Mathematik und philosophische Propaedeutik

Wernicke, Alexander

Leipzig, 1912

Dritter Abschnitt. Folgerungen für die Schule

urn:nbn:at:at-ubi:2-8838

In bezug auf die in ihrer Weise recht vollkommenen propädeutischen Methoden der Volksschule mit ihrer naiven Anschaulichkeit findet man in den entsprechenden Abhandlungen von Herrn Lietzmann gute Auskunft.[1])

Dritter Abschnitt.

Folgerungen für die Schule.

1. Allgemeine Gesichtspunkte.

Wir haben uns bemüht, unsere grundlegenden Betrachtungen überall durch das Bedürfnis der Schule zu begrenzen, und es erhebt sich nun die Frage, was von ihnen in der Schule selbst verwendet werden soll. Unsere Antwort darauf lautet: Alles wesentliche, aber natürlich in geeigneter Form.

Gelegentliche Bemerkungen und kleinere Ausführungen haben von Anfang an auf die „Philosophie im Unterricht" vorzubereiten, wofür dann in der Prima weiter zu wirken ist.

Bewußt und unbewußt ist in dieser Hinsicht schon reichlich in unsern Schulen gearbeitet worden, denn alles, was dem Ideale der Einheit des Wissens dient, zielt eben auf Philosophie.

Dabei handelt es sich lediglich darum, Anregungen zu geben und dem philosophischen Bedürfnisse der Schüler in angemessener Weise entgegenzukommen, bzw. dieses zu wecken und zu leiten, was freilich schließlich immer Sache der Persönlichkeit ist. Es soll Samen ausgestreut werden, von dem hoffentlich hier und da ein Korn aufgeht!

In diesem Sinne[2]) mag man auch das folgende aufnehmen, das wir der Sachlage entsprechend an die Lehrpläne der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte anknüpfen, denn diese sollen und wollen ja der weiteren Reform dienen. Diese Lehrpläne bezeichnen als abschließendes Ziel des mathematischen Schulunterrichts:

1. einen wissenschaftlichen Überblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffes,

2. eine gewisse Fähigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwendung für die Durchführung von Einzelaufgaben,

3. endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

1) Vgl. Nr. 1, Bd. V, Heft 1 und 2 und dazu auch Nr. 151 a.

2) Prof. von Brockdorff (Kiel) sagt in einer Besprechung meines letzten Kantbuches: „Bei W. wird auf Ausbildung in den Grundbegriffen der Geschichte der Philosophie Wert gelegt. Er entläßt keine Abiturienten, die nicht von Descartes, Locke, Leibniz usw. bei ihm gehört hätten. So haben die jungen Leute aufs neue Gelegenheit erhalten, was sie auf der Schule gelernt haben, zu erweitern und zu klären. An Apperzeptionshilfen fehlt es ihnen nicht". Das trifft in der Tat die Sache, was meine Absichten anlangt.

Während Nr. 2 dem selbstverständlich stets in erste Linie zu stellenden „Können" gilt, fordert Nr. 1 die Darstellung der Schulmathematik als System und Nr. 3 ihre Bewertung, wobei man unterscheiden kann

a) den selbständigen Wert der Mathematik als Wissenschaft,

b) ihren Wert als Mittel der Naturerkenntnis (Physik, Chemie, Statistik usw.).

c) ihren Wert als Mittel für die Naturbeherrschung (Technik, Versicherungswesen usw.).

Zu Nr. 1 und 3 ist außerdem die für Oberprima gemachte Bemerkung hervorzuheben: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte".

Was den selbständigen Wert der Mathematik anbelangt, so wird für die Schule immer Schillers Epigramm „Archimedes und der Schüler" maßgebend sein: Die Mathematik war eine göttliche Kunst, ehe sie die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützte, und so wird es immer bleiben. Zur Erläuterung ist dazu u. a. vielleicht heranzuziehen die Rede[1]) von Herrn Pringsheim „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik", wo es z. B. heißt: „Wir sehen in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Sympton einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu begründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher als an sich wertvoll." Diese Auffassung bestätigt auch Herr Voß[2]), der dabei u. a. auf Jacobi hinweist. Gegenüber Fourier, welcher die Nützlichkeit der Mathematik in den Vordergrund gestellt hatte, betont dieser, „que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain". Mit Recht, aber zu dieser Ehre gehört auch die Naturerkenntnis und die Naturbeherrschung, und zwar in dem Sinne, daß wir in den Riesenwerken unserer modernen Technik gewissermaßen überall den erkennenden und beherrschenden Menschengeist leibhaftig vor uns sehen, in seiner genialen Intuition und in seiner strengen wissenschaftlichen Arbeit. Demgemäß sind auch auf der Schule die Anwendungen zu charakterisieren, und ich möchte in deren Betonung nicht mit Herrn Lietzmann[3]) nur ein „utilitaristisches" Prinzip sehen. Daß übrigens oft mehr Geist dazu gehört, das Empirische zu bewältigen, als das Reine, was eigentlich a priori klar ist, kann auch den Schülern an Beispielen deutlich gezeigt werden.

Dabei ist zur Erkenntnis zu bringen, daß die Reihenfolge Arithmetik (Zahl), Geometrie (Raum), Phoronomie (Zeit) und Dynamik (Masse) eine fortschreitende Eroberung der Wirklichkeit bedeutet, deren Ziel es ist,

1) Vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13 S. 357.
2) Vgl. Nr. 161a S. 93.
3) Vgl. Nr. 146 S. 248.

eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen.

Man denke sich alles Mathematische fort aus der menschlichen Kultur, namentlich auch schon die Zahlen, und frage: Was bleibt dann? Gewiß noch vieles, aber das dem Kosmos zugewandte Ideal, von dem Herr Seith (vgl. S. 6) spricht, wäre sicher dahin.

Daß die Grundbegriffe der Mathematik durch Logisierung entstehen und daß die Systeme ihrer Beziehungen auf den verschiedenen Gebieten die feste Grundlage bilden für weitere deduktive Arbeit, die durch Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit gekennzeichnet ist, muß zur Einsicht gebracht werden, aber auch, daß die Anwendbarkeit der Mathematik damit zu einem besonderen Probleme wird. Wie hier durch Beobachtung, Versuch usw. in physischer und in psychischer Hinsicht auf induktiv-deduktivem Wege der Welt der Erscheinungen von Fall zu Fall die Prämissen abgerungen werden, welche die Anknüpfung mathematischer Arbeit bedingen, nicht bloß auf dem Gebiete der Physik, sondern auch auf dem der Sozialwissenschaften (Wahrscheinlichkeit usw.), ist auch vom Mathematiker wenigstens im allgemeinen zu charakterisieren, ebenso, wie solchen Prämissen die Aufstellung zweckmäßiger Axiome anzupassen ist behufs mathematischer Behandlung eines bestimmten Gebietes von Erscheinungen.

Dem Schüler muß schließlich zum Bewußtsein kommen, daß die Schulmathematik ein wissenschaftliches, auf Axiomen ruhendes System darstellt, und daß er ein solches nur in der Mathematik und in den auf ihr beruhenden Anwendungsgebieten kennen lernen kann. Dabei wird aber auch darauf hinzuweisen sein, daß die Wissenschaft selbst viel weiter reicht, als die Mathematik, daß sich aber andere Disziplinen auf der Schule nicht in strenger Wissenschaftlichkeit behandeln lassen und daß ihre Werte zum Teil auf anderen Gebieten liegen. Erst die Einheit von allem bringt das wahre Ideal.

Den Gegenstand der Mathematik bilden stets Mannigfaltigkeiten, und die hauptsächlichen Arbeitsmittel der Mathematik sind Reihung, Paarung und Klassenbildung. Während der Übergang von der unstetigen zur stetigen Mannigfaltigkeit in der Arithmetik durch die Theorie des Irrationalen bewirkt werden muß, gibt die logisierte Anschauung der Bewegung uns ein bestimmtes inneres Bild von dieser Stetigkeit, und durch die Verschmelzung dieser beiden Stetigkeitsarten wird uns erst das Geschehen, das durch die Zahl im Maße gefesselt wird, verständlich.

Die Übertragungs- oder Verbindungsprinzipien für die einzelnen Zweige der Mathematik, so die graphische Darstellung der gemeinen Komplexzahlen in der Ebene und die analytische Geometrie von Descartes zeigen, daß es sich im Grunde überall um denselben Gegenstand handelt, nämlich um Mannigfaltigkeiten, deren Gebilde schließlich nicht bloß in „idealfunktionalen“, sondern auch in „realfunktionalen“ (Dynamik) Zusammenhang gebracht werden.

Dabei spielt das Infinitesimal-Prinzip eine hervorragende Rolle, weil die gesetzlichen Beziehungen der räumlich-zeitlichen Welt zunächst oft nur für „Elemente" ausgesprochen werden können, so daß erst aus den Elementargesetzen die Integralgesetze für das „Gegebene" erwachsen, und dazu ist Grenzbegriff und Grenzmethode erforderlich.

Auf alles dieses wird man zusammenfassend in der Prima von Fall zu Fall hinweisen können, aber natürlich nur, wenn Beispiele vorgearbeitet haben oder neu dazu herangezogen werden. Neben anderen halte ich dazu auch einfache Beispiele aus der technischen Mechanik für sehr geeignet.

Hat man etwa festgestellt, daß die Schüler in der Nachbarschaft und auf Reisen beobachtet haben, daß bestimmte Konstruktionen (Parabelträger) bei Eisenbahnbrücken immer wiederkehren, so wird man zunächst die Vorstellung des Parabelträgers durch Zeichnung usw. mit wenigen Strichen klären. Daran knüpft sich die Bemerkung, daß die Parabel die Seilkurve oder Stützlinie für gleichmäßige Belastung der Horizontalen (γ) ist. Die weitere Behandlung gibt eine einfache Aufgabe (vgl. Fig. 1). Die drei Gleichgewichtsbedingungen liefern für das Seilstück zwischen O und P, falls 0 als Drehpunkt gewählt wird:

1) $$H_1 = H_2,$$

2) $$V = x\gamma,$$

3) $$+H_1 y - Vx + (x\gamma)\frac{x}{2} = 0.$$

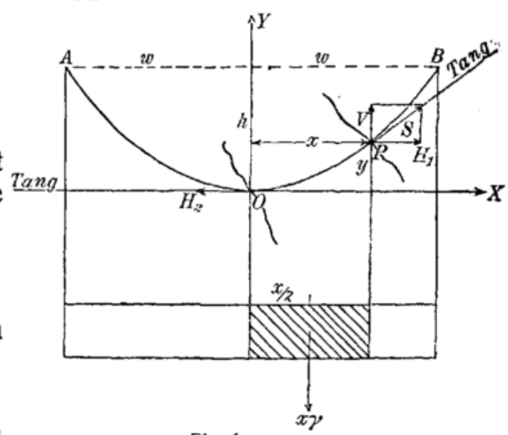

Fig. 1.

Gleichung 3) liefert in Verbindung mit Gleichung 1) und Gleichung 2) ohne weiteres die Parabel

$$x^2 = \frac{2H}{\gamma} \cdot y.$$

Für $x = \omega$ und $y = h$ ergibt sich noch

$$\frac{2H}{\gamma} = \frac{\omega^2}{h},$$

so daß die „mechanischen" Größen hier „geometrisch" ersetzbar sind. Eine Ausführung in Zahlen, am besten in Anlehnung an eine ausgeführte Konstruktion, kann die Übung abschließen.

An solchen Beispielen läßt sich die Logisierung der Vorstellungen der räumlich-zeitlichen Welt, der Unterschied der natürlichen Geometrie und der strengen Geometrie usw. klar machen, ebenso die Stufenfolge „reine Mathematik, Naturerkenntnis, Naturbeherrschung".

Als zweites Beispiel greife ich die Behandlung des Erddrucks heraus. Hier hat man Gelegenheit, darauf hinzuweisen, welche Überlegungen notwendig waren, um das so vielgestaltige und veränderliche Ding, das wir Sand oder Erde nennen, überhaupt dem Kalkül zu unterwerfen. Man betrachtet (vgl. Fig. 2 u. 3) alle möglichen ebenen Bruchflächen durch

B, um die gefährliche (ω) zu bestimmen, und konstruiert tatsächlich für diese, dem Prisma *ABC* vom größten Drucke entsprechend. Bei horizontal abgeglichener Erde (vgl. Fig. 2) ist die Maximalbestimmung für die Schule etwas schwierig, bei natürlicher Böschung (vgl. Fig. 3) aber sogar ohne jede Differentiation möglich. Der künstliche Eingriff, der in der horizontalen Abgleichung liegt, rächt sich durch die Schwierigkeit des Kalküls.

Die Behandlung bestimmter optischer Erscheinungen gemäß dem Prinzipe der schnellsten Ankunft gibt Veranlassung zu zwei einfachen Aufgaben aus dem Gebiete der Maxima und Minima. Man findet so Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz. Dies gibt Gelegenheit, die teleologische Naturauffassung des 18. Jahrhunderts zu berühren und sie zu werten.

Die arithmetische Darstellung der Zahl π mit Hilfe der Reihe von Leibniz zeigt eine bestimmte, sehr begründete Arithmetisierung des ursprünglich geometrisch Erfaßten, wobei man auch auf die alle Versuche einer Kreisquadratur abschließende Arbeit von Lindemann (1882) hinweisen kann. Ebenso ist die Tatsache hervorzuheben, daß Sinus und Kosinus in der Darstellung durch Reihen in die Arithmetik eintreten. Die Behandlung der Kreisteilung, bei der man sich in Braunschweig, der Geburtsstadt von Gauß, wenigstens sicher das Siebzehneck[1]) nicht entgehen lassen wird, gibt weiter Gelegenheit zu einer Fülle von Bemerkungen im Sinne unserer Darlegungen.

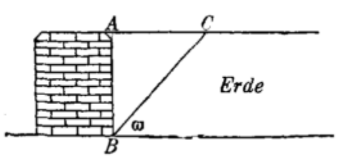

Fig. 2.

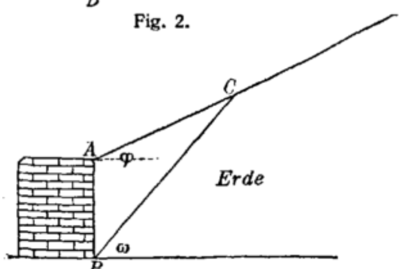

Fig. 3.

Sind dem Schüler die Beziehungen zwischen Stammfunktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ an einfachen Beispielen geläufig geworden, so gibt die Zusammenfassung der drei ursprünglich experimentell abgeleiteten Gleichungen des freien Falles oder des vertikalen Wurfes Gelegenheit, auf den Unterschied der induktiv-deduktiven und der rein deduktiven Methode hinzuweisen. Dabei wird man auch die geistige Arbeit Galileis würdigen können. Er legte dem Experimente für die Herleitung der Gleichung $s = f(t)$ ursprünglich die „Idee" (vgl. S. 58) $v = f'(t) = k \cdot s$ statt der sich als richtig erweisenden $v = f'(t) = k \cdot t$ zu Grunde. Auch er hatte ebensowenig wie die griechischen Mathematiker und Physiker brauchbare Apparate. Er benutzte aber die Hebelwage, welche sich schon infolge des

1) Eine direkte Zerlegung der Gleichung des Siebzehnecks in eine Gleichung ersten Grades und in ein System von quadratischen Gleichungen findet man in Nr. 167 f S. 92.

Geldverkehrs der Kreuzzüge außerordentlich verfeinert hatte, zum Messen der Zeit, indem er den Zeiten entsprechende Flüssigkeitsmengen bei gleichförmigem Ausflusse mit der Wage feststellte. So ergibt sich sogleich ein kleines Kulturbild. Nannte doch Galilei seine wichtigste Streitschrift auch „Il saggiatore" d. h. die Goldwage![1])

Hat man in der analytischen Geometrie als Beispiele für geometrische Orte, den vier Spezies entsprechend, für zwei feste Punkte P_1 und P_2 und für einen beweglichen Punkt P die Aufgaben aufgestellt

$$P_1P + PP_2 = 2a \text{ (Ellipse)}$$

$$P_1P - PP_2 = 2a \text{ (Hyperbel)}$$

$$P_1P \cdot PP_2 = m^2 \text{ (Cassinische Kurven mit Lemniskate)}$$

$$P_1P : PP_2 = \epsilon \text{ (Kreis des Apollonius)},$$

so geben die auftretenden Kurven Gelegenheit zu vielseitigen Bemerkungen. U. a. kann daran erinnert werden, daß Cassini in Paris gewissermaßen eine Professur für die Erforschung des Jupiter-Systems erhielt (Olaf Römer wird dort sein Assistent). Dieses System war bekanntlich damals sozusagen das Modell, an dem die Weltanschauung des Kopernikus veranschaulicht wurde, im Gegensatze zu dem Theorem des Aristoteles „ein Zentrum von Bewegungen kann nicht selbst in Bewegung sein". Dieser Satz gab eine falsche Invariante.

