

$$LT = OF \,.\, cos\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Nun ist ferner:

$$OF = GS = r \,.\, sin\,\varphi_1 \,.\, cos\,\varphi_2$$

Damit gewinnen wir für TL einen zweiten Ausdruck

$$TL = r \,.\, sin\,\varphi_1 \,.\, cos\,\varphi_2 \,.\, cos\,(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

Durch Komparation von II) und III) ergibt sich

$$r \,.\, sin\,\varphi_1 \,.\, cos\,\varphi_2 \,.\, cos\,(\lambda_2 - \lambda_1) = r \,.\, cos\,\varphi_2 \,.\, sin\,(\lambda_2 - \lambda_1) \,.\, cotg\,\alpha + r \,.\, sin\,\varphi_2 \,.\, cos\,\varphi_1 \;,$$

und, indem man linker und rechter Hand mit $r \,.\, cos\,\varphi_2$ hebt:

$$sin\,\varphi_1 \,.\, cos\,(\lambda_2 - \lambda_1) = cos\,\varphi_1 \,.\, tang\,\varphi_2 + sin\,(\lambda_2 - \lambda_1) \,.\, cotg\,\alpha \;, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Eine so komplizierte Konstruktion der Qibla findet sich jedoch bei keinem der arabischen Astronomen; sie bedienten sich vielmehr sog. Approximationsverfahren, die der Wahrheit um so näher kamen, je geringer die Entfernung des fraglichen Ortes von Mekka war. Al-Battâni (vergl. C. Nallino: Opus astronomicum, Caput LVI, Azimut qiblae supputare, p. 137) geht von dem rechtwinkligen Kugeldreieck $A\,B\,C$ der Fig. 7 aus. Es sei A die gegebene Stadt, deren Länge λ_2 und deren Breite φ_2 ist; B bedeute Mekka mit der Länge λ_1 und der Breite φ_1. $B\,C$ sei ein Meridianbogen durch Mekka und AB ein größter Kreis, der also die Distanz der 2 Städte darstellt. Bogen AB werde als größter Kreis rechtwinklig zum Meridian $B\,C$ gezogen, so daß er also die Ost-Westlinie repräsentiert. Es ist unter Winkel $B\,A\,C$ das Azimut der Qibla zu verstehen. Al-Battâni setzt nun:

Fig. 7.

$$sin\ (\text{Azimut}) = \frac{sin\,(\varphi_2 - \varphi_1)}{sin\ (\text{distantia})} \;,$$

was nur annähernd richtig ist; denn BC kann nicht genau gleich dem Breitenunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$ der 2 Orte sein.

Außerdem lehrt er

$$sin\ (\text{distantia}) = \sqrt{sin^2\,(\varphi_2 - \varphi_1) + sin^2\,(\lambda_2 - \lambda_1)} \;,$$

was in einer sphärischen Figur falsch ist.

Es ist kaum anzunehmen, fügt Nallino diesen Battânischen Berechnungen im Kommentar hinzu, daß der berühmte Astronom Falsches gelehrt habe, da er in ganz ähnlichen früheren Problemen richtige Formeln anwandte. Die Kenntnis des Azimuts der Qibla war aber für die Architekten, die die islamischen Tempel zu bauen hatten, unerläßlich. Die Nische in der Wand des Tempels, die den Betenden die Richtung nach Mekka wies, wurde bekanntlich Mihrâb genannt. Da aber ein Fehler von wenigen Graden kaum von Bedeutung ist, und die meisten der damaligen Architekten den trigonometrischen Kalkul nicht beherrschten, so wollte ihnen Al-Battâni eine bequeme, der Wahrheit nahe kommende Regel für die Konstruktion der Qibla geben.

Eine ähnliche Näherungsmethode lehrt auch Al-Ǧagmînî[1]) (+ ca. 1240). Man zähle auf dem indischen Kreise vom Südpunkt aus die Differenz zwischen der Länge Mekkas und des gegebenen Ortes nach Westen zu ab, ebenso vom Nordpunkte aus und verbinde die beiden Schlußpunkte dieser abgegrenzten Kreisteile durch eine Grade AB (Fig. 8).

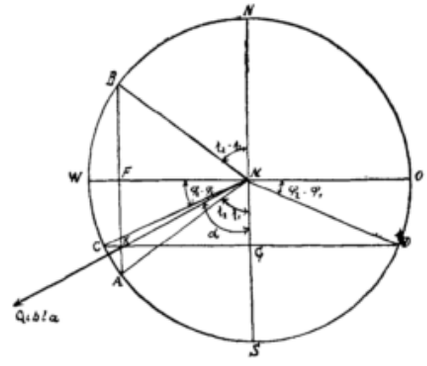


Fig. 8.

[1]) Rudolff und Hochheim: Die Astronomie des Ǧagmînî, Leipzig 1893, pag. 61 ff.

Desgleichen trägt man vom Westpunkt aus nach Süden zu den Gradunterschied der beiden Breiten ab, ebenso vom Ostpunkt aus und verbindet die beiden so fixierten Punkte durch eine Gerade CD, welche AB in K schneiden wird. Zieht man jetzt vom Mittelpunkt des Kreises aus nach K eine Gerade, so hat man in ihr die gewünschte Qiblarichtung.

Aus diesem Verfahren würde rechnerisch folgen:

$$MF = r \,.\, sin\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$MG = r \,.\, sin\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$tang\ \alpha = \frac{sin\,(\lambda_2 - \lambda_1)}{sin\,(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV)}$$

Andererseits gibt das pshärische Dreieck der Fig. 7, wenn jetzt, wie es Gagmini verlangt, α am Meridian liegt,:

$$sin\,(\varphi_2 - \varphi_1) = tang\,(\lambda_2 - \lambda_1) \,.\, colg\ \alpha\ ,$$

d. i.
$$tang\ \alpha = \frac{tang\,(\lambda_2 - \lambda_1)}{sin\,(\varphi_2 - \lambda_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{V)}$$

IV) und V) stimmen nur für kleine Längenunterschiede gut überein.

Auch von persischen Autoren kennen wir Methoden zur Bestimmung der Qibla. L. A. Sédillot[1]) berichtet, daß in dem persischen Manuskript Nr. 173 der Kgl. Bibliothek zu Paris auch ein Verfahren zur Ermittlung des Azimuts von Mekka auseinandergesetzt wird, dessen Autor Ali-Schah-Olai-al Munedjem von Buchara ist. In neuerer Zeit hat der persische Oberst A. Kržiž eine sehr interessante Arbeit[2]) veröffentlicht, die sich ebenfalls mit unserem Gegenstand befaßt.

Die Qiblafrage ist auch bereits Gegenstand kartographischer Studien geworden. In seinem Buche: The Theory of Map-Projections with special reference to the projections used in the Egyptian Survey Departement, Kairo, 1911, und schon früher erwähnt J. L. Craig eine „Mecca retroazimuthal projection", die den Zweck hat, eine Karte herzustellen, in der auf jedem Punkte die Richtung der Qibla sofort abgelesen werden kann. Dabei sind die Meridiane als gleichabständige Geraden angenommen, wodurch selbstverständlich die Parallelkreise keine einfachen Kurven werden können[3]). E. Hammer gibt eine solche „gegenazimutale" Karte in mittabstandstreuer Projektion. (Peterm. Mitt. 1910, S. 153).

V. Kapitel.

Das Asr. (Assr.)

Wenn schon die Qibla der arabischen Gnomonik einen gewissen fremdartigen Reiz verleiht, so tritt ihr exotischer Charakter in ein noch helleres Licht, wenn wir jetzt von jener merkwürdigen „religiösen Geometrie" handeln, zu deren Ausbau die islamitische Religion den Astronomen, der, wie wir bereits wissen, gleichzeitig Diener der Religion war, veranlaßte. Die Verehrung Allahs geschieht durch das Gebet (Ssalât), zu dessen Verrichtung der gläubige Muselman fünfmal während des Tages verpflichtet ist: 1) bei Tagesanbruch vor Sonnenaufgang (Fadschr), 2) um Mittag (Zohr, Zuhr), 3) am Nachmittag (Assr[4]), 4) bei Sonnenuntergang (Maghrib), 5) am Spätabend (Jscha). Dazu kommt das obligatorische Wochengebet am Freitag Mittag (Ssalât aldschum'a). Es ist einleuchtend, daß die Gläubigen bei diesen genau zu erfüllenden Vorschriften zuverlässiger Zeitangaben bedürfen. Hierzu diente viele Jahrhunderte die Sonnenuhr.

---

[1]) L. A. Sédillot: Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux (Paris, 1845, pag. 323).

[2]) A. Kržiž: Beschreibung, wissenschaftliche Zergliederung und Gebrauchsweise des persisch-arabischen Astrolabiums; Archiv d. Math. u. Phys. Bd. 45, pag. 312 ff.

[3]) Eine streng mathematische Untersuchung derselben habe ich kürzlich in den Annalen d. Hydrographie u. maritim. Meteorologie (1913, pag. 33 ff.) veröffentlicht unter dem Titel: „Azimutale und gegenazimutale Karten mit gleichabständigen Meridianen".

[4]) al-Asr = Nachmittag. Von Sédillot: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes wird das Asr als „temps de la sieste" bezeichnet (pag. 57).

Besonders um eine zweckmäßige Festsetzung des Aṣr war es den Religionsgelehrten und Astronomen vor allem zu tun, wurde doch dieser Tageszeit eine ganz besondere Bedeutung beigelegt.[1])

Uns interessiert hier vor allem die Frage nach der zeitlichen Festsetzung des Aṣr. Wir können aufgrund eingehender Nachforschungen hierzu folgendes berichten:

1) Bei Mudgea d'Ohsson (a. a. O. pag. 173) heißt es, daß nach dem Imâm Schafiy (764—819) die Gebetsstunde für das Aṣr in jenem Augenblick beginnen müsse, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der Länge des Zeigers wirft; dieser Zeitpunkt des Tages heißt Aṣr-ewel, erste Zeit, und der Moment der doppelten Schattenlänge Aṣr-sany, zweite Zeit.

