Mathematik und philosophische Propaedeutik

Wernicke, Alexander

Leipzig, 1912

ABHANDLUNGEN
N MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
ATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND III HEFT 7

MATHEMATIK
UND
PHILOSOPHISCHE PROPÄDEUTIK

VON

SCHULRAT DR. **ALEX. WERNICKE**
DIREKTOR DER STÄDTISCHEN OBERREALSCHULE UND
PROFESSOR AN DER HERZOGLICHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

SCHRIFTEN
DES DEUTSCHEN UNTERAUSSCHUSSES DER INTERNATIONALEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHTSKOMMISSION

Es handelt sich einerseits darum, das deutsche Publikum durch geeignete Mitteilungen und Übersetzungen über den allgemeinen Stand der Arbeiten der Kommission auf dem laufenden zu halten, andererseits aber die verschiedensten Seiten des deutschen mathematischen Unterrichts in ausführlichen Darlegungen zur Geltung zu bringen. Dieser Aufgabe dienen zwei Reihen von Veröffentlichungen:

A. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von W. Lietzmann. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.

1. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Übersetzung von W. Lietzmann. (S. 1—10.) 1909. M. —.30.
2. Noodt, G., Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. (S. 11—32.) 1909. M. —.80.
3. Klein, F., und Fehr, H., Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 33—38.) 1909. M. —.20.
4. Klein, F., und Fehr, H., Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie Zühlke, P., Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preußischen Realschulen. (S. 39 bis 54.) 1910. M. —.50.
5. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfaßten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. (S. 55—74.) 1911. M. —.60.
6. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 75—88.) 1911. M. —.50.
7. Lietzmann, W., Der Kongreß in Mailand vom 18. bis 20. September 1911, sowie Schimmack, R., Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. (S. 89—126.) 1912. M. 1.60.
8. Der Kongreß in Cambridge vom 22. bis 28. August 1912. (Erscheint nach dem Kongreß.)

B. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh.

I. Band. Die höheren Schulen in Norddeutschland. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (XII u. 102 S.) 1909. M. 2.—
2. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höh. Knabenschulen in Preußen. Mit 18 Fig. (VIII u. 204 S.) 1910. M. 5.—
3. Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preußen und in einigen norddeutschen Staaten. (VI u. 118 S.) 1911. M. 3.20.
4. Thaer, A., Geuther, N., Böttger, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. (VI u. 93 S.) 1911. M. 2.—
5. Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts a. d. höh. Mädchenschulen, insbes. in Norddeutschland. (Unter der Presse.)

II. Band. Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. (XIV u. 85 S.) 1910. M. 2.40.
2. Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (XII u. 78 S.) 1910. M. 2.20.
3. Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (IV u. 104 S.) 1910. M. 2.60.
4. Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Baden. (IV u. 48 S.) 1910. M. 1.60.

5. Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Großherzogtum Hessen. (VI u. 51 S.) 1910. M. 1.60.
6. Hoßfeld, C., Der mathemat. Unterricht an den höheren Schulen Thüringens. (Erscheint im August 1912.)
7. Wirz, Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsaß-Lothringen. (IV u. 58 S.) 1911. M. 1.80.

III. Band. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. (VI u. 146 S.) 1911. M. 3.60.
2. Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.) 1910. M. 2.80.
3. Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (IV u. 92 S.) 1911. M. 2.60.
4. Hoffmann, B., Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. Mit 9 Figuren. (VI u. 68 S.) 1912. M. 2.—
5. Timerding, H. E., Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (IV u. 45 S.) 1911. M. 1.60.
6. Gebhardt, M., Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht an den höheren Schulen Deutschlands. Dargelegt auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen. [ca. 150 S.] (Erscheint im August 1912.)
7. Wernicke, Mathematik und philosophische Propädeutik. Mit 5 Figuren. [ca. 115 S.] (Erscheint im August 1912.)
8. Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (In Vorbereitung.)
9. Höckner, Die Mathematik in der Lebensversicherung. (In Vorbereitung.)

IV. Band. Die Mathematik an den technischen Schulen. Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.

1. Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (XVI u. 100 S.) 1910. M. 2.60.
2. Ott, C., Die angewandte Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie. 1912. (Unter der Presse.)
3. Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorb.)
4. Schilling, C., und Meldau, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen Navigationsschulen. (VI u. 82 S.) 1912. M. 2.—
5. Trost, Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (In Vorbereitung.)
6. Penndorf, B., Rechnen und Mathematik im Unterricht an den kaufmännischen Lehranstalten. (IV u. 100 S.) 1912.
7. Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (VI u. 56 S.) 1911. M. 1.80.
8. Furtwängler, Ph., Die mathematische Ausbildung der Landmesser. (In Vorbereitung.)
9. Stäckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. (In Vorbereitung.)

V. Band. Der mathematische Elementarunterricht und die Mathematik an den Lehrerbildungsanstalten. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 20 Figuren. (VII u. 125 S.) 1912. M. 3.—
2. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. Mit 38 Fig. [IV u. 88 S.] (Erscheint im August 1912.)
3. Treutlein, P., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Süddeutschland, mit Ausführungen von Hensing über Hessen, Cramer über Baden, Geck über Württemberg, Kerschensteiner u. Bock über Bayern. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. [XIV u. 163 S.] (Erscheint im August 1912.)
4. Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)
5. Dreßler, H., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen. (In Vorbereitung.)
6. Lietzmann, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preußen. (In Vorbereitung.)

ABHANDLUNGEN
ÜBER DEN MATHEMATISCHEN UNTERRICHT IN DEUTSCHLAND
VERANLASST DURCH DIE
INTERNATIONALE MATHEMATISCHE UNTERRICHTSKOMMISSION
HERAUSGEGEBEN VON F. KLEIN
BAND III HEFT 7

MATHEMATIK
UND
PHILOSOPHISCHE PROPÄDEUTIK

VON

SCHULRAT DR. ALEX. WERNICKE
DIREKTOR DER STÄDTISCHEN OBERREALSCHULE UND
PROFESSOR AN DER HERZOGLICHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

MIT 5 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT

Die Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes, welche sich in Deutschland als Parallelerscheinung zu der französischen Unterrichtsreform von 1902 gemäß den Meraner Vorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (1905) gegenwärtig mehr und mehr durchsetzt, habe ich mit besonderer Freude und Genugtuung begrüßt, weil ich mit zu denen gehöre, welche bereits in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts in ihrem bescheidenen Kreise für eine derartige Umgestaltung zu wirken suchten[1]).

Die Reform stellt für die Schulmathematik hauptsächlich folgende Forderungen auf:

1. Volle Bewertung der Anschauung,
2. Betonung des funktionalen Anschauens und Denkens,
3. Behandlung sachgemäßer Anwendungen,
4. Belebung und Förderung des Unterrichts durch geschichtliche Mitteilungen und Rückblicke,
5. Propädeutischer Aufbau aller Gebiete, aber im Hinblick auf einen systematischen Abschluß, wobei u. a. auch eine Fusion von Planimetrie und Stereometrie anzustreben ist,
6. Philosophische Vertiefung des abschließenden Unterrichts.

---

1) Vgl. den Göttinger Habilitationsvortrag von Herrn R. Schimmack (S. 581 in Nr. 125b des Literatur-Verzeichnisses) und außerdem Bd. III, 1 dieser Imuk-Abhandlungen. Als ich neben meinen Vorlesungen an der Herzogl. Techn. Hochschule zu Ostern 1882 auch Unterricht am Herzogl. Gymnasium zu Braunschweig übernahm, schwebte mir die Idee vor, die damalige Gymnasial-Mathematik und die damalige Gewerbeschul-Mathematik unter philosophischer Vertiefung zu einer höheren Einheit zu verschmelzen. War es doch der Zeitpunkt, an dem in Preußen die ursprünglich vom Handelsministerium geschaffenen Gewerbeschulen unter dem Namen „Oberrealschulen" durch Bonitz neben das altsprachliche Gymnasium und das Realgymnasium gestellt wurden, und hatte ich doch selbst als Gymnasial-Abiturient noch ein Jahr lang die Oberstufe der von meinem Vater geleiteten Gewerbeschule zu Gleiwitz besucht, um mich namentlich in Mathematik und Naturwissenschaften und im Zeichnen weiter zu bilden, und auch zugleich mich in der Oberschlesischen Technik umgesehen! Für meine Idee fand ich volles Verständnis bei dem Direktor des Gymnasiums, Herrn Schulrat Eberhard, einem geschätzten Altphilologen, der ursprünglich auch Mathematik und Naturwissenschaften studiert und sich für diese Gegenstände dauernd ein großes Interesse bewahrt hatte. Als dann von dem alten Gymnasium im Herbste 1885 ein neues abgezweigt wurde, konnte ich an diesem in Verein mit meinem Kollegen Schlie einen modernen Lehrplan für Mathematik und Physik aufstellen und durchführen helfen, an dem auch meine Studienfreunde Geitel und Elster in Wolfenbüttel,

Von diesen Forderungen bietet die letzte, welche das Thema der folgenden Abhandlung bildet, besondere Schwierigkeiten dar, und zwar, weil in der Gegenwart die Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie von den führenden Geistern äußerst verschieden aufgefaßt und beurteilt werden.

Die „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" spielen zurzeit bei den wissenschaftlichen Erörterungen eine hervorragende Rolle, und der lebhafte Wunsch nach einer gegenseitigen Verständigung ist sowohl von hervorragenden Philoscphen, wie auch von bedeutenden Mathematikern bereits oft genug ausgesprochen worden, ohne daß doch bisher eine solche erzielt worden wäre.

So sagt z. B. Herr A. Voß gelegentlich seiner kritischen Bemerkungen zu dem Mathematischen in Wundts Logik (vgl. Nr. 161 a S. 81): „Der Mathematiker wird es stets dankbar anerkennen, wenn ihm von anderer Seite Aufklärung über die Vorstellungen und Begriffe seiner Wissenschaft zuteil wird. Was soll man aber mit den Darlegungen Wundts über den Raum anfangen?" Selbst ein so hervorragender Forscher der exakten Richtung, wie Herr Wundt, ist tatsächlich nicht völlig frei von dem fast allgemeinen Vorurteile der Philosophen, die Beurteilung der Grundlagen der Mathematik für leichter zu halten, als sie in Wirklichkeit ist[1]). Sie setzt ein sehr eingehendes Studium bestimmter Gebiete mathematischer Einzelarbeit voraus, nicht bloß eine summarische Kenntnisnahme davon. Es gibt eben in der Mathematik keinen Königsweg, auch nicht für Philosophen.

Andererseits beklagt z. B. Herr A. Höfler[2]), der ja selbst jahrelang auch Lehrer der Mathematik und Physik war, in seiner Didaktik (S. 468), „daß mancher Mathematiker ... vom bescheidenen Schulmann bis hinauf zum großen, fruchtbaren mathematischen Forscher ... den logischen Apparat handhabt, wie ein Nicht-Physiker einen physikalischen Apparat" und fügt hinzu: „Wenn letzterer unter ungeschulten Händen in der Regel früher oder später mehr oder weniger leidet, wundert sich niemand darüber ..., wenigstens kein Physiker. Nun, was dem Naturforscher recht ist, gesteht man bekanntlich noch lange nicht dem Philosophen als billig zu." Ebenso heißt es bei Höfler kurz vorher (S. 467), daß sonst hochge-

---

die bekannten Physiker, mitwirkten. Die Einführung der preußischen Lehrpläne von 1891, welche zu Ostern 1893 im Herzogtum Braunschweig erfolgte, machte hier der freien Gestaltung ein Ende ... bis dahin hatten wir auch an den Gymnasien in den Tertien die vielbegehrte vierte Mathematikstunde. Weiteres hierzu findet man in der Vorrede zu Nr. 167f. Für die Primaner war damals Nr. 167b von der Anstalt in der erforderlichen Anzahl von Exemplaren angeschafft, und ebenso wurde Nr. 167d benutzt, während Nr. 167f als Schulbuch eingeführt war. Auf Veranlassung meines Kollegen Schlie wurde außerdem in der Geometrie H. Seegers (Güstrow) Lehrbuch benutzt, das wohl mit zuerst die Theorie der Verwandtschaften für die Schule nutzbar gemacht hat.

1) Vgl. dazu auch Nr. 162 Bd. II, S. 132 Anmerkung (erste Aufl.).

2) Vgl. ferner dessen Bemerkungen in Nr. 12 der Österr. IMUK-Hefte zu den Abhandlungen von Schoenflies und Korselt im 20. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

schätzte mathematische Schulmänner mangels einer auch nur halbwegs systematischen Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Logik als solcher nur allzubald kopfscheu werden, wenn sie bei Erörterung mathematischer und mathematisch-didaktischer Fragen auch nur den einen oder anderen Kunstausdruck der wirklichen Logik hören, dessen sich der Logiker natürlich ebenso unbefangen bedient wie der Mathematiker irgendeiner seiner vielen tausend technischen Ausdrücke, ohne daß ihm jemand zu sagen wagt, er bediene sich unverständlicher oder gar inhaltsleerer Wörter und Phrasen."

Daß der Logiker und überhaupt der Philosoph ebenso wie der Mathematiker sozusagen ein besonderes terminologisches Recht hat, ist natürlich zuzugeben, doch wird dabei zu bemerken sein, daß sich die Mathematiker in Bezug auf ihre technischen Ausdrücke untereinander vollkommen verstehen, die Philosophen aber nicht. Infolgedessen ist es für den Mathematiker selbst bei bestem Willen äußerst schwierig, mit der Philosophie Fühlung zu gewinnen. So wird man z. B. die Terminologie, welche Herr Höfler und Herr Meinong im Anschluße an ihre eigenen Untersuchungen eingeführt haben, für sehr sachgemäß halten können, zugleich aber bedauern müssen, daß sie bei den Philosophen durchaus nicht allgemein anerkannt ist.

Bedenklicher ist noch, daß sich hinter den terminologischen Schwierigkeiten der Philosophie meist auch Unterschiede grundlegender Auffassungen der Philosophen selbst verstecken, welche durch bestimmte erkenntnistheoretische Richtungen bedingt sind. Diesen entspricht eine Vieldeutigkeit der ersten Ansätze und damit auch eine Vieldeutigkeit der letzten Abschlüsse, auf welche die Geschichte der Philosophie nur allzudeutlich hinweist.

Wie soll man da weiterkommen?

Gelegentlich einiger Bemerkungen über die Grundlagen der Mechanik fordert Herr Voß (Nr. 161 a S. 71) u. a. auch „geeignete erkenntnis-theoretische Konventionen", und dies scheint mir überhaupt eine durchaus notwendige Bedingung für eine Verständigung zwischen Philosophen und Mathematikern zu sein.

Für solche Konventionen ist m. E. gegenwärtig die Grundfrage, wie die Einseitigkeit des reinen Denkens und die Einseitigkeit der bloßen Empirie in einem, Kants reiner Anschauung entsprechenden, aber nicht mit ihr übereinstimmenden Dritten so überwunden werden kann, daß damit die Grundlage für Urteile von innerer Notwendigkeit und darum von allgemeiner Gültigkeit gegeben wird.[1])

Um eine Antwort auf diese Grundfrage sollten Philosophen und Mathematiker sich gemeinsam bemühen und im übrigen dabei beherzigen, was Herr F. Klein am Schlusse einer Verhandlung (1905) über „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" in der Philosophischen Gesellschaft an

1) Vgl. dazu auch die Auseinandersetzungen Höflers in Nr. 69e S. 21.

der Universität Wien (vgl. Nr. 781 S. 10) ausgesprochen hat. Da heißt es: „Wenn so wie heute Philosoph und Mathematiker zusammenkommen, pflegt es immer zu geschehen, daß man zunächst sich gegenseitig nicht versteht und infolgedessen auch nicht so würdigt, wie man möchte. Jeder hat für sich jahrzehntelang gewisse Gedankenreihen ausgesponnen, und es ist ganz unmöglich, das man dieselben dem anderen in wenigen Minuten klar legt und geläufig macht. Der Wert einer solchen Debatte scheint mir vielmehr darin zu liegen, daß man in lebendigere Fühlung kommt und daß man sich daraufhin vornimmt, den Argumenten der Gegenseite im eigenen stillen Nachdenken nachzugehen." „Die heutige Debatte möchte ich mit dem Wunsche schließen, daß der hergestellte Kontakt von beiden Seiten im Auge behalten werde, damit sich von ihm aus nach beiden Seiten Anregendes zur wissenschaftlichen Behandlung gemeinsamer Probleme auch weiterhin ergebe."

Im Hinblick auf die ganze Sachlage ist es nur natürlich, daß Mathematiker und Philosophen bei der ersten Herstellung eines solchen Kontaktes aneinander gegenseitig viele Mängel, oft vielleicht nur Mängel finden, aber die Überzeugung von der Wichtigkeit der gemeinsamen Probleme wird schon bei weiterer Arbeit und bei gegenseitigem guten Willen das erforderliche Vertrauen entstehen lassen.

Ich würde mich freuen, wenn auch die folgende Abhandlung dazu beitragen könnte, das gegenseitige Vertrauen etwas zu stärken. Nur bitte ich bei der Beurteilung meiner Ausführungen, die natürlich nichts abschließendes geben können, freundlichst zu berücksichtigen, daß mein Thema nicht „Philosophie und Mathematik" lautet, sondern „Mathematik und philosophische Propädeutik", und daß also die Bedürfnisse der Schule überall die Begrenzung der Erörterungen feststellen, was ja auch schon durch den verfügbaren Raum bedingt wird.

Schließlich möchte ich noch der Redaktion meinen besonderen Dank aussprechen für ihre vielfachen Anregungen behufs weiterer Klärung der behandelten Fragen.

Herzlichen Dank schulde ich auch meinem Kollegen an der Hochschule, Herrn Prof. Dr. Timerding, für diesen oder jenen Hinweis in bezug auf die Vervollständigung des angefügten Literaturverzeichnisses.

Die Nummern im Texte und in den Anmerkungen beziehen sich auf dieses Literaturverzeichnis (Abschnitt V).

Braunschweig, im Mai 1912.

A. W.

INHALT

	Seite
Vorwort	III
Inhalt	VII

Erster Abschnitt.

Die gegenwärtige Lage.

1. Geschichtlicher Rückblick	1
2. Die Aufgabe	13
A) Mathematik	13
B) Philosophische Propädeutik	17
C) Das höhere Schulwesen Deutschlands	20
3. Schwierigkeiten der Lösung	21

Zweiter Abschnitt.

Grundlegende Betrachtungen.

1. Die Kantische Lösung und ihre Mängel	32
2. Ding und Beziehungen	41
3. Denken und Anschauen	47
4. Die Arbeitsart der Mathematiker	56
5. Der Gegenstand der Mathematik	64
6. Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter	69

Dritter Abschnitt.

Folgerungen für die Schule.

	Seite
1. Allgemeine Gesichtspunkte	80
2. Die Philosophie im Geschichtlichen der Mathematikstunde	85
3. Psychologisches und Formal-Logisches im Unterrichte der Mathematik	87
4. Die Systematik des mathematischen Unterrichts	95
A) Allgemeines	95
B) Arithmetik	97
a) Grundlegende Betrachtungen	97
α) Die Arithmetik der Lage	97
β) Die Arithmetik des Maßes	101
γ) Die Verbindung der beiden Arten der Arithmetik	104
b) Ausführung im Unterricht	105
C) Geometrie	110
D) Phoronomie	114
E) Dynamik	117
5. Die Anwendungen	121

Vierter Abschnitt.

Schlußbetrachtungen	124

Fünfter Abschnitt.

Übersicht über die Literatur	128

Erster Abschnitt.

Die gegenwärtige Lage.

1. Geschichtlicher Rückblick.

Die Philosophie hat an den höheren Schulen Deutschlands, seitdem sich diese nach dem Muster der alten Artistenfakultät der Universität weiter ausgestaltet hatten, bis gegen das Ende des XVIII. Jahrhunderts hin eine ständige Berücksichtigung erfahren, zum Teil in propädeutischer Behandlung, zum Teil in weitergehender Ausgestaltung[1]).

Neben älteren Richtungen herrschte um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts auch auf den Schulen namentlich die Philosophie von Leibniz, und zwar in der systematischen Form, die ihr Chr. Wolff gegeben hatte.

In diesen Frieden brachen die Arbeiten Kants hinein, zunächst im Jahre 1781 die Kritik der reinen Vernunft, und infolgedessen wurde die sichere Stellung der Philosophie an den höheren Schulen langsam erschüttert. Je mehr man einsah, daß sich diesen Kritiken gegenüber alle ältere Philosophie nicht ohne weiteres halten ließ, während doch die Kantische Geistesarbeit außerhalb des Horizontes der Schule zu liegen schien, umsomehr war man bereit, die Philosophie als besonderes Unterrichtsfach der Universität zu überlassen.

Die ganze geistige Lage wird bezeichnet durch die Preisaufgabe, welche die Berliner Akademie für das Jahr 1791 ausschrieb; sie lautete: „Welches sind die wirklichen Fortschritte, die die Metaphysik seit Leibniz's und Wolff's Zeiten in Deutschland gemacht hat?" Wenn auch die Antwort von Schwab-Stuttgart gekrönt wurde, welche jeden tatsächlichen Fortschritt und auch das Bedürfnis nach einem solchen in Abrede stellte, so eroberte doch die Kantische Philosophie immer weitere Kreise, und unter den Universitäten wurde ihre Hochburg Jena, das damals mit Weimar zusammen die Führung des kulturellen Deutschlands hatte, bis zu der großen Zeitenwende des Jahres 1806.

Als der Wiener Kongreß den armen deutschen Landen endlich den Frieden wieder gab und man sich überall anschickte, auch das Schulwesen neu zu gestalten, war die Lage für die Philosophie nicht günstiger geworden. Ihren Romantikern, welche Kant in sich über-

---

1) Vgl. Nr. 166 u. Nr. 173.

stürzender Eile gefolgt waren, konnte auf der Schule noch weniger eine Stelle gegeben werden als dem Systeme Kants.

Darum verhielten sich sowohl die Gymnasien, welche meist jetzt erst durch Aufnahme von verbindlichem Unterrichte im Griechischen aus den alten Lateinschulen entstanden, als auch die Realschulen und Gewerbeschulen, welche langsam vom Standpunkt der Nützlichkeit zu den Höhen einer allgemeinen Bildung emporklommen, der Philosophie gegenüber ziemlich ablehnend. Dort bemühte man sich, den Humanismus der Antike wieder zu beleben, ohne sich aber dabei in Platons genialer Schöpfung wirklich heimisch zu machen, hier suchte man nach einem neuen Ideale, ohne zunächst das einzelne zum Ganzen gestalten zu können.

Für Preußen zeigen die Lehrpläne von 1816 an bis hinein in unsere Tage so ziemlich dasselbe Bild: die prinzipielle Anerkennung der Philosophie in der Form einer Philosophischen Propädeutik ringt, mag sie nun freudig oder gezwungen ausgesprochen werden, stets mit der Ratlosigkeit in bezug auf eine praktische Durchführung. Man beschränkt das Ziel auf Bruchstücke der formalen Logik und der empirischen Psychologie, gelegentlich auch auf erstere allein, weist diesem Gebiete aber keine besonderen Stunden an, sondern fordert auf, im Deutschen oder in der Mathematik die erforderliche Zeit dafür zu gewinnen, gelegentlich auch im Lateinischen oder Griechischen, je nach der Befähigung der Lehrer.

Hervorgehoben werden darf vielleicht, daß die Unterrichts- und Prüfungsordnung für die Realschulen von 1859 diesen in der obersten Klasse die Behandlung der formalen Logik vorschreibt und daß eine etwas spätere Verfügung (13. Dez. 1862) auch den Gymnasien unter Hinweis auf die Elementa Logices Aristoteleae von Trendelenburg die Pflege der Logik empfiehlt, obwohl „ein rationeller Sprachunterricht und alle mathematische Wissenschaft“ auch an sich eine „Philosophische Propädeutik“ enthalte.

Selbst Bonitz, der mit dem berühmten Organisations-Entwurf von 1849 in Österreich der Philosophischen Propädeutik wenigstens an den Gymnasien eine sichere Stellung geschaffen hatte, konnte in Preußen nicht entsprechendes erreichen. Seine Lehrpläne von 1882, mit denen für Preußen das altsprachliche Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule zum ersten Male als die drei anerkannten Formen der höheren Schule eingeführt werden, lassen es in bezug auf die Philosophische Propädeutik beim Alten, und zwar hauptsächlich, weil es an den geeigneten Lehrern fehle.

Den größten Tiefstand in der theoretischen und praktischen Bewertung der Philosophischen Propädeutik zeigen die Lehrpläne von 1891, in denen es heißt: „Die auf allen Stufen neben der Dichtung zu pflegende Prosalektüre hat den Gedanken- und Gesichtskreis des Schülers zu erweitern und zumal auf der Oberstufe den Stoff für Erörterungen wichtiger allgemeiner Begriffe und Ideen zu bieten. Zweckmäßig geleitet kann diese Lektüre in der Prima die oft recht unfruchtbar betriebene und als besondere Lehraufgabe hier ausgeschiedene Philosophische Propädeutik ersetzen."

Die allgemeine Belebung des Interesses für Philosophie, die dem Rückgange zu Kant[1]) langsam folgte, wirkte aber bald auch auf die höheren Schulen zurück. In den Lehrplänen von 1901, welche jetzt noch in Geltung sind, heißt es bei Behandlung der Oberstufe im Deutschen: „Wünschenswert erscheint eine in engen Grenzen zu haltende Behandlung der Hauptpunkte der Logik und der empirischen Psychologie".

Die dazu gehörigen „Methodischen Bemerkungen" führen dann weiter folgendes aus: Durch eine zweckmäßig geleitete Lektüre „wird die Philosophische Propädeutik, deren Aufnahme in den Lehrplan der Prima an sich wünschenswert ist, wirksam unterstützt, da aber, wo die Verhältnisse ihre Aufnahme nicht ermöglichen, wenigstens einigermaßen ersetzt werden können. Aufgabe einer solchen Unterweisung ist es, die Befähigung für logische Behandlung und spekulative Auffassung der Dinge zu stärken und dem Bedürfnisse der Zeit, die Ergebnisse der verschiedensten Wissenszweige zu einer Gesamtauffassung zu verbinden, in einer der Fassungskraft der Schüler entsprechenden Form entgegenzukommen. Zu wünschen ist, daß zur Förderung dieser Aufgabe auch die Vertreter der übrigen wissenschaftlichen Lehrfächer beitragen."

Der hier wieder auftretende Gedanke an die Philosophie als Einheit alles Wissens ist auch sonst noch an einzelnen Stellen der Lehrpläne lebendig geworden. So heißt es bei den Methodischen Bemerkungen für die Naturwissenschaften u. a.: Der Schüler „soll einen Einblick gewinnen in den gesetzmäßigen Zusammenhang der Naturerscheinungen und in die Bedeutung der Naturgesetze für das Leben; er soll auch, soweit dies auf der Schule möglich ist, die Wege verstehen lernen, auf denen man zur Erkenntnis dieser Gesetze gelangt ist und gelangen kann."

Die preußischen Lehrpläne von 1901 beherrschen zurzeit auch außerhalb Preußens im großen und ganzen das nördliche und mittlere Deutschland. Im Süden, der ja überhaupt diese und jene Eigenart zeigt, hat sich auch die Philosophische Propädeutik einen Rest von Selbständigkeit im Lehrplane der höheren Schulen bewahrt, doch ist darüber im allgemeinen kaum etwas Besonderes zu berichten[2]), was natürlich nicht ausschließt, daß hier und da ein hervorragender Lehrer auch über

1) Für weitere Kreise wurde dies sichtbar durch Langes viel gelesene Geschichte des Materialismus, deren erste Auflage 1866 erschien, und durch die berühmte Rede „Über die Grenzen des Naturerkennens" von Du Bois-Reymond auf der Naturforscher-Versammlung von 1872 (vgl. Nr. 29).

2) Vgl. Nr. 166.

die üblichen Bruchstücke der formalen Logik und empirischen Psychologie hinausgekommen ist und hinauskommt, wie es auch im Gebiete der preußischen Lehrpläne der Fall war und ist.[1])

Zur Zeit sind in Baden, Bayern und Württemberg neue Lehrpläne in Bearbeitung, welche, wie es heißt, auch der Philosophischen Propädeutik wieder eine größere Bedeutung zumessen werden; bei Abschluß dieser Abhandlung waren sie leider noch nicht zugänglich.

Dagegen hat in Preußen die Mädchenschulreform von 1908 für die Studienanstalten (Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule) des weiblichen Geschlechts zu einer neuen Bearbeitung der Lehrpläne von 1901 geführt, und diese Neubearbeitung wird auch sicher über kurz oder lang zu einer Durchsicht der Bestimmungen für die Knabenschulen führen. Bei der Mädchenschulreform folgten dem grundlegenden Erlasse über die Neuordnung vom 18. August 1908 unter dem 12. Dezember 1908 die erforderlichen Ausführungsbestimmungen. Für die Studienanstalten wird dabei ein besonderer Unterricht in der Philosophischen Propädeutik vorgesehen, und es heißt dazu[2]): „Der Philosophischen Propädeutik wird durch den gesamten deutschen Unterricht der oberen Klassen in mannigfacher Weise vorgearbeitet, indem die vertiefte Behandlung größerer literarischer Werke, die Betrachtung der geistigen Grundlagen literargeschichtlicher Epochen, die Erklärung sprachlicher Wandlungen ganz von selbst in die Erörterung psychologischer und philosophischer Fragen ausmünden werden und bei der Grammatik oder bei dem Entwerfen von Dispositionen Gelegenheit zur Erläuterung logischer Gesetze sich bieten wird.

Außerdem aber sind in den beiden oberen Klassen bestimmte Stunden für Philosophische Propädeutik anzusetzen. Diesen Stunden, die je nachdem in den Rahmen des deutschen oder auch naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts fallen können, sind folgende Aufgaben zu stellen:

1. Logik als Analyse des Denkprozesses. Lehre vom Begriff, Urteil und Schluß.

2. Anleitung zu psychologischer Betrachtungsweise und zu einer hierauf sich gründenden Beurteilung ethischer Probleme an der Hand ausgewählter Lektüre.

Die Anordnung und Verknüpfung dieser Gebiete muß den einzelnen Anstalten überlassen bleiben.

Der Unterricht in der philosophischen Propädeutik hat das Ziel, das bei heranwachsenden Menschen sehr lebhafte Interesse an den Vorgängen des Innenlebens zu befriedigen und zu leiten, die intellektuellen Bedürfnisse anzuregen, den Schülerinnen Prüfungsmerkmale der Urteils- und Begriffsbildung und damit die Mittel intellektueller Selbstzucht zu

1) Es mag nur an P. Cauer, E. Latrille, R. Lehmann, B. Schmid, A. Schulte-Tigges usw. erinnert werden.

2) Vgl. Zentralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen. 1908, S. 916.

geben und das Verständnis für philosophische Fragen und Aufgaben anzubahnen. Durch ihren Anschluß an die Naturwissenschaften einerseits, die Geisteswissenschaften andererseits ist die Philosophische Propädeutik geeignet, diese beiden Seiten der den Schülerinnen vermittelten Bildung in einer höheren Einheit zusammenzufassen."

Diese Lehrpläne von 1908 stellen in ihren „Methodischen Bemerkungen" einen bedeutenden Fortschritt dar gegenüber den Lehrplänen von 1901, und im besonderen hat man den Eindruck, daß auch überall die Philosophie als Einheit alles Wissens wirklich hinter den Sonderbestimmungen für die einzelnen Fächer steht.

Statt der farblosen Bestimmungen über die Lektüre im Griechischen von 1901 heißt es z. B. hier: „Von Plato sind außer der Apologie 2 bis 4 Dialoge zu lesen, darunter mindestens ein größerer, Gorgias, Protagoras, Phädon oder eine Auswahl aus der Republik. Die Anfangs- und Schlußkapitel des Phädon sind jedenfalls zu lesen." Ferner heißt es: „Das Lesebuch von Wilamowitz ist geeignet, das Verständnis für die Entwicklung und die weltgeschichtliche Bedeutung der griechischen Literatur zu fördern." Und endlich: „Zum Verständnis des griechischen Geisteswesens ist Bekanntschaft mit den Werken der bildenden Kunst nicht zu entbehren."

Besonders gut ist auch das Methodische für das mathematisch-naturwissenschaftliche Gebiet durchgearbeitet, und zwar haben dabei die Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte eine weitgehende Berücksichtigung gefunden. Für die Oberprima fordern diese im mathematischen Unterrichte zum Schluße: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte", und auch diese Forderung ist wörtlich in die Lehrpläne der Studienanstalten übergegangen.

Berücksichtigt man außerdem die einschlägige Literatur, für welche hier auf die vortreffliche Abhandlung[1]) von Ziertmann (1906) verwiesen werden mag, so darf man wohl schließen, daß die Philosophie etwa seit der Jahrhundertwende auch für die Schule wieder höher bewertet wird als vordem.

Für die Prüfung dieses Schlusses ist es von Bedeutung, daß im Jahre 1911 die beiden großen Versammlungen, in welchen ein beträchtlicher Teil des deutschen geistigen Lebens zum Ausdruck kommt, sich mit der Philosophischen Propädeutik beschäftigt haben, die 83. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Karlsruhe und die 51. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Posen.[2])

In Karlsruhe hielt zunächst Herr Eugen Müller (Konstanz) einen

---

1) Vgl. Nr. 173.

2) Vgl., abgesehen von den Sonderberichten, im Pädag. Archiv 1911, Nr. 12 und 1912 Nr. 1.

Vortrag über das Thema „Philosophischer Unterricht an höheren Schulen mit besonderer Beziehung auf deren mathematischen und naturkundlichen Unterricht". Im Anschlusse an die Jenenser Verhandlungen[1]) des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts von 1905, bei denen Herr Bastian Schmid (Zwickau) und Herr Alois Höfler (Prag, jetzt Wien) über den philosophischen Unterricht sprachen, und unter Berücksichtigung der einschlägigen Literatur stellte Herr Müller als ziemlich übereinstimmende Ansichten fest, „daß alle Lehrfächer, zumal die mathematischen und naturwissenschaftlichen oder die realistischen[2]), philosophische Elemente enthalten, die den Schülern nach und nach zum Bewußtsein zu bringen sind". Ferner wies er darauf hin, daß die Meraner Reformvorschläge zum realistischen Unterrichte[2]) durchweg in der Richtung nach philosophischer Vertiefung des Fachunterrichtes liegen, und zwar unter sorgfältiger Begründung im einzelnen. Dann wandte er sich der Frage zu, ob es besonderer Philosophiestunden an den Schulen bedürfe, um alle die schon ausgestreuten Keime zu fruchtbringender Entfaltung zu bringen. Unter Hinweis auf die Verhältnisse in Österreich und unter Anerkennung der Forderungen von Ziertmann kam Müller dabei dazu, „für die höheren Schulen aller Gattungen gesonderte Philosophiestunden in den beiden Oberklassen zu verlangen neben gelegentlichen philosophischen Erläuterungen in womöglich allen einzelnen Lehrfächern." „Wie die humanistischen, so können und sollen auch die realistischen Fächer eine natürliche didaktische Einheit bilden durch die innere Verwandtschaft ihres Stoffes, wie durch das gemeinsame ihrer spezifischen Bildungswerte".[3])

Auch der zweite Redner, Herr Seith (Freiburg i. B.), kam zu der Forderung besonderer Stunden für Philosophie, in denen das humanistische, dem Menscheninnern zugewandte und das realistische, dem Kosmos zugewandte Ideal zu einem neuen umfassenden Ideale verschmolzen werden sollen.

In der Erörterung wurde das Bedürfnis nach philosophischer Durchbildung der Schüler und deren Empfänglichkeit dafür allgemein anerkannt, während Herr Schmid (Zwickau) und Herr Treutlein (Karlsruhe) u. a. sich gegen besondere Stunden in Philosophie aussprachen, weil im Lehrplane kein ausreichender Platz dafür zu schaffen sei und weil die geeigneten Lehrer fehlen. Im besonderen wies Herr Ruska (Heidelberg) auf die von ihm mit Erfolg angebahnte Einführung der Philoso-

---

1) Vgl. Unterrichtsblätter usw. 1905, Nr. 4 und Nr. 5.

2) Die Bezeichnung „humanistische" und „realistische" Fächer können wir von unserem Standpunkte aus nicht anerkennen, wie aus dem später Folgenden hervorgehen dürfte, jedenfalls ist die Mathematik kein „realistischer" Unterrichtsgegenstand.

3) Vgl. dazu Höflers Vortrag auf der Salzburger Naturforscherversammlung (1909) und seine Didaktik des mathematischen Unterrichts (Nr. 69b).

phie in die neusprachliche Lektüre hin[1]), durch welche auch innerhalb der geltenden Lehrpläne den aufgestellten Forderungen zum Teil wenigstens entsprochen werden könne.

In Posen sprachen Herr Jerusalem (Wien) und Herr Lehmann (Posen) über Philosophische Propädeutik. Während der erste Redner über die gesicherte Überlieferung und weitere Entwicklung dieses Faches in den österreichischen Gymnasien berichten konnte, führte der zweite Redner unter Zustimmung der Versammlung für Deutschland aus, daß es besonderer Stunden für das Fach nicht bedürfe, es handele sich nicht um „Unterricht in der Philosophie“ sondern um „Philosophie im Unterricht“.

In der Erörterung wurde wiederum das Bedürfnis nach Durchbildung der Schüler in der Philosophie und deren Empfänglichkeit durchaus anerkannt, besondere Stunden für Philosophie aber abgelehnt. Man war der Ansicht, „daß kein Schulfach, durchaus auch nicht die mathematisch-naturwissenschaftlichen, von dem Durchdringen mit philosophischem Geiste ausgeschlossen bleiben dürfe, daß u. a. auch die Religionsstunden sich dazu eigneten“.

Besonders hervorzuheben ist noch die in Posen gestellte, freilich zur Zeit wohl schwer erfüllbare Forderung einer philosophischen Einleitungs- oder Übergangsvorlesung auf der Hochschule in einer „auf Kenntnis des von den Schulen Mitgebrachten gegründeten Behandlung“.

Ziehen wir aus alledem[2]) das Ergebnis für die augenblickliche Lage, so ist festzustellen, daß in bezug auf die Berechtigung der Forderung „Philosophie im Unterrichte“ bei allen beteiligten Faktoren, einschließlich der Behörden, völlige Übereinstimmung herrscht, während die Forderung „Unterricht in der Philosophie“ teils freudig anerkannt und teils prinzipiell oder doch mit Rücksicht auf die ihrer Verwirklichung entgegenstehenden Schwierigkeiten abgelehnt wird.

Daß bei Durchführung der Forderung „Philosophie im Unterrichte“ schließlich das eine Ideal herauswachsen solle, auf das Herr Seith auf der Karlsruher Versammlung hingewiesen hat, dürfte wohl auch als unumstritten gelten.

Für dieses Ideal ist schon früher u. a. Herr Max Simon (Straßburg) eingetreten. Bereits in der ersten Auflage der Didaktik (1895) heißt es: „In den philosophischen Unterricht der obersten Klassen haben sich die Lehrer des Deutschen und der Mathematik zu teilen; fällt jenen die Ästhetik Schillers, die Ethik Kants und seine Lehre von der Urteilskraft zu, so diesen die erkenntniskritische Behandlung des Zahlbegriffs, den er in allen seinen Verzweigungen von seinem Ursprunge aus der logischen Funktion des Vergleichens an verfolgen muß.... Und

1) Vgl. die Sammlung Englischer und Französischer Schriftsteller aus dem Gebiete der Philosophie, Kulturgeschichte und Naturwissenschaft (Heidelberg bei Winter), von denen bereits Locke, Hume u. a. erschienen sind.

2) Vgl. dazu auch Paulsens Pädagogik. Stuttgart und Berlin, 1911, S. 323f.

der Unterricht in der Stereometrie und Mechanik zwingt uns, auf Kants Anschauungen von Raum und Zeit einzugehen und den Gegensatz zwischen ihm und Gauß klarzulegen. Die Verbindung der Facultas in Deutsch und Mathematik wird in ganz naher Zukunft eine durchaus gewöhnliche werden, und sie wird auch für die Leiter der Gymnasien zweckmäßig sein." Daß der physikalische Unterricht auf der Oberstufe mit dem mathematischen im allgemeinen in einer Hand liegen soll, hat Simon schon vorher ausgeführt, so daß also die Verbindung von „Deutsch, Mathematik und Physik", zunächst für die Gymnasien, in philosophischer Hinsicht als besonders günstig gilt. [1])

---

1) In bezug auf die „Zusammenstellung der verschiedenen Lehrbefähigungen" (Vgl. W. Lorey in Bd. I, Heft 3, S. 56 dieser Imuk-Abhandlungen) stimmen die an der Universität herrschenden Ansichten leider mit den Bedürfnissen der Schule nicht immer überein, so auch nicht in bezug auf die Verbindung von Deutsch mit Mathematik und Physik, wobei natürlich Philosophische Propädeutik in Verbindung mit Deutsch für die Mittelstufe Deutsch für die Oberstufe ergeben soll. Ebenso wünschen die Universitätslehrer meist, daß Deutsch und Englisch einerseits und Lateinisch und Französisch andrerseits zusammengestellt werden, während für die Schule u. a. Französisch und Englisch für die Oberstufe in Verbindung mit Deutsch für die Mittelstufe eine sehr günstige Verbindung ist.

Das Problem der Oberlehrerbildung hat, soweit Mathematik und Naturwissenschaften in Frage kommen, auf der 79. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Dresden (1907) einen vorläufigen Abschluß erhalten. Die Unterrichtskommission der Versammlung kam, was die Zusammenstellung der Lehrbefähigungen anlangt, zu dem Schlusse (vgl. Nr. 56b S. 267): Nach reiflicher Überlegung müssen wir als Norm eine Trennung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Studien in zwei „Gruppen" empfehlen, eine „mathematisch-physikalische" und eine „chemisch-biologische", wobei die Abtrennung zwischen diesen beiden Gruppen je nachdem verschieden gewählt werden mag." Zur Erweiterung der Studiengebiete empfiehlt die Kommission u. a. (vgl. Nr. 56b S. 293) die Philosophische Propädeutik. Die Lehrbefähigung für diese, so wichtig sie an und für sich ist, erhöht, wenigstens im Gebiete der preußischen Bestimmungen, die Verwendbarkeit des Kandidaten zunächst nicht, während dieser, falls er außerdem noch die Lehrbefähigung im Deutschen für die zweite Stufe erwirbt, mit dem Unterrichte im Deutschen unbeschränkt betraut werden darf. Die Anforderungen für diese Lehrbefähigung im Deutschen sind nicht erheblich, und da alle Kandidaten in den Seminaren der höheren Schulen für den Unterricht im Deutschen bis Untersekunda einschließlich ausgebildet werden, so läßt sie sich auch noch nachträglich leicht erwerben. Vorausgesetzt ist dabei allerdings ein größeres Entgegenkommen der Professoren der Germanistik, die zurzeit freilich zum Teil in Widerspruch mit den Bestimmungen nicht geneigt sind, überhaupt eine Lehrbefähigung im Deutschen zu erteilen, falls der Kandidat nicht umfassende historische Studien dazu gemacht hat. Auch hierin spricht sich die bekannte Überschätzung des Sprachlich-Historischen gegenüber dem Mathematissh-Naturwissenschaftlichen aus, unter der im Gegensatze zum Auslande die deutsche Bildung nun einmal leidet. Über diese hat Herr Timerding auf dem Kongresse zu Mailand (vgl. Commission internationale de l'Enseignement mathématique, circulaire Nr. 5) einige interessante Bemerkungen gemacht, aus denen wir hervorheben (vgl. S. 50): „Nous sommes en Allemagne profondement spécialistes et ce qu'il y a de plus, nous le sommes dès que nous commençons nos études." Gegen dieses Spezialistentum ist auch u. a. Simons Forderung gerichtet, die Lehrbefähigung in Mathematik und

Ich kann dem nur beipflichten, da ich selbst Jahre lang jene drei Fächer auf der Oberstufe des Gymnasiums zu vertreten hatte und mich dabei stets bemüht habe, das eine Ideal herauszuarbeiten, von dem jüngst Herr Seith sprach. Nur möchte ich dabei in Ergänzung Simons noch Goethe neben Schiller stellen, der, ganz abgesehen von seiner Bedeutung für die Naturwissenschaft und Naturauffassung[1]), auch in erkenntnistheoretischer Hinsicht gelegentlich überraschend tiefe Aufschlüsse gibt.

Natürlich können auch andere Zusammenstellungen von Fächern günstig wirken, aber ich glaube, daß die Unterrichtsverwaltungen mit Recht von den Lehrern des Deutschen und von denen der Mathematik, die allerdings stets zugleich Physiker sein müssen, am meisten philosophische Förderung erwartet haben und auch fernerhin zu erwarten berechtigt sind.

Die Vertreter der Forderung „Unterricht in der Philosophie", denen meist übrigens auch das Ideal von Seith vorschwebt, wünschen, wie es in Österreich ist, in den beiden obersten Klassen je zwei Wochenstunden für die philosophische Propädeutik, über deren Abgrenzung im einzelnen noch keine Einigkeit herrscht. Gegen Ziertmann möchte ich mit Wendt u. a. auch für die Geschichte der Philosophie eintreten, während ich sonst den Ausführungen von Ziertmann nur beipflichten kann.[2]) Faßt man in der Geschichte immer zugleich Persönlichkeit, Problem und kulturelle Lage ins Auge, so kann man auch der Philosophie der Gegenwart damit dienen, besonders, wenn man immer alles, was sich für die Folgezeit als unfruchtbar erwiesen hat, übergeht oder höchstens andeutet.

Daß übrigens auch der allgemein anerkannten Forderung „Philosophie im Unterricht" nicht so ohne weiteres genügt werden kann, hat Herr Ziertmann unter voller Anerkennung der Bemühungen und Versuche von Cauer, Lehmann, Schulte-Tigges u. a. ziemlich erschöpfend dargelegt.

Dabei spielt natürlich die Frage der Oberlehrerbildung eine besondere Rolle. Für den „Unterricht in der Philosophie" bietet sie selbstverständlich geringere Schwierigkeiten, als für die „Philosophie im Unterrichte", obwohl ja in der Staatsprüfung der Oberlehrer auch philosophische

---

Physik mit einer solchen im Deutschen zu verbinden. Daß seine Prophezeihung in bezug auf diese Verbindung bisher nicht eingetroffen ist, gibt Simon in der zweiten Auflage der Didaktik (1908) natürlich zu, an seinem Standpunkte hält er aber, unseres Erachtens mit vollem Rechte, durchaus fest.

1) Vgl. hierzu auch M. Geitel „Entlegene Spuren Goethes, München und Berlin, 1911" in bezug auf Goethes Stellung zur Industrie und Technik.

2) Daß die Oberrealschule der Philosophie in höherem Maße bedürfe, als das Gymnasium, kann ich allerdings nicht zugeben (vgl. hier den folgenden Abschnitt).

Kenntnisse verlangt werden.[1]) Herr Ziertmann[2]) weist besonders auf Lehmanns Vorschläge für die Hebung der philosophischen Bildung des Oberlehrerstandes hin, bemerkte aber dazu: „Daß wir aber jemals, auch wenn von seinen Vorschlägen das Mögliche verwirklicht wird, auf einen durchgängig philosophisch gebildeten Oberlehrerstand werden hoffen können, glaube ich nicht. Abgesehen von solchen, denen tieferes Interesse für den Gegenstand, den sie vor sich haben, für seine Grundfragen und Beziehungen zu anderen überhaupt abgeht und deren philosophische Bildung sich daher auf oberflächlich zum Examen eingepaukte und möglichst rasch wieder vergessene, dürftige Kenntnisse beschränkt; abgesehen von diesen wird es stets Naturen geben, die fast ausschließlich auf das Tatsächliche, das Exakte, gerichtet sind, fachwissenschaftliche Köpfe, und unter ihnen besonders wieder Lehrer des Deutschen, die die Dinge nur künstlerisch konkret aufzufassen imstande sind. Beides können treffliche Lehrer sein, doch wird man von ihnen nicht verlangen können, sie sollten ihren Unterricht philosophisch erteilen."

Jedenfalls müssen aber auch die Vertreter der philologisch-historischen Fächer und die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer irgendwie in Fühlung gebracht werden, wenn die „Philosophie im Unterrichte" einem einheitlichen Ziele zustreben soll. Dazu scheinen mir, abgesehen von geeigneten Hochschulvorlesungen, wie ich schon früher hervorgehoben habe (vgl. Nr. 167k), die Seminare der höheren

---

1) Über die in den einzelnen Staaten Deutschlands hierfür geltenden gesetzlichen Bestimmungen und deren Beurteilung vergleiche Bd. II dieser IMUK-Abhandlungen, sowie in Bd. I die Arbeit von Herrn W. Lorey. In letzterer ist für unsere Frage besonders beachtenswert (S. 60 u. f.) die Besprechung der „Allgemeinen Anforderungen" der Oberlehrer-Prüfung (in Religion, Pädagogik, Philosophie und deutsche Literatur), welche an das bekannte Gutachten von Herrn E. Study (vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7) anknüpft.

Über die entsprechenden Verhältnisse in Österreich, die ja gern zum Vergleiche herangezogen werden, gibt Auskunft die IMUK-Arbeit (Heft 12) von Herrn A. Höfler: „Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik." Für die Kandidaten, welche keine Lehrbefähigung in Philosophie erlangen wollen, wurde bis zum Jahre 1897 nur eine pädagogisch-didaktische Hausarbeit verlangt, später traten an Stelle dieser schriftlichen Prüfung zwei Kolloquien, je eines in Philosophie und in Pädagogik. Die neue Prüfungsordnung von 1911 ersetzt diese durch ein mündliches philosophisch-pädagogisches Examen, das vor der Staatsprüfung abgelegt werden kann, doch dürfen die Meldungen nicht vor dem Ende des 5. Semesters erfolgen.

Hervorzuheben ist vielleicht noch, daß für die volle Lehrbefähigung in Mathematik u. a. gefordert wird „Bekanntschaft mit den Hauptergebnissen der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik".

Auf den einleitenden Aufsatz Höflers in dieser IMUK-Abhandlung „Mathematik und Lehrerbildung" mag noch besonders hingewiesen werden.

Der Sachlage in Österreich entsprechend tritt Höfler natürlich für die beiden Forderungen „Unterricht in der Philosophie" und „Philosophie im Unterrichte" ein (vgl. dazu Nr. 69f.).

2) Vgl. Nr. 173 S. 25.

Schulen[1]) eine geeignete Stätte zu sein. In diesen werden jetzt auch die Vertreter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer über das Philologisch-Historische einigermaßen orientiert, während das Umgekehrte meist nicht der Fall ist. In diesem Mangel an Gegenseitigkeit tritt (vgl. hier S. 8 Anm. 1) ein Grundfehler der deutschen Bildung zutage!

Über andere Mittel, der Forderung, daß die Schule ein Organismus sein solle, zu genügen, habe ich mich auch bereits öfters ausgesprochen (vgl. Nr. 167 p), dazu gehört z. B. das gegenseitige Hospitieren im Unterrichte, namentlich bei abschließenden Wiederholungen, und das würde auch für die hier vorliegende Frage von Bedeutung sein.

Merkwürdigerweise aber ist eine Schwierigkeit, die jede Art des Philosophie-Unterrichts auf der Schule trifft, in letzter Zeit meines Wissens nicht oder doch nicht genügend hervorgehoben worden, obwohl sie nachweislich für die deutschen Schulverwaltungen seit den Reorganisationen von 1816 mit vollem Rechte oft genug bedrückend gewesen ist. Man spricht immer von der Philosophie, als wenn es zur Zeit eine bestimmte herrschende Philosophie gäbe, während doch sogar die Logik, das Wort selbst im engsten Sinne genommen, augenblicklich im Streite der Parteien schwankt, geschweige denn alles weitere. Philosophie soll allem einzelnen, was die Schule bietet, Einheit geben! Nun denke man sich den idealen Fall, daß alle Lehrer wirklich philosophisch durchgebildet sind, aber leider aus lauter verschiedenen philosophischen Schulen stammen. Der Religionslehrer folge Drews, der Lehrer für Deutsch und Geschichte sei Pragmatist, die Fremdsprachler mögen bei Eucken, Riehl, Rickert und Wundt gehört haben, der Mathematiker stamme aus der Marburger Schule usw. Was sollte daraus werden, zumal wenn der Direktor philosophisch ungeschult ist oder ein Parteimann von einer der obigen Richtungen?

So berechtigt dieser Einwand auch zu sein scheint, so dürfte doch der Hinweis auf benachbarte Kulturstaaten, in denen die Philosophische Propädeutik im Lehrplane der höheren Schulen eine feste Stelle hat, zeigen, daß diese und alle anderen Schwierigkeiten nicht unüberwindlich sind. Wir wollen hier nur Österreich und Frankreich berücksichtigen, aber für Italien, Rußland u. a. gilt dasselbe.

In Österreich sind, wie schon erwähnt, in den beiden obersten Klassen der Gymnasien je 2 Wochenstunden für Philosophische Propädeutik angesetzt, und es ist vor allem der unausgesetzten und zielbewußten Arbeit von Höfler (und Meinong) zu verdanken, daß dort auch für die Philosophische Propädeutik vortreffliche Instruktionen (1900) erschienen sind, mit denen man wohl arbeiten kann. Höflers Grundlehren der Logik und Psychologie, ein ausgezeichnetes Buch[2]), sind mit ihnen natürlich in voller

1) Vgl. dazu W. Lorey in Bd. I, Heft 3 der deutschen IMUK-Abhandlungen, S. 106f.
2) Vgl. Nr. 69a. Das Werk umfaßt 400 Seiten.

Übereinstimmung. Als Anhang sind 10 Lesestücke aus philosophischen Klassikern beigegeben, die eine weitere Behandlung der letzten Fragen ermöglichen.[1])

In Frankreich sind im letzten Schuljahre in der „Classe de Mathématiques" 3 Wochenstunden, in der „Classe de Philosophie" 8 bis 9 Wochenstunden für Philosophie angesetzt, und die „Programmes du 31. Mai 1902" geben dafür eine gute Einteilung des Stoffes. Ein bestimmtes Lehrbuch ist nicht vorgesehen, doch wird in Paris jedenfalls vielfach benutzt Boirac's „Cours élémentaire de philosophie"[2]), der auch allen billigen Anforderungen genügt; er enthält nach einer Einführung in die Philosophie der Reihe nach Psychologie nebst etwas Ästhetik, Logik, Moral und Metaphysik und außerdem einen Anhang, der neben der Behandlung besonderer philosophischer Fragen auch einen Abriß der Geschichte der Philosophie gibt.

In seiner ganzen Ausdehnung ist dieser Cours bestimmt für die Classe de Philosophie, während die Classe de Mathématiques nur Unterricht in Logik und Moral hat, aber gewissermaßen in einer psychologischen Umrahmung. Für diesen abgekürzten Plan gilt folgende Einteilung:

I. Eléments de Philosophie scientifique.

Introduction, la Science, Méthode des Sciences mathématiques, Méthode des Sciences de la Nature, Méthode des Sciences morales et sociales.

II. Eléments de Philosophie morale.

Nach einer Einleitung über die ethische Grundlegung wird behandelt: Morale personnelle, Morale domestique, Morale civique et politique.