Natürlich wird sich kein Mathematiker den methodischen Zusammenhang zwischen den Gesetzen Keplers und der abschließenden Formel Newtons entgehen lassen.

In didaktischer Hinsicht möchte ich noch bemerken, daß ein Wechsel der Aufgaben von Jahr zu Jahr ratsam ist, daß aber doch in allgemeinbildender Hinsicht stets gewisse Standard-Aufgaben wiederkehren müssen, so z. B. auch die drei berühmten Probleme des Altertums.[2])

2. Die Philosophie im Geschichtlichen der Mathematikstunde.[3])

Wer in der Mathematik das geschichtliche Moment nicht vernachlässigt, wird auch darauf aufmerksam machen können, daß die großen Philosophen meist auch der Mathematik ein wirkliches Verständnis entgegen gebracht haben, ja zum Teil sogar zu ihren Großen gehören. Die Geschichte der Philosophie hat in den letzten Jahrzehnten in gerechter

---

1) Vgl. hierzu das eben erscheinende Bändchen 6 von Nr. 95, H. E. Timerding „Die Fallgesetze".

2) Vgl. hierzu F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895, und außerdem F. Rudios Schrift: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung", Leipzig 1892. Außerdem noch besonders Nr. 36 d und auch Nr. 167 f.

3) Vgl. für Weiteres u. a. in diesen IMUK-Abhandlungen (Bd. III Heft 6) die Arbeit von Herrn M. Gebhardt.

Würdigung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschung Probleme und Persönlichkeiten aufgenommen, die früher in ihren Darstellungen nicht vorhanden waren. So dürfte jetzt kaum noch irgendwo Galilei fehlen oder Newton, aber auch Descartes wird nicht mehr bloß nach seinem Cogito und nach seiner Metaphysik gewürdigt, sondern auch als Begründer einer freilich mehr und mehr zu berichtigenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Weltanschauung. In diesem Sinne sagt Herr A. Riehl[1]): „Die Wissenschaft und Philosophie der Gegenwart ist nur zu geringerem Teile in den Arbeiten der Fachphilosophen enthalten, in ihren Schriften niedergelegt. Wir haben sie vornehmlich auch in den allgemein-wissenschaftlichen Anschauungen der großen Naturforscher unserer Zeit zu suchen: Diese, die wahren Nachfolger der Naturphilosophen, sind unsere Philosophen. Und wer der Gegenwart eine maßgebende Bedeutung in der Geschichte der Philosophie abspricht, hat die Bäume gesehen, aber nicht den Wald, er hat nicht gesehen, wo gegenwärtig die Philosophie lebt. Sie lebt in den Werken von Robert Mayer, von Helmholtz, von Heinrich Hertz."

Der Glaube an die Wissenschaft selbst hat sich an der Tatsache der mathematischen Wissenschaft oft belebt, dafür sind Plato, Descartes und Kant bezeichnende Beispiele. Auf sie kann auf jeder Anstalt in der Lektüre, einschließlich des deutschen Lesebuches, eingegangen werden. Aber auch die Mathematikstunden bieten Anknüpfung. Für Plato gibt sie z. B. das Delische Problem oder die Erörterung der Konstruktion in ihrer Beschränkung auf Zirkel und Lineal. Bei Descartes, der aus dem Augustinismus seiner Zeit hervorgeht, gibt hauptsächlich die analytische Geometrie Gelegenheit dazu. An Kants System, das andererseits zum Verständnis von Schiller und auch von Goethe durchaus erforderlich ist, wird man bei Besprechung der Grundlagen der Mathematik nicht vorübergehen können. Bei der Frage der „Zeit" wird man auch Augustins Schmerzensschrei nach Verständnis erwähnen können, den Herr Höfler in den Anhang zu seinem Grundriß der Logik und Psychologie mit Recht aufgenommen hat.

Neben Thales steht natürlich Pythagoras an der Spitze, dessen religiös-ethische Reform die musische Erziehung in ihren Dienst stellte, aus dem heraus seine Schule dann für die Mathematik so fruchtbar gewirkt hat. Von hier aus läßt sich bis in die Gegenwart hinein das Philosophische in der Geschichte der Mathematik verfolgen, wobei natürlich Leibniz[2]) und Newton Höhepunkte bilden. Namentlich bieten auch bei Gauß die Voranzeigen seiner Schriften gutes Material, von dem sich auch dies und das für die Schule verwenden läßt. Außerdem mag auch auf unser Kapitel „Die Arbeitsart der Mathematiker" verwiesen werden.

---

1) Vgl. Nr. 120 b S. 256.

2) Vgl. dazu u. a. „Leibniz und die Gymnasialmathematik" von E. Tischer in den „Xenia Nicolaitana, Festschrift zur Feier des 400jährigen Bestehens der Nikolaischule in Leipzig", Leipzig 1912.

3. Psychologisches und Formal-Logisches im Unterrichte der Mathematik.

Bei dem propädeutischen Unterrichte steht das Psychologische durchaus im Vordergrunde, das aber auch für den abschließenden Unterricht, in welchem das Formal-Logische voll zur Geltung kommen soll, seine hohe Bedeutung behält. In bezug auf die Wertung des Psychologischen können wir vor allem auf Höflers Didaktik verweisen, in welcher, wie schon früher erörtert, im besonderen auch die Anschauung wirklich zu ihrem Rechte kommt.[1])

In Beziehung auf die Verstandesbildung durch Mathematik bekennt Herr Höfler[2]): „Zu diesem Gegenstande ist hier fast nichts mehr zu sagen, man müßte dann den Mut haben, das unzähligemal gut gesagte wirklich noch einmal zu sagen". Gegenüber dem immer noch vorhandenen „Unfug des Auswendiglernens" begnügt sich daher Herr Höfler hervorzuheben „Nicht auf das richtige Urteil allein kommt es an, sondern auf richtig urteilen mit Einsicht in die Richtigkeit". Ob der Unfug wirklich noch so groß ist, mag dahingestellt bleiben, jedenfalls ist das Kapitel „formal-logische Schulung durch die Mathematik" so oft behandelt, daß kaum etwas hinzuzufügen ist. Höchstens ist vielleicht zu bemerken, daß die Forderungen der Logik in der Mathematik meist restlos verwirklicht werden können, und dazu mag im Hinblick auf hier und da noch vorkommende Ungenauigkeiten besonders hervorgehoben werden, daß auch die „Einteilungen" stets vollständig durchzuführen sind.

So hat man z. B. an Parallelen vier Gruppen von Winkelpaaren zu unterscheiden, nicht drei. Nennt man die Winkel zwischen den Parallelen innere, die anderen äußere, und ein Paar gleichartig, wenn es nur innere oder nur äußere Winkel zusammenfaßt, sonst ungleichartig, so ergibt sich das Schema:

I. Ohne Überschreitung der Schneidenden
  1) gleichartige Paare
  2) ungleichartige Paare
II. Mit Überschreitung der Schneidenden (Wechselwinkel)
  1) gleichartige Paare
  2) ungleichartige Paare.

Ebenso ist die Anzahl der Grundkonstruktionen, welche sich in den Kongruenzsätzen spiegeln, in logischer Hinsicht nicht vier, sondern sechs, wie es auch die Sphärik zeigt. Für die Ebene fällt infolge der Konstanz der Winkelsumme ein Fall fort, aus dem sich die Ähnlichkeit entwickelt, während zwei andere verschmelzen, so daß die Vierzahl herauskommt.

1) Vgl. ferner die Arbeiten von Lietzmann (Nr. 1, Bd. V, Heft 1 u. 2) und außerdem Nr. 151 a.

2) Vgl. Nr. 69 b S. 488.

Auch die Betonung alles Speziellen und Singulären gehört hierher. Es dürfen bei Konstruktionsaufgaben und bei Gleichungen keine Sonderlösungen übersehen werden, sie können gerade überaus wichtig sein. So darf schon die Gleichung $x^2 - ax = 0$ nicht etwa durch x dividiert werden, sie führt vielmehr in der Form $x(x-a) = 0$ zu $x = 0$ und $x = a$.

Dagegen ist es vielleicht nicht unnütz, kurz darauf hinzuweisen, wie die Formal-Logik selbst aus dem mathematischen Unterrichte Vorteil zieht, als Elementarlehre und als Methodenlehre. Dabei hat man m. E. davon auszugehen, daß jeder Lehrsatz in logischer Hinsicht ein Urteil darstellt, dessen Elemente Begriffe sind, und daß diese im Urteil ebensowohl getrennt als verbunden werden.

Auf die verschiedenen Arten von Urteilen, welche den reflexiven und konstitutiven Kategorien entsprechen, wird man von Fall zu Fall hinweisen können, ohne jedoch Vollständigkeit anzustreben. Jedenfalls wird man aber neben den Urteilen der alten Logik das Abhängigkeitsurteil besonders hervorheben, weil es zur funktionalen Beziehung der Mathematik führt. Schon die ersten Aufgaben der Regel-de-tri zeigen diese Abhängigkeit, z. B. der Arbeit von der Anzahl der Arbeiter und der Leistungsfähigkeit des einzelnen. Von dem einfachen Urteile „die Schwingungsdauer eines Pendels hängt von dessen Länge ab" bis zu der funktionalen Formulierung $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist allerdings ein weiter Weg.

Daß sich alle Urteile in Identitätsurteile (vgl. Logikkalkül) umformen lassen, nicht aber in Subsumptionsurteile, ist vielleicht auch gelegentlich zu berühren.

Bei den Begriffen wird das Psychologische ihrer Bildung zum Bewußtsein zu bringen sein, und man wird hinzuweisen haben auf den Unterschied der vollkommen logisierten Begriffe der Mathematik und der ihnen entsprechenden Begriffsbeziehungen, im Gegensatz zu den unvollkommen logisierten Begriffen anderer Wissenschaften. Botanik und Zoologie sind ein anderer wissenschaftlicher Typus als die Mathematik. Für die Darstellung eines Begriffes kann wieder rückwärts die mathematische Funktion gute Dienste leisten. Es handelt sich dabei nicht um die Summe der konstitutiven (wesentlichen) Merkmale, sondern um deren Beziehungen. Sind diese Merkmale $a, b, c, \ldots$, so wäre $f(a, b, c \ldots)$ eine Darstellung des Begriffs, wie schon Lotze hervorgehoben hat.

Bei der Bildung der abgeleiteten Begriffe aus den Grundbegriffen ist darauf hinzuweisen, daß letztere dabei als gegeben anzusehen sind, mögen sie vielleicht auch nur durch Beziehungen definiert sein. Ist z. B. der Begriff „Strecke" bekannt und ebenso der Begriff „Streckenzug" und bezeichnet man einen solchen durch $S(a, b, c, d \ldots)$ und, falls er sich schließt durch $S_0(a, b, c, d \ldots)$ so stellt $S_0(a, b, c)$ deutlich das Dreieck dar.

Ferner hat man zu unterscheiden die direkte Definition und die indirekte Definition, welch letztere zunächst bei Bestimmungsgleichungen und Konstruktionsaufgaben auftritt, und schließlich zu den Beziehungen der Axiomatik führt.

Bei der Bedeutung der Reihung ist natürlich die rekurrierende Definition (Reihungsdefinition) besonders hervorzuheben, und in Gegensatz zu ihr die independente zu charakterisieren.

Ebenso wird bei den Schlüssen der Reihungsschluß (von n auf $n + 1$) besonders hervorzuheben sein. Daß er gelegentlich dazu dient, eine unvollständige Induktion vollständig zu machen, wird an Beispielen gezeigt. Ist z. B. für einzelne Potenzen die Ableitung hergestellt und daraus die Formel $f'(x) = nx^{n-1}$ für $f(x) = x^n$ vermutungsweise bestimmt, so führt die Ableitung von $x^{n+1} = x \cdot x^n$ nach der Produktformel zum Beweise.

Dieses Beispiel weist außerdem neben vielen anderen darauf hin, daß auch Wahrscheinlichkeits-Urteile und Wahrscheinlichkeits-Schlüsse besonders hervorzuheben sind.

In der Methodenlehre ist zu zeigen, daß Analysis (Trennung) und Synthesis (Verbindung) alles beherrschen, schon die Abstraktion und Determination bei der Begriffsbildung, aber auch alle Systematik.[1])

Die der Mathematik eigentümliche Analysis und Synthesis, welche man als Differential- und Integralrechnung zu bezeichnen pflegt, beruht auf dem Infinitesimal-Prinzip. Man gibt ihm zunächst etwa die vorläufige Form „ein Ganzes (Ding oder Vorgang) kann in beliebig viele beliebig kleine Teile (Elemente) zerlegt und aus solchen wieder aufgebaut werden". In dieser Form hat es auch die Arbeiten von Lyell (Geologie) und von Darwin (Botanik und Zoologie) geleitet. Dieses Prinzip würde ziemlich unfruchtbar sein, wenn sich nicht oft für die Elemente gesetzliche Bestimmungen angeben ließen, welche beim Aufbau des Ganzen (integrum) auch zu neuen oder bisher nicht erklärten gesetzlichen Bestimmungen für dieses führten.[2]) Die Aneinanderreihung nicht genügend beachteter aber in ihrem Wesen bekannter oder erkennbarer Vorgänge führten Lyell und Darwin zur Beseitigung der Kataklysmen-Theorie und der Starrheit des Arten-Begriffs, und durch solche Aneinanderreihungen von Elementen sucht man jetzt auch auf anderen Gebieten Aufschluß über das Ganze zu geben, und zwar überall da, wo der Begriff „Entwicklung" die Führung übernimmt.[3]) So wird Hegels energischer Hinweis auf die Bedeutung der Entwicklung in möglichst exakter Form wirklich fruchtbar gemacht.

Für die Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes mußte sich die Mathematik ihre besonderen Methoden schaffen, die man zusammenfassend als Grenzmethoden bezeichnen kann. Die Zerlegung in Elemente ist zunächst fast immer mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet. Die Ele-

1) Dabei ist die jedesmalige Bedeutung der vieldeutigen Worte Analysis und Synthesis besonders festzustellen. Vgl. hier S. 94.

2) Vgl. die Bedeutung der Differentialgleichungen.

3) Vgl. Vierkandt, die Stetigkeit im Kulturwandel, Leipzig, 1908.

mente sind Hülfskonstruktionen, welche man, meist zunächst durch die empirische Anschauung geleitet, in das Gegebene hineindenkt, ohne aber damit dasselbe adaequat darzustellen, so bei der Ersetzung des Bogens durch einen Streckenzug, bei Auflösung einer beliebigen Bewegung in eine Kette von gleichförmigen Bewegungen oder gleichmäßig geänderten Bewegungen usw.

Die Stumpfheit unserer Sinne erleichtert uns den ersten Ansatz, da für das Auge bei materieller Ausführung (etwa auf dem Reißbrett) z. B. Bogen und Streckenzug bei einer gewissen Annäherung zusammenzufallen scheinen. Man pflegt zu sagen, daß erst unendlich viele unendlich kleine Elemente eine exakte Darstellung geben und gerade diese Redensart muß methodisch geklärt werden. Tatsächlich handelt es sich dabei in psychologischer Hinsicht um eine fortgesetzte Annäherung, welche ihr Ziel nie erreichen kann, d. h. um einen asymptotischen Prozeß. Es ist eine Grundtatsache unseres Bewußtseins, daß wir Vorstellungsreihen, welche eine solche Annäherung darstellen, in Grenzvorstellungen abgeschlossen denken, welche überall da, wo uns nicht die Bewegungsvorstellung hilft, von der Reihe aus nur durch einen Sprung zu erreichen sind. Diese Tatsache weist hin auf eine bestimmte Funktion des Bewußtseins, welche der Bewältigung asymptotischer Prozesse dient, und die man kurz als die „asymptotische Funktion des Bewußtseins" bezeichnen kann.[1]) So gehört z. B. zu der Vorstellungsreihe, welche durch

$$0{,}33\cdots = {}^3/_{10} + {}^3/_{100} + \cdots$$

bezeichnet wird, die Grenze 1/3, und die asymptotische Funktion läßt uns diese Grenze beim Durchlaufen der Reihe als erreichbar ansehen. Löst man Bewegung in eine asymptotische Reihe auf, so treten sofort Schwierigkeiten auf (Achilles und die Schildkröte). Eine solche Auflösung ist aber fast immer, dem diskursiven Charakter unseres Denkens entsprechend, erforderlich, falls die Arithmetik auf die Probleme angewandt werden soll, und damit erwächst für die Mathematik die Aufgabe, diese Beziehungen vollständig zu klären.