2) Bei demselben Gewährsmann findet man (ohne Nennung eines Autors) die Stelle: (ibid.) „Das Ssalât Aṣr beginnt im Augenblick, wenn die Sonnenuhr einen Schatten gleich der doppelten Länge ihres Zeigers zeigt, und endigt mit Sonnenuntergang".

3) Nach dem Imâms Mâleh und Hambeleh ist das Aṣr jene Zeit des Nachmittags, die mit dem Augenblick eintritt, in welchem der Horizontalschatten gleich dem Mittagsschatten, vermehrt um die Länge q des Gnomons ist. Es endigt, wenn der Gnomonschatten um die doppelte Höhe ($2\,q$) des Gnomons länger ist, als der Mittagsschatten. Diese Festlegung hat vor allem Eingang in die arabische Astronomie gefunden und wurde auch von Abul Hassan akzeptiert.

4) Nach dem bekannten Koraninterpreten Hanife ist es kein Verdienst, das Aṣr möglichst frühe zu vollziehen; er setzt deshalb seinen Beginn auf jenen Zeitpunkt fest, der mit dem Ende nach 3) identisch ist.[2])

5) Ibn Jûnis lehrt die Bestimmung des Aṣr an der Vertikalsonnenuhr, deren Zifferblatt in der Meridianebene steht. Dies ergibt sich aus Delambre: Histoire de l'astronomie du moyen âge, pag. 131, wo auseinandergesetzt wird, wie Ibn Jûnis einen solchen Verticalcadran berechnet. Delambre sagt wörtlich: „Quand l'ombre sera égale au style, c'est-à-dire vers le quart du jour, j'ignore si les Musulmans avaient quelque devoir religieux à remplir; mais on voit plusieurs vestiges de l'importance qu' ils attachaient à cette égalité, que les gnomonistes modernes négligent entièrement". Ibn Jûnis hat für alle Tage des Jahres den so signalisierten Zeitpunkt berechnet, der, wie wir später sehen werden, das ganze Jahr zwischen 3 und 4 Uhr nachmittags eintritt. Zweifellos ist damit das Aṣr gemeint.

Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß diese Definition des Asrbeginns dieselbe ist, wie die unter 1) erwähnte, da ja jene für eine Sonnenhöhe von weniger als 45° für den Horizontalcadran versagt. Allerdings würde der frühe Eintritt des Aṣr (er liegt immer vor 3 Uhr) ganz im Sinne Mohammeds sein.

Bereits bei Abul Hassan ist die Festsetzung des Aṣr wie sie unter 3) angeführt ist, auf dem Zifferblatt der Bazithah durch eine Kurve veranschaulicht, die man leicht erhält, wenn man alle Tageshyperbeln mit den Kreisen zum Schnitt bringt, die man um den Fußpunkt des Gnomons als Mittelpunkt mit einem jeweiligen Radius: Mittagsschatten + Länge des Gnomons ($m + q$) beschreibt. Doch sind die Hassanschen Aṣr-Linien ganz unrichtig; auch scheint dem Marokkanischen Astronomen die Geometrie derselben vollständig fern gelegen zu haben. Ich habe drei Aṣr-Kurven in das Netz der Stundenlinien und Hyperbeln arabischer Sonnenuhren eingezeichnet und zwar für die Breiten $\varphi = 0°$, $\varphi = -30°$, $\varphi = 45°$. Nachstehend will ich eine analytisch-geometrische Behandlung dieser merkwürdigen geometrischen Orte versuchen, die sich m. W. noch nirgends findet. Die Gleichung der Aṣr-Kurve ist das Resultat der Elimination von δ aus der Gleichung der Tageshyperbel in Verbindung mit derjenigen des eben näher bezeichneten Kreises. Die erstere findet sich als VI) bereits im ersten Kapitel. Wir schreiben sie zur bequemeren Isolierung von δ in etwas veränderter Form und finden für unsere Kurve leicht folgendes Gleichungspaar:

$$x^2\,(sin^2\,\delta - cos^2\,\varphi) + y^2\,.\,sin^2\,\delta + q\,.\,x\,.\,sin\,2\,\varphi = q^2\,(sin^2\,\varphi - sin^2\,\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

$$\varrho = q\,[\,1 + tang\,(\varphi - \delta)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Unter Beachtung, daß $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist, findet man aus I):

$$sin^2\,\delta = \frac{x^2\,cos^2\,\varphi + q^2\,.\,sin^2\,\varphi - q\,x\,sin\,2\,\varphi}{\varrho^2 + q^2}\,,$$

---

[1]) Vergl. hierzu J. Goldzieher: Die Bedeutung des Nachmittags im Islam (Archiv f. Religionswiss. IX. S. 293 ff.

[2]) E. W. Lane: „An account of the manners and customs of the modern Egyptians", London 1871, I. Vol. p. 91).

und aus II)

$$tang^2\,\delta = \frac{sin^2\,\delta}{1-sin^2\,\delta} = \left[\frac{q\,(1+tang\,\varphi)-\varrho}{(\varrho-q)\,tang\,\varphi+q}\right]^2$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\left\{\frac{q\,(1+tang\,\varphi)-\varrho}{(\varrho-q)\,.\,tang\,\varphi+q}\right\}^2 = \frac{(x\,cos\,\varphi - q\,sin\,\varphi)^2}{\varrho^2+q^2-(x\,cos\,\varphi-q\,sin\,\varphi)^2}\,,$$

$$x\,cos\,\varphi - q\,.\,sin\,\varphi = \pm\frac{[\,q\,.\,(1+tang\,\varphi)-\varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho-q)\,tang\,\varphi+q\,]^2+[\,q\,(1+tang\,\varphi)-\varrho\,]^2}}\,,$$

$$\left.\begin{aligned} x &= q\,.\,tang\,\varphi \pm \frac{1}{cos\,\varphi}\cdot\frac{[\,q\,(1+tang\,\varphi)-\varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho-q)^2+q^2\,]\,.\,tang^2\,\varphi+2\,q\,tang\,\varphi\,(1-q)+(\varrho-q)^2+q^2}} \\ y &= \sqrt{\varrho^2-\left\{q\,.\,tang\,\varphi \pm \frac{1}{cos\,\varphi}\cdot\frac{[\,q\,(1+tang\,\varphi)-\varrho\,]\,.\,\sqrt{\varrho^2+q^2}}{\sqrt{[\,(\varrho-q)^2+q^2\,]\,.\,tang^2\,\varphi+2\,q\,tang\,\varphi\,(1-q)+(\varrho-q)^2+q^2}}\right\}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{III)}$$

Das Paar III) enthält eine Parameterdarstellung der Aṣrkurve, und es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß diese Gleichungsform die arabische Gnomonik geradezu beherrscht. Zugleich aber zeigen diese verwickelten Formeln, daß eine allgemeine Diskussion derselben kaum angängig ist. Wir machen deshalb die vereinfachende Annahme, daß $\varphi = 0$ sei, womit wir zum Aṣr übergehen, das für einen am Aequator lebenden Mohammedaner gilt. Damit vereinfachen sich die Formeln III) sofort zu

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\,(q-\varrho)\cdot\sqrt{\frac{\varrho^2+q^2}{q^2+(q-\varrho)^2}} \\ y &= \pm\,q\,.\sqrt{q}\;.\;\sqrt{\frac{2\,\varrho-q}{q^2+(q-\varrho)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

und diese Ausdrücke sind es, die wir weiter behandeln wollen. Man findet aus ihnen:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \pm\,q\cdot\frac{q^2+(q-\varrho)^2+(q-\varrho)\,(2\,\varrho-q)}{(q^2+\varrho^2)\,q^2+\varrho\,(q-\varrho)\left(q^2+(q-\varrho)^2\right)}\cdot\sqrt{\frac{q^2+\varrho^2}{q\,(2\,\varrho-q)}}$$

Hieraus ergibt sich

a) Für wagerechte Tangenten:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 0, \quad \text{d. h.} \quad q^2+(q-\varrho)^2+(q-\varrho)\,(2\,\varrho-q) = 0$$

oder

$$\varrho^2 - q\,.\,\varrho - q^2 = 0\,,$$

$$\varrho = \frac{q}{2} \pm \frac{q}{2}\sqrt{5}\,,$$

und da $\varrho > 0$ sein muß

$$\varrho = \frac{q}{2}\,.\,(1+\sqrt{5})$$

Man hat daher

$$x = \pm\frac{q}{2}$$

$$y = \pm\frac{q}{2}\,.\,\sqrt{2\,(1+\sqrt{5})}$$

als Koordinaten der Berührungspunkte (A und A_1). Tafel I, Fig. 4.

b) Für senkrechte Tangenten hat man die Faktoren des Nenners $= 0$ zu setzen. Das gibt:

$\alpha)$ $2\,\varrho - q = 0,$

$$\varrho = \frac{q}{2}\,,$$

womit man für die Koordinaten der Berührungspunkte findet:

$$x = \pm\frac{q}{2}; \quad y = 0$$

$\beta)$ $\varrho^4 - 3\,q\,\varrho^3 + 3\,q^2\,\varrho^2 - 2\,q^3\,\varrho - q^4 = 0 = A$

Mit $\varrho = q$ findet sich $A = -2\,q^4$,
Mit $\varrho = 2\,q$ aber folgt $A = +\,q^4$,

mithin liegt eine Wurzel ϱ_1 dieser Gleichung zwischen q und $2\,q$, und zwar näher an $2\,q$. Der Ausdruck β) wird auch nahezu befriedigt für

$$\varrho_2 = -\frac{3}{4}\,q\,.$$

Die 2 anderen Wurzeln sind komplex. Den Werten für ϱ_1 und ϱ_2 kommt an der Kurve keine geometrische Bedeutung zu.

c) Für die Wendepunkte gilt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dx} = 0$$

Wenn man den Faktor $\frac{d\varrho}{dx} = 0$ setzt, so muß

$$\left[q^2 + (q-\varrho)^2\right]^{\frac{3}{2}}\cdot(q^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$\varrho_{1,2} = \pm i\,q$$
$$\varrho_{3,4} = q\,(1 \pm i)\,.$$

Diese Werte für ϱ haben also keine geometrische Bedeutung.