Bei Höfler sind Ethik und Ästhetik in die Psychologie hineingearbeitet, und ebenso die metaphysischen Grundfragen. Einer allgemeinen Einleitung in die Psychologie folgt die Psychologie des Geisteslebens, welche sich mit den Vorstellungen und Urteilen beschäftigt, und dann die Psychologie des Gemütslebens. Letztere umfaßt die Gefühle und die Begehrungen, und unterscheidet im ersten Abschnitte ästhetische, logische und ethische Gefühle, während sie im zweiten Abschnitte die Wirkungen des Wollens und die Ursachen des Wollens vorführt, wobei u. a. auch das Problem der Willensfreiheit und die Entwicklung eines sittlichen Charakters behandelt wird.

Was in Österreich und Frankreich möglich ist, muß auch in Deutschland durchführbar sein. Mit Rücksicht auf die oben aufgeworfene Frage nach der e i n e n Philosophie würde es gut sein, sich dabei an die alte Kantische Mahnung zu erinnern, daß man nicht „Philosophie" lehren und lernen soll, sondern „Philosophieren", d. h. den Blick auf das Ganze menschlichen Wissens richten.

---

1) Vgl. außerdem Höflers IMUK-Abhandlung, hier S. 10 Anm. 1.

2) Mir liegt die 24. Auflage von 1911 vor (Paris bei Felix Alcan), die etwa 550 Seiten umfaßt.

Es gibt nicht eine Philosophie, denn die Antwort auf die Frage nach der Einheit alles Wissens ist ihrer Natur nach vieldeutig. Diese Vieldeutigkeit wird auch der Lehrer, selbst wenn er sich dogmatisch auf eine philosophische Schule festgelegt haben sollte, den Primanern zum Bewußtsein bringen müssen, und dazu ist gerade die Geschichte der Philosophie sehr geeignet. Nicht Skeptizismus oder Agnostizismus oder bloßer Pragmatismus hat hier das letzte Wort zu sprechen, sondern in Übereinstimmung mit einem bekannten Lessing-Worte das ewige Streben nach der Wahrheit, die für uns Menschen nun einmal nur asymptotisch erreichbar ist, und zwar auf verschiedenen Wegen.

Wie aber auch für die höheren Schulen Deutschlands die endgültige Lösung der nächsten Zukunft in bezug auf die Philosophische Propädeutik sich gestalten mag, unter allen Umständen erwächst gemäß der allgemein anerkannten Forderung „Philosophie im Unterrichte" für die Vertreter einzelner Fächer oder didaktischer Gruppen von Fächern die Aufgabe, von diesen aus den Blick auf das Ganze des Wissens zu richten und in diesem Sinne Fühlung mit der Philosophie zu suchen.

Darum ist es gerechtfertigt, daß die deutsche Abteilung der „Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission" auch den Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophischer Propädeutik eine Abhandlung widmet.

Der Darlegung dieser Beziehungen gelten die folgenden Blätter, welche natürlich bei der geschilderten Sachlage nur Anregungen geben können und wollen.

Mögen sich weitere Mitarbeiter für die Lösung unsrer Aufgabe finden!

2. Die Aufgabe.

Unsere Aufgabe besteht darin, die gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophischer Propädeutik für unsere deutschen höheren Schulen darzulegen.

Dazu wird es zweckmäßig sein, die drei Begriffe, um die es sich dabei handelt, von vornherein wenigstens vorläufig abzugrenzen.

A. Mathematik.

Unter Mathematik verstehen wir, der üblichen Schulbezeichnung entsprechend, die Gesamtheit der folgenden Einzelwissenschaften:

1. Arithmetik (Algebra, Analysis usw.)
2. Geometrie
3. Phoronomie
4. Dynamik (Statik und Kinetik)

$\left.\begin{array}{l}\text{3. Phoronomie}\\ \text{4. Dynamik (Statik und Kinetik)}\end{array}\right\}$ Mechanik.

Einen Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik im Sinne der zum Teil üblichen Koordination können wir nicht anerkennen, es gibt nur eine Mathematik, aber sie hat, um mit Kant zu reden, einen reinen (freien oder immanenten) und einen empirischen (gebundenen oder transienten) Gebrauch.[1])

Diese eine Mathematik hat einen dreifachen Wert und zwar

1. als selbständige Wissenschaft,
2. als Mittel der Naturerkenntnis (Physik usw.),
3. als Mittel der Naturbeherrschung (Technik usw.).

Dabei ist das Wort „Natur" in weitester Bedeutung zu nehmen, auch die Statistik gehört zur Naturerkenntnis, ebenso wie das Versicherungswesen schließlich der Naturbeherrschung dient.

Aufgaben der Naturerkenntnis und der Naturbeherrschung haben die geschichtlichen Anfänge der Mathematik bestimmt und sie bei ihrer Entwicklung zur Wissenschaft fortwährend als Anregungen begleitet und werden dies auch stets tun.

Diese Beziehungen hat Herr Klein gelegentlich[2]) in einer Mitteilung „Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite" genauer dargelegt, indem er zunächst darauf hinwies, daß die angewandte Mathematik als solche keine geschlossene Disziplin ist. Dann sagt er weiter: „Vergleicht man die Gesamtwissen-

1) Vgl. hierzu zunächst Klein-Riecke „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen", Leipzig, 1900 und „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen", Leipzig, 1904. Die einschlägigen Fragen wurden weiter 1907 geklärt durch eine Besprechung von Vertretern der angewandten Mathematik in Göttingen (vgl. die Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 16). In dem einleitenden Vortrage kommt Herr Runge zu dem Ergebnisse: „Die Probleme in den Erfahrungswissenschaften, die mit mathematischen Methoden arbeiten, verlangen eine Durchführung bis zu quantitativen Resultaten." „Dazu sind Methoden notwendig, die, sei es graphisch, sei es numerisch, die gesuchten Resultate liefern. Solche Methoden auszudenken und auszubilden, darin sehe ich den eigentlichen Inhalt der angewandten Mathematik. Sie ist der reinen Mathematik nicht nebengeordnet, sondern sie ist ein Teil der reinen Mathematik." Die äußerst vielseitige Besprechung schloß mit einstimmig angenommenen Thesen, betreffend den Umfang und den Lehrbetrieb der angewandten Mathematik sowie die für sie erforderlichen Einrichtungen. Für letztere ist, wie allgemein anerkannt wurde, die Universität Göttingen mustergültig, und ihr kann sich dank den Bemühungen von Herrn Gutzmer wohl zunächst die Universität Jena an die Seite stellen. (Vgl. dazu ferner „Das mathematische Institut der Universität Jena" in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 20.)

Für die Oberlehrerprüfung in angewandter Mathematik gilt in Göttingen jetzt als Grundsatz, daß alle Kandidaten in den graphischen und numerischen Methoden gleichmäßig durchgebildet sein müssen, während außerdem jeder Kandidat in einem frei zu wählenden Sondergebiete (technische Mechanik, Geodäsie, Astronomie und Versicherungswesen) gründliche Kenntnisse darzulegen hat. Vgl. dazu auch „Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik an der Universität Göttingen", Leipzig (letzte Ausgabe 1911).

Auf die ausführliche Behandlung der angewandten Mathematik in der Weber-Wellsteinschen Enzyklopädie, namentlich in deren neuester Auflage, mag auch noch besonders hingewiesen werden.

2) Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1904, S. 396 u. f., Leipzig bei B. G. Teubner.

schaft der Mathematik mit einer Festung, so repräsentieren die verschiedenen Teile der angewandten Mathematik die Außenforts, welche die Innenwerke nach allen Richtungen umgeben, und über welche die Verbindung mit dem Vorgelände hinüberführt. Gemeinsam allen Teilen der angewandten Mathematik ist dementsprechend nur dies, daß der mathematische Gedanke bei ihnen in notwendige und untrennbare Verbindung zu einem Gebiete anderweiter wissenschaftlicher Fragestellungen tritt. Die angewandte Mathematik steht dadurch in ausgesprochenem Gegensatz zu demjenigen Zweige unserer Wissenschaft, den man als Zitadelle der Festung ansehen mag, zur formalen Mathematik (im Leibnizschen Sinne), d. h. zu derjenigen Behandlung mathematischer Fragen, welche nach Möglichkeit von jeder konkreten Bedeutung der vorkommenden Größen oder Symbole absieht und nur nach den äußerlichen Gesetzen fragt, nach denen dieselben kombiniert werden sollen."

„Zum Gedeihen der Wissenschaft ist ohne Zweifel die freie Entwicklung aller ihrer Teile erforderlich. Die angewandte Mathematik übernimmt dabei die doppelte Aufgabe, den zentralen Teilen immer wieder von außen neue Anregungen zuzuführen und umgekehrt die Erträgnisse der zentralen Forschung nach außen zur Wirkung zu bringen. Die Geltung der Mathematik innerhalb des weiten Bereiches sonstiger menschlicher Interessen erscheint daher in erster Linie an die erfolgreiche Betätigung der Vertreter der angewandten Mathematik gebunden."

Betrachtet man die Reihe Arithmetik, Geometrie, Phoronomie, Dynamik, so zeigt sich, daß einerseits von jedem ihrer Glieder reichlich Wege zu den Anwendungen führen, während sie andererseits als Ganzes gewissermaßen eine stufenweise fortschreitende Eroberung der räumlich-zeitlichen Außenwelt darstellt.

Obwohl in der Arithmetik das Logische dem Anschaulichen gegenüber sozusagen die Führung übernimmt, so wurzeln die Grundbegriffe der Arithmetik doch ebenso in der Anschauung wie die der Dynamik, und man darf mit Fug und Recht die ganze Mathematik als ein anschaulich-logisches System bezeichnen, in dessen verschiedenen Gebieten dieselben beiden Grundprinzipien herrschen, für deren Bezeichnung man u. a. die Worte Ordnung (Lage) und Maß verwenden kann.

Die Arithmetik umfaßt die Lehre von der Zahl in ihrer weitesten Bedeutung, wobei methodisch die Arithmetik der Lage (Ordinalzahlen) von der Arithmetik des Maßes (Kardinalzahlen, multiplicantia und distributiva) zu scheiden ist, obwohl beides bei dem Aufbau der Wissenschaft von der Zahl meist bald in eins zusammenfließt.

Bei der Geometrie ist die Scheidung der Geometrie der Lage (im Sinne von Poncelet, v. Staudt, Reye u. a.) und der Geometrie des Maßes gang und gäbe. Erstere benutzt, wie alle Wissenschaften, gelegentlich Anzahlen (1, 2, 3...), und dringt von da zur Idee des Maßes vor, während letztere Zahl und Strecke (und zunächst auch noch Winkel) von

Anfang an als Maße benutzt, aus denen sie ihre anderen Maße aufbaut, um endlich als analytische Geometrie auch Lagenbeziehungen zu behandeln.

Schließt man die Bewegung aus der Geometrie aus, was in prinzipieller Hinsicht ja gelegentlich gefordert wird, so hat auch die Phoronomie zunächst als Phoronomie der Lage (Kinematik) von den Bewegungen als Lagenänderungen zu handeln, wobei die Zeit keine Rolle spielt, während sie als Phoronomie des Maßes neben Zahl und Strecke auch die Dauer als Maß benutzt, um daraus ihre anderen Maße aufzubauen.

In der Dynamik, welche ihren Namen von dem in geschichtlicher Hinsicht jedenfalls grundlegenden Kraftbegriff (δυναμις) hat, tritt die Maßzahl der Masse neben Zahl und Strecke und Dauer. Obwohl die Ruhe als Sonderfall der Bewegung aufzufassen ist, so werden doch jedenfalls für die Schule Aufgaben der Ruhe unter dem Einflusse von Kräften (Statik) von Aufgaben der Bewegung unter dem Einflusse von Kräften (Kinetik) zu scheiden sein.

Daß Phoronomie und Dynamik, für welche der umfassende Name Mechanik üblich ist, zur Mathematik gerechnet werden müssen, falls man diese, abgesehen von ihrem selbständigen Werte, als Mittel der Naturerkenntnis und der Naturbeherrschung ansieht, ist selbstverständlich.

Auch im „Cours de Philosophie" für die höheren Schulen Frankreichs heißt es[1]) bei „Méthode des Sciences Mathématiques" in bezug auf „Nature et Objets des Sciences Mathématiques" nach Erwähnung von Arithmetik und Geometrie „On peut y rattacher la mécanique rationnelle".

Daß bei der hier vertretenen Ansicht von der einen Mathematik die Frage nach deren Anwendbarkeit von Fall zu Fall eine besondere Untersuchung fordert, mag noch ausdrücklich erwähnt werden. Diese Frage tritt aber nicht etwa erst bei den Problemen der Mechanik auf, sondern schon bei der ersten Verwendung des Rechnens im gemeinen Leben, geschweige denn bei der Verwendung der Arithmetik im Gebiete der sozialen Wissenschaften (Versicherungsmathematik usw.).

Herr Poincaré sagt dazu gelegentlich[2]): In der Mathematik „kann unser Verstand behaupten, weil er befiehlt; aber verstehen wir uns recht: diese Befehle beziehen sich auf unsere Wissenschaft, welche ohne dieselbe unmöglich wäre, sie beziehen sich nicht auf die Natur." Bei jeder Aufgabe in der sogenannten angewandten Mathematik besteht[3]) „die Behauptung, um deren Begründung es sich handelt, in Wirklichkeit aus zwei verschiedenen Wahrheiten. Die erste ist eine mathematische Wahrheit, die sich streng beweisen läßt. Die zweite ist eine experimentelle Wahrheit. Die Erfahrung nur kann uns lehren, ob dieses reale und konkrete Objekt

1) Vgl. Nr. 8 S. 235.
2) Vgl. Nr. 113a S. XII.
3) Vgl. Nr. 113b S. 17.

dieser abstrakten Definition entspricht oder nicht. Diese zweite Wahrheit ist nicht mathematisch bewiesen, aber sie kann es auch nicht sein."

Die Mathematik muß sich im empirischen Gebrauche mit Annäherungen begnügen, und zwar in doppelter Hinsicht. Die Wirklichkeit entspricht überhaupt nur angenähert ihrer mathematischen Darstellung, und die Messungen des Empirischen liefern für dieses nur Zahlen von angenäherter Genauigkeit; bekanntlich ist z. B. noch nie eine Irrationalzahl für die Wirklichkeit verwendet worden, und dies wird auch nie geschehen.

B. Philosophische Propädeutik.

Unter philosophischer Propädeutik verstehen wir nicht eine mehr oder minder gut ausgewählte Sammlung von Bruchstücken aus der empirischen Psychologie und formalen Logik, sie ist uns vielmehr eine Propädeutik zur Philosophie oder besser zum Philosophieren.

Was ist aber damit gemeint?

Den Hellenen, die uns das Wort Philosophie geprägt haben, war in ihrer Blütezeit Philosophie dasselbe, was uns Wissenschaft ist, und zwar in dem Glauben, daß es eine Einheit alles Wissens gibt. Nur die notwendig gewordene Arbeitsteilung führte dazu, die eine Philosophie in einzelne Philosophien, d. h. Einzelwissenschaften, zu zerlegen, und daraus wiederum ergab sich das Bedürfnis nach einer grundlegenden Philosophie (πρωτη φιλοσοφια) als Wissenschaft der Einzelwissenschaften. Für diese ist die Gesamtheit der Einzelwissenschaften das Objekt, während jede einzelne Wissenschaft ihren besonderen Gegenstand hat.

Hierzu kommt aber noch ein zweites. Die Hellenen glaubten, daß die Tugend lehrbar sei, d. h. sie waren der Überzeugung, daß der richtigen Einsicht auch das richtige Handeln folgen müsse. Infolgedessen steht bei ihnen neben der theoretischen Philosophie von Anfang an eine praktische Philosophie, für deren Verbindung dann Sokrates wirkt.

Wenn wir nun auch nicht mehr die Tugend für lehrbar halten, sondern dem Willen und dessen Erziehung, unter Berücksichtigung der Gefühle, neben oder sogar vor dem Intellekte und dessen Bildung seine besondere Stellung geben, so ändert dies wohl die Begründung der praktischen Philosophie, aber nicht ihre allgemeine Bedeutung.

Unter Philosophie verstehen auch wir noch eine wissenschaftlich gestützte Weltanschauung, in welcher der einzelne seine Stellung suchen und finden kann. Nicht wie ein blasser Schemen der Abstraktion soll sie über dem Innersten des Menschen schweben, sondern mit seinem Fühlen und Wollen in engster Verbindung stehen und so auch sein Handeln bestimmen.

Dem damit geschichtlich gegebenen Schlagworte „Philosophie als Weltanschauung" hat man mit besonderem Nachdrucke in unserer Zeit das Schlagwort „Philosophie als Wissenschaft" entgegen gestellt, gelegentlich sogar in der Hoffnung, eine wissenschaftlich begründete Weltanschauung als Wissenschaft im strengsten Sinne des Wortes erzeugen zu können. Unserer Ansicht nach ist die Forderung einer Philosophie als Wissenschaft, deren Ideal die Einheit alles Wissens ist, durchaus berechtigt, aber sie wird nur einen Teil im Ganzen der Philosophie als Weltanschauung bilden können.

Jede Einzelwissenschaft gleicht einem Felspfade im Sonnenscheine, dessen Anfang und dessen Ende sich in Nebel verlieren. Auch die Mathematik macht hier keine Ausnahme, man denke nur einerseits an die Kämpfe um ihre erkenntnistheoretische Grundlage und andererseits an die Paradoxien der Mengenlehre.[1]) Nur, wenn man Surrogate der Erkenntnis für echtes Wissen hält, wie es in dogmatischen Epochen der Fall ist, scheinen Anfang und Ende so klar und bestimmt zu sein, wie die Mitte.

Wie sollte die Philosophie, deren Ideal die Einheit alles Wissens ist, Anfang und Ende enthüllen können, wenn diese für jede Einzelwissenschaft im Dunkel liegen? Das Leben als Anwalt des Praktischen verlangt, nicht von den Einzelwissenschaften, wohl aber von der Philosophie immer von neuem einen vorläufigen Abschluß. Wollte die Rechtsprechung darauf warten, bis eine allgemein anerkannte Ethik die Rechtsbildung bis ins einzelne hinein gestützt hätte, so wäre sie nie realisiert worden.

Aus dem Begriffe der Philosophie als Einheit alles Wissens folgt deren Gliederung.

Da in jeder Einzelwissenschaft das Beweisen schließlich einmal aufhören muß, weil Beweisen bedeutet, aus gegebenen Voraussetzungen Folgerungen ziehen, so hat die Philosophie zunächst die Aufgabe, die letzten Voraussetzungen der Einzelwissenschaften in einheitliche Verbindung zu bringen. Dieser Aufgabe dient die Erkenntnistheorie, in welche man die für alle Wissenschaften erforderliche Formal-Logik einbeziehen kann, wenn man es nicht vorzieht, sie ihr vorangehen zu lassen.

Von der Erkenntnistheorie aus müßte das Wissen, das in den Einzelwissenschaften vorliegt, zum Ganzen gestaltet werden, wenigstens in seinen Grundzügen. Was das bedeutet, zeigt vorbehaltlich aller Kritik im Einzelnen etwa Wundts Logik und Metaphysik.

Einheit alles Wissens wird nur erreicht, wenn man sich das tatsächlich immer unvollendete Wissen, an dessen weiterer Ausgestaltung unablässig zu arbeiten die Bestimmung des Menschengeschlechtes zu sein scheint, vollendet denkt, und auf dem Wege der Dichtung den Abschluß erstrebt, der auf dem Wege des Wissens ewig unerreichbar ist.

Die Philosophie beginnt als Wissenschaft und endet als Kunst, das Wort in jenem Sinne genommen, wie es Goethe und Schiller faßten, ihnen war die Kunst ja die höchste Lebensmacht.

So unsympathisch einem großen Teile der Mathematiker die Idee einer solchen Schlußdichtung auch sein mag, namentlich in einer Zeit,

---

1) Vgl. dazu weiter „Über Wahrheit und Irrtum in der Mathematik" von O. Perron (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 20).

in der das reine Denken auf vielen Gebieten des Wissens, z. B. auch in der Volkswirtschaftslehre, wohl wieder einmal überschätzt wird, so unrichtig wäre es doch, mit Rücksicht auf das geschichtlich Gegebene von ihr abzusehen. Gerade die großen Philosophen, die ja zum Teil auch die großen Mathematiker sind, haben stets vermöge ihrer ganzen Persönlichkeit unbewußt eine solche abschließende Dichtung vollzogen, und in ihr hat oft gerade die stärkste Wirkung auf Mitwelt und Nachwelt beruht, wenn sie auch schließlich kritisch zersetzt wurde.

Es wiederholt sich immer, was der Dichter[1]) für die Geometrie gesprochen:

Eh' vor des Denkers Geist der kühne
Begriff des ewigen Raumes stand,
Wer sah empor zur Sternenbühne,
Der ihn nicht ahnend schon empfand?

An diese Schlußdichtungen, welche übrigens oft auch die erkenntnistheoretische Grundlegung beeinflussen, hat man nur die eine Forderung zu stellen, daß sie nicht gesicherten Ergebnissen der Wissenschaft widersprechen, sonst sind sie völlig frei.

Natürlich kann es nur Zeit-Philosophien geben, da für jede bestimmte Gestaltung einer Weltanschauung Persönlichkeit und kulturelle Lage neben den Problemen bestimmend sind.

Weiter ist noch darauf hinzuweisen, daß alles, was wir wissen, zunächst in einem psychischen Erlebnisse gegeben ist, und daß also die Psychologie als ein besonderer Teil der Philosophie eingeführt werden muß, aus dem erst Logik und Erkenntnistheorie hervorwachsen, wobei diese allerdings von der psychologischen Grundlage unabhängig werden.

Endlich bleibt noch übrig die Weltanschauung, welche der Forderung einer Einheit des Wissens entspricht, zu dem ganzen Menschen, dem denkenden, fühlenden und wollenden Menschen, wie er wirklich ist, in Beziehung zu setzen, und ebenso zu den sozialen Gruppen, welche tatsächlich in Familie, Sippe, Stamm, Gemeinde, Staat und Kirche usw. gegeben sind. So entstehen die Wert-Wissenschaften (Ästhetik, Ethik und Religionsphilosophie), welche man unter dem Namen Praktische Philosophie zusammenzufassen pflegt. Das Tatsächliche ihrer Gebiete, was geschichtlich vorliegt, gehört natürlich den Einzelwissenschaften an (Völkerpsychologie usw.) und hat auch bei deren Zusammenfassung zur Einheit alles Wissens bereits mitzuwirken, aber es bleibt noch übrig, aus der damit gewonnenen Weltanschauung für den Einzelnen an und für sich und als Glied eines Ganzen die notwendigen zielgebenden Folgerungen zu ziehen.

So etwa läßt sich der Umfang dessen abgrenzen, was man mit dem Namen Philosophie bezeichnet.

---

1) Schiller in den Künstlern (1789). Interessant ist die Anmerkung dazu in einem Briefe an Körner (22. Jan. 1789): Ewiger Raum kann der Dichter insofern sagen, weil man die *Ewigkeit* braucht, um die Unendlichkeit zu durchlaufen.

Ob ein einzelner in unserer Zeit noch der Aufgabe gewachsen ist, das damit umgrenzte Gebiet zu beherrschen, ist eine Frage für sich. Von der Größe der Forderung erschreckt, wandelten schon die Hellenen den Titel des „Weisen" in den Namen eines „Liebhabers der Weisheit" um, und es galt als Ruhmredigkeit, sich anders zu nennen.[1]) Dafür schufen sie aber auch schon frühe „Genossenschaften" (θυασοι), in denen eine Gesamtheit zu leisten versuchte, was dem Einzelnen versagt war. In unserer Zeit der sozialen Arbeit und der Truste, in der auch die wissenschaftlichen Vereinigungen nationalen und internationalen Gepräges an der Tagesordnung sind, sollte auch für die Philosophie etwas ähnliches geschaffen werden.[2])

Es müßte etwa die Arbeit, welche Wundt als einzelner zu bewältigen versucht hat, von einer Genossenschaft von neuem aufgenommen werden, und zwar unter Anerkennung der Vieldeutigkeit aller „letzten" Bestimmungen.

Im Sinne dieser Darlegung bedeutet uns die Forderung philosophischer Propädeutik die Gewöhnung, den Blick auf das Ganze zu richten. Sie steht also im Gegensatze zu jedem Spezialistentume innerhalb einer Wissenschaft oder innerhalb einer Gruppe zusammengehöriger Wissenschaften oder innerhalb der Einheit alles Wissens.[3])

C. Das höhere Schulwesen Deutschlands.

Das höhere Schulwesen Deutschlands zeigt in der Gegenwart eine scharf gegliederte Dreigestaltung.[4]) Neben das altsprachliche Gymnasium sind Realgymnasium und Oberrealschule getreten. Für alle drei Anstalten bilden „Religion, Deutsch und Geschichte" das humanistische Kernstück, welches zugleich auch das humanistische Kernstück der deutschen Volksschule ist. Auf die damit bezeichnete didaktische Einheit weisen namentlich die preußischen Lehrpläne von 1908, welche den Studienanstalten für Mädchen gelten, sachgemäß und ausführlich hin. Aus dem Unterrichte in diesen Fächern vornehmlich soll ein national

---

1) Die sieben Weisen hießen noch: „οἱ ἑπτα σοφισται" oder auch „οἱ ἑπτα σοφοι".

2) Geneigtheit für eine derartige Vereinigung scheint in der Gegenwart an vielen Stellen vorhanden zu sein. Neben der Zeitschrift „Logos" ist dafür auch ein günstiges Zeichen die in Aussicht stehende „Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften" von W. Windelband und A. Ruge. Deren erster Band „Logik" ist in gemeinsamer Arbeit von W. Windelband, J. Royce, L. Couturat, B. Croce, F. Enriques und N. Losskij entstanden (1912). – Ferner ist noch hinzuweisen auf die eben begründete „Gesellschaft für positivistische Philosophie", innerhalb welcher auf Grundlage exakter Wissenschaft für die Ausgestaltung einer umfassenderen Weltanschauung gewirkt werden soll. Hervorragende Vertreter der exakten Wissenschaften und der Philosophie haben ihren Beitritt erklärt. Die Geschäfte führen die Herren J. Petzoldt in Spandau und M. H. Baege in Berlin-Friedrichshagen.

3) Bei Mangel an Zeit würden für die Schule also Darstellungen, wie sie Schulte-Tigges gibt, Bruchstücken aus der formalen Logik und empirischen Psychologie bei weitem vorzuziehen sein. Vgl. ferner vor allem die Einleitung von Enriques in Nr. 36b.

4) Vgl. Nr. 167i, k, l, o, p.

gefärbter Humanismus erwachsen, getragen von einer religiös-ethischen Gesinnung und bestimmt durch geschichtliche Einsicht.

An dieses humanistische Kernstück schließen sich auf allen höheren Anstalten als Flügelstücke das fremdsprachliche und das mathematisch-naturwissenschaftliche Gebiet, von denen jedes wiederum eine didaktische Einheit bilden soll.

Im fremdsprachlichen Gebiete liegt die Variante der drei Anstalten, durch welche die Färbung der Allgemeinbildung für jede von ihnen bedingt wird. Das altsprachliche Gymnasium treibt vor allem Griechisch und Lateinisch und etwas Französisch oder[1]) Englisch, das Realgymnasium Lateinisch, Französisch und Englisch, die Oberrealschule nur Französisch und Englisch, und demgemäß kann letztere unter den drei Anstalten dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gebiete (und dem Zeichnen) den größten Raum gewähren.

Zwischen den beiden Flügelstücken steht die Erdkunde, welche „Land und Leute" in Beziehung setzt und ebenso wie das Zeichnen, neben der Musik die Kunst der Schule, von einem Flügelstücke zum anderen und von diesen zu dem Kernstücke hin mannigfache Fäden schlingt.

Soll „Unterricht in der Philosophie" hinzukommen, wie es ja vielfach gewünscht wird, so würde dieser das humanistische Kernstück verstärken und zu den Flügelstücken in Beziehung treten müssen, was sicher von großem Vorteile wäre. Freilich kann ich nicht Herrn Ziertmann beipflichten, der dies in erster Linie bei der Oberrealschule für wünschenswert erklärt, denn für die „Philosophie im Unterrichte" kann jetzt schon der Beitrag bei allen drei Anstalten etwa derselbe sein.

Was Cicero an wirklicher Philosophie bietet, ist herzlich wenig, und was am Gymnasium aus Platon erarbeitet werden könnte, kommt nicht in Frage, da es tatsächlich, von dieser oder jener Ausnahme abgesehen, nicht erarbeitet wird. Für das Philosophische, welches der altsprachliche Unterricht zu geben pflegt, bieten Descartes, Locke und Hume an der Oberrealschule einen hinreichenden Ersatz, zumal diese auf der Oberstufe im Deutschen eine Stunde mehr hat als die Schwesteranstalten und also bei einem geeigneten Lesebuche, das auch Übersetzungen aus Platons Werken oder besser Darstellungen nach Platon enthalten könnte, hier der philosophischen Propädeutik besser dienen kann.

In den beiden Flügelstücken stehen sich Grammatik und Mathematik ergänzend gegenüber, der formalen Bildung dienend, falls man dieses Wort nur richtig erfaßt, seiner ursprünglichen Bedeutung gemäß, denn forma ist geschichtlich die Platonische Idee, welche überall die „Einheit im Vielen" bezeichnet.

Wie die Grammatik gewissermaßen das Skelett im lebendigen Leibe der Sprache ist, so ist die Mathematik das tragende Fachwerk für die Er-

1) In Braunschweig und in der preußischen Provinz Hannover Französisch und Englisch.

2) Vgl. Nr. 173.

forschung der Naturerscheinungen. Und wie die Sprache hineinführt in das vielgestaltige Leben der Völker, so berühren auch Botanik und Zoologie, vor allem in ihrer biologischen Ausgestaltung, das flutende Leben, und ebenso die Mathematik selbst in ihren weit verzweigten Anwendungen (z. B. Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch als Grundlage der sozialen Gesetzgebung).

Welche Aufgaben die einzelnen Lehrfächer unserer Schulen einer „Philosophie im Unterrichte" stellen, hat Herr Ziertmann[2]) ausführlich dargelegt, nur die Mathematik kommt bei ihm zu kurz. Für diese hat aber Herr Simon[1]) schon in der ersten Auflage seiner Didaktik wohl das erforderliche gesagt, auch über ihre Beziehung zu den anderen Fächern.[2]) Wir kommen darauf zurück, soweit dies im Rahmen unsrer Abhandlung liegt.

Trotz seiner Dreigestaltung hat unser höheres Schulwesen ein einheitliches Ziel: es ist ihm die Aufgabe gestellt, fremdsprachliche und mathematisch-naturwissenschaftliche Bildungselemente auf der Grundlage kulturgeschichtlicher Einsicht zu dem Ganzen einer im Volkstum wurzelnden religiös-ethischen Weltanschauung zu einen.[3])

Das Übergewicht des Gymnasiums liegt nicht in diesem oder jenem, was man gelegentlich hervorgehoben hat, sondern im Historischen, wie das der Oberrealschule im Naturwissenschaftlichen, und das Realgymnasium steht in der Mitte.

Aber diese Unterschiede bestimmen nur eine Färbung in der Allgemeinbildung der drei Anstalten, und jeder von ihnen würde die Einführung von philosophischer Propädeutik oder die Betonung der „Philosophie im Unterrichte" von großem Nutzen sein bei der Erfüllung ihrer gemeinsamen Aufgabe.

3. Schwierigkeiten der Lösung.

Der natürliche Weg, unsere Aufgaben zu lösen, bestände darin, das Ganze der gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophie vom Standpunkte unserer höheren Schulen aus zu betrachten und in diesem Ganzen das Gebiet oder die Gebiete abzugrenzen, welche für die Schule in Frage kommen können.

Diese Abgrenzung würde sich dadurch ergeben, daß man die Mathematik auf die Schulmathematik und die Philosophie auf die der Schule entsprechende philosophische Propädeutik einschränkte und untersuchte, was dann von jenen Beziehungen bestehen bliebe und verwendbar wäre.

Dieser Weg ist leider nicht gangbar, wenigstens zurzeit nicht, weil über das Ganze der gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und

1) Vgl. Nr. 137a. Vgl. dazu auch die Didaktiken von Reidt-Schotten und Höfler und namentlich Pietzkers einschlägige Arbeiten.

2) Vgl. auch Nr. 7.

3) Vgl. Nr. 167i, k, l, o, p.

Philosophie augenblicklich bei den führenden Geistern keine auch nur einigermaßen übereinstimmenden Ansichten vorhanden sind, geschweige denn sichere Festlegungen, von denen ausgegangen werden könnte.

Auf dem Gebiete der Philosophie sind der Wiederbelebung Kants, die um die Mitte des vorigen (19.) Jahrhunderts einsetzt, neben der historischen Arbeit immer umfassendere und immer tiefer greifende systematische Untersuchungen gefolgt, durch welche alles fest Erscheinende wieder einmal in Fluß geraten ist.

Auf dem Gebiete der Mathematik hat man zum Teil selbständig und zum Teil in Anlehnung[1]) an die Arbeit der Philosophen, den Grundlagen und der Methode mehr und mehr Aufmerksamkeit zugewandt, ohne aber dabei zu einem allseitig anerkannten Abschlusse zu kommen. So sagt Herr Wellstein[2]) mit vollem Rechte: „Wenn man den Streit um die Grundlagen unserer Wissenschaft, der von tiefdenkenden Gelehrten mit großer Erbitterung geführt wird, leidenschaftslos verfolgt und sich dabei von dem Gedanken leiten läßt, daß jeder von seinem Standpunkte aus etwas Vernünftiges gedacht haben müsse, dann kommt man zu der Überzeugung, nicht, daß die Wahrheit zwischen ihnen in der Mitte, sondern daß sie über ihnen liege.“

Das gilt von der Wissenschaft, und für die Schule im besonderen sagt Herr Höfler[3]) in bezug auf die „Fragen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie“, daß sie als noch durchaus umstritten gelten und daß er sie nur berühre, „um dem Lehrer der Mathematik einige besonders kritische Stellen zu bezeichnen, an denen er nicht etwa gerade die Antworten dieser oder jener Partei seinen Schülern dogmatisch aufnötigen oder suggerieren sollte.“

So weitschichtig auch das hiermit bezeichnete Gewebe von Meinungsverschiedenheiten ist, im Grunde handelt es sich doch um zwei alte Streitobjekte, nämlich um Gegensatz und Bedeutung von Denken und Anschauen einerseits, von Apriorischem (Reinem, Erfahrungsfreiem) und Empirischem andererseits.

Die Reformbewegung auf dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulunterrichts, welche in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts hier und da einsetzt und nun unter der zielbewußten[4]) Führung und kraftvollen Leitung von Herrn F. Klein[5]) etwa seit dem Jahre

1) So unterscheidet z. B. Herr Hilbert für die Bestimmung der gemeinsamen Grundlage von Logik und Arithmetik die Klassen der Seienden und Nichtseienden (Nr. 67 S. 267), während Herr Dedekind (Nr. 24b S. 17) in einer gewissen Übereinstimmung mit Bolzano für die Nachweisung unendlicher Systeme das eigene Ich benutzt, weshalb Herr Hilbert wiederum Dedekinds Methode als transzendental bezeichnet (Nr. 67 S. 265) usw.

2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II S. 145. 3) Vgl. Nr. 69b S. 432.

4) Vgl. dazu in diesen IMUK-Abhaadlungen III Heft 1 „Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland“ von R. Schimmack.

5) Dabei mag daran erinnert werden, daß die organisatorische Tätigkeit von Herrn Klein bereits 1894/95 einsetzt. Damals bestand an den technischen Hoch-

1904 mehr und mehr an Boden gewinnt, fordert mit vollem Rechte u. a. eine hohe Bewertung und Verwendung der Anschauung, und die jüngst erschienene Didaktik von Herrn Höfler, die in voller Würdigung der ganzen Sachlage Herrn Gutzmer gewidmet ist, entspricht dieser und den anderen Forderungen der Reform in vollem Maße.[1])

Damit scheint aber in starkem Widerspruche zu stehen die Entwicklung, welche die Mathematik als Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten durchgemacht hat.

Zunächst hat sich die Arithmetik im Gegensatze zu dem Euklidischen Erbgute ihre volle Selbständigkeit gegenüber den anderen Zweigen der Mathematik erkämpft und ist dabei unabhängig von der Anschauung der Zeit (im Gegensatze zu Kant) und der Anschauung des Raumes (im Gegensatze zu F. A. Lange u. a.) begründet worden, eine Notwendigkeit, auf die wohl zuerst der Philosoph Krause, selbst ein durchgebildeter Mathematiker, mit vollem Nachdrucke aufmerksam gemacht hat.

So unbedingt diese Selbständigkeit der Arithmetik anerkannt werden muß, so sehr sind auch die Folgerungen der Erörterung bedürftig, die

---

schulen eine Bewegung, die an diesen die für die Technik erforderliche Ausbildung in der Mathematik womöglich den Technikern selbst überweisen wollte. Sie war berechtigt, insofern sie sich gegen die Mathematiker der technischen Hochschulen wandte, welche keine Fühlung mit der Technik zu gewinnen wußten, sie war durchaus unberechtigt, insofern sie die Mathematik als besonderes Lehrfach an den technischen Hochschulen beanstandete. Für den durchaus richtigen Grundgedanken dieser Bewegung, die Mathematik mit der Technik in Verbindung zu bringen, war damals zugleich Herr Klein von sich aus eingetreten, indem er an der Göttinger Universität einen Kontakt mit der Technik herzustellen strebte. Der Kampf gegen die Isolierung der Mathematik, den Herr Klein damit aufgenommen hatte, ist auch bei seinen immer umfassenderen und immer vielseitigeren organisatorischen Arbeiten stets das leitende Prinzip geblieben. Die Erfolge in diesem Kampfe beruhen aber hauptsächlich auf der starken Betonung der Anschauung innerhalb der Mathematik. Von ihr aus führen einerseits die Brücken zu den Anwendungen, während sich anderseits in ihr die Interessen der Schulen aller Grade und Gattungen, die überhaupt Mathematik treiben, sozusagen berühren. Im Gegensatze dazu wirken die Vertreter des reinen Denkes bewußt oder unbewußt für eine Isolierung der Mathematik, während doch andererseits deren Sonderstellung fast allgemein beklagt wird. So bezeichnet z. B. Herr Voß die Mathematik als „die unpopulärste aller Wissenschaften", obgleich ihr „die Mehrzahl der Gebildeten, eine fast an Überschätzung grenzende Verehrung entgegenbringt" (Vgl. Nr. 161a, S. 4). Wer die vergeblichen Versuche kennt, die hier und da in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, und auch schon früher, in Deutschland gemacht wurden, um die tatsächliche Isolierung der Mathematik zu überwinden, welche z. B. in Frankreich niemals in gleichem Maße bestanden hat, der wird auch die so erfolgreiche Tätigkeit Kleins und seiner Mitarbeiter nur in höchstem Maße anerkennen können. Es ist Kultur-Arbeit, und zwar in besonderem auch nationale Kultur-Arbeit. Alle Anzeichen weisen darauf hin, daß diese Arbeit diesmal von Erfolg gekrönt sein wird. Jedenfalls haben beispielsweise die Techniker bereits seit geraumer Zeit den Grundgedanken Kleins von 1894/95 durchaus anerkannt.

1) Vgl. dazu auch die Didaktik von Reidt-Schotten (1886 bzw. 1906) und die von M. Simon (1895 bzw. 1908).

sich an diese Tatsache angeknüpft haben; man pflegt sie mit dem Schlagworte „Arithmetisierung der Mathematik“ zusammenzufassen.[1])

Eine Gruppe von Mathematikern, als deren Vertreter hier Herr Voß[2]) genannt werden mag, läßt einem oft angeführten Gauß-Worte (Brief an Bessel von 1829) entsprechend, nach dem Vorgange der Brüder H. und R. Graßmann u. a. nur die Arithmetik als reine oder freie Mathematik (mit apriorischem Charakter) gelten und rechnet schon die Geometrie zu der angewandten Mathematik, welche durch Erfahrung bedingt ist. Es handelt sich dann darum[3]), „den Begriff der Zahl und der Operationen mit derselben als das ausschließliche Fundament aller mathematischen Erkenntnis nachzuweisen“.

Mit dieser Überzeugung verbindet sich nun meist die Ansicht, daß die Arithmetik zu ihrem Aufbau und zu ihrer Begründung nur der Logik (*und* nicht auch irgendeiner Art der Anschauung) bedürfe.

Dabei ergeben sich große Schwierigkeiten in bezug auf die Abgrenzung von Logik und Arithmetik, die vielen völlig ineinander zu fließen scheinen, während andererseits Herr Hilbert[4]) gefordert hat, daß die Grundlagen der Logik und Arithmetik gemeinschaftlich entwickelt werden müssen und daß erst später eine Trennung der beiden Gebiete erfolgen solle.

Während einzelne die Logik in die Arithmetik aufnehmen möchten, bezeichnen andere wie Herr Dedekind die Arithmetik als einen Teil der Logik. Dieser sagt[5]): „Indem ich die Arithmetik nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte.“ „Die Zahlen sind freie Schöpfungen[6]) des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen.“

1) Vgl. F. Klein, Göttinger Nachrichten 1895. Diese Arithmetisierung der gesamten Mathematik ist nicht zu verwechseln mit Kroneckers Arithmetisierung, durch welche innerhalb der Arithmetik die Zurückführung aller Zahlen auf die natürlichen Zahlen (Anzahlen) gefordert wurde.

2) Vgl. Nr. 161a. 3) Vgl. Nr. 161a S. 29. 4) Vgl. Nr. 67 S. 263 u. f.

5) Vgl. Nr. 24b S. VII.

6) Hierzu findet sich später (S. 21) die Bemerkung: „Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen usw.. In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.“

Im Gegensatze zu solchen Auffassungen sagt Herr Höfler[1]): „Zahl und Raum nehmen keine Sonderstellung gegenüber allen übrigen Erkenntnisgegenständen ein. Die ihnen zugewandten Denkformen genießen den Vorzug der mathematischen Evidenz und mathematischen Gewißheit nicht als ein ausschließliches Vorrecht. Die Mathematik nimmt im Systeme der Wissenschaften nicht eine isolierte, in keiner Einteilung der anderen Wissenschaften unterzubringende Stellung ein."

Diesem Standpunkte nähert sich auch Herr Wellstein. Bei Erörterung des oben erwähnten Gauß-Wortes[2]) sagt er: „Ob die höhere Einschätzung der Arithmetik noch aufrecht zu halten ist, mag dahingestellt bleiben."

Zwischen den Auffassungen von Dedekind und Höfler liegt eine vielgliedrige Kette verschiedener Standpunkte.[3]) Im allgemeinen sucht man zur Zeit aus der, hauptsächlich von G. Cantor geschaffenen „Mengenlehre", deren Anfänge sich allerdings mindestens schon bei Bolzano finden, die Grundlage der Artihmetik zu gewinnen. Anderseits ist diese Mengenlehre selbst wieder von H. Poincaré u. a. beanstandet worden wegen der Paradoxien, die sie bei Russell u. a. zeigt. Die gegenwärtige Lage scheint mir etwa Herr A. Schoenflies[4]) sachgemäß zu beleuchten, der zu dem Schluß kommt, daß nicht der „Cantorismus" zu bekämpfen sei, wohl aber der „Russellismus".[5])

Auch die Geometrie versucht man, nachdem die räumliche Anschauung einerseits durch die nichteuklidische Geometrie und andererseits durch die Entdeckung der tangentenlosen Kurven und die ganze sich daran anschließende Entwicklung der Funktionentheorie diskreditiert worden ist, zu einem Teile der Logik zu machen, u. a. unter Berufung auf die Arbeiten der italienischen Schule, gelegentlich auch auf die von Herrn Hilbert. Gegen diese Versuche richtet sich die Abhandlung von Herrn Höfler „Räumliche und raumlose Geometrie", die er in seiner Didaktik in Aussicht stellt und dort auszugsweise erwähnt; leider ist sie noch nicht im Drucke erschienen. Für Herrn Hilbert[6]) selbst ist „die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges" eine Aufgabe, welche „auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung" hinausläuft. Ersetzt man das Wort „Analyse"

1) Vgl. Nr. 69b S. 451.

2) „Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können."

3) Vgl. dazu in den letzten Jahrgängen der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Arbeiten von Frege, Korselt, Schoenflies, Thomae u. a., außerdem Zermelos Abhandlung in den Mathem. Annalen, Bd. 65.

4) Vgl. in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1911 den Aufsatz „Die Stellung der Definition in der Axiomatik".

5) Eine kurze, von G. Hessenberg gegebene Darstellung der Mengenlehre, bei der auch bereits die Korrekturen von Zermelo berücksichtigt sind, findet man in Nr. 146.

6) Vgl. Nr. 67 S. 1.

durch das Wort „Bearbeitung", so dürfte die Bestimmung Hilberts auch auf dem Standpunkte Höflers annehmbar erscheinen.

Für die Anschauung in der Geometrie tritt auch Herr Wellstein[1]) ein, wobei er zu dem Schlusse kommt: „Indem wir die Übergriffe der Anschauung in den Machtbereich des reinen Denkens entschieden zurückweisen, lassen wir sie als anregende Stütze und Begleiterin unseres Denkens um so unbedenklicher herrschen."

Als bezeichnend für die ganze Sachlage mag noch folgendes hervorgehoben werden. In der Weber-Wellsteinschen „Enzyklopädie der Elementarmathematik" (erste Auflage) sagt Herr Wellstein gelegentlich[2]): „Anschauungsnotwendigkeiten gibt es nicht; Notwendigkeit kann nur im Denken liegen." Dazu macht Herr Weber die Anmerkung: „Hier besteht zwischen den beiden Herausgebern eine Meinungsverschiedenheit", und dieser widmet er dann einen besonderen Anhang.[3])

Noch bedenklicher als bei der Arithmetik und Geometrie steht es um die erkenntnistheoretische Grundlegung bei der Mechanik, doch ist hier der Mangel an Übereinstimmung unter den Forschern eher erklärlich. Der Versuch einer Verbindung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen mit dem alten System der klassischen Mechanik hat zu einer Reihe von Fragen geführt, die sich um das sogenannte „Relativitätsprinzip" gruppieren, und man ist zum Teil der Ansicht, daß die endgültigen Antworten das bisherige System der Mechanik einer starken Umbildung unterwerfen werden, falls sie es nicht überhaupt durch eine Neubildung ersetzen.

Während für die Arithmetik und für die Geometrie die gegebenen Voraussetzungen (Axiome), mag auch um ihre erkenntnistheoretische Bedeutung noch so viel Streit sein, wohl festgelegt sind, befindet sich die entsprechende Arbeit für die Mechanik erst ganz in ihren Anfängen.[4])

Auch für die Mechanik hat man sich bemüht, die Anschauung möglichst zu beseitigen[5]), und infolgedessen konnte die Ansicht entstehen, daß schließlich die ganze Mathematik nur eine eigentümlich entwickelte Logik sei. Indem man die Logik dabei auf das Gebiet der formalen Logik eingeschränkt dachte und diese allein auf dem Prinzipe der Identität be-

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II S. 146.

2) Vgl. Nr. 165 II S. 144.

3) In bezug auf die Fragen nach den Grundlagen der Geometrie, einschließlich der Wertung der Axiome gibt Herr Enriques in seinem Enzyklopädie-Artikel (III, Heft 1) eine gute Übersicht (Nr. 37 und 36c).

4) Vgl. in Nr. 37 den allerdings schon 1901 abgeschlossenen Artikel von Voß in Bd. IV 1 Heft 1.

5) Im Gegensatze zu den Versuchen einer Axiomatisierung der Mechanik, entsprechend der für die Geometrie bereits durchgeführten, vergleiche den Standpunkt F. Kleins in der Vorrede zu Bd. IV der Enzyklopädie (Nr. 37), in der auch neben allem anschaulichen und experimentellen auf die Bedeutung des Muskelgefühls für Kraftanstrengungen hingewiesen wird. Vgl. ferner auch H. E. Timerdings Vortrag „Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes" in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17 (1908).

ruhen ließ, konnte man zu der Ansicht kommen, daß die ganze Mathematik nur eine große „Tautologie“ sei.

Dieser Ansicht widmet z. B. Herr Poincaré[1]) eine längere Betrachtung, bei der er zu dem Ergebnisse kommt, daß der Schluß von n auf $n + 1$ zu dem Formal-Logischen dazu kommen müsse, um die Mathematik nicht als tautologisch erscheinen zu lassen.

Für Herrn Poincaré liegt in jenem Schlusse das eigentlich Schöpferische, wodurch in der Mathematik das Neue zustande kommt.[2])

Einen tief durchdachten und umfassenden Versuch, die ganze Mathematik einschließlich der Mechanik durch reines Denken zu gewinnen, bieten „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaft“ von Herrn Natorp.[3]) Für ihn liegt das Schöpferische in einer „synthetischen Logik“, welche im Prinzipe mit der transzendentalen Logik Kants übereinstimmt, während die formale Logik nach ihm nur der Analyse der Gebilde dient, welche die synthetische Logik erzeugt hat. Während aber für Kant im Gebiete des Wirklichen die empirische Anschauung und im Gebiete des Apriorischen die reine Anschauung dem Denken die Bausteine für seine Synthesen bietet, ist für Natorp in der Mathematik jede Anschauung als Helferin des Denkens ausgeschlossen. Im Namen der Marburger Schule, welche Herr Cohen und er gebildet haben, sagt er darüber[4]): „Die nachfolgende, von Kant ausgegangene Philosophie ... hat an dem Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken mehr und mehr Anstoß genommen und endlich entschlossen mit ihm gebrochen. Vielleicht schon etwas zu entschlossen; denn daß in Kants Begriff der Anschauung sich ein keinesfalls zu vernachlässigendes Problem barg, davon werden wir uns bald überzeugen. Aber vorerst war es durch das eigene Prinzip der kantischen Transzendental-Philosophie gefordert, daß man, was bei Kant zum wenigsten mißverständlich in die zwei Faktoren: reine Anschauung und reines Denken zerlegt wird, in strenger Einheit wieder zusammennahm und als ein einziges, für das man den Namen des ‚reinen Denkens‘ unbedenklich festhalten kann, zu verstehen suchte.“ Ferner heißt es in bezug auf das erwähnte Problem[5]): „Im Terminus ‚Anschauung‘ wird im Grunde nichts als jene letzte wechselseitige Durchdringung aller reinen Denkleistungen oder die allseitige Kontinuität der Denkprozesse in dem einen Prozeß des Denkens, d. h. die Unendlichkeit und Einheit des Ursprungs, antezipiert. In diesem Sinne der Antezipation ist schließlich auch in der Wissenschaft der Mathematik die Berufung auf Anschauung nicht schlechthin zu verwerfen, sondern nur, wenn sie die Umgehung der Rechenschaft aus dem reinen Denken bedeuten will.“

---

1) Vgl. Nr. 113a S. 1 u. f.

2) Vgl. dazu auch Fr. Meyer „Kant und das Neue in der Mathematik“, Archiv für Mathematik und Physik 1905.

3) Vgl. Nr. 105e.

4) Vgl. Nr. 105e S. 2.

5) Vgl. Nr. 105e S. 277.

Die Ablehnung jeder empirischen Anschauung und die Beseitigung der reinen Anschauung Kants als selbständigen Faktors im Gebiete der Erkenntnistheorie durch die Marburger Schule, bzw. durch deren Führer Cohen und Natorp ist darum so interessant, weil sie der Diskreditierung der Anschauung im Gebiete der Mathematik, wie sich diese bei neueren mathematischen Untersuchungen ergeben hat, durchaus parallel läuft. Besonders lehrreich ist dafür die Auseinandersetzung von Natorp und Wellstein.[1]) Herr Wellstein lehnt gleichfalls die reine Anschauung Kants ab, in deren Zwangläufigkeit er einen Rest von Sensualismus sieht, betont aber andererseits die Bedeutung der empirischen Anschauung als Anregerin der mathematischen Begriffsbildung. Herr Natorp sieht hierin einen Widerspruch, wie ich glaube, mit Unrecht. Sehr deutlich entwickelt Herr Wellstein[2]) seine Ansicht, indem er sagt: Durch Erfahrungen „ergibt sich für den denkenden Geist die Notwendigkeit, versuchsweise einige Ordnungen vollzogen anzunehmen, um andere daraus ableiten zu können. Das geschieht durch Begriffe und Axiome. So beginnt die exakte Wissenschaft zwar mit der Erfahrung und ihre Grundbegriffe mögen in geschichtlich weit zurückliegenden Zeiten wohl in dem Glauben gebildet worden sein, den empirischen Objekten genau adäquat zu sein; im Grunde sind sie aber nicht Nachbildungen des Empirischen, sondern in Anlehnung an die Empirie erfaßte reine Ideen, die ungeheuer viel einfacher sind als der sinnliche Gegenstand.“ „Die Axiome der Geometrie und der Mechanik[3]) sind empirischen Ursprungs. Wir leugnen damit durchaus nicht ihre freie Schöpfung durch unser Denken, das nur geleitet ist durch die Absicht, den Inhalt unserer Erfahrung durch Gesetze zu ordnen; wir treten aber damit andererseits den Ansprüchen eines die Erfahrung mißachtenden Idealismus entgegen, als hätte man durch bloßes Nachdenken auf Grund unserer Denkgesetze allein zu unserer Geometrie und Mechanik kommen müssen.“ Herr Natorp würde dagegen wieder die Bedeutung der synthetischen Logik hervorheben können im Gegensatz zur analytischen (formalen), aber im Grunde hat Herr Wellstein doch wohl Recht.

Die Arbeiten von Cohen und Natorp und von ihrer ganzen Schule werden in den Kreisen der Mathematiker, und zwar selbst von denen, für welche das reine Denken alles ist, meist ungünstig beurteilt. Das ist durchaus erklärlich, weil der Mathematiker gewöhnt ist, falls er diesen oder jenen fundamentalen Fehler in einer Arbeit findet, diese ganz zu verwerfen, aber dies ist in Beziehung auf philosophische Betrachtungen nicht richtig, weil hier der Wert schließlich immer im Ganzen liegt.[4]) Was

1) Vgl. Nr. 105e S. 274, 310, 316 und namentlich 318 u. f. und ebenso Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 131 u. f.

2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 144 u. f.

3) Für die Arithmetik vgl. Wellsteins Bemerkung, hier S. 26.

4) So scheint auch Herr Voß infolge seiner berechtigten Ausstellungen an den Arbeiten von Herrn G. Fr. Lipps zu übersehen, daß diese als Ganzes doch recht wertvoll sind. Vgl. Nr. 161a S. 46.

