

Universitäts- und Landesbibliothek Tirol

Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie

Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften -
auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener
Manuscripte Jacob Steiner's

Steiner, Jacob

1876

Vierter Abschnitt. Das Involutions-Netz (Polarsystem) und das
Kegelschnitt-Netz

Vierter Abschnitt.

Netze:

Das Involutions-Netz (Polarsystem) und das Kegelschnitt-Netz.

§. 56. Erklärung und Construction des Polarsystems.

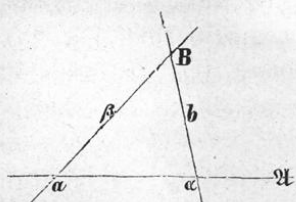
Die in den §§. 29 und 30 auseinandergesetzten Polar-Eigenschaften des Kegelschnitts haben eine eigenthümliche Beziehung von sämtlichen Punkten der Ebene zu sämtlichen Geraden in ihr und eine paarweise Verkettung der Punkte einer Geraden zu einem Punktsystem, sowie der Strahlen durch einen Punkt zu einem Strahlensystem ans Licht gebracht, nämlich: Jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts wird durch denselben in ein bestimmtes Strahlensystem, jede Gerade in ein bestimmtes Punktsystem verwandelt, dessen Construction aus der projectivischen Erzeugung des Kegelschnitts hervorgeht. Dreht man eine Gerade um einen festen Punkt, so verändert sich das Punktsystem auf ihr; die zu dem festen Punkt conjugirten Punkte für jedes dieser Punktsysteme liegen auf einer Geraden (Polare des festen Punktes); nehmen wir auf dieser Geraden verschiedene Punkte und fassen die ihnen zugehörigen Strahlensysteme auf, so laufen die zu der Geraden in jedem Strahlensystem conjugirten Strahlen durch einen festen Punkt (Pol der Geraden), der mit dem zuerst angenommenen Punkte zusammenfällt. Diese Zusammengehörigkeit der Punkte und Geraden einer Ebene lässt sich nun auch unabhängig vom Kegelschnitt herstellen und führt zu dem Begriff des Involutions-Netzes oder Polarsystems.

Sämmtliche Punkte und Gerade in einer Ebene sollen derartig mit einander in ein *Netz**) verflochten werden, dass auf jeder Geraden die Punkte sich paarweise zu einem bestimmten Punktsystem und zugleich die durch jeden Punkt gehenden Strahlen sich paarweise zu einem bestimmten Strahlensystem ordnen; je zwei conjugirte Punkte und Strahlen eines solchen Punkt- und Strahlensystems sollen *conjugirte Punkte und conjugirte Strahlen des Netzes* heissen. Ferner sollen für alle durch einen Punkt *B* gehende Strahlen diejenigen Punkte,

*) Wir wollen zur Abkürzung das Wort „Netz“ statt des längeren „Polarsystem“ beibehalten, verstehen aber darunter eben nur ein solches Involutionsnetz von Punkten und Strahlen in der Ebene, wie es beschrieben wird.

welche dem B conjugirt sind, rücksichtlich der auf diesen Strahlen befindlichen Punktsysteme auf einer und derselben Geraden $\mathfrak{A}$ liegen und zugleich alle diejenigen Strahlen, welche dem Strahl $\mathfrak{A}$ conjugirt sind, in denjenigen Strahlssystemen, deren Mittelpunkte auf $\mathfrak{A}$ liegen, durch einen und denselben Punkt und zwar durch den vorgenannten Punkt B gehen. Der Punkt B und die Gerade $\mathfrak{A}$ sollen *Pol und Polare des Netzes* heissen. Dass eine solche Verflechtung der Punkte und Geraden einer Ebene möglich ist, wird die sogleich anzugebende Construction lehren; zuvörderst bemerken wir, dass aus der gegebenen Erklärung unmittelbar folgt: *Jedes einem Punkte B zugehörige Strahlssystem liegt mit dem seiner Polare $\mathfrak{A}$ zugehörigen Punktsystem perspectivisch*; denn seien a und α irgend ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems auf dem Träger $\mathfrak{A}$, und B der Pol desselben (Fig. 87),

Fig. 87.



so sind B und a auf dem Strahl Ba , ein Paar conjugirter Punkte, weil gleichzeitig $\mathfrak{A}$ die Polare von B ist nach dem Obigen; zweitens sind auch α und a conjugirte Punkte, folglich ist Ba die Polare von a und ebenso Ba die Polare von α ; wenn aber a der Pol von Ba ist, so müssen Ba und Ba conjugirte Strahlen sein; denn

alle zu Ba conjugirten Strahlen müssen durch a gehen; also liefert das beliebig angenommene Paar conjugirter Punkte aa auf dem Träger $\mathfrak{A}$, mit B verbunden, ein Paar conjugirter Strahlen Ba und Ba des Strahlsystems, welches dem Punkte B zugehört, und es liegen daher Punktsystem und Strahlssystem perspectivisch.

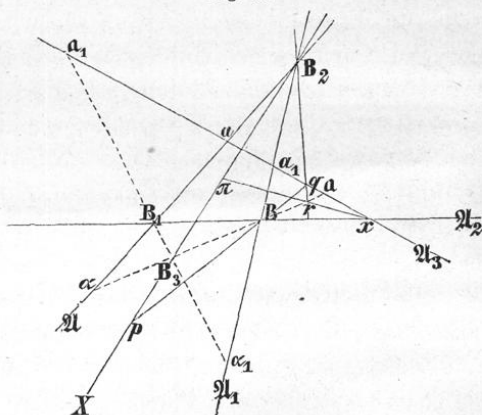
Die drei Punkte aaB sind in der Weise mit einander verknüpft, dass je zwei von ihnen conjugirte Punkte des Netzes sind, oder jeder der Pol des Verbindungsstrahles der beiden andern ist; sowie auch das von den Verbindungslinien solcher drei Punkte gebildete Dreieck die Eigenschaft besitzt, dass je zwei Seiten conjugirte Strahlen des Netzes sind, oder jede Seite die Polare des Schnittpunktes der beiden übrigen ist; solche drei Punkte sollen *ein Tripel conjugirter Punkte* und ihre drei Verbindungslinien *ein Tripel conjugirter Strahlen des Netzes*, oder auch *Polardreieck* und *Polardreiseit* heissen. Wir können die vorige Eigenschaft auch umkehren: Sind b und β irgend zwei conjugirte Strahlen, die sich in B treffen, und sind auf diesen als Trägern von Punktsystemen die dem Punkte B conjugirten Punkte resp. a und α , so ist α der Pol von β und a der Pol von b , also aaB ein Tripel conjugirter Punkte und $b\beta\mathfrak{A}$ ein Tripel conjugirter Strahlen. Ferner folgt aus dem Obigen: *Die Polaren b von sämmtlichen Punkten a einer Geraden $\mathfrak{A}$ laufen durch einen und denselben Punkt B , den Pol der Geraden $\mathfrak{A}$ und beschreiben ein*

Strahlbüschel, welches mit der von a durchlaufenen Punktreihe projectivisch ist (weil der Punkt a und der Schnittpunkt α seiner Polare b mit dem Träger $\mathfrak{A}$ das diesem zugehörige Punktsystem bilden), und umgekehrt: Die Pole α sämtlicher durch einen Punkt B gehenden Strahlen β liegen auf einer Geraden $\mathfrak{A}$, der Polare des Punktes B , und beschreiben eine mit dem von β beschriebenen Strahlbüschel projectivische Punktreihe.

Das Polarsystem oder Netz kann auf folgende Art construiert werden:

Wenn zwei conjugirte Strahlen des Netzes und auf jedem das ihm zugehörige Punktsystem, oder wenn zwei conjugirte Punkte des Netzes und in jedem das ihm zugehörige Strahlensystem gegeben sind, so ist das Netz vollständig bestimmt. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei beliebige Gerade, welche conjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, und sei auf jeder derselben ein Punktsystem durch zwei Paare conjugirter Punkte gegeben, so wird dem Schnittpunkt B_2 der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ in der ersten Geraden $\mathfrak{A}$ ein bestimmter Punkt B_1 , und in der zweiten $\mathfrak{A}_1$ ein bestimmter Punkt B für jedes der beiden Punktsysteme conjugirt sein (Fig. 88); die Verbindungslinie $BB_1 = \mathfrak{A}_2$ wird die Polare von B_2 , und die Punkte B und B_1 werden die Pole von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sein.

Fig. 88.



Um zu einer beliebigen Geraden $\mathfrak{A}_3$ den Pol B_3 zu finden, suchen wir zu den Schnittpunkten a und a_1 , in welchen $\mathfrak{A}_3$ die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ trifft, die conjugirten Punkte α und α_1 auf; dann sind $B\alpha$ und $B_1\alpha_1$ die Polaren von a und a_1 , folglich der Schnittpunkt $(B\alpha, B_1\alpha_1) = B_3$ der gesuchte Pol von $\mathfrak{A}_3$; es ist klar, dass derselbe hierdurch

unzweideutig bestimmt wird, und rückwärts findet man durch dieselbe Construction zu jedem beliebigen Punkte B_3 die Polare $\mathfrak{A}_3$. Diese Construction zeigt ferner, dass, wenn wir einen veränderlichen Punkt B_4 auf $\mathfrak{A}_3$ bewegen, seine Polare $\mathfrak{A}_4$ beständig durch B_3 läuft; denn BB_4 und B_1B_4 treffen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten b und b_1 , und da jene zwei perspectivische Strahlbüschel beschreiben, so sind auch die von b und b_1 durchlaufenen Punktreihen projectivisch; die zu b und b_1 conjugirten Punkte β und β_1 , deren Verbindungslinie die gesuchte Polare $\mathfrak{A}_4$ ist, beschreiben also auch zwei projectivische Punktreihen, weil im Punktsystem b und β , b_1 und β_1 projectivische Punktreihen be-

schreiben; die von β und β_1 beschriebenen Punktreihen liegen aber perspectivisch, weil, wenn B_4 in den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$) fällt, b nach B_1 und b_1 nach B gelangt und die zu ihnen conjugirten β und β_1 in B_2 zusammenfallen; die Polare $\mathfrak{A}_4$ läuft also durch einen festen Punkt, und dass dieser B_3 ist, erhellt unmittelbar; denn gelangt B_4 nach a , so ist seine Polare Ba , und gelangt B_4 nach a_1 , so ist seine Polare B_1a_1 , also der Schnittpunkt beider, d. h. B_3 , ist der feste Punkt, durch welchen die veränderliche Polare $\mathfrak{A}_4$ läuft. Es ist zugleich ersichtlich, dass die von B_4 durchlaufene Punktreihe mit dem von $\mathfrak{A}_4$ beschriebenen Strahlbüschel projectivisch ist, denn jene liegt perspectivisch mit der Punktreihe b , und diese ist perspectivisch mit der Punktreihe β ; b und β sind aber conjugirte Punkte eines Punktsystems, also in sich projectivisch (S. 52); folglich ist auch die von B_4 beschriebene Punktreihe mit dem von $\mathfrak{A}_4$ beschriebenen Strahlbüschel projectivisch, oder wenn wir mit B_4 den Schnittpunkt der Polare $\mathfrak{A}_4$ mit der von B_4 durchlaufenen Geraden $\mathfrak{A}_3$ bezeichnen, so durchlaufen B_4 und B'_4 auf einander liegende projectivische Punktreihen; es erhellt ferner, dass diese ein Punktsystem erzeugen, denn die Polare von B'_4 muss, wie wir eben bewiesen haben, durch den Pol von $\mathfrak{A}_4$ gehen, dieser ist aber B_4 nach der oben angegebenen Construction; folglich fallen bei den beiden auf einander liegenden projectivischen Punktreihen entsprechende gleiche Strecken verkehrt auf einander; wir haben also ein Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ (S. 49), dessen conjugirte Punkte B_4 und B'_4 sind; auf gleiche Weise erhalten wir ein Strahlssystem in B_3 , welches mit diesem Punktsystem perspectivisch liegt. Jede Gerade $\mathfrak{A}_3$ wird also durch die angegebene Construction in ein Punktsystem, jeder Punkt B_3 in ein Strahlssystem verwandelt, und beide Systeme liegen perspectivisch, wenn B_3 und $\mathfrak{A}_3$ Pol und Polare sind; hierdurch werden alle für das Netz geforderten Bedingungen erfüllt und die obige Construction leistet in der That dasjenige, was wir vom Polarsystem forderten. Wir können auch kürzer sagen: *Im Polarsystem haben allemal eine gerade Punktreihe ($\mathfrak{A}_3$) und das von den Polaren ihrer Punkte gebildete Strahlbüschel (B_3) involutorische Lage; ebenso haben ein beliebiges Strahlbüschel (B_3) und die von den Polen seiner Strahlen gebildete gerade Punktreihe ($\mathfrak{A}_3$) involutorische Lage* (Seite 65).

Nur für eine einzige Lage der Geraden $\mathfrak{A}_3$ wird die vorige Construction illusorisch. Wenn nämlich $\mathfrak{A}_3$ mit $\mathfrak{A}_2$ zusammenfällt, also a nach B_1 und a_1 nach B kommt, mithin α und α_1 in B_2 zusammenliegen, so ergibt sich zwar B_2 als der Pol von $\mathfrak{A}_2$, aber das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$ und das Strahlssystem in B_2 werden nicht unmittelbar durch die obige Construction erhalten. Bedenken wir indessen, dass, wenn

für irgend eine andere Gerade $\mathfrak{U}_3$ der Pol B_3 construirt ist, auch für den Schnittpunkt $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3)$ die Polare die Verbindungslinie $B_2 B_3$ sein muss, so sehen wir, wie zu jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{U}_2$ der conjugirte in dem ihr zugehörigen Punktsystem construirt werden kann, also auch wie das ganze Punktsystem auf $\mathfrak{U}_2$ und das mit ihm perspectivische Strahlensystem in B_2 erhalten wird; hieraus lässt sich folgende Construction ableiten:

Um zu einem beliebigen Punkte a_2 der Geraden $\mathfrak{U}_2$ den conjugirten a_2 zu erhalten, ziehe man durch a_2 irgend einen Strahl, welcher in a und a_1 die Träger $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ trifft; sind a und a_1 die conjugirten Punkte zu a und a_1 auf diesen, so suche man den Schnittpunkt von $\alpha\alpha_1$ mit $\mathfrak{U}_2$ und nehme den ihm zugeordneten vierten harmonischen Punkt a_2 , indem B und B_1 das andere Paar zugeordneter Punkte bilden; dann ist a_2 der gesuchte conjugirte Punkt zu a_2 . Diese Construction lehrt zugleich zu irgend einem durch B_2 gehenden Strahl $\mathfrak{U}_3$ den Pol B_3 zu construiren, welcher auf $\mathfrak{U}_2$ liegen muss; sobald nämlich das dem Punkte B_2 zugehörige Strahlensystem ermittelt ist, wird der gesuchte Pol B_3 der Schnittpunkt des zu $\mathfrak{U}_3$ conjugirten Strahls in diesem Strahlensystem mit der Geraden $\mathfrak{U}_2$ sein.