Dies geschieht durch Einführung des Grenzwertes und des sog. Konvergenzprinzipes[2]), woran sich dann weitere Methoden schließen, unter denen besonders der Übergang von der Stammfunktion zur Ableitung, und umgekehrt, zunächst in dem einfachen Falle

$$y = f(x)$$

hervorzuheben ist.

Geschichtlich ist das bestimmte Integral der zunächst auftretende Grenzbegriff, den die Frage der Flächenbestimmung fordert.

Eine Methode für die Klärung dieser Beziehungen lernt der Schüler zunächst in der Kreislehre kennen. Bezeichnet man die Fläche eines

1) Vgl. S. 72 Anm. 1.
2) Vgl. z. B. Burkhardt, Algebraische Analysis, Leipzig, 1903, S. 73.

regelmäßigen umschriebenenen Vieleckes von beliebiger Seitenzahl (n) mit U und die Fläche für ein entsprechendes eingeschriebenes Vieleck mit I, die Kreisfläche dagegen mit K, so ist anschaulich klar, daß besteht:

$$U > K > I.$$

Bei rechnerischer Ausführung ist K mindestens soweit gegeben, als U und I in ihren Dezimalen übereinstimmen. Die erforderliche Schärfe des Abschlusses bringt dann die Gleichung

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty.$$

Ein weiterer geschichtlich schon früh vollzogener Grenzübergang liefert, falls der Radius des Kreises mit r und der Umfang mit u bezeichnet wird, noch die Gleichung

$$K = \frac{1}{2} r \cdot u$$

und damit ist auch u bestimmt.

Das Verfahren, welches zunächst bei der Kreisfläche durch $U > K > I$ und

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty$$

charakterisiert ist, begegnet dem Schüler später noch recht häufig, z. B. bei der Bestimmung von Volumen und Oberfläche der Kugel, bei Schwerpunktsaufgaben usw.

Auf der Schule muß der Übergang zur Grenze jedenfalls zunächst auf anschaulichem Wege geläufig gemacht werden, und dazu dient vor allem die Bewegungsvorstellung. Daß sie selbst gewisse Schwierigkeiten enthält, bleibt dabei außer Betracht; so ist z. B. das (scheinbare) Entstehen einer Bewegung und das (scheinbare) Vergehen einer Bewegung und ebenso jede Änderung innerhalb der Bewegung nur mit Hilfe der asymptotischen Funktion erfaßbar.

Sieht man keine Schwierigkeiten darin, daß ein Punkt bei der Bewegung auf seiner Bahn durch einen festen Punkt dieser Bahn hindurchgeht, so bietet auch die übliche Behandlung des Übergangs von der Sekante zur Tangente keine Schwierigkeiten. Will man die Bewegung „eliminieren", so kann man durch den festen Punkt ein Strahlenbüschel legen, in welchem in Beziehung auf die Durchschnitte der Kurve die Tangente einen ausgezeichneten Strahl darstellt. Für einfache Fälle bietet die arithmetische Behandlung keine Schwierigkeiten. Hat der feste Punkt die Abszisse x und der bewegliche Punkt die Abszisse $x \pm d$, so ist für die Linie, deren Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist, der Winkel σ zwischen Sekante und X-Achse gegeben durch

$$\operatorname{tang} \sigma = a(2x \pm d) + b$$

und für den Tangentenwinkel gilt dann ($\pm d = 0$) ohne weiteres

$$\operatorname{tang} \tau = 2ax + b.$$

In anderen Fällen muß untersucht werden, ob tang σ für $\pm d = 0$ einen bestimmten Grenzwert hat, eine Notwendigkeit, auf welche die tangentenlosen Kurven noch ganz besonders hingewiesen haben.

Die Darstellung durch Elemente ist immer zunächst ein anschaulich eingeleiteter approximativer Ansatz, der durch Grenzbegriff und Grenzmethode exakt gemacht wird, aber der damit gegebenen Logisierung kann die Anschauung nicht folgen. Ob z. B. im tiefsten Punkte einer Seilkurve ein Element horizontal liegt oder ob von ihm nach beiden Seiten zwei geneigte Elemente ausgehen, ist eine Frage, auf die es keine Antwort gibt. Als Annäherung ist natürlich beides zulässig, und der Praktiker benutzt ja auch, z. B. bei der Darstellung der Kettenlinie, diese doppelte Auffassung.

Erst, wenn man diese Logisierung anschaulich verfolgen will, treten die bekannten Schwierigkeiten des Grenzüberganges auf, wobei zu betonen ist, daß die Anschauung der Logisierung auch in einfachen Fällen nicht folgen kann. Beachtet man dies nicht, so kommt man zu den vielen Widersprüchen zwischen Anschaulichem und Logisiertem. Dann kommt man auch zu der Frage, ob die Elemente (Differentiale) die „Geister verschwundener Größen" (Berkeley) oder die „Keime entstehender Größen" (Cohen[1]), Simon u. a.) sind usw.

Zu bemerken ist vielleicht noch, daß sich an einen, einmal vollzogenen Grenzübergang natürlich weitere Grenzübergänge knüpfen können, sowohl im Sinne des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung, als auch umgekehrt, und daß der Begriff des Elementes selbst (dx, dx^2, usw.) durchaus relativ ist, wie zunächst schon Linien-Element, Flächen, Element und Raum-Element zeigen.

In sprachlicher Hinsicht mag hervorgehoben werden, daß man entweder die Worte „Differential und Summal" oder „Element und Integral" benutzen müßte, wobei noch zu bemerken ist, daß die Differentialquotienten oft, aber nicht immer, als Differenzenquotienten entstehen und die Integrale auch nicht immer als Grenzen von Summen auftreten, sondern auch durch Umkehrung von Differentiationen usw. entstehen.[2])

Für die Schule möchte ich persönlich die Zeichen dy/dx und $\int f(x)\,dx$ gern vermieden wissen, letzteres natürlich nur wegen des in ihm auftretenden dx. Man bezeichnet hier anfangs die Elemente von x und y, die ja zunächst nur beliebig klein sind, wohl besser durch ξ und η, und benutzt ferner gewöhnliche Summenzeichen, um die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten zu vermeiden, die in der allerdings technisch sehr schmiegsamen Bezeichnung von Leibniz liegen.

Andererseits läßt sich für die Verwendung jener Zeichen mit gutem Rechte sagen, daß die Einführung in die Anfänge der Infinitesimal-

1) Einer jetzt oft auftretenden Behauptung gegenüber mag noch bemerkt werden, daß dx an und für sich kein Erzeugungsgesetz für x darstellt, wohl aber gibt $f'(x) \cdot dx$ für y ein solches an im Hinblick auf $y = f(x)$.

2) Vgl. bei Leibniz „calculus differentialis" und „calculus summatorius".

Rechnung, auch oder vielleicht sogar besonders denen dienen soll, welche später Mathematik nicht weiter treiben, aber doch gelegentlich auf Mathematisches angewiesen sind, wie z. B. Mediziner und Chemiker. Diese finden jene Zeichen in der Literatur vor und, wenn sie auch erfahrungsmäßig für deren Verständnis meist einer Auffrischung ihrer Schulkenntnisse bedürfen, so ist es doch zweckmäßig, daß ihnen dabei die Formelsprache nicht noch besondere Schwierigkeiten macht.

Jedenfalls sind die Ansichten in bezug auf die Verwendung jener Zeichen im Schulunterrichte immer noch geteilt.[1])

Die Fragen des Aktual-Unendlichen und des Potenziell-Unendlichen bleiben der Schule wohl besser fern, sie weisen hin auf den alten Gegensatz zwischen Parmenides (Sein) und Heraklit (Werden)[2]). Es genügt, wenn der Schüler das Infinitesimal-Prinzip einigermaßen kennen gelernt hat: die Bestimmung des Ganzen aus Elementen ist immer das treibende Moment dabei.[3])

Gegenüber dem weitmaschigen Netze der Begriffsbestimmungen anderer Wissenschaften ist bei der Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes gewissermaßen Filigran-Arbeit zu leisten, und für diese ist der Begriff der (geordneten) Mannigfaltigkeit stets sozusagen die Unterlage.

Mit Rücksicht auf einen ständigen Gegenstand der einschlägigen Literatur mag noch das Bedenken kurz berührt werden, daß sich in der Frage ausspricht: „Warum gilt der Beweis, der an diesem bestimmten Dreieck geführt worden ist, für jedes beliebige Dreieck?“ Die Antwort lautet: Der Beweis wird gar nicht an diesem bestimmten Dreieck geführt, er benutzt vielmehr nur die Begriffskonstruktion „geschlossener Streckenzug von dreifacher Brechung“, die durch ein beliebiges gezeichnetes oder gezeichnet-gedachtes Dreieck veranschaulicht werden kann, wobei aber dessen besondere Eigenschaften für den Beweis nicht verwendet werden. So steht es bei allen Begriffskonstruktionen der Mathematik (Arithmetik usw.) im Hinblick auf ihre Veranschaulichung; die blitzschnelle Vergleichung aller möglichen Fälle, die man zur Erklärung herangezogen hat, besteht tatsächlich nur in der Phantasie.

Der Unterschied des induktiv-deduktiven (reine Induktion gibt es nicht!) und des deduktiven Verfahrens ist zu klären. Dabei erinnert man daran, daß in der Geschichte der Mathematik, und auch dementsprechend auf der unteren und mittleren Stufe der Schule die Mathematik nach induktiv-deduktiven Verfahren entstanden ist, während ihr Abschluß deduk-

1) Zu der ganzen Frage der Infinitesimalrechnung vgl. noch „Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus in Göttingen 1912“, herausgegeben von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912. 2) Vgl. dazu namentlich Nr. 3o.

3) Das zeigte sich auch bei den modernen Arbeiten, welche in erneuter und verschärfter Form die Fragen nach der Länge einer Linie, dem Areal einer Fläche, dem Volumen eines Körpers usw. behandeln, auf die schon Bolzano so energisch hingewiesen hat, und u. a. den Begriff der Kurve (Jordan-Kurve usw.) erst zu klären versuchen. Vgl. dazu bei F. Klein besonders Nr. 78i und 78m.

tiv ist auf Grundlage der Axiomatik. Es ist äußerst zweckmäßig, auch auf der Oberstufe noch induktiv-deduktiv zu arbeiten, z. B. bei der Vorbereitung der Ableitung des Eulerschen Satzes für Polyeder.

Selbstverständlich sind auch gelegentlich die Denkgesetze zu formulieren, wobei den Satz vom Grunde wiederum die Elimination und Substitution der Mathematik erläutert.

Natürlich wird man auch auf die Sprache der Mathematik und auf ihr besonderes Zeichensystem hinweisen, im Gegensatz zur Sprache des gemeinen Lebens. Was sagt uns nicht alles eine Formel, z. B. aus der mathematischen Physik?[1]) Die Schöpfung der mathematischen Formelsprache war notwendig, um die erforderliche Schärfe der begrifflichen Darstellungen zu erzielen, sie hat aber, obwohl sie ein ziemlich vollendetes Kunstwerk darstellt, doch ihre Mängel[2]), die sich zum Teil daraus erklären, daß die geschichtliche Entwicklung über die ursprünglichen Bestimmungen hinausgewachsen ist. Auch die Sprache der Mathematik hat ihre Äquivokationen und ihre Synonyme. Daß die Operationszeichen (+ −) und die Größensignaturen (+ −) zusammenfallen, macht gerade den Anfängern große Schwierigkeiten; man vermeidet sie, wenn man nach dem Vorgange von Weierstraß zunächst -7 durch $7'$ bezeichnet.[3]) Sehr vieldeutig sind die Worte Synthesis und Analysis, so daß sie von Fall zu Fall ausführliche Erläuterungen notwendig machen. An die Vieldeutigkeit des Wortes „Wurzel“ braucht nur erinnert zu werden. Ebenso hat z. B. das Gleichheitszeichen mindestens drei Bedeutungen, gelegentlich vermittelt es eine Definition, sonst zeigt es die Ersetzbarkeit an, und zwar entweder eine vorhandene (analytische Gleichung) oder eine zu vollziehende (Bestimmungsgleichung). An die Vieldeutigkeit der Null, auf die besonders Herr Simon öfter hingewiesen hat, mag auch noch erinnert werden.

Auf die modernen Entwickelungen der mathematischen Zeichensprache bei Peano u. a., welche diese möglichst vollkommen gestalten wollen, kann auch auf der Schule gelegentlich hingewiesen werden, ein Analogon für die Grammatik findet man in der „Algebra der Grammatik“ von Herrn Stöhr (Nr. 141).

Im übrigen geben für das Logische die gebräuchlichen Kompendien genügend Beispiele, namentlich die von Drobisch und Wundt, auch das von Lotze, ebenso findet man in Höflers Grundrisse gute Auskunft.[4])

---

1) Vgl. Nr. 124 b.

2) Hierher gehört auch Fr. Försters Hinweis auf gewisse Verkehrtheiten beim Aussprechen und beim räumlichen Hinschreiben der Zahlenausdrücke. Vgl. dessen Abhandlung „Das neue Jahrhundert und die Reform unseres Zählungswesens“ in den Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik Jahrg. 11 Heft 1.

3) Es ist dies eigentlich ein Rückgang zur ursprünglichen geschichtlichen Bezeichnung.

4) Vgl. auch Nr. 47.

4. Die Systematik des mathematischen Unterrichts.

A) Allgemeines.

Der Abschluß des Unterrichts, der auf induktiv-deduktivem Wege unter reichlicher Verwendung der Anschauung begonnen hat, muß die Mathematik als System erkennen lassen. Dazu ist in positiver Hinsicht erforderlich, daß alle Zusammenhänge, welche schließlich zu Tage treten sollen, von vornherein vorbereitet werden, in negativer Hinsicht, daß der endliche Zusammenschluß nicht gehindert wird.

Was den letzteren Punkt anlangt, so handelt es sich dabei auch um den Ausschluß der Kunstgriffe, die früher die geometrischen Konstruktionen und die Lösungen der Gleichungen oft beherrschten. Aus der Untersuchung einer Figur soll für den Schüler folgen, was zu ihrer indirekten Bestimmung durch eine Konstruktion nötig ist, und welche Beziehungen die einzelnen Stücke zeigen. Geht man in der Theorie der kubischen Gleichungen, was durchaus praktisch ist, zunächst den historischen Weg, indem man die Formel von Cardano und die goniometrische Formel für den Casus irreducibilis gibt, so hat man doch schließlich die Lösung mit Hilfe der Beziehungen von Wurzeln und Koeffizienten vorzunehmen, die der Schüler unter Leitung selbst zu finden vermag. Ebenso ist darauf hinzuweisen, daß die meisten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz eine Reihe von Kunststücken darstellen. Seine natürliche Stelle findet er in der Lehre von der Ähnlichkeit. Bezeichnet man (vgl. Fig. 4) die Teildreiecke des rechtwinkligen Dreiecks durch I und II und dieses selbst durch III, so ergibt sich die Tabelle für die Proportionen

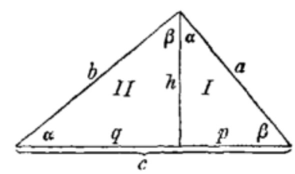

Fig. 4.

	α	β	90°
I	*p*	*h*	*a*
II	*h*	*q*	*b*
III	*a*	*b*	c

In diesen finden sich neben $h^2 = pq$ auch die Gleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$, die bei der Addition den Lehrsatz geben. Schließlich liefert der Satz, daß sich die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, ohne weiteres für einen Proportionalitätsfaktor m die Ansätze

$$I = m \cdot a^2$$
$$II = m \cdot b^2$$
$$III = m \cdot c^2$$

Da $I + II = III$ ist, so folgt unmittelbar der Pythagoräische Lehrsatz.[1])

1) Vgl. Nr. 167h und ferner W. Lietzmann „Der pythagoräische Lehrsatz" in Nr. 95, Bändchen 3.

Die in der Wissenschaft heute zum Teil übliche Berufung auf „willkürliche" Vereinbarungen und die Verbindung von Worten ohne Bedeutung mit bestimmten Zeichen, wie sie einzelne Darstellungen der Axiomatik geben, sind für die Schule nicht zu gebrauchen.