Herrn Natorp anlangt, so fließen seine meist anerkannten sozial-pädagogischen Arbeiten aus derselben Quelle, wie seine vielfach beanstandeten, der Mathematik zugewandten erkenntnistheoretischen Versuche, nämlich aus seiner Persönlichkeit. Er hat von seinem philologisch-historischen Ausgangspunkte aus sich redlich bemüht, in die Fragen der Mathematik einzudringen, und fordert in der Vorrede seines Buches zu „planmäßiger Zusammenarbeit von Philosophie und exakter Forschung" auf, dabei betonend, daß es durchaus der Absicht seines „Versuches" entspräche, wenn dieser durch solche gemeinsame Arbeit „in einigem vielleicht schon bald überholt würde". Diese Zusammenarbeit wird auch auf mathematischer Seite vielfach gewünscht. So sagt u. a. Herr Voß[1]), und zwar bei einer kritischen Würdigung der Arbeiten Wundts, daß „eine gemeinsame Verständigung über die Grundbegriffe der Mathematik gerade in der Gegenwart von dem größten Interesse sein würde". Von diesem Standpunkte aus wird man auch, unter Ausdehnung auf die ganze Arbeit der Marburger Schule, das Urteil verstehen, das Herr Simon über Cohens Logik ausspricht. Er, der selbst gelegentlich[2]) die Euklidische Geometrie als „chemische" Verbindung von Logik und Anschauung bezeichnet, sagt[3]): „Ohne mich mit den Resultaten des Cohenschen Buches zu identifizieren, stelle ich es schon deshalb außerordentlich hoch, weil es mit eiserner Konsequenz die reine Erkenntnis möglichst von aller Psychologie und damit von allen sinnlichen, anschaulichen Bestandteilen säubert. Freilich ist für die Schüler die Psychologie der Zahl- und Raumbegriffe, ihre Erarbeitung aus der inneren und äußeren Erfahrung des einzelnen fast wichtiger als die logische Seite." Es ist auch ein Verdienst, mit „eiserner Konsequenz" zu zeigen, daß gewisse Prämissen nicht ausreichen, um zu einem bestimmten Ziel zu gelangen, mag man nun die Tragweite der Prämissen selbst übersehen oder sie verkennen. Das zeigt die Marburger Schule deutlich in bezug auf die Mathematik: das alogische Moment eilt, unter den Worten oder Zeichen versteckt, überall zu Hilfe, wenn das reine Denken versagt.[4])

Wir verdanken Cohen und Natorp namentlich wichtige Beiträge zur Erschließung der Geistesarbeit von Platon, Descartes und Kant, und dabei, wie auch in den anschließenden eigenen Arbeiten, zeigen sie die Fruchtbarkeit ihrer stets zunehmenden Einseitigkeit, die in der immer fortschreitenden Verkennung des alogischen Momentes besteht, mag man es nun Anschauung oder anders nennen. Es ist ihnen gegangen wie der Taube, von der Kant gelegentlich spricht[5]): „Die leichte Taube, indem sie in freiem Fluge die Luft teilt, deren Widerstand sie fühlt, könnte die Vor-

---

1) Nr. 161a S. 84. 2) Nr. 137f S. 29. 3) Nr. 137f S. 4.

4) Bei Natorp besonders beim Übergange vom Reellen zum Imaginären und Komplexen, dann wieder bei der Frage nach der Anzahl der Dimensionen des Raumes usw.

5) Vgl. Kritik der reinen Vernunft in der Ausgabe von Kehrbach (Leipzig bei Reclam) S. 37.

stellung fassen, daß es ihr im luftleeren Raum noch viel besser gelingen werde."

Eine umfassende und eingehende, durchaus würdige Kritik dieses logischen Idealismus, auf die wir hier verweisen können, bietet das eben erschienene Buch „Wissenschaft und Wirklichkeit" von Herrn Frischeisen-Köhler, in welchem namentlich die Geistesarbeit von R. Avenarius, Dilthey, Husserl, Mach, Rickert, A. Riehl, Windelband und Wundt voll zur Geltung kommt.

Außerdem hat in den letzten Jahren eine junge Schule von Kantianern, von vornherein in enger Fühlung mit der Mathematik und mit den Naturwissenschaften, den Kampf gegen die Marburger aufgenommen, besonders gegen ihre „transzendentale Methode", dabei die Bahnen von Fries und Apelt weiter verfolgend.[1]) Von ihr sind namentlich die Arbeiten von Herrn Hessenberg und Herrn Nelson hervorzuheben. Hier wird die Anschauung im Sinne Kants voll gewertet, aber abschließende Ergebnisse in Beziehung auf die Grundlage der Mathematik sind auch bei ihnen nicht zu finden.

Dies ist auch nicht bei Wundt der Fall, welcher gleichfalls die Bedeutung der Auschauung durchaus anerkennt. Sein umfassendes System der Logik und Metaphysik bringt sicher für alle Wissenschaften die reichste Belehrung, aber die Kritik, welche Herr H. Burkhardt an der zweiten Auflage der Logik von seiten der Mathematik geübt hat[2]), ist leider für deren dritte Auflage nicht verwendet worden. Infolgedessen erhält man auch bei Wundt in Beziehung auf die Grundbegriffe und das Axiomatische der Mathematik keine genügende Auskunft, dagegen ist bei ihm allerdings das Methodische, das er bringt, äußerst wertvoll.

Während die Vertreter des reinen Denkens[3]), mögen sie nun Philosophen oder Mathematiker sein, der Schule, falls sie sich überhaupt um diese kümmern, die Anschauung wohl oder übel als eine Art Surrogat der Erkenntnis zubilligen, aber für die Wissenschaft ihre Beseitigung fordern, ist, abgesehen von bedeutenden Philosophen, auch eine gewichtige Gruppe von Mathematikern durchaus anderer Ansicht. Sie, an deren Spitze Herr F. Klein steht, hat aus der Diskreditierung der Anschauung, welche durch die mathematische Wissenschaft selbst bedingt ist, nicht den Schluß gezogen, daß die Anschauung zu beseitigen sei, sondern, daß unsere Auffassung von allem Anschaulichen in der Mathematik einer Änderung unterzogen werden müsse. Wir werden später darauf zurückkommen.

Hier sollte nur, ohne grade bei der Charakteristik der Gegenwart Voll-

1) Vgl. die von ihnen herausgegebenen Abhandlungen Nr. 49.

2) Vgl. die Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie Bd. 9. Auch Herr Voß (vgl. Nr. 161a S. 80) hat wiederum auf die Unzulänglichkeit der erkenntnistheoretischen Grundlegungen Wundts, soweit diese die Mathematik betreffen, hingewiesen.

3) Vgl. hier die Anmerkung 5 auf S. 23.

ständigkeit anzustreben, auf die erheblichen Schwierigkeiten hingewiesen werden, welche für unsere Aufgabe vorliegen. Es bestätigt sich durchaus, was Herr Klein gelegentlich[1]) ausgesprochen hat: „Es ist ein gemeinsamer Charakter aller Wissenschaft der neuesten Zeit, daß alles in Zweifel gezogen wird, was bis dahin als ganz feststehend gegolten. Alles ist in Gährung, so auch in der Mathematik.“ Hoffen wir, daß auch der Wunsch in Erfüllung geht, mit dem Herr Klein diese Betrachtung schließt, daß nämlich „diese Periode nicht enden möge mit einem allgemeinen Skeptizismus, sondern mit einem neuen Aufbau“.

Zweiter Abschnitt.

Grundlegende Betrachtungen.

1. Die Kantische Lösung und ihre Mängel.

Infolge der geschilderten Sachlage muß wohl oder übel zunächst der Versuch gemacht werden, die gegenseitigen Beziehungen von Mathematik und Philosophie festzulegen, ehe die eigentliche Aufgabe, welche sich auf die Schule bezieht, in Angriff genommen werden kann.

Dieser Versuch mag in folgendem gewagt werden, doch soll dabei die eigentliche, auf die Schule (Lehrende und Lernende!) eingeschränkte Aufgabe stets die Begrenzung der Überlegungen bestimmen.

Nun ist es eine ständige Behauptung der einschlägigen Literatur, daß die Schulmathematiker, welche sich in der Gegenwart für Philosophie interessieren, fast alle Kantianer sind. Tatsächlich hat einst die Mathematik der Zeitgenossen im Kantischen Systeme eine sichere Stellung gefunden, und es frägt sich vor allem, ob die weitere Entwicklung der Mathematik selbst diese Sicherheit erschüttert hat. Da überdies die Philosophie unserer Zeit meist eingestandenermaßen auf das System von Kant zurückgeht, um es entweder unter größeren oder geringeren Umbildungen anzunehmen oder um es abzulehnen, und da die Mathematiker (Enriques, Poincaré, Weber, Wellstein u. a.) bei der Begründung ihrer Wissenschaft auch vielfach an Gedanken von Kant anknüpfen, so dürfte es zweckmäßig sein, bei unseren grundlegenden Betrachtungen mit einer Erörterung dieses Systems[2]) zu beginnen, soweit es hier in Frage kommt.

Kant schrieb die Kritik der reinen Vernunft, auf der sein ganzes System beruht, um das vermeintliche Wissen vom Übersinnlichen auf seine Richtigkeit hin zu prüfen, d. h. die Metaphysik, welche als Ontologie und als rationale Psychologie, Kosmologie und Theologie versprach, den

1) Vgl. Nr. 781 S. 7. 2) Vgl. Nr. 167q, r, s, t.

Menschen der Rätsel letzte zu lösen. Diese vermeintliche Wissenschaft wollte ihre Aufgabe allein durch reines, d. h. erfahrungsfreies Denken bewältigen, und darum warf Kant die Frage auf: Was und wieviel vermag der Mensch gemäß seiner Anlage a priori (d. h. unabhängig von Erfahrung) zu wissen?

Dazu mußte das menschliche Vermögen des reinen Denkens, welches als reine Vernunft (bzw. Verstand) bezeichnet wurde, kritisiert, d. h. auf seine Leistungsfähigkeit hin geprüft werden.

Kants Antwort lautete: Dieses Vermögen reicht nicht aus, um auch nur das geringste vom Übersinnlichen zu wissen, weil alles menschliche Wissen, abgesehen von Formallogik, anschaulich-logisch ist, und weil dem Menschen nun einmal übersinnliche Anschauung versagt ist. Macht sich das Denken frei von der Sinnlichkeit, so hat es nur ein Feld, nämlich die Formallogik, vermag aber nicht, wie Vorgänger und Zeitgenossen wähnten, das Übersinnliche zu erfassen.

In der verachteten Sinnlichkeit, durch welche alle Denkergebnisse „verworren" werden sollten, glaubte Kant auch eine apriorische Erkenntnisquelle entdeckt zu haben, die reine Anschauung, als deren Formen er Zeit und Raum einführte. Dafür schien zu sprechen, daß Arithmetik, Geometrie und Mechanik, welche sich auf diese Formen beziehen, klare und deutliche Erkenntnisse sind, während die Metaphysik, welche nur im reinen Denken wurzeln will, höchst verworren ist.

Jene Formen sind zunächst lediglich „Möglichkeiten des Beisammenseins" für ein Nacheinander und für ein Nebeneinander, welches erst der Verstand verbindet. Sie sind aber für ihn ein Zwang, eine bestimmte Ordnung des Nacheinander und eine bestimmte Ordnung des Nebeneinander zu bilden. Der Verstand baut die räumlich-zeitliche Sinnenwelt unter dem Zwange der Anschauungsformen aus Empfindungen ebenso auf, wie er die Welt des Mathematikers aus entsprechenden Elementen der reinen Anschauung aufbaut. Die Empfindung ist für Kant der Index des Wirklichen, aber es ist „vom empirischen Bewußtsein zum reinen eine stufenartige Veränderung möglich, da das Reale desselben ganz verschwindet und ein bloß formales Bewußtsein (a priori) des Mannigfaltigen in Raum und Zeit übrig bleibt: also auch eine Synthesis der Größenerzeugung einer Empfindung von ihrem Anfange, der reinen Anschauung = 0 an, bis zu einer beliebigen Größe derselben."[1])

Elemente der reinen Anschauung werden durch den Verstand nach dessen Gesetzen zu den Gebilden geformt, mit denen sich die Mathematik beschäftigt, und ebenso entsteht die räumlich-zeitliche Sinnenwelt, falls für die Synthesen des Verstandes Empfindungen vorliegen. Darum gibt es nur eine Mathematik, aber einen doppelten Gebrauch derselben, nämlich im Gebiete der reinen Anschauung und im Gebiete der empiri-

1) Vgl. Kritik der reinen Vernunft in der Ausgabe von Kehrbach (Leipzig, bei Reclam) S. 163. Daß Herr Cohen schon frühe gerade diese Stelle beanstandet hat, ist bezeichnend für den weiteren Weg seiner Entwicklung.

schen Anschauung, und darum stimmen die sog. „reine" und die sog. „angewandte" Mathematik überein. So gilt im besonderen für die Geometrie: „Ob wir daher gleich vom Raume überhaupt oder den Gestalten, welche die produktive Einbildungskraft in ihm verzeichnet, so vieles a priori in synthetischen Urteilen erkennen, so, daß wir wirklich hierzu gar keiner Erfahrung bedürfen, so würde doch diese Erkenntnis gar nichts, sondern die Beschäftigung mit einem bloßen Hirngespinst sein, wäre der Raum nicht, als Bedingung der Erscheinungen, welche den Stoff zur äußeren Erfahrung ausmachen, anzusehen: daher sich jene reinen synthetischen Urteile, obzwar nur mittelbar, auf mögliche Erfahrung . . . beziehen." [1])

Die Synthesen des Verstandes, mögen sie nun an Elementen der reinen Anschauung oder an Empfindungen vollzogen werden, sind bei Kant bestimmt durch

a) intuitive Begriffe oder Anschauungsformen für das Beisammensein (Zeit und Raum),
b) diskursive Begriffe (Kategorien) oder Denkformen für die Einzelverknüpfung (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.),
c) systematische Begriffe (Ideen) oder Denkformen für die Verknüpfung zum Ganzen (Seele, Welt, Gott).

Mit ihnen werden sowohl die synthetischen Urteile a priori der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung gebildet, als die synthetischen Beurteilungen der Erfahrungen, welche unser tägliches Brot sind, wenn wir unsere gewöhnliche Erkenntnis erweitern. Dabei sind jene die Bedingungen für diese, sie selbst aber ruhen trotz ihrer großen Mannigfaltigkeit auf einem eng und genau begrenzten Systeme von „Grundsätzen" des reinen Verstandes, welche als Axiome der Anschauung, Antezipationen der Wahrnehmung, Analogien der Erfahrung und Postulate des empirischen Denkens überhaupt unterschieden werden. Dies gilt in subjektiver Hinsicht, während sie in objektiver zugleich die allgemeinsten Naturgesetze darstellen. Diese Grundsätze können bewiesen werden, insofern man untersucht, wie unter Verwendung der oben aufgezählten Begriffe in einem Bewußtsein Erfahrung entstehen kann. Denkt man sich die mathematisch-naturwissenschaftliche Erkenntnis des Menschen in jeder Beziehung vollendet, so stellt sie ein Ideal der Erfahrung dar, welches seinem Begriffe nach Einheit gesetzlicher Verbindungen von gegebenen Empfindungen in Zeit und Raum ist. Diesem Ideale der „Möglichen Erfahrung" entspricht als Träger nicht das individuelle Bewußtsein dieses oder jenes Menschen, sondern ein ideales „Bewußtsein überhaupt". Soll das Ideal der Erfahrung in einem Bewußtsein überhaupt entstehen, so müssen dafür bestimmte grundlegende Urteile a priori vorausgesetzt werden, und diese „Bedingungen der möglichen Erfahrung" sind die Grundsätze des reinen Verstandes.

1) Vgl. bei Kehrbach S. 155.

Für diese Betrachtung ist, namentlich mit Rücksicht auf die Darstellung Kants in der Marburger Schule, ein Wort von Kant charakteristisch. Er sagt[1]): „Allein von einem Stücke konnte ich in obigem Beweise doch nicht abstrahieren, nämlich davon, daß das Mannigfaltige für die Anschauung noch vor der Synthesis des Verstandes und **unabhängig** von ihr gegeben sein müsse."

Bei Kant ist der Menschengeist stets Baumeister seiner Sinnenwelt, nicht aber deren Schöpfer, aber dieses Bauens ist er sich nicht bewußt[2]), und darum muß er die Fülle der Erscheinungen auf empirischem Wege studieren. Nur das gesetzliche Skelett der Sinnenwelt (Grundsätze des reinen Verstandes) kann er a priori erkennen, weil diese Gesetzlichkeit seine eigene ist. Darum vergleicht Kant seine „Synthetische Logik", welche die alte Ontologie ersetzen soll, mit der Grammatik einer Sprache, sie entspricht unter Einschränkung auf die zeitlich-räumliche Sinnenwelt dem alten „Usus realis" des Verstandes, der in ihm das Übersinnliche fassen wollte. Daneben steht, dem alten „Usus logicus" des Verstandes entsprechend, die Analytische Logik, welche aus irgendwie gegebenen Voraussetzungen formal ihre Darlegungen zieht und also die Erkenntnis nicht erweitert, sondern nur erläutert. Sie arbeitet natürlich stets a priori. Ihre reflexiven Kategorien (Gleichheit, Ähnlichkeit, Ganzes und Teile usw.) stehen den konstitutiven Kategorien (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.) der synthetischen Logik gegenüber.[3])

Scheidet man Verstand und Vernunft, so ist die Tätigkeit des Verstandes in diesem Usus logicus und in diesem Usus realis erschöpft, während die systematischen Begriffe (Ideen) schon dem Gebiete der Vernunft angehören, deren eigentliches Reich die Gesetzlichkeit des Sein-Sollenden mit ihrer Freiheit ist.

Es ist aber dieselbe in ihrer Autonomie wirkende „Spontaneität", die als praktische Vernunft durchaus Herrscherin ist, und die als theoretische Vernunft für ihre Synthesen ein Mannigfaltiges als Baustoff haben muß, wenn sie die Sinnenwelt unbewußt erbauen und bewußt erkennen soll. Für das Individuum stellt diese Autonomie das Allgemein-Menschliche im einzelnen dar. Stimmt das Individuelle mit diesem überein[4]), so erreicht es die Ideale des Wahren, Guten und Schönen, soweit diese dem Menschen überhaupt erreichbar sind; jeder Abweichung entspricht Irrtum, Böses und Häßliches. Das Allgemein-Menschliche ist für

1) Vgl. bei Kehrbach S. 668. Vgl. dazu die Voraussetzung bei Dedekind, Nr. 24b und im Gegensatz dazu bei Natorp Nr. 105e.

2) Vgl. dazu Nr. 105e S. 9: „Die voraus gegebenen Dinge, soweit von solchen zu reden überhaupt Sinn hat, sind vielmehr voraus vollzogene, aber entfernt nicht immer rein und daher nicht immer richtig vollzogene Synthesen eines primitiven Verstandes."

3) Vgl. dazu Windelband „Vom System der Kategorien" in den philosophischen Abhandlungen für Siegwart 1900.

4) Vgl. Kants Theorie der Epigenesis bei Kehrbach S. 682 und Nr. 167t S. 75.

Kant ebenso wie für Goethe und Schiller überall das Ziel des einzelnen Menschen.[1])

Aus der fast unübersehbaren kritischen Literatur, welche durch das System Kants hervorgerufen worden ist, wollen wir im allgemeinen hier nur hervorheben, daß die moderne Entwicklungslehre seine Grundlagen nicht beeinflußt. Wie der gegenwärtige Gattungs-Charakter des Menschen auch geschichtlich entstanden sein mag, berührt bei seiner Stabilität in historischer Zeit die erkenntnis-theoretischen Fragen überhaupt nicht.[2]) Selbst H. Spencer erkennt das Kantische Apriori für das Individuum als Gattungs-Charakter an, wenn er es auch für die Rasse ablehnt. Was im besonderen den Raumbegriff anlangt, so sagt dazu Herr M. Simon[3]): „Aus welchen Wahrnehmungen auch immer dieser Gedankenkomplex sich im Laufe ungezählter Aeonen, etwa aus den dunkelsten Reaktionen der Aktinien auf Licht und Hautreiz bis zu unserer dreidimensionalen Anschauung psychologisch entwickelt haben möge, erkenntnis-theoretisch bildet er eine Konstituente unseres Intellekts".

Was nun im besonderen die Mathematik betrifft, so ordnet Kant die Arithmetik der Anschauungsform Zeit, die Geometrie der Anschauungsform Raum zu, während er die Mechanik unter Berücksichtigung des Empirischen auf die Vereinigung der beiden Anschauungsformen stützt. Alle Gebilde der Mathematik sind durch den Verstand, oder genauer, durch die Einbildungskraft gemäß den Gesetzen des Verstandes aus Elementen der reinen Anschauung geformt, während deren Ersatz durch Empfindungen zu Gebilden der räumlich-zeitlichen Sinnenwelt führt.

Die grundlegende Stelle für die Zahl lautet bei Kant[4]): „Das reine Bild aller Größen (quantorum) vor dem äußeren Sinne, ist der Raum, aller Gegenstände der Sinne aber überhaupt, die Zeit. Das reine Schema der Größe aber (quantitatis) als eines Begriffs des Verstandes, ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt. Also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge."

Für die extensive Größe (Strecke usw.) und für die protensive Größe (Dauer) bringt der erste Grundsatz des reinen Verstandes das Erforderliche, für die intensive Größe (Grad des Einflusses auf den Sinn bei der Empfindung) ebenso der zweite. Es heißt: „Alle Erscheinungen enthalten, der Form nach, eine Anschauung in Raum und Zeit, welche ihnen insgesamt a priori zum Grunde liegt. Sie können also nicht anders apprehendiert, d. h. ins empirische Bewußtsein aufgenommen werden, als durch die Synthesis des Mannigfaltigen, wodurch die Vorstellungen eines bestimmten Raumes oder Zeit erzeugt werden, d. i. durch Zusammen-

1) Vgl. Nr. 167 s. 2) Vgl. dazu in Nr. 20c S. 200 u. f.
3) Vgl. Nr. 137 f S. 5. 4) Vgl. bei Kehrbach S. 145.

setzung des Gleichartigen und das Bewußtsein der synthetischen Einheit dieses Mannigfaltigen (Gleichartigen). Nun ist das Bewußtsein des mannigfaltigen Gleichartigen in der Anschauung überhaupt, sofern dadurch die Vorstellung eines Objektes zuerst möglich wird, der Begriff einer Größe (quanti). Also ist selbst die Wahrnehmung eines Objektes, als Erscheinung, nur durch dieselbe synthetische Einheit des Mannigfaltigen der gegebenen sinnlichen Anschauung möglich, wodurch die Einheit der Zusammensetzung des mannigfaltigen Gleichartigen im Begriffe einer Größe gedacht wird, d. i. die Erscheinungen sind insgesamt Größen, und zwar extensive Größen, weil sie als Anschauungen im Raume oder der Zeit durch dieselbe Synthesis dargestellt werden müssen, als wodurch Raum und Zeit überhaupt bestimmt werden." „Auf diese sukzessive Synthesis der produktiven Einbildungskraft in der Erzeugung der Gestalten gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) mit ihren Axiomen" usw. „Die empirische Anschauung ist nur durch die reine (des Raumes und der Zeit) möglich; was also die Geometrie von dieser sagt, gilt auch ohne Widerrede von jener, und die Ausflucht, als wenn Gegenstände der Sinne nicht den Regeln der Konstruktion im Raume ... gemäß sein dürfen, müsse wegfallen." „Die Synthesis der Räume und Zeiten, als der wesentlichen Form aller Anschauung, ist das, was zugleich die Apprehension der Erscheinung, mithin jede äußere Erfahrung, folglich auch alle Erkenntnis der Gegenstände derselben, möglich macht, und was die Mathematik im reinen Gebrauch von jener beweiset, das gilt auch notwendig von dieser." Nach Kant ist die reine Mathematik sogar „in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung" anwendbar.[1])

Nachdem auch noch die intensive Größe, welche nur als Einheit apprehendiert wird, eingeführt worden ist, heißt es: „Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmöglichste (kein Teil einfach) ist, heißt die Kontinuität derselben. Raum und Zeit sind quanta continua." „Alle Erscheinungen überhaupt sind demnach kontinuierliche Größen, sowohl ihrer Anschauung nach, als extensive, oder der bloßen Wahrnehmung (Empfindung und mithin Realität) nach als intensive Größen."[2])

Gegen die Zuordnung von Zahl und Zeit wird man einmal einwenden, daß die Arithmetik von der Zeit unabhängig ist, aber das hat Kant auch gewußt, und er hat seine im Zählen erzeugten Zahlen (Einheiten der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt) und deren Gesetze sicher nicht vom Wechsel der Zeit abhängig gedacht. Ferner wird man einwenden, daß der Fluß der Zeit nur eine Richtung hat, von der Vergangenheit über die Gegenwart zur Zukunft, während die Zahlenreihe vorwärts und rückwärts durchlaufen werden kann. Dieser Einwurf erledigt sich aber, wenn die Zurückweisung des

1) Vgl. bei Kehrbach S. 159 bis 162.
2) Vgl. bei Kehrbach S. 65.

ersten richtig ist, denn die in der Zeit erzeugte, aber von der Zeit unabhängig gewordene Zahlenreihe hat mit dem Flusse der Zeit überhaupt nichts mehr zu tun. Endlich wird man einwenden, daß zu Kants Zeit nur das Reelle allgemein bekannt war und daß für dieses die Beziehung zur eindimensionalen Zeit vielleicht verständlich ist, nicht aber für das zweifach ausgedehnte Gebiet unserer gemeinen Komplexzahlen. Auch dieser Einwurf läßt sich entkräften, man braucht nur an Kroneckers Auffassung der Zahlen zu denken, die auch Herr Dedekind prinzipiell anerkennt. Auch nach Dedekind[1]) „erscheint es als etwas selbstverständliches und durchaus nichts neues, daß jeder, auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt", was auch schon Dirichlet wiederholt betont hat. Daß es nicht praktisch wäre, jedesmal „diese mühselige Umschreibung wirklich vornehmen und keine anderen, als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen", ist selbstverständlich, aber die Kroneckersche Auffassung ist an und für sich durchaus einwandfrei. So sagt auch Poincaré[2]): „Heute bleiben in der Analysis nur noch ganze Zahlen oder endliche oder unendliche Systeme ganzer Zahlen, die untereinander durch ein Netz von Gleichheits- oder Ungleichheitsverhältnissen verbunden werden."

Daß sich die Kantische Auffassung trotz alledem nicht aufrecht erhalten läßt, scheint mir dagegen aus anderem hervorzugehen, auf das schon die Praxis der Volksschullehrer hinweist. In ihr herrschte bekanntlich ein langwieriger Streit zwischen Zählern und Anschauern, der sich darum drehe, ob für die Zahlen das Sukzessive oder das Simultane das psychologisch primäre Moment ist.[3]) Die Praxis hat längst entschieden, daß beides sich verteidigen läßt, aber erst in dessen Synthese das Ganze liegt. Bezeichnen wir den Oberbegriff für Nacheinander und Nebeneinander durch Außer-einander, so ist die Zahl das Mittel, das bewegliche Außer-einander (Menge ohne feste Ordnung) zu fesseln, und darum ist sie auch wieder für die festen Formen des Nacheinander und Nebeneinander, die wir als Zeit und Raum bezeichnen, verwendbar. Deshalb haben sowohl die Zähler wie die Anschauer recht.

Nach Kant kann es nur eine bestimmte Geometrie geben, denn durch seine reine Anschauung wird das Denken zwangläufig. Diese eine Geometrie war für Kant, der Zeitlage entsprechend, selbstverständlich die Euklidische Geometrie. Nun hat die Folgezeit dargetan, daß zunächst in mathematischer Hinsicht mindestens drei Formen der Geometrie, unter denen sich auch die Euklidische befindet, möglich und zugleich mit der Anschauung verträglich sind, und damit taucht die weitere Frage auf, welche von ihnen bei allen Anwendungen die geeignetste ist. Man muß also, um dem Stande der mathematischen

1) Vgl. Nr. 24b S. XI. 2) Vgl. Nr. 113b S. 14.
3) Vgl. Lietzmann in Nr. 1 Bd. V Heft 1 S. 28.

Wissenschaft gerecht zu werden, zum mindesten die Zwangläufigkeit aus Kants reiner Anschauung entfernen, d. h. den Gedanken aufgeben, daß die Anschauung dem Denken nur die Bildung einer bestimmten Geometrie gestattet. Dies hat schon vom Standpunkte der Empirie aus v. Helmholtz getan, ihm ist der Raum a priori gegeben, die Axiome dagegen durch Erfahrung bestimmt. Man kann diesem Gedanken auch die Form geben, daß die Möglichkeit des Beisammenseins (das Außer-einander) den Synthesen des Verstandes eine bestimmte Freiheit läßt, die sich in der Bildung des Riemann-Kleinschen Raumes, des Raumes von Euklid und des Bolyai-Lobatschefskijschen Raumes zeigt, und daß dazu die weitere Frage kommt, welche dieser Formen für die Erfahrung am geeignetsten ist. In diesem Sinne scheint mir auch Herr Weber gegen Herrn Wellstein die Anschauungsnotwendigkeit zu verteidigen, nicht im Sinne der Notwendigkeit im Urteilen, sondern im Sinne eines notwendig für die Formung gegebenen Anschaulichen. Herr Wellstein selbst ist nicht abgeneigt, den Ausdruck „reine Anschauung" festzuhalten, und zwar im folgenden Sinne. Nehmen wir an, die Axiomatik, die zurzeit für die Geometrie durchgeführt ist, sei auch für die Arithmetik und namentlich für die Mechanik einwandfrei erledigt, so tritt für das Ganze der Erfahrung wieder die Kantische Frage auf nach dessen Bedingungen. „Solche Untersuchungen über die Vorzüge und Nachteile dieser oder jener Hypothese werden jetzt in steigendem Maße angestellt. Diese Betrachtungen aber bewegen sich wahrhaft im Reiche der reinen Anschauung a priori in dem vertieften Sinne, daß sie Überlegungen über die Voraussetzungen der Möglichkeit unserer Erfahrung enthalten. Nur wäre statt des a priori ein unzweideutiger Kunstausdruck zu wählen."[1])

Für die Mechanik nimmt Kant, wie schon erwähnt, empirische Elemente auf, da ihm schon die Bewegung nur durch Erfahrung zugänglich erscheint.[2]) Natürlich häufen sich hier die Schwierigkeiten der Auffassung, welche für Zahl und Raum dargelegt wurden.

Zu diesen, sich auf Kants Geistesarbeit beziehenden Überlegungen kommt nun hinzu, daß die Entwicklung der Mathematik selbst bei vielen das Vertrauen zu jeder Art der Anschauung erschüttert hat. Freilich die Hinweise auf die Unanschaulichkeit des Tausendecks (Poincaré), das schon zu Kants Zeiten und vorher als Chilogon in dieser Hinsicht eine Rolle spielte, u. a. sind kaum zutreffend. Unmittelbar veranschaulichen lassen sich nur die ersten Anzahlen bis 5 oder 6, wenn man von besonderer Anlage und Ausbildung absieht, wie sie bei Rechengenies wie Dahse vorhanden waren. Die anderen macht erst, wie u. a. Herr Husserl scharf betont hat, das Positionssystem anschaulich. Geistige Konstruktion und Zeichen führen hier weiter. In diesem Sinne ist auch das Tausend-

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 146.
2) Vgl. Kant, Metyphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Einleitung.

eck anschaulich, nicht nur das Dreieck, Viereck usw. Übrigens könnte man ja auch im Gelände einen Kreis von etwa 80 m Halbmesser abstecken und ihm ein Tausendeck einschreiben, es wäre etwa in fünf Minuten abzuschreiten, den Schritt von Ecke zu Ecke etwa $1/2$ m gerechnet. Dagegen sind brauchbare Beispiele für die Diskreditierung der Anschauung die ursprünglich von Weierstraß entdeckten Kurven, die trotz ihrer (arithmetischen) Stetigkeit in keinem Punkte eine Tangente haben. Man könnte hier noch versuchen, Abhilfe zu schaffen, indem man neben dem Worte Linie (Gerade und Kurve) die Bezeichnung „Lineares Punktgebilde" einführte und den Namen Linie nur verwendete, falls Tangenten nur in einer endlichen Anzahl von Punkten (Spitzen usw.) unbestimmt werden. Die unmittelbar sich anschließende Frage nach der Beschaffenheit der höheren Ableitungen würde aber diesen Versuch doch wieder ziemlich illusorisch machen. Weiter noch reicht der Einfluß der modernen Mengenlehre mit ihrer Zersetzung der Anschauung. Schon die Ausscheidung e i n e s Punktes aus einer gewöhnlichen Linie ist nicht anschaulich faßbar, wohl aber begrifflich der Fortfall einer Stelle in einer linearen perfekten zusammenhängenden Menge. Nun haben zwar die Paradoxien der Mengenlehre wiederum das Vertrauen zu dieser erschüttert, und Poincaré u. a. haben die ganze Mengenlehre als eine unberechtigte Erweiterung des Zahlenbegriffes abgewiesen. Äußerst bezeichnend für die gegenwärtige Lage ist, daß Herr Weber im ersten Bande der Enzyklopädie (erste Auflage) die Arithmetik auf der allgemeinen Mengenlehre aufbaut, am Schlusse des dritten Bandes statt dessen aber eine neue Ausführung gibt, die nur Endliches benutzt und wieder ruhig mit in Reihe gelegten Kartoffeln u. a. arbeitet, in Übereinstimmung mit dem Worte von Poincaré: „L'important c'est de ne jamais introduire que des êtres que l'on puisse définir complètement en un nombre fini de mots." Dazu bemerkt Herr Voß[1]): „Trotzdem ist es nicht wahrscheinlich, daß man demnächst, wie Poincaré glaubt, in der Mengenlehre nur noch einen interessanten pathologischen Fall erblicken wird. Die Begriffe des Häufungspunktes oder der Grenzstellen einer unendlichen Menge, die Äquivalenz und die Abzählbarkeit, das sind fundamentale Bildungen unseres Verstandes, welche zu tief in das ganze Gebäude der Mathematik eingreifen, um sich überhaupt je wieder beseitigen zu lassen."

Das ist sicher richtig, aber andererseits betont Herr Voß gelegentlich in Übereinstimmung mit Herrn Klein u. a., daß er bei seinen geometrischen Arbeiten die Figuren doch nicht entbehren kann, daß also jedenfalls irgend eine Art von Anschauung erforderlich ist und gerechtfertigt werden kann. Das ist hier noch nicht weiter zu verfolgen, wo es sich nur darum handelt, darauf hinzuweisen, daß Kants reine Anschauung jedenfalls nicht ausreicht, um die auftretenden Fragen zu entscheiden,

1) Vgl. Nr. 161a S. 63.

und daß sie auch nicht ohne weiteres durch empirische Anschauung ersetzt werden kann.

Gerade von diesem Standpunkte aus ist aber auch die philosophische Arbeit der Marburger Schule, welche für die Mathematik mit ihrem reinen Denken auszukommen glaubt, trotz aller Kritik, die man an ihr üben mag, doch sehr zu beachten.

Für Kant ist die Sinnenwelt etwa eine, durch den Verstand vollzogene Integration von Empfindungen, die, abgesehen von ihrer Qualität, in einem Zeitelemente und in einem Raumelemente mit einem bestimmten „Intensitätsdifferentiale" gegeben sind, die Welt der Mathematik ebenso eine entsprechende Integration, bei der die Empfindungen durch Elemente der reinen Anschauung ersetzt sind. Die Marburger Schule will, jedenfalls innerhalb der Mathematik, auch die Elemente selbst durch reines Denken erzeugen.

Daß es nur Denknotwendigkeit gibt, wie auch Herr Wellstein hervorhebt, ist für Kant und alle seine Anhänger grundlegende Voraussetzung, also ist alle Notwendigkeit der Sinnenwelt in diese durch das Denken hineingetragen. Erfahrung gibt nur Assoziationen von komparativer Gültigkeit, wie Hume richtig bemerkt hat. Darum entsteht der „Gegenstand" durch Synthesen des Denkens, die ihn zum Denkenden in Beziehung setzen, während in ihnen selbst Beziehungen bestimmter Elemente vollzogen werden. Hinter dem Denkenden und hinter seiner Sinnenwelt steht vielleicht ein unfaßbares „Ding an sich", die uns zugänglichen Dinge lösen sich aber auf in lauter Beziehungen, und über einen Teil dieser Beziehungen, und zwar über einen äußerst wichtigen, gibt uns die Mathematik die erforderliche Auskunft.

Diese Auflösung der Dinge in Beziehungen müssen wir, namentlich wegen der jetzt in der Mathematik überall geforderten Axiomatik[1]) mit ihren indirekten Begriffsbestimmungen, bei denen alles Individuelle zurücktritt, etwas genauer betrachten, ehe wir uns den in Vorstehendem angeregten Fragen zuwenden können, welche durch die Schlagworte „Denken und Anschauung" und „Apriorisches und Empirisches" charakterisiert werden.

2. Ding und Beziehungen.[2])

Von seiner irdischen Entstehung an wächst der Mensch zunächst in eine Weltanschauung hinein, die man als Naiven Realismus zu bezeichnen pflegt.

Sein Gepräge besteht hauptsächlich darin, daß sich der einzelne Mensch als ein Ding von gewisser Selbständigkeit anderen Dingen von einer ge-

1) Vgl. dazu Nr. 125a, namentlich die Einleitung.

2) Wir haben versucht, auch dieser hier an und für sich notwendigen Betrachtung eine Form zu geben, welche den schließlichen Darlegungen für die Schule von Nutzen ist.

wissen Selbständigkeit gegenüber findet, mit denen er selbst in Verkehr steht und die auch untereinander in Wechselwirkung verbunden sind.

Ursprünglich belebte die Menschheit instinktiv Sonne und Mond und Busch und Quelle, wie heute noch jedes Kind in allen Gliedern der Außenwelt seinesgleichen sieht, und namentlich galt ihr alles Bewegte als lebendig und alles Lebendige als beseelt. Weitere Erfahrungen berichtigten diese nach Analogie des eigenen Innern geschaffene Auffassung der Außenwelt, während sich zugleich eine Fülle von Dichtungen bildete, um dem philosophischen Triebe nach einer Einheit alles Wissens zu dienen, bald auf diese, bald auf jene Weise. So ist das Gerüst des Naiven Realismus (Welt der Dinge) mannigfach umrankt, und das Wort selbst äußerst vieldeutig.[1])

Dabei hat die kulturelle Entwicklung im allgemeinen zu folgendem Standpunkte geführt:

An sich unterscheidet der einzelne ein Inneres und ein Äußeres, für deren Bezeichnung Worte wie Geist und Körper, Seele und Leib usw. dienen, während die anderen Dinge für ihn zunächst nur ein Äußeres sind. Alles Äußere bildet für ihn ein Ganzes, seine Außenwelt, der auch der eigene Körper angehört. In diesem Ganzen, welches vom Raum umfaßt wird und in der Zeit veränderlich ist, zeigen sich ihm bestimmte Teile, vor allem die Körper der Mitmenschen, denen er auch ein Inneres zuschreibt, dieses nach Analogie seines eigenen Inneren auffassend. Vom eigenen Innern zum fremden Innern führen aber keine psychischen Fäden, es gilt vielmehr das Prinzip der materiellen Verknüpfung, wonach der eigene Körper und der fremde Körper durch ihre Beziehungen den Verkehr des eigenen Innern mit dem fremden Innern vermitteln.

Dem Prinzipe der materiellen Verknüpfung entspricht die Notwendigkeit eines Zeichensystems, durch welches ein Inneres mit einem fremden Innern in Verkehr treten kann. Dieses Zeichensystem, dessen auch der einzelne für sich allein bedarf, liegt in der Wort- und Schriftsprache des gemeinen Lebens vor und zeigt wenigstens zum Teil noch die Spuren seiner geschichtlichen Entwicklung. So deutet z. B. noch das Geschlecht der Substantiva hin auf die ursprünglich allgemein instinktiv ausgeübte Erfassung der Außenwelt ex analogia hominis.

Darum spiegelt auch jede Sprache in ihren Grundzügen die Weltanschauung des Naiven Realismus wieder, und zwar deren Gliederung in den Arten der Aussage (Kategorien). Der erste Versuch, diese Gliederung vollständig darzustellen, ist die Kategorientafel des Aristoteles, welche bei gehöriger Anordnung folgendes Bild zeigt:

1. Selbständige Dinge (οὐσια).
2. Relativ dauernde Eigenschaften von Dingen
   a) in quantitativer Hinsicht (ποιον),
   b) in qualitativer Hinsicht (ποσον)

1) Vgl. Nr. 50, Kapitel 2.

3. Relativ wechselnde Zustände von Dingen
   a) in aktiver Hinsicht (πραττειν),
   b) in passiver Hinsicht (πασχειν),
   c) in indifferenter Hinsicht (κεισθαι und ἐχειν).
4. Beziehungen (Relationen) von Dingen
   a) für das äußere Beisammensein
      α) in zeitlicher Hinsicht (ποτε),
      β) in räumlicher Hinsicht (που),
   b) für innerliche Verbindung (προς τι).

Dieselben vier Gruppen finden wir auch noch bei den Logikern unserer Zeit im wesentlichen anerkannt, so bei Lotze, Sigwart, Wundt u. a.

Die geschichtliche Entwicklung hat nun seit den Tagen des Aristoteles dazu geführt[1]), bei der wissenschaftlichen Arbeit die Gruppe 4, d. h. die Beziehungen, unter Entwicklung ihrer überreichen Fülle, überall in den Vordergrund zu rücken und ihr gegenüber das Ding mit Eigenschaften und Zuständen zurücktreten zu lassen. So ist z. B. auch in der Mathematik die sogenannte direkte Definition, welche durch die Kategorie des Dinges bestimmt ist, durch die sogenannte indirekte Definition ersetzt worden, welche in einem System von Beziehungen besteht, wie es für die Geometrie die moderne Axiomatik deutlich zeigt.

Auf diesem Wege vom Dinge zu den Beziehungen wurde der Naive Realismus mit allen dogmatischen Ansätzen, die ihn von Fall zu Fall auszugestalten suchen, nicht etwa beseitigt, wohl aber kritisch gereinigt.

Der Anfang dieses Weges liegt schon vor der Aristotelischen Geistesarbeit. Als den Hellenen inmitten der politischen, sozialen und wirtschaftlichen Veränderungen, die im Zeitalter der sieben Weisen deutlich einsetzen und deren Sendung bestimmen, die Veränderung selbst zum Probleme wurde, tauchten zwei vorläufige Lösungen auf, die bis in unsere Zeit hineinwirken. Parmenides richtete, alle Veränderungen für Schein erklärend, den Blick auf das ewig sich gleichbleibende Sein, Heraklit auf das veränderliche Werden und dessen Gesetz. Im Anschluß an letzteren machte Protagoras den Menschen zum Maße aller Dinge, der seienden, wie[2]) sie sind, der nichtseienden, wie sie nicht sind.[3]) Damit führte er das Prinzip des Subjektivismus und des Relativismus in die Geschichte der abendländischen Kultur ein. Wenn er auch für das Handeln als Vorschriften gemeinsame Gaben der Götter an das Menschengeschlecht (αἰδως und δικη) anerkannte, so war ihm doch für das Wissen der einzelne Mensch in seiner individuellen Zufälligkeit das Maß der Dinge. Dieses veränderliche Maß erwies sich aber als unzureichend. Damit war ein neues Problem gegeben, in dessen Dienst sich das große Denker-

1) Vgl. u. a. Cassierer, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Berlin, 1910.

2) Nicht „daß“, wie oft zitiert wird, denn im Texte steht ὡς.

3) Vgl. hierzu Nr. 67 S. 267, die Klasse der Seienden und die Klasse der Nichtseienden.

paar Demokrit und Platon stellte. Nach ihnen steht der Welt der flüchtigen, in der Wahrnehmung gegebenen Erscheinungen, für welche das Maß des Protagoras in gewissem Sinne gilt, eine Welt des wahren Seins gegenüber: Demokrit fand sie im leeren Raume mit seinen Atomen und deren Bewegungsgesetzen, Platon im Reiche der Ideen, den Einheiten des Vielen, und deren Beziehungen. Beide Welten verhalten sich zueinander, wenn man die Schlagworte des Tages (θεσει oder νομῳ und φυσει) braucht, wie Satzung und Natur. Gemäß Satzung sehen wir in den subjektiv bedingten Sinnesempfindungen, welche nur Relationen zwischen uns und den Dingen darstellen, deren Eigenschaften[1]), der Natur entspricht nur die Welt der Atome oder das Reich der Ideen.

Die philosophische Arbeit, die nach Platon und Demokrit mit Aristoteles einsetzt und über Augustin und die Scholastik, einschließlich der Mystik, hin schließlich zu Descartes führt, hatte ihre besonderen äußerst wichtigen Aufgaben, aber für den Gang vom Dinge zu den Beziehungen bietet sie nichts besonderes.

Im Zeitalter des Descartes ist es wieder Gemeingut aller Forscher, den subjektiven und relativen Charakter der Sinnesempfindung anzuerkennen, und Locke führt infolgedessen, gemäß der damit gegebenen Spaltung der Eigenschaften der Dinge, den Unterschied der sekundären (relativen) und primären (absoluten) Qualitäten ein. Zu diesen gehören Zahl, Gestalt, Lage, Größe, Bewegung, aber auch Undurchdringlichkeit (solidity) ..., letztere würde Descartes zu den sekundären Eigenschaften (Tastsinn) gerechnet haben. Das Gebiet der primären Eigenschaften ist das Reich der Mathematik.

Nachdem Hume den Begriff des substantiellen Dinges selbst und der Wirkung der Dinge aufeinander (Kausalität) kritisch zersetzt hatte, vollendete Kant den Prozeß der Eigenschaftsentkleidung der Dinge: auch die primären Eigenschaften Lockes wurden für ihn zu relativen.

Dabei blieb von dem Dinge nur ein fragliches Y übrig, und folgerichtig wurde auch der Beobachter des Dinges, abgesehen von allen in ihm mündenden Relationen, zu einem fraglichen X. Für diese fraglichen Restbestände X und Y ist das Wort „Ding an sich" geprägt worden. An dem entsprechenden Schema

$$\underbrace{X - \text{Beziehungen} - Y}$$

kann man alle Schlußdichtungen, die in der Geschichte der Philosophie aufgetreten sind, sozusagen a priori bestimmen. Schließt man X und Y zu einer Einheit zusammen, so erhält man die verschiedenen Formen des Monismus, tilgt man Y, so gelangt man zum Solipsismus, tilgt man X und Y, so erhält man den Abschluß des Positivismus usw. Dabei kommt es im einzelnen natürlich darauf an, was man aus dem Reiche der bekannten

1) Vgl. bei Demokrit: νομῳ γλυκυ, νομῳ πικρον, νομῳ θερμον, νομῳ ψυχρον, νομῳ χροιη. ἐτεῃ δε ἀτομα και κενον (nach Satzung gibt es Süßes, Bitteres, Warmes, Kaltes und Farbiges, in Wahrheit aber nur Atome und leeren Raum).

Beziehungen in die Unbekannten *X* und *Y* hineinlegt, ob man die Tätigkeit betont oder das Affiziertwerden, das Sein oder das Werden usw.

Daß diese Schlußdichtungen oft auch die erkenntnistheoretischen Grundlagen mitbestimmen, bedarf kaum eines ausdrücklichen Hinweises.

Auf dem Wege vom Dinge zu den Beziehungen war es von großer Bedeutung, daß Descartes, den Spuren Augustins folgend, sein „Cogito" aussprach, das genauer „Cogito aliquid" lautet, wobei Descartes selbst ausdrücklich cogitare nicht in dem engen Sinne logischen Denkens faßt. Schon Plato sagt übrigens „in der Wahrnehmung entsteht erst ein Wahrnehmender und ein Wahrgenommenes", und die damit bezeichnete Korrelation von Subjekt (Ich) und Objekt (Nicht-Ich) beherrscht tatsächlich auch den Prozeß der Eigenschafts-Entkleidung des Dinges.[1]) Alles, wovon wir wissen, ist uns n u r in unserem Bewußtsein gegeben, in dessen Vorgängen sich stets sozusagen ein subjektiver und ein objektiver Pol scheidet. Alle Erscheinungen des Bewußtseins sind einerseits an unser Ich geknüpft und andererseits untereinander zu Einheiten verbunden, die wir Dinge nennen und denen wir zum Teil (z. B. den Mitmenschen) dieselbe Konstitution zuschreiben, wie der Einheit, die sich räumlich in unserem Körper abtrennt. Sie sind wie wir selbst gewissermaßen Knotenpunkte in dem Netze dieser Beziehungen. Zeit und Raum sind nur Formen dieses Bewußtseins, d. h. Ordnungen seiner Elemente, die Zeit für alle Vorgänge, der Raum nur für einen bestimmten Teil davon.

Dabei ist der flüchtige Augenblick für uns nichts, wenn er nicht die Vergangenheit[2]) weckt, aber diese Vergangenheit besteht für uns nur aus der Kette solcher flüchtigen Augenblicke, welche Beziehung auf Beziehung häufen. Aus allen diesen Beziehungen heraus erwächst uns aber das Bild einer Welt, die uns wiederum in sich aufnimmt, in der wir geboren wurden und leben und sterben werden. „So ist denn in der Tat der Mensch einerseits ein Bestandteil der Welt und ein Produkt der Weltentwicklung, während er andererseits die Welt doch nur als Inhalt seines Bewußtseins ... kennt".[3])

Wie ist dies möglich?

In dem Ganzen der Beziehungen, das zwischen den unbekannten Polen *X* und *Y* flutet, ist für jeden zunächst nur sein i n d i v i d u e l l e s Ich der feste Punkt, an den alles Objektive geknüpft erscheint. Es wird freilich in seinen

---

1) Natürlich ist uns das Reich der Beziehungen zwischen Subjekt und Objekt nur vom Ich aus zugänglich. Könnten wir gewissermaßen an das jenseitige Ufer (Objekt) gelangen, so gälte auch das Umgekehrte. Für ersteres hat Kant den Ausdruck geprägt. „Die Vernunft (Verstand) macht die Natur erst möglich", d. h. durch unsere Vernunft (Verstand) wird unsere Naturerkenntnis durchaus bedingt. In Beziehung auf letzteres findet sich gelegentlich (bei Kehrbach S. 491) ein Hinweis auf „die freiwirkende Natur, die ... vielleicht selbst sogar die Vernunft zuerst möglich macht". Vgl. dazu Chamberlains Kant, Kap. 6, S. 626f. Vgl. Nr. 19.

2) In Bezug auf die „Inhärenz der Vergangenheit in der Gegenwart". Vgl. Nr. 90b S. 295ff.

3) Vgl. Nr. 90b S. 2.

Erlebnissen stets ein anderes, aber es bleibt dabei doch im Grunde dasselbe, und so stellt es in seiner Tatsächlichkeit gewissermaßen eine Lösung dar für das Rätsel der Veränderung, durch das die Geschichte der Philosophie von Anfang an bestimmt wird. Mit dieser täglich neu erlebten Lösung tritt es erst unbewußt und dann immer bewußter an den Wechsel der Erscheinungen heran, der es umgibt, und stellt ihm die Forderung „dasselbe" zu bleiben, wie es selbst. Die Logiker haben diese Forderung als „Prinzip der Identität" bezeichnet; auf ihm beruht alles Denken. Diese Forderung erhält ihre Berechtigung, wenn man das individuelle Ich in seiner ganzen Fülle betrachtet, es ist ja nicht nur theoretisch veranlagt, es fühlt auch und will und handelt. Der Widerstand, den es dabei erfährt, und der Einfluß, den es dabei ausübt, überzeugt es unmittelbar davon, daß Anderes neben ihm vorhanden ist in gleicher Existenz wie es selbst.[1]) Diese Überzeugung ist dem Menschen ebenso angeboren wie sein Anschauen und sein Denken, auch sie ist, erkenntnistheoretisch ausgedrückt, eine Konstituente seines Bewußtseins.

Wie von hier aus alles Geschichtliche zu werten ist, liegt außerhalb des Rahmens unserer Betrachtung. Wir wollten nur darauf hinweisen, daß der Gang vom Dinge zu den Beziehungen für das theoretische Gebiet durchaus berechtigt ist, daß aber die Praxis des Lebens immer wieder zu dem Naiven Realismus zurückführt. So entsteht ein Antagonismus, indem Einheiten von Beziehungen doch wieder als relativ selbständige Dinge aufgefaßt werden.

Der ursprüngliche Hang zur Personifikation des Äußeren ex analogia hominis bleibt wenigstens als Hang zur Verdinglichung bestehen trotz aller kritischen Arbeit, und infolgedessen zeigen die Kategorien, mit denen wir das Gegebene fassen, die bekannte Verschiebungstendenz zum Dinge hin. So wird selbst uns noch die Zahl π zum Dinge, obwohl sie doch durch ein ziemlich verwickeltes System von Relationen gegeben wird. Und den Pythagoräern war die Zahl durchaus Substanz!

Wir sprechen auch trotz Kopernikus vom Aufgange der Sonne und von ihrem Untergange, und dem unmittelbar gegebenen Phänomen gegenüber ist dies auch durchaus berechtigt.

Zur Beleuchtung jenes Antagonismes zwischen der erkenntnistheoretischen Verflüchtigung der Dinge und deren Würdigung durch die Praxis des Lebens stellen wir noch zwei Aussprüche einander gegenüber, einen von H. Poincaré und einen von Goethe. Ersterer sagt[2]): „Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts, weil wir nur den Gedanken denken können, und weil alle Worte, über die wir verfügen, um von Dingen zu sprechen, nur Gedanken ausdrücken können; zu sagen, daß es etwas anderes gibt, als den Gedanken, ist also eine Behauptung, die gar keinen Sinn hat.

1) Vgl. Nr. 50 S. 277. Diesem Gedanken dient auch die gesamte Geistesarbeit von H. Rickert und A. Riehl.

2) Vgl. Nr. 113b S. 208.

Und doch . . . seltsamer Widerspruch für die, welche an die Zeit glauben ... zeigt uns die geologische Geschichte, daß das Leben nur eine kurze Episode zwischen zwei Ewigkeiten des Todes ist, und daß in dieser Episode selbst der bewußte Gedanke nur einen Augenblick gedauert hat und dauern wird. Der Gedanke ist nur ein Blitz inmitten einer langen Nacht. Aber dieser Blitz ist alles."

Dagegen lesen wir bei Goethe[1]): „Der Mensch ist also wirklich in die Mitte einer wirklichen Welt gesetzt und mit solchen Organen begabt, daß er das Wirkliche und nebenbei das Mögliche erkennen und hervorbringen kann. Alle gesunden Menschen haben die Überzeugung ihres Daseins und eines Daseienden um sie her."

Alles menschliche Wissen ist subjektiv und relativ, insofern es jedem einzelnen nur in seinem Bewußtsein gegeben ist, das freilich Wahres und Falsches im bunten Wechsel enthält. In jedem Augenblicke, den der einzelne erlebt, ist ein Teil seiner Vergangenheit „inhärent", und in dieser wiederum ein Teil der Kulturarbeit des Menschengeschlechtes, allein schon mit und in der Sprache übermittelt.

Auch hier gilt das Dichterwort:[2])

> Nichts ist verloren und verschwunden,
> Was die geheimnisvoll waltenden Stunden
> In den dunkel schaffenden Schoß aufnahmen . . .
> Und alles ist Frucht, und alles ist Samen!

Aller Fortschritt der Erkenntnis kann aber die Formen des Individual-Bewußtseins nicht überschreiten, mag man es auch zu einem „Bewußtsein überhaupt" idealisieren[3]), und in diesem Sinne hat Protagoras Recht wenn er den Menschen zum Maße der Dinge macht.

Mit Bewußtseinsanalysen muß jede Erkenntnistheorie beginnen, sie stößt aber bei der Feststellung ihrer „Beziehungen" stets auf einen unerklärten Rest, der dem Denken und Anschauen entflieht und gerade damit seine echte Wirklichkeit ankündigt. Darin liegt das ewige Recht des Naiven Realismus mit seiner Wertung der „Dinge".