Wir erhalten nach dem Vorigen das einem beliebigen Strahle $\mathfrak{U}_3$ des Netzes zugehörige Punktsystem sehr einfach dadurch, dass wir die den Schnittpunkten $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_3) = a$ und $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_3) = a_1$ conjugirten Punkte α und α_1 aufsuchen und αB , $\alpha_1 B_1$ ziehen, welche Strahlen $\mathfrak{U}_3$ beziehungsweise in a und a_1 treffen mögen; dann sind a und α , a_1 und α_1 zwei Paare conjugirter Punkte des gesuchten Punktsystems auf $\mathfrak{U}_3$, und $B\alpha$, $B_1\alpha_1$ schneiden sich in dem Pole B_3 ; da nun a und α , a_1 und α_1 die Schnittpunkte von zwei Paar Gegenseiten des vollständigen Vierecks $BB_1B_2B_3$ sind, so muss jeder durch diese vier Punkte gelegte Kegelschnitt die Transversale $\mathfrak{U}_3$ in einem Paar conjugirter Punkte ihres durch die genannten beiden Paare bestimmten Punktsystems treffen, oder umgekehrt irgend ein Paar conjugirter Punkte auf dem Strahl $\mathfrak{U}_3$ liegt mit den vier Punkten $BB_1B_2B_3$ auf einem Kegelschnitt. Es sind aber B_3 und irgend ein Paar conjugirter Punkte B_4 und B'_4 (auf $\mathfrak{U}_3$) ein Tripel conjugirter Punkte des Netzes, und die drei Punkte BB_1B_2 sind auch ein Tripel des Netzes, welches zwar zur Construction desselben verwendet ist, aber durchaus nichts vor jedem andern Tripel hinsichtlich der Eigenschaften des Netzes voraus hat; wir schliessen daher den Satz:

Irgend zwei Tripel conjugirter Punkte des Netzes liegen allemal auf einem Kegelschnitt, und die Seiten dieser beiden Dreiecke berühren zugleich einen andern Kegelschnitt.

Das Letztere ist bekanntlich eine unmittelbare Folge des Ersteren (S. 129); es ergibt sich aber auch hier aus der Bemerkung, dass die sechs Seiten dieser beiden Dreiecke die Polaren ihrer Ecken sind. Denn wir wissen, dass die Polaren einer geraden Punktreihe ein Strahlbüschel bilden, welches mit jener projectivisch ist, und umgekehrt; nehmen wir zwei projectivische gerade Punktreihen, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, so werden die beiden Strahlbüschel ihrer Polaren auch projectivisch sein, also einen neuen Kegelschnitt erzeugen; dieser ist der Ort der Pole von den Tangenten des ersteren, und der Reprocität wegen sind seine Tangenten zugleich die Polaren von den Punkten des ersteren, also:

Von allen Punkten des Netzes, welche auf einem Kegelschnitt liegen, umhüllen die Polaren einen neuen Kegelschnitt, und die Punkte des letzteren sind zugleich die Pole von den Tangenten des ersteren; solche zwei Kegelschnitte sind (reciproke) Polarfiguren von einander in Bezug auf das Netz. Ein Kegelschnitt $K^{(2)}$, der durch zwei Tripel des Netzes geht, hat daher zu seiner Polarfigur einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher von den sechs Seiten der beiden Polardreiecke berührt wird. *Ein solcher Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ enthält unendlich viele Tripel des Netzes;* denn nehmen wir von irgend einem Punkte p desselben die Polare des Netzes, so muss sie eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein, und schneidet sie den ersten Kegelschnitt $K^{(2)}$ in den Punkten s und σ , so muss die Polare des Punktes s einmal durch p gehen und andererseits eine Tangente von $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein, und ebenso muss die Polare von σ eine der beiden von p an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegten Tangenten sein; der durch das erste Tripel und die beiden Punkte p und s gehende Kegelschnitt $K^{(2)}$ muss auch den dritten Tripelpunkt zu p und s enthalten, also ist $p\sigma$ die Polare von s und ebenso ps die Polare von σ ; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist also dem Dreieck $ps\sigma$ einbeschrieben, sowie der Kegelschnitt $K^{(2)}$ diesem Tripel umschrieben ist; *überhaupt schneidet jede Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ den $K^{(2)}$ in zwei conjugirten Punkten des Netzes, und jedes Tangentenpaar aus einem Punkte von $K^{(2)}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist ein Paar conjugirter Strahlen des Netzes.* Diese Eigenschaft gilt in noch allgemeinerer Weise, indem auf einem beliebigen Kegelschnitt in der Ebene eines Netzes im Allgemeinen unendlich-viele Paare conjugirter Punkte liegen, deren Verbindungsstrahlen einen andern Kegelschnitt umhüllen, und andererseits unter den Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts in der Ebene eines Netzes unendlich-viele Paare conjugirter Strahlen desselben vorkommen, deren Schnittpunkte auf einem neuen Kegelschnitt liegen.

Denken wir uns einen beliebigen Kegelschnitt $K^{(2)}$ in der Ebene

des Netzes und nehmen irgend einen Punkt B desselben, so wird die Polare $\mathfrak{A}$ von B den $K^{(2)}$ im Allgemeinen in zwei Punkten b und b' treffen von solcher Beschaffenheit, dass sowohl B und b als auch B und b' je ein Paar conjugirter Punkte des Netzes sind, welche auf dem gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ liegen; verändern wir B auf dem Kegelschnitt $K^{(2)}$, so erhalten wir unendlich-viele solcher Strahlenpaare Bb und Bb' , deren Umhüllungscurve ermittelt werden soll. Zunächst zeigt sich, dass, wenn wir drei solcher Paare (B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$, B_2 und $\mathfrak{A}_2$ seien Pole und Polaren des Netzes, und $\mathfrak{A}$ treffe $K^{(2)}$ in b und b' , $\mathfrak{A}_1$ in b_1 und b_1' , $\mathfrak{A}_2$ in b_2 und b_2') beliebig herausnehmen, diese sechs Geraden Bb , Bb' , B_1b_1 , B_1b_1' , B_2b_2 , B_2b_2' einen Kegelschnitt umhüllen; das Dreieck BB_1B_2 liegt nämlich mit dem von den Polaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ gebildeten Dreieck perspectivisch, wie aus den Polareigenschaften des Kegelschnitts (S. 155) bekannt ist und in gleicher Weise für das Netz nachgewiesen werden kann (§. 58), so dass die Schnittpunkte:

$$(B_1B_2, \mathfrak{A}) = \alpha \quad (B_2B, \mathfrak{A}_1) = \alpha_1 \quad (BB_1, \mathfrak{A}_2) = \alpha_2$$

auf einer Geraden liegen; nun ist früher bei anderer Gelegenheit (S. 315) der Satz gefunden worden:

„Ist einem Kegelschnitt $K^{(2)}$ ein Dreieck BB_1B_2 einbeschrieben, und werden die Seiten desselben B_1B_2 , B_2B , BB_1 von einer beliebigen Geraden in den Punkten $\alpha\alpha_1\alpha_2$ getroffen, wird endlich durch jeden dieser Punkte ein beliebiger Strahl gezogen, der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ beziehlich in dem Punktpaar bb' ; b_1b_1' ; b_2b_2' trifft, so berühren die sechs Strahlen Bb , Bb' ; B_1b_1 , B_1b_1' ; B_2b_2 , B_2b_2' einen neuen Kegelschnitt.“

Nachdem hierdurch bewiesen ist, dass irgend drei Strahlenpaare von der beschriebenen Art denselben Kegelschnitt berühren, denken wir uns zum Punkte b die Polare des Netzes construirt, welche durch B gehen muss und ausserdem in c den $K^{(2)}$ treffe; nach dem eben bewiesenen Satze werden dann auch

$$\left. \begin{array}{lll} bB & B_1b_1 & B_2b_2 \\ b c & B_1b_1' & B_2b_2' \\ Bb & B_1b_1 & B_2b_2 \\ Bb' & B_1b_1' & B_2b_2' \end{array} \right\} \text{sechs Tangenten eines Kegel-} \\ \text{schnitts sein, wie vorhin:}$$

Diese beiden Kegelschnitte haben aber fünf Tangenten gemein: B_1b_1 , B_1b_1' , B_2b_2 , B_2b_2' und Bb , welches identisch ist mit bB ; folglich sind die Kegelschnitte selbst identisch, und alle sieben Geraden: Bb , Bb' , bc , B_1b_1 , B_1b_1' , B_2b_2 , B_2b_2' berühren einen und denselben Kegelschnitt. Nehmen wir endlich an Stelle des willkürlich gewählten Paares B_2b_2 und B_2b_2' irgend ein anderes Paar, so gelten dieselben Schlüsse, und der vorhin erhaltene Kegelschnitt tritt wieder hervor, weil er durch die fünf übrigen Tangenten schon bestimmt ist; also

berühren alle möglichen Strahlenpaare B_2b_2, B_2b_2' einen und denselben Kegelschnitt, d. h.: *Sämmtliche Geraden Bb , welche je zwei conjugirte Punkte des Netzes, die auf einem gegebenen Kegelschnitt $K^{(2)}$ liegen, verbinden, umhüllen einen andern Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$.* Nehmen wir für das Netz das bekannte Polarsystem in Bezug auf einen Kegelschnitt $C^{(2)}$, so sind Bb harmonisch gelegen zu den Schnittpunkten der Geraden Bb mit dem Kegelschnitt $C^{(2)}$, und der vorige Satz lässt sich so aussprechen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte in der Ebene gegeben, so können im Allgemeinen unendlich-viele Gerade von solcher Beschaffenheit gefunden werden, dass ihre zwei Paar Schnittpunkte mit den beiden Kegelschnitten harmonisch liegen und je zwei Schnittpunkte desselben Kegelschnitts zugeordnet sind; alle diese Geraden umhüllen einen und denselben neuen Kegelschnitt, welcher insbesondere auch die acht Tangenten in den vier gemeinschaftlichen Punkten der beiden gegebenen Kegelschnitte berührt (S. 126).

Die angegebene Construction des Netzes lässt alle wesentlichen Eigenschaften, welche wir als Polareigenschaften eines Kegelschnitts kennen gelernt haben, unabhängig von diesem Kegelschnitt selbst hervortreten; es möge hier noch eine häufiger benutzte angeführt werden. Die obige Construction für ein beliebiges Paar von Pol (B_3) und Polare ($\mathfrak{A}_3$) liefert für den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$) = x die Polare (B_2, B_3) = X , und das dieser Geraden X zugehörige Punktsystem wird durch zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt, indem den Punkten B_2 und B_3 die Schnittpunkte von X mit $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ conjugirt sind (Fig. 88); zu einem beliebigen Punkt p auf X wird sich also der conjugirte π folgendermassen finden lassen: Man ziehe pB , welches $\mathfrak{A}_3$ in q treffe, qB_2 , welches BB_3 in r treffe, und xr , welches durch π gehen muss; denn in dem vollständigen Viereck $Bqrx$ treffen zwei Seitenpaare: Bx und qr , Br und xq die Transversale B_2B_3 in zwei Paaren conjugirter Punkte des obigen Punktsystems; folglich trifft auch das dritte Seitenpaar Bq und rx dieselbe in einem Paar conjugirter Punkte desselben Punktsystems; es ist daher rx die Polare von p , weil sie durch x , den Pol von X , und den conjugirten Punkt π geht; hieraus folgt, dass auch p und r conjugirte Punkte des Netzes sind. Nun sind aber die Punkte p und r so auszudrücken:

$$(Bq, B_2B_3) = p \quad (B_2q, BB_3) = r,$$

und da B auf der Polare von B_2 , q auf der Polare von B_3 liegt, so sind B und B_2 , ebenso wie q und B_3 zwei Paare conjugirter Punkte des Netzes; diese beiden Paare conjugirter Punkte sind übrigens ganz unabhängig von einander, und jede zwei anderen Paare können willkürlich an ihre Stelle gesetzt werden, daher schliessen wir den Satz:

Hat man irgend zwei Paare conjugirter Punkte des Netzes a und α , b und β , so bilden allemal die Schnittpunkte:

$$(ab, \alpha\beta) = c \quad (a\beta, \alpha b) = \gamma$$

ein drittes Paar conjugirter Punkte, und diese drei Paare sind die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits. (Hesse's Satz.)

Die der auseinandergesetzten Construction des Netzes gleichlaufende, welche von zwei beliebigen Strahlsystemen, deren Mittelpunkte B und B_1 als conjugirte Punkte angenommen werden, ausgeht, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Anmerkung. Wir machen noch auf eine Betrachtung aufmerksam, welche zwar nicht in den systematischen Gang unserer Untersuchung passt, weil sie das Operationsfeld der Ebene verlässt und auf die Kugeloberfläche übergeht, aber besonders geeignet erscheint, das Wesen des Netzes an einem sehr einfachen Falle anschauen und aus diesem auf die Eigenschaften des ebenen Netzes schliessen zu lassen. Wir nennen auf der Kugelfläche je zwei solche Punkte conjugirt, welche einen Abstand von 90° von einander haben; zu einem beliebigen Punkte x der Kugelfläche gehören also unendlich-viele conjugirte, die auf einem grössten Kreise X , dem Aequator zu dem Pole x , liegen; auf diesem grössten Kreise bilden sodann solche Punktpaare, die um 90° von einander abstehen, ein (elliptisches) Punktsystem; ein Tripel conjugirter Punkte bilden solche drei, welche die Ecken eines Kugeloctanten sind; je zwei grösste Kreise, deren Ebenen rechtwinklig zu einander stehen, heissen conjugirt; zu einem grössten Kreise giebt es daher unendlich-viele conjugirte, welche alle durch dieselben beiden diametral gegenüber liegenden Punkte der Kugelfläche (Pole) hindurchgehen; alle Paare rechtwinkliger Ebenen, die durch denselben Durchmesser gehen, bilden ein involutorisches Ebenensystem und ihre Schnitte mit der Kugelfläche ein Strahlsystem grösster Kreise; ein Tripel conjugirter Strahlen begrenzt einen Octanten der Kugelfläche; zu einem Pol x gehört eine bestimmte Polare X , der zugehörige Aequator, zu diesem aber Pol und Gegenpol, die Endpunkte des auf der Ebene des Aequators senkrechten Kugeldurchmessers. Projiciren wir vom Mittelpunkte der Kugel das Netz der Kugelfläche auf eine beliebige Ebene, so erhalten wir ein Involutions-Netz (besonderer Art); Pol und Polare werden bestimmt durch einen Durchmesser und die darauf senkrechte Diametralebene der Kugel, und hieraus finden die Eigenschaften des Involutions-Netzes unmittelbar ihre Bestätigung. Nehmen wir insbesondere für die Projectionsebene die unendlich-entfernte Ebene (E_∞), so erhalten wir ein Polarsystem von besonderer Wichtigkeit: das *unendlich-entfernte circulare Polarsystem*; jeder Strahl im Raume und die darauf senkrechte Ebene

schneiden E_{∞} in einem Punkt und einer Geraden, einem Paar von Pol und Polare dieses besonderen circularen Polarsystems. Je drei unendlich-entfernte Punkte, die in drei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, bilden ein Tripel conjugirter Punkte desselben; seine Kerneurve (§ 57) ist der imaginäre unendlich-entfernte Kreis, durch welchen alle Kugeln des Raumes gehen.