Im Systeme der Schulmathematik darf schließlich keine Lücke bleiben. Natürlich ist es aber zulässig, eine solche durch historische Aufnahme zu schließen, wenn ihre wirkliche Ausfüllung für die Schule nicht gut durchführbar ist. So wird man z. B. den grundlegenden Satz für die Gleichungstheorie „Jede algebraische Gleichung vom Grade n hat genau n Wurzeln" (Gauß), nur mit einer guten Generation beweisen, sonst wird man ihn mindestens zum Teil historisch aufnehmen müssen. Man setzt also etwa voraus „Jede algebraische Gleichung hat mindestens eine Wurzel" und geht von hier aus weiter, im übrigen auf die Werke von Gauß verweisend.

Jede „Erschleichung" ist natürlich streng zu vermeiden, ebenso alle Arten von Scheinbeweisen.

Wir wollen nun noch die einzelnen Gebiete der Mathematik in ihrer Stufenordnung betrachten, wie sie durch die Folge Arithmetik, Geometrie, Phoronomie, Dynamik bestimmt wird, an und für sich und als Mittel, eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen und dadurch die Natur zu beherrschen. Das absolute Maßsystem, welches außer Zahlen (Arithmetik) der Reihe nach die Einheiten Strecke (Geometrie), Dauer (Phoronomie) und Masse (Dynamik) für die Bildung seiner Größen verwendet, gibt dabei den Zielpunkt an.

Während die Arithmetik zum Begriffe einer n-fachen Mannigfaltigkeit führt, untersucht die Geometrie die bestimmte Mannigfaltigkeit, welche wir als „Raum" bezeichnen. Die Phoronomie setzt die Bewegungen der Gebilde im Raum zur Zeit in Beziehung, während die Dynamik im Hinblick auf das Tatsächliche der Sinnenwelt die gegenseitige Beeinflussung dieser Gebilde darstellt.

Ob die Bewegung, lediglich als Lagenänderung gefaßt, in der Geometrie verwendet werden soll, ist bekanntlich eine Frage, die von verschiedenen Standpunkten aus verschieden beurteilt wird, und darum kann die Phoronomie der Lage (Kinematik) auch der Geometrie zugerechnet werden.

Für unsere Zwecke genügt es, die Grundlage der Arithmetik etwas ausführlicher zu behandeln, weil für die Geometrie bereits alles Erforderliche in guten Darstellungen vorliegt und weil über die Mechanik bei dem augenblicklichen Stande der Probleme für die Schule doch kaum etwas Abschließendes gesagt werden kann, was den Rahmen der „klassischen Mechanik" überschritte.

Statt dessen soll noch für die einzelnen Gebiete der Mathematik kurz angedeutet werden, wie ich in meinem Unterrichte in Prima den systematischen Abschluß zu geben suche, womit natürlich nur gezeigt werden soll, wie man es machen kann, und nicht etwa, wie man es machen muß. Dabei bemerke ich ausdrücklich, daß ich diesen systematischen Abschluß auch als Lehrer am Gymnasium (bis Herbst 1894) durchgeführt habe, natürlich unter Beschränkung des Aufgabenmateriales. Dem Gymnasium gegenüber liegt das Übergewicht der Oberrealschule nicht im Mathematischen, sondern im Naturwissenschaftlichen.

B) Arithmetik (Algebra, Analysis usw.).

a) Grundlegende Betrachtung.

Die beiden Zwecke, welchen die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,... dient, haben sprachlich ihren Ausdruck in den Worten „Ordinalia" und „Cardinalia" erhalten. Wenn wir Häuser in einer Straße oder Blätter eines Buches usw. durch Paarung mit der Reihe 1, 2, 3, ... bezeichnen, so kommt es uns nur auf die Ordnung in der Folge an, während drei Menschen oder fünf Bäume auf ein Quantum hinweisen. Die selbständigen Bildungen von Ordinalien sind gemäß der Ökonomie der Sprachentwicklung meist von den Bildungen der Kardinalien aufgesaugt worden, doch zeigen Anfänge, wie unus, duo, tres, ... und primus (prae, prior), secundus (sequi), tertius, ... noch deutlich den gedanklichen Unterschied an. Leider sind die Zahlennamen der Kulturvölker fast alle in etymologischer Beziehung nicht zu deuten, ein Zeichen dafür, welche lange Kulturarbeit in ihnen erstarrt vorliegt. Eine Ausnahme macht z. B. die hebräische Bezeichnung für 5, in der noch deutlich die Anschauung der Hand mit ihren fünf Fingern nachwirkt. Hält man das Wort Zahl als Oberbegriff fest, so weisen uns Ordnungszahl und Anzahl (Kardinalzahl) auf eine „Arithmetik der Lage" und eine „Arithmetik des Maßes" hin, wenn man gangbare Bezeichnungen der Geometrie auf die Arithmetik überträgt.

In psychologischer Hinsicht liegt der Ursprung der Ordnungszahl in dem Umstande, daß wir alle Erscheinungen in der Zeit ordnen, während in jedem Augenblicke ein Außereinander von psychischem und physischem Inhalte gegeben ist, dessen quantitativer Charakter schließlich durch das Wort „Anzahl" bezeichnet wird, womit die Kardinalzahl ihr Recht erhält.

Auch in der Arithmetik ist, den Bedürfnissen des Lebens entsprechend, die „Arithmetik des Maßes" früher entwickelt worden, als die „Arithmetik der Lage", für welche erst Herr Dedekind eine einwandfreie Entwicklung gegeben hat, während sich Anfänge davon u. a. bei den Brüdern Graßmann, bei v. Helmholtz u. a. finden.

In logischer Hinsicht baut sich die Arithmetik der Lage auf durch „Reihung" und „Paarung", die Arithmetik des Maßes durch „Klassenbildung" und „Paarung" unter sekundärer Verwendung der „Reihung".

α) Die Arithmetik der Lage.

In psychologischer Hinsicht sind Reihungen mannigfacher Art etwas ganz Gewöhnliches, und es handelt sich zunächst darum, dieses Gebiet zu logisieren, d. h. einen Oberbegriff „Reihung“ als Invariante zu bilden, welche die logische Grundlage für alles Weitere bildet.

Wenn a ein Ding, d. h. irgend etwas mit sich selbst Identisches bezeichnet und $\varphi(a) = b$ den Gedanken an dieses Ding, $\varphi(b) = c$ wiederum den Gedanken an b usw., so gibt die Reihe

$$a,\ b = \varphi(a),\ c = \varphi(b),\ d = \varphi(c), \ldots$$

ein Beispiel, an das die Logisierung anknüpfen kann. In ihr soll nur das Gemeinsame aller Reihungen zum Ausdruck kommen, und dieses besteht in der Tatsache „a steht vor b, b steht vor c, c steht vor d, usw.“

Für diese Beziehung von Glied zu Glied kann man die Bezeichnung $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ einführen, falls man nur die Begriffe „größer“ und „kleiner“ in keiner Weise daran haften läßt.

Nachdem die Reihung durch Einführung der Zeichen $a, b, c, d, \ldots$ der Zeit entzogen ist, kann man sie auch umgekehrt durchlaufen denken und die Bezeichnung $\ldots d > c$, $c > b$, $b > a$ einführen, welche aber nur bedeutet „d steht hinter c“ usw. Die Reihe ist als eine offene Reihe zu betrachten, die zunächst im Sinn $a, b, c, d, \ldots$ und dann auch im Sinn d, c, b, a beliebig fortsetzbar ist. Sie hat also die Gestalt:

$$\ldots a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots.$$

Daß die Bestimmungen $a < b$ und $b < c$ die Bestimmung $a < c$ nach sich ziehen, bedingt den Charakter des Offenen.

Von zeitgenössischen Erkenntnistheoretikern gehen u. a. G. F. Lipps und Natorp von der „Urreihe“ aus, von Mathematikern vor allem Veronese und Enriques[1]) und auch Pringsheim. Herr Dedekind scheidet die Urreihe durch eine ordnende Abbildung aus einer unendlichen ungeordneten Menge aus, aber sein Beweis für die Existenz unendlicher Mengen (unter Benutzung des eigenen Ich) ist angefochten worden, und ebenso mit Rücksicht auf die Paradoxien der Mengenlehre sein Begriff des Systems (Menge). Es scheint also zweckmäßig, seine Entwicklung erst von der Stelle an zu benutzen, in der die „Reihung“ festgelegt ist.

Daß mit dieser Reihung $a, b, c, d, \ldots$, so einfach sie auch zu sein scheint, eine Fülle von Gesetzmäßigem mit gegeben ist, zeigt die Paarung von Gliedern der Reihe nach einer bestimmten Vorschrift, wie sie Herr Dedekind ausführt. Wir bezeichnen dazu mit m' das Glied, welches auf m folgt, mit $(m')'$ oder kürzer mit m'' das Glied, welches auf m' folgt, usw. und ersetzen die Reihe $a, b, c, d, \ldots$ lediglich aus mnemotechnischen Gründen durch die geläufige Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots$. Wir bilden nun durch Paarung aus der gegebenen Reihe eine neue Reihe und bezeichnen die Art der Paarung durch φ_m, wobei m eine feste Stelle der alten Reihe bezeichnen mag. Bezeichnet n eine beliebige Stelle der alten Reihe, so soll die besondere Art der Paarung φ_m bestimmt sein durch die Vorschriften:

---

1) In Anlehnung an Peano und Dedekind.

$$\text{I}\quad \varphi_m(1) = m' \qquad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$

$$\text{II}\quad \varphi_m(n') = [\varphi_m(n)]' \qquad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

Nr. I bedeutet nur, daß den Anfang der neuen Reihe das Glied bilden soll, welches in der alten Reihe auf m folgt, während Nr. II besagt, daß mit dem beliebigen Gliede n' der alten Reihe, das in dieser auf n folgt, immer das Glied der neuen Reihe gepaart werden soll, welches dem mit n bereits gepaarten Gliede folgt. In Verbindung mit Nr. I gibt für $n = 1$ Nr. II die Bestimmung

$$\varphi_m(2) = [\varphi_m(1)]' = [m']' = m''$$

und für $n = 2$ gibt II weiter die Bestimmung

$$\varphi_m(3) = [\varphi_m(2)]' = [m'']' = m''' \text{ usw.}$$

Für $m = 7$ hat man z. B. $m' = 8$, $m'' = 9$ usw. und demgemäß die Paarung

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, \\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Addition von 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Addition tatsächlich in unserer Paarung φ_m gegeben sind. Benutzen wir der Einfachheit wegen die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(Verschmelzungsgesetz),}$$

$$a + b = b + a \qquad \text{(Vertauschungsgesetz).}$$

Wir betrachten nun die Vorschrift für eine neue Paarung ψ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I}\quad \psi_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$

$$\text{II}\quad \psi_m(n') = \psi_m(n) + m \quad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\psi_m(2) = \psi_m(1) + m = m + m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\psi_m(3) = \psi_m(2) + m = m + m + m$$

usw. Für $m = 7$ hat man z. B. zu paaren $7,\ 7 + 7,\ 7 + 7 + 7, \ldots$ und es entsteht die Paarung

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, \\ 7,\ 14,\ 21,\ 28, \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Multiplikation mit 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Multiplikation tatsächlich in unserer Paarung ψ_m liegen. Benutzen wir der Einfachheit wegen wieder die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich:

$$(ab)c = a(bc) \qquad \text{(Verschmelzungsgesetz),}$$
$$ab = ba \qquad \text{(Vertauschungsgesetz),}$$
$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{(Verteilungsgesetz).}$$

Wir betrachten nun ferner die Vorschrift für eine dritte Paarung θ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I} \quad \theta_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$
$$\text{II} \quad \theta_m(n') = m\theta_m(n) \quad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\theta_m(2) = m\theta_m(1) = m \cdot m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\theta_m(3) = m\theta_m(2) = m \cdot m \cdot m \quad \text{usw.}$$

Für $m = 7$ erhält man also hier die Paarung

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 7, & 49, & 343, & 2401, & \ldots . \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe die Potenzen der Zahl (Basis) 7 enthält, für welche die erste Reihe die zugehörigen Exponenten liefert. Durch den Schluß von n auf $n + 1$ zeigt man wieder, daß die grundlegenden Sätze des Potenzierens in der Abbildung θ_m liegen.

Nennt man die durch Paarung aus der ersten Reihe entstandene zweite Reihe eine Abbildung der ersten, so entstehen durch Umkehrung der betrachteten Abbildungen die Beziehungen, welche in der Arithmetik des Maßes durch Subtraktion, Division, Radizierung bzw. Logarithmierung bezeichnet werden.

Dabei reicht die ursprüngliche Reihe

$$\ldots a, b, c, d, \ldots$$

aus, um die Abbildung, welche der Subtraktion entspricht, darzustellen, während sie für die anderen Abbildungen durch Einschaltung neuer Glieder erweitert werden muß.

Da nur die Beziehungen $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ für die Bildung der ursprünglichen Reihe erforderlich sind, so werden die Einschaltungen auch nur durch die Beziehung $<$ bestimmt, d. h. ein neues Glied ist immer völlig gegeben, wenn man angeben kann, welche alten Glieder vor ihm stehen und welche alten Glieder hinter ihm stehen. Solange man neben der Reihe 1, 2, 3, ... nur die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ betrachtet, genügt die Angabe $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $1 < \frac{3}{2} < 2$ für deren Einschaltung.

Innerhalb dieser ganzen Auffassung bildet die Dedekindsche Theorie des Schnittes[1]) und nur diese den Abschluß für die Bildung des reellen Zahlengebietes. Sucht man Stellen für die Zahlen, deren Quadrate die Reihe 1, 2, 3, ... bilden, so ist schon für $x^2 = 2$ eine neue Stelle zu bestimmen, und diese ist vollständig bestimmt, wenn man angibt, welche von den bereits definierten Stellen vor ihr und hinter ihr liegen.

Der hiergegen gemachte Einwurf, daß man mit noch so dicht gestellten Netzen in einem Karpfenteiche keinen Karpfen fangen kann, wenn keiner darin ist, würde die Dedekindsche Theorie des Schnittes nur treffen, wenn man sie vom Standpunkte der Arithmetik des Maßes aus betrachtete, was aber bei unserer Auffassung unzulässig ist. Innerhalb der „Arithmetik der Lage" sind die Zahlen nur Zeichen für eine bestimmte Stelle innerhalb eines gegebenen oder zu schaffenden Stellensystems, dessen Gesetz allein in der Bezeichnung $<$ oder $>$ liegt.

Damit erledigt sich auch ein Einwurf von Herrn Höfler[2]) der Sache nach, wenn er auch in bezug auf den Wortlaut mancher Angaben im Rechte ist. Er sagt: „So hält z. B. jede Definition, die die Zahl nur als Zeichen erklärt, schon nicht stand vor der einfachen (auch einem geschickten Schüler zuzutrauenden) Gegenfrage: Muß denn nicht jedes Zeichen doch etwas bezeichnen? Ein Zeichen ohne Bezeichnetes ist ja doch ebenso unmöglich wie ein Gatte ohne Gattin, ein Großes ohne Kleines, eine Ursache ohne Wirkung." Herr Höfler knüpft dabei an den bekannten Meinungsaustausch der Herren F. Klein und A. Pringsheim an (vgl. Nr. 78g und h und Nr. 115c und d), aber für Pringsheim sind die Zahlen doch „Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Sukzession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann".

Herr Dedekind hat bekanntlich seine „Arithmetik der Lage" nicht vollständig dargestellt, während Herr H. Weber in seiner Algebra und auch in der „Encyklopädie der Elementarmathematik" im wesentlichen auf der von Dedekind gegebenen Grundlage die ganze Arithmetik aufbaut, namentlich was die sogenannte „Erweiterung des Zahlenbegriffes" anlangt.

β) Die Arithmetik des Maßes.

In psychologischer Hinsicht ist zu betonen, daß wir kleinere Anzahlen (5 bis 6) unmittelbar auffassen und mit ihnen vielleicht auch einfache Rechenoperationen vollziehen, ohne dabei die Reihung 1, 2, 3, ... zu benutzen. Daß größere Anzahlen uns erst durch das Positionssystem zugänglich werden, hat u. a. Herr Husserl[3]) mit Recht betont, und durch diese Bemerkung gewinnt auch die früher nicht recht verstandene „Sandrechnung" des Archimedes eine bestimmte Bedeutung, auf die Herr H. Weber

1) Vgl. Nr. 24 a.