3. Denken und Anschauen.

Insofern die Mathematik, abgesehen von ihrer selbständigen Bedeutung, der Naturerkenntnis und Naturbeherrschung dienen soll, ist es für unsere Frage von besonderem Werte, daß auch die moderne Naturwissenschaft den Standpunkt der Beziehungen bis zu einem gewissen Grade anerkennt. Vertreter der Sinnesphysiologie waren es ja gerade, die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts mit zu der Wiederbelebung des Kantischen Systems beigetragen haben, weil sie in dessen theoretischem Teile eine Rechtfertigung ihrer eigenen Ansichten sahen. Daß ein bestimmter

1) Vgl. Sprüche in Prosa, IV.
2) Vgl. Schiller, Braut von Messina III, 5.
3) Vgl. im Gegensatze dazu Nr. 137f S. 13.

Ton, auch wenn er eine Zeitlang dauert, ein Vorgang ist, der u. a. durch einen tönenden Gegenstand und ein aufnehmendes Ohr bedingt ist, gilt als selbstverständlich, und dabei erscheinen die Gesetze der Schwingung als das Bleibende im Wechsel, soweit es sich um das Objekt handelt. Entsprechendes gilt für das Gebiet der Farben, und auch für die übrigen Sinne sucht man diese Auffassung durchzuführen. Den Widerstand (im Sinne von Lockes solidity) glaubt man, was das Objekt betrifft, erklären zu können, indem man die Körper als Gruppen bewegter Moleküle und Atome oder als Systeme energiebegabter Bewegungen ansieht, und gibt im ersten Falle zu, wenigstens meist, daß Moleküle und Atome nur Hilfsvorstellungen sind für die Bezeichnung eines dahinterliegenden Unbekannten. Auch die Versuche einer Verbindung des alten Bildes der klassischen Mechanik mit den Gesetzen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, mit denen die Wissenschaft augenblicklich beschäftigt ist, streben überall dem Standpunkte der Beziehungen zu.

So scheint Heraklits Auffassung des Wirklichen als eines gesetzlich bestimmten Werdens zu siegen. So lesen wir auch bei Goethe[1]):

> Getrost! Das Unvergängliche,
> Es ist das ewige Gesetz.

Und Schiller[2]) sagt uns: Der Weise ...

> Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
> Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht.

Im Unterschiede des Gesetzlichen vom Regellosen klärt sich der Unterschied von Zusammengehörigem und Zusammengeratenem, auf den die Erfahrung den einzelnen schon frühe hinweist, ihn auffordernd, den Rechtsgrund für die Zusammengehörigkeit zu suchen, wie Lotze sagt. Nach diesem Rechtsgrunde hatte auch Kant gefragt und er fand ihn in der inneren Notwendigkeit der Urteile, d. h. in der durch ihren Inhalt bestimmten, im Denken gesetzten Notwendigkeit, die im Gegensatze steht zu jedem äußeren Zwange, mag er nun durch Erfahrung oder durch Eingebung bewirkt werden. Darum müssen bei ihm die Synthesen des unbewußt wirkenden Verstandes die Sinnenwelt erbauen, damit aus dieser die hineingelegte Notwendigkeit in bewußter Arbeit als Gesetz wieder herausgelesen werden kann. Darum sind ihm die Grundsätze des Verstandes zugleich die höchsten Naturgesetze. Erfahrung kann ja nur lehren, was war und was ist, sie reicht nicht über den Augenblick hinaus in die Zukunft, sie verwirft gelegentlich, was sie bestätigt zu haben schien, und umgekehrt.

Gibt man mit Kant u. a. zu, daß die Notwendigkeit nur im Denken liegen kann, so ist dabei doch noch eine andere Auffassung möglich, nämlich, daß wir versuchsweise in die Erscheinungen Notwendigkeit hineindenken und uns von ihnen belehren lassen, ob unser Versuch ge-

1) Vgl. Chinesisch-deutsche Jahres- und Tageszeiten Nr. XI.
2) Vgl. Der Spaziergang.

lungen ist oder nicht, und in letzterem Falle wieder und wieder von neuem versuchen. Es ist einmal Menschenschicksal, die Erkenntnis nur in einem asymptotischen Prozesse zu erringen. In Natorps „Grundlagen" finden wir dieses Versuchen äußerst klar geschildert. Er sagt[1]): „Es war Platos tiefste Entdeckung: daß die Erkenntnis der Wissenschaft in einem unendlichen Prozeß der „Begrenzung des Unbegrenzten" bestehe; daß es in ihr also keine absoluten Anfangs- noch Endpunkte gäbe, sondern ... diesseits jedes (relativen) Anfangs ein früherer Anfang, jenseits jedes (relativen) Abschlusses ein fernerer Abschluß, und auch innerhalb jedes Zentrums, in dem der Gedanke sich feststellen möchte, ein wiederum zentraleres zu suchen und sicher auch zu finden sei." „Um in dem Unendlichen ... der Gegenstandsbestimmung in der Erfahrung überhaupt irgendwie Fuß zu fassen, um zu irgendeiner Begrenzung dieses Unbegrenzten zu gelangen, „setzt" man notwendig irgendetwas zum einstweiligen Anfang und geht von da weiter, soweit als eben von diesem Anfang an sich sicher gehen läßt, stets aber mit dem Vorbehalte, hinter diesen Anfang zurückzugehen, sobald Anlaß und Möglichkeit dazu sich bietet; ebendamit aber auch über jeden scheinbaren Abschluß, bei dem das Denken sonst zum Stillstand kommen würde, wieder hinauszudringen."

Ob der Platonische Ausdruck „Begrenzung des Unbegrenzten" sich halten läßt, mag dahingestellt bleiben. Auch Goethe antwortet auf die Klage[2]):

Die Welt, sie ist so groß und breit,
Der Himmel auch so hehr und weit,
Ich muß das alles mit Augen fassen,
Will sich aber nicht recht denken lassen.

mit den Worten:

Dich im Unendlichen zu finden,
Mußt unterscheiden und dann verbinden.

Damit weist er auf die beiden Hauptfunktionen des Denkens hin und sagt uns dazu ein andersmal[3]) noch, daß der Mensch das Unmögliche vermag, denn

Er kann dem Augenblick
Dauer verleihen.

Das ist es! In das Flüchtige hinein denkt der Mensch seine Invarianten, und versucht damit weiterzukommen.

Gerade die Naturwissenschaft zeigt uns, auch wenn man in ihr von allem Geschichtlichen und Biologischen absieht, daß dem Werden dessen Gesetze nur abgerungen werden können, indem man in seinen Fluß etwas Bleibendes hineindenkt, um alle Beziehungen daran zu heften.[4])

---

1) Vgl. Nr. 105e S. 13 u. 15. 2) Vgl. „Gott und Welt" (Atmosphäre).

3) Vgl. das Göttliche.

4) Die Gestaltung im einzelnen ist bis zu einem gewissen Grade frei. Atomistische Ansichten können ebensowohl fördernd wirken, wie Theorien kontinuierlicher Raumerfüllung, in der Optik ist Newtons Anschauung ebenso fruchtbar gewesen, wie die von Huygens usw. Wer sich setzen will und dazu etwa n verschiedene Stühle

So behält auch Parmenides Recht mit dem Hinweise auf das ewig in sich ruhende unveränderliche Sein, das nur im Denken gesetzt wird, namentlich wenn man ihn von Plato aus betrachtet, dessen Idee die Einheit ist, die Einheit des Elementes und die Einheit im Vielen, und von letzterer ist ja auch das Naturgesetz nur ein wichtiger Sonderfall.

Die Tatsache, daß wir uns gemäß dem Erlebnisse, „in unseren Veränderungen selbst immer dasselbe zu bleiben (Ich = Ich)", auch im Getriebe des uns umflutenden Geschehens ein Beständiges suchen und in dessen Wechsel Invarianten hineindenken, hat im Prinzip der Identität ihre genaue Fassung erhalten. Kein Eindruck könnte festgehalten und mit einem Zeichen (Namen) versehen werden, wenn man ihn nicht der Zeit zum Trotze als mit sich selbst identisch festhielte, ihn also unterschiede und doch wiedererkennbar machte. Mit Rücksicht auf die Arbeiten von A. Spir sagt F. A. Lange gelegentlich[1]): „Der Satz $A = A$ ist zwar die Grundlage aller Erkenntnis, aber selbst keine Erkenntnis, sondern eine Tat des Geistes, ein Akt ursprünglicher Synthesis, durch welchen als notwendiger Anfang alles Denkens eine Gleichheit oder ein Beharren gesetzt werden, die sich in der Natur nur vergleichsweise und annähernd, niemals aber absolut und vollkommen vorfinden. Der Satz $A = A$ zeigt also gleich auf der Schwelle der Logik die Relativität und Idealität alles unseres Erkennens an."

Dabei wäre nur gegenüber den Vertretern der reinen Logik darauf hinzuweisen, daß uns die wohltätige Stumpfheit unserer Sinne (vgl. die Theorie der Schwelle) oder, wie man es sonst nennen will, diesen notwendigen Anfang sehr erleichtert. Wir empfinden tatsächlich als dasselbe, was kritische Überlegung später als verschiedenes nachweist. Herr Poincaré hat z. B. bei seiner Betrachtung über das physikalische Kontinuum[2]) auf die Weber-Fechnerschen Versuche hingewiesen. Drei Gewichte von 10, 11 und 12 g rufen z. B. drei Empfindungen hervor, von denen die ersten beiden unter sich und die letzten beiden unter sich übereinstimmen, wohingegen die erste und die dritte verschieden sind. Während für die Gewichte a, b, c die Beziehung $a < b < c$ gilt, stellen die entsprechenden Empfindungen, welche etwa durch $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ bezeichnet werden mögen, die Beziehungen dar $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$ und $f(a) < f(c)$, während aus den ersten beiden Gleichungen $f(a) = f(c)$ folgen müßte.

zur Verfügung hat, braucht sich auf keinen bestimmten Stuhl zu setzen, muß aber doch schließlich einen wählen. Es besteht also in Beziehung auf das „Sich-setzen" keine „notwendige" Verbindung zwischen ihm und dem einzelnen Stuhle, wohl aber zwischen ihm und der ganzen Gruppe, und letzteres darf natürlich nicht übersehen werden.

In gewissen Perioden einer wissenschaftlichen Entwicklung scheint es zweckmäßig zu sein, sich im naiven Glauben an konkrete Bilder (vgl. Lorentz u. a. in Holland) mit den Problemen zu beschäftigen, in anderen lediglich schon festgestellte Beziehungen weiter zu verfolgen.

Im elektromagnetischen Weltbilde der Gegenwart siegt wieder einmal der Atomismus, und zwar gestützt durch bestimmte Beobachtungen.

1) Vgl. Nr. 84a II S. 569. 2) Vgl. Nr. 113a S. 22 u. 23.

Das ist alles richtig, aber an der Tatsache, daß wir wirklich dasselbe empfinden, mag dies auch später kritisch berichtigt werden, ändert das nichts.[1])

Es handelt sich nur um Versuche, aber immer um ganz bestimmte Versuche. Wir glauben zunächst absolut gleiches usw. vor uns zu haben, und erst weitere Erfahrungen zeigen uns, daß die Annahme nur relativ berechtigt war, und nun wieder und wieder verbessert werden muß.

Die erste grundlegende Funktion des Denkens hat man in aktiver Fassung als „Unterschiede setzen" und „Identifizieren" und in passiver Fassung als „Unterschiede sehen" und „Wiedererkennen" bezeichnet, wobei aber der sprachliche Ausdruck auf dem Standpunkte der Beziehungen ziemlich gleichgültig ist.

Die weiteren Funktionen des Denkens werden durch die reflexiven Kategorien (gleich, ähnlich, Ganzes und Teil usw.) und die konstitutiven Kategorien (Ding und Eigenschaft, Bedingung und Bedingtes usw.) beschrieben, über deren Aufzählung und Gliederung die Ansichten noch nicht völlig geklärt sind. In aktiver Fassung spricht man hier von „Handlungen des Denkens", in passiver von „Aufnehmen und Schauen".[2])

Mit dem Prinzipe der Identität pflegt man das Prinzip des Widerspruchs und das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten zu verbinden. Damit sind in der Tat die Denkgesetze bezeichnet, welche die Kapitel Begriff und Urteil beherrschen. In psychologischer Hinsicht ist kein Zweifel, daß sich Begriff und Urteil gegenseitig bedingen, d. h. daß primitive Begriffsbildungen, welche auf primitiven Urteilen beruhen, durch weitere Urteile berichtigt und entwickelt werden usw. In der Logik scheint es zweckmäßig, das Urteil zum Ausgange zu nehmen, weil in ihm die Funktion des Denkens ganz klar zu Tage tritt, es trennt und verbindet doch zugleich Begriffe, in einfachstem Falle deren zwei.

Für die Bildung von Schlüssen tritt dazu der Satz vom Grunde, er ist das Substitutions- und Eliminationsprinzip der Logik. Der bekannte Schluß

Alle Menschen sind sterblich,
Caius ist ein Mensch,
Also ist Cajus sterblich

zeigt schon alles Erforderliche. Das erste Urteil enthält die Begriffe Mensch und sterblich, das zweite die Begriffe Cajus und Mensch, das dritte bildet unter Beseitigung des Begriffes Mensch aus den beiden ersten ein neues Urteil, das die Begriffe Cajus und sterblich enthält. In diesem Sinne gibt Wundt in seiner Logik dem Satze vom Grunde die Form: „Wenn ver-

1) Auch dies gehört zu dem Gebiete des Phänomenalismus, den augenblicklich Herr Husserl u. a. herauszuarbeiten suchen. Seine Aufgabe ist die „Analyse des tatsächlich Gegebenen". Vgl. dazu Nr. 50, namentlich S. 86f., und auch Nr. 167a.

2) Dieser Unterschied der Fassung zieht sich durch alle Gebiete der Erkenntnis. Sind neue Wahrheiten in der Mathematik Entdeckungen (G. Cantor u. a.) oder Erfindungen (R. Dedekind u. a.)? Wie steht es mit Sätzen, deren Beweis noch nicht erbracht ist, z. B. in der Zahlentheorie?

schiedene Urteile durch Begriffe, die ihnen gemeinsam angehören, in ein Verhältnis zueinander gesetzt sind, so stehen auch die nicht gemeinsamen Begriffe solcher Urteile in einem Verhältnisse, welches in einem neuen Urteile seinen Ausdruck findet." Vielleicht wäre nur das Wort „Verhältnis" durch „Beziehung" zu ersetzen, da uns dieses Wort deutlicher die mannigfachen Verbindungen der Begriffe und Urteile hervorzuheben scheint, die ja in der an Aristoteles anschließenden Logik nur zum geringen Teile ihren Ausdruck gefunden haben.

Aller Fortschritt der Erkenntnis beruht nun nicht auf der tautologischen Formel $a = a$, sondern auf der Formel $b = c$ oder besser auf der Formel

$$(a \text{ in } b) = (a \text{ in } c)$$

d. h. die Ersetzbarkeit, welche uns das Zeichen = angibt, beruht stets darauf, daß wir in verschiedenem dasselbe zu erkennen glauben oder erkennen und es demgemäß als ersetzbar bezeichnen. Diese Ersetzbarkeit muß natürlich von Fall zu Fall genau bestimmt werden. So bedeutet z. B. die Formel

$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2,$$

eine Ersetzbarkeit gemäß den festgestellten Regeln der Arithmetik.

Die Denkgesetze beherrschen die sog. „Formal-Logik". Viel Streit um deren Daseinsberechtigung und um deren Wert wäre vermieden worden, wenn man sie etwa als Hypothetische Logik bezeichnet hätte, denn in ihr handelt es sich stets darum, aus Urteilen, die als gegeben vorausgesetzt werden, andere Urteile abzuleiten. Man hat gelegentlich gesagt, es könne keine Formal-Logik geben, da das Denken nur mit dem Inhalte zu tun habe. Andererseits hat man behauptet, daß noch niemals ein Schluß gezogen worden sei, der formal-logisch zu beanstanden sei. Wo dies scheinbar der Fall wäre, da lägen Täuschungen durch Zeichen (Worte) vor, oder es handelte sich um mechanische Wortverbindungen, bei denen überhaupt nicht gedacht worden wäre. Man findet jetzt eine sehr ausführliche und umsichtige Rechtfertigung der Formal-Logik bei Herrn Enriques [1]), auf die wir hier verweisen können.

Es fragt sich nun, ob der Bereich des Denkens mit der Abgrenzung der Formal-Logik vollständig umschrieben ist, vorausgesetzt, daß alle reflexiven und konstitutiven Kategorien bei der Bildung der Begriffe und Urteile verwendet werden dürfen, nicht nur die Klassenbegriffe usw. der alten Logik.

Sieht man die philosophische und mathematische Literatur durch, um festzustellen, was das Wort Denken besagen soll, das ja im gemeinen Leben für alles Mögliche und Unmögliche benutzt wird, so findet man, daß es auch hier keine feste Bedeutung hat. Wer denken, fühlen und wollen für eine vollständige Einteilung des psychischen Geschehens ansieht, dehnt den Umfang des Begriffes Denken sehr weit aus. Zwischen dieser An-

1) Vgl. Nr. 36b Bd. 1. S. 153 u. f.

sicht und der, welche das Denken auf die Formal-Logik einschränkt, liegen die verschiedensten Auffassungen, es gibt aber, wobei man sich an Descartes's Erklärung der cogitatio[1]) erinnern mag, noch weiter gefaßte Bestimmungen, wie u.a. das bereits angeführte Wort Poincarés zeigt: „Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts." Aber auch nach Wundt gibt es kein Bewußtsein ohne innere Willenstätigkeit, und diese selbst ist ihm Denken, d. h. das Denken reicht soweit, wie das Bewußtsein reicht. Dieses Denken ist natürlich nicht das logische Denken, welches durch die „Denkgesetze" beherrscht wird.

Noch schlimmer steht es um die Bedeutung des Wortes Anschauung. Nur in bezug auf die empirische Anschauung der räumlich-zeitlichen Sinnenwelt und deren Nachbilder scheint Übereinstimmung zu herrschen. So erklärt Herr Höfler[2]): „Anschauungen sind Wahrnehmungsvorstellungen von zusammengesetzten physischen Inhalten, deren Zusammensetzung dasjenige Maß von Innigkeit besitzt, welches wir eben als Anschaulichkeit bezeichnen." Der Zirkel ist natürlich beabsichtigt, es handelt sich um einen Hinweis auf das Tatsächliche. Manchmal sieht es so aus, als ob alles, was nicht formal-logisch faßbar ist, durch das Wort Anschauung bezeichnet würde, so daß dieses für jeden alogischen Rest gebraucht würde. Andererseits schreibt man wieder den Denkgesetzen „Evidenz" zu, und in seiner ursprünglichen Bedeutung sollte ja das Axiomatische im Gegensatze zu Definitionen und Postulaten das Anschaulich-Gewisse sein. Herr Poincaré unterscheidet gelegentlich[3]) vier Arten der Anschauung und gibt dazu folgende Beispiele:

1. wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich;

2. wenn ein Satz für die Zahl 1 wahr ist, und man beweist, daß er für $n + 1$ wahr ist, vorausgesetzt, daß er es für n ist, so ist er für alle ganzen Zahlen wahr;

3. wenn auf einer Geraden der Punkt C zwischen A und B liegt und der Punkt D zwischen A und C, so liegt der Punkt D zwischen A und B;

4. durch einen Punkt kann man nur eine Parallele zu einer Geraden ziehen.

Dazu bemerkt er: Alle vier Axiome „müssen der Anschauung zugeschrieben werden, und doch ist das erste der Ausdruck eines Gesetzes der formalen Logik, das zweite ist in Wahrheit ein synthetisches Urteil a priori, der Grundstein der strengen mathematischen Induktion; das dritte ist eine Berufung auf die Einbildungskraft, das vierte eine verhüllte Definition." An einer anderen Stelle beklagt Herr Poincaré, daß man nur das Wort „Intuition" habe, um so verschiedenes zu bezeichnen. Andererseits sagt uns Kant „Begriffe ohne Anschauungen sind leer" und „Anschauungen

1) cogitationis nomine complector omne id, quod in nobis est, et cujus immediate conscii sumus.

2) Vgl. Nr. 69a S. 229.

3) Vgl. Nr. 113b S. 15.

ohne Begriffe" sind blind, und weist damit auf den logisch-anschaulichen Charakter alles menschlichen Wissens hin.

Vielleicht reicht wirklich die Anschauung ebensoweit wie das Denken, d. h. vom Ich aus bis an die Grenze des Bewußtseins, nur daß sie an der Peripherie klarer erscheint, das Denken deutlicher in der Mitte, weil dort das Außer-Einander und hier die Einheit steht? Dann wäre auch das stumme Anschauungsurteil der Logiker durch Denken bedingt, aber selbst die höchste Abstraktion bedürfte der Anschauung.

Dies scheint tatsächlich richtig zu sein, nur daß auf dem immer höher klimmenden Wege der Abstraktion die Anschauung im allgemeinen mehr und mehr durch das Zeichen ersetzt wird. In diesem Sinne behält Aristoteles Recht: Οὐδεποτε νοει ἄνευ φαντασματος ἡ ψυχη, d. h. unser Denken bedarf stets eines Bildes (Zeichens).

Worte wie Zuordnung, Vertauschung, Ganzes und Teil usw. sind in der Tat ursprünglich nur in empirischer Anschauung klar zu machen. Will man von einer Menge etwas beweisen, so führt man greifbar ihre Elemente $a, b, c \ldots$ ein oder setzt voraus, daß diese Einführung von dem Hörer oder Leser von selbst vollzogen oder vollzogen gedacht wird. Dabei spielt auch die Mechanisierung der Vorstellungen eine große Rolle, welche der Ökonomie unseres ganzen geistigen Lebens entspricht; sie tritt z. B. beim Schreiben und Lesen usw. klar zu Tage, in bezug auf die Bildung der Zahlen hat Herr Dedekind wohl alles erforderliche gesagt.[1])

Man darf also dem Worte Denken den weitesten Spielraum geben, nachdem man das Formal-Logische und die reflexiven und konstitutiven Kategorien für die Bildung der Begriffe und Urteile erst einmal scharf abgegrenzt hat, andererseits muß man aber auch der Anschauung, der tatsächlichen und ihrem im Zeichen gegebenen Surrogate, denselben Spielraum geben.

Kant behält Recht damit, daß Begriffe ohne Anschauung leer sind, ebenso wie Anschauungen ohne Begriffe jeder Bestimmtheit ermangeln, nur wird man, wie schon oben auseinandergesetzt, seiner reinen Anschauung ihre Zwangläufigkeit nehmen bzw. sie durch die mit einer gewissen Freiheit begabte Logisierung (Abstraktion, Determination und Idealisierung) der empirischen Anschauung ersetzen müssen.

Das ist etwa der Standpunkt jener Gruppe von Mathematikern, deren wir am Schlusse von Abschnitt I, 3 gedachten. Besonders klar ist er von Herrn F. Klein in einem Wiener Vortrage[2]) dargestellt worden, in dem er von der Entdeckung der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten ausgeht. Diese Tatsache und die weitere Diskreditierung der Anschauung durch die Mengenlehre kann offenbar in der Mathematik zu drei verschiedenen Standpunkten führen, nämlich

1. zur Verwerfung jeder Anschauung,

---

1) Vgl. Nr. 24b S. IX u. f.

2) Vgl. Nr. 781.

2. zur Annahme, daß die Anschauung für gewisse mathematische Gebilde ausreicht, für andere nicht,

3. zu der Annahme, daß die Anschauung der Logisierung, deren Quelle sie ist, überhaupt nicht oder doch nur in sehr beschränktem Maße folgen kann.

Während Nr. 1 zum Standpunkte des reinen Denkens führt, wird Nr. 2 z. B. dadurch charakterisiert, daß man glaubt, die analytischen Funktionen in ihren Darstellungen als Kurven anschaulich verfolgen zu können, während die Anschauung bei nichtanalytischen Funktionen versagt. Im Gegensatz zu dieser, vormals wohl landläufigen Ansicht Nr. 2 hat Herr F. Klein sich schon früh zu dem dritten Standpunkt bekannt.[1]) Für ihn ist die Entdeckung der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten lediglich die Veranlassung zu der Einsicht, daß die Anschauung ihrer Logisierung überhaupt nicht folgen kann. „Das, was wir vor Augen haben, wenn wir von einer Kurve sprechen, ist ein Streifen von allenfalls vielleicht geringer, jedenfalls nicht verschwindender Querdimension". „Solange man sich nur mit analytischen Kurven beschäftigte, merkte man nicht, daß man garnicht in der Lage sei, die Dinge so, wie die Infinitesimalrechnung sie darstellt, auch wirklich anschaulich vorzustellen; weil nämlich die mathematischen Eigenschaften der analytischen Kurven mit den anschaulichen Eigenschaften der Streifen einigermaßen parallel gehen".[2])

Ferner führt auch die „Ansicht von der Ungenauigkeit der Raumvorstellungen uns sowohl bei den Axiomen wie bei den ersten Definitionen der Geometrie zu neuen Auffassungsmöglichkeiten", und so rechtfertigt sich neben der Geometrie Euklids auch jede ihrer anderen Formen.

Auf diesem Standpunkte wird auch eine „Erziehung der Anschauung" eine berechtigte Forderung. Zuerst hat wohl v. Helmholtz in Beziehung auf die Geometrie der nichteuklidischen Räume von einer besonderen Ausbildung oder Gewöhnung der Anschauung gesprochen, eine Forderung, die sonst auf allen Gebieten des Anschaulichen, z. B. für die Künstler, durchaus selbstverständlich ist. Herr Voß sagt dazu[3]): „Unter Anschaulichkeit in geometrischem Sinne wird man wohl die Möglichkeit verstehen, gewisse begriffliche Aussagen an den Gegenständen unserer Sinneswahrnehmung resp. Vorstellung zu verfolgen. Daß diese geometrische Anschauung nur eine recht dürftige ist, sich zunächst nur auf die bekanntesten und einfachen Figuren bezieht, ist wohl eine nicht zu bestreitende Tatsache. Sie ist aber entwicklungsfähig. Jeder kennt die eigentümlichen Schwierigkeiten, die das Verständnis stereometrischer Sätze dem Anfänger bereitet. Sie treten in verstärktem Maße auf, wenn wir die nach dem Prinzip der Dualität erzeugten Gebilde, oder die Natur der Singularitäten algebraischer Flächen verfolgen wollen, wenn wir das

1) Vgl. Berichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 1873.
2) Vgl. Nr. 781 S. 4. 3) Vgl. Nr. 161a S. 80.

Verhalten Riemannscher Flächen mit mehrfachem Zusammenhang untersuchen. Hieraus dürfte folgen, daß über die Anschaulichkeit nur der urteilen kann, der sich mit der Ausbildung der Anschauung beschäftigt hat. In Rücksicht hierauf aber erscheinen die Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie ebenso anschaulich wie die der euklidischen". Für alles dies und weiteres können wir hier auf das eben erschienene schöne und überaus reichhaltige Buch von Herrn Timerding verweisen.[1])

Für Kant war die Anschauung außerdem das Passive (Gegebene), welches sich stets mit dem Aktiven, dem Denken, einen muß, wenn Erkenntnis entstehen soll. Das läßt sich nicht halten, denn gerade die geniale Lösung tritt oft auf wie ein Geschenk von oben.

Will man die Anschauung definieren, so ist sie Kants „Mannigfaltiges überhaupt", dessen bewegliche Form das Außer-Einander (Menge ohne Ordnung) ist, während es u. a. in den festen Formen des Nacheinander (Zeit) und Nebeneinander (Raum) gebunden werden kann.

In diesen festen Formen erscheint uns das flüchtige Werden, in das wir versuchsweise unsere Invarianten hineindenken, gemäß den Denkgesetzen und unter Verwendung der reflexiven und konstitutiven Kategorien, schließlich in Ideen einen systematischen Abschluß suchend.

Dabei erhält auch Natorps synthetisches Denken sein Recht, nur ist es immer auf Anschauung bezogen bzw. auf deren Surrogat, das Zeichen.

Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Abschnittes prüfen, indem wir uns der Arbeitsart der Mathematiker zuwenden.

4. Die Arbeitsart der Mathematiker.

Im Gegensatz zu der gegenwärtig unter den Mathematikern meist herrschenden Stimmung hatte E. E. Kummer eine große Vorliebe für die Philosophie, abgesehen von der Formal-Logik. Das bekannte Schulbeispiel vom Cajus verspottet er mit den Worten: „Da tue ich nun erst alle Menschen, von denen ich schon weiß, daß sie sterblich sind, in einen Topf und ziehe dann den lumpigen Cajus wieder heraus". Ist dieser Spott, der sich auch in der erkenntnistheoretischen Literatur schon seit alten Zeiten in mannigfachen Wendungen vorfindet, berechtigt? Wir wollen statt des uns unbekannten Cajus den bekannten Robinson Crusoe einsetzen, und zwar dabei die ganze Lage ins Auge fassen, als die Wilden ihn wegen seiner Überlegenheit für einen Gott oder Teufel hielten. In dieser Lage konnten sie jenen Schluß nicht machen. Wenn sie aber durch Beobachtung des weiteren an Robinson menschliche Eigenschaften entdeckten (Bedürfnis nach Essen, Trinken, Schlafen usw.), so dämmerte ihnen zunächst unbestimmt und dann immer bestimmter die Überzeugung auf „Robinson ist ein Mensch", und nun konnten sie, was sie vorher nicht

1) Erziehung der Anschauung, B. G. Teubner, Leipzig 1912.

gewagt hatten, auf ihn, „den Sterblichen", das todbringende Geschoß schleudern.

Was soll dieses Beispiel? Darauf hinweisen, daß immer zwischen den einzelnen Urteilen der Schlüsse unausgesprochene geistige Arbeit liegt.

Mit den Beweisen der Mathematik steht es nicht anders und darum ist es eine anerkannte Regel der Didaktik, für die u. a. auch W. Krumme eingetreten ist, daß der Schüler nicht die Beweise der Sätze lernen soll, sondern das Beweisen. Von diesem Gesichtspunkte aus gab er namentlich für die Geometrie bestimmte Beweismittel an, um den Schüler möglichst selbständig zu machen [1]).

In der Geometrie pflegt man, so oft man sie vom formal-logischen Standpunkte aus betrachtet, die Hilfskonstruktionen als etwas Gegebenes hinzunehmen, während gerade in ihnen etwas ursprünglich zu Findendes liegt. Man nimmt ja zu der zunächst gegebenen Figur bestimmte Raumgebilde hinzu, welche noch nicht vorhanden oder *noch nicht* aus dem Raume ausgeschieden waren, wie jedes Beispiel zeigt. Aber auch da, wo Hilfskonstruktionen nicht erforderlich sind, liegt zwischen den Urteilen der Beweise oft geistige Arbeit, die nicht formal-logisch ist. Nehmen wir den Euklidischen Beweis für die Gleichheit von Scheitelwinkeln als Beispiel, so muß jeder der beiden Winkel mit demselben, in der Figur bereits vorhandenen Winkel zu einem Paare von Nebenwinkeln *verbunden* werden, ehe unter Erinnerung an den Satz über die Winkelsumme zweier Nebenwinkel der formal-logische Gang des Beweises einsetzen kann. Entsprechendes gilt, wenn man z. B. die Fläche eines Vierecks doppelt ansetzt, das einmal nach der einen und einmal nach der anderen Diagonale geteilt ist, usw.

Ebenso steht es in der Arithmetik, in der auch die Hilfskonstruktion eine große Rolle spielt. Nehmen wir als Beispiel die übliche Lösung der quadratischen Gleichung. Man beginnt die Lösung für

$$x^2 + px + q = 0,$$

nachdem die Analogie mit der Formel $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ unter der Sonderbestimmung $2a = p$ gefunden worden ist, mit der Hilfskonstruktion der Einschaltung von $\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}$ und erhält so

$$x^2 + px + \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}\right) + q = 0.$$

So steht es überall im ganzen Gebiete der Mathematik: das eigentlich Produktive liegt meist, allerdings nicht immer, zwischen den Urteilen der Schlüsse, während andererseits *in der Mathematik wie in* jeder Wissenschaft natürlich auch formal-logische Arbeit zu leisten ist.

Für die Arithmetik hat auch Herr M. Simon gelegentlich [2]) auf die Bedeutung der Konstruktion hingewiesen. Er sagt: „Der spezifische Unter-

1) Vgl. hierzu W. Lietzmann in Bd. I Heft 1 S. 26f. von Nr. 1.

2) Vgl. Nr. 137f S. 12.

schied zwischen Geometrie und Arithmetik besteht nicht ... in der Konstruktion, denn auch die Arithmetik hat Konstruktionsmethoden, mittels deren sie indirekt gegebene Begriffe hervorbringt". Freilich beschränkt sich die Konstruktion nicht auf das indirekt Gegebene, sie ist auch unmittelbar schöpferisch.

Will man die zwischen den Urteilen der Beweise liegende geistige Arbeit kennen lernen, so bieten für die Schule das beste Material dazu die Kladden der mathematischen Abiturientenarbeiten. Es ist mir in psychologischer Hinsicht immer besonders wertvoll, dieses Material sorgfältig durchzumustern, um die oben hervorgehobene Vorarbeit und Zwischenarbeit kennen zu lernen. Das Ergebnis ist, daß diese Arbeit durch Phantasie und durch die Methoden der induktiv-deduktiven Logik, die man meist ungenau als induktive Logik bezeichnet, bestimmt ist neben allem Formal-Logischen. Es geht in der Mathematik hier ebenso zu, wie in der Physik und wie in anderen Wissenschaften, d. h. Beobachtung und Versuch usw. spielen eine hervorragende Rolle, nur sind die Gegenstände der Untersuchung hier, nachdem einmal die Grundbegriffe gewonnen worden sind, psychische Gebilde. Genau so geht es aber nicht bloß bei der mathematischen Arbeit der Schule zu, sondern bei aller mathematischen Arbeit.[1]) In der erkenntnistheoretischen Literatur habe ich einen Hinweis auf diese Tatsache nur bei Herrn Hölder[2]) gefunden, der in bezug auf die Arbeit des Geometers sagt: „Wir sind dabei genötigt, zu suchen und umher zu tasten, wir machen eine Art von Experiment, auf Grund dessen wir schließlich vorhersagen, wie die Messung ausfallen müßte, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen könnten. Wir haben also ein Gedanken-Experiment anstelle eines Real-Experimentes gesetzt und darin besteht die Deduktion." Freilich wird man sich dabei an die Kritik erinnern müssen, die Justus v. Liebig an den Arbeiten Bacons vornahm und welche er abschloß mit den Worten: „Ein Experiment, dem nicht eine Theorie, d. h. eine Idee vorhergeht, verhält sich zur Naturforschung wie das Rasseln mit einer Kinderklapper zur Musik."

Man pflegt in jeder Wissenschaft unter den Namen Untersuchung und Darstellung die eigentliche Arbeit zu scheiden von der Form, die man ihr für die Mitteilung an andere gibt. Als drittes Moment hat man die Prüfung durch die formale Logik hervorzuheben, sie spielt etwa die Rolle der Polizei. Natürlich handelt der, welcher die Polizeivorschriften genau kennt und anerkennt, anders als der, dem sie unbekannt sind oder der sie nicht achten will. Darum wirkt die Formal-Logik stark auf die Darstellung und auch schon auf die Untersuchung zurück, sie zügelt die Phantasie und bestimmt das induktiv-deduktive Verfahren, aber ohne es zu fesseln.

Die Mathematiker und Philosophen, welche für die Mathematik neben

---

1) Vgl. Nr. 41.

2) Vgl. Nr. 70 S. 10. Vgl. dazu auch ferner Nr. 174.

der Formal-Logik das Schöpferische und Künstlerische oder die synthetischen Funktionen des Denkens betonen, sind durchaus im Rechte, nur ist dabei nicht das Denken oder gar das reine Denken ein und alles.

Daß auch im Schlußverfahren selbst etwas Schöpferisches liegt, soll damit durchaus nicht geleugnet werden. Jeder Lehrer weiß, daß die zu einem Schlusse erforderlichen Urteile im Geiste des Schülers oft friedlich nebeneinander lagern, ohne in Verbindung zu treten, und es ist ja gerade eine Aufgabe der Didaktik, hier die erforderliche Beweglichkeit zu erzielen.

Herr Poincaré sieht bekanntlich in dem Schlusse von n auf $n+1$ das eigentlich Schöpferische in der Mathematik.[1]) Er sagt darüber u. a.: „Die Haupteigenschaft des rekurrierenden Verfahrens besteht darin, daß es, sozusagen in einer einzigen Formel zusammengedrängt, eine unendliche Anzahl von Syllogismen enthält." Herr Voß bemerkt dazu: „Man wird sich wohl nicht leicht entschließen, dieser Ansicht beizustimmen. Denn wir sehen nicht, wie uns die Anwendung dieses Satzes jemals in das aktual Unendliche hineinführen könne, während Poincaré ausdrücklich hervorhebt, daß der bloße Satz des Widerspruches uns zwar gestatten würde, für beliebig viele Fälle einen Satz als richtig darzutun; im Gegensatz dazu soll aber das Prinzip der vollständigen Induktion auch vor dem Unendlichen nicht Halt machen. Indessen mag dies auf einen Wortstreit hinauskommen; eine Ausführung, inwiefern man mittels der angegebenen Methode die Mathematik über die Grenzen dessen, was er selbst eine ungeheure Tautologie nennt, erhebt, hat Poincaré jedenfalls nicht gegeben".[2])

Unseres Erachtens steckt in der Bemerkung Poincarés doch ein richtiger Kern, insofern sie tatsächlich eine bestimmte Art des Schöpferischen trifft, nur muß man die rekurrierende Definition und den Schluß von n auf $n+1$ streng voneinander scheiden. Bekanntlich steht das Wort „rekurrierend" bei den Mathematikern im Gegensatze zu „independent" und könnte ebenso gut durch das Wort „präkurrierend" ersetzt werden. Es wird gebraucht, wenn es sich um eine schrittweise entstehende Reihung handelt, während das Wort independent verwendet wird, wenn ein Glied der Reihung deren ganzes Gesetz darstellt. Für die geometrische Reihe z. B. liefert

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_1 \cdot q, \quad u_3 = u_2 \cdot q, \cdots$$

---

1) Diese Behauptung Poincarés, wonach alles Alogische für die Bildung des Neuen in der Mathematik ausgeschlossen erscheint, kann sich vernünftiger Weise wohl nur auf die Verifizierung des bereits Geschaffenen beziehen. Sollte damit auch die Tätigkeit des Forschers getroffen werden, so würde dies im Widerspruch stehen zu dem, was Poincarés eigene Arbeiten zeigen und was er auch von diesen gelegentlich selbst erzählt. Vgl. dazu u. a. H. Poincaré „L'invention mathématique" im Enseignement mathématique von 1908, S. 357f.

2) Vgl. Nr. 161a S. 89.

die rekurrierende Definition, während die independente in der Formel

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

enthalten ist.

Diese rekurrierende oder präkurrierende Definition ist wirklich schöpferisch, indem sie für drei Glieder a, b, c die Vorschrift gibt, daß c aus b so gebildet werden soll, wie b aus a, und daß nach diesem Verfahren über c hinaus beliebig weiter fortgeschritten werden kann (und ebenso über a hinaus rückwärts), falls man dabei nicht auf Widersprüche stößt. Letzteres ist natürlich nur von Fall zu Fall zu entscheiden.

Der Schluß von n auf $n+1$ gehört dagegen in die Formal-Logik, wie u. a. schon Herr Frege und Herr Dedekind gezeigt haben.[1]) Man kann diesem Schlusse folgende Gestalt geben: Sollte das Gesetz der Reihung eine bestimmte Eigenschaft E von jedem Gliede auf das folgende übertragen, so hat jedes auf m folgende Glied diese Eigenschaft E, falls sie m zukommt. Zum Beweise betrachten wir die Reihe

$$\cdots m, n, o, p \cdots$$

die einen Teil der vorgelegten Reihe darstellen mag, für die unsere Voraussetzung erfüllt sein sollen. Ist p das erste Glied der Reihe, welches die Eigenschaft E nicht hat, so kommt diese Eigenschaft auch o nicht zu, weil sie sonst auch p zukommen müßte, also auch nicht n und also auch nicht m, und dies ist gegen die Voraussetzung.

Das Unbegrenzte liegt nicht in dem Schlusse, sondern in der Definition, für welche diese Schlußkette wie gemacht ist.

Daß diese Schlußweise gelegentlich dazu dienen kann, eine unvollständige Induktion zu einer vollständigen zu machen, ist richtig, aber zunächst in logischer Hinsicht Nebensache.

Daß der Schluß von n auf $n+1$, den Herr Wundt als Analogieschluß bezeichnet, verhältnismäßig spät in seiner hohen Bedeutung erkannt worden ist, dürfte sich geschichtlich erklären lassen. Mit der zunehmenden Arithmetisierung der Mathematik mußte auch dieser, der Reihung durchaus angepaßte Reihungs-Schluß immer mehr in den Vordergrund treten.

Das Schöpferische liegt aber nicht in ihm, sondern in dem „Iterierbaren", durch welches die präkurrierende oder rekurrierende Definition d. h. die Reihung bedingt ist. Auf das „Iterierbare" als Grundlage des Schöpferischen in der Mathematik hat auch Herr G. Fr. Lipps hingewiesen.[2])

Freilich ist das Schöpferische nicht auf diese Iterierbarkeit beschränkt. Unter Hinweis auf Maupertuis' Antrittsrede an der Pariser Akademie (1742) sagt Herr Voß[3]) „Die Anschauung, eine gewisse Divinationsgabe unser

1) Vgl. dazu auch Nr. 162 (erste Auflage), Bd. I, Einleitung u. f.

2) Vgl. Nr. 90b S. 126.

3) Vgl. Nr. 161a S. 92. Vgl. dazu auch in Nr. 137a (erste Auflage) Abschn. 2 entsprechendes in Beziehung auf Förster, Hauck, Keppler, Lampe, Maupertius, Steiner, und besonders Kroneckers Ausspruch „Auch wir sind Dichter" (Berliner Naturfor-

schaffenden Phantasie, die dem eigentlichen künstlerischen Schaffen, dem ποιειν, der Poetik zu vergleichen ist, bildet in letzter Instanz den Keim, aus dem alle großen Fortschritte der Mathematik entspringen, während die Verwandlung in die arithmetische oder Zahlensymbolik das Geschäft der reinen Wissenschaft ausmacht". Dabei ist nur wieder auf die Vieldeutigkeit des Wortes Anschauung hinzuweisen.

Die großen Mathematiker geben uns nur selten Gelegenheit, sie bei der Untersuchung kennen zu lernen, deren Eigenart die Darstellung meist verwischt. Wo sie es aber tun, da tritt auch stets die Rolle des Alogischen im Schöpferischen zu Tage. Gerade das Geniale erscheint oft als ein Geschenk, das sich freilich ohne die experimentelle und formal-logische Vorarbeit nicht einstellen würde.

Nicht bloß Giordano Bruno, sondern auch der geniale Leibniz u. a. haben sich zwar ihr ganzes Leben hindurch um eine „ars inveniendi" bemüht, d. h. um eine Methode, in den Wissenschaften die Genialität durch logische Technik zu ersetzen, natürlich aber vergeblich.[1])

Herr Poincaré widmet gelegentlich[2]) der „Anschauung und Logik in der Mathematik" ein besonderes Kapitel, indem er u. a. den Unterschied des analytischen und synthetischen Genies in der Mathematik kennzeichnet. In meiner Studienzeit war es gang und gäbe, diesen Unterschied in Weierstraß und Riemann personifiziert zu sehen, auf die auch Poincaré hinweist, weitere Paare wie Méray und F. Klein, Hermite und Bertrand, S. Kowalewska und Lie hinzufügend. Dabei kommt Poincaré zu dem Schlusse, daß auch bei den Analytikern die Intuition eine Rolle spielt, wobei nur wiederum daran zu denken ist, daß dieses Wort so oft der Formal-Logik gegenüber alles Alogische bezeichnet. Dabei heißt es u. a.: „Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementar-Operationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerlos ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanzu haben?" „Offenbar nicht"... „Das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns ganz entgangen sein." Zu diesem Etwas gehört aber auch die geistige Arbeit zwischen den Urteilen! Sonst behält Mephisto Recht, wenn er dem Schüler versichert:

> Wer will was Lebendiges erkennen und beschreiben,
> Sucht erst den Geist herauszutreiben,
> Dann hat er die Teile in seiner Hand,
> Fehlt, leider! nur das geistige Band.

---

scherversammlung 1886). Dem mathematischen Verein an der Universität Berlin schrieb Kronecker zu dessen 30. Stiftungsfeste:

> Nonne mathematici veri natique poetae?
> Sunt, sed quod fingunt, hosce probare decet.

1) Dagegen findet sich bei Chasles in seinem „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie" (Bruxelles 1837), deutsch von A. Sohnke (Halle a. S. 1839), gelegentlich (S. 267 der deutschen Ausgabe) die Bemerkung, daß bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft in der Geometrie das Genie nicht mehr unbedingt erforderlich sei, um einen neuen Stein zu dem Gebäude hinzuzufügen. 2) Vgl. Nr. 113b S. 19.

Freilich selbst die volle Einheit des Beweises spiegelt nur einen Teil der genialen Leistung wieder, die für ihn erforderlich war, denn auch mit des Mathematikers Gedanken-Fabrik ist es

„Wie mit einem Weber-Meisterstück,
Wo ein Tritt tausend Fäden regt,
Die Schifflein herüber hinüber schießen,
Die Fäden ungesehen fließen,
Ein Schlag tausend Verbindungen schlägt."

Es würde vergebliche Mühe sein, die Gewebe der Meister völlig entwirren zu wollen, denn die Arbeitsweise des einzelnen hängt schließlich von seiner ganzen Persönlichkeit ab und bis zu einem gewissen Grade auch von seinem Lebensmilieu, durch das natürlich auch die Probleme mit bestimmt werden, welchen sich die Arbeit zuwendet. Für Gauß gibt der Briefwechsel und vor allem sein eigenes „Notizenjournal" gute Auskunft, bei dessen Herausgabe[1]) Herr Klein u. a. sagt: „Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genies: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen".

Von der Eigenart S. Lies hat Herr F. Klein in seinem Göttinger Seminar gelegentlich (1909/10) eine genaue Analyse gegeben[2]), aus der hervorgeht, daß Lies mathematische Produktion durchaus nicht auf formallogischen Bahnen wandelte und daß sie, ursprünglich jedenfalls bei nicht allzureichem Wissen und bei wenig ausgebildeter begrifflicher Schärfe, stark durch zufällige äußere Anregungen (milieu) bestimmt war (Vereinigung der französischen Metrik und der deutschen Liniengeometrie). Lie selbst pflegte zu sagen, er schließe durch die Luft, nicht an der Erde entlang, und betonte in bezug auf seine „Linien-Kugel-Transformation" daß er lange Zeit in den beiden, hier vereinigten Räumen nebeneinander gelebt habe, deren Vereinigung für ihn wie ein überraschender Blitz zustande kam.

Eine entsprechende Bedeutung hat bekanntlich für einen Teil der grundlegenden Arbeiten von Herrn Klein die Verbindung der Cayleyschen projektiven Maßbestimmung mit der nicht-euklidischen Geometrie. Auch

1) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 57 „Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796 bis 1814, mit Anmerkungen herausgegeben von F. Klein". Abdruck aus der „Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", Berlin 1901.

2) Herr Klein war so liebenswürdig, mir während des Druckes dieser Abhandlung das Protokollbuch des Seminars zur Einsicht zu überlassen. Der Arbeit im Winterhalbjahre 1909/10 lag folgende Disposition zu grunde: 1. Die Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker. 2. Zustandekommen der mathematischen Grundanschauungen in hervorragenden Individuen. 3. Entstehung und erkenntnistheoretischer Wert der mathematischen Axiome. 4. Irrtümer der Mathematiker. 5. Folgerungen für den mathematischen Unterricht. 6. Von der Stellung der Mathematik im Systeme der Wissenschaften. Außerdem wurden noch die Themen „Mathematik und Sprache", „Die Bezeichnungen der Mathematik" und „Mathematik und Spiel" in die Erörterung hineingezogen.

hierüber hat sich Herr Klein in seinem Seminare (1909/10) ausgesprochen. Durch Plücker und Clebsch war er als Student in die projektive Geometrie eingeführt worden, während ihn das Lehrbuch von Salmon-Fiedler auf Cayleys Arbeiten hinwies. Ein Kommilitone (Herr Stolz) erzählt ihm (Berlin 1869/70) von der damals allgemein erst wenig bekannten nichteuklidischen Geometrie, und nun taucht in ihm plötzlich die Idee einer Verbindung der beiden Gebiete auf, geleitet durch die Analogien ihrer Gebilde. Am Schluß eines Seminarvortrages (Februar 1870) über Cayleys Maßbestimmung wirft Klein die Frage auf, ob jene Idee wohl richtig sei, aber Weierstraß, der Leiter des Seminars, erklärt, es seien getrennte Gebiete. Der Zufall führt Klein im nächsten Semester in Göttingen nochmals mit Stolz zusammen, der wieder auf die nicht-euklidische Geometrie zurückkommt, und dabei bildet sich bei Klein trotz Lotzes Polemik gegen alles Nicht-Euklidische die Überzeugung, daß seine Idee doch richtig sei. Er verfolgt sie weiter, und es entstehen nun nach einer vorläufigen Notiz (1871) die Abhandlungen in den Mathematischen Annalen (Bd. 4 und Bd. 6), deren letztere (1872) das Widerstreben der zeitgenössischen Mathematiker gegen die neue Idee deutlich dartut. Dieses Beispiel zeigt uns für die Geschichte des Problems die dreifache Gliederung, die bei Entdeckungen und Erfindungen auf anderen Gebieten längst anerkannt ist: 1. Präformation der Idee in einem bestimmten Individuum, 2. Widerstand der Umwelt, der auch das Neue als solches kennzeichnet, 3. Aufnahme des Neuen und schließlich dessen Anerkennung als etwas Selbstverständlichen.

Es zeigt aber auch, ebenso wie die Entdeckungen Lies, welche Rolle auch auf dem Gebiete mathematischer Erkenntnis das Erfassen der Analogie[1]) spielt, die meist zunächst in unbestimmten Umrissen erscheint, um dann klarer und immer klarer herausgearbeitet zu werden.

Aus alledem geht hervor, welche Bedeutung das Alogische für die schöpferische Arbeit der Mathematiker hat.[2]) Sieht man ganz ab von der Sphäre des Fühlens und Wollens, so umfaßt es neben der produktiven und reproduktiven Phantasie immer die Anschauung, während wir das Logische, wie bereits öfter hervorgehoben, auf die Formal-Logik unter Verwendung der reflexiven und konstitutiven Kategorien eingeschränkt denken.

1) In bezug auf die Bedeutung der Analogie bei der Geistesarbeit von Charles Darwin vgl. in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie (1882) meinen Aufsatz „Den Manen Darwins".

2) Vgl. auch die eben erschienene Abhandlung von P. Stäckel in der Internationalen Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik 1912, Nr. 10 „Hermann Graßmann, ein Beitrag zur Psychologie des Mathematikers".

5. Der Gegenstand der Mathematik.

Seit die Herbartschen Gedanken über Reihenbildung und Verflechtung von Reihen[1]), ganz abgesehen von H. Graßmanns Arbeiten, durch Riemanns Habilitationschrift im Begriffe der (geordneten) Mannigfaltigkeit für die Mathematik ihre feste Gestaltung gefunden haben, sollte eigentlich kein Zweifel mehr darüber bestehen, daß Logik und Mathematik getrennte Wissenschaften sind. Die Logik hat niemals ein Konstruktionsgebiet zur Verfügung, wie es eine Mannigfaltigkeit für die Mathematik darstellt.

Für die Schule scheint es mir zweckmäßig, bei der Bestimmung des Gegenstandes der Mathematik (in der Prima) davon auszugehen, daß Reihung und Paarung (oder Zuordnung) als sukzessive und simultane Assoziationen beim Sprechen und Hören, Schreiben und Lesen tagtäglich von uns ausgeübt werden, aber auch bei der Wiedergabe und bei der Aufnahme eines Tonstückes usw. Greifen wir das Sprechen eines Satzes als Beispiel heraus, so werden akustische Zeichen (zu Worten verbundene Laute) aneinander gereiht, deren Folge durch den Inhalt des Satzes bestimmt ist. Dabei findet im Sprecher eine Paarung zwischen Vorstellung und Zeichen statt und im Hörer, der gelegentlich natürlich auch mit dem Sprecher identisch sein kann, eine Paarung zwischen Zeichen und Vorstellung. Die psychologische Bedeutung dieser Überlegungen wird um so klarer, je mehr man dabei die Mechanisierung durch Übung und Gewöhnung auszuscheiden vermag.[2]) Das psychische Geflecht, das der einzelne in sich vorfindet, wenn er bewußt zu denken beginnt, läßt sich nach seiner geschichtlichen Entwicklung kaum entwirren, aber Erinnerungen und Hinweise auf das Erlernen des Schreibens oder des Spielens eines bestimmten Instrumentes klären die Sachlage. Wer etwa gelernt hat, mit dem Morseapparat zu arbeiten, übersieht meist noch die einzelnen Stufen seiner Ausbildung, die gegenseitige Zuordnung der Laute des Alphabets und der Morsezeichen usw., während er schließlich ja die Depesche aus dem rhythmischen Geräusche des Apparates heraushört.

Für die äußerliche Paarung von Reihen sind z. B. die Bibelübersetzungen in alle möglichen Sprachen heranzuziehen, oder besser noch die Vorstellungsreihen verschiedener Zuhörer einer Rede.

Für die innere Paarung von Reihen bietet zunächst die Grammatik gute Beispiele. In dem Schema:

amo	amavi	amabam	. . . .
amas	amavisti	amabas	. . . .
amat	amavit	amabat	. . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . .

wird die Horizontale durch die Folge Präsenz, Perfektum usw. beherrscht, die Vertikale durch die übliche Reihenfolge der Abwandlung.

1) Vgl. dessen Psychologie (1824), namentlich I § 100ff. und II § 109 oder in Volkmanns Lehrbuch II, 5 usw.

2) In Bezug auf die Bildung und erste Verwendung der Zahlen vgl. dazu Nr. 24b S. IX.

Unser Beispiel gibt eine Reihenverbindung, bei welcher jede Vorstellung in zwei Reihen liegt. Man kann sie als Vorstellungsnetz bezeichnen oder als eine unstetige zweifache Vorstellungsmannigfaltigkeit. Die räumliche Darstellung ist dabei nur eine Veranschaulichung, der Zusammenhang liegt in den Gesetzen der Reihungen selbst. Denkt man sich das Schema, welches dem Aktivum entspricht, auch für das Passivum durchgeführt und beide Schemata übereinandergelagert, so entsteht eine allerdings sehr beschränkte dreifache Vorstellungsmannigfaltigkeit. In beliebiger Ausdehnung erhält man eine solche, falls man das oben gegebene Schema für weitere Zeitwörter, etwa laudo, opto usw. durchführt. Sobald die Reihe amo, laudo, opto ... für die Anordnung festgestellt ist, ist die Mannigfaltigkeit wieder bestimmt, und zwar dient auch hier das räumliche Schema nur zur Veranschaulichung.