Um nun auch $\frac{dy'}{d\varrho}$ zu bilden, schreiben wir

$$y' = \frac{dy}{dx} = (\varrho^2 - \varrho\,q - q^2)\,(\varrho^4 - 3\,\varrho^3 q + 3\,\varrho^2 q^2 - 2\,\varrho\,q^3 - q^4)^{-1}\cdot(\varrho^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\,\varrho - q)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzen wir diese Faktoren der Reihe nach $= u,\ v,\ w,\ z$, so ist nach einer bekannten Differentiationsregel:

$$\frac{dy'}{d\varrho} = u\,.\,v\,.\,w\,.\,\frac{dz}{\delta\varrho} + u\,.\,v\,.\,z\,.\,\frac{dw}{d\varrho} + u\,.\,w\,.\,z\,.\,\frac{dv}{d\varrho} + v\,.\,w\,.\,z\,.\,\frac{du}{d\varrho}$$

In Anwendung auf unsern Fall folgt

$$\begin{aligned}\frac{dy'}{d\varrho} = 0 = {} & -(\varrho^2-\varrho\,q-q^2)\,(2\,\varrho-q)^{-\frac{3}{2}} + \varrho\,(\varrho^2-\varrho\,q-q^2)\,(2\,\varrho-q)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(\varrho^2+q^2)^{-1} \\ & -(\varrho^2-\varrho\,q-q^2)\,(2\,\varrho-q)^{-\frac{1}{2}}\,.\,(\varrho^4-3\,\varrho^3 q+3\,\varrho^2 q^2-2\,\varrho\,q^3-q^4)\,(4\,\varrho^3-9\,\varrho^2 q+6\,\varrho\,q^2-2q^3) \\ & +(2\,\varrho-q)^{\frac{1}{2}}\,(2\,\varrho-q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ V)} \\ = {} & (q^2+\varrho\,q-\varrho^2)\,(\varrho^2+q^2)\,(\varrho^4-3\,\varrho^3 q+3\,\varrho^2 q^2-2\,\varrho\,q^3-q^4) \\ & +\varrho\,(\varrho^2-\varrho\,q-q^2)\,(\varrho^4-3\,\varrho^3 q+3\,\varrho^2 q^2-2\,\varrho\,q^3-q^4) \\ & +(q^4+2\,\varrho\,q^3-3\,\varrho^2 q^2+3\,\varrho^3 q-\varrho^4)\,(2\,\varrho-q)^2 \\ & +(\varrho^2-\varrho\,q-q^2)\,(2\,\varrho-q)\,(\varrho^2+q^2)\end{aligned}$$

Multipliziert man die Klammern aus und ordnet nach Potenzen von ϱ, so findet man folgende Schlußgleichung 8. Grades:

$$\begin{aligned}5\,\varrho^8 - 18\,\varrho^7 q + \varrho^6(19\,q^2-2) - \varrho^5(12\,q^3-7\,q) - \varrho^4(3\,q^4+9\,q^2) + \varrho^3(17\,q^5+7\,q^3) \\ -9\,\varrho^2 q^6 + \varrho\,(3\,q^7-q^5) + 2\,q^8 = 0 \quad \ldots\ldots \text{ Va)}\end{aligned}$$

Für $q = 1$ geht sie in die folgende über

$$5\,\varrho^8 - 18\,\varrho^7 + 17\,\varrho^6 - 5\,\varrho^5 - 12\,\varrho^4 + 24\,\varrho^3 - 9\,\varrho^2 + 2\,\varrho + 2 = 0 = B\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Vb)}$$

Substituiert man in Vb) der Reihe nach für ϱ: 1, 2 und 3, so wird

$$B = +6 \text{ für } \varrho = 1\,, \qquad B = -156 \text{ für } \varrho = 2\,, \qquad B = +4220 \text{ für } \varrho = 3$$

Danach liegen zwischen $\varrho = 1$ und $\varrho = 2$, und zwischen $\varrho = 2$ und $\varrho = 3$ reelle Wendepunkte (B und B_1, C und C_1 der Fig. 4, Tafel I).

Für die Aṣr-Linie am Aequator ist die X-Achse eine Asymptote; denn setzt man in den Gleichungen $\varrho = \infty$, so wird

$$x = \pm \infty \qquad\qquad y = 0$$

Auch für beliebige Breiten wird ϱ immer $= \infty$, wenn

$$-\delta + 90° - \varphi = 90°, \qquad\qquad \delta + \varphi = 0° \text{ ist.}$$

Wir kommen jetzt zur Beantwortung der Frage: Wann tritt das Aṣr ein, und wann endigt es? Bei Beginn ist die Länge des Nachmittagsschattens

$$m = q \left[1 + tang\,(\varphi - \delta) \right],$$

und beim Ende

$$m_1 = q \left[2 + tang\,(\varphi - \delta) \right]$$

Das Schattendreieck gibt im ersten Fall

$$sin\ h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + q^2\left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}},$$

und für den zweiten:

$$sin\, h_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}}$$

Andrerseits ist auch

$$sin\, h = sin\,\delta \,.\, sin\,\varphi + cos\,\delta \,.\, cos\,\varphi \,.\, cos\, s\ ,$$

und um jetzt die Zeiten zu finden, wann das Aṣr beginnt bezw. endigt, hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \left[1 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} &= sin\,\delta \,.\, sin\,\varphi + cos\,\delta \,.\, cos\,\varphi \,.\, cos\, s\ , \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[2 + tang\,(\varphi - \delta)\right]^2}} &= sin\,\delta \,.\, sin\,\varphi + cos\,\delta \,.\, cos\,\varphi \,.\, cos\, s_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ \text{VI)}$$

nach $cos\, s$, bezw. $cos\, s_1$ aufzulösen und diesen so gefundenen Stundenwinkel in Zeit zu verwandeln. Ist die Aṣr-Kurve bereits auf dem Zifferblatt eingezeichnet, so signalisiert der fortlaufende Schatten der Gnomonspitze beim Durchschreiten der Kurve Beginn und Ende dieser merkwürdigen Nachmittagszeit.

Um die Festsetzung des Aṣr nach Schafiy geometrisch darzustellen, hätte man um den Fußpunkt des Gnomons 2 konzentrische Kreise mit den Radien q und $2\,q$ zu schlagen.

Wenden wir uns jetzt noch kurz zur astronomischen Bestimmung der übrigen Gebetszeiten. Es sind, wie schon früher erwähnt, vor allem die 2 Dämmerungszeiten und der Mittag (Zohr). Schon bei Ibn Jûnis findet sich eine ausführliche Bestimmung der Dauer der Dämmerung, (Cap. XVI der Hakimitischen Tafeln) wobei der Depressionswinkel zu Anfang oder am Ende derselben zu 18° angenommen wird. Einen erschöpfenden Traktat über diesen Gegenstand findet man auch bei Abul Hassan (a. a. O., pag. 295 und 296). Wir müssen uns jedoch hier darauf beschränken, für solch' geometrische Studien der Dämmerung, wie sie die Araber trieben, auf Spezialliteratur zu verweisen[1]).

Für das Mittagsgebet kommt die Zeit bis zum Aṣr in Betracht mit Ausnahme der 40 Minuten vor und nach dem Durchgang der Sonne durch den Meridian. Sind diese 40 Minuten $= \frac{2}{3}$ einer Temporärstunde, so läßt sich der Zohr durch eine solche Temporärstundenlinie darstellen, deren Stundenwinkel dann $= \frac{2}{3} \cdot \frac{s_0}{6} = \frac{s_0}{9}$ wäre. Ob der Dohr oder Zohr als „l'instant le plus chaud de la jonrnée" mit dieser Gebetszeit irgendwie zusammenhängt, vermögen wir nicht zu entscheiden.

Wir haben hier deshalb einige Details über die Gebetszeiten vorgebracht, weil man solche in der europäischen Literatur kaum findet. Und doch haben wissenschaftliche Muedsins (Gebetsrufer) darüber viel geschrieben und zweitellos sehr bequeme Methoden ersonnen, mittels deren die arabische Sonnenuhr jahrhundertelang Allah verherrlichen half.

---

[1]) C. Schoy: Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben, Leipzig, 1910, S. 11 ff.

VI. Kapitel.

Die arabischen Vertikaluhren.

Sie alle zeichnen sich durch einen Stylus aus, der senkrecht auf der Uhrebene steht und niemals zum Himmelspol gerichtet ist. Daß bei den Islamiten neben dem Gnomon auch der Polos, das ist ein zur Weltachse paralleler Sonnenweiser, konstruiert wurde, ist eine öfters ausgesprochene aber nicht bewiesene Behauptung.[1]) Wir haben bei der Lektüre derjenigen arabischen Astronomen, deren Schriften in europäische Sprachen übersetzt sind, von Al-Battâni bis auf Abul Hassan keinen einzigen Polos gefunden. Und doch sollen nach R. Wolf[1]) sich abendländische Schriftsteller dahin ausgesprochen haben, daß sie die Kenntnis des Polos den Arabern verdanken.[2]) Wir sind jedoch mit Marie[3]) der Meinung, daß das mohammedanische Volk aus religiösen Gründen nur einseitig Gnomone konstruierte. Bereits im 1. Kapitel dieser Abhandlung erwähnten wir, daß wir uns über diese Frage in unserem Aufsatz: „Die arabische Sonnenuhr in ihrer Bedeutung usw." S. 246 schon eingehend geäußert hätten. Wir haben daselbst ausgeführt, daß ein eigener Beamter am Minareh oder auf dem freien Platz, wo sich eine Bazithah befand, diese unausgesetzt zu bewachen und dann durch Ausruf den Moment bekannt zu geben hatte, wo der Schatten des senkrechten Zeigers auf die Qibla fiel. Dann wies aber auch der Körperschatten eines jeden Gläubigen ihm von selbst die Richtung zur Ka'ba, und die in diesem Falle so einfache Orientierung wird ihm, falls er sich fern von der Moschee im Felde befand, bei der Verrichtung seiner täglichen Gebete von Nutzen gewesen sein. Außerdem würde ein Polos, besonders in sehr niedren Breiten durch seine geringe Neigung zum Horizont unpraktisch geworden sein; ein vertikaler Stab schien dem Muselmann bei der Erfüllung seiner religiösen Pflichten am zweckdienlichsten.