2) Vgl. Nr. 69b, S. 432.

3) Vgl. auch in bezug auf die Praxis der Volksschule in diesen Imuk-Abhandlungen Bd. V, Heft 1, S. 28 u. f.

u. a. in einer Anmerkung zu der von ihm besorgten deutschen Ausgabe von Poincarés Buche „Der Wert der Wissenschaft" ausführlich eingeht.[1])

Für die Arithmetik des Maßes hat die Mengenlehre in logischer Hinsicht die erforderliche Grundlage geschaffen, und zwar beruht diese auf Klassenbildung und Paarung. Endliche Mengen, deren Elemente sich paaren lassen, bilden eine Klasse, und jede dieser Klassen hat eine bestimmte Invariante, welche als „Anzahl" bezeichnet wird.

Dabei sind endliche Mengen nach Dedekind dadurch bestimmt, daß sie sich nicht mit einem (echten) Teile ihrer selbst paaren lassen. Ist dies möglich, so heißt die Menge unendlich.

Die einfachsten Beispiele für solche Paarungen sind die Paarungen der Anzahlen mit den geraden Anzahlen oder mit den ungeraden Anzahlen, gemäß dem Schema:

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$
$$2, 4, 6, 8, \ldots,$$
$$1, 3, 5, 7, \ldots.$$

Würden wir Anzahlen auch über die Grenze 5 oder 6 hinaus unmittelbar anschaulich erfassen, was an sich ja durchaus möglich erscheint (vgl. Rechengenies wie Dahse) so würden wir vermutlich auch die Arithmetik des Maßes bis zu einem gewissen Grade selbständig aufbauen können. Da dieses aber nicht der Fall ist, so ist man gezwungen, die Anzahlen zu ordnen, und zwar wählt man dafür die Reihung 1, 2, 3, 4, ... und gewinnt damit den Anschluß an die Arithmetik der Lage, aus Ökonomie dasselbe Zeichensystem verwendend. Trotzdem bleibt der Gedanke der Klassenbildung hier das leitende Prinzip, und zwar faßt man dabei stets die Elemente einer Klasse als gegenseitig-ersetzbar auf. Bestimmt man die Anzahl einer Gruppe von Bäumen auf 10, so zeigt man schon durch den Ausdruck (Bäume), daß dabei von allem Individuellen abgesehen wird und daß jeder Baum „dasselbe" bedeuten soll. So liegt auch schon logisch in der Anzahl das, was sprachlich durch die Multiplicantia und Distributiva bezeichnet wird, denn zehn Bäume sind uns lediglich zehnmal je ein Baum. So wenig die Anzahl als Invariante einer Mengenklasse mit dem Maßbegriffe zu tun hat, in so enge Verbindung tritt sie doch zu ihm, wenn man nach der Bedeutung dieser Invariante für die einzelne Menge der Mengenklasse fragt, und in dieser Bedeutung gerade wurzelt in psychologischer Hinsicht die Anzahl.

Indem man je n Einheiten immer zu einer neuen Einheit zusammenfaßt, gelangt man zu Übereinheiten (Zweier, Dreier, Vierer usw.), und die Umkehrung dieses Prozesses führt zur Zerlegung der Einheit in n gegenseitig-ersetzbare Teile, d. h. zu Untereinheiten (Halbe, Drittel, Viertel usw.).

---

1) Vgl. Nr. 113 b, S. 225.

Das Bedürfnis nach Übersicht zwingt wieder zur Ordnung, und die Ökonomie verlangt, daß man dabei die alte Reihe 1, 2, 3, 4, ... benutzt.

Indem man diese für die Einschaltung der Drittel auffaßt als 3 Drittel, 6 Drittel, 9 Drittel, 12 Drittel, ... gelingt es gemäß dem ursprünglichen Schema 1, 2, 3, 4, ..., auch 1 Drittel, 2 Drittel usw. einzuordnen.

Die Theorie des Irrationalen, welche dieser Betrachtungsweise entspricht, ist von Weierstraß gegeben worden.

Die Rechenregeln der Addition usw. folgen hier sehr einfach, solange man sich auf endliche Mengen beschränkt. Bildet man aus zwei Mengen A und B mit den Anzahlen a und b eine dritte C mit der Anzahl c, so sieht man die Elemente von A, die gegenseitig-ersetzbar waren, und die Elemente von B, die gegenseitig-ersetzbar waren, in der Menge C als gegenseitig-ersetzbar an. Man hat dann ohne weiteres

$$c = a + b = b + a.$$

Ebenso gilt bei der Vereinigung von drei Mengen A, B, C zu einer Menge D ohne weiteres:

$$d = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Die Multiplikation ist hier zunächst nur eine Addition gleicher Posten, die Division eine Subtraktion gleicher Posten, für welche dann eine abgekürzte Schreibweise benutzt wird, die sich als äußerst fruchtbar erweist.

Die Einführung des Negativen liegt hier in dem Gedanken, daß zwei Arten der Einheit nebst Übereinheiten und Untereinheiten nötig sind, um bestimmte Aufgaben lösen zu können. Für die beiden Einheiten, welche e und e' heißen mögen, hat man die lineare Gleichung $e + e' = 0$ anzusetzen.

Dabei ist das Zeichen 0 zunächst die Invariante der leeren Systeme. Jeder Jäger der Urzeit, der seine Vorratskammer erschöpft sah und wieder zum Bogen greifen mußte, um für sich und die Seinen Nahrung zu beschaffen, hatte eine Anschauung von der Null. Daß den sprachlichen Ausdrücken wie „Nichts" usw. erst spät ein mathematisches Zeichen (0) gefolgt ist, ändert daran nichts; auch ein Positionssystem läßt sich ohne das Zeichen 0 herstellen. Vor Einführung der negativen Zahlen ist es in der Tat ziemlich gleichgültig, ob man die Reihe 1, 2, 3, 4, ... oder die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, ... bildet.

Ebenso liegt die Einführung des Imaginären in dem Gedanken, daß noch ein zweites Einheitenpaar i und i' erforderlich ist, um bestimmte Aufgaben zu lösen. Während für dieses wieder die Gleichung $i + i' = 0$ anzusetzen ist, wird die Verbindung zwischen dem ersten und dem zweiten Paare durch eine quadratische Gleichung hergestellt, nämlich durch $e^2 + i^2 = 0$, und darum läßt sich Reelles und Imaginäres nicht linear ineinander umrechnen, wie etwa Meter und Zentimeter.

γ) **Die Verbindung der beiden Arten der Arithmetik.**

Sind die Zeichen für die Ordinalia und für die Cardinalia verschieden, so entstehen zwei Reihen, welche schließlich zu einer Reihe zusammengefaßt werden können. Daß die Ordnung auch für die Arithmetik des Maßes erforderlich ist, wurde schon erwähnt, aber die Reihung ist hier im Grunde nicht ein Stellensystem wie bei der Arithmetik der Lage, sondern nur ein Mittel der Übersicht.

Umgekehrt lassen sich aber auch in der Reihe der Ordinalia

$$a, b, c, d, \ldots$$

die Schritte von a zu b, von b zu c, von c zu d, usw. der Invariantenfolge

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

zuordnen.

Da jeder einzelne Schritt dabei in bezug auf jeden andern als gegenseitig-ersetzbar angesehen werden muß, so sind nun auch bei einer graphischen Darstellung der Reihe $a, b, c, d, \ldots$ auf einer Geraden zwischen den Stellen $a, b, c, d, \ldots$ gleiche Strecken einzuführen.

Bei der Verschmelzung der Ordinalreihe und Kardinalreihe wird es auch erforderlich, in ersterer den Schritt zu a, d. h. die erste Setzung[1]) mitzurechnen, und dazu muß ein besonderes Zeichen für den Anfang des Schrittes angeführt werden. Vergleicht man die Reihung $a, b, c, d, \ldots$ mit den einzelnen Stufen einer Treppe, so fehlt noch der Podest. Es ist zweckmäßig, dafür die Invariante der leeren Systeme zu wählen, so daß die Reihe

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

nun auch für die Arithmetik der Lage Bedeutung hat.

Ursprünglich ist für sie die Lage der Nullstelle durchaus relativ, wie die Verschiebung jeder Skala zeigt.

Dagegen ist die Relativität der Einheit, welche sich in der Bildung von Übereinheiten und Untereinheiten zeigt, ein Begriff, der lediglich der Arithmetik des Maßes angehört.

Die verschiedenen Bedeutungen der Null, auf die namentlich Herr M. Simon öfter hingewiesen hat, ergeben sich zum Teil aus obigen Bemerkungen. Die „unechte" Null, welche im Anschluß an Euler[2]) u. a. immer noch hie und da zur Erläuterung des Differentiales verwendet wird, sollte überhaupt beseitigt werden.

Der Verschmelzung der beiden Zweige der Arithmetik scheint mir die dritte Theorie des Irrationalen, welche durch G. Cantor gegeben worden ist, zu entsprechen.

Bei dieser Verschmelzung tritt auch die Frage auf, wieviel (Anzahl) verschiedene Reihungen (Ordnung) eine Menge von n Elementen liefert.

---

1) Vgl. Nr. 105e, S. 98 u. f.

2) So heißt es z. B. bei Euler in der Vorrede zu den Institutiones calculi integralis (1755): quod nihilum ... signo dx representari eiusque differentiale vocari solet. Anderseits hat Euler auch in derselben Vorrede die Definition durch den limes.

Hier werden die Elemente insofern als verschieden angesehen, als man sie ordnen will, und insofern als gegenseitig ersetzbar (gleich), als sie einer Menge angehören. Damit ist die Stelle bezeichnet, an welcher die Theorie der Permutationen einsetzt und des weiteren die Kombinationslehre überhaupt.

Die stetige Reihe der reellen Zahlen und die stetige Reihe der imaginären Zahlen geben den Begriff der linearen Mannigfaltigkeit erster Ordnung, für deren graphische Darstellung eine Gerade, aber ebensogut eine Parabel oder ein Hyperbelast usw. verwandt werden kann.

Will man aus beiden Reihen ein Gewebe herstellen, so dürfen sich beide Reihen nur in Nullpunkte als dem ihnen gemeinsamen Punkte durchsetzen, falls jede Stelle eindeutig bestimmt bleiben soll. Die bekannte Zahlenebene, in der aber reelle und imaginäre Achse zunächst durchaus nicht rechtwinklig auf einander zu stehen brauchen, gibt ein Bild für ein solches Gewebe, innerhalb dessen die gemeinen Komplex-Zahlen ihre sichere Stellung haben. Diesem Bilde entspricht der Begriff einer linearen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung, für deren graphische Darstellung auch nicht gerade eine Ebene verwandt zu werden braucht, z. B. kann ebensogut ein hyperbolisches Paraboloid benutzt werden.

Denkt man sich nach dem Muster der Reihe der reellen Zahlen oder der Reihe der imaginären Zahlen n verschiedene Reihen aus n verschiedenen Einheiten gebildet, so gibt deren Verwebung ein Beispiel einer n-fachen Mannigfaltigkeit.[1])

Wir haben oben (vgl. S. 64 u. f.) auf die (unstetigen) Vorstellungs-Reihen und die Vorstellungs-Gewebe aus Verbalformen hingewiesen und erinnern jetzt daran, um zu betonen, daß der Begriff der n-fachen Mannigfaltigkeit von jeder besonderen Veranschaulichung unabhängig ist, aber nicht von jeder Veranschaulichung überhaupt.[2])

Bis zum Falle $n = 3$ werden immer (für den Punkt als Element) Gerade, Ebene und Raum, die Worte im Sinne Euklids gebraucht, die besten Veranschaulichungen der linearen Mannigfaltigkeiten sein.

Für die Schule haben ursprünglich Fr. Meyer (Halle a. S), M. Simon, H. Schubert u. a., sachgemäße Darstellungen der Arithmetik gegeben, zu denen in letzter Zeit die Werke von H. Weber (Nr. 162) und C. Färber (Nr. 39) hinzugekommen sind, neuerdings auch noch das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77 c). Dem Lehrer sind außerdem noch ganz besonders zu empfehlen die Vorlesungen von Herrn F. Klein, „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus“ (vgl. Nr. 78 m).

b) Ausführung im Unterrichte.

Das Lehrziel der Arithmetik an den höheren Schulen ist ziemlich allgemein anerkannt, es lautet: „Verständnis der Logarithmen-

1) Vgl. H. Graßmanns Ausdehnungslehre von 1844 (Nr. 53).

2) Vgl. hier S. 49 Anm. 4.

Tafel.“ Der Schüler soll das Handwerkszeug, welches er in den letzten Jahren so viel gebraucht hat, auch noch in seiner Konstruktion genau kennen lernen, wobei zu bemerken ist, daß die Logarithmen-Tafel natürlich u. a. auch die Tabellen der goniometrischen Funktionen selbst enthalten muß, welche bei der ersten Einführung in die Trigonometrie ja zunächst die Hauptsache sind.

Ich beginne die zusammenfassende Wiederholung und Ergänzung der Arithmetik in der Prima etwa mit der Frage nach den Elementaroperationen, ihrer Eigenart, ihrer Stufeneinteilung (3) und ihrer Anzahl (7). Unter Hinweis auf die Zweigliedrigkeit[1]) des menschlichen Denkens wird betont, daß auf den verschiedensten Gebieten immer aus 2 Denkelementen a und b nach einem bestimmten Gesetze ein drittes c gebildet wird, was durch $c = (a, b)$ bezeichnet wird. Der Ansatz $c = (a, b)$ hat 2 Umkehrungen $a = (c, b)$ und $b = (c, a)$ und man sollte also in der Arithmetik bei 3 Stufen 9 Operationen erwarten oder vielleicht 6, aber nicht 7. Die Schüler finden meist von selbst, daß $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ im Gegensatze zu $a^b \gtrless b^a$ den Widerpruch löst, daß aber in logischer Hinsicht doch auch auf den Stufen 1 und 2 beide Umkehrungen vorhanden sind.[2]) Dabei wird bemerkt, daß die Begriffsdetermination nicht commutativ ist, (z. B. Kettenglieder und Gliederketten), und daß die gegenseitige Ersetzbarkeit von a und b, welche deren Vertauschung bedingt, auf den verschiedenen Gebieten, für die sie gilt oder gelten soll, von Fall zu Fall festgestellt werden muß. Nachdem auch das assoziative und das distributive Gesetz hervorgehoben ist, wobei die Operationen der 1. und 2. Stufe (4 Spezies) den 3 Operationen der 3. Stufe bereits scharf gegenübertreten, beginnt die eigentliche ergänzende und abschließende Wiederholung.

Bei einer mäßigen Schüler-Generation gehe ich von der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots$$

aus, ihren vielseitigen Charakter (Ordinalia usw.) hervorhebend.[3])

Bei einer guten Generation kann man in geschichtlicher, psychologischer und logischer Hinsicht über diesen Anfang zurückgreifen (vgl. hier a).

Für den Aufbau des Gebietes der gemeinen Komplexzahlen von der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ aus wird das Permanenzprinzip (vgl. Nr. 59) verwendet, schließlich aber das gebrauchte Formelsystem $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ usw. zusammengestellt, so daß eine axiomatische Grundlage entsteht, etwa wie bei F. Klein oder D. Hilbert u. a. Im einzelnen ist nichts besonderes zu bemerken, da die oben erwähnten Werke (vgl.

---

1) Vgl. Wundts Logik, Psychologische Einleitung (Nr. 169 b).

2) Vgl. dazu R. Schimmack „Zur Gleichung $x^y = y^x$“ in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften, 1912.

3) Dabei wird man sich auch nicht den Hinweis auf die vor oder rückwärts schreitenden Beine des Papyrus Rhind als Operationszeichen für Addition und Subtraktion (im Sinne der Ordinalia?) entgehen lassen.

S. 105) hinreichende Anleitung geben; nur möchte ich hervorheben, daß die Theorie des Irrationalen streng begründet werden muß, wobei mir für die Schule der Weg von Weierstraß am günstigsten zu sein scheint. Natürlich wird man sich damit begnügen, die weitere Geltung der alten Rechenregeln des Rationalen nur für einen oder den andern Fall wirklich zu beweisen.

Die periodischen unendlichen Dezimalbrüche sind schon von der Unterstufe her bekannt und ihnen gegenüber werden die Irrationalzahlen zunächst am besten als unperiodische unendliche Dezimalbrüche eingeführt, wie es auch Herr F. Klein in seinen Vorlesungen für Anfänger tut.[1])

Die Zeichenregel wird ursprünglich als eine empirische Regel gemäß dem Permanenzprinzipe eingeführt. Wird z. B. für $5(3-2)$ probeweise angesetzt $\pm 5\cdot 3 \pm 5\cdot 2 = \pm 15 \pm 10$, so muß dies zu dem Ergebnisse 5 führen, und das ist nur der Fall, wenn das erste Zeichen $+$ und das zweite Zeichen $-$ ist, usw.