§. 57. Der Kern-Kegelschnitt; hyperbolisches und elliptisches Netz.

Es ist von besonderem Interesse, vermittelt der im vorigen Paragraphen angegebenen Construction des Netzes solche Punkte in der Ebene desselben, deren Polaren durch sie selbst gehen, oder solche Strahlen, deren Pole auf ihnen selbst liegen, sowie den Ort dieser und jener zu ermitteln. Wir treffen jeden Punkt der Ebene, indem wir eine doppelte Bewegung ausführen, einmal auf einer beliebigen Geraden $\mathcal{G}$ einen veränderlichen Punkt bewegen und dann diese Gerade um einen beliebigen in ihr festgehaltenen Punkt herumdrehen. Wenn nun der Punkt B auf der Geraden $\mathcal{G}$ sich bewegt, so beschreibt seine Polare $\mathcal{U}$ ein Strahlbüschel, welches im veränderlichen Punkte B die Gerade $\mathcal{G}$ trifft. Die Punkte B und B bilden ein Punktsystem, und wenn dasselbe hyperbolisch ist, so sind seine Asymptotenpunkte von der verlangten Beschaffenheit, dass ihre Polaren durch sie selbst hindurchgehen. Ist ein solcher Asymptotenpunkt s gefunden, so wird für jede durch ihn gehende Gerade hinsichtlich desjenigen Punktsystems auf ihr, welches dem Netze zugehört, dieser Punkt s allemal ein Asymptotenpunkt sein, und indem wir die Gerade $\mathcal{G}$ um den Punkt s drehen, haben wir nur den Ort des andern Asymptotenpunktes aufzusuchen, um sämmtliche Punkte in der Ebene des Netzes zu erhalten, deren Polaren durch sie hindurchgehen.

Seien s und t die beiden Asymptotenpunkte auf der zuerst angenommenen Geraden $\mathcal{G}$ (Fig. 89); sei p ein beliebiger Punkt derselben, und treffe seine Polare $\mathcal{L}$ die Gerade $\mathcal{G}$ in q , dann sind p und q conjugirte Punkte des Netzes, liegen also harmonisch zu den Asymptotenpunkten s und t ; ziehen wir eine beliebige andere Gerade durch s , welche in a der $\mathcal{L}$ begegnen mag, und sei pa die Polare von a , d. h. a der conjugirte Punkt zu a in dem der Geraden $\mathcal{L}$ zugehörigen Punktsystem des Netzes, so wird der Schnittpunkt von sa und pa der conjugirte Punkt zu a in dem auf sa befindlichen Punktsystem sein; also der vierte harmonische, dem s zugeordnete Punkt x muss der andere Asymptotenpunkt dieses Punktsystems sein, von dem s einer ist; um den vierten harmonischen Punkt x zu finden, brauchen wir nur at zu ziehen; denn da $pqst$ harmonisch liegen und sa von ap und aq in

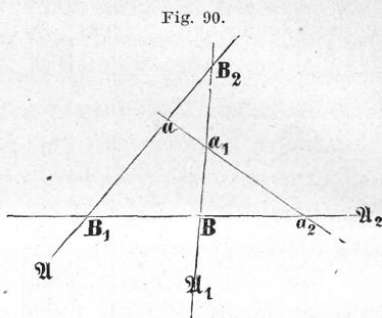
Netze, welche nothwendig durch x selbst hindurchgehen muss und, wie wir eben gesehen haben, die Tangente in x am Kegelschnitt $K^{(2)}$ ist. Hieraus ersehen wir, dass für sämtliche Punkte x des gefundenen Kegelschnitts $K^{(2)}$ die Polare im Netze allemal die Tangente dieses Punktes x an $K^{(2)}$ ist, und hiernach können wir folgendes Resultat aussprechen:

Der Ort solcher Punkte des Netzes, deren Polaren durch sie selbst gehen, ist im Allgemeinen ein bestimmter Kegelschnitt, und alle solche Strahlen in der Ebene des Netzes, deren Pole auf ihnen selbst liegen, umhüllen denselben Kegelschnitt, indem ein Punkt und die zugehörige Tangente dieses Kegelschnitts Pol und Polare des Netzes von der verlangten Art sind. Dieser Kegelschnitt enthält die Asymptotenpunkte aller Punktsysteme, welche auf sämtlichen Geraden in der Ebene des Netzes vorkommen, und die Tangenten dieses Kegelschnitts sind zugleich die Asymptoten sämtlicher Strahlsysteme des Netzes. Er heisst der Kern des Netzes, und letzteres ist nichts anderes, als das gesammte Polarsystem für den Kern-Kegelschnitt, d. h. Pol und Polare des Kegelschnitts sind allemal Pol und Polare für das Netz.

Die vorige Untersuchung ging von der Voraussetzung aus, dass das auf der willkürlich angenommenen Geraden $\mathfrak{G}$ befindliche Punktsystem ein hyperbolisches sei mit den Asymptotenpunkten s und t ; wenn dies Punktsystem aber elliptisch ist, so fällt die Untersuchung, welche sich wesentlich auf die Realität der Asymptotenpunkte stützte; wir werden also, um den Kernkegelschnitt zu finden, überhaupt eine solche Gerade $\mathfrak{G}$ in der Ebene aufzusuchen haben, deren Punktsystem im Netze ein hyperbolisches ist; wenn nur eine solche existirt, so giebt es unendlich viele, und der Ort ihrer Asymptotenpunkte ist der Kernkegelschnitt, welcher auf die angegebene Art construirt werden kann. Ob es aber immer eine solche Gerade geben muss, oder ob unter Umständen gar kein hyperbolisches Punktsystem im Netze vorkommt, werden wir aus den zur Construction des Netzes erforderlichen Daten erkennen können (S. 413).

Sind die auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche conjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, angenommenen Punktsysteme beide hyperbolisch oder auch nur eines von ihnen, so hat nach dem Vorigen das Netz einen reellen Kern; wenn dagegen beide gegebenen Punktsysteme elliptisch sind, so ist die Frage zu entscheiden, ob sonst in dem Netze hyperbolische Punktsysteme vorkommen, oder nicht. Sei der Construction des Netzes gemäss B_2 der Schnittpunkt der beiden Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, und seien die beiden ihm conjugirten Punkte in den gegebenen Punktsystemen: B auf $\mathfrak{A}_1$ und B_1 auf $\mathfrak{A}$, also $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ die Polare von B_2 , so wird, wenn die gegebenen beiden Punktsysteme elliptisch

sind, auch das dem Strahle $\mathfrak{A}_2$ zugehörige Punktsystem des Netzes elliptisch sein. Um dasselbe zu bestimmen, nehmen wir auf $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt a zwischen B_2B_1 und auf $\mathfrak{A}_1$ einen beliebigen Punkt a_1 zwischen B_2B , so dass die Verbindungslinie aa_1 also nothwendig in einem Punkte a_2 ausserhalb BB_1 den Strahl $\mathfrak{A}_2$ trifft (Fig. 90); die conjugirten Punkte α und α_1 zu a und a_1 auf den Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der beiden gegebenen Punktsysteme müssen, da diese elliptisch sind, ausserhalb B_2B_1 und ausserhalb B_2B liegen; ihre Verbindungslinie muss also auch die dritte Dreiecksseite BB_1 in einem Punkte ausserhalb BB_1 treffen, und der vierte harmonische, welcher α_2 ist, liegt daher zwischen B und B_1 ; da nun BB_1 , ein Paar conjugirter Punkte, getrennt wird durch $a_2\alpha_2$, ein zweites Paar conjugirter Punkte des auf $\mathfrak{A}_2$ befindlichen Punktsystems, so ist das letztere elliptisch; in gleicher Weise würden wir gesehen haben, dass, wenn beide gegebenen Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ hyperbolisch sind, das dritte Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$ elliptisch sein muss, wenn dagegen eines von beiden gegebenen Punktsystemen auf $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}_1$ hyperbolisch, das andere elliptisch ist, alsdann das dritte auf $\mathfrak{A}_2$ hyperbolisch sein muss. Wir schliessen hieraus:

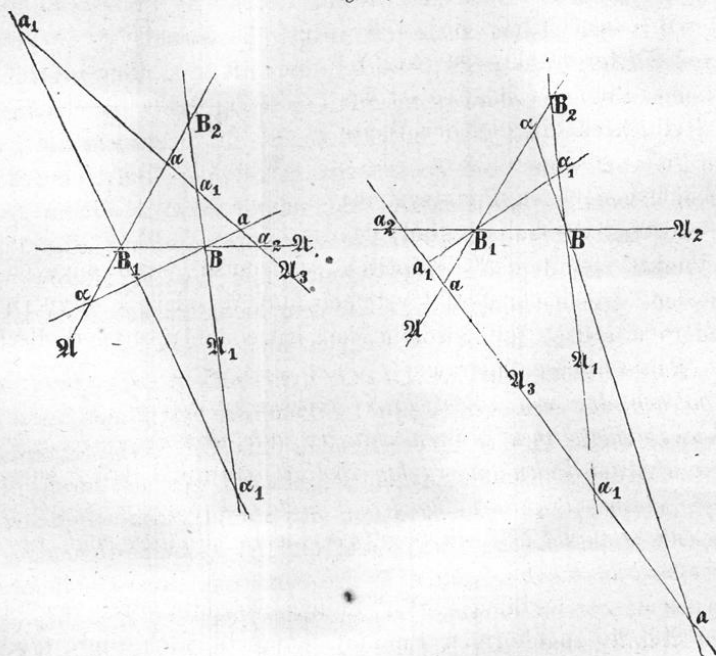


Von den drei auf einem Tripel conjugirter Strahlen des Netzes befindlichen Punktsystemen müssen entweder alle drei elliptisch, oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein; und daher auch: Von den drei einem Tripel conjugirter Punkte zugehörigen Strahlsystemen müssen entweder alle drei elliptisch, oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein.

In dem zu untersuchenden Falle, wo alle drei den Tripelstrahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ zugehörigen Punktsysteme elliptisch sind, zeigt sich nun, dass auf jeder Geraden in der Ebene des Netzes das ihr zugehörige Punktsystem elliptisch sein muss, also überhaupt kein reeller Punkt des Kernkegelschnitts existirt. Wir können von dem Tripeldreieck B_2B_1B , dessen drei Seiten die drei elliptischen Punktsysteme enthalten, irgend zwei der letzteren mit ihren Punktsystemen als zur Construction des Netzes gegeben ansehen; irgend eine Gerade $\mathfrak{A}_3$ in der Ebene kann alsdann nur zwei wesentlich verschiedene Lagen zu dem Dreieck B_2B_1B haben; nämlich 1) sie schneidet zwei Dreiecksseiten zwischen den Eckpunkten, die dritte in der Verlängerung, oder

2) sie schneidet alle drei Seiten in ihren Verlängerungen. Untersuchen wir zunächst den ersten Fall und nehmen an, $\mathfrak{N}_3$ treffe B_2B_1 in a und B_2B in a_1 zwischen den Eckpunkten des Dreiecks (Fig. 91); das Punktsystem des Netzes auf $\mathfrak{N}_3$ wird dadurch bestimmt, dass wir zu a und a_1 die conjugirten Punkte α und α_1 nehmen und die Schnittpunkte der Verbindungslinien αB mit $\mathfrak{N}_3$ (den Punkt a) und $\alpha_1 B_1$ mit $\mathfrak{N}_3$ (den Punkt a_1) aufsuchen; die beiden Paare a, α und a_1, α_1 sind conjugirte Punkte des Punktsystems auf $\mathfrak{N}_3$. Da nun α nothwendig ausserhalb der Strecke B_2B_1 liegen muss, weil das auf $\mathfrak{N}$ gegebene Punktsystem elliptisch ist, so kann $B\alpha$ die Gerade $\mathfrak{N}_3$ nur in der endlichen Strecke zwischen a_1 und a_2 treffen (a_2 ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}_3$), und da ebenso α_1 ausserhalb B_2B

Fig. 91.



liegt, so kann $B_1\alpha_1$ die Gerade $\mathfrak{N}_3$ nur ausserhalb der Strecke aa_2 treffen; das Stück zwischen aa_1 bleibt beidemale verschont, und die Punkte $\alpha\alpha_1aa_1$ liegen so, dass das eine Paar conjugirter Punkte aa durch das andere $\alpha_1\alpha_1$ getrennt wird; das Punktsystem auf $\mathfrak{N}_3$ ist also elliptisch. Dasselbe Raisonement bleibt bestehen, wenn $\mathfrak{N}_3$ eine solche Lage hat, dass sie zwei andere Seiten des Tripeldreiecks B_2B_1B zwischen den Ecken und die dritte in der Verlängerung trifft. Im zweiten Falle, wenn die Punkte a und a_1 ausserhalb B_2B_1 und

B_2B liegen, müssen α und α_1 zwischen B_2B_1 und B_2B liegen; der Strahl $B\alpha$ kann also $\mathcal{N}_3$ nur ausserhalb der Strecke a_1a_2 treffen und $B_1\alpha_1$ nur innerhalb der Strecke a_2a ; der Theil $a\alpha_1$ bleibt also wiederum verschont, und die Schnittpunkte a und α_1 liegen, wie früher; so, dass das eine Paar conjugirter Punkte $a\alpha$ durch das andere Paar $\alpha_1\alpha_1$ getrennt wird; das Punktsystem auf $\mathcal{N}_3$ ist also wieder elliptisch; da aber die Gerade $\mathcal{N}_3$, wie sie auch in der Ebene liegen mag, nothwendig eine der beiden untersuchten Lagen haben muss, so folgt, dass alle Punktsysteme, die im Netze vorkommen, elliptisch sind und also auch alle Strahlsysteme.

Wir unterscheiden hiernach zwei wesentlich verschiedene Arten des Netzes:

a) *Das elliptische Netz* enthält nur elliptische Punktsysteme auf allen Geraden und daher auch nur elliptische Strahlsysteme in allen Punkten der Ebene (da jedes Strahlsystem mit dem ihm zugehörigen Punktsystem auf der Polare perspectivisch liegt, daher gleichartig ist).

b) *Das hyperbolische Netz* enthält theils elliptische, theils hyperbolische Punktsysteme und ebenso Strahlsysteme; bei einem Tripel conjugirter Strahlen und Punkte sind immer zwei Systeme hyperbolisch und das dritte elliptisch; die Asymptotenpunkte aller Punktsysteme liegen auf dem Kernkegelschnitt, und die Asymptoten aller Strahlsysteme berühren denselben Kernkegelschnitt; das Netz ist das bekannte Polarsystem für diesen Kegelschnitt.