Die Vertikaluhren waren auch dem Altertum nicht unbekannt, und die Araber haben hinsichtlich derselben verschiedene Vorschriften von den Griechen übernommen. Die Gnonomik Al-Battânis weist jedoch nichts derartiges auf, erst bei Ibn Jûnis erfahren wir interessante Details. Alle gnomonischen Fragen an den Vertikaluhren, deren Ebenen in den 4 Kardinalrichtungen liegen, löst er ausschließlich mit Hilfe des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks; seine eigenartige Bestimmung des Aṣr, deren wir bereits gedachten, wird uns nächstdem noch eingehend beschäftigen. Er sagt, daß noch niemand vor ihm von einer solchen Behandlung der Vertikaluhren gesprochen habe. Zuletzt (Cap XXVI seiner Hakimitischen Tafeln, Vgl. Delambre a. a. O. pag. 129 – 131) gibt er noch Vorschriften für einen Vertikalcadran, dessen Deklination (Abweichung vom Meridian) bekannt ist.

Aber erst bei Abul Hassan treffen wir auch in dieser Hinsicht wiederum die nötigen Ausführlichkeit. Er behandelt gleichmäßig

1) Vertikale in der Meridianebene,
2) Solche über der Ost-Westlinie,
3) Von den Kardinalrichtungen um irgend ein Azimut α (Deklination) abweichende Vertikale (französ. Déclinants),
4) Zum Horizont inklinierende und zu den Kardinalrichtungen deklinierende Uhrebenen, wobei jedoch der Gnomon eine dem Horizont parallele Richtung hat.

Diese Gruppe von Sonnenuhren ist auch in modernen wissenschaftlichen Werken über Gnonomik schon behandelt worden. Man findet darüber näheres bei J. J. von Littrow: Gnomonik, 2. Aufl., Wien, 1838 (pag. 54 ff.) und bei J. Mollet: Gnomonique graphique, 7. Aufl., Paris 1884 (pag. 16 ff.). Allein

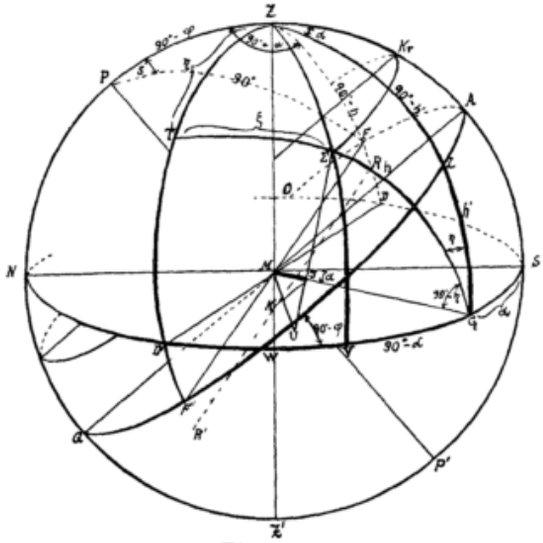
---

[1]) Vergl. dazu: R. Wolf: Geschichte der Astronomie, München, 1877 pag. 143, sowie Handbuch der Astronomie, Zürich 1891–93, II. Bd., pag. 429, und auch: J. Drecker: Gnomone und Sonnenuhren, Aachen, 1909 S. 21.

[2]) Möglich ist ja, daß die Araber den Polos wohl kannten, sowie ihnen schon von Al-Battâni ab die aequinoktialen Stunden bekannt waren, ohne daß sie sich ihrer bedienten. (Vergl. Opus astronom. I, p. 29 und 95) daß auch Ibn Jûnis mit den gleichen Stunden Bescheid wußte, folgt aus J. J. Sédillot: Traité usw. pag. 247. Nach R. Wolf: Geschichte der Astronomie, pag. 5, sollen schon die Chaldäer, Babylonier und Griechen die gleichen Stunden gekannt haben, doch sind seine Angaben ohne Quellennachweis und deshalb fast wertlos.

[3]) Vgl. Marie: Histoire des sciences mathématiques et physiques (II. Vol. pag. 141).

wir vermissen sowohl eine durchsichtige Ableitung als auch — was in diesem Fall nicht unwesentlich ist — eine anschauliche Zeichnung. Wir wollen deshalb im folgenden eine neue Theorie der Vertikaluhren vortragen, die von den angedeuteten Mängeln frei ist. Voraussetzung ist für uns dabei, daß der Zeiger senkrecht auf dem Zifferblatt steht, da wir ja eine arabische Gnomonik schreiben. In allen anderen Werken ist solche Voraussetzung nicht gemacht.



Figur 9.

Zuerst entwickeln wir die Theorie des Déclinants, aus der sich dann die Formeln für die Vertikaluhren über den Kardinalrichtungen sehr einfach ergeben. Wir beziehen uns dabei auf die sehr anschauliche Figur 9, welche Herr Geheimrat Martus in Halensee vor 2 Jahren für den Verfasser zeichnete.[1])

a) Die Abbildung des Himmelsaequators auf dem Zifferblatt.

Das Zifferblatt dieser Uhr ist in der Ebene $D\,Z\,D'\,Z'$ enthalten, welche von der Aequinoctiale um den Winkel α abweicht. Der Gnomon $J\,M$ ist horizontal nach dem Punkte G gerichtet ($\sphericalangle\, S\,M\,G = \alpha$). Die Schnittlinie des Horizontes mit dem Déclinant ist $D\,D'$, über ihr steigt der Durchschnitt mit der Aequatorebene $F\,F'$ ostwärts an zu der Höhe h, welche sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $F\,D\,O$ mittels der Formel

$$tang\, h = sin\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

findet. Das nach Süden gewandte Zifferblatt dieser Sonnenuhr wird von der Sonne beschienen erst t Stunden vor dem Mittagsaugenblicke $\left(t = \frac{s}{15}\right)$. Diese Zeit t ergibt sich aus dem Dreieck $P\,Z\,F$ durch den Sinussatz zu

$$sin\, s = cos\, \alpha \,.\, cos\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Um diese Zeit läuft der Schatten des Zeigers $M\,J = q$ auf $M\,F'$ hin ins Unendliche. Wenn die Sonne das Azimut α hat, also in L steht, kommt der Strahl $L\,M$ herab aus der Höhe h', die aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $L\,G\,W$ hervorgeht durch

$$tang\, h' = cos\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III)}$$

Der Schatten des Gnomons geht in diesem Augenblick senkrecht herab, also rechtwinklig gegen die Wagerechte $D\,D'$ und wird begrenzt von dem durch seine Spitze J gehenden Sonnenstrahl, welcher parallel $L\,M$ ist. Also ist

$$\sphericalangle\, M\,J\,K = \sphericalangle\, L\,M\,J = h' \text{ (Wechselwinkel)}$$

Daher die Schattenlänge

$$M\,K = q \,.\, tang\, h' = q \,.\, cos\, \alpha \,.\, cotg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

In der durch K parallel mit $F\,F'$ gehenden Graden liegen zur Zeit der Aequinoctien die Endpunkte aller Schatten. Soviel zur Ablotung des Himmelsaequators.

b) Abbildung eines beliebigen Sonnenparallels.

Wir lösen jetzt die allgemeinere Aufgabe, die Schattenlinien des Zeigers für eine beliebige Stunde bei beliebiger Sonnendeklination zu finden. Es seien also gegeben: s, δ, φ und α; gesucht sind Schattenrichtung und Schattenlänge, die der Stylus q auf der Uhrebene des Déclinants verzeichnet. Zuerst wollen wir jedoch auch für diesen Fall Eintritt und Dauer der Besonnung eines solchen Zifferblattes berechnen. Wenn das Azimut des Stylus $= \alpha$ ist, so hat die Uhrebene das Azimut $\alpha_1 = 90° - \alpha$ (auf der Ostseite). Die Sonne möge beim Stundenwinkel s $\left(t = \frac{s}{15}\right)$ dies Azimut erreichen. Dann ergibt sich s aus der Gleichung:

$$sin\, \varphi \,.\, cos\, s = cos\, \varphi \,.\, tang\, \delta + sin\, s \,.\, cotg\, \alpha_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

[1]) Seit 9. September 1912 haben wir den Heimgang dieses ausgezeichneten Gelehrten zu beklagen.

Sie ist quadratisch, und die Auflösung nach $\cos s$ liefert die Wurzelwerte

$$\cos s = \frac{\sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, tang\,\delta}{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha} \pm \frac{tang\,\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha - \cos^2\varphi \,.\, tang^2\,\delta}}{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha} \quad \ldots \quad \text{VI),}$$

wenn man in V) α_1 durch $90° - \alpha$, d h. $cotg\,\alpha_1$ durch $tang\,\alpha$ ersetzt. Dabei entspricht das obere Vorzeichen offenbar dem Beginn, das untere dem Ende der Beleuchtung dieses Zifferblattes durch die Sonne. Die Dauer der Besonnung wird gefunden aus der Formel

$$s_1 - s_2 = arc\cos\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \,.\, tang\,\delta - tang\,\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha - \cos^2\varphi \,.\, tang^2\,\delta}}{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha}\right] -$$

$$arc\cos\left[\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi \,.\, tang\,\delta + tang\,\alpha \,.\, \sqrt{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha - \cos^2\varphi \,.\, tang^2\,\delta}}{\sin^2\varphi + tang^2\,\alpha}\right] \quad \ldots \quad \text{VII),}$$

die sich unter Anwendung des Additionstheorems für cyklometrische Funktionen nicht vereinfacht.