Man gelangt so zu dem Begriffe einer (unstetigen) n-fachen Vorstellungsmannigfaltigkeit, bei der jede Vorstellung in n Reihen liegt.

Neben Reihung und Paarung bietet uns Sprechen, Lesen usw. noch einen anderen wichtigen Hinweis. Die Worte der Sprache weisen meist auf Klassenvorstellungen zurück, nicht auf Individualvorstellungen. Wie die Sprache mit Hilfe ihrer Worte doch das Individuelle auszudrücken weiß, sollte namentlich im fremdsprachlichen Unterrichte der Oberstufe neben vielem anderen als „Philosophie im Unterrichte" herausgearbeitet werden. Hier ist nur hervorzuheben, daß die Worte der Sprache ein System der primitiven Klassenbildung wiederspiegeln, und deshalb ist die alte Logik, die an Aristoteles anknüpft, auch wesentlich Subsumptionslogik.

Sind so die Begriffe Reihung und Paarung an Beispielen außerhalb der Mathematik klar gelegt und ist ferner darauf hingewiesen, daß auch in der Klassenbildung etwas „Iterierbares" vorliegt, da vermöge Abstraktion und Determination Klassen von Klassen und Schnitte (Durchdringungen) von Klassen (z. B. Gesamtheit der gemeinsamen Elemente zweier Klassen) gebildet werden können[1]), so rückt die Mathematik aus ihrer Weltenferne sofort in greifbare Nähe, wenn man darauf hinweist, daß auch in ihr Reihung, Paarung und Klassenbildung eine ganz hervorragende Rolle spielen.

Die Ordnung einer (endlichen) Menge durch Reihung führt auf den Unterschied der offenen (linearen) und der geschlossenen (zyklischen) Reihung. Das übliche Militärkommando „Zum Kreise rechts und links schwenkt, marsch!" bezweckt den Übergang von einer offenen Reihe zu einer geschlossenen, das Kommando zur Wiederherstellung der alten Front das umgekehrte. Der Schüler findet bei einiger Nachhülfe leicht, daß bei der offenen Reihung aus „A steht vor B" und „B steht vor C" auch folgt „A steht vor C" während dies bei der geschlossenen Reihung nicht der Fall ist.

---

1) Vgl. Nr. 36b, I S. 183. Unter Erinnerung an genus proximum und differentia specifica kann man dies z. B. an Systemen der Botanik und Zoologie gut erläutern.

Beispiele aus der Mathematik für offene und geschlossene Reihungen und für deren Verwebung zu höheren Mannigfaltigkeiten geben die Schüler leicht an, ebenso für Paarungen und Klassenbildungen. So z. B., daß bei der Verbindung einer Geraden (Punktreihe) und eines Strahlenbüschels in der Ebene eine offene Reihung mit einer geschlossenen gepaart wird, oder, daß alle Konstruktionen (mit Lineal und Zirkel) sehr einfache offene Reihungen (Gerade) und sehr einfache geschlossene (Kreis) zum Durchschnitt bringen, d. h. dabei aus zwei Klassen die gemeinsamen Elemente aussondern.

Die übliche Schulauffassung, wonach die Linie durch Bewegung eines Punktes, die Fläche durch Bewegung einer Linie usw. entsteht, gibt die Anschauung von stetigen Reihungen im Gegensatz zu den unstetigen Reihungen, welche beim Sprechen, Lesen usw. verwendet werden, aber auch in den Anzahlen vorliegen und in dem Körper der rationalen Zahlen.

Den Übergang von der unstetigen Reihung zur stetigen zeigt die Theorie der Irrationalzahlen, mag man sie nun nach Cantor oder Dedekind oder Weierstraß geben, während die Verwebung zweier stetigen Reihen zu einer zweifachen Mannigfaltigkeit durch das Gebiet der gemeinen Komplexzahlen dargestellt wird. Bei graphischer Darstellung in der Ebene zeigt das Netz der Gitterpunkte (für die ganzen Zahlen) im Vergleich mit der Ebene selbst anschaulich den Unterschied der stetigen und unstetigen zweifachen Mannigfaltigkeit.

Das Verständnis der Verwebung stetiger Reihen zu höheren Mannigfaltigkeiten macht den Schülern keine Schwierigkeiten, diese liegen für sie allein in der Theorie des Irrationalen, d. h. in der Bildung der ersten stetigen Reihe.

Allerdings spielt meiner Ansicht nach bei dem Übergange von der unstetigen Mannigfaltigkeit zur stetigen auch die Logisierung der Anschauung eine Rolle, und zwar im besonderen die der Bewegung. Ob man den Raum der Sinnenwelt lückenlos auffassen muß oder nicht, falls er als Ganzes und in seinen Teilen ruhend vor uns liegt, mag dahingestellt bleiben, mit oder in der Bewegung ist jedenfalls die Kontinuität gegeben. Innenwelt und Außenwelt des einzelnen werden in gleichem Maße durch die Bewegung beherrscht. Man spricht ja deshalb auch von „Denkbewegung" und sieht in ihr die Kontinuität gegeben, falls man diese anschaulich nicht anerkennen will. Es scheint mir nicht unmöglich, daß Kronecker mit der Unterscheidung der arithmetischen und der geometrischen Stetigkeit doch Recht behält, die er bei dem ersten Auftreten der tangentenlosen Kurven betonte, d. h. es will mir scheinen, als wenn die zusammenhängende perfekte Menge doch eine andere Art des Kontinuums darstellte, als sie in der Bewegung erzeugt wird. Die Kontinuität in der Bewegung ist nicht bloß durch Lückenlosigkeit bestimmt, sondern auch durch einen Zusammenhang, der logisch nicht weiter festgelegt werden kann und gewissermaßen in der Anschauung erlebt werden muß. So sagt auch

Herr Simon[1]): „Auch nach der Elimination des Größenbegriffs bleibt die lückenlose Kontinuität der Raumstrecke noch von der der perfekten stetigen Menge verschieden."

Es ist gewissermaßen die Tragik des Denkens, welches bei seinem diskursiven Charakter nur im Diskreten und mit Diskretem arbeiten kann, die in der Bewegung gegebene Anschauungskontinuität erreichen zu wollen. Es erreicht sie, so weit es für den Aufbau der mathematischen Schlüsse nötig ist, aber nicht in einer Weise, die unseren Geist restlos befriedigt.

Hat man den Begriff der Mannigfaltigkeit geklärt, so ist darauf hinzuweisen, daß die Elemente einer Mannigfaltigkeit als verschieden angesehen werden, insofern man von ihrer Ordnung spricht, d. h. sie sind verschieden als Stellen eines Ordnungssystems. Will man dann messen, so muß man die Elemente oder doch gewisse Gruppen von Elementen (z. B. Strecken) als gegenseitig ersetzbar ansehen.

Die geschichtliche Entwicklung der Mathematik hat zuerst das Maß bevorzugt und die Ordnung weniger beachtet. Das zeigt u. a. die früher übliche Definition der Mathematik, wonach sie „Lehre von den Größen" oder besser „Lehre von den Größen und den Gesetzen ihrer Verbindung" sein sollte. Bekanntlich ist diese Definition mit Rücksicht auf Mengenlehre, Logikkalkül, Topologie, Kombinatorik, Geometrie der Lage usw. aufgegeben worden. Wollte man sie aufrecht erhalten, so müßte das Wort Größe (quantum) zunächst ohne Rücksicht auf Größenvergleichung (quantitas) definiert werden, etwa als Vorstellung, gebildet aus Teilvorstellungen von gegenseitiger Ersetzbarkeit, wobei aber schließlich auch an die Unendlich-Kleinen Veroneses gedacht werden müßte, in denen ja nur Schöpfungen von Leibniz (dx, d^2x, usw.) wieder auferstehen. Trotzdem würde diese Definition von den beiden Prinzipien der Mathematik, „Ordnung" und „Maß" das erste wohl nicht voll zum Ausdrucke bringen.

Von den Definitionen der Mathematik, welche neuerdings Herr Simon[2]) und Herr Voß[3]) zusammengestellt haben, lassen die meisten den Unterschied zwischen Logik und Mathematik nicht oder nicht scharf hervortreten. Dies gilt auch von der oft angeführten Erklärung Russells.[4]) Nur die Definition von Papperitz[5]) scheint uns die Sache zu treffen, sie ist auch in Auerbach-Rothes Taschenbuch (1911) aufgenommen worden und lautet: „Den Gegenstand der reinen Mathematik bilden die Beziehungen, welche zwischen irgend welchen gedachten Elementen begrifflich herstellbar sind, indem wir sie als in einer geordneten Mannigfaltigkeit enthalten ansehen. Das Ordnungsgesetz dieser Mannigfaltigkeit muß unserer Wahl unterliegen."

---

1) Vgl. Nr. 137 f., S. 6.
2) Vgl. Nr. 137 f S. 64 f. 3) Vgl. Nr. 161 a S. 24–25.
4) The principles of mathematiques, Cambridge 1903.
5) Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. I, 1892, S. 36.

Im Hinblick auf diese Erklärung sagt Herr Voß[1]): „Nach meiner Ansicht wird jeder Mathematiker, der in seiner Wissenschaft einen mit dem Formalismus der Logik nicht schlechthin zusammenfallenden Gegenstand finden will, geneigt sein, noch einen weiteren Unterschied zu betonen. Die Objekte der Mathematik sind Zeichen, welche der ordnenden Tätigkeit des Verstandes ihre durch rein logische Definitionen ausgedrückten Verknüpfungsgesetze verdanken. Solche Zeichen nennen wir aber allgemein Zahlen. Und daher sehe ich das unterscheidende Merkmal der Mathematik darin, daß sie die Wissenschaft von der Zahl ist." So gehört auch der Logikkalkül in die Mathematik hinein, und diese ist eben „die Wissenschaft von den Zahlen", wobei „Zahlen" alle „von uns geschaffene Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes sind, die sich nach bestimmten allgemeinen Regeln miteinander verknüpfen lassen". Die „Darlegung, wie alle anderen Vorstellungen, die dem Größenbegriff anhaften, dem Zahlbegriff untergeordnet werden können", führt innerhalb der reinen Mathematik zu den Anwendungsgebieten, zunächst zur Geometrie.

Herr Simon[2]) hat im Anschluß an J. G. Graßmann, den Vater von Hermann und Robert Graßmann, die Mathematik definiert als die Wissenschaft der freien (ungehemmten) Verknüpfung und Trennung; dabei sind ihm Synthesis und Analysis Gegenseitigkeitsbegriffe. Man kann dem völlig zustimmen, wird aber dabei fordern müssen, daß die Art der Synthesis und Analysis näher bestimmt wird. Es handelt sich in der Mathematik nicht um kausale und teleologische Synthesen, sondern eben um Reihungen.

Darum ist auch Itelsons Erklärung der Mathematik als der „Wissenschaft von den geordneten Gegenständen" zu unbestimmt.[3])

Im Hinblick auf Hilberts axiomatische Arbeiten erklärt Herr Rothe[4]): „Gegenstand der mathematischen Forschung bilden irgend welche denkbaren zu einer Menge (Klasse, System) zusammenfaßbaren und durch Zeichen zu benennende Dinge, von unserem Verstande willkürlich festzusetzende und durch Zeichen zu benennende Beziehungen zwischen den Dingen der Menge, und solche Aussagen (Folgerungen, Tatsachen, Sätze), die sich aus jenen mittels einer endlichen Anzahl denknotwendiger Schlüsse herleiten lassen."

Unseres Erachtens kann man die Mathematik, jedenfalls für die Schule, in Anlehnung an die Definition von Herrn Papperitz als die „Lehre von den Mannigfaltigkeiten" bezeichnen, falls man gegenüber dem Begriffe Menge (Klasse, System) das Geordnete in den Begriff „Mannigfaltigkeit" mit hineinlegt. Will man dies nicht tun, so muß man die Mathematik als die „Lehre von den geordneten Mannigfaltigkeiten" einführen.

---

1) Vgl. Nr. 161a S. 25ff. 2) Vgl. Nr. 137f S. 18.
3) Vgl. Revue de métaphysique et de morale, 1904. 4) Vgl. Nr. 146, S. 65.

Bezeichnet man als Anschauungsform des Bewußtseins das vielgestaltige Außer-Einander, welches sich, abgesehen von dem psychischen Inhalt des individuellen Ichs, erfahrungsgemäß zu den festen Formen des Nach-Einander (Zeit) und Neben-Einander (Raum) zusammenschließt, so kann man die Mathematik auch die Anwendung der Logik auf die Anschauungsformen nennen.

Der jetzt so beliebte Vergleich der Mathematik mit dem Schachspiele muß bei jeder Definition der Mathematik als unberechtigt erscheinen.

Die Formallogik gehört nicht in die Mathematik, ebensowenig diese in jene. Auch der Logikkalkül ist nicht ein Teil der Mathematik. Hätte er seine Sprache nicht in Anlehnung an die Sprache der Arithmetik gebildet, so würde man kaum auf den Gedanken gekommen sein, ihn der Mathematik zuzurechnen. Das wesentliche liegt niemals im Zeichen, sondern stets in dessen Bedeutung.

Daß man immer ein Konstruktionsgebiet zur Verfügung hat, wie es eine (geordnete) Mannigfaltigkeit darstellt, ist in der Mathematik das wesentliche.

Keine andere Wissenschaft bietet etwas ähnliches dar, und wo das Gegenteil der Fall zu sein scheint, da weist dieser Schein stets auf zugrundeliegende Mathematik hin.

6. Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter.

Mit den Herren Höfler, Klein, Schoenflies, Voß, Wellstein u. a. vertreten wir die Ansicht, daß die Grundbegriffe der Mathematik, wie man zu sagen pflegt, durch Abstraktion (und Determination) und Idealisierung aus dem gewöhnlichen Vorstellungsmateriale (im Sinne des Naiven Realismus) entstehen. Wir wollen, da der Ausdruck Idealisierung zum mindesten Mißdeutungen ausgesetzt ist, dies alles unter dem bereits gebrauchten Namen Logisierung zusammenfassen und darunter den Prozeß verstehen, durch den eine Vorstellung für den formal-logischen Gebrauch verwendbar wird, falls sie es noch nicht ist. Dazu gehört Eindeutigkeit und Einheit, und zwar kann Einheit die Einheit eines Elementes oder die Einheit eines Vielen (in qualitativer und in quantitativer Hinsicht) bedeuten, wobei in letzterem Falle natürlich die innere Widerspruchslosigkeit vorausgesetzt wird.

Solange der Punkt für uns ein kleiner Körper ist, bei dem keine Dimension der anderen gegenüber relativ entwickelt ist, liefert uns die Bewegung des Punktes einen stabförmigen Körper, dessen Bewegung wiederum einen plattenförmigen Körper usw. Bei Aussagen über diese Gebilde befinden wir uns in der „natürlichen Geometrie", wie sie von Herrn Pasch (1882) entwickelt worden ist.[1]) Herr Wellstein[2]) hat ihr eine ausführliche Darstellung gewidmet, auf die auch Herr Höfler[3]) in seiner

1) Vgl. Nr. 108b. 2) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage, II, S. 22ff.
3) Vgl. Nr. 69b S. 444.

Didaktik lobend hinweist, vorbehaltlich einer Kritik der dabei von Herrn Wellstein geäußerten erkenntnistheoretischen Ansichten.

Jedes Modell oder jede Zeichnung ist selbstverständlich die Darstellung eines Gebildes der natürlichen Geometrie, insofern die Punkte hier Ausdehnung haben, die Linien hier Stangen oder Fäden sind usw. Dasselbe gilt von den magnetischen Kraftlinien, die der Physiker durch Eisenfeilspäne darstellt, den Hyperbeln und Lemniskaten seiner optischen Bilder usw. Es handelt sich dabei zum Teil etwa um Funktionsstreifen im Sinne Kleins[1]), d. h. eigentlich um Körper, deren Schnitte solche Streifen sind, wobei aber auch das Wort Schnitt wieder nur approximativ ist.

Worin besteht nun die Logisierung dieser Gebilde? Herr Höfler[2]) hat sie ein „Unterfahren der Wirklichkeit" genannt und sagt dazu gelegentlich: „Wie aber der Übergang von der experimentellen zur theoretischen Physik nichts ist als ein Unterfahren der uns gegebenen physischen Gegenstände mit selbstgeschaffenen Begriffen und Annahmen, so löst sich auch die Antinomie zwischen der anschaulichen und der unanschaulichen Geometrie einfach so: wir unterfahren unsere räumlichen Anschauungen und Erfahrungen durch die Begriffe Punkt, Abstand, Richtung usw., aus denen sich die geometrischen Definitionen zusammensetzen."

Bei Schoenflies[3]) heißt es: Die Axiome füllen „die aus der Anschauung stammenden geometrischen Grundbegriffe mit einem eindeutigen, zum Teil völlig neuen Inhalt", so daß sie nun „logisch-vollkommen" werden, wodurch sie „erst zu mathematischen Objekten" erhoben werden. Sehen wir von dem Ausdrucke im einzelnen ab, so haben wir bei Schoenflies etwa die Kette Anschauung, Grundbegriff, umgeformter Grundbegriff, so daß man schließen darf, daß die Logisierung mehrere Stufen umfaßt.

Tatsächlich arbeitet auch die natürliche Geometrie mit Begriffen, an die sie logische Operationen knüpft. Daß zwei gerade Stangen nur eine Durchdringungsstelle haben, daß ein kreisförmiger Draht und ein gerader Draht nur deren zwei zeigen können usw., wird doch weiter benutzt. Freilich lauten die Sätze in dieser natürlichen Geometrie etwa so: „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, wenn sie nicht zu nahe beieinanderliegen", d. h. die Bestimmung wird hier um so unsicherer, je mehr die Punkte aneinander rücken. Aber auch außerhalb der Wissenschaft wird logisch gearbeitet, und oft, ohne daß dabei irgendwelche Begriffsbestimmungen im Sinne der Logik vollzogen werden. Ein moderner Großkaufmann, der sein Geschäft versteht, denkt äußerst logisch und kommt bei der Überlegung in jedem bestimmten Falle auch zu einem eindeutigen Ergebnisse, das sein Handeln bestimmt, ohne etwas von dem Probleme der Logisierung zu wissen.

---

1) Vgl. auch Nr. 37 Bd. 3 Heft 1 den Artikel von v. Mangoldt.

2) Vgl. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie, Nr. 69e S. 22.

3) Vgl. „Über die Stellung der Definition in der Axiomatik", Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1911, S. 22ff.

Diese ist tatsächlich nicht ein bestimmter Akt, sondern ein Prozeß von fortschreitender Vollkommenheit, der aber wohl nur innerhalb der Mathematik sein Ziel wirklich erreicht. Es ist eine alte Bemerkung, daß für Cuvier das Wort Hund eine ganz andere Bedeutung hatte, als für seinen Bedienten, daß es also für beide Zeichen für verschiedene Begriffe war.

Die psychologische Bildung der Begriffe aus den simultanen und sukzessiven Assoziationen unter Mitwirkung der Apperzeption findet man bei Wundt trefflich geschildert. Immer ist es eine herrschende Vorstellung, die für den Begriff die Bezeichnung liefert. Die meisten Worte unserer Sprache zeigen uns nicht mehr die innere Beziehung zwischen Zeichen und Begriff. So wird das Wort Hund für uns mit dem oder besser einem Begriffe Hund äußerlich gepaart, während es, wenn die Etymologen hier im Rechte sind, für den Jäger in germanischer Urzeit noch die Bedeutung des Fängers hatte.

Die Definition eines Begriffes bezweckt meist, wie schon der Name sagt, nur seine deutliche Abgrenzung gegen andere Begriffe, so daß er verwendbar wird. Dies ist die erste Stufe der Logisierung; von der Summe(!) der wesentlichen Merkmale, wie sie immer noch gelegentlich von Logikern gefordert wird, ist dabei natürlich keine Rede. Herr Poincaré sagt gelegentlich: einem Kinde definiert man nicht die Katze, sondern man zeigt sie ihm. Das ist aber überall der Anfang der begrifflichen Bestimmung, auch für den Erwachsenen, und oft auch das Ende.

Stets richtet sich die Definition nach dem Zwecke, den man vorhat. So gilt es in der Zoologie für völlig ausreichend und einwandfrei, den Menschen nach seiner leiblichen Seite durch die Merkmale „aufrechter Gang" und „Besitz von 4 Schneidezähnen in jedem Kiefer" zu bestimmen, und niemand wird behaupten, daß damit wesentliche oder besser konstitutive Merkmale getroffen sind, im Gegensatz zu konsekutiven.

Soll diese Definition etwas besagen, so muß bekannt sein, was „aufrechter Gang" usw. bedeuten. Und bei den Begriffsbestimmungen der Merkmale kommt man schließlich doch immer wieder auf die Anschauung zurück.

Dabei erlaubt das Zeichen stets vom Begriffe zur Anschauung überzugehen und umgekehrt[1]), und infolgedessen verbindet man mit dem Begriffe stets durch Vermittlung des Zeichens Gruppen von Vorstellungen, welche von der Definition nicht umfaßt werden. Dieses ist im gemeinen

---

1) Darauf beruht m. E. auch die Verwendung der Figuren in der Geometrie und Mechanik trotz aller Logik. Vgl. dazu hier S. 40.

Damit stimmt überein, wenn Herr F. Klein gelegentlich (Vgl. Nr. 781 S. 4) sagt: „Demgegenüber behaupte ich, daß man überhaupt nicht die Fähigkeit habe, sich auch einfachere Beispiele der Funktionentheorie und Infinitesimalrechnung genau und zugleich anschaulich zu denken, daß die Raumanschauung sogar schon versagt, wenn es sich um die genauen Einzelheiten derjenigen Kurven handelt, welche durch ganze Funktionen dargestellt werden." Man geht eben durch Vermittlung des Zeichens, das natürlich auch ein Wort sein kann, nach Bedürfnis blitzschnell vom Begriffe zur Figur über, und umgekehrt. bzw. paart beides durch das Zeichen.

Leben und zum Teil auch in der Wissenschaft durchaus erforderlich und schadet auch durchaus nicht, solange die, welche mit dem Begriffe arbeiten, gewohnt sind, im allgemeinen dieselben Gruppen von Vorstellungen mit ihm zu verbinden. Wo dies nicht der Fall ist, treten immer Unstimmigkeiten auf, wie z. B. bei den äußerlich getreuen Berichten über Naturvölker, wo die psychische Verschiedenheit des Beobachters und der Beobachteten die Aussagen fälscht.

Das Ziel der Logisierung sehe ich nun in dem schlichten Gedanken, daß die Definition nicht mehr dazu zwingt, durch Vermittlung des Zeichens behufs Verständigung andere, von ihr nicht umfaßte Vorstellungsgruppen zu wecken, und daß man deren Ausschluß auch logisch nachweisen kann. Dadurch erhält man erst logische „Invarianten".

Dieses Ziel ist nur in der Mathematik erreichbar und vielleicht in gewissen Gebieten der Sozialwissenschaft (Rechtslehre u. a.), und darauf beruht der Unterschied der deduktiven und der induktiv-deduktiven Wissenschaften. Bei ersteren setzt an die Begriffe, welche durch Logisierung der anschaulichen Vorstellungen entstanden sind, eine reiche Begriffsbildung an, welche nur das bereits logisierte Material verwendet, bei letzteren hat man immer und immer wieder auf neue anschauliche Vorstellungen zurückzugreifen.

In psychologischer Hinsicht hat man den Übergang vom Punkte als kleinem Körper zum Punkte im strengen Sinne als einen Grenzprozeß geschildert, meines Erachtens mit Recht, man muß nur hervorheben, daß hier die asymptotische Funktion[1]) des Bewußtseins ins Spiel tritt, welche unter Verwendung eines Zeichens uns als vollzogen annehmen läßt, was tatsächlich nicht vollziehbar ist. Für den Begriff Punkt gibt schon Euklids Definition (οὐ μερος οὐθεν) das Ziel richtig an, mag man es auch heute deutlicher bezeichnen, etwa mit Höfler als „ausdehnungsloser Ort", natürlich im Ganzen eines Ordnungssystems von Örtern (Stellen).

Herr Wellstein u. a. haben diesen Grenzprozess ausführlich behandelt, wobei sie zum Teil dazu kommen, jene Idealisierung zu verwerfen[2]), wie ich glaube, mit Unrecht. Deshalb möchte ich darauf hinweisen, daß auch in dieser Hinsicht wieder die Stumpfheit unserer Sinne in Erinnerung zu bringen ist, welche den Prozeß erleichtert, man denke z. B. etwa an einen in den Lüften für das Auge langsam entschwindenden Ballon. Wenn Herr Wellstein in bezug auf die Verwendung des Lichtstrahles für die Bildung des Begriffes der Geraden bemerkt, daß der Lichtstrahl als Schwingungsgebilde dazu nicht geeignet sei, so ist doch wohl darauf hinzuweisen, daß von diesen Schwingungen nur der Gelehrte etwas weiß und daß gerade diese Schwingungen sicher zu dem gehören, was über die unmittelbare Beobachtung des unbefangenen Zuschauers hinaus in

1) Vgl. dazu Nr. 167c. Das Wort Funktion ist hier natürlich in psychologischer oder erkenntnistheoretischer Bedeutung zu nehmen, nicht im Sinne der Mathematiker.

2) Vgl. Nr. 165, II, S. 9 u. f., vgl. dazu auch den Nachtrag von Herrn Weber (erste Auflage).

die Erscheinung hinein gedacht wird und an dessen Stelle später vielleicht einmal etwas anderes hineingelegt wird[1]).

Bei der vollkommenen Logisierung, durch welche die Begriffe der Mathematik entstehen, hat sich nun eine Eigentümlichkeit gezeigt, die man hätte a priori bestimmen können, sie entspricht dem kulturellen Gange vom Dinge zu den Beziehungen.

Jeder, der einmal den Versuch gemacht hat, die Grundbegriffe eines wissenschaftlichen Gebietes zu erklären, hat dabei wohl erfahren, daß er schließlich in Zirkeldefinitionen gerät, falls er einen einzigen Grundbegriff definieren will. Für die Grundbegriffe der Rechtslehre gilt immer noch der Satz „omnis definitio in jure civili periculosa est"[2]), und auf den Gebieten der Volkswirtschaftslehre usw. steht es ebenso. Das ist natürlich, weil solche Grundbegriffe eine Art von Geflecht bilden und infolgedessen nur durch gegenseitige Beziehungen definiert werden können. Für das System der logischen Grundfunktionen haben Herr Cohen und Herr Natorp darauf hingewiesen. Ersterer scheint zwar wieder mit seinem Prinzipe des Ursprungs zu einem Grundgedanken zurückkehren zu wollen, während Natorp das letzte Prinzip, welches über der Identität und Verneinung, Einheit und Mehrheit usw. steht, so kennzeichnet:[3]) „Aber es ist eben die Einheit von diesem allen, die Einheit durch Korrelation. Diese ist in der Tat, als das Prinzip der Prinzipien in bestimmter Überordnung gegen die ganze Reihe der einzelnen, zueinander korrelativen Grundmomente des Logischen zu denken." So sagt auch Herr Simon[4]) in bezug auf die Frage: Was ist Mathematik?: „Die Frage gehört in die große Gruppe derer, die leichter gestellt als beantwortet sind; sie bilden wirklich eine Gruppe im gruppentheoretischen Sinne insofern, als gewöhnlich eine Antwort auf eine von ihnen immer wieder zu einer Frage der Gruppe führt, und schließlich die Gruppe in sich selbst transformiert wird."

Daß die Definitionen von Punkt, Gerade, Ebene, die Euklid vorausschickt, und nach ihm viele andere, keine Definitionen sind, mit denen sich arbeiten läßt, hat man schon geraume Zeit bemerkt. Sie sind lediglich Hinweise auf die erforderliche Logisierung des Anschaulichen.

Für die Geometrie gibt u. a. Hilberts Axiomatik ein Beziehungssystem für das Geflecht der Grundbegriffe, für die Arithmetik ist die Axiomatik noch nicht vollkommen erledigt, für die Mechanik (und Physik) beginnt man erst sich mit ihr zu beschäftigen.

Dabei ist es vielleicht gut, sich daran zu erinnern, daß in der geschichtlichen Entwicklung das Wort „Axiom" verschiedene Bedeutungen angenommen hat.[5]) Es bedeuten Axiome

1. unmittelbar Anschaulich-Gewisses (Euklid u. a.) im Gegensatz zu Definitionen und Postulaten (Existentialsätzen),

1) Dieses Hineinlegen ist sehr gut geschildert in Nr. 19 S. 125 u. f.

2) Vgl. Nr. 36b, I, S. 171. 3) Vgl. Nr. 105e S. 26.

4) Vgl. Nr. 137 f S. 3. 5) Vgl. auch Nr. 36 c.

2. empirisch Gegebenes (v. Helmholtz u. a.),

3. notwendige Voraussetzungen, ohne die man nicht arbeiten kann, unter Verzicht auf ihre erkenntnistheoretische Wertung,

4. willkürliche Vereinbarungen der Gelehrten (Poincaré u. a.).

Da die Grundbegriffe der Mathematik durch Logisierung gewöhnlicher Vorstellungen und deren Beziehungen entstehen und da dieser Logisierung ein gewisser Spielraum gegeben ist (vgl. z. B. die verschiedenen Arten der Geometrie), so ist ein Geflecht solcher Grundbegriffe in gewisser Einschränkung in jeder dieser vier Bedeutungen axiomatisch.

Das System der Beziehungen für das Geflecht der Grundbegriffe, welches in einer solchen Axiomatik vorliegt, sollte drei Bedingungen genügen. Die einzelnen Axiome sollten

1. ohne Widerspruch zusammen bestehen,[1])

2. voneinander unabhängig sein,[1])

3. ein vollständiges Ganzes bilden, d. h. für den Aufbau eines Gebietes hinreichen.[1])

Die Urteile über die bisher erschienenen axiomatischen Arbeiten lauten noch recht verschieden. So führte Herr Veronese auf dem Kongresse in Mailand (1911) aus[2]), daß die Unabhängigkeit der Axiome bisher noch für kein System nachgewiesen sei, und entsprechende Urteile sind auch in bezug auf die Frage der Widerspruchslosigkeit gefällt. Bei seiner Untersuchung der Grundlagen der Geometrie geht Herr Hilbert bekanntlich auf die Arithmetik zurück, so daß die Vollkommenheit der Axiomatik für die Geometrie hier schließlich von der Vollkommenheit der Axiomatik für die Arithmetik abhängt. Bei dem Versuche, die Axiomatik für die Arithmetik einwandsfrei zu gestalten, sah sich Herr Hilbert veranlaßt, eine gemeinsame Grundlegung von Logik und Arithmetik zu fordern, wie bereits früher erwähnt wurde, insofern ihm die logische Begründung der Arithmetik allein unmöglich erschien, wie auch seine kritischen Einwände gegen Kronecker, Christoffel u. a., G. Frege, R. Dedekind und G. Cantor bestätigen. Diese gemeinsame Grundlegung der Logik und Arithmetik ist indessen bisher weder von Hilbert noch von anderen gegeben worden und sie wird sich ohne Verwendung logisierter Anschauung vermutlich ebensowenig geben lassen, wie die alleinige Grundlegung der Arithmetik, deren Kern ja schließlich immer die Begründung der Lehre von den ganzen Zahlen ist. Für diese selbst ist bisher immer bewußt oder unbewußt in irgend einer Form auf die Anschauung konkreter Objekte zurückgegriffen worden, die außerdem erforderlichen Logisierungen sollen später etwas ausführlicher betrachtet werden.[3])

Ist das System der Beziehungen für die Grundlage einer bestimmten

1) Vgl. Nr. 67 S. 25 u. f. und außerdem noch besonders Nr. 125a.

2) Vgl. das Referat von Herrn Lietzmann in den Berichten und Mitteilungen der Deutschen IMUK, Nr. VII, S. 102.

3) Vgl. auch K. Boehm „Axiome der Arithmetik“ in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie 1911.

Wissenschaft festgestellt, so unterliegt jedes Urteil dieser Wissenschaft der formal-logischen Prüfung im Hinblick auf jenes System. Wie das Urteil bei der Untersuchung und Darstellung entstanden ist, bleibt für diese Prüfung völlig gleichgültig.

Diese „indirekte“ Definition durch Beziehungen steht der „direkten“ Definition der Dinge gegenüber, sie hat in den Bestimmungsgleichungen der Algebra und in den Konstruktionsaufgaben der Geometrie eine Art von Analogon, ebenso im gemeinen Leben in gewissen Klassen von Rätseln.

Daß ein bestimmtes Beziehungssystem, bei dem das Individuelle (dem Dinge entsprechende) der einzelnen Begriffe ganz verloren zu gehen scheint, auch auf ein anderes Geflecht von Grundbegriffen passen kann, als das ist, für welche es aufgestellt wurde, ist a priori begreiflich. Daraus folgt aber nicht, daß für die Bildung des Systems alles Individuelle auch unnütz gewesen ist, wie man wohl behauptet hat. Wir verdanken dazu Herrn Poincaré ein nettes Gleichnis[1]): „Allgemein bekannt sind die feinen Gefüge von Kieselnadeln, die das Skelett gewisser Schwämme bilden. Wenn die organische Materie vergangen ist, bleibt nichts wie ein zerbrechliches und zierliches Spitzengewebe. Es ist in Wirklichkeit nichts als Kieselsäure; aber was interessant ist, das ist die Form, die diese Kieselsäure angenommen hat, und wir können sie nicht verstehen, wenn wir nicht den lebenden Schwamm kennen, der ja gerade diese Form ausgeprägt hat. So ist es auch bei den alten intuitiven Begriffen unserer Väter, die, selbst wenn wir sie aufgegeben haben,[2]) ihre Form noch dem logischen Gerüst aufdrücken, das wir an ihre Stelle gesetzt haben.“

Das ist sicher richtig, nur werden wir die „alten intuitiven Begriffe unserer Väter“ niemals entbehren können, denn empirische Anschauung und logisierte Anschauung werden, durch das Zeichen verbunden, stets zusammenwirken müssen, wenn die Wissenschaft nicht zum leeren Formalismus werden soll. Trotz des Prinzipes der Dualität wird der Satz von Pascal nicht zum Satze von Brianchon, und die steten von der Anschauung des Individuellen getragenen Bemühungen, aus denen auch die Axiomatik erwachsen ist, werden sich immer von neuem bewähren.

Jene Übertragbarkeit von Beziehungssystemen, für welche Herr Wellstein auch für die Schule brauchbare Beispiele gibt, ist im Grunde durchaus nichts neues. Herr Wellstein erinnert[3]) selbst an die Bilder der Mechanik und Statistik, an Christoffels Nachweis der Übertragbarkeit der Differentialgleichungen der Wärmeleitungstheorie auf die Theorie des Welthandels usw. Trotz dieser Übertragbarkeit wird aber die Wärmeleitung nicht zum Welthandel, in beiden Fällen kehrt man schließlich doch zum Individuellen zurück.

Als Schulbeispiel für diese Übertragbarkeit benutze ich selbst seit Jahren die Gleichung $f''(t) = -k^2 \cdot f(t)$ und deren Integral

$$f(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt).$$

1) Vgl. Nr. 113b S. 21. 2) Vgl. hier die Bemerkung auf S. 59 Anm. 1.
3) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage), II, S. 114.

Sie wird ursprünglich abgeleitet für die Schwingungstheorie durch Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung auf zwei einander senkrecht schneidende Achsen durch das Zentrum. Später wird gezeigt, daß das Problem der Knickung der Form nach auf dieselbe Gleichung führt.

Ist die Mathematik nun eine Wissenschaft a priori?

Mit a priori sollte ursprünglich der Eigenbesitz des Geistes bezeichnet werden gegenüber allem von außen an ihn Herantretenden, sei es nun durch Erfahrung oder durch Eingebung bestimmt. Auf dem Standpunkt der Beziehungen (vgl. S. 44 u. f.) ist dieser Unterschied fließend.

Läßt man dem Worte a priori die Bedeutung erfahrungsfrei, so gilt, wie Herr Höfler[1]) gelegentlich sagt: „Es gibt apriorische Urteile, wiewohl es keine apriorische Vorstellungen gibt". Es gibt in diesem Sinne keine andere Apriorität, falls Notwendigkeit und damit Allgemeingültigkeit ihre Kennzeichen sein sollen, als die Apriorität der formalen Logik, und da liegt eben alles Apriorische in den Urteilen, nicht in den Begriffen, die niemals völlig erfahrungsfrei sind. Darum mußte ja auch die Axiomatik die Dingbegriffe durch Beziehungsbegriffe ersetzen! Unter Anerkennung eines axiomatischen Systems als Ausgangspunktes ist die Mathematik sicher eine Wissenschaft a priori.[2])

Will man mit a priori die Bedingungen der wissenschaftlichen Erfahrung bezeichnen, so gehört die Mathematik auch sicher zu diesen Bedingungen, denn sie ist ja, abgesehen von ihrer Selbständigkeit, ein notwendiges Mittel der Naturerkenntnis und Naturbeherrschung. Stadler hat sie gelegentlich als formale Naturbeschreibung bezeichnet.[3])

In Beziehung auf Zeit und Raum sagt Herr Natorp dazu gelegentlich[4]): „Sie sind ... nicht selbst existent, aber Bedingung des Existierens; und wieder deshalb nicht Erfahrungen, aber gesetzgebend für Erfahrung, für alles, was im Erfahrungssinne existent heißen kann. Ihre Herleitung aus fertigen Erfahrungen (im Sinne gegebener Existenzen) wäre derselbe Zirkel, wie wenn man die Gesetze der Zahl von Hausnummern ablernen wollte. Das ist in der Tat in gewissem Maße möglich, aber nur, nachdem man vorher die Häuser numeriert hat. So kann man gewiß Zeit und Raum von den zeit-räumlichen Gegenständen abstrahieren, aber nur, nachdem diese zuvor als zeit-räumliche im Denkprozeß der Erfahrung konstituiert worden sind."

Demgegenüber beschränken wir uns bescheiden auf das Studium der Hausnummern, oder, wie man es wohl auch mit Klopstock ausgedrückt hat, auf die Versuche, den großen Gedanken der Schöpfung noch einmal zu denken, wobei man sich aber zunächst in die Schöpfung mit Hingebung versenken muß.

1) Vgl. Nr. 69b S. 457.

2) Vgl. dazu auch das Referat von Lietzmann in den Berichten und Mitteilungen der Deutschen IMUK, Nr. VII, S. 100 u. f. „Die Strenge im mathematischen Unterricht der höheren Schulen".

3) Vgl. bei Simon Nr. 137f S. 4.

4) Vgl. Nr. 105e S. 280.

Daß die Gegenstände eines Gebiets, auf welches Mathematik angewandt werden soll, den axiomatischen Grundlagen der Mathematik entsprechen müssen, soweit diese zu Folgerungen benutzt werden sollen, ist selbstverständlich. Bezeichnet man die Polygon-Bildung der Vektoren als geometrische Addition, so ist zu zeigen, daß auch für Vektoren gilt

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

und

$$a+b=b+a.$$

Auf derartige Forderungen hat wohl zunächst von Helmholtz ausführlicher hingewiesen, jetzt gibt auch Herr Weber in der Weber-Wellsteinschen Encyklopädie die erforderlichen Anweisungen. Herr Hölder legt die Beziehungen der Zahlen zur Größenlehre (unter Beschränkung auf das positive Reelle) folgendermaßen axiomatisch fest[1]):

1. Je zwei Größen a, b stehen in einer der Beziehungen $a \gtreqless b$.
2. Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.
3. Die Summe $a+b$ ist bei gegebener Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt.
4. $a+b$ ist sowohl $> a$ als $> b$.
5. Ist $a<b$, so gibt es Größen x und y, welche der Bedingung $a+x=b$ und $y+a=b$ genügen.
6. Es ist $a+(b+c)=(a+b)+c$.
7. Wenn alle Größen in zwei Klassen so eingeteilt sind, daß jede Größe einer und nur eine Klasse zugewiesen ist, daß jede Klasse Größen enthält, und jede Größe der ersten Klasse kleiner ist als jede der zweiten, so existiert eine Größe ξ derart, daß jedes $\xi'<\xi$ zur ersten, und jedes $\xi''>\xi$ zur zweiten Klasse gehört.[2])

Aus diesen Axiomen läßt sich herleiten:

1. Das Axiom des Eudoxus (oft fälschlich nach Archimedes benannt).
2. $a+b=b+a$.
3. Zu je zwei Größen, die in einer bestimmten Ordnung gegeben werden, gehört eine bestimmte Zahl als Maß ihres Verhältnisses.
4. Es gibt eine Größe ξ, welche in bezug auf eine beliebig gegebene Einheit eine beliebige gegebene Zahl zur Maßzahl hat.

Sieht man die Mathematik als eine Bedingung der wissenschaftlich gestalteten Erfahrung an, so tritt schließlich noch ein besonderes Problem von großer Wichtigkeit auf. Wir erwähnten schon, daß für Kant die reine Mathematik „in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung" anwendbar ist (Vgl. S. 37). Dies kann für uns nur bedeuten, daß die Sicherheit der Mathematik auch im empirischen Gebrauche erhalten bleibt, nicht aber, daß ihr reiner und ihr empirischer Gebrauch völlig übereinstimmen.

---

1) Vgl. „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß" in den Berichten der Kgl. Sächs. Akademie der Wissenschaften, 1901.

2) Vgl. den Dedekindschen Schnitt.

Daß die Invarianten, welche wir in das Geschehen hineindenken, dieses nur angenähert darstellen und darum wieder und wieder verbessert werden müssen, ist bereits betont worden. Man denke etwa an die Umgestaltung der Formel für das Boyle-Mariottesche Gesetz infolge der ausgedehnten Versuche von Régnault! Außerdem wurde auch wiederholt auf die Stumpfheit unserer Sinne (Theorie der Schwelle) hingewiesen, der zufolge alle empirische Anschauung ihrer Logisierung gegenüber ungenau erscheint, eine Tatsache, die für die Bildung der wissenschaftlichen Erfahrung zunächst durchaus förderlich ist. Diesen Annäherungen und Ungenauigkeiten gegenüber tritt nun die gewichtige Frage auf, mit welchem Rechte wir überhaupt die auf der logisierten Anschauung axiomatisch aufgebaute Mathematik im Gebiete empirischer Anschauung verwenden. Wie kann der Mathematiker mit gutem Gewissen auch Physiker und Techniker sein? Dazu muß die bisher betrachtete Mathematik, der „Theorie der Schwelle" entsprechend, durch eine „Theorie des Spielraums" ergänzt worden. Bezeichnet ϵ für zwei Größen U und I desselben Gebietes eine bestimmte Genauigkeitsgrenze, so tritt z. B. bei Anwendungen gelegentlich an die Stelle der Gleichung $U-I=0$ die Ungleichung $U-I<\epsilon$, und es handelt sich nun darum, von Fall zu Fall zu zeigen, daß die Ersetzung von $U-I=0$ durch $U-I<\epsilon$ nur zu solchen Fehlern führt, die wieder unter einer bestimmten Genauigkeitsgrenze liegen. Nach dem Vorgange der Herren Burkhardt[1]) und Heun[2]) hat Herr F. Klein die Worte „Präzisions-Mathematik" und „Approximations-Mathematik" gewählt, um die strenge Mathematik im reinen und empirischen Gebrauche voneinander zu unterscheiden. Es tritt also der Mathematik der absoluten Genauigkeit eine, durch die „Theorie des Spielraums" ergänzte Mathematik zur Seite, welche dem empirischen Gebrauch dient und für ihn die unvermeidlichen Fehler abschätzt. Man begnügt sich also bei einer gründlichen Behandlung nicht damit, instinktiv darauf zu vertrauen, daß die Fehler unbedeutend ausfallen werden, sondern bestimmt genau ihren Spielraum.

Für alles Weitere können wir auf die schöne und reichhaltige Vorlesung von Herrn F. Klein „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien", verweisen (Vgl. Nr. 78i, und dazu ferner auch Nr. 78m). Es handelt sich in ihr natürlich nicht um eine Revision der Prinzipien in bezug auf den Aufbau der Infinitesemal-Rechnung, sondern in bezug auf deren Verwendung, im besondern innerhalb der Geometrie. Zur Erläuterung greifen wir ein Beispiel heraus. Neben ältern Philosophen hat namentlich J. St. Mill immer wieder darauf hingewiesen, daß Linien ohne Breite nicht anschaulich vorstellbar sind. Innerhalb der Mathematik hat diese Tatsache in dem Begriffe des Kleinschen Funktionsstreifens ihre Ausgestaltung erhalten. Die Approximations-Mathematik frägt nun, mit welchem Recht und in wel-

1) Vgl. Jahres-Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 11.
2) Vgl. ebenda Bd. 9.

cher Ausdehnung wir Eigenschaften von Idealkurven und Streifen aufeinander übertragen — jede Linie auf dem Reißbrette ist natürlich ein Streifen, und zwar mit schwimmenden, verwaschenen Grenzen, wie die Betrachtung im Mikroskope zeigt.

Daß jede Messung und jede zeichnerische Darstellung oder Modellierung und überhaupt alles, was im Gebiete empirischer Anschauung liegt, bei mathematischer Behandlung zu Fragen der Approximations-Mathematik führt, ist selbstverständlich.

Aber auch für Zahlen, die nicht durch Messung gewonnen werden, gilt unter Umständen Entsprechendes, z. B. bei der Interpolation von Tafeln. Die übliche lineare Einschaltung für Logarithmen setzt bei drei Zahlen a, $a + b_1$, $a + b_2$ voraus, daß in einer gewissen Annäherung gilt:

$$\frac{\log(a+b_1)-\log a}{\log(a+b_2)-\log a}=\frac{(a+b_1)-a}{(a+b_2)-a}$$

Dabei ist z. B. für die Bestimmung von $\log(a+b_1)$ zunächst zu beachten, daß $\log a$ und $\log(a+b_2)$ in beschränkter Genauigkeit, vielleicht auf fünf Dezimalen, gegeben sind, und ferner, daß die Entwicklung der linken Seite der Gleichung der rechten gegenüber eine bestimmte Abweichung darstellt.[1]) Daraus sind von Fall zu Fall die erforderlichen Schlüsse zu ziehen.

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, daß auch dieser Teil der Approximations-Mathematik zum Teil durch die Unvollkommenheit der Anschauung, und zwar der sogenannten inneren Anschauung bedingt ist. Könnten wir die Irrationalzahl anschaulich erfassen, so bedürften wir hier keiner Approximation.

Herr Klein hat die Approximations-Mathematik gelegentlich als „Lehre von den durch strenges mathematisches Denken folgenden Ungleichungen" definiert, um hervorzuheben, daß auch sie die Sicherheit der Präzisions-Mathematik hat, sofern eben eine genaue Abschätzung des Spielraums erfolgt. Ein typischer Satz der so verstandenen Approximations-Mathematik ist z. B. der Taylorsche Satz mit endlicher Gliederzahl und Restglied.

Da man aber bei Anwendungen sehr oft die Fehlergrenzen tatsächlich nicht beherrscht, so muß man in solchen Fällen das sichere Gebiet der „Approximations-Mathematik" verlassen, um sich dafür in das unsichere Gebiet einer „approximativen Mathematik" zu begeben, in dem eine instinktive Abschätzung der Fehler das Surrogat für deren genaue Bestimmung ist.

In bezug auf das Methodische der Mathematik, nicht aber in bezug auf ihre Grundlegung, findet man in Wundts Logik, auf die auch Herr Voß[2]) in diesem Sinne hinweist, wohl alles sonst noch Erforderliche, falls man es kritisch aufnimmt.

Außerdem mag noch auf die drei bereits mehrfach erwähnten Didaktiken von Reidt-Schotten, Simon und Höfler verwiesen werden.

---

1) Vgl. Nr. 167 f. 2) Vgl. Nr. 161 a S. 84.

In bezug auf die in ihrer Weise recht vollkommenen propädeutischen Methoden der Volksschule mit ihrer naiven Anschaulichkeit findet man in den entsprechenden Abhandlungen von Herrn Lietzmann gute Auskunft.[1])

Dritter Abschnitt.

Folgerungen für die Schule.

1. Allgemeine Gesichtspunkte.

Wir haben uns bemüht, unsere grundlegenden Betrachtungen überall durch das Bedürfnis der Schule zu begrenzen, und es erhebt sich nun die Frage, was von ihnen in der Schule selbst verwendet werden soll. Unsere Antwort darauf lautet: Alles wesentliche, aber natürlich in geeigneter Form.

Gelegentliche Bemerkungen und kleinere Ausführungen haben von Anfang an auf die „Philosophie im Unterricht" vorzubereiten, wofür dann in der Prima weiter zu wirken ist.

Bewußt und unbewußt ist in dieser Hinsicht schon reichlich in unsern Schulen gearbeitet worden, denn alles, was dem Ideale der Einheit des Wissens dient, zielt eben auf Philosophie.

Dabei handelt es sich lediglich darum, Anregungen zu geben und dem philosophischen Bedürfnisse der Schüler in angemessener Weise entgegenzukommen, bzw. dieses zu wecken und zu leiten, was freilich schließlich immer Sache der Persönlichkeit ist. Es soll Samen ausgestreut werden, von dem hoffentlich hier und da ein Korn aufgeht!

In diesem Sinne[2]) mag man auch das folgende aufnehmen, das wir der Sachlage entsprechend an die Lehrpläne der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte anknüpfen, denn diese sollen und wollen ja der weiteren Reform dienen. Diese Lehrpläne bezeichnen als abschließendes Ziel des mathematischen Schulunterrichts:

1. einen wissenschaftlichen Überblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffes,

2. eine gewisse Fähigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwendung für die Durchführung von Einzelaufgaben,

3. endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

---

1) Vgl. Nr. 1, Bd. V, Heft 1 und 2 und dazu auch Nr. 151 a.

2) Prof. von Brockdorff (Kiel) sagt in einer Besprechung meines letzten Kantbuches: „Bei W. wird auf Ausbildung in den Grundbegriffen der Geschichte der Philosophie Wert gelegt. Er entläßt keine Abiturienten, die nicht von Descartes, Locke, Leibniz usw. bei ihm gehört hätten. So haben die jungen Leute aufs neue Gelegenheit erhalten, was sie auf der Schule gelernt haben, zu erweitern und zu klären. An Apperzeptionshilfen fehlt es ihnen nicht". Das trifft in der Tat die Sache, was meine Absichten anlangt.

Während Nr. 2 dem selbstverständlich stets in erste Linie zu stellenden „Können“ gilt, fordert Nr. 1 die Darstellung der Schulmathematik als System und Nr. 3 ihre Bewertung, wobei man unterscheiden kann

a) den selbständigen Wert der Mathematik als Wissenschaft,

b) ihren Wert als Mittel der Naturerkenntnis (Physik, Chemie, Statistik usw.).

c) ihren Wert als Mittel für die Naturbeherrschung (Technik, Versicherungswesen usw.).

Zu Nr. 1 und 3 ist außerdem die für Oberprima gemachte Bemerkung hervorzuheben: „Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte“.

Was den selbständigen Wert der Mathematik anbelangt, so wird für die Schule immer Schillers Epigramm „Archimedes und der Schüler“ maßgebend sein: Die Mathematik war eine göttliche Kunst, ehe sie die Mauern der Stadt vor der Sambuca beschützte, und so wird es immer bleiben. Zur Erläuterung ist dazu u. a. vielleicht heranzuziehen die Rede[1]) von Herrn Pringsheim „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“, wo es z. B. heißt: „Wir sehen in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Sympton einer dem menschlichen Geiste zukommenden höheren Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl und Raumgebilde in ihrem weitesten Umfange zu begründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher als an sich wertvoll.“ Diese Auffassung bestätigt auch Herr Voß[2]), der dabei u. a. auf Jacobi hinweist. Gegenüber Fourier, welcher die Nützlichkeit der Mathematik in den Vordergrund gestellt hatte, betont dieser, „que le but unique de la science c'est l'honneur de l'esprit humain“. Mit Recht, aber zu dieser Ehre gehört auch die Naturerkenntnis und die Naturbeherrschung, und zwar in dem Sinne, daß wir in den Riesenwerken unserer modernen Technik gewissermaßen überall den erkennenden und beherrschenden Menschengeist leibhaftig vor uns sehen, in seiner genialen Intuition und in seiner strengen wissenschaftlichen Arbeit. Demgemäß sind auch auf der Schule die Anwendungen zu charakterisieren, und ich möchte in deren Betonung nicht mit Herrn Lietzmann[3]) nur ein „utilitaristisches“ Prinzip sehen. Daß übrigens oft mehr Geist dazu gehört, das Empirische zu bewältigen, als das Reine, was eigentlich a priori klar ist, kann auch den Schülern an Beispielen deutlich gezeigt werden.

Dabei ist zur Erkenntnis zu bringen, daß die Reihenfolge Arithmetik (Zahl), Geometrie (Raum), Phoronomie (Zeit) und Dynamik (Masse) eine fortschreitende Eroberung der Wirklichkeit bedeutet, deren Ziel es ist,

---

1) Vgl. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13 S. 357.
2) Vgl. Nr. 161a S. 93.
3) Vgl. Nr. 146 S. 248.

eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen.

Man denke sich alles Mathematische fort aus der menschlichen Kultur, namentlich auch schon die Zahlen, und frage: Was bleibt dann? Gewiß noch vieles, aber das dem Kosmos zugewandte Ideal, von dem Herr Seith (vgl. S. 6) spricht, wäre sicher dahin.

Daß die Grundbegriffe der Mathematik durch Logisierung entstehen und daß die Systeme ihrer Beziehungen auf den verschiedenen Gebieten die feste Grundlage bilden für weitere deduktive Arbeit, die durch Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit gekennzeichnet ist, muß zur Einsicht gebracht werden, aber auch, daß die Anwendbarkeit der Mathematik damit zu einem besonderen Probleme wird. Wie hier durch Beobachtung, Versuch usw. in physischer und in psychischer Hinsicht auf induktiv-deduktivem Wege der Welt der Erscheinungen von Fall zu Fall die Prämissen abgerungen werden, welche die Anknüpfung mathematischer Arbeit bedingen, nicht bloß auf dem Gebiete der Physik, sondern auch auf dem der Sozialwissenschaften (Wahrscheinlichkeit usw.), ist auch vom Mathematiker wenigstens im allgemeinen zu charakterisieren, ebenso, wie solchen Prämissen die Aufstellung zweckmäßiger Axiome anzupassen ist behufs mathematischer Behandlung eines bestimmten Gebietes von Erscheinungen.

Dem Schüler muß schließlich zum Bewußtsein kommen, daß die Schulmathematik ein wissenschaftliches, auf Axiomen ruhendes System darstellt, und daß er ein solches nur in der Mathematik und in den auf ihr beruhenden Anwendungsgebieten kennen lernen kann. Dabei wird aber auch darauf hinzuweisen sein, daß die Wissenschaft selbst viel weiter reicht, als die Mathematik, daß sich aber andere Disziplinen auf der Schule nicht in strenger Wissenschaftlichkeit behandeln lassen und daß ihre Werte zum Teil auf anderen Gebieten liegen. Erst die Einheit von allem bringt das wahre Ideal.

Den Gegenstand der Mathematik bilden stets Mannigfaltigkeiten, und die hauptsächlichen Arbeitsmittel der Mathematik sind Reihung, Paarung und Klassenbildung. Während der Übergang von der unstetigen zur stetigen Mannigfaltigkeit in der Arithmetik durch die Theorie des Irrationalen bewirkt werden muß, gibt die logisierte Anschauung der Bewegung uns ein bestimmtes inneres Bild von dieser Stetigkeit, und durch die Verschmelzung dieser beiden Stetigkeitsarten wird uns erst das Geschehen, das durch die Zahl im Maße gefesselt wird, verständlich.