Den Beweis liefert man in Anlehnung an Weierstraß für 2 Einheiten $e = +1$ und $e' = -1$, die der Bedingung $e + e' = 0$ genügen, unter der Voraussetzung $e \cdot e = e$ gemäß dem Permanenz-Prinzipe durch Multiplikation von $e + e' = 0$ mit e und e', und zwar so:

1) $$e \cdot e + e \cdot e' = 0$$

$$e \cdot e' = -e \cdot e = -e$$

2) $$e \cdot e' = e' \cdot e$$

3) $$e' \cdot e + e' \cdot e' = 0$$

$$e' \cdot e' = -e' \cdot e = +e.$$

Graphische Darstellung (Zahlenebene). Geschichtliche Notiz über andere Formen der Arithmetik (Quaternionen usw.) und Charakterisierung der Einzigartigkeit der gemeinen Komplexzahlen als Abschluß bei „natürlicher“ Axiomatik.

Weitere Beschäftigung mit dem Komplexen, als dessen Sonderfälle nun Reelles und Imaginäres auftreten.[2]) Der Parallel-Koordinaten-Darstellung $a \cdot e + b \cdot i$ tritt die Polar-Koordinaten-Darstellung $r[e \cdot \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi]$ gegenüber, die später durch die Exponentialfunktion ihre endgültige Formung erhält. Sätze von Moivre. Kreisteilung.

Gegenüber der direkten Bestimmung der Hauptoperationen haben schon deren Umkehrungen, unter Hinweis auf das reiche Material früherer Beispiele, Gelegenheit gegeben, auf die „indirekte“ Bestimmung durch Bestimmungsgleichungen aufmerksam zu machen und diese zu klären.

---

1) Vgl. Nr. 78 m.

2) Historisch wird erwähnt, daß sich erst beim Übergange zum Komplexen bestimmte Fragen beantworten lassen und daß man dabei ganz von selbst wieder zum Reellen oder Imaginären zurückkehrt, wenn es das Problem fordert. Ein gutes Beispiel dazu gibt die Kreisteilung. Als Analogon dazu (sachgemäße Erweiterung des Gebietes) dient der projektive Beweis des planimetrischen Satzes von Desargues durch Übergang in den Raum.

Dabei ist bereits erkannt, daß die Lösung der Gleichung 1. Grades nur die vier Species erfordert (Eindeutigkeit); Körper der rationalen Zahlen. Die Gleichung 2. Grades rollt die Probleme des Irrationalen, Imaginären und Komplexen auf. Wiederholung der quadratischen Gleichung in methodischer Behandlung (1. Quadratische Ergänzung, 2. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten, 3. Zerlegung gemäß $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. 4. Reduktion durch $x = y - \frac{p}{n}$ für $n = 2$). Für die kubische Gleichung führen, abgesehen von der historischen Lösung, mit der begonnen wird, von diesen Methoden Nr. 4 und Nr. 2 systematisch zum Ziele. Bei ausreichender Zeit wird auch die Gleichung 4. Grades behandelt, gemäß Methode Nr. 4 und Nr. 2. Allgemeines über algebraische Gleichungen im Gegensatz zu transzendenten. Die Bestimmung der Schwimmtiefe für einen geraden Zylinder führt z. B. bei vertikaler Achsenlage zu einer sehr einfachen algebraischen, bei horizontaler Achsenlage zu einer ziemlich verwickelten transzendenten Gleichung (arc α und sin α). Satz von Gauß (n Wurzeln) meist historisch für die Schule aufgenommen, sonst Beweis wie bei Weber (Nr. 162 (erste Auflage) I, S. 208 f). Summenform (Koeffizienten) und Produktform (Wurzeln) der Gleichung. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten. Sie sind nach den Koeffizienten entwickelt und die Frage der Umkehrbarkeit dieses Systems (Entwicklung nach den Wurzeln) ist die Frage der allgemeinen Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen. Historische Aufnahme des Satzes von Abel, daß die Gleichungen oberhalb des Grades 4 nicht allgemein lösbar sind, d. h. nicht durch Formeln, die auf den vier Species und einer endlichen Anzahl von Radizierungen beruhen. Symmetrische Gleichungen und Kreisteilungsgleichungen als einfachste Fälle der Abelschen Gleichungen. Charakterisierung der Bedeutung des ersten Viertels des 19. Jahrhunderts (von Gauß bis Abel) für die Gleichungstheorie.

Gleichungssysteme (Gleichungen mit mehreren Unbekannten). Ihre Lösungen sind Wurzelsysteme, im einfachsten Falle Paare, z. B. $(x_1; y_1) \ldots (x_5; y_5)$.

Normale Systeme (n voneinander unabhängige Gleichungen mit n voneinander unabhängigen Unbekannten) im Gegensatze zur Überbestimmung und Unterbestimmung. Ordnung (Grad) und Anzahl der Lösungen für das normale System. Zu den drei üblichen Lösungsmethoden (1. Substitution, 2. Komparation, 3. Multiplikatoren) für das System erster Ordnung wird die sogenannte Eliminationsmethode hinzugefügt (die Potenzen der Unbekannten gelten selbst als Unbekannte), um zu zeigen, daß im allgemeinen stets eine Schlußgleichung auf rationalem Wege hergestellt werden kann, und um die sogenannten „Irrationalen Gleichungen" in bezug auf ihre Lösbarkeit beurteilen zu können.

Überbestimmung und Unterbestimmung. Erstere führt entweder auf Widersprüche oder auf Entdeckung von Beziehungen zwischen den Konstanten, die man nicht beachtet oder nicht gekannt hat, oder sie dient der Ausgleichungsrechnung bei Beobachtungen. Charakterisierung der Ausgleichungsrechnung mit besonderem Hinweise auf die Methode der kleinsten Quadrate. Die Unterbestimmung führt zurück zu der von Anfang an im Unterrichte beachteten Funktion und damit bei graphischer Darstellung zur analytischen Geometrie. Für 2 Variabeln gibt es eine Art (Linie in der Ebene), für 3 Variabeln zwei Arten der Unterbestimmung (Fläche und Linie im Raume). Die Unterbestimmung bei 2 Variabeln wird an vielen Beispielen durchgearbeitet, wobei stets Gleichung, Tabelle und graphische Darstellung koordiniert werden. Stetigkeit und Beispiele für unstetige Punktsysteme mit Häufungsstellen. Leichtere Aufgaben im Gebiete von 3 Variabeln.

Der einfachste funktionale Zusammenhang entspricht der viel verwendeten direkten Proportion, wie sie seit Quarta bekannt ist, er wird dargestellt durch eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y, durch $y = mx$ oder auch durch $y = mx + n$, wo $y - n$ zu x proportional ist. Für je 2 Wertepaare gilt in beiden Fällen $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ und dabei ist m der konstante Proportionalitätsfaktor. Für alle anderen Fälle von $y = f(x)$ wird die Ableitung $f'(x)$ als variabeler Proportionalitätsfaktor (m) eingeführt (vgl. zweispaltige Tabellen und deren Interpolation). Als klassische Beispiele Tangentenproblem und Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung, an Aufgaben durchgeführt. Ableitungsformeln für die einfachsten Funktionen. Taylors Satz für ganze Funktionen; Ausdehnung auf Potenzreihen unter Hinweis auf die Wichtigkeit des Restgliedes. Umkehrung des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung. Die graphische Darstellung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ in Parallelkoordinaten als klassisches Beispiel für den Zusammenhang von $s = f(t)$, $v = f'(t)$ und $j = f''(t)$: Die Fläche der Kurve stellt den veränderlichen Weg dar, die Neigungen ihrer Tangenten die veränderliche Beschleunigung. Einfache Integrationen, die sich als Grenzwerte von Summen behandeln lassen.

Das normale Gleichungssystem als System von Unterbestimmungen. Graphische Lösung von normalen Gleichungssystemen. Auch die einfache Gleichung wird künstlich zum Gleichungssystem gemacht, so z. B. $x^2 - 7x + 12 = 0$ übergeführt in

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Näherungsverfahren und Wurzelkorrektion. Maxima und Minima. Die Systeme 3. und 4. Ordnung, die nicht mehr konstruktiv (mit Zirkel und Lineal) behandelt werden können, lassen sich nach Einführung einer Parabel (die Schablone stellt sich der Schüler selbst her!) konstruktiv behandeln. Rückblick auf die Systeme 1. und 2. Ordnung bei Einführung eines Kreises usw. (Steiner und Mascheroni).

Die drei berühmten Probleme des Altertums. Die Kurve des Hippias.[1])

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 7.

Der Binomische Satz für ganzes positives n geht hervor aus den Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten für eine Gleichung $n$ten Grades mit den Wurzeln $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots -\alpha_n$, falls diese alle den Wert $-\alpha$ haben. Dabei das Wichtigste aus der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre.

Der Satz von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

hat schon früher die Frage nach independenten Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ nahe gelegt. Der binomische Satz gestattet jetzt die Ausführung. Die Substitution $n\varphi = \epsilon$ und $\varphi = \frac{\epsilon}{n}$ führt zu den Formeln für den n-fach geteilten Winkel (Rückblick auf die Kreisteilung), welche für $\lim n = \infty$ zu brauchbaren Reihen für Sinus und Cosinus zu führen scheinen, was nun zu untersuchen ist. Reihentheorie unter Wiederholung der Lehre von der arithmetischen und geometrischen Reihe, welche letztere für die Schule das klassische Beispiel der Konvergenzuntersuchung liefert und für andere Beispiele als Majorante dient. Beweis der binomischen Formel für beliebige Exponenten, eventuell unter Betonung der Konvergenzbedingung historisch aufgenommen. Reihen für Sinus und Cosinus, die offenbar Bruchstücke einer Reihe (e^{xi}) darstellen. Exponentialfunktion und Logarithmus, sowie Arcusfunktionen nebst Berechnung der Zahl π.

Den Abschluß bildet das Ergebnis: „Wir haben zwei Gruppen von Funktionen kennen gelernt:

I. Eindeutige Funktionen von einfacher Periodizität, die sich rational aus der Exponentialfunktion aufbauen lassen.

II. Unendlichvieldeutige Funktionen als Umkehrungen der vorigen, deren Quelle der natürliche Logarithmus ist."

Im Gegensatz zu den vielen Aufgaben, die sich rechnerisch bewältigen ließen, wird noch auf solche hingewiesen, die nicht durch einfachperiodische Funktionen lösbar sind, (z. B. Mantel eines schiefen Kreiskegels, Länge des Bogens bei der Ellipse, Hyperbel, Lemniscate (Gauß) usw.). Hinweis auf die doppeltperiodischen Funktionen als Fortsetzung für die Bewältigung der Probleme.[1])

C) Geometrie.

Für die Schule kommen selbstverständlich nur Archimedische Formen der Geometrie in Frage, und zwar hat man bei der zusammenfassenden und ergänzenden Wiederholung in Prima natürlich anzuknüpfen an den geometrischen Aufbau der Unter- und Mittelstufe.

Geht man bei dieser Sachlage von einer Logisierung der zeitlich-räumlichen Sinnenwelt aus, so ist der Punkt (als ausdehnungsloser Ort) die natürliche Invariante, welche der Geometrie als Element zugrunde

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 111 u. f.

liegt, und damit wird der Raum selbst als dreifache Mannigfaltigkeit aufgefaßt[1]), entsprechend den drei Bewegungsstufen: Punkt ... Linie, Linie ... Fläche, Fläche ... Körper bzw. Raum.

Als weitere Invarianten kommen Gerade und Ebene hinzu, sie mögen als erstes und zweites Elementargebilde bezeichnet werden. Bei deren Bildung ist in logischer Beziehung maßgebend:

1. Ein Element allein führt zu keiner Bestimmung.
2. Das Elementargebilde erster Ordnung ist durch zwei Elemente eindeutig bestimmt.
3. Das Elementargebilde zweiter Ordnung ist durch ein Element und ein Elementargebilde erster Ordnung, also auch durch drei Elemente eindeutig bestimmt, falls diese nicht nur ein Elementargebilde erster Ordnung bestimmen.

Veranschaulicht man sich die Gerade durch Bewegung eines Punktes, so ist sie eine bestimmte Punktreihe, und es fragt sich, ob die Gerade als eine offene oder eine geschlossene Reihe für die Darstellung der Erscheinungen zweckmäßiger ist. Bisher hat sich die einfachere Annahme einer offenen Reihe als ausreichend erwiesen, und damit bleibt die Wahl zwischen der Geometrie Euklids und der von Bolyai-Lobatschefskij.

Bei Nr. 3 tritt die Frage auf, ob das Elementargebilde zweiter Ordnung, das sich als eine durch einen Punkt und die Punkte einer Geraden bestimmte Reihung von Elementargebilden erster Ordnung darstellt, durch diese Reihung vollständig gegeben werden soll oder nicht. Durch die Forderung der Vollständigkeit wird die Eindeutigkeit der Parallelen im Sinne Euklids bestimmt, so daß die Geometrie von Bolyai-Lobatschefskij ausscheidet.

Eine vollstänige Definition des Elementes und der beiden Elementargebilde ist nur indirekt, d. h. durch Beziehungen möglich. Diese indirekte Definition liegt vor in der Axiomatik Hilberts, welche eine große Reihe von Untersuchungen zu einem vorläufigen Abschlusse bringt.[2])

Im übrigen genügt es für die Schule, hinzuweisen auf Thiemes Elemente der Geometrie (Nr. 147), welche auf Grund der modernen Axiomatik aufgebaut sind, auf das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77c) und für alles weitere auf Wellsteins Geometrie (Nr. 165). Auch Schottens vergleichende Planimetrie (Nr. 128) ist zum Studium sehr zu empfehlen. Außerdem bietet etwa der Artikel von Enriques in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III, Heft 1) dem Lehrer eine gute Orientierung über den Stand der einschlägigen Fragen.

Ganz besonders hinzuweisen ist außerdem noch wieder auf die Vorlesungen von Herrn F. Klein „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus". (Vgl. Nr. 78m.)

---

1) Vgl. hierzu Nr. 167d.
2) Vgl. dazu S. 74.

Das Lehrziel für die Geometrie ist an unseren höheren Schulen noch nicht völlig eindeutig bestimmt, doch zeigt die Aufnahme des Wortes „Axiomatik" in den von Herrn Treutlein ausgearbeiteten, wohl auch in Fühlung mit Herrn Stäckel entstandenen neuen Lehrplan in Baden deutlich die Richtung der augenblicklichen Bestrebungen an.

Die Meraner Lehrpläne weisen von Anfang an auf eine reichliche Verwendung der Bewegung innerhalb der Geometrie hin, so daß diese also nach ihnen nicht etwa ausgeschlossen ist, wie es zum Teil unter Berufung auf die Forderung strenger Systematik verlangt wird.[1] Es ist auch nicht einzusehen, warum man in der Zeit der freien Begriffsbildung nicht auch den Begriff „des im Raume beweglichen starren Körpers", dessen „Starrheit" aber nur „Unveränderlichkeit bei der Bewegung" bedeutet, als zulässige Invariante ansehen dürfte.[2]

Die Geometrie der Schule ist zunächst Geometrie des Maßes, und zwar im Sinne Euklids. Diese benutzt anfangs zwei Maße, die Strecke und den Winkel. Die Goniometrie macht sie einmaßig, und man hat dann für die extensiven Größen der Geometrie das Schema:

Stufe 0: Streckenverhältnis ... Winkel (l^0).
Stufe 1: Strecke (l^1).
Stufe 2: Zweigliedriges Streckenprodukt ... Flächeninhalt (l^2).
Stufe 3: Dreigliedriges Streckenprodukt ... Volumen (l^3).

Die Entstehung des Maßstabes nach Wahl einer Einheitsstrecke und des Maßkreises (Transporteurs) nach Wahl des Einheitswinkels ist genauer zu erläutern, unter Beziehung auf die Reihe der reellen Zahlen (Axiom des Eudoxos. meist fälschlich nach Archimedes benannt), ebenso die Bildung der Flächeneinheit und der Volumeneinheit, wobei den Produkten der Maßzahlen entsprechend die neuen Größen von der Dimension l^2 und l^3 gebildet werden. Inhaltsgleichheit in der Ebene und im Raume unter Hinweis auf die sogenannte Umsetzung (Zerlegungsgleichheit) der Flächen und Körper, welche für die Pyramide (vgl. die Untersuchungen von M. Dehn[3]) nicht möglich ist. Notwendigkeit des Cavalierischen Prinzipes oder einer äquivalenten Integralbetrachtung.