Der unseren Voraussetzungen entsprechende Sonnenort sei Σ. Von ihm sendet die Sonne einen Strahl herab, der, die Spitze des Gnomons in J durchsetzend, in U auf das Zifferblatt aufstößt. Nehmen wir $D\,D'$ und $Z\,Z'$ als Koordinatenachsen, und zwar $D\,D'$ als X-Achse, $Z\,Z'$ als Y-Achse, so ist die Richtung, welche die Stundenlinie $M\,U$ mit der Y-Achse bildet, $= \sphericalangle\, U\,M\,Z' = \eta$. Die Ebene der Uhr steht senkrecht auf der Gnomonsrichtung $M\,G$; G ist also Pol des Zifferblattes der Uhr, und alle Großkreisbögen, die man von G nach der Peripherie $Z'\,F'\,D'\,Z$ dieser Ebene zieht, stehen senkrecht auf ihr, wie die Meridiane der Erdkugel auf dem Aequator. Ein solcher Vertikalkreis ziehe von G durch den Sonnenort Σ und treffe die Ebene des Déclinants in T. Dann ist Bogen $T\,Z = \eta$. Die Länge $M\,U$ des Schattens ist abhängig von der Erhebung der Sonne über die Uhrebene. Sie ist = Bogen $T\,\Sigma = \xi$. Diese zwei Größen gilt es also in den bekannten Stücken α, δ, φ und s auszudrücken. Ist z. B. η gefunden, so zieht man auf dem zu konstruierenden Zifferblatt einen Strahl durch M unter eben diesem Winkel η zur Y-Achse und trägt auf ihm die Schattenlänge $M\,U = q.\,cotg\,\xi$ ab, womit ein Punkt U der Schattenkurve gefunden ist. Setzt man für s der Reihe nach 0°, 15°, 30° usw., so repräsentieren die entsprechenden $M\,U$, $M\,U_1$, $M\,U_2$ usw. die Stundenlinien. Der Vertikalkreis vom Zenit durch Σ trifft den Horizont in V, und es werde Bogen $G\,V$ mit $\Delta\,\alpha$ bezeichnet. Aus dem bei T rechtwinkligen sphärischen Dreieck $T\,Z\,\Sigma$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin\xi &= \cos h \,.\, \cos\Delta\,\alpha \\ \cos\xi \,.\, \cos\eta &= \sin h \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{VIII)}$$

Die Anwendung des Sinus- und Kosinussatzes auf das Zenitpolsonne-Dreieck ergibt die 2 weiteren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\delta}{\cos h} &= \frac{\sin(\alpha + \Delta\,\alpha)}{\sin s} \\ \sin h &= \sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{IX)}$$

Zur Berechnung von ξ entwickeln wir erst IX_1):

$$\frac{\cos\delta}{\cos h} = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\Delta\,\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin\Delta\,\alpha}{\sin s} \quad \ldots \quad \text{X)}$$

Aus VIII_1) folgt:

$$\cos\Delta\,\alpha = \frac{\sin\xi}{\cos h}; \qquad \sin\Delta\,\alpha = \frac{\sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\cos h}$$

Setzt man diese Werte in X) rechter Hand ein, so wird

$$\cos\delta = \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\xi + \cos\alpha \,.\, \sqrt{\cos^2 h - \sin^2\xi}}{\sin\, s}$$

Um hieraus $\cos^2 h$ zu eliminieren, benützen wir IX_2), aus welcher man zieht:

$$\cos^2 h = 1 - (\sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s)^2$$

Die Schlußgleichung zur Errechnung der Unbekannten ξ ist demnach diese:

$$\sin s \,.\, \cos\delta = \sin\alpha \,.\, \sin\xi + \cos\alpha \,.\, \sqrt{\cos^2\xi - (\sin\delta \,.\, \sin\varphi + \cos\delta \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos s)^2}$$

Man findet hieraus

$$\sin \xi = \sin \alpha \,.\, \sin s \,.\, \cos \delta \pm \cos \alpha \,.\, \sqrt{1 + (\sin \delta \,.\, \sin \varphi + \cos \delta \,.\, \cos \varphi \,.\, \cos s)^2 - \sin^2 s \,.\, \cos^2 \delta} \quad \text{XI)}$$

Mit der Kenntnis von ξ wird man dann leicht aus VIII_2) η berechnen.

Um auch die Natur der Schattenkurve zu ermitteln, auf welcher U liegt, gehe man von den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi \,.\, \cos s &= \cos \varphi \,.\, tang\, \delta + \sin s \,.\, cotg\, (\alpha + \Delta \alpha) \\ \sin s &= \frac{\sin (\alpha + \Delta \alpha) \,.\, \cos h}{\cos \delta} \\ \cos s &= \frac{\cos \eta \,.\, \cos \xi - \sin \delta \,.\, \sin \varphi}{\cos \delta \,.\, \cos \varphi} \end{aligned}\right\} \quad \text{XII)}$$

aus, deren letzte aus der Verbindung von VIII_2) mit IX_2) hervorgeht. Da die Schattenlinie für alle Stunden des Tages gilt, so ist ihre Gleichung das Resultat der Elimination von s aus XII). Das gibt:

$$\sin \varphi \,.\, \frac{\cos \eta \,.\, \cos \xi - \sin \delta \,.\, \sin \varphi}{\cos \delta \,.\, \cos \varphi} = \cos \varphi \,.\, tang\, \delta + \frac{\sin (\alpha + \Delta \alpha) \,.\, \cos h}{\cos \delta} \,.\, cotg\, (\alpha + \Delta \alpha) \quad \text{XIII)}$$

Aus der Figur liest man ohne Weiteres ab:

$$tang\, \Delta \alpha = \frac{x}{q} \,,$$

woraus sich ergibt

$$\sin \Delta \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + q^2}} \,; \qquad \cos \Delta \alpha = \frac{q}{\sqrt{x^2 + q^2}} \,.$$

Ebenso ersieht man, daß

$$\cos \eta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,; \qquad \cos \xi = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

ist. Aus

$$\cos h = \frac{\sin \xi}{\cos \Delta \alpha}$$

findet sich

$$\cos h = \sqrt{\frac{x^2 + q^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

Entwickelt man jetzt XIII) und ersetzt darin $\sin \Delta \alpha$, $\cos \Delta \alpha$, $\cos \eta$, $\cos \xi$ und $\cos h$ durch die eben gefundenen Werte, so folgt

$$\sin \varphi \,.\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \,.\, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin \delta \,.\, \sin^2 \varphi + \sin \delta \,.\, \cos^2 \varphi + \cos \varphi \left[\frac{q \,.\, \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x \,.\, \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \,.\, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + q^2}}$$

oder vereinfacht

$$\frac{y \,.\, \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} = \sin \delta + \frac{q \,.\, \cos \alpha - x \,.\, \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + q^2}} \,.\, \cos \varphi \quad \text{XIV)}$$

Durch Quadrieren und Beseitigen der Nenner geht XIV) über in die Kegelschnittsgleichung

$$y^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x^2 (\sin^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x \,.\, y \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin 2\varphi - x \,.\, q \,.\, \cos^2 \varphi \,.\, \sin 2\alpha - y \,.\, q \,.\, \cos \alpha \,.\, \sin 2\varphi + q^2 \,.\, (\cos^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0 \quad \text{XV)}$$

Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem, wie aus der analytischen Geometrie bekannt.

$\Delta = (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) \,.\, (\sin^2 \alpha \,.\, \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) - \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \,.\, \sin^2 \alpha \gtrless 0$ ist, ein Ausdruck, der sich auch so schreiben läßt

$$\Delta = \sin^2 \delta \left[\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi \,(1 + \sin^2 \alpha \,.\, coty^2 \varphi) \right]$$

Δ kann, falls α sehr klein ist, > 0 sein unter der Bedingung, daß $\delta > \varphi$ ist. Es ist also die Schattenkurve nur in der heißen Zone eine Ellipse und auch dort nur für sehr schwach deklinierende Vertikaluhren, in der gemäßigten Zone ist sie stets eine Hyperbel.

Auf die Frage nach der Lage der Hauptachsen des durch XV) ausgedrückten Kegelschnitts gibt die Formel

$$tang\, 2\,\psi = \frac{sin\,\alpha\,.\,sin\,2\,\varphi}{sin^2\,\alpha\,.\,cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XVI)}$$

näheren Aufschluß. Dabei bedeutet ψ den Winkel, welchen die Hauptachsen mit unseren eingangs definierten Koordinatenachsen bilden. Man erkennt aus XVI), daß im allgemeinen ein mit der geographischen Breite wachsender Richtungsunterschied zwischen den Hauptachsen und den Koordinatenachsen vorhanden ist. ψ ist $= 0$, wenn entweder

$\varphi = 0$ ist oder
$\alpha = 0$ angenommen wird (Ost-West-Vertikal)

Für $\alpha = 90°$ findet man

$$tang\, 2\,\psi = \frac{sin\,2\,\varphi}{cos^2\,\varphi - sin^2\,\varphi} = \frac{sin\,2\,\varphi}{cos\,2\,\varphi} = tang\, 2\,\varphi\ ,$$

$$\psi = \varphi \text{ (Nord-Süd-Vertikal).}$$

Spezialfälle beim Déclinant:

1) Für $\delta = 0$ erhalten wir die Gleichung des Aequatorbildes. Man findet aus XIV) sofort:

$$y\,.\,sin\,\varphi = q\,.\,cos\,\alpha\,.\,cos\,\varphi - x\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\varphi\ ,$$

d. i. die Gleichung der Geraden $R\,R'$, die also nicht durch den Koordinatenanfangspunkt geht, sondern die Y-Achse im Abstande $M\,K$ von M durchsetzt. Für $x = 0$ folgt

$$y = M\,K = q\,.\,cos\,\alpha\,.\,cotg\,\varphi\ ,$$

ein Resultat, welches wir bereits in IV), freilich auf ganz anderem Wege gefunden hatten.

2) Für $\alpha = 0$ gibt XV:

$$y^2\,(sin^2\,\varphi - sin^2\,\delta) - x^2\,sin^2\,\delta - y\,.\,q\,.\,sin\,2\,\varphi + q^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\delta) = 0 \quad \ldots\ldots \text{XVII)}$$

Uns interessiert hier vor allem der Nord-Süd-Vertikal, für den also

3) $\alpha = 90°$ ist.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung XV) gibt für diesen Fall

$$y^2\,(sin^2\,\varphi - sin^2\,\delta) - x^2\,.\,sin^2\,\delta - y\,.\,q\,.\,sin\,2\,\varphi + q^2\,(cos^2\,\varphi - sin^2\,\delta) = 0 \quad \ldots\ldots \text{XVIII)}$$

Dreht man die Achsen des durch XVIII) dargestellten Kegelschnittes um den Winkel φ, d. h. ersetzt x durch: $y\,.\,sin\,\varphi + x\,.\,cos\,\varphi$ und y durch: $y\,.\,cos\,\varphi - x\,.\,sin\,\varphi$, so erhält man ohne Schwierigkeit die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{q^2\,tang^2\,\delta} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XIX)}$$

deren Halbachsen also $q\,.\,tang\,\delta$ und q sind.