Ein Punktsystem hat, wenn es hyperbolisch ist, zwei reelle Asymptotenpunkte, welche dasselbe vollkommen bestimmen, und umgekehrt zwei reelle Punkte einer Geraden, als die Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems aufgefasst, werden durch dieses Punktsystem vertreten; wenn dagegen das Punktsystem elliptisch ist, hat es keine reellen Asymptotenpunkte und ist nichtsdestoweniger ein völlig reelles, in ganz gleicher Weise construirtbares Gebilde, von dem wir der Uebereinstimmung wegen sagen, dass es zwei imaginäre Asymptotenpunkte hat; durch das elliptische Punktsystem wird also ein imaginäres Punktpaar vertreten. Analogerweise haben wir in dem Involutionsnetz ein völlig reelles, immer in derselben Art construirtbares Gebilde, welches, wenn es hyperbolisch ist, einen reellen Kegelschnitt, seinen Kern, vertritt, und von dem wir wiederum der Uebereinstimmung wegen, wenn es elliptisch ist, sagen, es habe einen imaginären Kern, so dass das elliptische Netz einen *imaginären Kegelschnitt* vertritt. Wir verstehen hiernach unter einem imaginären Kegelschnitt den Kern eines elliptischen Netzes und operiren mit dem Netze, dessen wesentliche Eigenschaften bestehen bleiben unabhängig davon,

ob der Kern reell oder imaginär ist. Es ist ersichtlich, dass es für die synthetische Behandlung geometrischer Probleme von grosser Bedeutung ist, ein völlig reelles Gebilde zu besitzen, welches an Stelle eines imaginären Kegelschnitts zu setzen ist.

Nehmen wir zur Bestimmung eines Netzes zwei hyperbolische Punktsysteme auf den Trägern $\mathcal{N}_1$, die conjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, und sei dem Schnittpunkt z der Träger auf dem ersten der Punkt y , auf dem andern der Punkt x conjugirt; seien ferner die Asymptotenpunkte des ersten Punktsystems $a\alpha$, die des zweiten $b\beta$, so kann man zwei neue Punktsysteme aus denselben Punkten bilden, die elliptisch sind, indem man einmal z und y , a und α , das andere Mal z und x , b und β als Paare conjugirter Punkte auffasst, die jedesmal ein elliptisches Punktsystem erzeugen, weil sie harmonisch gelegen sind. Dadurch hat man auf jedem der Träger zwei Punktsysteme, ein hyperbolisches und ein elliptisches, und indem man zwei auf verschiedenen Trägern befindliche zur Bildung eines Netzes verwendet, was auf vier Arten geschehen kann, erhält man vier verschiedene Netze, die in eigenthümlicher Verbindung mit einander stehen; ihre Kernkegelschnitte sind nämlich vier *harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte* (§. 55), von denen drei reell, der vierte imaginär ist. Wenn wir demgemäss die Punktsysteme auf den beiden Trägern durch (h) (e) (h_1) (e_1) bezeichnen und die vier Verbindungen:

$$(h)(h_1), \quad (h)(e_1), \quad (e)(h_1), \quad (e)(e_1)$$

auf den conjugirten Trägern $\mathcal{N}_1$ zur Erzeugung der Netze verwenden, so werden die drei ersten Netze hyperbolisch, das letzte elliptisch.

Die Richtigkeit der obigen Behauptung folgt unmittelbar aus der Construction der vier Mittelpunkte dieser Netze; denn da xyz ein gemeinschaftliches Tripel für alle ist, so sind sie vollkommen bestimmt, sobald man noch den Mittelpunkt kennt; seien μ und μ_1 die Mittelpunkte von (h) und (h_1) , so ergiebt sich (nach S. 59), dass der Mittelpunkt ν des Systems (e) der vierte harmonische zu $zy\mu$, dem μ zugeordnete und ebenso der Mittelpunkt ν_1 des Systems (e_1) der vierte harmonische zu $zx\mu_1$, dem μ_1 zugeordnete Punkt ist; folglich haben wir:

$$\begin{aligned} (x\mu, y\mu_1) &= \mathfrak{M} & (x\mu, y\nu_1) &= \mathfrak{M}' \\ (x\nu, y\mu_1) &= \mathfrak{M}'' & (x\nu, y\nu_1) &= \mathfrak{M}''' \end{aligned}$$

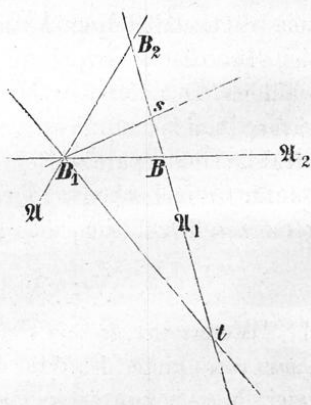
als Mittelpunkte dieser vier Netze. Dies ist aber nach S. 389 (Fig. 85) genau die Lage der vier Mittelpunkte von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten, welche das Tripel xyz gemeinschaftlich haben.

Wir müssen jetzt noch einige besondere Fälle erwähnen: Beim hyperbolischen Netz wird die doppelt-unendliche Schaar von Geraden in der Ebene, welche theils elliptische, theils hyperbolische Punktsysteme

enthalten, in diese beiden Gattungen getrennt durch eine einfach-unendliche Reihe von solchen Geraden, welche parabolische Punktsysteme enthalten; wir haben ein parabolisches Punktsystem einen solchen besonderen Fall des hyperbolischen genannt, bei welchem die beiden Asymptotenpunkte zusammenfallen; es hat die Eigenthümlichkeit, dass zu diesem Doppelpunkte jeder beliebige andere Punkt der Geraden als conjugirter und wiederum zu jedem beliebigen Punkt der Geraden der Doppelpunkt als conjugirter anzusehen ist; für alle diejenigen Geraden, welche Tangenten des Kernkegelschnitts sind, ist also das zugehörige Punktsystem ein parabolisches, und sie bilden die genannte Grenze. Andererseits giebt es unter den doppelt unendlichvielen Punkten der Ebene, deren Strahlensysteme theils elliptisch, theils hyperbolisch sind, eine einfach-unendliche Reihe solcher Punkte, deren Strahlensysteme parabolisch werden; dies sind die Punkte des Kernkegelschnitts, und sie bilden die Grenze zwischen dem einen und dem andern Gebiet; in jeder Tangente des Kegelschnitts, welche ein parabolisches Punktsystem des Netzes enthält, ist der Berührungspunkt der Doppelpunkt des Systems, und für jeden Punkt des Kernkegelschnitts, welcher ein parabolisches Strahlensystem enthält, ist die Tangente der Doppelstrahl desselben.

In besonderer Weise vereinfacht sich das hyperbolische Netz, wenn wir von den beiden erzeugenden Punktsystemen eines parabolisch annehmen; sei das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ parabolisch, so ist B_1 der Doppelpunkt desselben (Fig. 92), weil er zu jedem beliebigen Punkte der conjugirte ist, mithin auch zu B_2 , dem Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$); die Polare $\mathfrak{A}_2$ von B_2 , welche B_1B verbindet, wird alsdann nach der Construction des Netzes ein Punktsystem enthalten, welches ebenfalls parabolisch ist und seinen Doppelpunkt in B_1 hat; um den Kern eines solchen besonderen Netzes zu finden, kommt es darauf an, zu wissen, ob das zweite auf $\mathfrak{A}_1$ gegebene Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; wenn es hyperbolisch ist mit den Asymptotenpunkten s und t , so zeigt die frühere Construction des Kernkegelschnitts, dass derselbe in das Linienpaar B_1s und B_1t zerfällt; von jeder beliebigen Geraden in der Ebene wird der Pol der feste Punkt B_1 und von jedem beliebigen Punkte in der Ebene

Fig. 92.



geht die Polare durch B_1 ; das Strahlsystem, welches in B_1 seinen Mittelpunkt hat und mit dem auf $\mathcal{U}_1$ gegebenen Punktsystem perspectivisch liegt, schneidet daher sämtliche Geraden in der Ebene in denjenigen Punktsystemen, welche ihnen im Netze zugehören; wenn dagegen zweitens das auf $\mathcal{U}_1$ gegebene Punktsystem elliptisch ist, so reducirt sich der Kernkegelschnitt auf den einzigen Punkt B_1 ; alle Punktsysteme sind elliptisch mit Ausnahme derjenigen, welche auf den durch B_1 laufenden Strahlen liegen, und diese sind sämtlich parabolisch; wir können auch sagen, dass sich in diesem Falle der Kernkegelschnitt auf ein *imaginäres Linienpaar* reducirt, dessen reeller Doppelpunkt B_1 ist, indem dieses Linienpaar von den imaginären Asymptoten des in B_1 befindlichen elliptischen Strahlsystems gebildet wird. In dem Falle, wo der Kernkegelschnitt des Netzes sich auf ein reelles Linienpaar oder einen Punkt (Schnittpunkt eines imaginären Linienpaares) reducirt, heisst das Netz ein *parabolisches*. Das parabolische Netz besteht also eigentlich aus nichts anderem, als einem gewöhnlichen ebenen Strahlsystem.

Werden beide erzeugenden Punktsysteme parabolisch angenommen mit den Doppelpunkten $B_1 B$, so zieht sich der Kernkegelschnitt anstatt auf ein Linienpaar auf eine einzige doppelt zu zählende Gerade BB_1 zusammen; nehmen wir an, dass von den beiden erzeugenden Punktsystemen eines parabolisch mit dem Doppelpunkt B_1 , das andere hyperbolisch sei und einen Asymptotenpunkt in B_1 habe, dieser also der Schnittpunkt der beiden Träger wird, so ist das Netz unbestimmt und verlangt zu seiner völligen Bestimmung noch ein weiteres Datum. Gehen wir von der Bestimmung des Netzes durch zwei Strahlsysteme aus, deren Mittelpunkte zugeordnete Punkte sein sollen, so ergeben sich analoge besondere Fälle, wenn wir eines derselben parabolisch wählen. Der Kernkegelschnitt reducirt sich auf ein reelles oder imaginäres Punktpaar, dessen Träger immer reell ist, oder wenn beide Strahlsysteme parabolisch sind, auf einen einzigen doppelt zu zählenden Punkt. Wir kehren nach diesen besonderen Fällen wieder zu dem allgemeinen Involutionsnetz zurück.

§. 58. Verschiedene Bestimmungs-Arten des Netzes.

Wenn wir als bestimmende Elemente des Netzes annehmen: 1) ein Paar conjugirter Punkte oder Strahlen, 2) ein Punktsystem, welches zwei Paare conjugirter Punkte vertritt, oder ein Strahlsystem, 3) ein Paar von Pol und Polare, welches ebenfalls zwei Paare conjugirter Punkte oder Strahlen vertritt, endlich 4) ein Tripel conjugirter Punkte oder Strahlen, welches drei Paare conjugirter Punkte oder Strahlen ver-

tritt, so lassen sich diese Elemente in mannigfacher Weise zur Bestimmung des Netzes zusammenstellen; von diesen Bestimmungsarten wollen wir einige hier anführen, und zwar nur solche, die das Netz eindeutig bestimmen.

Die auf S. 413 zur Construction des Netzes angenommenen Bestimmungsstücke waren:

1) *zwei conjugirte Strahlen des Netzes ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$) und auf jedem das Punktsystem, welches dem Netze zugehören soll, oder auch zwei conjugirte Punkte und in jedem das zugehörige Strahlensystem des Netzes.* Hieraus ergibt sich sofort eine zweite Bestimmungsart durch

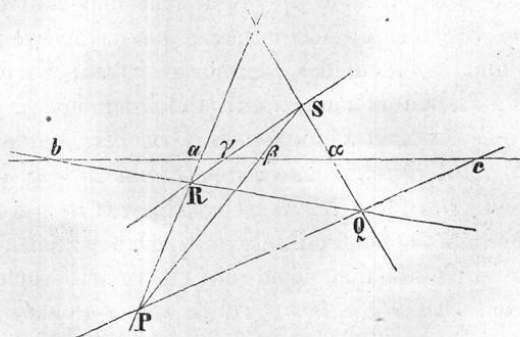
2) *ein Tripel conjugirter Punkte BB_1B_2 des Netzes und eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}_3$ mit dem ihr zugehörigen Punktsystem;* denn die drei Verbindungslinien $(B_1B_2) = \mathfrak{A}$, $(B_2B) = \mathfrak{A}_1$, $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ mögen die Gerade $\mathfrak{A}_3$ beziehlich in den Punkten aa_1a_2 treffen; seien die drei conjugirten Punkte zu diesen in dem auf $\mathfrak{A}_3$ gegebenen Punktsystem $\alpha\alpha_1\alpha_2$, so treffen sich αB , $\alpha_1 B_1$, $\alpha_2 B_2$ in einem Punkte B_3 , dem Pol von $\mathfrak{A}_3$, und zugleich treffen sie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ in solchen Punkten aa_1a_2 , welche auf diesen drei Geraden conjugirt sind den Punkten $\alpha\alpha_1\alpha_2$; da nun je zwei Tripelpunkte ausserdem ein zweites Paar conjugirter Punkte sind, so kennen wir die Punktsysteme auf zwei conjugirten Strahlen des Netzes, also nach 1) das ganze Netz. In analoger Weise ist das Netz bestimmt durch ein Tripel conjugirter Strahlen und ein beliebiges Strahlensystem B_3 , welches dem Netze zugehören soll. Ferner ergibt sich, dass es auch bestimmt wird durch

3) *ein Tripel conjugirter Punkte BB_1B_2 und ein beliebiges Paar von Pol und Polare: B_3 und $\mathfrak{A}_3$;* denn möge $\mathfrak{A}_3$ die beiden Verbindungslinien B_2B_1 und B_2B in a und a_1 treffen, und seien die Schnittpunkte $(BB_3, B_2B_1) = \alpha$, $(B_1B_3, B_2B) = \alpha_1$, so sind a und α , sowie a_1 und α_1 conjugirte Punkte des Netzes, und da auch zwei Tripelpunkte immer conjugirt sind, so kennen wir die Punktsysteme auf zwei conjugirten Strahlen des Netzes, mithin nach 1) das ganze Netz. Umständlicher wird die Bestimmung des Netzes durch

4) *ein Tripel conjugirter Punkte BB_1B_2 und zwei beliebige Paare p und π , p_1 und π_1 , welche conjugirte Punkte sein sollen.* Hier können wir so verfahren, dass wir durch π eine beliebige Gerade ziehen, dieselbe als Polare von p auffassen, wodurch dann nach 3) das Netz bestimmt ist, und für das so bestimmte Netz die Polare zu p_1 construiren; verändern wir dann die durch π angenommene Gerade, so verändert sich auch die zuletzt construirte Polare; sobald es vorkommt, dass sie durch den gegebenen Punkt π_1 geht, ist das Netz den gegebenen Bedingungen gemäss bestimmt. Die dabei eintretende

Veränderung lässt sich aber leicht überschauen, wenn wir folgende Bemerkung vorausschicken: Das Punktsystem auf einer Geraden ist durch zwei Paare conjugirter Punkte a und α , b und β bestimmt, und zu einem dritten Punkte c kann der conjugirte γ nach S. 66 so gefunden werden (Fig. 93): durch c ziehe man eine beliebige Gerade, nehme

Fig. 93.



auf ihr zwei Punkte P und Q an, suche die Schnittpunkte:

$$(Pa, Qb) = R \quad (P\beta, Q\alpha) = S,$$

dann geht RS durch γ , wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $PQRS$, dessen Seiten eine Transversale in sechs Punkten einer Involution schneiden. Wenn wir nun von den vier zur Bestimmung des Punktsystems erforderlichen Punkten $aa\beta\beta$ drei aa und b festhalten, den vierten β aber verändern, so variirt das Punktsystem, und zu dem festen Punkt c gehört jedesmal ein anderes γ ; aus der Construction geht aber hervor, dass bei der Bewegung von β , während die Punkte $abcPQ$ festgehalten werden, auch R fest bleibt, S dagegen sich verändert, indem es auf $Q\alpha$ eine mit β perspectivisch liegende Punktreihe durchläuft; γ durchläuft wiederum eine mit S perspectivische Punktreihe, also beschreiben auch β und γ zwei aufeinanderliegende projectivische Punktfolgen, deren Doppelemente a und α werden.