Die Übertragungs- oder Verbindungsprinzipien für die einzelnen Zweige der Mathematik, so die graphische Darstellung der gemeinen Komplexzahlen in der Ebene und die analytische Geometrie von Descartes zeigen, daß es sich im Grunde überall um denselben Gegenstand handelt, nämlich um Mannigfaltigkeiten, deren Gebilde schließlich nicht bloß in „idealfunktionalen", sondern auch in „realfunktionalen" (Dynamik) Zusammenhang gebracht werden.

Dabei spielt das Infinitesimal-Prinzip eine hervorragende Rolle, weil die gesetzlichen Beziehungen der räumlich-zeitlichen Welt zunächst oft nur für „Elemente“ ausgesprochen werden können, so daß erst aus den Elementargesetzen die Integralgesetze für das „Gegebene“ erwachsen, und dazu ist Grenzbegriff und Grenzmethode erforderlich.

Auf alles dieses wird man zusammenfassend in der Prima von Fall zu Fall hinweisen können, aber natürlich nur, wenn Beispiele vorgearbeitet haben oder neu dazu herangezogen werden. Neben anderen halte ich dazu auch einfache Beispiele aus der technischen Mechanik für sehr geeignet.

Hat man etwa festgestellt, daß die Schüler in der Nachbarschaft und auf Reisen beobachtet haben, daß bestimmte Konstruktionen (Parabelträger) bei Eisenbahnbrücken immer wiederkehren, so wird man zunächst die Vorstellung des Parabelträgers durch Zeichnung usw. mit wenigen Strichen klären. Daran knüpft sich die Bemerkung, daß die Parabel die Seilkurve oder Stützlinie für gleichmäßige Belastung der Horizontalen (γ) ist. Die weitere Behandlung gibt eine einfache Aufgabe (vgl. Fig. 1). Die drei Gleichgewichtsbedingungen liefern für das Seilstück zwischen O und P, falls 0 als Drehpunkt gewählt wird:

1) $$H_1 = H_2,$$

2) $$V = x\gamma,$$

3) $$+H_1 y - Vx + (x\gamma)\frac{x}{2} = 0.$$

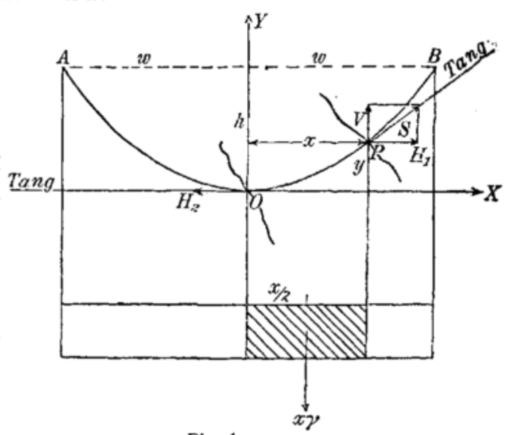

Fig. 1.

Gleichung 3) liefert in Verbindung mit Gleichung 1) und Gleichung 2) ohne weiteres die Parabel

$$x^2 = \frac{2H}{\gamma} \cdot y.$$

Für $x = w$ und $y = h$ ergibt sich noch

$$\frac{2H}{\gamma} = \frac{w^2}{h},$$

so daß die „mechanischen“ Größen hier „geometrisch“ ersetzbar sind. Eine Ausführung in Zahlen, am besten in Anlehnung an eine ausgeführte Konstruktion, kann die Übung abschließen.

An solchen Beispielen läßt sich die Logisierung der Vorstellungen der räumlich-zeitlichen Welt, der Unterschied der natürlichen Geometrie und der strengen Geometrie usw. klar machen, ebenso die Stufenfolge „reine Mathematik, Naturerkenntnis, Naturbeherrschung“.

Als zweites Beispiel greife ich die Behandlung des Erddrucks heraus. Hier hat man Gelegenheit, darauf hinzuweisen, welche Überlegungen notwendig waren, um das so vielgestaltige und veränderliche Ding, das wir Sand oder Erde nennen, überhaupt dem Kalkül zu unterwerfen. Man betrachtet (vgl. Fig. 2 u. 3) alle möglichen ebenen Bruchflächen durch

B, um die gefährliche (ω) zu bestimmen, und konstruiert tatsächlich für diese, dem Prisma *ABC* vom größten Drucke entsprechend. Bei horizontal abgeglichener Erde (vgl. Fig. 2) ist die Maximalbestimmung für die Schule etwas schwierig, bei natürlicher Böschung (vgl. Fig. 3) aber sogar ohne jede Differentiation möglich. Der künstliche Eingriff, der in der horizontalen Abgleichung liegt, rächt sich durch die Schwierigkeit des Kalküls.

Die Behandlung bestimmter optischer Erscheinungen gemäß dem Prinzipe der schnellsten Ankunft gibt Veranlassung zu zwei einfachen Aufgaben aus dem Gebiete der Maxima und Minima. Man findet so Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz. Dies gibt Gelegenheit, die teleologische Naturauffassung des 18. Jahrhunderts zu berühren und sie zu werten.

Die arithmetische Darstellung der Zahl π mit Hilfe der Reihe von Leibniz zeigt eine bestimmte, sehr begründete Arithmetisierung des ursprünglich geometrisch Erfaßten, wobei man auch auf die alle Versuche einer Kreisquadratur abschließende Arbeit von Lindemann (1882) hinweisen kann. Ebenso ist die Tatsache hervorzuheben, daß Sinus und Kosinus in der Darstellung durch Reihen in die Arithmetik eintreten. Die Behandlung der Kreisteilung, bei der man sich in Braunschweig, der Geburtsstadt von Gauß, wenigstens sicher das Siebzehneck[1]) nicht entgehen lassen wird, gibt weiter Gelegenheit zu einer Fülle von Bemerkungen im Sinne unserer Darlegungen.

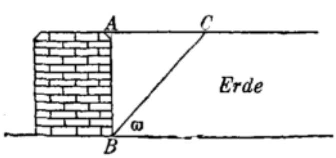

Fig. 2.

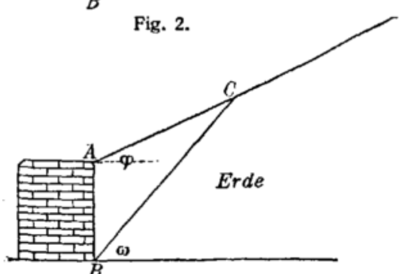

Fig. 3.

Sind dem Schüler die Beziehungen zwischen Stammfunktion $f(x)$ und Ableitung $f'(x)$ an einfachen Beispielen geläufig geworden, so gibt die Zusammenfassung der drei ursprünglich experimentell abgeleiteten Gleichungen des freien Falles oder des vertikalen Wurfes Gelegenheit, auf den Unterschied der induktiv-deduktiven und der rein deduktiven Methode hinzuweisen. Dabei wird man auch die geistige Arbeit Galileis würdigen können. Er legte dem Experimente für die Herleitung der Gleichung $s = f(t)$ ursprünglich die „Idee" (vgl. S. 58) $v = f'(t) = k \cdot s$ statt der sich als richtig erweisenden $v = f'(t) = k \cdot t$ zu Grunde. Auch er hatte ebensowenig wie die griechischen Mathematiker und Physiker brauchbare Apparate. Er benutzte aber die Hebelwage, welche sich schon infolge des

1) Eine direkte Zerlegung der Gleichung des Siebzehnecks in eine Gleichung ersten Grades und in ein System von quadratischen Gleichungen findet man in Nr. 167 f S. 92.

Geldverkehrs der Kreuzzüge außerordentlich verfeinert hatte, zum Messen der Zeit, indem er den Zeiten entsprechende Flüssigkeitsmengen bei gleichförmigem Ausflusse mit der Wage feststellte. So ergibt sich sogleich ein kleines Kulturbild. Nannte doch Galilei seine wichtigste Streitschrift auch „Il saggiatore“ d. h. die Goldwage![1])

Hat man in der analytischen Geometrie als Beispiele für geometrische Orte, den vier Spezies entsprechend, für zwei feste Punkte P_1 und P_2 und für einen beweglichen Punkt P die Aufgaben aufgestellt

$$P_1P + PP_2 = 2a \text{ (Ellipse)}$$

$$P_1P - PP_2 = 2a \text{ (Hyperbel)}$$

$$P_1P \cdot PP_2 = m^2 \text{ (Cassinische Kurven mit Lemniskate)}$$

$$P_1P : PP_2 = \epsilon \text{ (Kreis des Apollonius)},$$

so geben die auftretenden Kurven Gelegenheit zu vielseitigen Bemerkungen. U. a. kann daran erinnert werden, daß Cassini in Paris gewissermaßen eine Professur für die Erforschung des Jupiter-Systems erhielt (Olaf Römer wird dort sein Assistent). Dieses System war bekanntlich damals sozusagen das Modell, an dem die Weltanschauung des Kopernikus veranschaulicht wurde, im Gegensatze zu dem Theorem des Aristoteles „ein Zentrum von Bewegungen kann nicht selbst in Bewegung sein“. Dieser Satz gab eine falsche Invariante.

Natürlich wird sich kein Mathematiker den methodischen Zusammenhang zwischen den Gesetzen Keplers und der abschließenden Formel Newtons entgehen lassen.

In didaktischer Hinsicht möchte ich noch bemerken, daß ein Wechsel der Aufgaben von Jahr zu Jahr ratsam ist, daß aber doch in allgemeinbildender Hinsicht stets gewisse Standard-Aufgaben wiederkehren müssen, so z. B. auch die drei berühmten Probleme des Altertums.[2])

2. Die Philosophie im Geschichtlichen der Mathematikstunde.[3])

Wer in der Mathematik das geschichtliche Moment nicht vernachlässigt, wird auch darauf aufmerksam machen können, daß die großen Philosophen meist auch der Mathematik ein wirkliches Verständnis entgegen gebracht haben, ja zum Teil sogar zu ihren Großen gehören. Die Geschichte der Philosophie hat in den letzten Jahrzehnten in gerechter

---

1) Vgl. hierzu das eben erscheinende Bändchen 6 von Nr. 95, H. E. Timerding „Die Fallgesetze“.

2) Vgl. hierzu F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895, und außerdem F. Rudios Schrift: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung“, Leipzig 1892. Außerdem noch besonders Nr. 36 d und auch Nr. 167 f.

3) Vgl. für Weiteres u. a. in diesen IMUK-Abhandlungen (Bd. III Heft 6) die Arbeit von Herrn M. Gebhardt.

Würdigung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschung Probleme und Persönlichkeiten aufgenommen, die früher in ihren Darstellungen nicht vorhanden waren. So dürfte jetzt kaum noch irgendwo Galilei fehlen oder Newton, aber auch Descartes wird nicht mehr bloß nach seinem Cogito und nach seiner Metaphysik gewürdigt, sondern auch als Begründer einer freilich mehr und mehr zu berichtigenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Weltanschauung. In diesem Sinne sagt Herr A. Riehl[1]): „Die Wissenschaft und Philosophie der Gegenwart ist nur zu geringerem Teile in den Arbeiten der Fachphilosophen enthalten, in ihren Schriften niedergelegt. Wir haben sie vornehmlich auch in den allgemein-wissenschaftlichen Anschauungen der großen Naturforscher unserer Zeit zu suchen: Diese, die wahren Nachfolger der Naturphilosophen, sind unsere Philosophen. Und wer der Gegenwart eine maßgebende Bedeutung in der Geschichte der Philosophie abspricht, hat die Bäume gesehen, aber nicht den Wald, er hat nicht gesehen, wo gegenwärtig die Philosophie lebt. Sie lebt in den Werken von Robert Mayer, von Helmholtz, von Heinrich Hertz."

Der Glaube an die Wissenschaft selbst hat sich an der Tatsache der mathematischen Wissenschaft oft belebt, dafür sind Plato, Descartes und Kant bezeichnende Beispiele. Auf sie kann auf jeder Anstalt in der Lektüre, einschließlich des deutschen Lesebuches, eingegangen werden. Aber auch die Mathematikstunden bieten Anknüpfung. Für Plato gibt sie z. B. das Delische Problem oder die Erörterung der Konstruktion in ihrer Beschränkung auf Zirkel und Lineal. Bei Descartes, der aus dem Augustinismus seiner Zeit hervorgeht, gibt hauptsächlich die analytische Geometrie Gelegenheit dazu. An Kants System, das andererseits zum Verständnis von Schiller und auch von Goethe durchaus erforderlich ist, wird man bei Besprechung der Grundlagen der Mathematik nicht vorübergehen können. Bei der Frage der „Zeit" wird man auch Augustins Schmerzensschrei nach Verständnis erwähnen können, den Herr Höfler in den Anhang zu seinem Grundriß der Logik und Psychologie mit Recht aufgenommen hat.

Neben Thales steht natürlich Pythagoras an der Spitze, dessen religiös-ethische Reform die musische Erziehung in ihren Dienst stellte, aus dem heraus seine Schule dann für die Mathematik so fruchtbar gewirkt hat. Von hier aus läßt sich bis in die Gegenwart hinein das Philosophische in der Geschichte der Mathematik verfolgen, wobei natürlich Leibniz[2]) und Newton Höhepunkte bilden. Namentlich bieten auch bei Gauß die Voranzeigen seiner Schriften gutes Material, von dem sich auch dies und das für die Schule verwenden läßt. Außerdem mag auch auf unser Kapitel „Die Arbeitsart der Mathematiker" verwiesen werden.

1) Vgl. Nr. 120 b S. 256.

2) Vgl. dazu u. a. „Leibniz und die Gymnasialmathematik" von E. Tischer in den „Xenia Nicolaitana, Festschrift zur Feier des 400jährigen Bestehens der Nikolaischule in Leipzig", Leipzig 1912.

3. Psychologisches und Formal-Logisches im Unterrichte der Mathematik.

Bei dem propädeutischen Unterrichte steht das Psychologische durchaus im Vordergrunde, das aber auch für den abschließenden Unterricht, in welchem das Formal-Logische voll zur Geltung kommen soll, seine hohe Bedeutung behält. In bezug auf die Wertung des Psychologischen können wir vor allem auf Höflers Didaktik verweisen, in welcher, wie schon früher erörtert, im besonderen auch die Anschauung wirklich zu ihrem Rechte kommt.[1])

In Beziehung auf die Verstandesbildung durch Mathematik bekennt Herr Höfler[2]): „Zu diesem Gegenstande ist hier fast nichts mehr zu sagen, man müßte dann den Mut haben, das unzähligemal gut gesagte wirklich noch einmal zu sagen“. Gegenüber dem immer noch vorhandenen „Unfug des Auswendiglernens“ begnügt sich daher Herr Höfler hervorzuheben „Nicht auf das richtige Urteil allein kommt es an, sondern auf richtig urteilen mit Einsicht in die Richtigkeit“. Ob der Unfug wirklich noch so groß ist, mag dahingestellt bleiben, jedenfalls ist das Kapitel „formal-logische Schulung durch die Mathematik“ so oft behandelt, daß kaum etwas hinzuzufügen ist. Höchstens ist vielleicht zu bemerken, daß die Forderungen der Logik in der Mathematik meist restlos verwirklicht werden können, und dazu mag im Hinblick auf hier und da noch vorkommende Ungenauigkeiten besonders hervorgehoben werden, daß auch die „Einteilungen“ stets vollständig durchzuführen sind.

So hat man z. B. an Parallelen vier Gruppen von Winkelpaaren zu unterscheiden, nicht drei. Nennt man die Winkel zwischen den Parallelen innere, die anderen äußere, und ein Paar gleichartig, wenn es nur innere oder nur äußere Winkel zusammenfaßt, sonst ungleichartig, so ergibt sich das Schema:

I. Ohne Überschreitung der Schneidenden
  1) gleichartige Paare
  2) ungleichartige Paare

II. Mit Überschreitung der Schneidenden (Wechselwinkel)
  1) gleichartige Paare
  2) ungleichartige Paare.

Ebenso ist die Anzahl der Grundkonstruktionen, welche sich in den Kongruenzsätzen spiegeln, in logischer Hinsicht nicht vier, sondern sechs, wie es auch die Sphärik zeigt. Für die Ebene fällt infolge der Konstanz der Winkelsumme ein Fall fort, aus dem sich die Ähnlichkeit entwickelt, während zwei andere verschmelzen, so daß die Vierzahl herauskommt.

---

1) Vgl. ferner die Arbeiten von Lietzmann (Nr. 1, Bd. V, Heft 1 u. 2) und außerdem Nr. 151 a.

2) Vgl. Nr. 69 b S. 488.

Auch die Betonung alles Speziellen und Singulären gehört hierher. Es dürfen bei Konstruktionsaufgaben und bei Gleichungen keine Sonderlösungen übersehen werden, sie können gerade überaus wichtig sein. So darf schon die Gleichung $x^2 - ax = 0$ nicht etwa durch x dividiert werden, sie führt vielmehr in der Form $x(x-a) = 0$ zu $x = 0$ und $x = a$.

Dagegen ist es vielleicht nicht unnütz, kurz darauf hinzuweisen, wie die Formal-Logik selbst aus dem mathematischen Unterrichte Vorteil zieht, als Elementarlehre und als Methodenlehre. Dabei hat man m. E. davon auszugehen, daß jeder Lehrsatz in logischer Hinsicht ein Urteil darstellt, dessen Elemente Begriffe sind, und daß diese im Urteil ebensowohl getrennt als verbunden werden.

Auf die verschiedenen Arten von Urteilen, welche den reflexiven und konstitutiven Kategorien entsprechen, wird man von Fall zu Fall hinweisen können, ohne jedoch Vollständigkeit anzustreben. Jedenfalls wird man aber neben den Urteilen der alten Logik das Abhängigkeitsurteil besonders hervorheben, weil es zur funktionalen Beziehung der Mathematik führt. Schon die ersten Aufgaben der Regel-de-tri zeigen diese Abhängigkeit, z. B. der Arbeit von der Anzahl der Arbeiter und der Leistungsfähigkeit des einzelnen. Von dem einfachen Urteile „die Schwingungsdauer eines Pendels hängt von dessen Länge ab" bis zu der funktionalen Formulierung $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist allerdings ein weiter Weg.

Daß sich alle Urteile in Identitätsurteile (vgl. Logikkalkül) umformen lassen, nicht aber in Subsumptionsurteile, ist vielleicht auch gelegentlich zu berühren.

Bei den Begriffen wird das Psychologische ihrer Bildung zum Bewußtsein zu bringen sein, und man wird hinzuweisen haben auf den Unterschied der vollkommen logisierten Begriffe der Mathematik und der ihnen entsprechenden Begriffsbeziehungen, im Gegensatz zu den unvollkommen logisierten Begriffen anderer Wissenschaften. Botanik und Zoologie sind ein anderer wissenschaftlicher Typus als die Mathematik. Für die Darstellung eines Begriffes kann wieder rückwärts die mathematische Funktion gute Dienste leisten. Es handelt sich dabei nicht um die Summe der konstitutiven (wesentlichen) Merkmale, sondern um deren Beziehungen. Sind diese Merkmale $a, b, c, \ldots$, so wäre $f(a, b, c \ldots)$ eine Darstellung des Begriffs, wie schon Lotze hervorgehoben hat.

Bei der Bildung der abgeleiteten Begriffe aus den Grundbegriffen ist darauf hinzuweisen, daß letztere dabei als gegeben anzusehen sind, mögen sie vielleicht auch nur durch Beziehungen definiert sein. Ist z. B. der Begriff „Strecke" bekannt und ebenso der Begriff „Streckenzug" und bezeichnet man einen solchen durch $S(a, b, c, d \ldots)$ und, falls er sich schließt durch $S_0(a, b, c, d \ldots)$ so stellt $S_0(a, b, c)$ deutlich das Dreieck dar.

Ferner hat man zu unterscheiden die direkte Definition und die indirekte Definition, welch letztere zunächst bei Bestimmungsgleichungen und Konstruktionsaufgaben auftritt, und schließlich zu den Beziehungen der Axiomatik führt.

Bei der Bedeutung der Reihung ist natürlich die rekurrierende Definition (Reihungsdefinition) besonders hervorzuheben, und in Gegensatz zu ihr die independente zu charakterisieren.

Ebenso wird bei den Schlüssen der Reihungsschluß (von n auf $n+1$) besonders hervorzuheben sein. Daß er gelegentlich dazu dient, eine unvollständige Induktion vollständig zu machen, wird an Beispielen gezeigt. Ist z. B. für einzelne Potenzen die Ableitung hergestellt und daraus die Formel $f'(x) = nx^{n-1}$ für $f(x) = x^n$ vermutungsweise bestimmt, so führt die Ableitung von $x^{n+1} = x \cdot x^n$ nach der Produktformel zum Beweise.

Dieses Beispiel weist außerdem neben vielen anderen darauf hin, daß auch Wahrscheinlichkeits-Urteile und Wahrscheinlichkeits-Schlüsse besonders hervorzuheben sind.

In der Methodenlehre ist zu zeigen, daß Analysis (Trennung) und Synthesis (Verbindung) alles beherrschen, schon die Abstraktion und Determination bei der Begriffsbildung, aber auch alle Systematik.[1])

Die der Mathematik eigentümliche Analysis und Synthesis, welche man als Differential- und Integralrechnung zu bezeichnen pflegt, beruht auf dem Infinitesimal-Prinzip. Man gibt ihm zunächst etwa die vorläufige Form „ein Ganzes (Ding oder Vorgang) kann in beliebig viele beliebig kleine Teile (Elemente) zerlegt und aus solchen wieder aufgebaut werden". In dieser Form hat es auch die Arbeiten von Lyell (Geologie) und von Darwin (Botanik und Zoologie) geleitet. Dieses Prinzip würde ziemlich unfruchtbar sein, wenn sich nicht oft für die Elemente gesetzliche Bestimmungen angeben ließen, welche beim Aufbau des Ganzen (integrum) auch zu neuen oder bisher nicht erklärten gesetzlichen Bestimmungen für dieses führten.[2]) Die Aneinanderreihung nicht genügend beachteter aber in ihrem Wesen bekannter oder erkennbarer Vorgänge führten Lyell und Darwin zur Beseitigung der Kataklysmen-Theorie und der Starrheit des Arten-Begriffs, und durch solche Aneinanderreihungen von Elementen sucht man jetzt auch auf anderen Gebieten Aufschluß über das Ganze zu geben, und zwar überall da, wo der Begriff „Entwicklung" die Führung übernimmt.[3]) So wird Hegels energischer Hinweis auf die Bedeutung der Entwicklung in möglichst exakter Form wirklich fruchtbar gemacht.

Für die Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes mußte sich die Mathematik ihre besonderen Methoden schaffen, die man zusammenfassend als Grenzmethoden bezeichnen kann. Die Zerlegung in Elemente ist zunächst fast immer mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet. Die Ele-

1) Dabei ist die jedesmalige Bedeutung der vieldeutigen Worte Analysis und Synthesis besonders festzustellen. Vgl. hier S. 94.

2) Vgl. die Bedeutung der Differentialgleichungen.

3) Vgl. Vierkandt, die Stetigkeit im Kulturwandel, Leipzig, 1908.

mente sind Hülfskonstruktionen, welche man, meist zunächst durch die empirische Anschauung geleitet, in das Gegebene hineindenkt, ohne aber damit dasselbe adaequat darzustellen, so bei der Ersetzung des Bogens durch einen Streckenzug, bei Auflösung einer beliebigen Bewegung in eine Kette von gleichförmigen Bewegungen oder gleichmäßig geänderten Bewegungen usw.

Die Stumpfheit unserer Sinne erleichtert uns den ersten Ansatz, da für das Auge bei materieller Ausführung (etwa auf dem Reißbrett) z. B. Bogen und Streckenzug bei einer gewissen Annäherung zusammenzufallen scheinen. Man pflegt zu sagen, daß erst unendlich viele unendlich kleine Elemente eine exakte Darstellung geben und gerade diese Redensart muß methodisch geklärt werden. Tatsächlich handelt es sich dabei in psychologischer Hinsicht um eine fortgesetzte Annäherung, welche ihr Ziel nie erreichen kann, d. h. um einen asymptotischen Prozeß. Es ist eine Grundtatsache unseres Bewußtseins, daß wir Vorstellungsreihen, welche eine solche Annäherung darstellen, in Grenzvorstellungen abgeschlossen denken, welche überall da, wo uns nicht die Bewegungsvorstellung hilft, von der Reihe aus nur durch einen Sprung zu erreichen sind. Diese Tatsache weist hin auf eine bestimmte Funktion des Bewußtseins, welche der Bewältigung asymptotischer Prozesse dient, und die man kurz als die „asymptotische Funktion des Bewußtseins" bezeichnen kann.[1] So gehört z. B. zu der Vorstellungsreihe, welche durch

$$0{,}33\cdots = {}^3/_{10} + {}^3/_{100} + \cdots$$

bezeichnet wird, die Grenze 1/3, und die asymptotische Funktion läßt uns diese Grenze beim Durchlaufen der Reihe als erreichbar ansehen. Löst man Bewegung in eine asymptotische Reihe auf, so treten sofort Schwierigkeiten auf (Achilles und die Schildkröte). Eine solche Auflösung ist aber fast immer, dem diskursiven Charakter unseres Denkens entsprechend, erforderlich, falls die Arithmetik auf die Probleme angewandt werden soll, und damit erwächst für die Mathematik die Aufgabe, diese Beziehungen vollständig zu klären.

Dies geschieht durch Einführung des Grenzwertes und des sog. Konvergenzprinzipes[2]), woran sich dann weitere Methoden schließen, unter denen besonders der Übergang von der Stammfunktion zur Ableitung, und umgekehrt, zunächst in dem einfachen Falle

$$y = f(x)$$

hervorzuheben ist.

Geschichtlich ist das bestimmte Integral der zunächst auftretende Grenzbegriff, den die Frage der Flächenbestimmung fordert.

Eine Methode für die Klärung dieser Beziehungen lernt der Schüler zunächst in der Kreislehre kennen. Bezeichnet man die Fläche eines

1) Vgl. S. 72 Anm. 1.
2) Vgl. z. B. Burkhardt, Algebraische Analysis, Leipzig, 1903, S. 73.

regelmäßigen umschriebenenen Vieleckes von beliebiger Seitenzahl (n) mit U und die Fläche für ein entsprechendes eingeschriebenes Vieleck mit I, die Kreisfläche dagegen mit K, so ist anschaulich klar, daß besteht:

$$U > K > I.$$

Bei rechnerischer Ausführung ist K mindestens soweit gegeben, als U und I in ihren Dezimalen übereinstimmen. Die erforderliche Schärfe des Abschlusses bringt dann die Gleichung

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty.$$

Ein weiterer geschichtlich schon früh vollzogener Grenzübergang liefert, falls der Radius des Kreises mit r und der Umfang mit u bezeichnet wird, noch die Gleichung

$$K = \frac{1}{2} r \cdot u$$

und damit ist auch u bestimmt.

Das Verfahren, welches zunächst bei der Kreisfläche durch $U > K > I$ und

$$\lim (U - I) = 0 \text{ für } \lim n = \infty$$

charakterisiert ist, begegnet dem Schüler später noch recht häufig, z. B. bei der Bestimmung von Volumen und Oberfläche der Kugel, bei Schwerpunktsaufgaben usw.

Auf der Schule muß der Übergang zur Grenze jedenfalls zunächst auf anschaulichem Wege geläufig gemacht werden, und dazu dient vor allem die Bewegungsvorstellung. Daß sie selbst gewisse Schwierigkeiten enthält, bleibt dabei außer Betracht; so ist z. B. das (scheinbare) Entstehen einer Bewegung und das (scheinbare) Vergehen einer Bewegung und ebenso jede Änderung innerhalb der Bewegung nur mit Hilfe der asymptotischen Funktion erfaßbar.

Sieht man keine Schwierigkeiten darin, daß ein Punkt bei der Bewegung auf seiner Bahn durch einen festen Punkt dieser Bahn hindurchgeht, so bietet auch die übliche Behandlung des Übergangs von der Sekante zur Tangente keine Schwierigkeiten. Will man die Bewegung „eliminieren", so kann man durch den festen Punkt ein Strahlenbüschel legen, in welchem in Beziehung auf die Durchschnitte der Kurve die Tangente einen ausgezeichneten Strahl darstellt. Für einfache Fälle bietet die arithmetische Behandlung keine Schwierigkeiten. Hat der feste Punkt die Abszisse x und der bewegliche Punkt die Abszisse $x \pm d$, so ist für die Linie, deren Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist, der Winkel σ zwischen Sekante und X-Achse gegeben durch

$$\operatorname{tang} \sigma = a(2x \pm d) + b$$

und für den Tangentenwinkel gilt dann ($\pm d = 0$) ohne weiteres

$$\operatorname{tang} \tau = 2ax + b.$$

In anderen Fällen muß untersucht werden, ob tang σ für $\pm d = 0$ einen bestimmten Grenzwert hat, eine Notwendigkeit, auf welche die tangentenlosen Kurven noch ganz besonders hingewiesen haben.

Die Darstellung durch Elemente ist immer zunächst ein anschaulich eingeleiteter approximativer Ansatz, der durch Grenzbegriff und Grenzmethode exakt gemacht wird, aber der damit gegebenen Logisierung kann die Anschauung nicht folgen. Ob z. B. im tiefsten Punkte einer Seilkurve ein Element horizontal liegt oder ob von ihm nach beiden Seiten zwei geneigte Elemente ausgehen, ist eine Frage, auf die es keine Antwort gibt. Als Annäherung ist natürlich beides zulässig, und der Praktiker benutzt ja auch, z. B. bei der Darstellung der Kettenlinie, diese doppelte Auffassung.

Erst, wenn man diese Logisierung anschaulich verfolgen will, treten die bekannten Schwierigkeiten des Grenzüberganges auf, wobei zu betonen ist, daß die Anschauung der Logisierung auch in einfachen Fällen nicht folgen kann. Beachtet man dies nicht, so kommt man zu den vielen Widersprüchen zwischen Anschaulichem und Logisiertem. Dann kommt man auch zu der Frage, ob die Elemente (Differentiale) die „Geister verschwundener Größen" (Berkeley) oder die „Keime entstehender Größen" (Cohen[1]), Simon u. a.) sind usw.

Zu bemerken ist vielleicht noch, daß sich an einen, einmal vollzogenen Grenzübergang natürlich weitere Grenzübergänge knüpfen können, sowohl im Sinne des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung, als auch umgekehrt, und daß der Begriff des Elementes selbst (dx, dx^2, usw.) durchaus relativ ist, wie zunächst schon Linien-Element, Flächen, Element und Raum-Element zeigen.

In sprachlicher Hinsicht mag hervorgehoben werden, daß man entweder die Worte „Differential und Summal" oder „Element und Integral" benutzen müßte, wobei noch zu bemerken ist, daß die Differentialquotienten oft, aber nicht immer, als Differenzenquotienten entstehen und die Integrale auch nicht immer als Grenzen von Summen auftreten, sondern auch durch Umkehrung von Differentiationen usw. entstehen.[2])

Für die Schule möchte ich persönlich die Zeichen dy/dx und $\int f(x)\,dx$ gern vermieden wissen, letzteres natürlich nur wegen des in ihm auftretenden dx. Man bezeichnet hier anfangs die Elemente von x und y, die ja zunächst nur beliebig klein sind, wohl besser durch ξ und η, und benutzt ferner gewöhnliche Summenzeichen, um die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten zu vermeiden, die in der allerdings technisch sehr schmiegsamen Bezeichnung von Leibniz liegen.

Andererseits läßt sich für die Verwendung jener Zeichen mit gutem Rechte sagen, daß die Einführung in die Anfänge der Infinitesimal-

1) Einer jetzt oft auftretenden Behauptung gegenüber mag noch bemerkt werden, daß dx an und für sich kein Erzeugungsgesetz für x darstellt, wohl aber gibt $f'(x) \cdot dx$ für y ein solches an im Hinblick auf $y = f(x)$.

2) Vgl. bei Leibniz „calculus differentialis" und „calculus summatorius".

Rechnung, auch oder vielleicht sogar besonders denen dienen soll, welche später Mathematik nicht weiter treiben, aber doch gelegentlich auf Mathematisches angewiesen sind, wie z. B. Mediziner und Chemiker. Diese finden jene Zeichen in der Literatur vor und, wenn sie auch erfahrungsmäßig für deren Verständnis meist einer Auffrischung ihrer Schulkenntnisse bedürfen, so ist es doch zweckmäßig, daß ihnen dabei die Formelsprache nicht noch besondere Schwierigkeiten macht.

Jedenfalls sind die Ansichten in bezug auf die Verwendung jener Zeichen im Schulunterrichte immer noch geteilt.[1])

Die Fragen des Aktual-Unendlichen und des Potenziell-Unendlichen bleiben der Schule wohl besser fern, sie weisen hin auf den alten Gegensatz zwischen Parmenides (Sein) und Heraklit (Werden)[2]). Es genügt, wenn der Schüler das Infinitesimal-Prinzip einigermaßen kennen gelernt hat: die Bestimmung des Ganzen aus Elementen ist immer das treibende Moment dabei.[3])

Gegenüber dem weitmaschigen Netze der Begriffsbestimmungen anderer Wissenschaften ist bei der Verwendung des Infinitesimal-Prinzipes gewissermaßen Filigran-Arbeit zu leisten, und für diese ist der Begriff der (geordneten) Mannigfaltigkeit stets sozusagen die Unterlage.

Mit Rücksicht auf einen ständigen Gegenstand der einschlägigen Literatur mag noch das Bedenken kurz berührt werden, daß sich in der Frage ausspricht: „Warum gilt der Beweis, der an diesem bestimmten Dreieck geführt worden ist, für jedes beliebige Dreieck?“ Die Antwort lautet: Der Beweis wird gar nicht an diesem bestimmten Dreieck geführt, er benutzt vielmehr nur die Begriffskonstruktion „geschlossener Streckenzug von dreifacher Brechung“, die durch ein beliebiges gezeichnetes oder gezeichnet-gedachtes Dreieck veranschaulicht werden kann, wobei aber dessen besondere Eigenschaften für den Beweis nicht verwendet werden. So steht es bei allen Begriffskonstruktionen der Mathematik (Arithmetik usw.) im Hinblick auf ihre Veranschaulichung; die blitzschnelle Vergleichung aller möglichen Fälle, die man zur Erklärung herangezogen hat, besteht tatsächlich nur in der Phantasie.

Der Unterschied des induktiv-deduktiven (reine Induktion gibt es nicht!) und des deduktiven Verfahrens ist zu klären. Dabei erinnert man daran, daß in der Geschichte der Mathematik, und auch dementsprechend auf der unteren und mittleren Stufe der Schule die Mathematik nach induktiv-deduktiven Verfahren entstanden ist, während ihr Abschluß deduk-

1) Zu der ganzen Frage der Infinitesimalrechnung vgl. noch „Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus in Göttingen 1912“, herausgegeben von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912. 2) Vgl. dazu namentlich Nr. 3o.

3) Das zeigte sich auch bei den modernen Arbeiten, welche in erneuter und verschärfter Form die Fragen nach der Länge einer Linie, dem Areal einer Fläche, dem Volumen eines Körpers usw. behandeln, auf die schon Bolzano so energisch hingewiesen hat, und u. a. den Begriff der Kurve (Jordan-Kurve usw.) erst zu klären versuchen. Vgl. dazu bei F. Klein besonders Nr. 78i und 78m.

tiv ist auf Grundlage der Axiomatik. Es ist äußerst zweckmäßig, auch auf der Oberstufe noch induktiv-deduktiv zu arbeiten, z. B. bei der Vorbereitung der Ableitung des Eulerschen Satzes für Polyeder.

Selbstverständlich sind auch gelegentlich die Denkgesetze zu formulieren, wobei den Satz vom Grunde wiederum die Elimination und Substitution der Mathematik erläutert.

Natürlich wird man auch auf die Sprache der Mathematik und auf ihr besonderes Zeichensystem hinweisen, im Gegensatz zur Sprache des gemeinen Lebens. Was sagt uns nicht alles eine Formel, z. B. aus der mathematischen Physik?[1]) Die Schöpfung der mathematischen Formelsprache war notwendig, um die erforderliche Schärfe der begrifflichen Darstellungen zu erzielen, sie hat aber, obwohl sie ein ziemlich vollendetes Kunstwerk darstellt, doch ihre Mängel[2]), die sich zum Teil daraus erklären, daß die geschichtliche Entwicklung über die ursprünglichen Bestimmungen hinausgewachsen ist. Auch die Sprache der Mathematik hat ihre Äquivokationen und ihre Synonyme. Daß die Operationszeichen (+ −) und die Größensignaturen (+ −) zusammenfallen, macht gerade den Anfängern große Schwierigkeiten; man vermeidet sie, wenn man nach dem Vorgange von Weierstraß zunächst -7 durch $7'$ bezeichnet.[3]) Sehr vieldeutig sind die Worte Synthesis und Analysis, so daß sie von Fall zu Fall ausführliche Erläuterungen notwendig machen. An die Vieldeutigkeit des Wortes „Wurzel" braucht nur erinnert zu werden. Ebenso hat z. B. das Gleichheitszeichen mindestens drei Bedeutungen, gelegentlich vermittelt es eine Definition, sonst zeigt es die Ersetzbarkeit an, und zwar entweder eine vorhandene (analytische Gleichung) oder eine zu vollziehende (Bestimmungsgleichung). An die Vieldeutigkeit der Null, auf die besonders Herr Simon öfter hingewiesen hat, mag auch noch erinnert werden.

Auf die modernen Entwickelungen der mathematischen Zeichensprache bei Peano u. a., welche diese möglichst vollkommen gestalten wollen, kann auch auf der Schule gelegentlich hingewiesen werden, ein Analogon für die Grammatik findet man in der „Algebra der Grammatik" von Herrn Stöhr (Nr. 141).

Im übrigen geben für das Logische die gebräuchlichen Kompendien genügend Beispiele, namentlich die von Drobisch und Wundt, auch das von Lotze, ebenso findet man in Höflers Grundrisse gute Auskunft.[4])

---

1) Vgl. Nr. 124 b.

2) Hierher gehört auch Fr. Försters Hinweis auf gewisse Verkehrtheiten beim Aussprechen und beim räumlichen Hinschreiben der Zahlenausdrücke. Vgl. dessen Abhandlung „Das neue Jahrhundert und die Reform unseres Zählungswesens" in den Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik Jahrg. 11 Heft 1.

3) Es ist dies eigentlich ein Rückgang zur ursprünglichen geschichtlichen Bezeichnung.

4) Vgl. auch Nr. 47.

4. Die Systematik des mathematischen Unterrichts.

A) Allgemeines.

Der Abschluß des Unterrichts, der auf induktiv-deduktivem Wege unter reichlicher Verwendung der Anschauung begonnen hat, muß die Mathematik als System erkennen lassen. Dazu ist in positiver Hinsicht erforderlich, daß alle Zusammenhänge, welche schließlich zu Tage treten sollen, von vornherein vorbereitet werden, in negativer Hinsicht, daß der endliche Zusammenschluß nicht gehindert wird.

Was den letzteren Punkt anlangt, so handelt es sich dabei auch um den Ausschluß der Kunstgriffe, die früher die geometrischen Konstruktionen und die Lösungen der Gleichungen oft beherrschten. Aus der Untersuchung einer Figur soll für den Schüler folgen, was zu ihrer indirekten Bestimmung durch eine Konstruktion nötig ist, und welche Beziehungen die einzelnen Stücke zeigen. Geht man in der Theorie der kubischen Gleichungen, was durchaus praktisch ist, zunächst den historischen Weg, indem man die Formel von Cardano und die goniometrische Formel für den Casus irreducibilis gibt, so hat man doch schließlich die Lösung mit Hilfe der Beziehungen von Wurzeln und Koeffizienten vorzunehmen, die der Schüler unter Leitung selbst zu finden vermag. Ebenso ist darauf hinzuweisen, daß die meisten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz eine Reihe von Kunststücken darstellen. Seine natürliche Stelle findet er in der Lehre von der Ähnlichkeit. Bezeichnet man (vgl. Fig. 4) die Teildreiecke des rechtwinkligen Dreiecks durch I und II und dieses selbst durch III, so ergibt sich die Tabelle für die Proportionen

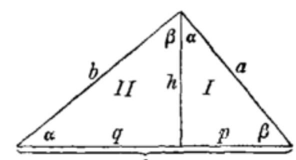

Fig. 4.

	α	β	90^0
I	p	h	a
II	h	q	b
III	a	b	c

In diesen finden sich neben $h^2 = pq$ auch die Gleichungen $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$, die bei der Addition den Lehrsatz geben. Schließlich liefert der Satz, daß sich die Flächen ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, ohne weiteres für einen Proportionalitätsfaktor m die Ansätze

$$I = m \cdot a^2$$
$$II = m \cdot b^2$$
$$III = m \cdot c^2$$

Da $I + II = III$ ist, so folgt unmittelbar der Pythagoräische Lehrsatz.[1])

1) Vgl. Nr. 167h und ferner W. Lietzmann „Der pythagoräische Lehrsatz“ in Nr. 95, Bändchen 3.

Die in der Wissenschaft heute zum Teil übliche Berufung auf „willkürliche" Vereinbarungen und die Verbindung von Worten ohne Bedeutung mit bestimmten Zeichen, wie sie einzelne Darstellungen der Axiomatik geben, sind für die Schule nicht zu gebrauchen.

Im Systeme der Schulmathematik darf schließlich keine Lücke bleiben. Natürlich ist es aber zulässig, eine solche durch historische Aufnahme zu schließen, wenn ihre wirkliche Ausfüllung für die Schule nicht gut durchführbar ist. So wird man z. B. den grundlegenden Satz für die Gleichungstheorie „Jede algebraische Gleichung vom Grade n hat genau n Wurzeln" (Gauß), nur mit einer guten Generation beweisen, sonst wird man ihn mindestens zum Teil historisch aufnehmen müssen. Man setzt also etwa voraus „Jede algebraische Gleichung hat mindestens eine Wurzel" und geht von hier aus weiter, im übrigen auf die Werke von Gauß verweisend.

Jede „Erschleichung" ist natürlich streng zu vermeiden, ebenso alle Arten von Scheinbeweisen.

Wir wollen nun noch die einzelnen Gebiete der Mathematik in ihrer Stufenordnung betrachten, wie sie durch die Folge Arithmetik, Geometrie, Phoronomie, Dynamik bestimmt wird, an und für sich und als Mittel, eine eindeutige Ordnung des Geschehens zu erkennen und darzustellen und dadurch die Natur zu beherrschen. Das absolute Maßsystem, welches außer Zahlen (Arithmetik) der Reihe nach die Einheiten Strecke (Geometrie), Dauer (Phoronomie) und Masse (Dynamik) für die Bildung seiner Größen verwendet, gibt dabei den Zielpunkt an.

Während die Arithmetik zum Begriffe einer n-fachen Mannigfaltigkeit führt, untersucht die Geometrie die bestimmte Mannigfaltigkeit, welche wir als „Raum" bezeichnen. Die Phoronomie setzt die Bewegungen der Gebilde im Raum zur Zeit in Beziehung, während die Dynamik im Hinblick auf das Tatsächliche der Sinnenwelt die gegenseitige Beeinflussung dieser Gebilde darstellt.

Ob die Bewegung, lediglich als Lagenänderung gefaßt, in der Geometrie verwendet werden soll, ist bekanntlich eine Frage, die von verschiedenen Standpunkten aus verschieden beurteilt wird, und darum kann die Phoronomie der Lage (Kinematik) auch der Geometrie zugerechnet werden.

Für unsere Zwecke genügt es, die Grundlage der Arithmetik etwas ausführlicher zu behandeln, weil für die Geometrie bereits alles Erforderliche in guten Darstellungen vorliegt und weil über die Mechanik bei dem augenblicklichen Stande der Probleme für die Schule doch kaum etwas Abschließendes gesagt werden kann, was den Rahmen der „klassischen Mechanik" überschritte.

Statt dessen soll noch für die einzelnen Gebiete der Mathematik kurz angedeutet werden, wie ich in meinem Unterrichte in Prima den systematischen Abschluß zu geben suche, womit natürlich nur gezeigt werden soll, wie man es machen kann, und nicht etwa, wie man es machen muß. Dabei bemerke ich ausdrücklich, daß ich diesen systematischen Abschluß auch als Lehrer am Gymnasium (bis Herbst 1894) durchgeführt habe, natürlich unter Beschränkung des Aufgabenmateriales. Dem Gymnasium gegenüber liegt das Übergewicht der Oberrealschule nicht im Mathematischen, sondern im Naturwissenschaftlichen.

B) Arithmetik (Algebra, Analysis usw.).

a) Grundlegende Betrachtung.

Die beiden Zwecke, welchen die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,... dient, haben sprachlich ihren Ausdruck in den Worten „Ordinalia" und „Cardinalia" erhalten. Wenn wir Häuser in einer Straße oder Blätter eines Buches usw. durch Paarung mit der Reihe 1, 2, 3, ... bezeichnen, so kommt es uns nur auf die Ordnung in der Folge an, während drei Menschen oder fünf Bäume auf ein Quantum hinweisen. Die selbständigen Bildungen von Ordinalien sind gemäß der Ökonomie der Sprachentwicklung meist von den Bildungen der Kardinalien aufgesaugt worden, doch zeigen Anfänge, wie unus, duo, tres, ... und primus (prae, prior), secundus (sequi), tertius, ... noch deutlich den gedanklichen Unterschied an. Leider sind die Zahlennamen der Kulturvölker fast alle in etymologischer Beziehung nicht zu deuten, ein Zeichen dafür, welche lange Kulturarbeit in ihnen erstarrt vorliegt. Eine Ausnahme macht z. B. die hebräische Bezeichnung für 5, in der noch deutlich die Anschauung der Hand mit ihren fünf Fingern nachwirkt. Hält man das Wort Zahl als Oberbegriff fest, so weisen uns Ordnungszahl und Anzahl (Kardinalzahl) auf eine „Arithmetik der Lage" und eine „Arithmetik des Maßes" hin, wenn man gangbare Bezeichnungen der Geometrie auf die Arithmetik überträgt.

In psychologischer Hinsicht liegt der Ursprung der Ordnungszahl in dem Umstande, daß wir alle Erscheinungen in der Zeit ordnen, während in jedem Augenblicke ein Außereinander von psychischem und physischem Inhalte gegeben ist, dessen quantitativer Charakter schließlich durch das Wort „Anzahl" bezeichnet wird, womit die Kardinalzahl ihr Recht erhält.

Auch in der Arithmetik ist, den Bedürfnissen des Lebens entsprechend, die „Arithmetik des Maßes" früher entwickelt worden, als die „Arithmetik der Lage", für welche erst Herr Dedekind eine einwandfreie Entwicklung gegeben hat, während sich Anfänge davon u. a. bei den Brüdern Graßmann, bei v. Helmholtz u. a. finden.

In logischer Hinsicht baut sich die Arithmetik der Lage auf durch „Reihung" und „Paarung", die Arithmetik des Maßes durch „Klassenbildung" und „Paarung" unter sekundärer Verwendung der „Reihung".

α) Die Arithmetik der Lage.

In psychologischer Hinsicht sind Reihungen mannigfacher Art etwas ganz Gewöhnliches, und es handelt sich zunächst darum, dieses Gebiet zu logisieren, d. h. einen Oberbegriff „Reihung“ als Invariante zu bilden, welche die logische Grundlage für alles Weitere bildet.

Wenn a ein Ding, d. h. irgend etwas mit sich selbst Identisches bezeichnet und $\varphi(a) = b$ den Gedanken an dieses Ding, $\varphi(b) = c$ wiederum den Gedanken an b usw., so gibt die Reihe

$$a,\ b = \varphi(a),\ c = \varphi(b),\ d = \varphi(c), \ldots$$

ein Beispiel, an das die Logisierung anknüpfen kann. In ihr soll nur das Gemeinsame aller Reihungen zum Ausdruck kommen, und dieses besteht in der Tatsache „a steht vor b, b steht vor c, c steht vor d, usw.“

Für diese Beziehung von Glied zu Glied kann man die Bezeichnung $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ einführen, falls man nur die Begriffe „größer“ und „kleiner“ in keiner Weise daran haften läßt.

Nachdem die Reihung durch Einführung der Zeichen $a, b, c, d, \ldots$ der Zeit entzogen ist, kann man sie auch umgekehrt durchlaufen denken und die Bezeichnung $\ldots d > c$, $c > b$, $b > a$ einführen, welche aber nur bedeutet „d steht hinter c“ usw. Die Reihe ist als eine offene Reihe zu betrachten, die zunächst im Sinn $a, b, c, d, \ldots$ und dann auch im Sinn d, c, b, a beliebig fortsetzbar ist. Sie hat also die Gestalt:

$$\ldots a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots.$$

Daß die Bestimmungen $a < b$ und $b < c$ die Bestimmung $a < c$ nach sich ziehen, bedingt den Charakter des Offenen.

Von zeitgenössischen Erkenntnistheoretikern gehen u. a. G. F. Lipps und Natorp von der „Urreihe“ aus, von Mathematikern vor allem Veronese und Enriques[1]) und auch Pringsheim. Herr Dedekind scheidet die Urreihe durch eine ordnende Abbildung aus einer unendlichen ungeordneten Menge aus, aber sein Beweis für die Existenz unendlicher Mengen (unter Benutzung des eigenen Ich) ist angefochten worden, und ebenso mit Rücksicht auf die Paradoxien der Mengenlehre sein Begriff des Systems (Menge). Es scheint also zweckmäßig, seine Entwicklung erst von der Stelle an zu benutzen, in der die „Reihung“ festgelegt ist.

Daß mit dieser Reihung $a, b, c, d, \ldots$, so einfach sie auch zu sein scheint, eine Fülle von Gesetzmäßigem mit gegeben ist, zeigt die Paarung von Gliedern der Reihe nach einer bestimmten Vorschrift, wie sie Herr Dedekind ausführt. Wir bezeichnen dazu mit m' das Glied, welches auf m folgt, mit $(m')'$ oder kürzer mit m'' das Glied, welches auf m' folgt, usw. und ersetzen die Reihe $a, b, c, d, \ldots$ lediglich aus mnemotechnischen Gründen durch die geläufige Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots$. Wir bilden nun durch Paarung aus der gegebenen Reihe eine neue Reihe und bezeichnen die Art der Paarung durch φ_m, wobei m eine feste Stelle der alten Reihe bezeichnen mag. Bezeichnet n eine beliebige Stelle der alten Reihe, so soll die besondere Art der Paarung φ_m bestimmt sein durch die Vorschriften:

1) In Anlehnung an Peano und Dedekind.

$$\text{I}\ \varphi_m(1) = m' \qquad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$
$$\text{II}\ \varphi_m(n') = [\varphi_m(n)]' \qquad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

Nr. I bedeutet nur, daß den Anfang der neuen Reihe das Glied bilden soll, welches in der alten Reihe auf m folgt, während Nr. II besagt, daß mit dem beliebigen Gliede n' der alten Reihe, das in dieser auf n folgt, immer das Glied der neuen Reihe gepaart werden soll, welches dem mit n bereits gepaarten Gliede folgt. In Verbindung mit Nr. I gibt für $n = 1$ Nr. II die Bestimmung

$$\varphi_m(2) = [\varphi_m(1)]' = [m']' = m''$$

und für $n = 2$ gibt II weiter die Bestimmung

$$\varphi_m(3) = [\varphi_m(2)]' = [m'']' = m''' \text{ usw.}$$

Für $m = 7$ hat man z. B. $m' = 8$, $m'' = 9$ usw. und demgemäß die Paarung

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Addition von 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Addition tatsächlich in unserer Paarung φ_m gegeben sind. Benutzen wir der Einfachheit wegen die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{(Verschmelzungsgesetz),}$$
$$a + b = b + a \qquad \text{(Vertauschungsgesetz).}$$

Wir betrachten nun die Vorschrift für eine neue Paarung ψ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I}\ \psi_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes),}$$
$$\text{II}\ \psi_m(n') = \psi_m(n) + m \quad \text{(Rekurrierende Definition).}$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\psi_m(2) = \psi_m(1) + m = m + m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\psi_m(3) = \psi_m(2) + m = m + m + m$$

usw. Für $m = 7$ hat man z. B. zu paaren $7,\ 7 + 7,\ 7 + 7 + 7, \ldots$ und es entsteht die Paarung

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, \\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe aus der ersten durch gliederweise vorgenommene Multiplikation mit 7 entstanden ist, und man zeigt leicht durch den Schluß von n auf $n + 1$, daß die grundlegenden Sätze der Multiplikation tatsächlich in unserer Paarung ψ_m liegen. Benutzen wir der Einfachheit wegen wieder die geläufige Sprache der Arithmetik des Maßes, so lauten diese Sätze bekanntlich:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{(Verschmelzungsgesetz)},$$
$$ab = ba \quad \text{(Vertauschungsgesetz)},$$
$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{(Verteilungsgesetz)}.$$

Wir betrachten nun ferner die Vorschrift für eine dritte Paarung θ_m, welche bestimmt ist durch

$$\text{I} \quad \theta_m(1) = m \quad \text{(Bestimmung des neuen Anfangsgliedes)},$$
$$\text{II} \quad \theta_m(n') = m\theta_m(n) \quad \text{(Rekurrierende Definition)}.$$

In Verbindung mit Nr. I gibt Nr. II für $n = 1$

$$\theta_m(2) = m\theta_m(1) = m \cdot m$$

und für $n = 2$ gibt Nr. II weiter

$$\theta_m(3) = m\theta_m(2) = m \cdot m \cdot m \quad \text{usw.}$$

Für $m = 7$ erhält man also hier die Paarung

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 7, & 49, & 343, & 2401, & \ldots. \end{array}$$

In der Arithmetik des Maßes würde man sagen, daß die zweite Reihe die Potenzen der Zahl (Basis) 7 enthält, für welche die erste Reihe die zugehörigen Exponenten liefert. Durch den Schluß von n auf $n + 1$ zeigt man wieder, daß die grundlegenden Sätze des Potenzierens in der Abbildung θ_m liegen.

Nennt man die durch Paarung aus der ersten Reihe entstandene zweite Reihe eine Abbildung der ersten, so entstehen durch Umkehrung der betrachteten Abbildungen die Beziehungen, welche in der Arithmetik des Maßes durch Subtraktion, Division, Radizierung bzw. Logarithmierung bezeichnet werden.

Dabei reicht die ursprüngliche Reihe

$$\ldots a, b, c, d, \ldots$$

aus, um die Abbildung, welche der Subtraktion entspricht, darzustellen, während sie für die anderen Abbildungen durch Einschaltung neuer Glieder erweitert werden muß.

Da n u r die Beziehungen $a < b$, $b < c$, $c < d, \ldots$ für die Bildung der ursprünglichen Reihe erforderlich sind, so werden die Einschaltungen auch nur durch die Beziehung $<$ bestimmt, d. h. ein neues Glied ist immer völlig gegeben, wenn man angeben kann, welche alten Glieder vor ihm stehen und welche alten Glieder hinter ihm stehen. Solange man neben der Reihe 1, 2, 3, ... nur die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ betrachtet, genügt die Angabe $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $1 < \frac{3}{2} < 2$ für deren Einschaltung.