Wie schon erwähnt hatte Ibn Jûnis zur Bestimmung des Aṣr diesen Cadran erwählt. Nach den Festsetzungen des berühmten Astronomen begann das Aṣr bei Gleichheit von Stäbchen- und Schattenlänge. Damit diese Bedingung eintritt, muß $\xi = 45°$ sein. Aus Gleichung XI) folgt dann für den Beginn des Aṣr:

$$sin\,s = \frac{sin\ 45°}{cos\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{XX)}$$

Wie man sofort sieht, ist der Stundenwinkel s von der Breite φ unabhängig; alle Orte unter demselben Meridian haben zu gleicher Zeit Aṣr.

Freilich läßt sich das Ende des Aṣr nicht auf den Eintritt der doppelten Schattenlänge festsetzen, wie dies bei der Bazithah möglich war; denn man fände für diesen Zeitpunkt

$$sin\,s_1 \text{ oder } sin\,(180° - s_1) = \frac{1}{cos\,\delta\,.\,\sqrt{5}}\ ,$$

woraus folgt, daß das Ende des Aṣr entweder vor dessen Beginn erreicht würde, oder aber, da s_1 ein spitzer Winkel ist, erst nach 6 Uhr nachmittags eintreten müßte. Wahrscheinlich dauerte das Aṣr bis Sonnenuntergang.

Delambre (a. a. O. p. 131) teilt uns mit, daß Ibn Jûnis bereits eine Tafel erstellt habe, welche für alle Sonnenlängen des ganzen Jahres von Grad zu Grad den Stundenwinkel s angibt, der dem Beginn des Aṣr entspricht. Nach den von Delambre vorgenommenen Stichproben ist die Tafel äußerst exakt.

Wie Formel XX) lehrt, ist s für $\delta = 0$ gerade 45°, also $t = 3^h$. An allen anderen Tagen ist $t > 3^h$, da der $cos\ (\pm\ \delta) < 1$ ist. Für $\delta = \varepsilon = 23^\circ 30'$ findet sich $t = 3^h\ 20^m$. Der Beginn des Aṣr nach Ibn Jûnis liegt mithin innerhalb eines Interwalls von 20 Zeitminuten nach aequinoktialem Stundenmaß. Die dritte Temporärstundenlinie durchschneidet die Ost-Westlinie (Aequinoktiale, $\delta = 0°$) beim Stundenwinkel $s = 45°$. Für die Breiten des mohammedanischen Reiches ($\varphi = 20° - 30°$) entfernt sich besagte Stundenlinie ungefähr um denselben Betrag von $t = 3^h$, wenn man δ bis $23\,^1/_2°$ wachsen läßt, wie das von Ibn Jûnis inaugurierte Aṣr. Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß Ibn Jûnis mittels der Formel XX) einen das ganze Jahr möglichst konstanten Augenblick in temporärem Zeitmaß fixieren wollte.

Ein Vergleich mit den Aṣr-Linien der verschiedenen Bazithas lehrt, daß das Aṣr nach Ibn Jûnis für $\varphi = 0°$ mit demjenigen der Imâme Mâleh und Hambeleh sich sehr gut deckt; für höhere Breiten dagegen das letztere stets später eintritt als das erstere.

VII. Kapitel.

Konstruktion arabischer Cylinder- und Kugeluhren.

Nach Delambre (a. a. O., pag. 522) findet sich vor Abul Hassan nichts derartiges in der arabischen Gnomonik. Ja, Abul Hassan ist sogar der Meinung, daß niemand vor ihm jemals eine Sonnenuhr auf krummer Oberfläche entworfen habe, aber Delambre entgegnet hierauf: „ . . . il est bien mal informé. ou il ne parle que des Arabes; car sans parler de Bérose, ni d'Aristarque de Samos, nous avons dans Vitruve et Stuart, la preuve qu'on avait fait des cadrans de toute espèce". Zu bemerken ist, daß der Marokkaner sowohl auf die konvexe als konkave Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kugel die Schattenlinien des Gnomons verzeichnet, welcher bei vertikal stehendem Cylinder und Kegel horizontal gerichtet ist, bei der Verzeichnung der Stundenlinien auf der konvexen Außenseite einer Halbkugel auf der Uhrfläche senkrecht steht, niemals aber die Richtung der Weltachse hat. Wir greifen aus den vielen Fällen, welche Abul Hassan behandelt, zwei heraus, nämlich

1) Eine Sonnenuhr auf dem konvexen Mantel eines vertikal stehenden Cylinders zu konstruieren,

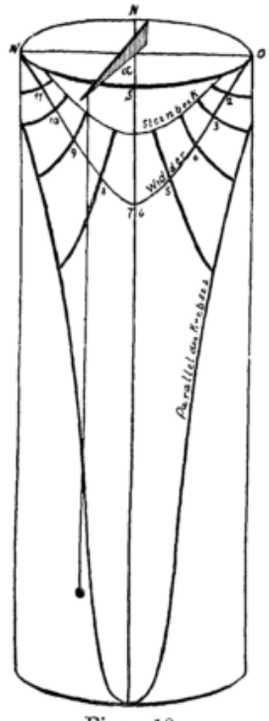
2) Dieselbe Konstruktion auf der Innenfläche einer Halbkugel auszuführen.

Sämtliche anderen Möglichkeiten weisen nur unwesentliche Unterschiede von den zwei vorstehenden Fällen auf.

Zur Konstruktion einer solchen Cylinderuhr, wie sie unter 1) angeführt ist, gibt Hassan folgende merkwürdigen Vorschriften:

Man entnehme für den Wendekreis des Krebses die Länge der Vertikalschatten, die man bei gegebener Ortsbreite und Gnomonshöhe — diese letztere betrug immer 12 Finger — berechnet hat, einer Tabelle und trage sie vom oberen Rande des Cylinders auf dessen Mantellinien nach unten ab. Zuvor aber sind die Deckkreise des Cylinders in 360 Grade eingeteilt. Die Zählung dieser Grade beginnt beim Südpunkt, so daß die fortschreitende Gradzahl gleichzeitig mit dem Azimut (α) der Sonne indentisch ist. Durch Verbindung gleicher Azimute erhält man auf dem Cylinder die eben besagten Mantellinien. Man hat also zu einem gegebenen Stundenwinkel erst das Azimut der Sonne zu bestimmen, vielmehr aus Azimuttabellen zu entnehmen und die Vertikalschattenlänge dem ihr entsprechenden Azimut zuzuordnen. Tut man dies für alle 12 (temporären) Stunden des Tages, so erhält man in der Verbindung aller Schattenenden auf dem Cylinderumfang das Abbild des Wendekreises des Krebses. Auf ganz dieselbe Weise ermittelt man das Bild des Steinbocks und des Aequators, welches natürlich keine gerade Linie sein kann.

Die Abbildungen dieser 3 Kugelkreise auf den Cylindermantel bestehen zunächst aus 12 Stundenmarken. Eine Stundenlinie ist die Verbindung aller aequihorären Punkte der Projektionen sämtlicher



Figur 10.

Parallelkreise. Wie ist nun eine solche Stundenlinie auf der krummen Oberfläche konstruiert? Auf diese Frage ist bei Hassan nicht näher eingegangen. Bei ihm liegen auch nur 3 zu verbindende Punkte vor. Er hat selbsverständlich das Netz der Schattenlinien auf dem abgerollten Cylindermantel gezeichnet, und in seiner diesbezüglichen Figur erscheinen die temporären Stundenlinien als Gerade.

Zur Benützung dieser Uhr bringt man auf der Cylinderachse über der Deckfläche einen beweglichen Gnomon an, wie ihn Figur 10 zeigt. Er ragt um die Länge von 12 Fingern über den Rand der Deckfläche hervor. Ein Bleilot ist an dem horizontalen Zeiger so befestigt, daß es den Mantel des Cylinders entweder tangiert oder doch nur einen sehr geringen Abstand von demselben hat. Will man nun die Zeit wissen, so dreht man zunächst den Zeiger der Uhr so weit, bis sein Schatten mit dem Faden des Bleilotes zusammenfällt. Die Stundenmarke, auf welche das Ende des Schattens fällt, gibt die augenblickliche Zeit an, während man aus der Größe der Drehung gleichzeitig das Azimut der Sonne an dem genau nach den Kardinalrichtungen orientierten Cylinder ablesen kann.

Es ist von Interesse, nach der Gleichung der Schattenkurven auf den Cylindermantel zu fragen, welche die Hassansche Konstruktion entstehen läßt. Wir nehmen (s. Fig. 10) α als Polarwinkel, Z sei die Vertikale im Raum, die wir von der oberen Deckfläche aus nehmen wollen. Dann soll z in α, δ und φ ausgedrückt werden. Hält man δ und φ konstant, so bleibt die eine unabhängige Variable α. Das liefert die Gleichung für die Abbildung eines Sonnenparallels auf den Zylindermantel. Durch Variation von δ erhält man das Netz aller Schattenlinien. Zunächst ist

$$z = q \,.\, tang\, h \quad \text{I)}$$

$$-\sin\varphi \,.\, \cos\alpha = \cos\varphi \,.\, tang\, h - \sin\alpha \,.\, cotg\, s \quad \text{II)}$$

$$\sin\varphi \,.\, \cos s = \cos\varphi \,.\, tang\,\delta + \sin s \,.\, cotg\,\alpha \quad \text{III)}$$

Aus II) folgt

$$cotg\, s = \frac{\sin\varphi \,.\, \cos\alpha + \cos\varphi \,.\, tang\, h}{\sin\alpha}$$

Setzt man diesen Wert für $cotg\, s$ in III) ein, nachdem man erst mit $\sin s$ links und rechts durchdividiert hat, so findet sich die folgende quadratische Gleichung in $tang\, h$:

$$\sin\varphi \,.\, \frac{\cos\varphi \,.\, tang\, h + \sin\varphi \,.\, \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\varphi \,.\, tang\,\delta \,.\, \sqrt{1 + \frac{(\cos\varphi \,.\, tung\, h + \sin\varphi \;\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} + cotg\,\alpha$$

Die Auflösung ergibt

$$tang\, h = -\frac{\cos\alpha \,.\, \sin 2\varphi \,.\, tang^2\,\delta}{\cos^2\varphi\, tang^2\,\delta - \sin^2\varphi} \pm \cos\alpha\, \frac{\sqrt{(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\, tang^2\,\delta)(\cos^2\varphi\, tang^2\,\delta - \sin^2\varphi) - \sin^2 2\varphi\, tang^2\,\delta}}{\cos^2\varphi \,.\, tang^2\,\delta - \sin^2\varphi}$$

Hierbei hat nur das positive Vorzeichen der Wurzel praktische Bedeutung. Dieser Ausdruck für $tang\, h$ ist in I) einzusetzen, womit die Gleichung der räumlichen Schattenlinie auf dem Cylindermantel gefunden ist.