Dies vorausgeschickt, sei nun BB_1B_2 das gegebene Tripel, also $(B_2B_1) = \mathfrak{A}$ und $(B_2B) = \mathfrak{A}_1$ sind conjugirte Strahlen; $\mathfrak{A}$ werde von pB und p_1B in a und b getroffen, $\mathfrak{A}_1$ dagegen von pB_1 und p_1B_1 in a_1 und b_1 ; wenn wir durch π eine beliebige Gerade $\mathfrak{L}$ ziehen, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in α und α_1 trifft, und auf $\mathfrak{A}$ das durch die Paare B_2B_1 und aa , dagegen auf $\mathfrak{A}_1$ das durch die Paare B_2B und $a_1\alpha_1$ bestimmte Punktsystem auffassen und in dem ersten zu b den conjugirten Punkt β , in dem andern zu b_1 den conjugirten Punkt β_1 bestimmen, so ist $\beta\beta_1$ die Polare von p_1 ; indem wir nunmehr die Gerade

$\mathfrak{L}$ um den Punkt π drehen, verändern sich α und α_1 und mit ihnen β und β_1 ; aus der vorausgeschickten Hilfsbetrachtung geht hervor, dass β und α projectivische Punktreihen beschreiben, deren Doppelpunkte B_2 und B_1 sind; ebenso beschreiben β_1 und α_1 projectivische Punktreihen mit den Doppelpunkten B_2 und B ; α und α_1 durchlaufen aber perspectivische Punktreihen, deren Projectionspunkt π ist, folglich beschreiben auch β und β_1 projectivische Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, und dieselben liegen perspectivisch; denn sobald α nach B_2 kommt, geht auch α_1 dahin, nach dem Vorigen aber auch β und β_1 , mithin fallen in den Schnittpunkt der Träger entsprechende Punkte der projectivischen Punktreihen, diese liegen daher perspectivisch, also $\beta\beta_1$ läuft durch einen festen Punkt o , der durch zwei beliebig gewählte Lagen für $\mathfrak{L}$ leicht zu construiren ist. Auch sehen wir, dass diese Polare $\beta\beta_1 = \mathfrak{L}_1$ des Punktes p_1 ein Strahlbüschel beschreibt, welches projectivisch ist mit dem von $\mathfrak{L}$ beschriebenen. Durch den letzten gegebenen Punkt π_1 giebt es also nur eine einzige Gerade $\mathfrak{L}_1$, nämlich die Verbindungslinie $\pi_1 o$ (es müsste denn der besondere Fall eintreten, dass π_1 mit o zusammenfiele, dann wäre das Netz unbestimmt); ziehen wir nach der Construction des Punktes o den Strahl $\pi_1 o$ und nehmen diese Gerade als Polare von p_1 , so ist das Netz durch dieses Paar von Pol und Polare und durch das Tripel BB_1B_2 nach 3) völlig bestimmt und genügt offenbar den verlangten Bedingungen; das Netz ist also im Allgemeinen vollkommen und eindeutig bestimmt durch die gegebenen Bestimmungsstücke und die Construction desselben aus der vorigen Betrachtung, wenn auch etwas umständlich, doch allein mittelst des Lineals ausführbar. Am einfachsten gestaltet sich diese Construction, wenn wir für die eine Lage von $\mathfrak{L}$ die Gerade πB und für die andere Lage πB_1 nehmen; dann fällt das eine Mal α_1 nach B , folglich auch β_1 nach B , das andere Mal α nach B_1 und auch β nach B_1 , und der Punkt o wird auf folgende Art gefunden:

Sind das Tripel B_2B_1B und das Paar conjugirter Punkte p, π gegeben, so ziehe man BB_2 , BB_1 und Bp , $B\pi$, wodurch man zwei Paar Strahlen erhält, welche ein Strahlssystem bestimmen, und suche den zu Bp_1 conjugirten Strahl dieses Strahlsystems; zweitens ziehe man B_1B_2 , B_1B und B_1p , $B_1\pi$, wodurch man zwei Strahlenpaare eines andern Strahlsystems erhält, in welchem man den dem Strahle B_1p_1 conjugirten aufsuche; dieser und der vorige in dem Strahlssystem (B) schneiden sich im gesuchten Punkt o ; man erhält auch ein drittes Strahlssystem in B_2 durch die Strahlenpaare B_2B , B_2B_1 und B_2p , $B_2\pi$, und der zu B_2p_1 conjugirte Strahl des letzten Strahlsystems muss ebenfalls durch o gehen. Hieraus ergiebt sich der Satz: Für alle Netze, welche

ein Tripel BB_1B_2 und ein Paar conjugirter Punkte p, π gemeinschaftlich haben, laufen die Polaren eines und desselben Punktes (p_1) durch einen festen Punkt (o) (§. 62).

Eine einfachere Construction dieser Aufgabe ergibt sich aus der Bemerkung, dass die sechs Ecken zweier Polardreiecke eines Polarsystems allemal auf einem Kegelschnitt liegen und gleichzeitig die sechs Seiten dieser beiden Dreiecke einen Kegelschnitt berühren (S. 415). Sind demnach das Polardreieck BB_1B_2 und zwei Paare conjugirter Punkte $p\pi$ und $p_1\pi_1$ gegeben, so legen wir durch $BB_1B_2p\pi$ einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ und durch $BB_1B_2p_1\pi_1$ einen Kegelschnitt $K_1^{(2)}$; dieselben haben noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt x , welcher linear zu construiren ist (Seite 238). Alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, welche dem Dreieck BB_1B_2 einbeschrieben sind und gleichzeitig die Verbindungslinie $p\pi$ berühren, bilden eine Kegelschnittschaar $S(\mathfrak{K}^{(2)})$ von vier gemeinschaftlichen Tangenten und die Tangentenpaare aus dem Punkte x an die Kegelschnitte dieser Schaar bilden ein Strahlensystem (Seite 280), dessen Strahlenpaare den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in Punktpaaren durchbohren; die Durchbohrungssehnens derselben laufen durch einen festen Punkt (Sehnenpol) o (Seite 151). In gleicher Weise werden alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welche dem Dreieck BB_1B_2 einbeschrieben sind, und zugleich die Verbindungslinie $p_1\pi_1$ berühren, eine Kegelschnittschaar $S(\mathfrak{K}_1^{(2)})$ von vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden, und die Tangentenpaare aus dem Punkte x an die Kegelschnitte dieser Schaar werden ebenfalls ein Strahlensystem bilden, dessen Strahlenpaare den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in Punktpaaren durchbohren; diese Durchbohrungssehnens laufen gleichfalls durch einen festen Punkt (Sehnenpol) o_1 . Die Verbindungslinie $oo_1 = X$ ist alsdann die Polare von x in dem durch die gegebenen Stücke bestimmten Polarsysteme und dieses ist daher vollständig bekannt, da man ein Tripel BB_1B_2 und ein Paar von Pol und Polare desselben kennt, nach der Construction 3). Man kann noch die dritten Tripelpunkte zu $p\pi$ und $p_1\pi_1$ finden, indem man den besonderen Kegelschnitt construirt, welcher die Seiten des Dreiecks BB_1B_2 und die Geraden $p\pi$ und X berührt; die Tangenten aus p und π an diesen Kegelschnitt treffen sich in dem dritten Tripelpunkt zu $p\pi$. In ähnlicher Weise findet man den dritten Tripelpunkt zu $p_1\pi_1$.

5) Zwei Tripel conjugirter Punkte BB_1B_2 und $B^1B_1^1B_2^1$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes erforderlich und ausreichend sind; wenn diese sechs Punkte aber der Bedingung genügen, dass sie auf einem Kegelschnitt liegen (S. 415), so ist wiederum das

Netz vollkommen und eindeutig durch sie bestimmt; es genügt alsdann, zu seiner Construction das Tripel BB_1B_2 und das Paar von Pol und Polare: B^1 und $B_1^1B_2^1$ zu wählen, wodurch nach 3) das Netz bestimmt wird, dann müssen B_1^1 und B_2^1 von selbst ein Paar conjugirter Punkte sein.

An die in 1) enthaltene Entstehungsweise des Netzes durch zwei Punktsysteme, deren Träger, oder zwei Strahlensysteme, deren Mittelpunkte conjugirte Elemente sind, knüpft sich noch eine neue Bestimmungsart durch ein Punktsystem und ein Strahlensystem, welche perspectivisch liegen und Pol und Polare des Netzes liefern; hierdurch allein ist aber das Netz noch nicht völlig bestimmt; zu seiner Bestimmung ist noch erforderlich ein Paar conjugirter Punkte oder Strahlen; also:

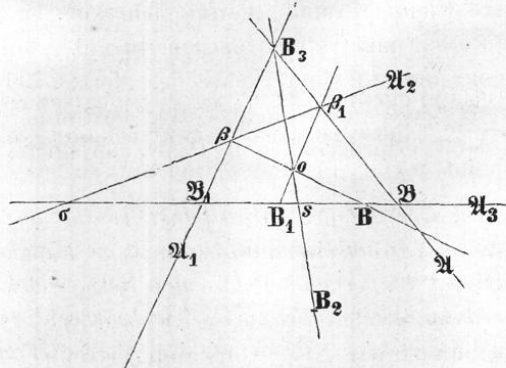
6) *ein Strahlensystem mit dem Mittelpunkt B , das auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{A}$ durch das Strahlensystem ausgeschnittene Punktsystem, die Bedingung, dass B und $\mathfrak{A}$ Pol und Polare des Netzes seien mit den ihnen zugehörigen Systemen, und endlich noch ein beliebiges Paar conjugirter Punkte p, π bestimmen das Netz vollständig; treffe nämlich $p\pi$ die Gerade $\mathfrak{A}$ in s , und sei σ der conjugirte Punkt in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem, so wird $B\sigma$ die Polare von s sein, also $p\pi$ in einem solchen Punkte σ' treffen, dass $p\pi, s\sigma'$ zwei Paare conjugirter Punkte sind, welche das dem Netze zugehörige Punktsystem auf dieser Geraden bestimmen; nehmen wir daher irgend ein Paar conjugirter Punkte B_1B_2 des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, so haben wir ein Tripel BB_1B_2 und ausserdem ein Punktsystem auf $p\pi$, wodurch das Netz nach 2) bestimmt ist. In gleicher Weise ist das Netz bestimmt, sobald Pol und Polare mit ihren Systemen und ein beliebiges Paar conjugirter Strahlen gegeben sind.*

7) *Zwei beliebige Paare von Pol und Polare: B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$, und ein Paar conjugirter Punkte p, π bestimmen das Netz ebenfalls eindeutig; sei der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1) = B_2$ und die Verbindungslinie $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$, so sind auch B_2 und $\mathfrak{A}_2$ ein Paar von Pol und Polare; bezeichnen wir die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2) = B$ und $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) = B_1$, so haben wir auf $\mathfrak{A}_2$ zwei Paare conjugirter Punkte BB und B_1B_1 , also das ganze dem Netze zugehörige Punktsystem und zugleich das mit ihm perspectivische Strahlensystem in B_2 , welches dem Netze zugehört, weil B_2 der Pol von $\mathfrak{A}_2$ ist; wir haben nun ausserdem noch ein Paar conjugirter Punkte $p\pi$, wodurch nach dem vorigen Falle 6) das Netz vollständig und eindeutig bestimmt wird.*

8) *Drei beliebige Paare von Pol und Polare: B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$, B_2 und $\mathfrak{A}_2$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes*

erforderlich sind; wir können indessen die Abhängigkeit ermitteln, in welcher diese sechs Stücke zu einander stehen müssen, damit sie das Netz bestimmen. Nehmen wir B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$ und den Punkt B_2 willkürlich an (Fig. 94), so ist die Verbindungslinie $(BB_1) = \mathfrak{A}_3$ die Polare des Schnittpunktes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1) = B_3$; das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ ist bestimmt durch zwei Paare conjugirter

Fig. 94.



Punkte: B und den Schnittpunkt $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_3)$, B_1 und den Schnittpunkt $\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3)$; ziehen wir B_2B_3 , so muss der Pol dieser Geraden auf $\mathfrak{A}_3$ liegen und der conjugirte Punkt σ zu dem Schnittpunkte s sein, in welchem B_2B_3 die $\mathfrak{A}_3$ trifft; es sind also B_2 und σ conjugirte Punkte, d. h. die Polare von B_2 muss durch σ gehen; sie ist mithin nicht mehr vollkommen frei, sondern muss durch einen bestimmten, von den beiden andern Paaren: B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$ und dem Punkt B_2 abhängigen festen Punkt σ gehen; ziehen wir durch σ eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}_2$ als Polare von B_2 , so ist jetzt das Netz bestimmt, und die Abhängigkeit der drei Punkte BB_1B_2 und ihrer Polaren $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ von einander stellt sich in folgender Weise heraus: sei der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_2) = \beta_1$, der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \beta$ und $(B\beta, B_1\beta_1) = o$, dann gehen in dem vollständigen Viereck $\beta o \beta_1 B_3$ zwei Seitenpaare durch die Punkte $B\mathfrak{B}$ und $B_1\mathfrak{B}_1$ des auf $\mathfrak{A}_3$ befindlichen Punktsystems, vom dritten Seitenpaar geht ein Theil $\beta\beta_1$ durch σ , folglich der andere B_3o durch den conjugirten Punkt s , d. h. $B\beta$, $B_1\beta_1$, B_2B_3 schneiden sich in einem Punkte o ; nun sind aber BB_1B_2 die Ecken eines Dreiecks und $B_3\beta\beta_1$ die Ecken des von den drei Polaren $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ gebildeten Dreiseits; diese beiden Dreiecke liegen also perspectivisch (S. 155), und es gilt der Satz: *Hat man in einem Netze drei beliebige Punkte BB_1B_2 und deren drei Polaren $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, welche sich paarweise in den Punkten $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1) = B_3$, $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = B$, $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}) = B_1$ schneiden, so liegen die beiden Dreiecke BB_1B_2*

und BB_1B_2 perspectivisch, d. h. BB_1, B_1B_2, B_2B_1 schneiden sich in einem Punkte. Hieraus folgt die gleichbedeutende Bedingung, dass die Schnittpunkte: $(\mathfrak{A}, B_1B_2)$, $(\mathfrak{A}_1, B_2B_1)$ und $(\mathfrak{A}_2, BB_1)$ drei Punkte in gerader Linie sein müssen. Um dann zu irgend einem Punkte P in der Ebene die Polare $\mathfrak{L}$ zu construiren, kann man, wie leicht nachzuweisen ist, in folgender Weise verfahren: Man ziehe PB , welches $\mathfrak{A}_1$ in β_1 treffe, und PB_1 , welches $\mathfrak{A}$ in β treffe, dann wird $(\beta\beta_1, BB_1) = x$ ein Punkt der Polare $\mathfrak{L}$ sein; bestimmt man in gleicher Weise die Schnittpunkte:

$$(PB_1, \mathfrak{A}_2) \quad (PB_2, \mathfrak{A}_1),$$

so trifft ihre Verbindungslinie B_1B_2 in y , einem zweiten Punkte der gesuchten Polare $\mathfrak{L}$; diese ist also schon bekannt; man kann noch einen dritten Punkt z von ihr finden, indem man die Schnittpunkte:

$$(PB_2, \mathfrak{A}) \quad (PB, \mathfrak{A}_2)$$

verbindet und diese Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte mit BB_2 verlängert, welcher z ist. Dies liefert einen Satz, welcher unabhängig vom Netze gilt. Nun können wir auch rückwärts schliessen: Wenn die zur Bestimmung des Netzes gegebenen drei Paare B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$, B_2 und $\mathfrak{A}_2$ der Bedingung genügen, dass die beiden Dreiecke BB_1B_2 und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ beziehlich perspectivisch liegen, dann ist ein Netz durch sie vollständig und eindeutig bestimmt.