Innerhalb dieser ganzen Auffassung bildet die Dedekindsche Theorie des Schnittes[1]) und nur diese den Abschluß für die Bildung des reellen Zahlengebietes. Sucht man Stellen für die Zahlen, deren Quadrate die Reihe 1, 2, 3, ... bilden, so ist schon für $x^2 = 2$ eine neue Stelle zu bestimmen, und diese ist vollständig bestimmt, wenn man angibt, welche von den bereits definierten Stellen vor ihr und hinter ihr liegen.

Der hiergegen gemachte Einwurf, daß man mit noch so dicht gestellten Netzen in einem Karpfenteiche keinen Karpfen fangen kann, wenn keiner darin ist, würde die Dedekindsche Theorie des Schnittes nur treffen, wenn man sie vom Standpunkte der Arithmetik des Maßes aus betrachtete, was aber bei unserer Auffassung unzulässig ist. Innerhalb der „Arithmetik der Lage" sind die Zahlen nur Zeichen für eine bestimmte Stelle innerhalb eines gegebenen oder zu schaffenden Stellensystems, dessen Gesetz allein in der Bezeichnung $<$ oder $>$ liegt.

Damit erledigt sich auch ein Einwurf von Herrn Höfler[2]) der Sache nach, wenn er auch in bezug auf den Wortlaut mancher Angaben im Rechte ist. Er sagt: „So hält z. B. jede Definition, die die Zahl nur als Zeichen erklärt, schon nicht stand vor der einfachen (auch einem geschickten Schüler zuzutrauenden) Gegenfrage: Muß denn nicht jedes Zeichen doch etwas bezeichnen? Ein Zeichen ohne Bezeichnetes ist ja doch ebenso unmöglich wie ein Gatte ohne Gattin, ein Großes ohne Kleines, eine Ursache ohne Wirkung." Herr Höfler knüpft dabei an den bekannten Meinungsaustausch der Herren F. Klein und A. Pringsheim an (vgl. Nr. 78g und h und Nr. 115c und d), aber für Pringsheim sind die Zahlen doch „Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Sukzession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann".

Herr Dedekind hat bekanntlich seine „Arithmetik der Lage" nicht vollständig dargestellt, während Herr H. Weber in seiner Algebra und auch in der „Encyklopädie der Elementarmathematik" im wesentlichen auf der von Dedekind gegebenen Grundlage die ganze Arithmetik aufbaut, namentlich was die sogenannte „Erweiterung des Zahlenbegriffes" anlangt.

β) Die Arithmetik des Maßes.

In psychologischer Hinsicht ist zu betonen, daß wir kleinere Anzahlen (5 bis 6) unmittelbar auffassen und mit ihnen vielleicht auch einfache Rechenoperationen vollziehen, ohne dabei die Reihung 1, 2, 3, ... zu benutzen. Daß größere Anzahlen uns erst durch das Positionssystem zugänglich werden, hat u. a. Herr Husserl[3]) mit Recht betont, und durch diese Bemerkung gewinnt auch die früher nicht recht verstandene „Sandrechnung" des Archimedes eine bestimmte Bedeutung, auf die Herr H. Weber

1) Vgl. Nr. 24 a.

2) Vgl. Nr. 69 b, S. 432.

3) Vgl. auch in bezug auf die Praxis der Volksschule in diesen Imuk-Abhandlungen Bd. V, Heft 1, S. 28 u. f.

u. a. in einer Anmerkung zu der von ihm besorgten deutschen Ausgabe von Poincarés Buche „Der Wert der Wissenschaft" ausführlich eingeht.[1])

Für die Arithmetik des Maßes hat die Mengenlehre in logischer Hinsicht die erforderliche Grundlage geschaffen, und zwar beruht diese auf Klassenbildung und Paarung. Endliche Mengen, deren Elemente sich paaren lassen, bilden eine Klasse, und jede dieser Klassen hat eine bestimmte Invariante, welche als „Anzahl" bezeichnet wird.

Dabei sind endliche Mengen nach Dedekind dadurch bestimmt, daß sie sich nicht mit einem (echten) Teile ihrer selbst paaren lassen. Ist dies möglich, so heißt die Menge unendlich.

Die einfachsten Beispiele für solche Paarungen sind die Paarungen der Anzahlen mit den geraden Anzahlen oder mit den ungeraden Anzahlen, gemäß dem Schema:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$
$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,$$
$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots.$$

Würden wir Anzahlen auch über die Grenze 5 oder 6 hinaus unmittelbar anschaulich erfassen, was an sich ja durchaus möglich erscheint (vgl. Rechengenies wie Dahse) so würden wir vermutlich auch die Arithmetik des Maßes bis zu einem gewissen Grade selbständig aufbauen können. Da dieses aber nicht der Fall ist, so ist man gezwungen, die Anzahlen zu ordnen, und zwar wählt man dafür die Reihung 1, 2, 3, 4, ... und gewinnt damit den Anschluß an die Arithmetik der Lage, aus Ökonomie dasselbe Zeichensystem verwendend. Trotzdem bleibt der Gedanke der Klassenbildung hier das leitende Prinzip, und zwar faßt man dabei stets die Elemente einer Klasse als gegenseitig-ersetzbar auf. Bestimmt man die Anzahl einer Gruppe von Bäumen auf 10, so zeigt man schon durch den Ausdruck (Bäume), daß dabei von allem Individuellen abgesehen wird und daß jeder Baum „dasselbe" bedeuten soll. So liegt auch schon logisch in der Anzahl das, was sprachlich durch die Multiplicantia und Distributiva bezeichnet wird, denn zehn Bäume sind uns lediglich zehnmal je ein Baum. So wenig die Anzahl als Invariante einer Mengenklasse mit dem Maßbegriffe zu tun hat, in so enge Verbindung tritt sie doch zu ihm, wenn man nach der Bedeutung dieser Invariante für die einzelne Menge der Mengenklasse fragt, und in dieser Bedeutung gerade wurzelt in psychologischer Hinsicht die Anzahl.

Indem man je n Einheiten immer zu einer neuen Einheit zusammenfaßt, gelangt man zu Übereinheiten (Zweier, Dreier, Vierer usw.), und die Umkehrung dieses Prozesses führt zur Zerlegung der Einheit in n gegenseitig-ersetzbare Teile, d. h. zu Untereinheiten (Halbe, Drittel, Viertel usw.).

---

1) Vgl. Nr. 113b, S. 225.

Das Bedürfnis nach Übersicht zwingt wieder zur Ordnung, und die Ökonomie verlangt, daß man dabei die alte Reihe 1, 2, 3, 4, ... benutzt.

Indem man diese für die Einschaltung der Drittel auffaßt als 3 Drittel, 6 Drittel, 9 Drittel, 12 Drittel, ... gelingt es gemäß dem ursprünglichen Schema 1, 2, 3, 4, ..., auch 1 Drittel, 2 Drittel usw. einzuordnen.

Die Theorie des Irrationalen, welche dieser Betrachtungsweise entspricht, ist von Weierstraß gegeben worden.

Die Rechenregeln der Addition usw. folgen hier sehr einfach, solange man sich auf endliche Mengen beschränkt. Bildet man aus zwei Mengen A und B mit den Anzahlen a und b eine dritte C mit der Anzahl c, so sieht man die Elemente von A, die gegenseitig-ersetzbar waren, und die Elemente von B, die gegenseitig-ersetzbar waren, in der Menge C als gegenseitig-ersetzbar an. Man hat dann ohne weiteres

$$c = a + b = b + a.$$

Ebenso gilt bei der Vereinigung von drei Mengen A, B, C zu einer Menge D ohne weiteres:

$$d = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Die Multiplikation ist hier zunächst nur eine Addition gleicher Posten, die Division eine Subtraktion gleicher Posten, für welche dann eine abgekürzte Schreibweise benutzt wird, die sich als äußerst fruchtbar erweist.

Die Einführung des Negativen liegt hier in dem Gedanken, daß zwei Arten der Einheit nebst Übereinheiten und Untereinheiten nötig sind, um bestimmte Aufgaben lösen zu können. Für die beiden Einheiten, welche e und e' heißen mögen, hat man die lineare Gleichung $e + e' = 0$ anzusetzen.

Dabei ist das Zeichen 0 zunächst die Invariante der leeren Systeme. Jeder Jäger der Urzeit, der seine Vorratskammer erschöpft sah und wieder zum Bogen greifen mußte, um für sich und die Seinen Nahrung zu beschaffen, hatte eine Anschauung von der Null. Daß den sprachlichen Ausdrücken wie „Nichts" usw. erst spät ein mathematisches Zeichen (0) gefolgt ist, ändert daran nichts; auch ein Positionssystem läßt sich ohne das Zeichen 0 herstellen. Vor Einführung der negativen Zahlen ist es in der Tat ziemlich gleichgültig, ob man die Reihe 1, 2, 3, 4, ... oder die Reihe 0, 1, 2, 3, 4, ... bildet.

Ebenso liegt die Einführung des Imaginären in dem Gedanken, daß noch ein zweites Einheitenpaar i und i' erforderlich ist, um bestimmte Aufgaben zu lösen. Während für dieses wieder die Gleichung $i + i' = 0$ anzusetzen ist, wird die Verbindung zwischen dem ersten und dem zweiten Paare durch eine quadratische Gleichung hergestellt, nämlich durch $e^2 + i^2 = 0$, und darum läßt sich Reelles und Imaginäres nicht linear ineinander umrechnen, wie etwa Meter und Zentimeter.

γ) **Die Verbindung der beiden Arten der Arithmetik.**

Sind die Zeichen für die Ordinalia und für die Cardinalia verschieden, so entstehen zwei Reihen, welche schließlich zu einer Reihe zusammengefaßt werden können. Daß die Ordnung auch für die Arithmetik des Maßes erforderlich ist, wurde schon erwähnt, aber die Reihung ist hier im Grunde nicht ein Stellensystem wie bei der Arithmetik der Lage, sondern nur ein Mittel der Übersicht.

Umgekehrt lassen sich aber auch in der Reihe der Ordinalia

$$a, b, c, d, \ldots$$

die Schritte von a zu b, von b zu c, von c zu d, usw. der Invariantenfolge

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

zuordnen.

Da jeder einzelne Schritt dabei in bezug auf jeden andern als gegenseitig-ersetzbar angesehen werden muß, so sind nun auch bei einer graphischen Darstellung der Reihe $a, b, c, d, \ldots$ auf einer Geraden zwischen den Stellen $a, b, c, d, \ldots$ gleiche Strecken einzuführen.

Bei der Verschmelzung der Ordinalreihe und Kardinalreihe wird es auch erforderlich, in ersterer den Schritt zu a, d. h. die erste Setzung[1]) mitzurechnen, und dazu muß ein besonderes Zeichen für den Anfang des Schrittes angeführt werden. Vergleicht man die Reihung $a, b, c, d, \ldots$ mit den einzelnen Stufen einer Treppe, so fehlt noch der Podest. Es ist zweckmäßig, dafür die Invariante der leeren Systeme zu wählen, so daß die Reihe

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

nun auch für die Arithmetik der Lage Bedeutung hat.

Ursprünglich ist für sie die Lage der Nullstelle durchaus relativ, wie die Verschiebung jeder Skala zeigt.

Dagegen ist die Relativität der Einheit, welche sich in der Bildung von Übereinheiten und Untereinheiten zeigt, ein Begriff, der lediglich der Arithmetik des Maßes angehört.

Die verschiedenen Bedeutungen der Null, auf die namentlich Herr M. Simon öfter hingewiesen hat, ergeben sich zum Teil aus obigen Bemerkungen. Die „unechte" Null, welche im Anschluß an Euler[2]) u. a. immer noch hie und da zur Erläuterung des Differentiales verwendet wird, sollte überhaupt beseitigt werden.

Der Verschmelzung der beiden Zweige der Arithmetik scheint mir die dritte Theorie des Irrationalen, welche durch G. Cantor gegeben worden ist, zu entsprechen.

Bei dieser Verschmelzung tritt auch die Frage auf, wieviel (Anzahl) verschiedene Reihungen (Ordnung) eine Menge von n Elementen liefert.

---

1) Vgl. Nr. 105e, S. 98 u. f.

2) So heißt es z. B. bei Euler in der Vorrede zu den Institutiones calculi integralis (1755): quod nihilum ... signo dx representari eiusque differentiale vocari solet. Anderseits hat Euler auch in derselben Vorrede die Definition durch den limes.

Hier werden die Elemente insofern als verschieden angesehen, als man sie ordnen will, und insofern als gegenseitig ersetzbar (gleich), als sie einer Menge angehören. Damit ist die Stelle bezeichnet, an welcher die Theorie der Permutationen einsetzt und des weiteren die Kombinationslehre überhaupt.

Die stetige Reihe der reellen Zahlen und die stetige Reihe der imaginären Zahlen geben den Begriff der linearen Mannigfaltigkeit erster Ordnung, für deren graphische Darstellung eine Gerade, aber ebensogut eine Parabel oder ein Hyperbelast usw. verwandt werden kann.

Will man aus beiden Reihen ein Gewebe herstellen, so dürfen sich beide Reihen nur in Nullpunkte als dem ihnen gemeinsamen Punkte durchsetzen, falls jede Stelle eindeutig bestimmt bleiben soll. Die bekannte Zahlenebene, in der aber reelle und imaginäre Achse zunächst durchaus nicht rechtwinklig auf einander zu stehen brauchen, gibt ein Bild für ein solches Gewebe, innerhalb dessen die gemeinen Komplex-Zahlen ihre sichere Stellung haben. Diesem Bilde entspricht der Begriff einer linearen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung, für deren graphische Darstellung auch nicht gerade eine Ebene verwandt zu werden braucht, z. B. kann ebensogut ein hyperbolisches Paraboloid benutzt werden.

Denkt man sich nach dem Muster der Reihe der reellen Zahlen oder der Reihe der imaginären Zahlen n verschiedene Reihen aus n verschiedenen Einheiten gebildet, so gibt deren Verwebung ein Beispiel einer n-fachen Mannigfaltigkeit.[1])

Wir haben oben (vgl. S. 64 u. f.) auf die (unstetigen) Vorstellungs-Reihen und die Vorstellungs-Gewebe aus Verbalformen hingewiesen und erinnern jetzt daran, um zu betonen, daß der Begriff der n-fachen Mannigfaltigkeit von jeder besonderen Veranschaulichung unabhängig ist, aber nicht von jeder Veranschaulichung überhaupt.[2])

Bis zum Falle $n = 3$ werden immer (für den Punkt als Element) Gerade, Ebene und Raum, die Worte im Sinne Euklids gebraucht, die besten Veranschaulichungen der linearen Mannigfaltigkeiten sein.

Für die Schule haben ursprünglich Fr. Meyer (Halle a. S), M. Simon, H. Schubert u. a., sachgemäße Darstellungen der Arithmetik gegeben, zu denen in letzter Zeit die Werke von H. Weber (Nr. 162) und C. Färber (Nr. 39) hinzugekommen sind, neuerdings auch noch das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77 c). Dem Lehrer sind außerdem noch ganz besonders zu empfehlen die Vorlesungen von Herrn F. Klein, „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus" (vgl. Nr. 78 m).

b) Ausführung im Unterrichte.

Das Lehrziel der Arithmetik an den höheren Schulen ist ziemlich allgemein anerkannt, es lautet: „Verständnis der Logarithmen-

1) Vgl. H. Graßmanns Ausdehnungslehre von 1844 (Nr. 53).
2) Vgl. hier S. 49 Anm. 4.

Tafel." Der Schüler soll das Handwerkszeug, welches er in den letzten Jahren so viel gebraucht hat, auch noch in seiner Konstruktion genau kennen lernen, wobei zu bemerken ist, daß die Logarithmen-Tafel natürlich u. a. auch die Tabellen der goniometrischen Funktionen selbst enthalten muß, welche bei der ersten Einführung in die Trigonometrie ja zunächst die Hauptsache sind.

Ich beginne die zusammenfassende Wiederholung und Ergänzung der Arithmetik in der Prima etwa mit der Frage nach den Elementaroperationen, ihrer Eigenart, ihrer Stufeneinteilung (3) und ihrer Anzahl (7). Unter Hinweis auf die Zweigliedrigkeit[1]) des menschlichen Denkens wird betont, daß auf den verschiedensten Gebieten immer aus 2 Denkelementen a und b nach einem bestimmten Gesetze ein drittes c gebildet wird, was durch $c = (a, b)$ bezeichnet wird. Der Ansatz $c = (a, b)$ hat 2 Umkehrungen $a = (c, b)$ und $b = (c, a)$ und man sollte also in der Arithmetik bei 3 Stufen 9 Operationen erwarten oder vielleicht 6, aber nicht 7. Die Schüler finden meist von selbst, daß $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ im Gegensatze zu $a^b \gtrless b^a$ den Widerpruch löst, daß aber in logischer Hinsicht doch auch auf den Stufen 1 und 2 beide Umkehrungen vorhanden sind.[2]) Dabei wird bemerkt, daß die Begriffsdetermination nicht commutativ ist, (z. B. Kettenglieder und Gliederketten), und daß die gegenseitige Ersetzbarkeit von a und b, welche deren Vertauschung bedingt, auf den verschiedenen Gebieten, für die sie gilt oder gelten soll, von Fall zu Fall festgestellt werden muß. Nachdem auch das assoziative und das distributive Gesetz hervorgehoben ist, wobei die Operationen der 1. und 2. Stufe (4 Spezies) den 3 Operationen der 3. Stufe bereits scharf gegenübertreten, beginnt die eigentliche ergänzende und abschließende Wiederholung.

Bei einer mäßigen Schüler-Generation gehe ich von der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots$$

aus, ihren vielseitigen Charakter (Ordinalia usw.) hervorhebend.[3])

Bei einer guten Generation kann man in geschichtlicher, psychologischer und logischer Hinsicht über diesen Anfang zurückgreifen (vgl. hier a).

Für den Aufbau des Gebietes der gemeinen Komplexzahlen von der Reihe 1, 2, 3, ... aus wird das Permanenzprinzip (vgl. Nr. 59) verwendet, schließlich aber das gebrauchte Formelsystem $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$ usw. zusammengestellt, so daß eine axiomatische Grundlage entsteht, etwa wie bei F. Klein oder D. Hilbert u. a. Im einzelnen ist nichts besonderes zu bemerken, da die oben erwähnten Werke (vgl.

1) Vgl. Wundts Logik, Psychologische Einleitung (Nr. 169 b).

2) Vgl. dazu R. Schimmack „Zur Gleichung $x^y = y^x$" in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften, 1912.

3) Dabei wird man sich auch nicht den Hinweis auf die vor oder rückwärts schreitenden Beine des Papyrus Rhind als Operationszeichen für Addition und Subtraktion (im Sinne der Ordinalia?) entgehen lassen.

S. 105) hinreichende Anleitung geben; nur möchte ich hervorheben, daß die Theorie des Irrationalen streng begründet werden muß, wobei mir für die Schule der Weg von Weierstraß am günstigsten zu sein scheint. Natürlich wird man sich damit begnügen, die weitere Geltung der alten Rechenregeln des Rationalen nur für einen oder den andern Fall wirklich zu beweisen.

Die periodischen unendlichen Dezimalbrüche sind schon von der Unterstufe her bekannt und ihnen gegenüber werden die Irrationalzahlen zunächst am besten als unperiodische unendliche Dezimalbrüche eingeführt, wie es auch Herr F. Klein in seinen Vorlesungen für Anfänger tut.[1])

Die Zeichenregel wird ursprünglich als eine empirische Regel gemäß dem Permanenzprinzipe eingeführt. Wird z. B. für $5(3-2)$ probeweise angesetzt $\pm 5 \cdot 3 \pm 5 \cdot 2 = \pm 15 \pm 10$, so muß dies zu dem Ergebnisse 5 führen, und das ist nur der Fall, wenn das erste Zeichen $+$ und das zweite Zeichen $-$ ist, usw.

Den Beweis liefert man in Anlehnung an Weierstraß für 2 Einheiten $e = +1$ und $e' = -1$, die der Bedingung $e + e' = 0$ genügen, unter der Voraussetzung $e \cdot e = e$ gemäß dem Permanenz-Prinzipe durch Multiplikation von $e + e' = 0$ mit e und e', und zwar so:

1) $$e \cdot e + e \cdot e' = 0$$
$$e \cdot e' = -e \cdot e = -e$$
2) $$e \cdot e' = e' \cdot e$$
3) $$e' \cdot e + e' \cdot e' = 0$$
$$e' \cdot e' = -e' \cdot e = +e.$$

Graphische Darstellung (Zahlenebene). Geschichtliche Notiz über andere Formen der Arithmetik (Quaternionen usw.) und Charakterisierung der Einzigartigkeit der gemeinen Komplexzahlen als Abschluß bei „natürlicher“ Axiomatik.

Weitere Beschäftigung mit dem Komplexen, als dessen Sonderfälle nun Reelles und Imaginäres auftreten.[2]) Der Parallel-Koordinaten-Darstellung $a \cdot e + b \cdot i$ tritt die Polar-Koordinaten-Darstellung $r[e \cdot \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi]$ gegenüber, die später durch die Exponentialfunktion ihre endgültige Formung erhält. Sätze von Moivre. Kreisteilung.

Gegenüber der direkten Bestimmung der Hauptoperationen haben schon deren Umkehrungen, unter Hinweis auf das reiche Material früherer Beispiele, Gelegenheit gegeben, auf die „indirekte“ Bestimmung durch Bestimmungsgleichungen aufmerksam zu machen und diese zu klären.

1) Vgl. Nr. 78 m.

2) Historisch wird erwähnt, daß sich erst beim Übergange zum Komplexen bestimmte Fragen beantworten lassen und daß man dabei ganz von selbst wieder zum Reellen oder Imaginären zurückkehrt, wenn es das Problem fordert. Ein gutes Beispiel dazu gibt die Kreisteilung. Als Analogon dazu (sachgemäße Erweiterung des Gebietes) dient der projektive Beweis des planimetrischen Satzes von Desargues durch Übergang in den Raum.

8*

Dabei ist bereits erkannt, daß die Lösung der Gleichung 1. Grades nur die vier Species erfordert (Eindeutigkeit); Körper der rationalen Zahlen. Die Gleichung 2. Grades rollt die Probleme des Irrationalen, Imaginären und Komplexen auf. Wiederholung der quadratischen Gleichung in methodischer Behandlung (1. Quadratische Ergänzung, 2. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten, 3. Zerlegung gemäß $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. 4. Reduktion durch $x = y - \frac{p}{n}$ für $n = 2$). Für die kubische Gleichung führen, abgesehen von der historischen Lösung, mit der begonnen wird, von diesen Methoden Nr. 4 und Nr. 2 systematisch zum Ziele. Bei ausreichender Zeit wird auch die Gleichung 4. Grades behandelt, gemäß Methode Nr. 4 und Nr. 2. Allgemeines über algebraische Gleichungen im Gegensatz zu transzendenten. Die Bestimmung der Schwimmtiefe für einen geraden Zylinder führt z. B. bei vertikaler Achsenlage zu einer sehr einfachen algebraischen, bei horizontaler Achsenlage zu einer ziemlich verwickelten transzendenten Gleichung (arc α und sin α). Satz von Gauß (n Wurzeln) meist historisch für die Schule aufgenommen, sonst Beweis wie bei Weber (Nr. 162 (erste Auflage) I, S. 208 f). Summenform (Koeffizienten) und Produktform (Wurzeln) der Gleichung. Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten. Sie sind nach den Koeffizienten entwickelt und die Frage der Umkehrbarkeit dieses Systems (Entwicklung nach den Wurzeln) ist die Frage der allgemeinen Lösbarkeit der algebraischen Gleichungen. Historische Aufnahme des Satzes von Abel, daß die Gleichungen oberhalb des Grades 4 nicht allgemein lösbar sind, d. h. nicht durch Formeln, die auf den vier Species und einer endlichen Anzahl von Radizierungen beruhen. Symmetrische Gleichungen und Kreisteilungsgleichungen als einfachste Fälle der Abelschen Gleichungen. Charakterisierung der Bedeutung des ersten Viertels des 19. Jahrhunderts (von Gauß bis Abel) für die Gleichungstheorie.

Gleichungssysteme (Gleichungen mit mehreren Unbekannten). Ihre Lösungen sind Wurzelsysteme, im einfachsten Falle Paare, z. B. $(x_1; y_1) \ldots (x_5; y_5)$.

Normale Systeme (n voneinander unabhängige Gleichungen mit n voneinander unabhängigen Unbekannten) im Gegensatze zur Überbestimmung und Unterbestimmung. Ordnung (Grad) und Anzahl der Lösungen für das normale System. Zu den drei üblichen Lösungsmethoden (1. Substitution, 2. Komparation, 3. Multiplikatoren) für das System erster Ordnung wird die sogenannte Eliminationsmethode hinzugefügt (die Potenzen der Unbekannten gelten selbst als Unbekannte), um zu zeigen, daß im allgemeinen stets eine Schlußgleichung auf rationalem Wege hergestellt werden kann, und um die sogenannten „Irrationalen Gleichungen“ in bezug auf ihre Lösbarkeit beurteilen zu können.

Überbestimmung und Unterbestimmung. Erstere führt entweder auf Widersprüche oder auf Entdeckung von Beziehungen zwischen den Konstanten, die man nicht beachtet oder nicht gekannt hat, oder sie dient der Ausgleichungsrechnung bei Beobachtungen. Charakterisierung der Ausgleichungsrechnung mit besonderem Hinweise auf die Methode der kleinsten Quadrate. Die Unterbestimmung führt zurück zu der von Anfang an im Unterrichte beachteten Funktion und damit bei graphischer Darstellung zur analytischen Geometrie. Für 2 Variabeln gibt es eine Art (Linie in der Ebene), für 3 Variabeln zwei Arten der Unterbestimmung (Fläche und Linie im Raume). Die Unterbestimmung bei 2 Variabeln wird an vielen Beispielen durchgearbeitet, wobei stets Gleichung, Tabelle und graphische Darstellung koordiniert werden. Stetigkeit und Beispiele für unstetige Punktsysteme mit Häufungsstellen. Leichtere Aufgaben im Gebiete von 3 Variabeln.

Der einfachste funktionale Zusammenhang entspricht der viel verwendeten direkten Proportion, wie sie seit Quarta bekannt ist, er wird dargestellt durch eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y, durch $y = mx$ oder auch durch $y = mx + n$, wo $y - n$ zu x proportional ist. Für je 2 Wertepaare gilt in beiden Fällen $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ und dabei ist m der konstante Proportionalitätsfaktor. Für alle anderen Fälle von $y = f(x)$ wird die Ableitung $f'(x)$ als variabeler Proportionalitätsfaktor (m) eingeführt (vgl. zweispaltige Tabellen und deren Interpolation). Als klassische Beispiele Tangentenproblem und Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung, an Aufgaben durchgeführt. Ableitungsformeln für die einfachsten Funktionen. Taylors Satz für ganze Funktionen; Ausdehnung auf Potenzreihen unter Hinweis auf die Wichtigkeit des Restgliedes. Umkehrung des Übergangs von der Stammfunktion zur Ableitung. Die graphische Darstellung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ in Parallelkoordinaten als klassisches Beispiel für den Zusammenhang von $s = f(t)$, $v = f'(t)$ und $j = f''(t)$: Die Fläche der Kurve stellt den veränderlichen Weg dar, die Neigungen ihrer Tangenten die veränderliche Beschleunigung. Einfache Integrationen, die sich als Grenzwerte von Summen behandeln lassen.

Das normale Gleichungssystem als System von Unterbestimmungen. Graphische Lösung von normalen Gleichungssystemen. Auch die einfache Gleichung wird künstlich zum Gleichungssystem gemacht, so z. B. $x^2 - 7x + 12 = 0$ übergeführt in

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

Näherungsverfahren und Wurzelkorrektion. Maxima und Minima. Die Systeme 3. und 4. Ordnung, die nicht mehr konstruktiv (mit Zirkel und Lineal) behandelt werden können, lassen sich nach Einführung einer Parabel (die Schablone stellt sich der Schüler selbst her!) konstruktiv behandeln. Rückblick auf die Systeme 1. und 2. Ordnung bei Einführung eines Kreises usw. (Steiner und Mascheroni).

Die drei berühmten Probleme des Altertums. Die Kurve des Hippias.[1])

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 7.

Der **Binomische Satz** für ganzes positives n geht hervor aus den Beziehungen zwischen Wurzeln und Koeffizienten für eine Gleichung $n$ten Grades mit den Wurzeln $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots -\alpha_n$, falls diese alle den Wert $-\alpha$ haben. Dabei das Wichtigste aus der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitslehre.

Der Satz von Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

hat schon früher die Frage nach independenten Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ nahe gelegt. Der binomische Satz gestattet jetzt die Ausführung. Die Substitution $n\varphi = \epsilon$ und $\varphi = \frac{\epsilon}{n}$ führt zu den Formeln für den n-fach geteilten Winkel (Rückblick auf die Kreisteilung), welche für $\lim n = \infty$ zu brauchbaren Reihen für Sinus und Cosinus zu führen scheinen, was nun zu untersuchen ist. Reihentheorie unter Wiederholung der Lehre von der arithmetischen und geometrischen Reihe, welche letztere für die Schule das klassische Beispiel der Konvergenzuntersuchung liefert und für andere Beispiele als Majorante dient. Beweis der binomischen Formel für beliebige Exponenten, eventuell unter Betonung der Konvergenzbedingung historisch aufgenommen. Reihen für Sinus und Cosinus, die offenbar Bruchstücke einer Reihe (e^{xi}) darstellen. Exponentialfunktion und Logarithmus, sowie Arcusfunktionen nebst Berechnung der Zahl π.

Den Abschluß bildet das Ergebnis: „Wir haben zwei Gruppen von Funktionen kennen gelernt:

I. Eindeutige Funktionen von einfacher Periodizität, die sich **rational** aus der Exponentialfunktion aufbauen lassen.

II. Unendlichvieldeutige Funktionen als Umkehrungen der vorigen, deren Quelle der natürliche Logarithmus ist."

Im Gegensatz zu den vielen Aufgaben, die sich rechnerisch bewältigen ließen, wird noch auf solche hingewiesen, die nicht durch einfachperiodische Funktionen lösbar sind, (z. B. Mantel eines schiefen Kreiskegels, Länge des Bogens bei der Ellipse, Hyperbel, Lemniscate (Gauß) usw.). Hinweis auf die doppeltperiodischen Funktionen als Fortsetzung für die Bewältigung der Probleme.[1])

C) Geometrie.

Für die Schule kommen selbstverständlich nur Archimedische Formen der Geometrie in Frage, und zwar hat man bei der zusammenfassenden und ergänzenden Wiederholung in Prima natürlich anzuknüpfen an den geometrischen Aufbau der Unter- und Mittelstufe.

Geht man bei dieser Sachlage von einer Logisierung der zeitlich-räumlichen Sinnenwelt aus, so ist der **Punkt** (als ausdehnungsloser Ort) die natürliche Invariante, welche der Geometrie als **Element** zugrunde

1) Vgl. Nr. 167 f, S. 111 u. f.

liegt, und damit wird der Raum selbst als dreifache Mannigfaltigkeit aufgefaßt[1]), entsprechend den drei Bewegungsstufen: Punkt ... Linie, Linie ... Fläche, Fläche ... Körper bzw. Raum.

Als weitere Invarianten kommen Gerade und Ebene hinzu, sie mögen als erstes und zweites Elementargebilde bezeichnet werden. Bei deren Bildung ist in logischer Beziehung maßgebend:

1. Ein Element allein führt zu keiner Bestimmung.
2. Das Elementargebilde erster Ordnung ist durch zwei Elemente eindeutig bestimmt.
3. Das Elementargebilde zweiter Ordnung ist durch ein Element und ein Elementargebilde erster Ordnung, also auch durch drei Elemente eindeutig bestimmt, falls diese nicht nur ein Elementargebilde erster Ordnung bestimmen.

Veranschaulicht man sich die Gerade durch Bewegung eines Punktes, so ist sie eine bestimmte Punktreihe, und es fragt sich, ob die Gerade als eine offene oder eine geschlossene Reihe für die Darstellung der Erscheinungen zweckmäßiger ist. Bisher hat sich die einfachere Annahme einer offenen Reihe als ausreichend erwiesen, und damit bleibt die Wahl zwischen der Geometrie Euklids und der von Bolyai-Lobatschefskij.

Bei Nr. 3 tritt die Frage auf, ob das Elementargebilde zweiter Ordnung, das sich als eine durch einen Punkt und die Punkte einer Geraden bestimmte Reihung von Elementargebilden erster Ordnung darstellt, durch diese Reihung vollständig gegeben werden soll oder nicht. Durch die Forderung der Vollständigkeit wird die Eindeutigkeit der Parallelen im Sinne Euklids bestimmt, so daß die Geometrie von Bolyai-Lobatschefskij ausscheidet.

Eine vollstänige Definition des Elementes und der beiden Elementargebilde ist nur indirekt, d. h. durch Beziehungen möglich. Diese indirekte Definition liegt vor in der Axiomatik Hilberts, welche eine große Reihe von Untersuchungen zu einem vorläufigen Abschlusse bringt.[2])

Im übrigen genügt es für die Schule, hinzuweisen auf Thiemes Elemente der Geometrie (Nr. 147), welche auf Grund der modernen Axiomatik aufgebaut sind, auf das Handbuch von Killing-Hovestadt (Nr. 77c) und für alles weitere auf Wellsteins Geometrie (Nr. 165). Auch Schottens vergleichende Planimetrie (Nr. 128) ist zum Studium sehr zu empfehlen. Außerdem bietet etwa der Artikel von Enriques in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III, Heft 1) dem Lehrer eine gute Orientierung über den Stand der einschlägigen Fragen.

Ganz besonders hinzuweisen ist außerdem noch wieder auf die Vorlesungen von Herrn F. Klein „Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus". (Vgl. Nr. 78m.)

1) Vgl. hierzu Nr. 167d.
2) Vgl. dazu S. 74.

Das Lehrziel für die Geometrie ist an unseren höheren Schulen noch nicht völlig eindeutig bestimmt, doch zeigt die Aufnahme des Wortes „Axiomatik" in den von Herrn Treutlein ausgearbeiteten, wohl auch in Fühlung mit Herrn Stäckel entstandenen neuen Lehrplan in Baden deutlich die Richtung der augenblicklichen Bestrebungen an.

Die Meraner Lehrpläne weisen von Anfang an auf eine reichliche Verwendung der Bewegung innerhalb der Geometrie hin, so daß diese also nach ihnen nicht etwa ausgeschlossen ist, wie es zum Teil unter Berufung auf die Forderung strenger Systematik verlangt wird.[1]) Es ist auch nicht einzusehen, warum man in der Zeit der freien Begriffsbildung nicht auch den Begriff „des im Raume beweglichen starren Körpers", dessen „Starrheit" aber nur „Unveränderlichkeit bei der Bewegung" bedeutet, als zulässige Invariante ansehen dürfte.[2])

Die Geometrie der Schule ist zunächst Geometrie des Maßes, und zwar im Sinne Euklids. Diese benutzt anfangs zwei Maße, die Strecke und den Winkel. Die Goniometrie macht sie einmaßig, und man hat dann für die extensiven Größen der Geometrie das Schema:

Stufe 0: Streckenverhältnis ... Winkel (l^0).
Stufe 1: Strecke (l^1).
Stufe 2: Zweigliedriges Streckenprodukt ... Flächeninhalt (l^2).
Stufe 3: Dreigliedriges Streckenprodukt ... Volumen (l^3).

Die Entstehung des Maßstabes nach Wahl einer Einheitsstrecke und des Maßkreises (Transporteurs) nach Wahl des Einheitswinkels ist genauer zu erläutern, unter Beziehung auf die Reihe der reellen Zahlen (Axiom des Eudoxos. meist fälschlich nach Archimedes benannt), ebenso die Bildung der Flächeneinheit und der Volumeneinheit, wobei den Produkten der Maßzahlen entsprechend die neuen Größen von der Dimension l^2 und l^3 gebildet werden. Inhaltsgleichheit in der Ebene und im Raume unter Hinweis auf die sogenannte Umsetzung (Zerlegungsgleichheit) der Flächen und Körper, welche für die Pyramide (vgl. die Untersuchungen von M. Dehn[3])) nicht möglich ist. Notwendigkeit des Cavalierischen Prinzipes oder einer äquivalenten Integralbetrachtung.

Bei der Wiederholung sind Planimetrie, Stereometrie und die Anfänge der darstellenden Geometrie einheitlich zusammenzufassen. Systematische Behandlung der Konstruktionen, die entweder an und für sich oder für die Anwendungen wichtig sind. Etwas von den Verwandtschaften: zentrische und symmetrische Systeme usw., auch Abbildung durch reziproke Radien. Als Hauptaxiome treten dabei hervor die Axiome der

1. Eindeutigkeit der Geraden (durch 2 Punkte),
2. Eindeutigkeit der Ebene (durch Punkt und Gerade),
3. Eindeutigkeit der Parallelen (durch Punkt und Gerade).

---

1) Vgl. Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 13f.
2) Vgl. Nr. 167 d.
3) In den Mathem. Annalen Bd. 55 (1902).

Bei der Wiederholung sind die Sätze darauf zu prüfen, von welchen dieser Hauptaxiome sie abhängen. Soweit die Planimetrie nur vom ersten Hauptaxiom abhängt, ist sie als Sphärik übertragbar, falls man sich auf eine Halbkugel beschränkt und den (halben) Grenzkreis (konjugierte Pole!) ausschließt. Daß die Lehre von der Ähnlichkeit durch Hauptaxiom 3 bedingt wird und also auf der Kugelfläche keine Bedeutung hat, ist von besonderer Wichtigkeit. Beispiele erläutern den Zusammenhang und den Unterschied zwischen Planimetrie und Sphärik. So bleibt z. B. der Satz vom Außenwinkel des Dreiecks für die Sphärik in der Form bestehen, daß der Außenwinkel größer ist als einer der beiden nicht zu ihm gehörigen inneren Winkel, während er in der Planimetrie deren Summe ist.

Sphärik ($\alpha + \beta + \gamma > 180^0$) und Pseudosphärik ($\alpha + \beta + \gamma < 180^0$) im Gegensatze zur Euklidischen Planimetrie ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$), wobei etwa die Fläche Beltramis neben der Kugel zur Veranschaulichung herangezogen wird.

Erweiterung der Betrachtung auf den Raum. Frage nach den Raumformen. Die drei hauptsächlichen Geometrien, deren mittlere die Euklids ist, welche bisher zur Darstellung der Erscheinungen ausgereicht hat. Die „unstetigen" Räume, deren Behandlung wohl mit Dedekinds algebraischem Raume (Vgl. Nr. 24b, S. XII) begonnen hat, bleiben der Schule am besten fern.

Axiomatischer Abschluß für die Geometrie Euklids in einfacher Form (etwa Hilberts Gruppe I, IV und V). Übertragbarkeit der Axiome auf andere Systeme von Raumgebilden, z. B. auf das Parabolische Kugelgebüsch nach Wellstein.[1]) Auch Poincarés Lexikon[2]) für die Bolyai-Lobatschefskijsche Geometrie ist für die Schule bei einer guten Generation und günstiger Lage der Reifeprüfung wohl verwendbar.

Frage nach der Beseitigung der Bewegung innerhalb der Geometrie: axiomatische Festlegung eines Kongruenzsatzes, etwa nach Hilbert.

Die analytische Geometrie ergänzt die Geometrie des Maßes durch Einführung von Lagebestimmungen. Zunächst werden Strecke, Streckenverhältnis, Dreiecksfläche und Tedraedervolumen durch Parallelkoordinaten ausgedrückt, ev. auch in Polarkoordinaten umgeschrieben. Die eigentliche analytische Geometrie beginnt mit der Unterbestimmung von Gleichungssystemen. Die Gerade in der Ebene und die verschiedenen, den einzelnen Aufgabengruppen angepaßten Formen ihrer Gleichung. Unter gelegentlicher Exkursion in den Raum ist das Ziel etwa die Behandlung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in der Ebene mit ihren beiden Invarianten, wobei Determinanten lediglich als mnemotechnisches Schema herangezogen werden. Ausblick auf die Flächen zweiter Ordnung.

Das Strahlenbüschel, dessen Behandlung an Hesses Normalform an-

1) Nr. 165 (erste Auflage) II, S. 34f. 2) Nr. 113a S. 42.

schließt, u. a. führt zur Geometrie der Lage, der in der sogenannten „synthetischen Geometrie" auch auf der Schule bereits vorgearbeitet ist. Allgemeine Charakteristik der Geometrie der Lage als selbständiger Wissenschaft, etwa nach Reyes Einleitung und ersten Vorträgen.

Über die Raumanschauung in subjektiver und objektiver Hinsicht läßt sich vieles sagen, aber es ergibt sich dabei nur, daß der objektive Raum eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Raumanschauungen der Einzelnen ist, für deren Darstellung bisher Euklids Geometrie ausgereicht hat. In psychologischer Hinsicht entspricht der Tastraum (haptisch) der Geometrie des Maßes, der Sehraum (optisch) der Geometrie der Lage.[1])

D) Phoronomie.

Aus der „Phoronomie der Lage" oder Kinematik, die man auch noch zur Geometrie rechnen kann, sind nur die einfachsten Sätze über die Bewegung eines starren Körpers für die Schule erforderlich. Da dessen Lage durch drei Punkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, so läßt sich der Körper durch ein Bewegungsdreieck ABC ersetzen. Verschiebung und Drehung als einfache und technisch wichtige Sonderfälle der Bewegung. Darstellung der allgemeinen Bewegung durch Abrollen zweier Kegel, deren Spitzen etwa in A liegen, während die Drehungen um Achsen durch A erfolgen. Anwendung auf die Bewegung der Erde.

In der „Phoronomie des Maßes" tritt die Zeit zu den arithmetischen und geometrischen Größen hinzu. Über sie läßt sich in subjektiver und in objektiver Hinsicht vieles[1]) sagen, doch ergibt sich dabei schließlich nur, daß die objektive Zeit eine bestimmte Ordnung für alle subjektiven Zeitanschauungen der Einzelnen ist, die in ihr logisiert sind. Zu ihrer Messung dienen periodische Erscheinungen (Erddrehung, Pendel, Schwingungsdauer des Natriumlichtes usw.). Die eigentümliche protensive Größe der Zeit (Dauer) wird stets, z. B. durch die Zeigerbewegung und das *Zifferblatt, extensiv gemacht.*

Während die Griechen aus ästhetischen Gründen der Lehre von der Bewegung die gleichförmige Bewegung auf dem Kreise als Invariante zugrunde legten, hat man ihr seit den Tagen Leonardos (da Vinci) und Galileis die „gleichförmige Bewegung auf der Geraden" als Invariante zugrunde gelegt. Ersteres erwies sich als unzweckmäßig, letzteres als fruchtbar.

Während an dieser, dem Zeitfluße entsprechenden „Urbewegung" nichts weiter zu erklären ist, bedarf jede Abweichung von ihr der Erklärung.

---

1) Weiteres dazu in Nr. 36b und 36c, Bd. II von 120c, 113a, 169a, 169b u. a. Entsprechend der dreifachen Einteilung Analysis situs, Geometrie der Lage und Geometrie des Maßes unterscheidet Herr Enriques in Nr. 36c auch drei Gruppen von Empfindungen, indem er das allgemeine Tast- und Muskelgefühl für die Analysis situs in Anspruch nimmt, ein besonderes aber für die Geometrie des Maßes.

Die „Urbewegung" gibt Veranlassung, die erste **intensive** Größe zu bilden oder vorzubereiten[1]), die **Geschwindigkeit**.[2])

Ist bei der Bewegung eines Punktes w die durchlaufene Wegstrecke und d die zugehörige Zeitdauer, so ist für zwei Wegstücke w_1 und w_2 und die zugehörigen Zeitdauern d_1 und d_2 die Proportion

$$w_1 : w_2 = d_1 : d_2$$

bei beliebiger Größe von w und d für die gleichförmige Bewegung charakteristisch.

Um eine **Invariante** für das **einzelne** Wegstück zu erhalten, bildet man

$$w_1 : d_1 = w_2 : d_2$$

zunächst an den Maßzahlen, und führt $\frac{w}{d} = c$ als **neue** Maßzahl ein. Dieser ordnet man eine **neue** Größe unter dem Namen „Geschwindigkeit" zu, die man als $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Zugehörige Zeitdauer}}$ charakterisiert, den Quotienten der Maßzahlen dabei zum Muster nehmend. Der Vorgang ist so, als wenn man in der Geometrie für Bogen (b) und zugehörigen Zentriwinkel (β) am Kreise aus der Gleichung

$$b_1 : b_2 = \beta_1 : \beta_2$$

die Gleichung

$$b_1 : \beta_1 = b_2 : \beta_2$$

bildete und nun bei einem Radius r die neue Maßzahl $\frac{2r\pi}{360^0}$ für den Quotienten bildete und ihr die neue Größe $\frac{\text{Bogen}}{\text{Zugehöriger Winkel}}$ zuordnete. Das ist hier nicht zweckmäßig, bei der Bildung der Geschwindigkeit aber fruchtbar.

Führt man für eine gleichförmige Bewegung auf beliebiger Bahn die Stellung s auf der Bahn und den Zeitpunkt t der Zeitskala (Uhr) ein, so ist stets $w = s_1 - s_2$ und $d = t_1 - t_2$ und es gilt also

$$s_1 - s_2 = c(t_1 - t_2)$$

oder bei passender Einstellung der Skala

$$s = ct.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf ihre Einheiten homogen. Allgemein heißt $s = f(t)$ eine Bewegungsgleichung. Beispiele der Bewegung für einfache Fälle von $f(t)$ bei **gegebener** Bahn. (Zeichnerische Ausführung.)

Die Abweichung, welche $s = f(t)$ im allgemeinen von $s = ct$ zeigt, und die Abweichung der Bahn von der Geraden muß erklärt werden.

1. Die Abweichung **auf** der Bahn (Tangentialbeschleunigung).

---

1) Je nachdem man die Geschwindigkeit (v) oder die Bewegungsgröße (mv) als intensive Größe bezeichnet.

2) Sie muß für die Verwendung „extensiv" gemacht werden. Vgl. das bekannte Wort von Gauß bei Sartorius v. Waltershausen (Nr. 123 S. 98.).

Entsprechend $s = f(t)$ Einführung der Geschwindigkeit $v = f'(t)$ und der tangentialen Beschleunigung $j_T = f''(t)$ und höherer Ableitungen. Man geht aus von der mittleren Geschwindigkeit für ein Bahnstück und bewirkt den Übergang zur Grenze usw.

2. Die Abweichung der Bahn von der Geraden (Normalbeschleunigung).

Darstellung der Bewegung als Reihung von elementaren Urbewegungen.[1]) Die Richtungen der elementaren Urbewegungen (Tangenten) werden der Geschwindigkeit zugeordnet und diese so als Vektor dargestellt. Das Parallelogrammgesetz.[2]) Die Beschleunigung als Vektor und ihre Zerlegung in tangentialer (j_T) und normaler (j_N) Richtung.

Läßt man die Geschwindigkeit als Vektor am beweglichen Punkte haften, so beschreibt dessen Spitze relativ zu ihm den Hamiltonschen Hodographen, den man natürlich auch erhält, wenn man die Geschwindigkeiten als Vektoren an irgend einem festen Punkte anbringt.

Für die gleichförmige Kreisbewegung sind Bewegung und Hodograph ähnliche Systeme. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r und die Geschwindigkeit mit c, so hat man also für die Normalbeschleunigung j_N den Ansatz:

$$2r\pi : 2c\pi = c : j_N$$

und also

$$j_N = \frac{c^2}{r}.$$

Einführung des Krümmungskreises (ρ) und Ersatz der beliebigen Bahn durch eine Reihung von Bogen der Krümmungskreise. Bei einer Geschwindigkeit v gilt allgemein:

$$j_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Die Gesamtbeschleunigung j wird gebildet aus j_T und j_N und diese Bildung der Beschleunigung wird für die Kraft von grundlegender Bedeutung.

Soll die Bahn nicht als „gegeben" angesehen werden, so braucht man in der Ebene zwei und im Raume drei Bewegungsgleichungen. So entstehen drei Methoden:

1. Grundmethode bei gegebener Bahn.
2. Projektionsmethode (Parallelkoordinaten).
3. Polarmethode (Polarkoordinaten).

In der Ebene sind bei Nr. 2 die Bewegungsgleichungen $x = f(t)$ und $y = g(t)$, bei Nr. 3 die Bewegungsgleichungen $r = f(t)$ und $\varphi = g(t)$ erforderlich.

---

1) Im Gegensatze dazu später gelegentlich die Darstellung als Reihung von elementaren gleichmäßig-geänderten Bewegungen. Vgl. die Zeichnungen dazu in Nr. 167n, I, S. 98 u. 99.

2) Vgl. dazu die Untersuchung über dessen Voraussetzungen in Nr. 125a.

Schwingungsbewegung, Wellenbewegung, gleichförmige Bewegung auf einer Schraubenlinie dürften hier etwa das Lehrziel der Schule bezeichnen.

Die Flächengeschwindigkeit und Keplers Gesetze; deren Zusammenfassung in Newtons Gesetze, zunächst in phoronomischer Hinsicht.

Für Körper, und zwar lediglich für starre, ist aus der Phoronomie des Maßes nur das Einfachste über Verschiebung und Drehung zu geben, wobei aber Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung nicht übergangen werden dürfen.

Verwendung der Phoronomie für Aufgaben der Geometrie[1]) (Tangenten, Krümmungskreis usw.).

E) Dynamik.

Für die Schule scheint es mir bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft zweckmäßig, den geschichtlichen Weg der Dynamik in Abkürzung zu wiederholen.

Der uralte statische Kraftbegriff bietet keine besonderen Schwierigkeiten, er ist genau so entstanden, wie vieles andere, als „interpretatio ex analogia hominis". Die Erfahrungen am eigenen Körper bei Berührung mit fremden Körpern geben Veranlassung, die Begriffe „Zug und Druck" zu bilden, und diese auch auf die gegenseitigen Beziehungen zweier Fremdkörper zu übertragen. Der Stein, der unsere Hand drückt, quetscht auch nachgiebigen Boden, der Strick, der an unserer Hand zieht, reißt auch eine Stange aus. Die Erfahrung bietet alles, was hier zur Logisierung erforderlich ist, d. h. zur Darstellung der Kraft als Vektor, nämlich „Angriffspunkt, Richtung und Wert (Größe)". Für die Bestimmung der Kräfte gibt der überall vorhandene „Schwerdruck" oder „Schwerzug" (Gewicht) das Maß, wobei die Hebelwage, die ja eigentlich der Massenvergleichung dient, der Messapparat ist. Eine wirkliche Messung der Kräfte liefert die Federwage (Dynamometer), die dem Schüler als Brief- oder Fleischwage bekannt ist. In ihr kommt Hookes Gedanke zur Geltung: „Ut tensio sic vis". Daß diese statische Kraft in irgendwelcher Beziehung zur Bewegung steht, ist natürlich auch eine alte Erfahrung. Unser Körper leitet Bewegungen ein und hindert sie unter Zug- und Druckempfindungen, und man überträgt dies auch auf Fremdkörper. Bewegte Körper erzeugen in unserm Körper unter Bewegungsänderungen Zug und Druck. Ein belastetes Seil hält Zug aus, reißt es, so tritt Bewegung der Belastung ein, und der Zug gilt als verschwunden, usw.

Galilei hatte, wenn auch der Wortlaut bei ihm oft dynamisch gefärbt erscheint, auf dem Gebiete der Bewegung nur phoronomisch gearbeitet, erst Huygens, der sich von Galileis mathematischem Pendel zum physischen wandte (Trägheitsmoment), stieß auf eigentliche dynamische Auf-

1) Vgl. Nr. 167n, I, S. 188 u. f.

gaben. Dies führt zu Newton, der den Begriff der kinetischen Kraft einführt und mit ihm den alten statischen Kraftbegriff in Verbindung bringt, indem er diesen in die Invariante „Masse“ und die Beschleunigung spaltet. Das war eine geniale Leistung, die natürlich nicht „bewiesen“ werden kann.

Daß die Abweichung von der „Urbewegung“ außerhalb dieser gesucht werden muß, ist ein seit Galilei geltendes Prinzip, und diesem gemäß kann man sich Newtons Leistung etwa folgendermaßen klar machen: Gibt man dem Punkte der Geometrie einen Koeffizienten seiner dynamischen Wirksamkeit (Maßzahl der Masse) und nennt man einen solchen Punkt der Einfachheit wegen einen Massenpunkt, falls diese Masse verschwindend klein gedacht wird im Vergleich mit den Massen, die uns umgeben, so liegt es nahe, für zwei Massenpunkte A_1 und A_2 von den Massen m_1 und m_2 folgende Voraussetzungen zu machen, wobei eine eindeutige Darstellung des Vorgangs angestrebt wird:

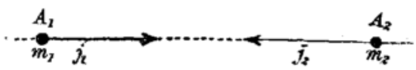

Fig. 5.

Die Beschleunigung j_1 von A_1 ist proportional der Masse m_2 von A_2 und umgekehrt, und beide Beschleunigungen liegen in der Geraden A_1A_2 und haben entgegengesetzte Richtungen. Man hat also (vgl. Figur 5)

$$j_1 = Cm_2 \text{ und } j_2 = Cm_1 .$$

Daraus folgt:

$$m_1 j_1 = C m_1 m_2 = m_2 j_2.$$

Mit Rücksicht auf die erfahrungsmäßig gegebene Paarwirkung (actio reactioni par) bei statischen Kräften, die in einer Stützstange zwischen A_1 und A_2 auftreten würden, befriedigt dieser Ansatz, und es liegt also nahe, die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung einzuführen. In der Bewegung gemessen stellt dieses Produkt die kinetische Kraft (Effektivkraft) dar, bei gehemmter Bewegung die entsprechende statische Kraft.

Das Parallelogrammprinzip, welches nun die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen und der statischen Kräfte zusammenfaßt, erledigt zunächst alle weiteren Fragen für einen Massenpunkt.

Für Körper als Systeme von Massenpunkten (oder Elementen der Masse) ist zunächst das Prinzip der Massensumme einzuführen, wonach entsprechend den Erfahrungen an der Hebelwage die Massen der Massenpunkte zur Masse des Körpers summiert werden.

Im übrigen muß natürlich die Verbindungsart der Massenpunkte bekannt oder definiert sein, ehe sich weitere Aussagen machen lassen. Der starre Körper ist dadurch charakterisiert, daß an ihm Gegenkräfte ohne Wirkung sind, d. h. beliebig fortgenommen oder zugesetzt werden dürfen. Diese Definition gestattet das Parallelogrammprinzip auf die zerstreuten Kräfte, die am starren Körper angreifen, anzuwenden. Für nicht starre

Systeme sind natürlich auch besondere Definitionen erforderlich, ehe ihre besondere Behandlung möglich ist.

Dabei ist darauf hinzuweisen, daß alle Kräfte als Paarwirkungen auftreten. Treten sie an Massenpunkten desselben Systems auf, so heißen sie dessen „innere" Kräfte. Treten sie an Massenpunkten verschiedener Systeme auf, so wird die eine Hälfte der Paarwirkung als äußere Kraft angesehen, die andere nicht beachtet. Geben wir z. B. für eine Uhr der Paarwirkung zwischen Erde und Uhrgewicht Gelegenheit sich zu äußern, indem wir das Gewicht an die Kette der Uhr hängen, so wird die hier verschwindende Einwirkung des Gewichts auf die Erde (mit Recht) nicht beachtet und die andere Hälfte dieser Paarwirkung gilt für die Uhr als äußere Kraft. Auf dieser Teilung der Paarwirkung unter Vernachlässigung ihrer einen Hälfte beruht die Berechtigung der gewöhnlichen Bezeichnung der Kraft als Ursache der Bewegung, man müßte natürlich ebenso von der „Ursache des Zuges oder Druckes" sprechen.