Bei der Wiederholung sind Planimetrie, Stereometrie und die Anfänge der darstellenden Geometrie einheitlich zusammenzufassen. Systematische Behandlung der Konstruktionen, die entweder an und für sich oder für die Anwendungen wichtig sind. Etwas von den Verwandtschaften: zentrische und symmetrische Systeme usw., auch Abbildung durch reziproke Radien. Als Hauptaxiome treten dabei hervor die Axiome der

1. Eindeutigkeit der Geraden (durch 2 Punkte),
2. Eindeutigkeit der Ebene (durch Punkt und Gerade),
3. Eindeutigkeit der Parallelen (durch Punkt und Gerade).

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 13f.
2) Vgl. Nr. 167 d.
3) In den Mathem. Annalen Bd. 55 (1902).

Bei der Wiederholung sind die Sätze darauf zu prüfen, von welchen dieser Hauptaxiome sie abhängen. Soweit die Planimetrie nur vom ersten Hauptaxiom abhängt, ist sie als Sphärik übertragbar, falls man sich auf eine Halbkugel beschränkt und den (halben) Grenzkreis (konjugierte Pole!) ausschließt. Daß die Lehre von der Ähnlichkeit durch Hauptaxiom 3 bedingt wird und also auf der Kugelfläche keine Bedeutung hat, ist von besonderer Wichtigkeit. Beispiele erläutern den Zusammenhang und den Unterschied zwischen Planimetrie und Sphärik. So bleibt z. B. der Satz vom Außenwinkel des Dreiecks für die Sphärik in der Form bestehen, daß der Außenwinkel größer ist als einer der beiden nicht zu ihm gehörigen inneren Winkel, während er in der Planimetrie deren Summe ist.

Sphärik ($\alpha + \beta + \gamma > 180^0$) und Pseudosphärik ($\alpha + \beta + \gamma < 180^0$) im Gegensatze zur Euklidischen Planimetrie ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$), wobei etwa die Fläche Beltramis neben der Kugel zur Veranschaulichung herangezogen wird.

Erweiterung der Betrachtung auf den Raum. Frage nach den Raumformen. Die drei hauptsächlichen Geometrien, deren mittlere die Euklids ist, welche bisher zur Darstellung der Erscheinungen ausgereicht hat. Die „unstetigen" Räume, deren Behandlung wohl mit Dedekinds algebraischem Raume (Vgl. Nr. 24b, S. XII) begonnen hat, bleiben der Schule am besten fern.

Axiomatischer Abschluß für die Geometrie Euklids in einfacher Form (etwa Hilberts Gruppe I, IV und V). Übertragbarkeit der Axiome auf andere Systeme von Raumgebilden, z. B. auf das Parabolische Kugelgebüsch nach Wellstein.[1]) Auch Poincarés Lexikon[2]) für die Bolyai-Lobatschefskijsche Geometrie ist für die Schule bei einer guten Generation und günstiger Lage der Reifeprüfung wohl verwendbar.

Frage nach der Beseitigung der Bewegung innerhalb der Geometrie: axiomatische Festlegung eines Kongruenzsatzes, etwa nach Hilbert.

Die analytische Geometrie ergänzt die Geometrie des Maßes durch Einführung von Lagebestimmungen. Zunächst werden Strecke, Streckenverhältnis, Dreiecksfläche und Tedraedervolumen durch Parallelkoordinaten ausgedrückt, ev. auch in Polarkoordinaten umgeschrieben. Die eigentliche analytische Geometrie beginnt mit der Unterbestimmung von Gleichungssystemen. Die Gerade in der Ebene und die verschiedenen, den einzelnen Aufgabengruppen angepaßten Formen ihrer Gleichung. Unter gelegentlicher Exkursion in den Raum ist das Ziel etwa die Behandlung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in der Ebene mit ihren beiden Invarianten, wobei Determinanten lediglich als mnemotechnisches Schema herangezogen werden. Ausblick auf die Flächen zweiter Ordnung.

Das Strahlenbüschel, dessen Behandlung an Hesses Normalform an-

---

1) Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 34f. 2) Nr. 113a S. 42.

schließt, u. a. führt zur Geometrie der Lage, der in der sogenannten „synthetischen Geometrie“ auch auf der Schule bereits vorgearbeitet ist. Allgemeine Charakteristik der Geometrie der Lage als selbständiger Wissenschaft, etwa nach Reyes Einleitung und ersten Vorträgen.

Über die Raumanschauung in subjektiver und objektiver Hinsicht läßt sich vieles sagen, aber es ergibt sich dabei nur, daß der objektive Raum eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Raumanschauungen der Einzelnen ist, für deren Darstellung bisher Euklids Geometrie ausgereicht hat. In psychologischer Hinsicht entspricht der Tastraum (haptisch) der Geometrie des Maßes, der Sehraum (optisch) der Geometrie der Lage.[1])

D) Phoronomie.

Aus der „Phoronomie der Lage“ oder Kinematik, die man auch noch zur Geometrie rechnen kann, sind nur die einfachsten Sätze über die Bewegung eines starren Körpers für die Schule erforderlich. Da dessen Lage durch drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, so läßt sich der Körper durch ein Bewegungsdreieck ABC ersetzen. Verschiebung und Drehung als einfache und technisch wichtige Sonderfälle der Bewegung. Darstellung der allgemeinen Bewegung durch Abrollen zweier Kegel, deren Spitzen etwa in A liegen, während die Drehungen um Achsen durch A erfolgen. Anwendung auf die Bewegung der Erde.

In der „Phoronomie des Maßes“ tritt die Zeit zu den arithmetischen und geometrischen Größen hinzu. Über sie läßt sich in subjektiver und in objektiver Hinsicht vieles[1]) sagen, doch ergibt sich dabei schließlich nur, daß die objektive Zeit eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Zeitanschauungen der Einzelnen ist, die in ihr logisiert sind. Zu ihrer Messung dienen periodische Erscheinungen (Erddrehung, Pendel, Schwingungsdauer des Natriumlichtes usw.). Die eigentümliche protensive Größe der Zeit (Dauer) wird stets, z. B. durch die Zeigerbewegung und das Zifferblatt, extensiv gemacht.

Während die Griechen aus ästhetischen Gründen der Lehre von der Bewegung die gleichförmige Bewegung auf dem Kreise als Invariante zugrunde legten, hat man ihr seit den Tagen Leonardos (da Vinci) und Galileis die „gleichförmige Bewegung auf der Geraden“ als Invariante zugrunde gelegt. Ersteres erwies sich als unzweckmäßig, letzteres als fruchtbar.

Während an dieser, dem Zeitfluße entsprechenden „Urbewegung“ nichts weiter zu erklären ist, bedarf jede Abweichung von ihr der Erklärung.

---

1) Weiteres dazu in Nr. 36b und 36c, Bd. II von 120c, 113a, 169a, 169b u. a. Entsprechend der dreifachen Einteilung Analysis situs, Geometrie der Lage und Geometrie des Maßes unterscheidet Herr Enriques in Nr. 36c auch drei Gruppen von Empfindungen, indem er das allgemeine Tast- und Muskelgefühl für die Analysis situs in Anspruch nimmt, ein besonderes aber für die Geometrie des Maßes.

Die „Urbewegung" gibt Veranlassung, die erste intensive Größe zu bilden oder vorzubereiten[1]), die Geschwindigkeit.[2])

Ist bei der Bewegung eines Punktes w die durchlaufene Wegstrecke und d die zugehörige Zeitdauer, so ist für zwei Wegstücke w_1 und w_2 und die zugehörigen Zeitdauern d_1 und d_2 die Proportion

$$w_1 : w_2 = d_1 : d_2$$

bei beliebiger Größe von w und d für die gleichförmige Bewegung charakteristisch.

Um eine Invariante für das einzelne Wegstück zu erhalten, bildet man

$$w_1 : d_1 = w_2 : d_2$$

zunächst an den Maßzahlen, und führt $\frac{w}{d} = c$ als neue Maßzahl ein. Dieser ordnet man eine neue Größe unter dem Namen „Geschwindigkeit" zu, die man als $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}}$ charakterisiert, den Quotienten der Maßzahlen dabei zum Muster nehmend. Der Vorgang ist so, als wenn man in der Geometrie für Bogen (b) und zugehörigen Zentriwinkel (β) am Kreise aus der Gleichung

$$b_1 : b_2 = \beta_1 : \beta_2$$

die Gleichung

$$b_1 : \beta_1 = b_2 : \beta_2$$

bildete und nun bei einem Radius r die neue Maßzahl $\frac{2r\pi}{360^\circ}$ für den Quotienten bildete und ihr die neue Größe $\frac{\text{Bogen}}{\text{Zugehöriger Winkel}}$ zuordnete. Das ist hier nicht zweckmäßig, bei der Bildung der Geschwindigkeit aber fruchtbar.

Führt man für eine gleichförmige Bewegung auf beliebiger Bahn die Stellung s auf der Bahn und den Zeitpunkt t der Zeitskala (Uhr) ein, so ist stets $w = s_1 - s_2$ und $d = t_1 - t_2$ und es gilt also

$$s_1 - s_2 = c(t_1 - t_2)$$

oder bei passender Einstellung der Skala

$$s = ct.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf ihre Einheiten homogen. Allgemein heißt $s = f(t)$ eine Bewegungsgleichung. Beispiele der Bewegung für einfache Fälle von $f(t)$ bei gegebener Bahn. (Zeichnerische Ausführung.)

Die Abweichung, welche $s = f(t)$ im allgemeinen von $s = ct$ zeigt, und die Abweichung der Bahn von der Geraden muß erklärt werden.

1. Die Abweichung auf der Bahn (Tangentialbeschleunigung).

---

1) Je nachdem man die Geschwindigkeit (v) oder die Bewegungsgröße (mv) als intensive Größe bezeichnet.

2) Sie muß für die Verwendung „extensiv" gemacht werden. Vgl. das bekannte Wort von Gauß bei Sartorius v. Waltershausen (Nr. 123 S. 98.).

Entsprechend $s = f(t)$ Einführung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ und der tangentialen Beschleunigung $j_T = f''(t)$ und höherer Ableitungen. Man geht aus von der mittleren Geschwindigkeit für ein Bahnstück und bewirkt den Übergang zur Grenze usw.

2. Die Abweichung der Bahn von der Geraden (Normalbeschleunigung).

Darstellung der Bewegung als Reihung von elementaren Urbewegungen.[1]) Die Richtungen der elementaren Urbewegungen (Tangenten) werden der Geschwindigkeit zugeordnet und diese so als Vektor dargestellt. Das Parallelogrammgesetz.[2]) Die Beschleunigung als Vektor und ihre Zerlegung in tangentialer (j_T) und normaler (j_N) Richtung.

Läßt man die Geschwindigkeit als Vektor am beweglichen Punkte haften, so beschreibt dessen Spitze relativ zu ihm den Hamiltonschen Hodographen, den man natürlich auch erhält, wenn man die Geschwindigkeiten als Vektoren an irgend einem festen Punkte anbringt.

Für die gleichförmige Kreisbewegung sind Bewegung und Hodograph ähnliche Systeme. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r und die Geschwindigkeit mit c, so hat man also für die Normalbeschleunigung j_N den Ansatz:

$$2r\pi : 2c\pi = c : j_N$$

und also

$$j_N = \frac{c^2}{r}.$$

Einführung des Krümmungskreises (ρ) und Ersatz der beliebigen Bahn durch eine Reihung von Bogen der Krümmungskreise. Bei einer Geschwindigkeit v gilt allgemein:

$$j_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Die Gesamtbeschleunigung j wird gebildet aus j_T und j_N und diese Bildung der Beschleunigung wird für die Kraft von grundlegender Bedeutung.

Soll die Bahn nicht als „gegeben" angesehen werden, so braucht man in der Ebene zwei und im Raume drei Bewegungsgleichungen. So entstehen drei Methoden:

1. Grundmethode bei gegebener Bahn.
2. Projektionsmethode (Parallelkoordinaten).
3. Polarmethode (Polarkoordinaten).

In der Ebene sind bei Nr. 2 die Bewegungsgleichungen $x = f(t)$ und $y = g(t)$, bei Nr. 3 die Bewegungsgleichungen $r = f(t)$ und $\varphi = g(t)$ erforderlich.

---

1) Im Gegensatze dazu später gelegentlich die Darstellung als Reihung von elementaren gleichmäßig-geänderten Bewegungen. Vgl. die Zeichnungen dazu in Nr. 167n, I, S. 98 u. 99.

2) Vgl. dazu die Untersuchung über dessen Voraussetzungen in Nr. 125a.

Schwingungsbewegung, Wellenbewegung, gleichförmige Bewegung auf einer Schraubenlinie dürften hier etwa das Lehrziel der Schule bezeichnen.

Die Flächengeschwindigkeit und Keplers Gesetze; deren Zusammenfassung in Newtons Gesetze, zunächst in phoronomischer Hinsicht.

Für Körper, und zwar lediglich für starre, ist aus der Phoronomie des Maßes nur das Einfachste über Verschiebung und Drehung zu geben, wobei aber Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung nicht übergangen werden dürfen.

Verwendung der Phoronomie für Aufgaben der Geometrie[1]) (Tangenten, Krümmungskreis usw.).

E) Dynamik.

Für die Schule scheint es mir bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft zweckmäßig, den geschichtlichen Weg der Dynamik in Abkürzung zu wiederholen.

Der uralte statische Kraftbegriff bietet keine besonderen Schwierigkeiten, er ist genau so entstanden, wie vieles andere, als „interpretatio ex analogia hominis". Die Erfahrungen am eigenen Körper bei Berührung mit fremden Körpern geben Veranlassung, die Begriffe „Zug und Druck" zu bilden, und diese auch auf die gegenseitigen Beziehungen zweier Fremdkörper zu übertragen. Der Stein, der unsere Hand drückt, quetscht auch nachgiebigen Boden, der Strick, der an unserer Hand zieht, reißt auch eine Stange aus. Die Erfahrung bietet alles, was hier zur Logisierung erforderlich ist, d. h. zur Darstellung der Kraft als Vektor, nämlich „Angriffspunkt, Richtung und Wert (Größe)". Für die Bestimmung der Kräfte gibt der überall vorhandene „Schwerdruck" oder „Schwerzug" (Gewicht) das Maß, wobei die Hebelwage, die ja eigentlich der Massenvergleichung dient, der Messapparat ist. Eine wirkliche Messung der Kräfte liefert die Federwage (Dynamometer), die dem Schüler als Brief- oder Fleischwage bekannt ist. In ihr kommt Hookes Gedanke zur Geltung: „Ut tensio sic vis". Daß diese statische Kraft in irgendwelcher Beziehung zur Bewegung steht, ist natürlich auch eine alte Erfahrung. Unser Körper leitet Bewegungen ein und hindert sie unter Zug- und Druckempfindungen, und man überträgt dies auch auf Fremdkörper. Bewegte Körper erzeugen in unserm Körper unter Bewegungsänderungen Zug und Druck. Ein belastetes Seil hält Zug aus, reißt es, so tritt Bewegung der Belastung ein, und der Zug gilt als verschwunden, usw.

Galilei hatte, wenn auch der Wortlaut bei ihm oft dynamisch gefärbt erscheint, auf dem Gebiete der Bewegung nur phoronomisch gearbeitet, erst Huygens, der sich von Galileis mathematischem Pendel zum physischen wandte (Trägheitsmoment), stieß auf eigentliche dynamische Auf-

---

1) Vgl. Nr. 167 n, I, S. 188 u. f.

gaben. Dies führt zu Newton, der den Begriff der *kinetischen* Kraft einführt und mit ihm den alten *statischen* Kraftbegriff in Verbindung bringt, indem er diesen in die Invariante „Masse“ und die Beschleunigung spaltet. Das war eine geniale Leistung, die natürlich nicht „bewiesen“ werden kann.