9) Zwei beliebige Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche nicht conjugirte Strahlen sein sollen, und irgend ein Paar conjugirter Punkte p, π bestimmen das Netz. Sei B_2 der Schnittpunkt der beiden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, dann ist die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte der Träger, welche ihrem Schnittpunkte in den gegebenen Punktsystemen conjugirt sind, die Polare von B_2 ; auf der Verbindungslinie $p\pi$ kennen wir nur dies eine Paar conjugirter Punkte; wäre uns das ganze Punktsystem auf dieser Geraden bekannt, und bezeichnen wir ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{A}$ durch B_1 , mit $\mathfrak{A}_1$ durch B , so hätten wir auch die Polaren von B und B_1 , indem wir die ihnen conjugirten Punkte in den beiden Paaren von Punktsystemen verbinden, deren Träger sich einmal in B , das andere Mal in B_1 treffen; wir hätten dann also drei Paare von Polen und Polaren, welche der in 8) gefundenen Bedingung Genüge leisten. Sei nämlich (Fig. 95) in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem dem B_2 conjugirt β_2 , dem B_1 conjugirt b_1 , in dem auf $\mathfrak{A}_1$ gegebenen Punktsystem dem B_2 conjugirt b_2 , dem B conjugirt β und endlich in dem auf der Verbindungslinie $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ angenommenen Punktsystem dem B conjugirt b , dem B_1 conjugirt β_1 , dann sind $b\beta$, $b_1\beta_1$, $b_2\beta_2$ beziehlich die Polaren von BB_1B_2 ; es müssen nun die Seiten dieses Polardreiecks die entsprechenden Seiten des Dreiecks BB_1B_2 in

weil, wenn β_1 nach B gelangt, b nach B_1 kommt; folglich beschreibt RS ein Strahlbüschel, welches mit PS projectivisch ist, also auch mit der Punktreihe β_1 und b , daher mit α_1 , α und schliesslich mit dem von der Geraden $\mathfrak{L}$ erzeugten Strahlbüschel; der Schnittpunkt p der Geraden RS mit $\mathfrak{A}_2$ beschreibt daher eine Punktreihe, welche mit dem durch die Bewegung von $\mathfrak{L}$ hervorgerufenen Strahlbüschel projectivisch ist. Nachdem diese projectivische Beziehung erkannt und durch eine einfache Construction, zu welcher man nur des Lineals bedarf, hergestellt ist, leuchtet es ein, dass nur für eine einzige bestimmte Lage von $\mathfrak{L}$ der veränderliche Punkt p mit dem gegebenen π zusammenfallen kann, und diese Lage von $\mathfrak{L}$ ist durch die bekannte projectivische Beziehung allein mittelst des Lineals zu ermitteln, indem man zu dem gegebenen Punkte π , als der Punktreihe (p) angehörig, den entsprechenden Strahl des Strahlbüschels ($\mathfrak{L}$) aufsucht. Hierdurch wird nun die letzte gegebene Bedingung erfüllt, dass p und π conjugirte Punkte des Netzes seien; das Netz ist also vollständig und eindeutig durch die oben angegebenen Stücke bestimmt. Die Construction wird zwar in vollständiger Ausführung etwas umständlich, aber ohne Schwierigkeit und ist allein mittelst des Lineals zu bewerkstelligen.

In analoger Weise ist das Netz durch zwei beliebige Strahlensysteme (B) und (B_1), deren Mittelpunkte nicht conjugirte Punkte sein sollen, und ein beliebiges Paar conjugirter Strahlen l , λ vollständig und eindeutig bestimmt.

Eine einfachere und weit übersichtlichere, wenn auch nicht mehr lineare Construction lässt sich auf folgende Weise ableiten:

Sei $x\xi$ ein veränderliches Punktpaar des auf dem Träger $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, $x_1\xi_1$ ein solches auf dem Träger $\mathfrak{A}_1$ und $p\pi$ das einzeln gegebene Paar conjugirter Punkte; denken wir uns den ersten Punkt p mit den Paaren $x\xi$ und $x_1\xi_1$ durch Strahlenpaare verbunden, so erhalten wir in p zwei auf einander liegende Strahlensysteme, welche im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Strahlenpaar haben. (S. 58 und 158). Dieses kann nur dann imaginär werden, wenn beide Punktsysteme ($x\xi$) und ($x_1\xi_1$) hyperbolisch sind; ein Fall, den wir nachträglich erledigen wollen. Ist das gemeinschaftliche Strahlenpaar durch p ermittelt und trifft es $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in den Punktpaaren $x^p\xi^p$, $x_1^p\xi_1^p$, so dass also

$$(x^p x_1^p, \xi^p \xi_1^p) = p \text{ ist,}$$

dann bestimmen wir den Punkt:

$$(x^p \xi_1^p, \xi^p x_1^p) = \pi^1$$

und erhalten, da p und π^1 nach Hesse's Satz (S. 419) conjugirte

Punkte des Netzes sein müssen, die Verbindungslinie $\pi\pi^1$ als Polare von p .

In gleicher Weise operiren wir, indem wir den Punkt π an Stelle von p setzen d. h. die beiden durch π mit den gegebenen Punktsystemen $(x\xi)$ und $(x_1\xi_1)$ perspectivisch liegenden Strahlsysteme und deren gemeinschaftliches Strahlenpaar ermitteln, welches $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ in den Punktpaaren $x^\pi\xi^\pi$, $x_1^\pi\xi_1^\pi$ trifft, so dass

$$(x^\pi x_1^\pi, \xi^\pi \xi_1^\pi) = \pi$$

und $(x^\pi \xi_1^\pi, \xi^\pi x_1^\pi) = p^1$ wird;

dann ist pp^1 die Polare von π ; der Schnittpunkt:

$$(\pi\pi^1, pp^1) = p$$

ist also der Pol der Verbindungslinie $p\pi$ und wir haben ein Tripel $p\pi p$ und ausserdem eines der beiden Punktsysteme $\mathfrak{U}(x\xi)$ oder $\mathfrak{U}_1(x_1\xi_1)$, wodurch das Netz nach 2) vollständig bestimmt ist.

Nur in dem Falle, dass beide Punktsysteme $\mathfrak{U}(x\xi)$ und $\mathfrak{U}_1(x_1\xi_1)$ hyperbolisch sind, kann die Construction wegen imaginärer Elemente illusorisch werden; dies ist aber gerade der einfachste Fall; dann muss nämlich das Netz hyperbolisch sein und der Kernkegelschnitt (S. 422) durch die vier Asymptotenpunkte der beiden gegebenen hyperbolischen Punktsysteme aa , a_1a_1 hindurchgehen. Betrachten wir ausserdem $p\pi$ als die Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems auf der Verbindungslinie $p\pi = \mathfrak{L}$, so können wir durch drei Punkte aaa_1 und je zwei conjugirte Punkte dieses hyperbolischen Punktsystems auf $\mathfrak{L}$ Kegelschnitte legen, welche nothwendig durch einen vierten festen Punkt s laufen müssen (S. 235); ist s ermittelt, so wird der durch aa , a_1a_1 und s gelegte Kegelschnitt der Kernkegelschnitt des Netzes, also dieses vollständig bestimmt sein.

10) *Drei beliebige Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{U}\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes ausreichend sind; wir können indessen aus dem Vorigen die Bedingung ermitteln, welche erfüllt werden muss, damit das Netz durch dieselben bestimmt wird und die Bestimmungsstücke keinen Widerspruch enthalten. Es ist nämlich schon in 9) angegeben, dass, wenn für den Schnittpunkt $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ die beiden conjugirten Punkte auf diesen Trägern b und β , für den Schnittpunkt $(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U})$ die conjugirten Punkte b_1 und β_1 , endlich für den Schnittpunkt $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1)$ die conjugirten Punkte b_2 und β_2 sind, die drei Verbindungslinien $b\beta$, $b_1\beta_1$, $b_2\beta_2$ die Polaren jener drei Schnittpunkte sein werden und daher die drei Punkte:*

$$(b\beta, \mathfrak{U}) \quad (b_1\beta_1, \mathfrak{U}_1) \quad (b_2\beta_2, \mathfrak{U}_2)$$

in einer Geraden liegen müssen. Ist diese Bedingung für die Lage

der drei Punktsysteme erfüllt, so bestimmen sie ein Netz, dessen Construction aus 8) sich ergibt.

11) Ein Punktsystem auf dem Träger $\mathfrak{A}$, ein Paar von Pol und Polare: B_1 und $\mathfrak{A}_1$ und ein Paar conjugirter Punkte p und π bestimmen das Netz. Sei nämlich der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = s$ und σ sein conjugirter Punkt in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem, so wird $B_1\sigma$ die Polare von s sein und $\mathfrak{A}_1$ in einem solchen Punkte t treffen, dass B_1st ein Tripel conjugirter Punkte ist; nehmen wir auf $\mathfrak{A}$ irgend ein Paar conjugirter Punkte $\pi_1 p_1$ des gegebenen Punktsystems, so haben wir zur Construction des Netzes ein Tripel und zwei Paare conjugirter Punkte, wodurch also das Netz bestimmt wird und nach 4) zu construiren ist; dass dabei die Punkte $p_1\pi_1$ mit einem Tripelpunkte (s) in gerader Linie liegen, ändert im Wesentlichen nichts in der Construction.

In analoger Weise wird das Netz bestimmt durch ein Paar von Pol und Polare, ein Strahlensystem und ein beliebiges Paar conjugirter Strahlen.

Wir können auch in folgender Weise construiren:

Ist $x\xi$ ein veränderliches Paar conjugirter Punkte des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, so sind die Schnittpunkte:

$$(px, \pi\xi) = y \quad \text{und} \quad (p\xi, \pi x) = \eta$$

ebenfalls conjugirte Punkte nach dem Hesse'schen Satze (S. 419) und beschreiben bei der Veränderung von $x\xi$ einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, während die Verbindungslinie $y\eta$ durch einen festen Punkt o der Geraden $p\pi$ läuft, den vierten harmonischen, dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}, p\pi)$ zugeordneten Punkt. Ist der Kegelschnitt $K^{(2)}$ ermittelt, so wird die Verbindungslinie oB_1 ihn in einem besonderen Punktpaar $y^0\eta^0$ treffen; diese Gerade oB_1 trifft ferner $\mathfrak{A}_1$ in einem Punkte b_1 und die beiden Punktpaare $y^0\eta^0$ und B_1b_1 bestimmen ein Punktsystem, welches dem Netze zugehört. Wir haben also zwei Gerade mit den ihnen zugehörigen Punktsystemen im Netze, und ausserdem ein Paar von Pol und Polare, wodurch das Netz mehr als bestimmt ist und auf verschiedene Arten leicht hergestellt werden kann.

12) Ein Punktsystem auf dem Träger $\mathfrak{A}$ und drei beliebige Paare conjugirter Punkte p und π , p_1 und π_1 , p_2 und π_2 bestimmen das Netz. Um es zu construiren, können wir in folgender Weise verfahren: Nach dem oben (Seite 419) bewiesenen Satze sind, wenn p , π und x , ξ irgend zwei Paare conjugirter Punkte sind, allemal die Schnittpunkte:

$$(px, \pi\xi) = y \quad (p\xi, \pi x) = \eta$$

ein drittes Paar conjugirter Punkte, und in dem vollständigen Viereck $ppx\xi$ geht die Verbindungslinie $y\eta$ durch die beiden vierten harmonischen Punkte, welche zu dem Schnittpunkte der beiden Geraden $p\pi$

und $x\xi$ zugeordnet harmonisch liegen, indem das zweite Paar zugeordneter Punkte einmal $p\pi$, das andere Mal $x\xi$ ist; wählen wir nun für $p\pi$ das erste gegebene Paar conjugirter Punkte und für $x\xi$ ein beliebiges Paar conjugirter Punkte des auf dem Träger $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, so werden, indem wir das letztere Paar verändern, sich auch die Punkte y und η verändern, ihre Verbindungslinie aber wird durch einen festen Punkt o auf $p\pi$, den vierten harmonischen, dem Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ zugeordneten Punkt gehen. Die Punkte y und η beschreiben, wie leicht zu sehen ist, einen und denselben bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, weil $p\pi$ und $\pi\xi$ projectivische Strahlbüschel beschreiben und in ihnen auch $p\xi$ und πx entsprechende Strahlen sind; jeder durch o gehende Strahl trifft daher diesen vollständig bestimmten und leicht herzustellenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in einem Paare conjugirter Punkte des zu construierenden Netzes. Setzen wir an Stelle des Punktpaares $p\pi$ das zweite gegebene Punktpaar $p_1\pi_1$ und operiren wir mit ihm in ganz derselben Weise, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ und einen Punkt o_1 auf $p_1\pi_1$ von solcher Beschaffenheit, dass jeder durch o_1 gehende Strahl den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ in einem Paare conjugirter Punkte des Netzes trifft. Ziehen wir nun die Verbindungslinie oo_1 , und möge sie den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in s und σ , den $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ in s_1 und σ_1 treffen, so haben wir auf oo_1 zwei Paare conjugirter Punkte des Netzes, welche auf dieser Geraden das ganze dem Netze zugehörige Punktsystem bestimmen; da ausserdem die Gerade $\mathfrak{A}$ mit dem ihr zugehörigen Punktsysteme gegeben ist, so haben wir nunmehr zwei bekannte Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und oo_1 , ausserdem noch ein Paar conjugirter Punkte $p_2\pi_2$, und durch diese Stücke ist das Netz nach 9) vollkommen bestimmt.