Was nun endlich die Kugeluhren anbelangt, die uns der marokkanische Gelehrte vorführt, so sind sie völlig identisch mit den sog. Hemicyklien und Skaphen der Alten, die nach Bilfinger[1]) bekanntlich den Zweck hatten, „die auffangende Fläche zum genauen Gegenbilde der Himmelshemisphäre, die Schattenwege zu genauen Abbildern der Sonnenwege zu machen. Es ist in Anbetracht dieser völligen Übereinstimmung zwischen antiken und arabischen Kugeluhren nicht anders denkbar, als daß Abul Hassan irgend welche griechischen Vorlagen gehabt haben muß.

---

[1]) Bilfinger: Die Zeitmesser der antiken Völker, Stuttgart, 1886, pag 27.

Diesen einfachen Grundgedanken bringt auch Hassan dadurch zum Ausdruck, daß er sich eine hohle Halbkugel erstellt, die im Nadirpunkte ihre feste Unterlage berührt, so daß ihr Grenzkreis mit dem Horizont des Ortes, für den die Uhr angefertigt werden soll, zusammenfällt. Vom Nadirpunkt steigt senkrecht der Gnomon auf, dessen Länge gleich dem Radius der Halbkugel ist. Denkt man sich jetzt die Halbkugel zur Vollkugel ergänzt, so kann man sie als Himmelsglobus auffassen und die Wendekreise mit dem Aequator einzeichnen, so wie diese 3 Kreise nach der gegebenen Ortsbreite liegen müssen. Läßt man dann alle Sonnenstrahlen, die das Stabende durchsetzen, bis auf die konkave Innenfläche der Halbkugel fallen, so erkennt man sofort, daß der Tagbogen der Sonne im Wendekreis des Krebses den Nachtbogen im Steinbock zum Abbild hat und umgekehrt. Diese Kreisbögen sind aber egal. Die zwei Schattenwege, Krebs und Steinbock, werden hierauf in 12 gleiche Teile geteilt und die einzelnen Teilpunkte durch Bogen größter Kreise miteinander verbunden. Dies sind die Stundenlinien. Wie man sieht, sind sie ebensowenig exakt, als jene Geraden, welche an der Bazithah aequihoräre Punkte der Krebs- und Steinbockshyperbel verbinden.

Wenn wir uns auf das sphärische Koordinatensystem Azimut-Höhe beziehen, ist es leicht, die Gleichung einer Stundenlinie auf der Kugeluhr anzugeben. Aus

$$-\sin\varphi \,.\, \cos\alpha = \cos\varphi \,.\, \operatorname{tang} h - \sin\alpha \,.\, \operatorname{coty} s$$

folgt

$$\operatorname{tang} h = \frac{\sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\frac{m}{n}\,.\, s_0 - \sin\varphi \,.\, \cos\alpha}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Bildet man aus den im III. Kapitel, pag. 19 angegebenen Ausdrücken für $\sin\frac{m}{n}s_0$ und $\cos\frac{m}{n}s_0$ durch Division $\operatorname{coty}\frac{m}{n}s_0$, und setzt den so erhaltenen Quotienten für $\operatorname{coty}\frac{m}{n}s_0$ in die Gleichung IV) ein, so hat man schon die gewünschte Beziehung α, h, δ und φ, welche wir aber wegen ihrer Kompliciertheit hier nicht anschreiben wollen.

Indem L. Am. Sédillot in seinen schon erwähnten Mémoiren, die er den Instrumenten der arabischen Astronomie widmet, besonders die Kugeluhren studierte, fand er, daß sie außer den temporären Stundenlinien auch noch aufweisen

1) Die Linie des Dohr,
2) Die Linie des Aṣr,
3) Die Linie des Morgenrots (Fadschr),
4) Die Linie der Abenddämmerung (Maghrib).

Die Linie des wahren Mittags heißt Zaual. Wir erwähnen noch, daß Abul Hassan auf jeder Art von Sonnenuhr das Aṣr angibt, natürlich so, daß sein Eintritt und Ende mit dem der Bazithah zusammenfällt. Alle Uhren zeigen daher zur gleichen Zeit Aṣr.

Schlußbemerkung.

Zum Abschluß unserer Studie über die Gnomonik der Araber möchten wir die wichtigsten Ergebnisse derselben in Kürze folgendermaßen formulieren:

1) Die Entwicklung der arabischen Gnomonik ist vorzüglich durch religiöse Gebräuche bestimmt.
2) Der Zeiger oder Gnomon der Uhrfläche ist entweder horizontal oder vertikal, niemals aber zum Pol gerichtet.
3) In der Behandlung gnomonischer Fragen spielt das graphisch-konstruktive Element eine Hauptrolle.
4) Überträgt man die geometrischen Methoden der arabischen Astronomen in die Sprache der modernen Mathematik, so treten verwickelte Formeln auf, für die sich jedoch Parameterdarstellungen finden lassen.

Lebenslauf.

Ich, Dr.-Ing. Carl Schoy, bin geboren am 7. April 1877 zu Bittelschies (Hohenzollern) als Sohn des Lehrers Gustav Schoy und seiner Ehefrau Emma, geb. Uetz, bin katholischer Konfession und preußischer Staatsangehöriger. 1901 erwarb ich mir das Reifezeugnis am Realgymnasium zu Karlsruhe und studierte dann an den Hochschulen Münchens und der Universität Heidelberg Astronomie, Mathematik, Physik und Erdkunde. 1904 und 1905 bestand ich den 1. und 2. Abschnitt der Prüfung für das Lehramt in Mathematik und Physik an den humanistischen und technischen Schulen Bayerns, 1906 die Prüfung für das höhere Schulamt Preußens in Bonn. Ich war folgeweise Lehramtspraktikant in Buchen, Baden-Baden und Mannheim, von 1908/09 wissenschaftlicher Hilfslehrer in Mülheim (Ruhr). Seit 1. April 1909 bin ich Oberlehrer am städt Gymnasium zu Essen. 1911 erwarb ich mir an der K. Technischen Hochschule zu München die Würde eines Doktors der Technischen Wissenschaften (Doktoringenieur) aufgrund der Dissertation: „Die geschichtliche Entwicklung der Polhöhenbestimmungen bei den ältern Völkern“. Außer einer Anzahl kleinerer Abhandlungen astronomischen und naturphilosophischen Inhalts schrieb ich: „Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben“, (Leipzig, Teubner, 1909) „Beiträge zur Nautischen Astronomie“, (Aus dem Archiv d. Deutschen Seewarte 1910). „Azimutale und gegenazimutale Karten“, (Annalen d. Hydrographie u. maritim. Meteorologie, 1913). „Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie“, (Hamburg, Henri Grand, 1913). Meinen Heidelberger Lehrern Hettner, Koenigsberger, Köhler, Quincke und Wolf möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen, Herrn Geheimrat Wolf insbesondere für die freundliche Durchsicht dieser Arbeit.

C.Schoy:

Arabische Gnomonik

Fig. 2

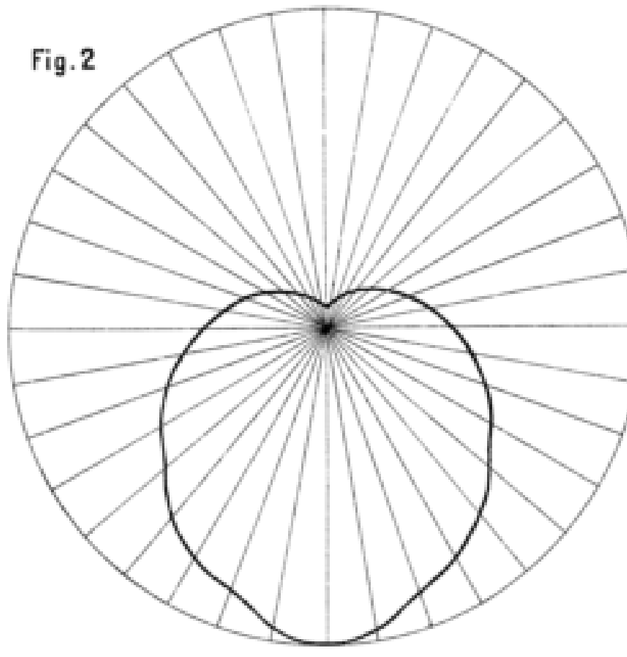


Fig. 1

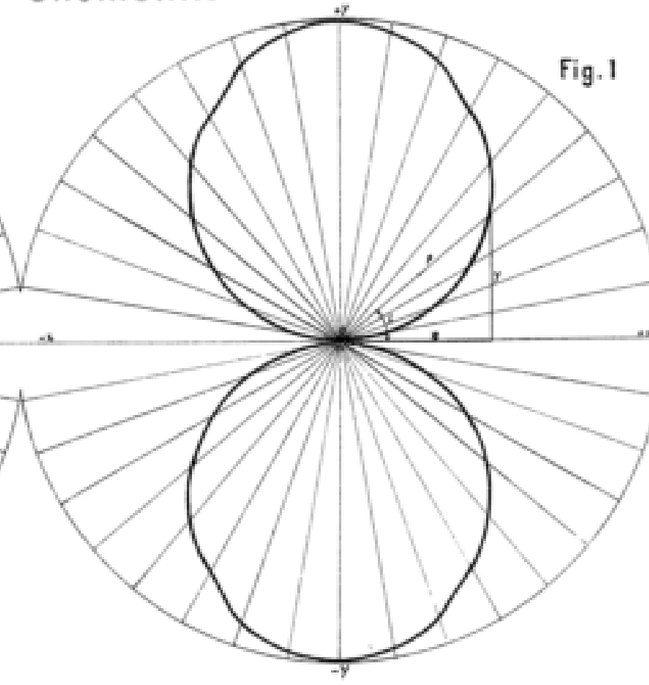


Fig. 3

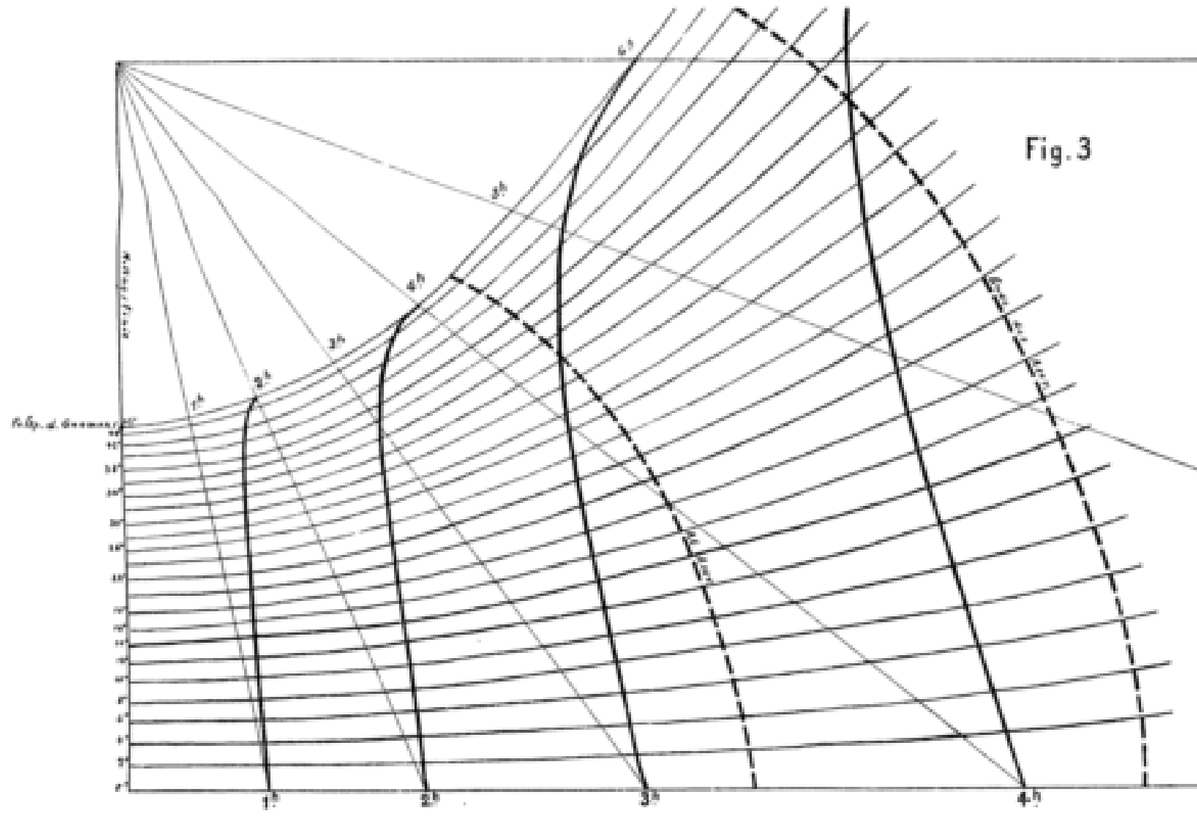
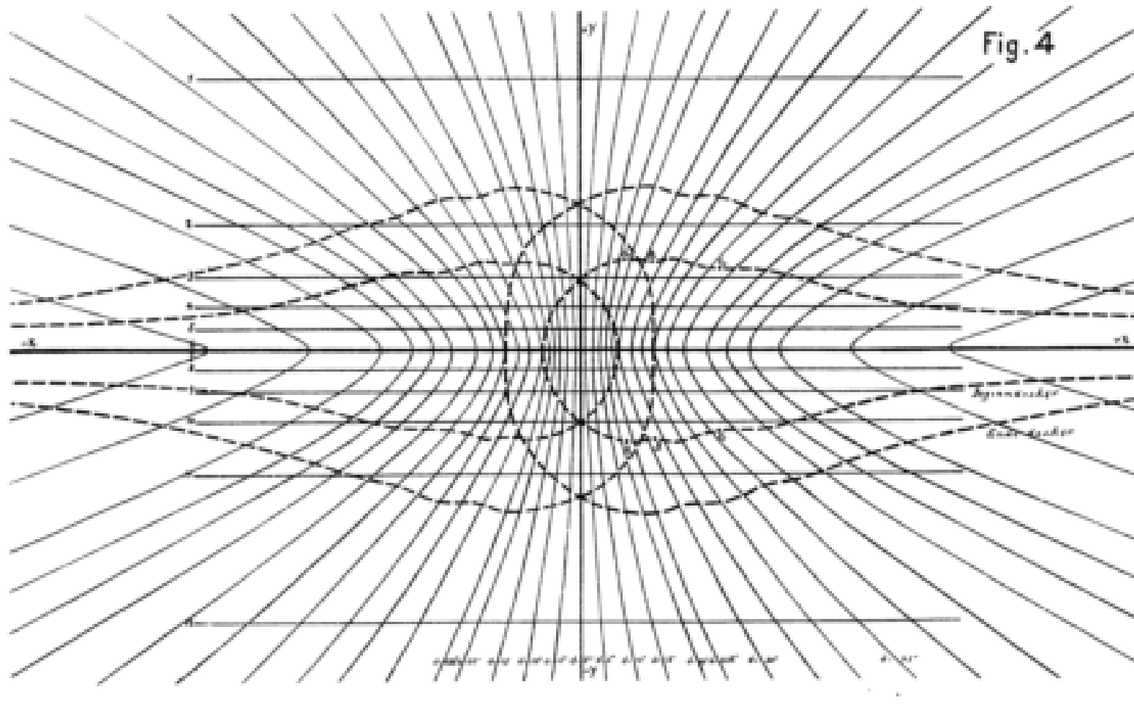
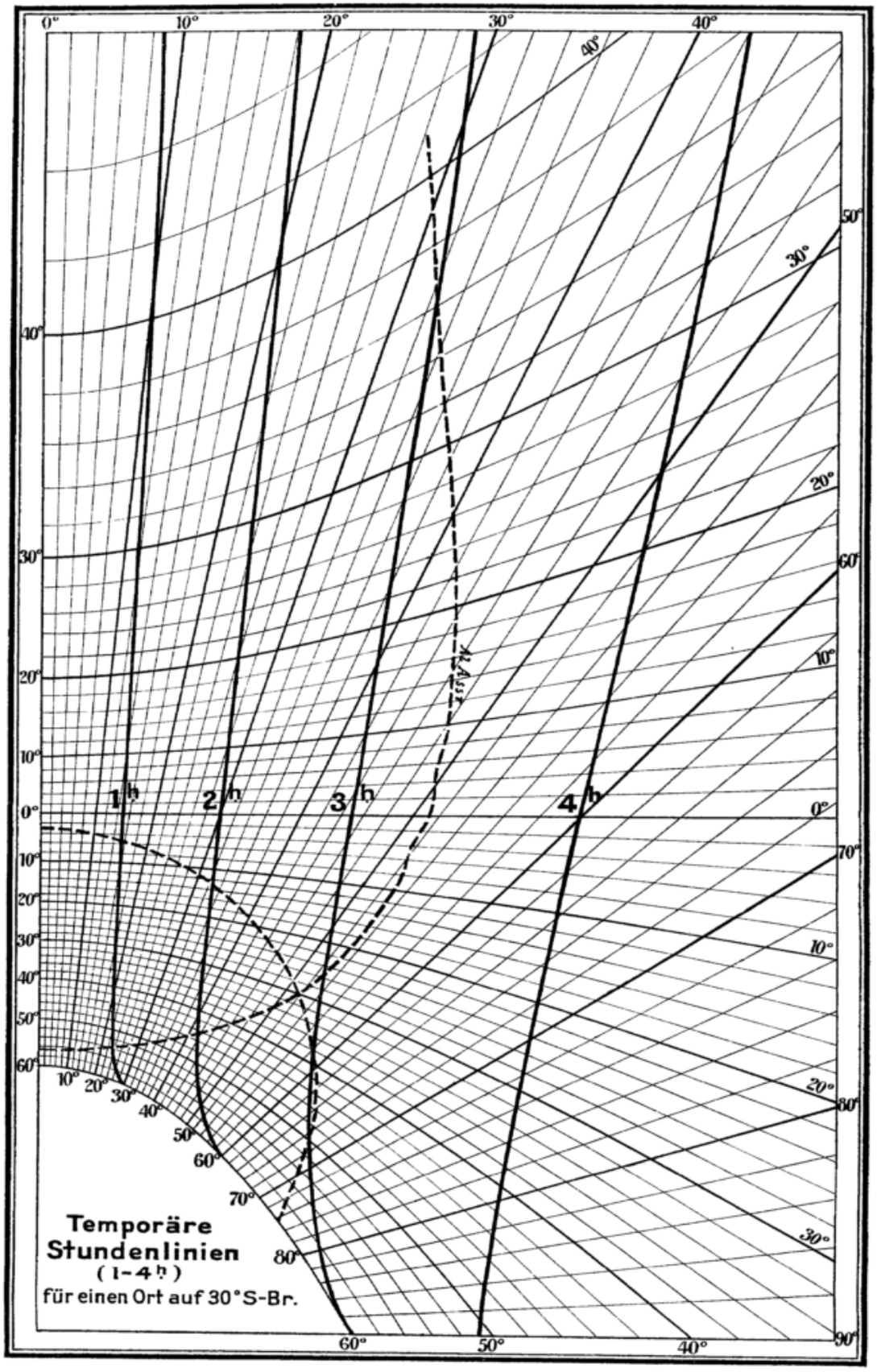


Fig. 4



Tafel I

C. Schoy :

Arabische Gnomonik