Daß die Abweichung von der „Urbewegung“ *außerhalb* dieser gesucht werden muß, ist ein seit Galilei geltendes Prinzip, und diesem gemäß kann man sich Newtons Leistung etwa folgendermaßen klar machen: Gibt man dem Punkte der Geometrie einen Koeffizienten seiner dynamischen Wirksamkeit (Maßzahl der Masse) und nennt man einen solchen Punkt der Einfachheit wegen einen Massenpunkt, falls diese Masse verschwindend klein gedacht wird im Vergleich mit den Massen, die uns umgeben, so liegt es nahe, für zwei Massenpunkte A_1 und A_2 von den Massen m_1 und m_2 folgende Voraussetzungen zu machen, wobei eine *eindeutige* Darstellung des Vorgangs angestrebt wird:

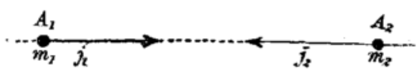

Fig. 5.

Die Beschleunigung j_1 von A_1 ist proportional der Masse m_2 von A_2 und umgekehrt, und beide Beschleunigungen liegen in der Geraden $A_1 A_2$ und haben entgegengesetzte Richtungen. Man hat also (vgl. Figur 5)

$$j_1 = C m_2 \text{ und } j_2 = C m_1 .$$

Daraus folgt:

$$m_1 j_1 = C m_1 m_2 = m_2 j_2.$$

Mit Rücksicht auf die erfahrungsmäßig gegebene *Paarwirkung* (actio reactioni par) bei statischen Kräften, die in einer Stützstange zwischen A_1 und A_2 auftreten würden, befriedigt dieser Ansatz, und es liegt also nahe, die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung einzuführen. In der Bewegung gemessen stellt dieses Produkt die *kinetische* Kraft (Effektivkraft) dar, bei gehemmter Bewegung die entsprechende *statische* Kraft.

Das Parallelogrammprinzip, welches nun die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der statischen Kräfte zusammenfaßt, erledigt zunächst alle weiteren Fragen für *einen* Massenpunkt.

Für Körper als Systeme von Massenpunkten (oder Elementen der Masse) ist zunächst das *Prinzip der Massensumme* einzuführen, wonach entsprechend den Erfahrungen an der Hebelwage die Massen der Massenpunkte zur Masse des Körpers summiert werden.

Im übrigen muß natürlich die *Verbindungsart* der Massenpunkte bekannt oder definiert sein, ehe sich weitere Aussagen machen lassen. Der *starre* Körper ist dadurch charakterisiert, daß an ihm Gegenkräfte ohne Wirkung sind, d. h. beliebig fortgenommen oder zugesetzt werden dürfen. Diese Definition gestattet das *Parallelogrammprinzip* auf die zerstreuten Kräfte, die am starren Körper angreifen, anzuwenden. Für nicht starre

Systeme sind natürlich auch besondere Definitionen erforderlich, ehe ihre besondere Behandlung möglich ist.

Dabei ist darauf hinzuweisen, daß alle Kräfte als Paarwirkungen auftreten. Treten sie an Massenpunkten desselben Systems auf, so heißen sie dessen „innere" Kräfte. Treten sie an Massenpunkten verschiedener Systeme auf, so wird die eine Hälfte der Paarwirkung als äußere Kraft angesehen, die andere nicht beachtet. Geben wir z. B. für eine Uhr der Paarwirkung zwischen Erde und Uhrgewicht Gelegenheit sich zu äußern, indem wir das Gewicht an die Kette der Uhr hängen, so wird die hier verschwindende Einwirkung des Gewichts auf die Erde (mit Recht) nicht beachtet und die andere Hälfte dieser Paarwirkung gilt für die Uhr als äußere Kraft. Auf dieser Teilung der Paarwirkung unter Vernachlässigung ihrer einen Hälfte beruht die Berechtigung der gewöhnlichen Bezeichnung der Kraft als Ursache der Bewegung, man müßte natürlich ebenso von der „Ursache des Zuges oder Druckes" sprechen.

Die Auffassung der statischen als gehemmter kinetischer und der kinetischen als entwickelter statischer Kraft findet ihren scharfen Ausdruck im Prinzipe von d'Alembert, aus dem bekanntlich die Gleichungen von Lagrange folgen. Dieses Prinzip ist das wirkliche Prinzip der „Erhaltung der Kraft", falls man das Wort „Kraft" im eigentlichen Sinne nimmt. Ist $K = mj$ für einen Massenpunkt eines beliebigen Systems die in der Bewegung gemessene Kraft, so ist diese aufzufassen als Resultante aller inneren $[J]$ und äußeren Kräfte $[A]$, die auf den Massenpunkt wirken.

In Vektorbezeichnung ($\times$) hat man also

$$K \overset{\times}{=} J \overset{\times}{+} A.$$

Führt man die Gegenkraft $\overline{K}$ von K ein, so gilt ebenso

$$\overline{K} \overset{\times}{+} J \overset{\times}{+} A \overset{\times}{=} 0.$$

Denkt man nun die Massenpunkte des Systems in der Lage, welche sie in einem bestimmten Zeitpunkte haben, festgehalten, so daß sie einen, diesem Zeitpunkte entsprechenden starren Körper bilden, so steht an diesem das System aller Kräfte $\overline{K}$, I, A im Gleichgewichte. Da sich aber das System der Kräfte I gemäß dem Prinzipe der Paar-Wirkung in sich aufhebt, so steht auch das System aller Kräfte $\overline{K}$ und A im Gleichgewichte d. h. die Systeme K und A sind aequivalent.

Eine passende Anwendung des Prinzips von d'Alembert für die Schule bieten die Erscheinungen an der Atwoodschen Fallmaschine dar.

In dem Prinzipe der Paar-Wirkung kommt die alte Frage zur Ruhe, ob die Materie (ex analogia hominis) aktiv ist (Aristoteles) oder träge (Zeitalter Galileis), sie ist beides, aber jede einseitige Deutung ist unnatürlich, es handelt sich eben um eine Beziehung. Man hat also für die Begründung der Dynamik, nachdem die Kraft definiert ist, folgende Prinzipien:

1. Prinzip der Masse. Jedem Massenpunkte kommt ein bestimmter Zahlen-Koeffizient seiner dynamischen Wirksamkeit zu.
2. Prinzip des Parallelogramms.
3. Prinzip der Massensumme.
4. Prinzip der Paar-Wirkung.
5. Prinzip von d'Alembert.

Von den bekannten Umformungen dieser Prinzipien ist das „Prinzip des kleinsten Zwanges" (Gauß) für die Schule sehr wohl brauchbar, da es zur Lösung von Aufgaben benutzt werden kann.

Die Bildung der gebräuchlichen dynamischen Größen, wie Kraft-Antrieb, Bewegungs-Größe, Arbeit, Energie usw. bietet keine Schwierigkeiten. Den Maßzahlen-Verbindungen entsprechend werden, falls es zweckmäßig erscheint, neue „Größen" gebildet, und so die Homogeneität der Gleichungen gewahrt. Im absoluten Maßsysteme treten die drei Grundgrößen, die extensive, die protensive und die intensive zusammen. Dimension der Größen.

Bei den Anwendungen stehen selbstverständlich Energie und Arbeit im Vordergund, für deren Beziehung der freie Fall zunächst das klassische Beispiel gibt. Der Quellpunkt aller Formeln ist die „phoronomische" Gleichung

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = j(s - s_0) = j \cdot w$$

welche durch Multiplikation mit der Maßzahl der Masse „dynamisch" wird. Newtons Gesetz in dynamischer Hinsicht (vgl. S. 116).

Leichte Übungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, auch mit Berücksichtigung der Deformationen (Hookes Gesetz), beleben das Aufgabengebiet, dessen Lehrziel etwa durch die Behandlung des physischen Pendels bezeichnet wird, außerordentlich.[1]) In der Statik sind natürlich auch die Grundzüge der Graphostatik zu geben.[2])

Für den Lehrer gibt der 4. Band der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" alles Erforderliche, namentlich der einleitende Artikel von Herrn Voß, „über die Prinzipien der rationellen Mechanik" und der Artikel von Herrn Stäckel über Elementar-Mechanik. Dabei ist aus der Vorrede von Herrn F. Klein besonders hervorzuheben: „Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst gelernt werden.... Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muß....

---

1) Vgl. Nr. 167 m.

2) Man vergleiche damit P. Appel und J. Chappuis „Leçons de Méchanique élementaire à l'usage des élèves des classes de mathématique A et B. 3. Aufl. Paris 1909.

Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vincis sich wieder bewahrheiten, daß die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist". In diesem Sinne soll auch schon auf der Schule gewirkt werden. Dabei kann auch zum Bewußtsein gebracht werden, daß im Zeitalter Leonardos die alte Frage: „Warum fallen die Körper?" ersetzt wurde durch die moderne Frage: „Wie fallen sie, d. h. nach welchem Gesetze?" Auf die erste Frage hatten die Aristoteliker vieldeutig mit Angabe von Ursachen als Ur-Sachen (Dingen) geantwortet, auf die zweite antworteten Leonardo da Vinci und Galilei eindeutig durch die Fallgesetze, d. h. durch Beziehungen zwischen Weg und Zeit, und damit begann die Phoronomie und Kinetik, die mit der alten Statik zur modernen Mechanik zusammenwuchs.

Diese „klassische" Mechanik, welche jetzt vielleicht wegen der Einordnung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen einer Umbildung entgegengeht, wird für die Schule wohl noch lange ihre Bedeutung behalten. Wie sie sich zu der neuen, im Werden begriffenen allgemeinen Mechanik verhält, das zeigt gewissermaßen mit einem Schlage der überaus durchsichtige und übersichtliche Vortrag[1]) von F. Klein: „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe", in dem er Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung vom Standpunkte der affinen Auffassung der Welt aus beleuchtet. „Was die modernen Physiker Relativitätstheorie nennen, ist die Invariantentheorie des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes x, y, z, t (der Minkowskischen Welt) gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kollineationen (Affinitäten), eben der Lorentzgruppe."

5. Die Anwendungen.

Auf die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die einzelnen Erscheinungsgebiete muß auch auf der Schule von Fall zu Fall hingewiesen werden. Dazu eignen sich einfache Aufgaben, welche zeigen, was alles am „Gegebenen" vernachlässigt werden muß, um es dem „Kalkül" zu unterwerfen.

Dies geht auch besonders hervor aus dem gewöhnlichen Gange der technischen Mechanik mit seiner Stufenfolge in der Annäherung an die Wirklichkeit. Man betrachtet zunächst Kräfte am starren Körper der Geometrie, der frei ist und natürlich gewichtslos, bringt ihn in gegenseitige Beziehung mit der Erde (Schwerpunkt, Gewicht usw.), hebt die Freiheit auf (Befestigungs-Reaktionen und Reibungen) und ordnet schließlich die tatsächlich gegebenen Form-Änderungen ein, so weit es angeht.

Andererseits halte ich die Wahrscheinlichkeitslehre, durch welche selbst dem (scheinbaren) Zufalle Gesetze abgerungen werden, für sehr geeignet, die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die Schüler zu klären.

---

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19, 1910.

Dabei ist alles, was hier am Schlusse des Kapitels „Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter" ausgeführt wurde, auch für die Schule in geeigneter Form zu verwenden.

Über die numerischen und graphischen Methoden der angewandten Mathematik geben für die Schule gute Auskunft der Vortrag von Herrn C. Runge auf dem letzten Osterferienkursus (1912) in Göttingen[1]) und die daran anschließenden Erörterungen.[2])

Was das Gebiet der Anwendungen anlangt, so kann zunächst auf die Lehrbücher und sonstigen Veröffentlichungen von Herrn G. Holzmüller verwiesen werden, vor allem aber auf die Weber-Wellsteinsche Enzyklopädie, namentlich in ihrer neuesten Auflage, und außerdem auf das Einschlägige in diesen IMUK-Abhandlungen.[3]) In bezug auf die Mechanik, insbesondere auch in bezug auf die technische Mechanik findet man in meinem Lehrbuche (Nr. 167n, vgl. dazu auch Nr. 167m) zahlreiche Anwendungen und Aufgaben, welche auch für die Schule brauchbar sind.

Während auf den Schulen die Aufgaben jetzt wohl fast überall auch für die Naturerkenntnis fruchtbar gemacht werden, sind Aufgaben, die der Naturbeherrschung dienen, im Schulbetriebe immer noch selten.

Für Beides gilt ein Wort Galileis, das sich in seinem „Saggiatore" findet und etwa folgendermaßen lautet[4]): „Die Philosophie des Universums kann man nur verstehen, wenn man die Sprache kennt, in der sie geschrieben ist. Diese ist aber die Sprache der Mathematik, und ihre Zeichen sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren." Dabei muß man sich daran erinnern, daß Galilei sich nicht bloß mit der Feststellung der Fallgesetze u. a. beschäftigte, sondern auch mit Untersuchungen über die Bruchfestigkeit der Balken. Wir haben bereits auf die Vorrede von Herrn F. Klein zur Mechanik in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" (Bd. 4) hingewiesen[5]), in der auch Leonardos da Vinci gedacht wurde: er nannte die Mechanik das Paradies der Mathematiker, denn „si viene al frutto".

So haben jene großen Schöpfer der modernen Mechanik über deren Wert gedacht, und dem entspricht es durchaus, daß in neuerer Zeit auch Schülerübungen auf den verschiedenen Gebieten, namentlich auch auf dem der Physik, die Bedeutung von Beobachtung und Versuch für die Schule außer Frage stellen. Dabei ist aber auch darauf hinzuweisen, wie die Maßzahlen, welche den Erscheinungen abgerungen werden, tatsächlich zu verwenden sind, nicht bloß zur Verifizierung bereits bekannter

---

1) Vgl. Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus Göttingen 1912, Bericht von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912.

2) Vgl. dazu ferner M. d'Ocagne „Calcul graphique et nomographique" (Encyclopédie Scientifique), Paris 1908.

3) Vgl. auch hier S. 14, Anmerkung 1.

4) Vgl. Opere di Galileo Galilei, Firenze 1890–1900, VI, S. 232.

5) Vgl. hier S. 120.

Formeln, sondern auch zur Herstellung gesetzlicher Beziehungen und deren systematischer Verbesserung.

So muß der Schüler die Aufstellung „empirischer" Formeln bzw. die Ableitung von „Gesetzen" bei gegebenem Zahlenmaterial in einfachen Fällen selbst vornehmen.[1]) Dabei kann man auch zeigen, daß die gewählte Funktion bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleibt[2]), und im besonderen auf die Bedeutung der Potenzreihe, zunächst der endlichen hinweisen. Das Zahlenmaterial für s und t beim freien Falle führt leicht zu der Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, in anderen Beispielen (Spannung des Wasserdampfes) ist der Abschluß in einer Formel durchaus unbestimmt.

Dabei ist die Bedeutung der Proportion, zunächst der direkten und dann der indirekten, besonders hervorzuheben. Man hat immer zunächst den Versuch gemacht und wird es immer wieder tun, für zwei Größen, die zugleich wachsen und zugleich abnehmen, den funktionalen Zusammenhang durch eine direkte Proportion zu bestimmen, um gegebenen Falles von hier aus durch Verbesserungen weiter zu kommen.

Aus den Sätzen „Der größeren Seite im Dreiecke liegt der größere Winkel gegenüber" usw. schließen gerade begabtere Schüler auf die Proportion

$$a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$$

bzw. für irgend einen Erweiterungsfaktor m auf die Gleichung $a = m\alpha$. Am rechtwinkligen Dreiecke ($\gamma = 90^0$) sehen sie ein, daß der Schluß falsch war, weil hier $\alpha + \beta = \gamma$ nach sich ziehen würde $a + b = c$, was einen Widerspruch mit $a + b > c$ gibt. Später erfahren sie den richtigen Ansatz $a = m \cdot \sin \alpha$ für $m = 2r$, falls man den Radius des Umkreises mit r bezeichnet, und die Sinus-Reihe gibt ihnen deutlich die Verbesserung an, welche erforderlich war.

Die Korrektur der Pendel-Formel für den Ausschlag α

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + f(\alpha))$$

und Ähnliches zeigt, wie die mathematische Anpassung an die Erscheinungen mehr und mehr vervollkommnet werden kann.

Während sich die direkte Proportion durchaus im Gebiete der Gleichungen ersten Grades bewegt, führt die indirekte Proportion bei graphischer Darstellung zur Hyperbel. Als Beispiel diene etwa das Boyle-Mariottesche Gesetz

$$p \cdot v = \text{constans}.$$

Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit aller Messungen ist auch die Bedeutung der Überbestimmung von Gleichungssystemen klar zu machen, woran sich einige allgemeine Bemerkungen über Ausgleichungsrechnung knüpfen lassen.

1) Vgl. dazu auch Nr. 140.

2) Vgl. hierzu Nr. 78 i und Nr. 161 a S. 55, Anm. 2.