Die Auffassung der statischen als gehemmter kinetischer und der kinetischen als entwickelter statischer Kraft findet ihren scharfen Ausdruck im Prinzipe von d'Alembert, aus dem bekanntlich die Gleichungen von Lagrange folgen. Dieses Prinzip ist das wirkliche Prinzip der „Erhaltung der Kraft", falls man das Wort „Kraft" im eigentlichen Sinne nimmt. Ist $K = mj$ für einen Massenpunkt eines beliebigen Systems die in der Bewegung gemessene Kraft, so ist diese aufzufassen als Resultante aller inneren [J] und äußeren Kräfte [A], die auf den Massenpunkt wirken.

In Vektorbezeichnung ($\times$) hat man also

$$K \overset{\times}{=} J \overset{\times}{+} A .$$

Führt man die Gegenkraft $\overline{K}$ von K ein, so gilt ebenso

$$\overline{K} \overset{\times}{+} J \overset{\times}{+} A \overset{\times}{=} 0 .$$

Denkt man nun die Massenpunkte des Systems in der Lage, welche sie in einem bestimmten Zeitpunkte haben, festgehalten, so daß sie einen, diesem Zeitpunkte entsprechenden starren Körper bilden, so steht an diesem das System aller Kräfte $\overline{K}, I, A$ im Gleichgewichte. Da sich aber das System der Kräfte I gemäß dem Prinzipe der Paar-Wirkung in sich aufhebt, so steht auch das System aller Kräfte $\overline{K}$ und A im Gleichgewichte d. h. die Systeme K und A sind aequivalent.

Eine passende Anwendung des Prinzips von d'Alembert für die Schule bieten die Erscheinungen an der Atwoodschen Fallmaschine dar.

In dem Prinzipe der Paar-Wirkung kommt die alte Frage zur Ruhe, ob die Materie (ex analogia hominis) aktiv ist (Aristoteles) oder träge (Zeitalter Galileis), sie ist beides, aber jede einseitige Deutung ist unnatürlich, es handelt sich eben um eine Beziehung. Man hat also für die Begründung der Dynamik, nachdem die Kraft definiert ist, folgende Prinzipien:

1. Prinzip der Masse. Jedem Massenpunkte kommt ein bestimmter Zahlen-Koeffizient seiner dynamischen Wirksamkeit zu.
2. Prinzip des Parallelogramms.
3. Prinzip der Massensumme.
4. Prinzip der Paar-Wirkung.
5. Prinzip von d'Alembert.

Von den bekannten Umformungen dieser Prinzipien ist das „Prinzip des kleinsten Zwanges" (Gauß) für die Schule sehr wohl brauchbar, da es zur Lösung von Aufgaben benutzt werden kann.

Die Bildung der gebräuchlichen dynamischen Größen, wie Kraft-Antrieb, Bewegungs-Größe, Arbeit, Energie usw. bietet keine Schwierigkeiten. Den Maßzahlen-Verbindungen entsprechend werden, falls es zweckmäßig erscheint, neue „Größen" gebildet, und so die Homogeneität der Gleichungen gewahrt. Im absoluten Maßsysteme treten die drei Grundgrößen, die extensive, die protensive und die intensive zusammen. Dimension der Größen.

Bei den Anwendungen stehen selbstverständlich Energie und Arbeit im Vordergund, für deren Beziehung der freie Fall zunächst das klassische Beispiel gibt. Der Quellpunkt aller Formeln ist die „phoronomische" Gleichung

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = j(s - s_0) = j \cdot w$$

welche durch Multiplikation mit der Maßzahl der Masse „dynamisch" wird. Newtons Gesetz in dynamischer Hinsicht (vgl. S. 116).

Leichte Übungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, auch mit Berücksichtigung der Deformationen (Hookes Gesetz), beleben das Aufgabengebiet, dessen Lehrziel etwa durch die Behandlung des physischen Pendels bezeichnet wird, außerordentlich.[1]) In der Statik sind natürlich auch die Grundzüge der Graphostatik zu geben.[2])

Für den Lehrer gibt der 4. Band der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" alles Erforderliche, namentlich der einleitende Artikel von Herrn Voß, „über die Prinzipien der rationellen Mechanik" und der Artikel von Herrn Stäckel über Elementar-Mechanik. Dabei ist aus der Vorrede von Herrn F. Klein besonders hervorzuheben: „Mechanik, überhaupt angewandte Mathematik, kann nur durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst gelernt werden.... Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muß....

---

1) Vgl. Nr. 167 m.

2) Man vergleiche damit P. Appel und J. Chappuis „Leçons de Méchanique élementaire à l'usage des élèves des classes de mathématique A et B. 3. Aufl. Paris 1909.

Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vincis sich wieder bewahrheiten, daß die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist". In diesem Sinne soll auch schon auf der Schule gewirkt werden. Dabei kann auch zum Bewußtsein gebracht werden, daß im Zeitalter Leonardos die alte Frage: „Warum fallen die Körper?" ersetzt wurde durch die moderne Frage: „Wie fallen sie, d. h. nach welchem Gesetze?" Auf die erste Frage hatten die Aristoteliker vieldeutig mit Angabe von Ursachen als Ur-Sachen (Dingen) geantwortet, auf die zweite antworteten Leonardo da Vinci und Galilei eindeutig durch die Fallgesetze, d. h. durch Beziehungen zwischen Weg und Zeit, und damit begann die Phoronomie und Kinetik, die mit der alten Statik zur modernen Mechanik zusammenwuchs.

Diese „klassische" Mechanik, welche jetzt vielleicht wegen der Einordnung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen einer Umbildung entgegengeht, wird für die Schule wohl noch lange ihre Bedeutung behalten. Wie sie sich zu der neuen, im Werden begriffenen allgemeinen Mechanik verhält, das zeigt gewissermaßen mit einem Schlage der überaus durchsichtige und übersichtliche Vortrag[1]) von F. Klein: „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe", in dem er Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung vom Standpunkte der affinen Auffassung der Welt aus beleuchtet. „Was die modernen Physiker Relativitätstheorie nennen, ist die Invariantentheorie des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes x, y, z, t (der Minkowskischen Welt) gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kollineationen (Affinitäten), eben der Lorentzgruppe."

5. Die Anwendungen.

Auf die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die einzelnen Erscheinungsgebiete muß auch auf der Schule von Fall zu Fall hingewiesen werden. Dazu eignen sich einfache Aufgaben, welche zeigen, was alles am „Gegebenen" vernachlässigt werden muß, um es dem „Kalkül" zu unterwerfen.

Dies geht auch besonders hervor aus dem gewöhnlichen Gange der technischen Mechanik mit seiner Stufenfolge in der Annäherung an die Wirklichkeit. Man betrachtet zunächst Kräfte am starren Körper der Geometrie, der frei ist und natürlich gewichtslos, bringt ihn in gegenseitige Beziehung mit der Erde (Schwerpunkt, Gewicht usw.), hebt die Freiheit auf (Befestigungs-Reaktionen und Reibungen) und ordnet schließlich die tatsächlich gegebenen Form-Änderungen ein, so weit es angeht.

Andererseits halte ich die Wahrscheinlichkeitslehre, durch welche selbst dem (scheinbaren) Zufalle Gesetze abgerungen werden, für sehr geeignet, die Bedingungen der Verwendung der Mathematik für die Schüler zu klären.

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19, 1910.

Dabei ist alles, was hier am Schlusse des Kapitels „Die Begriffsbildung der Mathematik und ihr Charakter" ausgeführt wurde, auch für die Schule in geeigneter Form zu verwenden.

Über die numerischen und graphischen Methoden der angewandten Mathematik geben für die Schule gute Auskunft der Vortrag von Herrn C. Runge auf dem letzten Osterferienkursus (1912) in Göttingen[1]) und die daran anschließenden Erörterungen.[2])

Was das Gebiet der Anwendungen anlangt, so kann zunächst auf die Lehrbücher und sonstigen Veröffentlichungen von Herrn G. Holzmüller verwiesen werden, vor allem aber auf die Weber-Wellsteinsche Enzyklopädie, namentlich in ihrer neuesten Auflage, und außerdem auf das Einschlägige in diesen IMUK-Abhandlungen.[3]) In bezug auf die Mechanik, insbesondere auch in bezug auf die technische Mechanik findet man in meinem Lehrbuche (Nr. 167n, vgl. dazu auch Nr. 167m) zahlreiche Anwendungen und Aufgaben, welche auch für die Schule brauchbar sind.

Während auf den Schulen die Aufgaben jetzt wohl fast überall auch für die Naturerkenntnis fruchtbar gemacht werden, sind Aufgaben, die der Naturbeherrschung dienen, im Schulbetriebe immer noch selten.

Für Beides gilt ein Wort Galileis, das sich in seinem „Saggiatore" findet und etwa folgendermaßen lautet[4]): „Die Philosophie des Universums kann man nur verstehen, wenn man die Sprache kennt, in der sie geschrieben ist. Diese ist aber die Sprache der Mathematik, und ihre Zeichen sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren." Dabei muß man sich daran erinnern, daß Galilei sich nicht bloß mit der Feststellung der Fallgesetze u. a. beschäftigte, sondern auch mit Untersuchungen über die Bruchfestigkeit der Balken. Wir haben bereits auf die Vorrede von Herrn F. Klein zur Mechanik in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" (Bd. 4) hingewiesen[5]), in der auch Leonardos da Vinci gedacht wurde: er nannte die Mechanik das Paradies der Mathematiker, denn „si viene al frutto".

So haben jene großen Schöpfer der modernen Mechanik über deren Wert gedacht, und dem entspricht es durchaus, daß in neuerer Zeit auch Schülerübungen auf den verschiedenen Gebieten, namentlich auch auf dem der Physik, die Bedeutung von Beobachtung und Versuch für die Schule außer Frage stellen. Dabei ist aber auch darauf hinzuweisen, wie die Maßzahlen, welche den Erscheinungen abgerungen werden, tatsächlich zu verwenden sind, nicht bloß zur Verifizierung bereits bekannter

1) Vgl. Mathematische Vorträge und Diskussionen auf dem Osterferienkursus Göttingen 1912, Bericht von Weinreich, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 43, 1912.

2) Vgl. dazu ferner M. d'Ocagne „Calcul graphique et nomographique" (Encyclopédie Scientifique), Paris 1908.

3) Vgl. auch hier S. 14, Anmerkung 1.

4) Vgl. Opere di Galileo Galilei, Firenze 1890–1900, VI, S. 232.

5) Vgl. hier S. 120.

Formeln, sondern auch zur Herstellung gesetzlicher Beziehungen und deren systematischer Verbesserung.

So muß der Schüler die Aufstellung „empirischer" Formeln bzw. die Ableitung von „Gesetzen" bei gegebenem Zahlenmaterial in einfachen Fällen selbst vornehmen.[1]) Dabei kann man auch zeigen, daß die gewählte Funktion bis zu einem gewissen Grade willkürlich bleibt[2]), und im besonderen auf die Bedeutung der Potenzreihe, zunächst der endlichen hinweisen. Das Zahlenmaterial für s und t beim freien Falle führt leicht zu der Formel $s = \frac{g}{2} t^2$, in anderen Beispielen (Spannung des Wasserdampfes) ist der Abschluß in einer Formel durchaus unbestimmt.

Dabei ist die Bedeutung der Proportion, zunächst der direkten und dann der indirekten, besonders hervorzuheben. Man hat immer zunächst den Versuch gemacht und wird es immer wieder tun, für zwei Größen, die zugleich wachsen und zugleich abnehmen, den funktionalen Zusammenhang durch eine direkte Proportion zu bestimmen, um gegebenen Falles von hier aus durch Verbesserungen weiter zu kommen.

Aus den Sätzen „Der größeren Seite im Dreiecke liegt der größere Winkel gegenüber" usw. schließen gerade begabtere Schüler auf die Proportion

$$a:b:c = \alpha:\beta:\gamma$$

bzw. für irgend einen Erweiterungsfaktor m auf die Gleichung $a = m\alpha$. Am rechtwinkligen Dreiecke ($\gamma = 90^0$) sehen sie ein, daß der Schluß falsch war, weil hier $\alpha + \beta = \gamma$ nach sich ziehen würde $a + b = c$, was einen Widerspruch mit $a + b > c$ gibt. Später erfahren sie den richtigen Ansatz $a = m \cdot \sin \alpha$ für $m = 2r$, falls man den Radius des Umkreises mit r bezeichnet, und die Sinus-Reihe gibt ihnen deutlich die Verbesserung an, welche erforderlich war.

Die Korrektur der Pendel-Formel für den Ausschlag α

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,(1 + f(\alpha))$$

und Ähnliches zeigt, wie die mathematische Anpassung an die Erscheinungen mehr und mehr vervollkommnet werden kann.

Während sich die direkte Proportion durchaus im Gebiete der Gleichungen ersten Grades bewegt, führt die indirekte Proportion bei graphischer Darstellung zur Hyperbel. Als Beispiel diene etwa das Boyle-Mariottesche Gesetz

$$p \cdot v = \text{constans}.$$

Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit aller Messungen ist auch die Bedeutung der Überbestimmung von Gleichungssystemen klar zu machen, woran sich einige allgemeine Bemerkungen über Ausgleichungsrechnung knüpfen lassen.

1) Vgl. dazu auch Nr. 140.

2) Vgl. hierzu Nr. 78i und Nr. 161a S. 55, Anm. 2.

Daß die Überbestimmung gelegentlich auch auf Widersprüche hinweist, gelegentlich auch zeigt, daß bestimmte Beziehungen zwischen Konstanten nicht beachtet wurden oder noch nicht bekannt waren, ist dabei zu erwähnen. Für letzteres geben die drei Projektionsgleichungen des Dreiecks ein gutes Beispiel. Das System

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ a\cos\beta + b\cos\alpha = c \\ 2.\ a\cos\gamma + c\cos\alpha = b \\ 3.\ b\cos\gamma + c\cos\beta = a \end{array}\right\}$$

bestimmt bei gegebenen α, β, γ nur die Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$, nicht a, b, c selbst. Für diese Verhältnisse erhält man aus 1) und 2) einerseits und aus 2) und 3) anderseits verschiedene Werte, solange nicht die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ berücksichtigt bzw. von neuem gefunden wird.

Gerade die Anwendungen sollen den Schüler davon überzeugen, daß die Mathematik ein wichtiges Mittel der Naturerkenntnis, aber auch der Naturbeherrschung ist.

Vierter Abschnitt.

Schlußbetrachtungen.

Der Beitrag, den die Mathematik für die „Philosophie im Unterricht" liefert, muß zunächst mit den Beiträgen, welche die anderen Fächer der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gruppe geben, zu einer Einheit zusammengeschlossen werden; es handelt sich dabei, wie Herr Seith sagt, um das dem Kosmos zugewandte Ideal (vgl. S. 6).

Diesem steht die andere Einheit gegenüber, welche in den philologisch-historischen Fächern erarbeitet werden soll, das dem Menschen zugewandte Ideal.

Schließlich soll aus beiden die Einheit einer Weltanschauung erwachsen, für welche auf der Schule das humanistische Kernstück „Religion, Deutsch und Geschichte" den Kristallisationspunkt bezeichnet. Für die damit gegebene Aufgabe möchte ich neben der „Philosophischen Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage" von Schulte-Tigges und den Arbeiten von Gercken, Pietzker, Treutlein u. a. vor allem noch auf eine kleine Schrift von Halfmann „Einführung in die Weltanschauungsprobleme" verweisen, die unmittelbar für den Primaner geschrieben ist. Einzelnes, was im besondern die Mathematik anlangt, findet man in den drei, öfter schon herangezogenen Didaktiken von Reidt-Schotten, Simon und Höfler, welche auch des weiteren auf einschlägige Literatur aufmerksam machen.[1]) Hier mögen noch einige allgemeine Gesichtspunkte hervorgehoben werden.

---

1) Vgl. auch dazu die Abhandlung zur Geschichte der Mathematik von M. Gebhardt in diesen JMUK-Abhandlungen Bd. III Heft 6 und die dort gegebene Literatur.

Könnte man auf der Erde jede Spur des Menschen verwischen, so würde es nicht möglich sein, die philologisch-historische Wissenschaft wieder herzustellen, während das anschaulich-logische System der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung von neuem erzeugt werden könnte. In ihm kommt allem Individuellen gegenüber das Allgemein-Menschliche zur Geltung, und darum ist es international, und seine Wahrheit ist dieselbe in Berlin und in Paris. Daran ändern auch die Kämpfe um die Axiomatik nichts, deren Inhalt für Arithmetik und Geometrie jedenfalls feststeht, mag um ihren erkenntnistheoretischen Wert noch so viel Streit sein. Auf der Grundlage ihrer Axiomatik entwickelt diese Forschung jene strenge Notwendigkeit, welche so leicht dazu verführt, auch außerhalb ihrer Grenzen keine Freiheit anzuerkennen, wie z. B. die Geschichte des Naturalismus und Materialismus und gewisser Formen des Monismus lehrt.

Den Schüler bringen die Sprachen mit ihren Regeln, welche Ausnahmen zulassen, zum Bewußtsein, daß es auch in der Wissenschaft Alogisches gibt, welches sich nicht für formal-logische Arbeit formen läßt. Vielleicht könnten wir auch bei tieferer Einsicht dieses ganze Gebiet logisieren und z. B. für die Laut-Verschiebungen nicht bloß das Tatsächliche, sondern auch dessen Bedingungen angeben; aber diese tiefere Einsicht ist uns vorläufig jedenfalls verschlossen.

Neben dieser „qualitativen" Grenze unsres Erkennens macht sich aber auch eine „quantitative" überall geltend. Wir können nur Anzahlen bis etwa zu 5 oder 6 unmittelbar erfassen, und Ähnliches zeigt sich auf allen Gebieten. So würde z. B. eine exakte Meteorologie fordern, daß wir für jedes Luftteilchen den augenblicklichen Bewegungszustand kennen, aber das Problem, welches bei Voraussetzung dieser Kenntnis entstände, wäre wegen seiner Weitschichtigkeit für uns unlösbar.

Diese Erkenntnisgrenzen weisen ebenso wie die Kämpfe um die Begründung der Axiomatik und wie die Schwierigkeiten, die in den asymptotischen Prozessen trotz ihrer mathematischen Beherrschbarkeit liegen, darauf hin, daß die Notwendigkeit des Geschehens, welche wir durch die Logisierung des Gegebenen erkennen, ihre Grenzen hat, und daß also Platz bleibt für eine, in Freiheit gegründete Gesetzmäßigkeit des Sein-Sollenden, von welcher die ganze Geschichte der Menschheit Zeugnis ablegt in ihrem Ringen um religiös-ethische Ideale. Auch für diese Gesetzmäßigkeit des Sein-Sollenden wirkt die Mathematik auf der Schule mittelbar und auch unmittelbar, und damit für das zweite, dem Menschen zugewandte Ideal. In der mathematischen Arbeit mit ihren klaren Zielen, ihrer Strenge und ihrer steten Selbstkontrolle, wie sie z. B. die „Probe" einer Aufgabe gestattet, wird ein gutes Stück ethischer Erziehung geleistet.

Auch in ästhetischer Hinsicht kann die Mathematik auf der Schule, ganz abgesehen von der Verbindung mit dem Zeichnen, sehr wirksam sein. An Kroneckers Ausspruch: „Auch wir sind Dichter!" braucht nur nochmals erinnert zu werden, aber auch mit dem Hinweise, daß dem Schüler die Schönheit, die im Mathematischen liegt, wirklich zum Bewußtsein gebracht werden soll. Die berechtigte Forderung einer eleganten Darstellung führt zur Ausbildung in künstlerischer Hinsicht – die Kritik einer an sich richtigen aber uneleganten Lösung eines Schülers kann in dieser Richtung sehr wirksam sein.

Außerdem gestattet die Grenzmethode der Mathematik, geschichtlich gegebene zielstrebige Reihen von Veränderungen in Grenzvorstellungen abzuschließen, welche man als Ideen und Ideale zu bezeichnen pflegt, und so Werte wirklich zu begründen, welche in ethischer und ästhetischer Beziehung von Bedeutung sind, auch dem Gedanken der geschichtlichen Entwicklung eine genauere Form zu geben.[1])

Neben allem einzelnen ist aber besonders noch darauf hinzuweisen, daß die mathematisch-naturwissenschaftliche und die philologisch-historische Forschung, welche ja bei den Alexandrinern in enger Berührung und in gegenseitiger Achtung standen, auch auf dem späteren Wege ihrer Entwicklung sich schließlich immer zur Lösung einer gemeinsamen Aufgabe verbunden haben, mochte dies oft auch hüben und drüben nicht zum Bewußtsein kommen.

Im besondern hat die philologisch-historische Forschung des XIX. Jahrhunderts, welche zunächst dem Ideale „Klassisches Altertum" dienen wollte und in diesem Dienste das Ideal selbst kritisch zersetzen mußte, uns dafür die Kultur der Griechen und die Zivilisation der Römer erarbeitet, damit aber zugleich gezeigt, daß der ideale Mensch an keiner Stelle der Geschichte zu finden ist, auch nicht in Hellas, und daß alle Ideale jenseit der greifbaren Wirklichkeit liegen.[2])

Im besondern hat die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung des XIX. Jahrhunderts[3]), indem sie endgültig lehrte, die Sinnenwelt als ein in sich geschlossenes, durch unverbrüchliche Gesetze beherrschtes Ganzes anzusehen, den Menschen gezwungen, in seinem Innern die ewigsprudelnde Quelle seines religiös-ethischen Glaubens zu suchen, durch welche auch die Sinnenwelt ihre letzte Deutung erhält.

So weisen sie beide auf ein Ziel, auf das jenseit alles Räumlich-Zeitlichen liegende Reich des Sein-Sollenden mit seiner Freiheit.

Auf ihrem eigensten Gebiete kann die Mathematik Freiheit zwar nur in dem schöpferischen Geiste selbst anerkennen, nicht in der Gesetzmäßigkeit, die dieser feststellt, und es ist deshalb gut, daß auf der Schule überall die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung ergänzt wird durch die philologisch-historische, in der auch das Alogische des Lebens zur Geltung kommt.

---

1) Das Wort „absolut" ist meist, nicht immer, ein gutes Reagenz auf Ziele asymptotischer Entwicklungsreihen. Vgl. Nr. 167c.

2) Vgl. Nr. 167i, 167k, 167l und 167o.

3) Vgl. dazu Anm. 2 und besonders noch Nr. 98.

Zu den Ideal-Wissenschaften, welche von der Mathematik mit allen ihren Anwendungsgebieten gebildet werden, müssen auch die Real-Wissenschaften treten, welche dem Besonderen, im landläufigen Sinne Wirklichen zugewandt sind, vor allem dem Menschen und dessen vielgestaltigen sozialen Verbänden.

Aus beiden erwächst erst die Einheit des Wissens, die der Philosophie stets als unerreichbares und doch fruchtbringendes Ideal vorgeschwebt hat. In seinem Dienste hat sie, gegenüber allem, infolge der notwendigen Arbeitsteilung sich vielfach und stets mehr und mehr verzweigenden Einzel-Wissen, immer und immer wieder auf dessen Zusammenschluß hingewiesen, ihn künstlerisch durch eine Schluß-Dichtung ausgestaltend, und diese wichtige Aufgabe wird ihr auch für alle Zukunft verbleiben.

Fünfter Abschnitt.
Übersicht über die Literatur.

Die folgende Zusammenstellung bezweckt, für das weitere Studium der behandelten Fragen eine möglichst objektive, erste literarische Orientierung zu geben[1]).

Die bekannten Werke der Klassiker der Philosophie von Platon bis Kant einschließlich wurden nicht aufgenommen, ebensowenig die älteren Werke der Klassiker der Mathematik.

1. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände. Leipzig und Berlin 1909 u. f.
2. Apelt, E. Fr.,
   a) Theorie der Induktion. Leipzig 1854.
   b) Metaphysik. 1857. Neudruck. Halle a. S. 1910.
3. Avenarius, R.,
   a) Philosophie als Denken der Welt gemäß dem Prinzipe des kleinsten Kraftmaßes. Neue Auflage. Berlin 1903.
   b) Kritik der reinen Erfahrung. Neue Auflage. 2 Bde. Leipzig 1907.
4. Baumann, J.,
   a) Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. I. und II. Band. Berlin 1868 und 1869.
   b) Elemente der Philosophie. Leipzig 1891.
5. Beneke, E.,
   a) Lehrbuch der Psychologie als Naturwissenschaft, neu bearbeitet von J. G. Dreßler. Berlin 1861.
   b) System der Logik. Berlin 1842.
6. Bergson, H., Essai sur les données immédiates de la conscience. 6. Aufl. Paris 1908.
7. Biel, B., Der mathematische Unterricht in seiner Beziehung zu den anderen Unterrichtsgegenständen. Gymnasial-Programm. Bensheim 1895.
8. Boirac, E., Cours élémentaire de Philosophie. 24. Aufl. Paris 1911.
9. Boltzmann L., Populäre Schriften. Leipzig 1905.
10. Bolzano, B.,
    a) Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung usw. Leipzig 1817.
    b) Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt. Prag 1817. Neudruck, Berlin 1894.
    c) Drei philosophische Abhandlungen usw. (a. d. Nachlasse), mit einem Anhange „Bolzano, Literatur“ von Prihonsky. Leipzig 1851.
    d) Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem Nachlasse von Prihonsky. Berlin 1889.

1) Einschlägige Arbeiten des Verfassers mußten natürlich aufgeführt werden, soweit sie zur weiteren Begründung des in der Abhandlung selbst Gegebenen dienen.

11. Bonola, R., Die Nicht-Euklidische Geometrie; deutsche Ausgabe von H. Liebmann. Leipzig und Berlin 1908.
12. Boole, G., An investigation of the laws of thought etc. London 1854.
13. Borel, E., Elemente der Mathematik. Deutsch von P. Stäckel. 2 Bde. Leipzig 1908.
14. Brix, J., Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen; Dissertation. Leipzig 1889.
15. Burkhardt, H.,
    a) Algebraische Analysis. Leipzig 1903.
    b) Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken (Züricher Antrittsvorlesung von 1897) in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 11 (1902).
16. Cantor, G., Zahlreiche Arbeiten über die von ihm begründete „Mengenlehre" in den Math. Annalen seit 1871, im Journal f. reine u. ang. Mathematik seit 1874 und in den Acta mathematica 1884; vgl. besonders die Schrift: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig 1883. — Weitere Literatur z. B. im Enzyklop.-Artikel „Mengenlehre" von A. Schoenflies, Bd. I, 1, sowie in dessen Bericht in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 8 (1900) und Ergänzungsband 2 (1908).
17. Carnot, L. M. N., Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Paris 1797.
18. Cassirer, E.,
    a) Der kritische Idealismus und die Philosophie des gesunden Menschenverstandes. Philosophische Arbeiten, herausgegeben von Cohen und Natorp. I, 1. Gießen 1906.
    b) Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft. 2. Bd. Berlin 1906 u. f.
    c) Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910.
19. Chamberlain, H. St., Immanuel Kant. München 1905.
20. Cohen, H.,
    a) Platons Ideenlehre und die Mathematik. Marburg 1879.
    b) Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin 1883.
    c) Kants Theorie der Erfahrung. 2. Aufl. Berlin 1883.
    d) System der Philosophie. 2 Bde. (Logik und Ethik). Berlin 1902 und 1904.
21. Cohn, J., Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant. Leipzig 1895.
22. Cournot, A. A., Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. 2. Auflage. 2 Bde. Paris 1857.
23. Couturat, L.,
    a) De l'infini mathématique. Paris 1896.
    b) Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von C. Siegel. Leipzig 1908.
    c) L'algèbre de la logique (Sammlung Scientia). Paris 1905.
24. Dedekind, R.,
    a) Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1. Aufl. 1872. 2. Aufl. Braunschweig 1892.
    b) Was sind und was sollen die Zahlen? 2. Aufl. Braunschweig 1893.
25. Delboeuf, J.,
    a) Prolégomènes philosophiques de la géometrie. Liège 1860.
    b) Logique algorithmique. Lüttich 1877.
26. Dingler, H.,
    a) Über die Grundlagen der Euklidischen Geometrie, Mitteilungen des naturwiss. Vereins Aschaffenburg 6 (1907).
    b) Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911.
27. Donadt, A., Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Leipzig 1881.
28. Drobisch, M. W., Neue Darstellung der Logik. 4. Aufl. Leipzig 1875.

29. Du Bois-Reymond, E., Über die Grenzen des Naturerkennens. Die sieben Welträtsel. Neue Aufl. Leipzig 1891. Auch in den Reden, 2 Bände. 2. Aufl. Leipzig 1912.
30. Du Bois-Reymond, P., Die allgemeine Funktionentheorie. I. Teil. Tübingen 1882.
31. Dühring, E., Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. Berlin 1869, 2. Aufl. 1877.
32. Ehrenfels, C. v., Zur Philosophie der Mathematik. Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie. 1891.
33. Einstein, A., Zur Elektrodynamik bewegter Körper in den Annalen der Physik Bd. 17 (1905).
34. Elsenhans, Th., Fries und Kant. Gießen 1906.
35. Engel, F., siehe Stäckel Nr. 138a u. b und Graßmann Nr. 53.
36. Enriques, F.,
   a) Vorlesungen über Projektive Geometrie, übersetzt von H. Fleischer. Leipzig 1903.
   b) Probleme der Wissenschaft, 2 Bde., übersetzt von H. Grelling. Leipzig 1910.
   c) Prinzipien der Geometrie. Enzyklopädie-Artikel III, 1. Heft 1.
   d) Fragen der Elementargeometrie. Leipzig. 1. Teil deutsch von H. Thieme 1909, 2. Teil deutsch von H. Fleischer 1907.
37. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Leipzig 1898 u. f. (Die französische Ausgabe ist eine selbständige Bearbeitung der deutschen Ausgabe.)
38. Erdmann, B.,
   a) Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.
   b) Logik. Halle a. S. 1892 u. f. Neue Bearbeitung, 1907.
39. Färber, C., Arithmetik (Grundlehren der Mathematik I. 1). Leipzig u. Berlin 1911.
40. Fechner, G. Th.,
   a) Über die physikalische und philosophische Atomenlehre. 2. Aufl. Leipzig 1864.
   b) Kollektivmaßlehre, herausgegeben von G. F. Lipps. Leipzig 1897.
41. Fehr, H., Enquête de l'enseignement mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens. Paris-Genf 1908. Vgl. auch Enseignement mathématique 1905 bis 1908.
42. Fick, A., Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeitslehre. Würzburg 1883.
43. Fischer, E. G., Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis usw. Berlin 1808.
44. Frege, G.,
   a) Begriffsschrift. Halle a. S. 1879.
   b) Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884.
   c) Funktion und Begriff. Jena 1891.
   d) Grundgesetze der Arithmetik. Bd. I, Jena 1893. Bd. II, Jena 1903.
45. Frerichs, H., Die Hypothesen der Physik. Bremen 1879.
46. Fresenius, F. C., Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden 1868.
47. Freyer, P., Beispiele zur Logik aus der Mathematik und Physik. 2. Aufl. Berlin 1889.
48. Fries, I. F.,
   a) Mathematische Naturphilosophie. Heidelberg 1822.
   b) Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1842.
49. Friessche Schule. Abhandlungen der. Neue Folge. Herausgegeben von G. Hessenberg, K. Kaiser und L. Nelson. Göttingen 1904 u. f.
50. Frischeisen-Köhler, M., Wissenschaft und Wirklichkeit. Leipzig u. Berlin 1912.

51. Gercken, W., Die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Schulprogramm. Perleberg 1887.
52. Gmeiner, J. A., siehe Stolz Nr. 142c.
53. Graßmann, H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgeg. von F. Engel. 4 Bde. Leipzig 1894 bis 1902. (Bd. I enthält die Ausdehnungslehren von 1844 und 1862.)
54. Graßmann, R., Formenlehre. Stettin 1872 und 1891.
55. Grelling, K., siehe unter Enriques und Nelson.
56. Gutzmer, A.,
   a) Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1904.
   b) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte usw. Leipzig und Berlin 1908.
   c) Siehe auch Nr. 74.
57. Halfmann, H., Einführung in die Weltanschauungsprobleme. 3. Aufl. Berlin 1912.
58. Hamilton, W. R., Theory of Conjugate Functions. Dublin, Transactions 1835.
59. Hankel, H., Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. Leipzig 1867.
60. Harms, Fr., Logik. Herausgegeben von Wiese. Leipzig 1886.
61. Hauck, G., Die subjektive Perspektive. Stuttgart 1879.
62. Helmholtz, H. v.,
   a) Wissenschaftliche Abhandlungen. 3 Bde. Leipzig 1882 bis 1895. (Bd. II enthält die Aufsätze zur Erkenntnistheorie, Bd. III Nr. 29 die Abhandlung über Zählen und Messen.)
   b) Vorträge und Reden. 2 Bde. 4. Aufl. Braunschweig 1896.
63. Henrici, J. und Treutlein, P., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Leipzig 1896 u. f.
64. Herbart, J. Fr., Sämtliche Werke. Herausgegeben von Hartenstein. 12 Bde. Leipzig 1850 bis 1852.
65. Hertz, H., Die Prinzipien der Mechanik. Bd. 3 der gesammelten Werke, Leipzig 1894/95. Neue Auflage 1910.
66. Hessenberg, G., Grundbegriffe der Mengenlehre. Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Heft 4. Göttingen 1906.
67. Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1909. 4 Aufl. 1912.
68. Hillebrand, Fr., Zur Lehre von der Hypothesenbildung. Wien 1896.
69. Höfler, A.,
   a) Grundlehren der Logik und Psychologie. 2. Aufl. Leipzig und Wien 1906.
   b) Didaktik des mathematischen Unterrichts. [Bd. 1 der „Didaktischen Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen". Herausgegeben von A. Höfler und Fr. Poske.] Leipzig und Berlin 1910.
   c) Physik, mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie usw., unter Mitwirkung von E. Maß und Fr. Poske. Braunschweig 1904.
   d) Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichts. Braunschweig 1903.
   e) Grenzfragen der Mathematik und Philosophie (Wiener Vortrag 1906). Leipzig 1906.
   f) Philosophische Elemente in allen Unterrichtsfächern, philosophische Propädeutik als eigenes Fach (Vortrag 1905). Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft, 1905, Nr. 5.
   g) Die neuesten Einrichtungen in Österreich für die Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik [Berichte über den math. Unterr. in Österreich, veranlaßt durch die Intern. Math. Unterrichtskommission, Heft 12]. Wien 1912.

70. Hölder, O., Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig 1900.
71. Hovestadt, H., siehe Killing Nr. 77c.
72. Husserl, E. G.,
  a) Philosophie der Arithmetik. Halle a. S. 1891.
  b) Logische Untersuchungen. Halle a. S. Bd. I 1900, Bd. II 1901.
73. Ibrügger, Chr., Über die Grundlagen der Geometrie. Gymnasialprogramm. Stargard i. P. 1912 u. f.
74. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig 1892 u. f., zurzeit herausgegeben von H. Gutzmer.
75. Jevons, W. St.,
  a) Pure Logic etc. London 1884.
  b) The principles of science. London 1874.
76. Kerry, B.,
  a) Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. Vierteljahrsschrift für wiss. Philosophie, Jahrg. IX, X und XI.
  b) System einer Theorie der Grenzbegriffe, herausgegeben von G. Kohn. Leipzig und Wien 1890.
77. Killing, W.,
  a) Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885.
  b) Einführung in die Grundlagen der Geometrie I u. II. Paderborn 1893 bis 1898.
  c) Handbuch des mathematischen Unterrichts im Verein mit H. Hovestadt. 1. Bd. Leipzig und Berlin 1910.
78. Klein, F.,
  a) Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (1871). Math. Ann. Bd. 4, ferner 6, 7 und 37.
  b) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Das sogenannte Erlanger Programm, Erlangen 1872. Math. Ann. Bd. 43.
  c) Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve. Erlanger Bericht 1873. Math. Ann. Bd. 22.
  d) Nicht-Euklidische Geometrie I und II. Vorlesungen, ausgearbeitet von F. Schilling. 2 Bde. (vergriffen). Göttingen 1893.
  e) Über die Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten 1895.
  f) Zur ersten Verteilung des Lobatschefskij-Preises usw. Math. Ann. 50.
  g) Universität und Technische Hochschule in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Pringsheim Nr. 115c u. d.
  h) Über die Aufgaben und Methoden des mathematischen Unterrichts an den Universitäten in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Pringsheim Nr. 115c und d.
  i) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Vorlesungen, ausgearbeitet von C. Müller. Leipzig 1902. Neudruck 1907.
  k) Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät, betr. die Beneke-Preisaufgabe für 1901. Göttinger Nachrichten 1901.
  l) Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. (Wiener Vortrag 1905.) Leipzig 1906.
  m) Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 2 Bde. Vorlesungen, ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig 1908 und 1909.
  n) Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. (Göttinger Vortrag 1910.) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (sowie physikalische Zeitschrift) 1910.
  o) und Riecke, E., Über angewandte Mathematik und Physik. Leipzig 1900.
  p) –, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts. I. und II. Teil in 1 Bande. Leipzig 1904.
  q) und Schimmack, R., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907.

79. Kries, J. v., Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg i. B. 1886.
80. Kromann, K., Unsere Naturerkenntnis. Beiträge zu einer Theorie der Mathematik und Physik. Deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1883.
81. Kronecker, L., Werke; herausgegeben von K. Hensel. Leipzig 1896 bis 1899.
82. Laisant, C. A.,
 a) La mathématique, Philosophie, Enseignement. Paris 1898.
 b) Initiation mathématique. 7. Aufl. Paris 1909.
83. Lampe, E., Die Entwicklung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur (Rede). Berlin 1893. Vgl. auch J. C. V. Hoffmanns Zeitschr. usw. 1893.
84. Lange, F. A.,
 a) Geschichte des Materialismus. 2 Bde. 3. Aufl. Iserlohn 1876 u. 1877.
 b) Logische Studien. Ein Beitrag zur Neugründung der formalen Logik und der Erkenntnistheorie. Iserlohn 1877.
85. Laue, M., Das Relativitätsprinzip. Braunschweig 1911.
86. Liard, L.,
 a) Des définitions géométriques et des définitions empiriques. Paris 1903.
 b) Logique. 6. Auflage. Paris 1911.
87. Liebmann, O., Zur Analysis der Wirklichkeit. Straßburg 1876.
88. Lietzmann, W.,
 a) s. „Mathem. Bibliothek."
 b) Stoff und Methode des Rechenunterrichts in Deutschland, und Stoff und Methode des Raumlehrunterrichts in Deutschland in Nr. 1, Bd. V, Heft 1 u. 2.
89. Lindemann, F., Lehren und Lernen in der Mathematik (Rede). München 1904.
90. Lipps, G. Fr.,
 a) Die logischen Grundlagen des mathematischen Funktionsbegriffs. (Dissertation.) Zweibrücken 1888.
 b) Mythenbildung und Erkenntnis. Leipzig und Berlin 1907. Vgl. dazu auch Wundts philosophische Studien, Bd. X u. f.
 c) Weltanschauung und Bildungsideal. Untersuchungen zur Begründung der Unterrichtslehre. Leipzig und Berlin 1911.
91. Lorentz, H. A., The Theory of Electrons and its Applications to the Phaenomena of Light and Radiant Heat. Leipzig 1909.
92. Lotze, H.,
 a) Logik (System der Philosophie I). 2. Aufl. Leipzig 1880.
 b) Metaphysik (System der Philosophie II). 2. Aufl. Leipzig 1884.
93. Lourié, S., Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tübingen 1910.
94. Mach, E.,
 a) Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1883. 7. Aufl. 1912.
 b) Beiträge zur Analyse der Empfindungen. Jena 1886.
 c) Irrtum und Erkenntnis. Leipzig 1905.
 d) Über den relativen Bildungswert der philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächer. Wien 1886. Neue Aufl. 1908.
95. Mathematische Bibliothek. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben, unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Leipzig und Berlin 1911 ff.
96. Mangoldt, H. v., Die Begriffe „Linie" und „Fläche". (Enzykl. Artikel III Heft 1.)
97. Meinong, A.,
 a) Über Annahmen. 2. Aufl. Leipzig 1910.
 b) Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie. Leipzig 1904.
 c) Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften. Leipzig 1907.
98. Merz, I. Th., A History of European Thought in the XIX. Century. 2 vols. London und Edinburgh 1903 und 1908 (3. Aufl.).

99. Meyer, W. Fr., Zur Lehre vom Unendlichen. Tübingen 1889.
100. Michaelis, Über Kants Zahlenbegriff. Programm, Charlottenburg 1884.
101. Mill, J. St., System der deduktiven und induktiven Logik. Deutsch von Schiel. Braunschweig 1877.
102. Minkowski, Raum und Zeit; in dem Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 18 (1909).
103. Müller, F. A., Das Problem der Kontinuität in Mathematik und Mechanik Marburg 1886.
104. Nath, M., Bildungsaufgaben der Mathematik. Berlin 1904.
105. Natorp, P.,
  a) Descartes Erkenntnistheorie usw. Marburg 1882.
  b) Platons Ideenlehre usw. Marburg 1903.
  c) Philosophische Propädeutik. 3. Aufl. Marburg 1909.
  d) Allgemeine Psychologie. 2. Aufl. Marburg 1910.
  e) Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaft. Leipzig und Berlin 1910.
106. Nelson, L.,
  a) Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit. Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge. Bd. I. Heft 2 und 3.
  b) Über das sogenannte Erkenntnisproblem. Ebenda. Bd. II. Heft 4.
  c) Im Verein mit K. Grelling, Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. Ebenda. Bd. II. Heft 3.
  d) Kant und die Nicht-Euklidische Geometrie, in der Zeitschrift „Das Weltall" 1906.
107. Ostwald, W.,
  a) Vorlesungen über Naturphilosophie. 3. Aufl. Leipzig 1905.
  b) Grundriß der Naturphilosophie; in Reclams Universalbibliothek. Leipzig.
108. Pasch, M.,
  a) Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1882.
  b) Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882.
109. Paulsen, Das Problem der Empfindung. I. Die Empfindung und das Bewußtsein. Philosophische Arbeiten. Herausgegeben von Cohen und Natorp. Bd. I, Heft 4. Gießen 1907.
110. Peano, G.,
  a) Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Graßmann. Preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Turin 1888.
  b) Arithmetices principia nova methodo exposita. Turin 1889.
  c) I principii di geometria logicamente esposti. Turin 1889.
  d) Formulaire de Mathématiques. Turin 1897.
111. Petzoldt, J.,
  a) Maxima und Minima der Ökonomie (Dissertation). Altenburg 1891.
  b) Einführung in die Philosophie der reinen Erfahrung. 2 Bde. Leipzig und Berlin 1900 und 1904.
  c) Das Weltproblem vom positivistischen Standpunkt aus. 2. Aufl. Leipzig 1911.
112. Pietzker, Fr.,
  a) Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchung über die Grundlage der Geometrie. Braunschweig 1891.
  b) Das humanistische Element im exakten wissenschaftlichen Unterricht. Gymnasialprogramm. Nordhausen 1894.
  c) Sprachunterricht und Sachunterricht vom naturwissenschaftlichen Standpunkt. Bonn 1900.
113. Poincaré, H.,
  a) Wissenschaft und Hypothese. Übersetzt von F. Lindemann. 2. Aufl. Leipzig 1904.
  b) Der Wert der Wissenschaft. Übersetzt von E. Weber. Herausgeg. von H. Weber. Leipzig und Berlin 1910.

114. Poske, Fr., Oberstufe der Naturlehre, nach A. Höflers Naturlehre bearbeitet. 3. Aufl. Braunschweig 1911. – Vgl. ferner die von Poske herausgegebene Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, namentlich auch die Sonderhefte (Berlin).
115. Pringsheim, A.,
a) Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzykl.-Artikel. Bd. I, 1.
b) Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (Rede). München 1904. Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13.
c) Zur Frage der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung. Ebenda Bd. 7 (1899). Vgl. dazu Klein, Nr. 78g und h.
d) Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. Ebenda Bd. 6 (1898). Vgl. dazu Klein, Nr. 78g und h.
116. Reidt, Fr., Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin 1886. 2. Aufl. von H. Schotten. Leipzig 1906.
117. Reye, Th., Die Geometrie der Lage. 5. Auflage. Leipzig 1909 u. f.
118. Rickert, H.,
a) Gegenstand der Erkenntnis. 1904/05.
b) Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung. Tübingen 1902.
c) Kulturwissenschaft und Naturwissenschaft. Leipzig 1911.
119. Riecke, siehe Klein Nr. 78o u. p.
120. Riehl, A.,
a) Über wissenschaftliche und nichtwissenschaftliche Philosophie. Freiburg und Tübingen 1883.
b) Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. 2. Aufl. Leipzig 1904.
c) Der philosophische Kritizismus usw. 2 Bde. Neue Auflage 1908 u. f.
d) Logik und Erkenntnistheorie. Die Kultur der Gegenwart. Teil I. Abt. VI. 2. Aufl. 1908.
c) Humanistische Ziele des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Berlin 1909.
121. Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke usw. Herausgegeben von R. Dedekind und H. Weber. 2. Aufl. Leipzig 1892.
122. Russell, B.,
a) An Essay on the Foundations of Geometry. Cambridge (Univ. Press.) 1897.
b) The principles of Mathematics. 2 Bde. Cambridge (Univ. Press.) 1903 und 1912.
123. Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis. Leipzig 1856.
124. Schellbach, K. H.,
a) Neue Elemente der Mechanik; bearbeitet von Arendt. Berlin 1860.
b) Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. Berlin 1887.
125. Schimmack, R.,
a) Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. (Göttinger Dissertation.) Halle a. S. 1908. Erschienen in den Nova Acta der Kais. Leop. Kar. d. Akademie, Bd. 90 (1908).
b) Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts. Göttinger Habilitationsvortrag 1911. (Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Bd. 42.)
c) Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, Göttinger Habilitationsschrift, in Nr. 1, Bd. III, Heft 1.
d) Siehe auch F. Klein Nr. 78q.
126. Schmid, Bastian, Philosophisches Lesebuch zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Leipzig 1908.
127. Schoenflies, A.,
a) Berichte über die Mengenlehre in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 8 (1900) und Ergänzungsband 2 (1908).
b) Mengenlehre. Enzykl.-Artikel Bd. I, 1.

c) Die Stellung der Definition in der Axiomatik. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 20 (1911).

128. Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Bisher 2 Bde. Leipzig 1890 und 1893. (Vgl. auch Reidt.)

129. Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig und Berlin 1908 u. f.

130. Schröder, E.,
   a) Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig 1890 u. f.
   b) Über das Zeichen. Karlsruhe 1890.
   c) Der Operationsbeweis des Logikkalkuls. Leipzig 1877.

131. Schubert, H., Herausgegeben von. Sammlung mathematischer Lehrbücher. Leipzig 1899 u. f.

132. Schulte-Tigges, A., Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage. 2. Aufl. Berlin 1904.

133. Schuppe, W.,
   a) Das menschliche Denken. Berlin 1870.
   b) Erkenntnistheoretische Logik. Bonn 1878.
   c) Grundriß der Erkenntnistheorie und Logik. 2. Aufl. Berlin 1910.

134. Schur, F.,
   a) Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. Bd. 55.
   b) Die Parallelen-Frage im Lichte der modernen Geometrie. Päd. Archiv Bd. 34.
   c) Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin 1909.

135. Schwarz, H., Versuch einer Philosophie der Mathematik usw. Halle a S. 1853.

136. Sigwart, Ch., Logik. 2. Aufl. Freiburg i. B. B. 1893.

137. Simon, Max,
   a) Rechnen und Mathematik (Didaktik und Methodik). Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre usw. IV, 1. München 1895. 2. Aufl. 1908.
   b) Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionstheorie. Straßburg 1884.
   c) Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie. Straßburg 1890.
   d) Zu den Grundlagen der Nichteuklidischen Geometrie. Festschrift für E. E. Kummer und Straßburger Programm 1891.
   e) Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Leipzig und Berlin 1906.
   f) Über Mathematik (Erweiterung der Einleitung in die Didaktik). Philosophische Arbeiten. Herausgegeben von H. Cohen und P. Natorp. Bd. II, Heft 1. Gießen 1908.

138. Stäckel, P.,
   a) und Fr. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß usw. Leipzig 1895.
   b) und Fr. Engel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Bis jetzt 2 Bde. Leipzig und Berlin 1910.
   c) Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper, Enzyklopädie-Artikel IV, 6.
   d) Bearbeitung von Gauß' Nachlaß betr. die „Grundlagen der Geometrie“ in Bd. 8 von Gauß' gesammelten Werken.

139. Stadler, A., Über die Aufgabe der Mittelschule. München 1887.

140. Steinhauser, A., Die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln. Leipz. 1889.

141. Stöhr, A., Algebra der Grammatik usw. Leipzig und Wien 1898.

142. Stolz, O.,
   a) Größen und Zahlen (Rede). Leipzig 1891.
   b) B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Mathem. Annalen Bd. 18.

142. Stolz, O.,
c) Theoretische Arithmetik, in Verbindung mit I. A. Gmeiner. Leipzig 1902.
143. Streintz, H., Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.
144. Stumpf, K.,
a) Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig 1873.
b) Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Bayr. Akad. der Wiss. 1892.
145. Tannery, I., Elemente der Mathematik; deutsch von P. Klaeß. Leipzig u. Berlin 1909.
146. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 2. Jahrg. 1911. Leipzig und Berlin 1911.
147. Thieme, H., Die Elemente der Geometrie (Grundlehren der Mathematik II, 1). Leipzig und Berlin 1909.
148. Timerding, H. E., Die Erziehung der Anschauung. Leipzig und Berlin 1912.
149. Tobias, W., Grenzen der Philosophie usw. Berlin 1875.
150. Trendelenburg, F. A., Elementa Logices Aristoteleae. Berlin 1836.
151. Treutlein, P.,
a) Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts. Leipzig und Berlin 1911.
b) Lehrbuch der Elementar-Geometrie im Verein mit I. Henrici. Leipzig und Berlin. 4. Aufl. 1910.
152. Überweg, Fr., System der Logik. 2. Aufl. Bonn 1865.
153. Ulrici, H., Compendium der Logik. Leipzig 1860.
154. Vahlen, K. T., Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1905.
155. Venn, J., The Logic of chance. London 1876.
156. Verhandlungen der Internationalen Mathematiker-Kongresse (Zürich 1897, Paris 1900, Heidelberg 1904, Rom 1908). Leipzig 1897, Paris 1900, Leipzig 1904, Rom 1908.
157. Veronese, G., Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen usw. Deutsch von A. Schepp. Leipzig 1894.
158. Vierkandt, A., Die Stetigkeit im Kulturwandel. Leipzig 1908.
159. Volkmann, P., Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften. 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1910.
160. Volkmann von Volkmar, W., Lehrbuch der Psychologie usw. Cöthen 1885.
161. Voß, A.,
a) Über das Wesen der Mathematik. Leipzig und Berlin 1908.
b) Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Enzykl.-Artikel IV, 1, Heft 1.
162. Weber, H. und Wellstein, J., Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. 3 Bde. Leipzig und Berlin, neue Auflage [4 Bde.] 1909 u. f.
163. Weierstraß, K., Mathematische Werke. Berlin 1894 bis 1902.
164. Weigel, E., Philosophia mathematica. Jena 1693.
165. Wellstein, J., siehe Weber, H.
166. Wendt, G., Der deutsche Unterricht und die philosophische Propädeutik. (A. Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre III, 3.) München 1896.
167. Wernicke, A.,
a) Die Philosophie als descriptive Wissenschaft. Braunschweig 1882.
b) Grundzüge der Elementar-Mechanik. Gemäß den Anforderungen der philosophischen Propädeutik als Einführung in die physikalischen und technischen Wissenschaften für den Unterricht bearbeitet. Braunschweig 1883.
c) Die asymptotische Funktion des Bewußtseins. (Vierteljahrsschrift für wissensch. Philosophie 1887/88.)

167. Wernicke, A.,

d) Die Grundlage der Euklidischen Ceometrie des Maßes[1]). Gymnasialprogr. Braunschweig 1887.

e) Zur Propädeutik-Frage. (Zeitschrift für Österr. Gymnasien, 1888.)

f) Goniometrie und Grundzüge der Trigonometrie. Braunschweig 1888.

g) Beiträge zur Theorie der centro-dynamischen Körper[1]). Gymnasialprogr. Braunschweig 1892.

h) Aus dem Gebiete des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasialunterrichts. Hallenser Lehrproben 1894/95.

i) Kultur und Schule. Osterwieck a. H. 1896. (Vgl. auch den entsprechenden Artikel in Reins Enzyklopädischem Handbuche der Pädagogik.)

k) Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschung in ihrer Stellung zum modernen Humanismus (Vortrag). Berlin 1898.

l) Weltwirtschaft und Nationalerziehung (Vortrag). Leipzig 1900.

m) Schulaufgaben aus der Mechanik unter besonderer Berücksichtigung der Technik (Vortrag). Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften. 1900. [Vgl. dazu ferner den Bericht über die Vorträge der mathem.-naturw. Sektion der Philologen-Versammlung in Bremen von 1899.]

n) Lehrbuch der Mechanik. 4. Auflage. Braunschweig 1900 u. f.

o) Die kulturelle Bedeutung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung. Pädag. Archiv 1903.

p) Die Oberrealschule und die Schulreformfragen der Gegenwart (Vortrag). Leipzig und Berlin 1910.

q) Die Theorie des Gegenstands und die Lehre vom Ding-an-sich bei Immanuel Kant. Habilitationsschrift von 1881, mit Bemerkungen herausgegeben als Oberrealschulprogramm. Braunschweig 1904.

r) Kant ... und kein Ende? 2. Aufl. Braunschweig 1907.

s) Die Begründung des deutschen Idealismus durch Immanuel Kant. Ebenda 1910.

t) Kants kritischer Werdegang. Braunschweig 1911.

168. Witting, A., siehe „Mathem. Bibliothek".

169. Wundt, W.,

a) Grundzüge der physiologischen Psychologie. 3 Bde. 6. Aufl. Leipzig 1908 u. f.

b) Logik. 3 Bde. 3. Aufl. Stuttgart 1907 u. f.

170. Young, W. H., The Theory of Sets of Points. Cambridge (Univ. Press.) 1906.

171. Zeissig, E., Die Raumphantasie im Geometrieunterricht. Abhandlungen aus dem Gebiete der pädagogischen Psychologie und Physiologie; herausgegeben von H. Schiller und Th. Ziehen. Berlin 1902.

172. Zermelo, E., Abhandlungen zur Mengenlehre, besonders in den mathematischen Annalen Bd. 59 (1904) und Bd. 65 (1908).

173. Ziertmann, P., Die Philosophie im höheren Schulunterrichte usw. Oberrealschulprogramm. Steglitz 1906.

174. Zindler, K., Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften 1889.

175. Zöllner, J. C. F., Über die Natur der Kometen. Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntnis. Leipzig 1872.

---

1) Soweit noch Exemplare vorhanden, stehen sie auf Anfordern zur Verfügung.