Es ist hierbei noch der Fall zu berücksichtigen, dass eines oder beide Punktpaare $s\sigma$, $s_1\sigma_1$, welche zur Bestimmung des Punktsystems auf oo_1 dienen, imaginär werden; in diesem Falle werden sie vertreten durch die elliptischen Punktsysteme, welche dem Träger oo_1 in Bezug auf die bekannten Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zugehören; auch in dem reellen Falle können die Punktpaare $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ durch die hyperbolischen Punktsysteme vertreten werden, welche dem Träger oo_1 in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zugehören; diese beiden Punktpaare haben nun im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte, welches sowohl zu $s\sigma$, als auch zu $s_1\sigma_1$ harmonisch liegen muss, also die Asymptotenpunkte des neuen Punktsystems liefert, dessen Bestimmung durch die Paare $s\sigma$ und $s_1\sigma_1$ gegeben wird. Wir schliessen daher: Wenn die beiden Punktsysteme auf dem Träger oo_1 — oder auch nur eines — elliptisch sind, so suchen wir ihr ge-

meinschaftliches Paar conjugirter Punkte (S. 58 und 158); dieses ist nothwendig reell, sobald eines oder beide Punktsysteme elliptisch sind; wir nehmen dieses Paar zu den Asymptotenpunkten eines dritten hyperbolischen Punktsystems, welches auf dem Träger oo_1 dem zu bestimmenden Netze zugehört, und haben daher in jedem Falle eine völlig reelle Construction des Netzes.

In analoger Weise wird das Netz bestimmt durch ein Strahlensystem und drei beliebig liegende Paare conjugirter Strahlen.

13) *Ein Paar von Pol und Polare: B und $\mathfrak{A}$, und ausserdem drei beliebige Paare conjugirter Punkte p und π , p_1 und π_1 , p_2 und π_2* bestimmen das Netz. Um es zu construiren, bemerken wir, dass zu dem Punkte B jeder beliebige Punkt der Polare $\mathfrak{A}$ als conjugirter zu betrachten ist; nehmen wir daher einen beliebigen Punkt p auf der Geraden $\mathfrak{A}$ und bestimmen die Schnittpunkte $(Bp, \pi p) = x$, $(B\pi, pp) = \xi$, so sind nach dem oben angezogenen Satze auch x und ξ conjugirte Punkte des Netzes, und wenn wir p auf der Geraden $\mathfrak{A}$ verändern, so erhalten wir unendlich-viele Paare conjugirter Punkte x und ξ , von denen der eine eine Punktreihe auf Bp , der andere auf $B\pi$ durchläuft, und beide Punktreihen sind offenbar projectivisch, weil sie beide mit der von p beschriebenen Punktreihe perspectivisch liegen. Die Verbindungslinie $x\xi$ umhüllt daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher, wie leicht zu sehen ist, die Geraden Bp und $B\pi$ in denjenigen Punkten berührt, in welchen sie von $\mathfrak{A}$ getroffen werden; da der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ausserdem $p\pi$ berührt, so ist er durch diese Bedingungen vollständig bestimmt. Wir können ihn umgekehrt benutzen, um den Verlauf des veränderlichen Paares conjugirter Punkte $x\xi$ des gesuchten Netzes besser zu übersehen. Verbinden wir irgend einen Punkt o der Berührungssehne $\mathfrak{A}$, welche die Berührungspunkte auf den Trägern der erzeugenden Punktreihen Bp und $B\pi$ verbindet, mit einem Paar entsprechender Punkte $x\xi$, so erhalten wir nach S. 136 durch o Strahlenpaare, die ein Strahlensystem bilden und zwar dasjenige, welches dem Punkte o in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört. Es wird also jedes Strahlenpaar dieses bekannten Strahlensystems Bp und $B\pi$ in je zwei conjugirten Punkten des gesuchten Netzes treffen. Dies Strahlensystem in (o) wird hyperbolisch oder elliptisch sein je nach der Lage des Punktes o auf der Berührungssehne $\mathfrak{A}$. Wir können aber, da die Berührungspunkte reell sind, o immer so wählen, dass es elliptisch wird.

Wenn wir nun das zweite gegebene Paar $p_1\pi_1$ nehmen und in ganz derselben Weise verfahren, wie eben mit dem Paare $p\pi$, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher $p_1\pi_1$ zur Tangente

hat und Bp_1 und $B\pi_1$ in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von $\mathfrak{A}$ getroffen werden. Jedem Punkte o der Berührungsehne $\mathfrak{A}$ gehört ein bestimmtes Strahlensystem in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zu, und wenn man ein beliebiges Strahlenpaar dieses Strahlensystems nimmt, so trifft der eine Strahl desselben Bp_1 in x_1 , der andere $B\pi_1$ in ξ_1 , so dass $x_1\xi_1$ ein Paar conjugirter Punkte des gesuchten Netzes sein müssen.

Die beiden Strahlensysteme, welche demselben Punkte o auf $\mathfrak{A}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zugehören, haben aber im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Strahlenpaar (S. 58 und 158), und es ist leicht, o so zu wählen, dass dieses reell wird, indem man nur nöthig hat ein solches o zu nehmen, für welches ein Strahlensystem elliptisch wird, was nach dem Obigen immer möglich ist. Haben wir aber dies gemeinschaftliche Strahlenpaar gefunden, und trifft der eine Strahl desselben Bp und Bp_1 in x und x_1 , der andere in $B\pi$ und $B\pi_1$ in ξ und ξ_1 , so liegt der Schnittpunkt:

$$(xx_1, \xi\xi_1) = o$$

auf $\mathfrak{A}$, und da $x\xi$ und $x_1\xi_1$ zwei Paare conjugirter Punkte des gesuchten Netzes sind, so sind auch o und der Schnittpunkt

$$(x\xi_1, \xi x_1) = \tilde{o}$$

conjugirte Punkte nach dem *Hesse'schen* Satze; folglich da B und $\mathfrak{A}$ Pol und Polare sind, so werden auch o und $B\tilde{o}$ Pol und Polare sein. Wir können also für verschiedene Lagen von o das ganze Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ und das Strahlensystem in B herstellen, welches dem gesuchten Netze zugehört, und da wir ausserdem noch ein drittes bisher nicht benutztes Paar conjugirter Punkte $p_2\pi_2$ zur Bestimmung des Netzes gegeben haben, so ist dasselbe nach 6) bekannt und leicht zu construiren.

Es bleibt uns jetzt noch die allgemeinste Aufgabe zu lösen übrig, wenn

14) *fünf beliebige Paare conjugirter Punkte zur Bestimmung des Netzes gegeben sind.* Um das Netz aus diesen gegebenen Bestimmungsstücken auf eindeutige Weise zu construiren, wiederholen wir noch einmal die Fälle 7) und 13), welche die Construction vorbereiten, und bedienen uns dabei einer etwas abgeänderten, mehr symmetrischen Bezeichnung:

a) Zur Bestimmung des Netzes sind gegeben: Zwei Punkte B und B_1 , ihre resp. Polaren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und ein Paar conjugirter Punkte B_2 und b_2 ; die Polare $\mathfrak{A}_2$ von B_2 soll also durch b_2 gehen; betrachten wir das Dreieck BB_1B_2 und das von den drei Polaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ dieser Punkte gebildete Dreieck, so müssen bekanntlich diese beiden Figuren perspectivisch liegen, d. h. die drei Schnittpunkte:

$$(B_1 B_2, \mathfrak{A}) \quad (B_2 B, \mathfrak{A}_1) \quad (B B_1, \mathfrak{A}_2)$$

liegen auf einer Geraden (S. 434). Durch die beiden ersten Punkte ist diese Gerade schon bestimmt; der Punkt, in welchem sie $B B_1$ trifft, muss auf $\mathfrak{A}_2$ liegen, also seine Verbindungslinie mit b_2 die Polare $\mathfrak{A}_2$ sein. Haben wir sonach drei Paare von Polen und Polaren: $B\mathfrak{A}$; $B_1\mathfrak{A}_1$; $B_2\mathfrak{A}_2$, so können wir zu einem beliebigen Punkte B_3 die Polare $\mathfrak{A}_3$ nach demselben Princip construiren, indem wir uns das Dreieck $B B_1 B_3$ und sein Polardreiseit, ferner $B B_2 B_3$ und sein Polardreiseit, endlich noch $B_1 B_2 B_3$ und sein Polardreiseit in der nothwendigen perspectivischen Lage denken und dadurch für $\mathfrak{A}_3$ drei Punkte finden, von denen zwei schon zur Bestimmung dieser Geraden ausreichen. Die Construction lässt sich also folgendermassen hinschreiben:

Gegeben: B und $\mathfrak{A}$, B_1 und $\mathfrak{A}_1$, B_2 und b_2 ;

Bestimme:

$$(B_1 B_2, \mathfrak{A}) = s_{12} (B_2 B, \mathfrak{A}_1) = s_{20} (B B_1, s_{12} s_{20}) = s_{01} \\ (b_2 s_{01}) = \mathfrak{A}_2$$

$$(B_1 B_3, \mathfrak{A}) = s_{13} (B_3 B, \mathfrak{A}_1) = s_{30} (B B_1, s_{13} s_{30}) = \sigma_{01}$$

$$(B_2 B_3, \mathfrak{A}) = s_{23} (B_3 B, \mathfrak{A}_2) = \sigma_{30} (B B_2, s_{23} \sigma_{30}) = \sigma_{02}$$

$$(B_2 B_3, \mathfrak{A}_1) = \sigma_{23} (B_3 B_1, \mathfrak{A}_2) = \sigma_{31} (B_1 B_2, \sigma_{23} \sigma_{31}) = \sigma_{12},$$

dann liegen die drei Punkte $\sigma_{01} \sigma_{02} \sigma_{12}$ auf der Geraden $\mathfrak{A}_3$, der Polare des Punktes B_3 für das oben bestimmte Netz. Da durch zwei dieser Punkte die Gerade $\mathfrak{A}_3$ schon bestimmt wird, so liegt hierin ein geometrischer Satz, den wir nicht weiter hervorheben wollen.

Wir denken uns jetzt von den zur Bestimmung des Netzes gegebenen Stücken die Gerade $\mathfrak{A}_1$ um einen festen Punkt b_1 gedreht, so dass für jede Lage von $\mathfrak{A}_1$ ein anderes Netz entsteht, und ermitteln nach der vorigen Construction für jedes derselben die dem Punkte B_3 zugehörige Polare $\mathfrak{A}_3$; es wird sich zeigen, dass alsdann auch $\mathfrak{A}_3$ um einen festen Punkt p_3 sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathfrak{A}_1$ beschriebenen projectivisch ist. In der That, bei der Bewegung von $\mathfrak{A}_1$ um den festen Punkt b_1 bleiben die Punkte $s_{12} s_{13} s_{23}$ fest, der Punkt s_{20} durchläuft eine gerade Punktreihe auf dem Träger $B_2 B$, ebenso s_{01} auf dem Träger $B B_1$, die Gerade $\mathfrak{A}_2$ beschreibt also ein Strahlbüschel um b_2 , welches mit dem von $\mathfrak{A}_1$ beschriebenen projectivisch ist; s_{30} und σ_{30} durchlaufen daher auf dem Träger $B_3 B$ Punktreihen, die gleichfalls mit dem Strahlbüschel ($\mathfrak{A}_1$) projectivisch sind, und die Punkte $\sigma_{01} \sigma_{02}$ durchlaufen endlich auf den Trägern $B_1 B$ und $B_2 B$ projectivische Punktreihen; diese beiden Punktreihen liegen aber perspectivisch, weil in den Schnittpunkt B ihrer Träger ein Paar entsprechende Punkte hineinfallen. Nehmen wir

nämlich insbesondere an, dass die bewegliche Gerade $\mathfrak{A}_1$ durch B geht, so gelangt unter dieser Annahme s_{30} nach B , ebenso auch s_{20} und s_{01} , also geht auch $\mathfrak{A}_2$ durch B , mithin kommen in diesem Falle auch σ_{01} , σ_{30} und σ_{02} nach B ; es fallen daher zwei entsprechende Lagen der Punkte σ_{01} und σ_{02} nach B , und die von $\sigma_{01}\sigma_{02}$ durchlaufenen Punktreihen liegen daher perspectivisch; die Verbindungslinie entsprechender Punkte, d. h. die Gerade $\mathfrak{A}_3$, läuft folglich durch einen festen Punkt p_3 und beschreibt ein mit $(\mathfrak{A}_1)$ projectivisches Strahlbüschel. Fügen wir jetzt zur Bestimmung des Netzes noch die neue Bedingung hinzu, dass die Polare von B_3 durch einen gegebenen Punkt b_3 gehen soll d. h. B_3 und b_3 conjugirte Punkte seien, so giebt es unter den unzählig vielen Netzen nur ein einziges, welches den Bedingungen genügt, dass

$$b) \left\{ \begin{array}{l} B \text{ und } \mathfrak{A} \text{ Pol und Polare,} \\ B_1 \text{ und } b_1, B_2 \text{ und } b_2, B_3 \text{ und } b_3 \text{ conjugirte Punkte des Netzes} \end{array} \right.$$

seien, und wir gelangen zur Bestimmung dieses Netzes, indem wir den vorhin ermittelten Punkt p_3 mit b_3 verbinden und $(p_3 b_3) = \mathfrak{A}_3$ als Polare von B_3 annehmen, so dass alsdann das Netz auf die vorige Art durch die Bestimmungsstücke B und $\mathfrak{A}$, B_3 und $\mathfrak{A}_3$, B_2 und b_2 (oder auch B_1 und b_1) construirt wird. Es bleibt nun übrig, für das durch die gegebenen Stücke bestimmte Netz zu einem gegebenen Punkte B_4 die Polare $\mathfrak{A}_4$ zu construiren, und hierzu ist es erforderlich, den Punkt p_3 zu kennen, welchen wir so ermitteln, dass wir zwei beliebige Lagen von $\mathfrak{A}_1$ durch den Punkt b_1 annehmen und vermöge der obigen Construction die zugehörigen Lagen von $\mathfrak{A}_3$ bestimmen, deren gemeinschaftlicher Punkt p_3 sein wird. Diese Construction wird allerdings etwas weitläufig, aber ohne alle Schwierigkeit, und wir werden uns die Mühe nicht ersparen können, sie hinzuschreiben:

Gegeben B und $\mathfrak{A}$, B_1 und b_1 , B_2 und b_2 , B_3 und b_3 ; es soll zu B_4 die Polare $\mathfrak{A}_4$ construirt werden; wir ziehen durch b_1 zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}''_1$, und bestimmen folgende Schnittpunkte und Verbindungslinien:

$$\begin{aligned} (B_1 B_2, \mathfrak{A}) &= s_{12} & (B_2 B, \mathfrak{A}'_1) &= s'_{20} & (B B_1, s_{12} s'_{20}) &= s'_{01}; \\ & & (b_2 s'_{01}) &= \mathfrak{A}'_2 & & \\ (B_1 B_2, \mathfrak{A}) &= s_{12} & (B_2 B, \mathfrak{A}''_1) &= s''_{20} & (B B_1, s_{12} s''_{20}) &= s''_{01}; \\ & & (b_2 s''_{01}) &= \mathfrak{A}''_2 & & \\ (B_1 B_3, \mathfrak{A}) &= s_{13} & (B_3 B, \mathfrak{A}'_1) &= s'_{30} & (B B_1, s_{13} s'_{30}) &= \sigma'_{01} \\ (B_2 B_3, \mathfrak{A}'_1) &= s'_{23} & (B_3 B_1, \mathfrak{A}'_2) &= \sigma'_{31} & (B_1 B_2, s'_{23} \sigma'_{31}) &= \sigma'_{12} \\ & & (\sigma'_{01} \sigma'_{12}) &= \mathfrak{A}'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_1 B_3, \mathcal{A}) &= s_{13} & (B_3 B, \mathcal{A}'') &= s_{30}'' & (B B_1, s_{13} s_{30}'') &= \sigma_{01}'' \\
(B_2 B_3, \mathcal{A}'') &= s_{23}'' & (B_3 B_1, \mathcal{A}'') &= \sigma_{31}' & (B_1 B_2, s_{23}'' \sigma_{31}') &= \sigma_{12}'' \\
& & (\sigma_{01}' \sigma_{12}'') &= \mathcal{A}_3'' \\
& & (\mathcal{A}_3', \mathcal{A}_3'') &= p_3 & (b_3 p_3) &= \mathcal{A}_3 \\
(B_2 B_3, \mathcal{A}) &= s_{23} & (B B_2, \mathcal{A}_3) &= s_{02} & (B_3 B, s_{23} s_{02}) &= s_{30} \\
& & (b_2 s_{30}) &= \mathcal{A}_2 \\
(B_3 B_4, \mathcal{A}) &= s_{34} & (B_4 B, \mathcal{A}_3) &= s_{40} & (B B_3, s_{34} s_{40}) &= \sigma_{03} \\
(B_4 B_2, \mathcal{A}) &= s_{42} & (B B_4, \mathcal{A}_2) &= \sigma_{04} & (B_2 B, s_{42} \sigma_{04}) &= \sigma_{02} \\
& & (\sigma_{03} \sigma_{02}) &= \mathcal{A}_4.
\end{aligned}$$

Dies ist die Construction der gesuchten Geraden $\mathcal{A}_4$, möglichst kurz ausgedrückt und mit Aufgabe vollkommener Symmetrie, indem von den Geraden $\mathcal{A}_3' \mathcal{A}_3'' \mathcal{A}_4$ nur je zwei zu ihrer Bestimmung erforderliche Punkte ermittelt sind, der dritte, leicht angebbare, aber fortgelassen ist.

Wir denken uns jetzt diese Figur einer neuen, letzten Veränderung unterworfen, indem wir die Gerade $\mathcal{A}$ um einen festen Punkt b drehen, und untersuchen die von dieser Bewegung abhängige Veränderung der Geraden $\mathcal{A}_i$; es wird sich dabei zeigen, dass $\mathcal{A}_4$ um einen festen Punkt p_4 sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathcal{A}$ beschriebenen projectivisch ist. Hieraus wird dann folgen, dass, wenn zur vollständigen Bestimmung des Netzes noch die neue Bedingung hinzutritt: $\mathcal{A}_4$ solle durch einen gegebenen Punkt b_4 gehen, das Netz, wie oben angegeben, durch fünf Paare conjugirter Punkte: B und b , B_1 und b_1 , B_2 und b_2 , B_3 und b_3 , B_4 und b_4 völlig bestimmt ist und in eindeutiger Weise hergestellt werden kann. Das Verfolgen der Bewegung von $\mathcal{A}$ in der zuletzt ausgeführten Construction ist ohne Schwierigkeit, wenn auch etwas umständlich, was in der Natur der Sache liegt. Aus dem obigen Schema erkennen wir zunächst, dass s_{12} , s_{13} und s_{23} gerade Punktreihen durchlaufen, welche mit dem von der Geraden $\mathcal{A}$ beschriebenen Strahlbüschel projectivisch sind; die Punkte s_{20}' , s_{20}'' , s_{30}' , s_{30}'' , s_{23}' und s_{23}'' bleiben fest; daher werden s_{01}' , s_{01}'' projectivische Punktreihen auf BB_1 , also $\mathcal{A}_2'$ und $\mathcal{A}_2''$ projectivische Strahlbüschel beschreiben, die mit dem Strahlbüschel ($\mathcal{A}$) projectivisch sind; hiernach durchlaufen auch σ_{01}' und σ_{12}' projectivische Punktreihen auf den Trägern BB_1 und $B_1 B_2$; in den Schnittpunkt B_1 dieser Träger fallen aber zwei entsprechende Punkte hinein; denn sobald der veränderliche Strahl $\mathcal{A}$ durch B_1 geht, fallen σ_{01}' und σ_{12}' ebenfalls in B_1 hinein; die Verbindungslinie $\sigma_{01}' \sigma_{12}'$ oder $\mathcal{A}_3'$ läuft also durch einen festen Punkt π_3' und in ganz gleicher Weise die Gerade $\mathcal{A}_3''$ durch einen festen Punkt π_3'' , und beide beschreiben Strahlbüschel, welche mit dem ursprünglichen Strahl-

büschel ($\mathfrak{A}$), also auch unter einander projectivisch sind. Es zeigt sich aber noch weiter, dass dieselben perspectivisch liegen; denn sobald insbesondere $\mathfrak{A}$ durch B_1 geht, fallen, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{A}'_2$ und $\mathfrak{A}''_2$ zusammen in die Gerade $b_2 B_1$; $\mathfrak{A}'_3$ und $\mathfrak{A}''_3$ müssen auch durch B_1 gehen; ausserdem können wir von der Geraden $\mathfrak{A}'_3$ noch einen dritten Punkt $\sigma'_{0,2}$ bestimmen, nämlich:

$(B_2 B_3, \mathfrak{A}) = \sigma'_{2,3} \quad (B_3 B, \mathfrak{A}'_2) = \sigma'_{3,0} \quad (BB_2, \sigma'_{2,3} \sigma'_{3,0}) = \sigma'_{0,2}$
und von der Geraden $\mathfrak{A}''_3$ den Punkt $\sigma''_{0,2}$:

$$(B_2 B_3, \mathfrak{A}) = \sigma'_{2,3} \quad (B_3 B, \mathfrak{A}''_2) = \sigma''_{3,0} \quad (BB_2, \sigma'_{2,3} \sigma''_{3,0}) = \sigma''_{0,2}.$$

Da nun in dem Falle, dass $\mathfrak{A}$ durch B_1 geht, die Geraden $\mathfrak{A}'_2$ und $\mathfrak{A}''_2$ zusammenfallen, so werden die Punkte $\sigma'_{3,0}$ und $\sigma''_{3,0}$ offenbar auch zusammenfallen und hiernach auch $\sigma'_{0,2}$ und $\sigma''_{0,2}$; da die Geraden $\mathfrak{A}'_3$ und $\mathfrak{A}''_3$ in dem genannten Falle schon den Punkt B_1 gemein haben und ausserdem noch diesen leicht zu construierenden Punkt $\sigma'_{0,2}$, welchen wir so erhalten:

$$(B_2 B_3, b B_1) = \sigma'_{2,3} \quad (B_3 B, b_2 B_1) = \sigma'_{3,0} \quad (BB_2, \sigma'_{2,3} \sigma'_{3,0}) = \sigma'_{0,2},$$

so fallen sie ganz zusammen, und es liegen daher die beiden Strahlbüschel ($\mathfrak{A}'_3$) und ($\mathfrak{A}''_3$) perspectivisch, weil zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen; die Punkte π'_3 und π''_3 müssen daher in gerader Linie liegen mit B_1 , und das Erzeugniss der beiden von $\mathfrak{A}'_3$ und $\mathfrak{A}''_3$ beschriebenen Strahlbüschel d. h. der Ort des Punktes p_3 wird eine gerade Linie oder der Träger einer geraden Punktreihe, welche mit dem ursprünglichen Strahlbüschel ($\mathfrak{A}$) projectivisch ist. (Wir können das vorige Resultat auch aus der Bemerkung schliessen, dass das Netz in dem Falle parabolisch wird, wenn wir $\mathfrak{A}$ durch B_1 legen, also der Pol jeder nicht durch B_1 gehenden Geraden sich in B_1 befindet, während die Polare jedes Punktes der Ebene durch B_1 geht u. s. f.) Da hiernach $\mathfrak{A}_3 = (b_3 p_3)$ ein mit ($\mathfrak{A}$) projectivisches Strahlbüschel beschreibt, so durchlaufen s_{23} und s_{02} projectivische Punktreihen auf den Trägern $B_2 B_3$ und BB_2 ; die Verbindungslinie $s_{23} s_{02}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher $B_2 B_3$ und BB_2 berührt; dieser Kegelschnitt berührt gleichzeitig BB_3 ; denn sobald $\mathfrak{A}$ durch B_3 geht, muss $\mathfrak{A}_3$ durch B gehen; dies folgt sowohl aus der Grundeigenschaft des Involutionsnetzes, als auch aus dem obigen Constructionsschema, weil in dem Falle, dass $\mathfrak{A}$ durch B_3 geht, die Punkte $\sigma'_{0,1}$ und $\sigma''_{0,1}$ nach B gelangen, also zwei entsprechende $\mathfrak{A}'_3$ und $\mathfrak{A}''_3$ sich in B treffen, p_3 nach B gelangt und $\mathfrak{A}_3$ durch B geht. Der Kegelschnitt, welchen die Verbindungslinie $s_{23} s_{02}$ umhüllt, ist also dem Dreieck $B_2 B_3 B$ einbeschrieben, und die Tangente $B_3 B$ wird von der veränderlichen Tangente $s_{23} s_{02}$ in einem Punkte s_{30} getroffen,

welcher eine gerade Punktreihe durchläuft, die mit der von s_{23} oder s_{02} durchlaufenen Punktreihe projectivisch ist (S. 88). Hieraus folgt, dass auch $\mathfrak{A}_2$ ein mit $(\mathfrak{A})$ projectivisches Strahlbüschel beschreibt; endlich ergibt sich in gleicher Weise, dass s_{34} und s_{40} und auch σ_{03} , s_{42} , σ_{04} und σ_{02} projectivische Punktreihen durchlaufen; die beiden von σ_{03} und σ_{02} auf den Trägern BB_3 und BB_2 durchlaufenen Punktreihen liegen aber perspectivisch, weil in den Schnittpunkt B der Träger zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen hineinfallen, denn sobald $\mathfrak{A}$ durch B_4 geht, gelangen sowohl σ_{03} als auch σ_{02} nach B , fallen also in diesem Punkte zusammen; hieraus schliessen wir, dass die Verbindungslinie $(\sigma_{03}\sigma_{02}) = \mathfrak{A}_4$ durch einen festen Punkt p_4 läuft und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen projectivisch ist. Dieses Resultat lässt sich als Satz so aussprechen:

Es giebt unendlich-viele Netze von der Beschaffenheit, dass vier gegebene Punktpaare B und b , B_1 und b_1 , B_2 und b_2 , B_3 und b_3 conjugirte Punkte derselben sind. Wenn man zu irgend einem festen Punkte B_4 für jedes Netz die Polare $\mathfrak{A}_4$ construirt, so laufen diese sämtlichen Geraden $\mathfrak{A}_4$ durch einen festen Punkt p_4 und bilden ein Strahlbüschel; irgend zwei solcher Strahlbüschel sind allemal projectivisch und entsprechende Strahlen derselben je zwei Polaren in Bezug auf dasselbe Netz. Eine solche Gruppe von Netzen besitzt also dieselbe Eigenschaft, wie ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten (S. 299), und in der That bilden die Kernkegelschnitte dieser Netze ein solches Büschel (vgl. §. 62). Fügen wir nun noch die fünfte Bedingung hinzu, dass die Polare des gegebenen Punktes B_4 durch einen gegebenen Punkt b_4 gehen soll, so giebt es nur ein einziges Netz, welches diesen fünf Bedingungen gleichzeitig genügt, dass c) B und b , B_1 und b_1 , B_2 und b_2 , B_3 und b_3 , B_4 und b_4 fünf Paare conjugirter Punkte eines Netzes seien.

Die Construction dieses Netzes geschieht auf reellem und eindeutigen Wege durch Ermittlung des Punktes p_4 , und derselbe wird gefunden, indem wir die vorhin angegebene Construction zweimal ausführen für zwei beliebige durch den Punkt b gezogene Gerade $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, zwei besondere Lagen von $\mathfrak{A}$; wir erhalten dadurch zwei bestimmte Gerade $\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{A}_4'$, welche sich in dem gesuchten Punkte p_4 schneiden; die Verbindungslinie $(b_4 p_4) = \mathfrak{A}_4$ ist dann die Polare des Punktes B_4 in dem zu bestimmenden Netze, und indem wir die vorige Construction noch einmal anwenden unter Annahme der Bestimmungsstücke: B_4 und $\mathfrak{A}_4$, B_3 und b_3 , B_2 und b_2 , B_1 und b_1 (oder B und b), sind wir im Stande, zu jedem beliebigen Punkte der Ebene B_5 die rücksichtlich des Netzes zugehörige Polare $\mathfrak{A}_5$ zu construiren, also das ganze Netz

herzustellen. Die Ausführung dieser Construction wird zwar sehr weitläufig, ist aber ohne theoretische Schwierigkeit, und wir glauben sie übergehen zu dürfen, weil der Verlauf derselben aus dem oben angegebenen, nur dreimal zu wiederholenden Constructionsschema sich ergibt. Uebrigens würde sich die Construction durch eine passender gewählte Bezeichnung wohl symmetrischer machen und vereinfachen lassen, was wir als eine zweckmässige Uebung dem Leser empfehlen.

§. 59. Durchmesser und Mittelpunkt, System der conjugirten Durchmesser und die Axen des Netzes.

Es giebt einige besondere Elemente des Netzes, welche dieselbe Bedeutung haben, wie die gleichnamigen besonderen Elemente des Kegelschnitts. Da der Mittelpunkt eines Punktsystems derjenige ist, dessen conjugirter der unendlich-entfernte ist, so wird jeder Punkt m in der Ebene eines Netzes als der Mittelpunkt *einer*, aber im Allgemeinen nur einer einzigen Geraden $\mathfrak{A}$ rücksichtlich des auf ihr befindlichen Punktsystems auftreten, nämlich derjenigen, welche mit der Polare des Punktes m im Netze parallel durch m gezogen wird. Gäbe es insbesondere einen solchen Punkt M in der Ebene des Netzes, welcher Mittelpunkt für die Punktsysteme zweier durch ihn gehenden Geraden wäre, so müsste seine Polare durch die beiden unendlich-entfernten Punkte jener beiden Geraden gehen, mithin ganz im Unendlichen liegen d. h. $\mathfrak{G}_\infty$ sein; dann würde M zugleich der Mittelpunkt sämmtlicher durch ihn gehenden Geraden rücksichtlich der auf ihnen befindlichen Punktsysteme sein; und umgekehrt, der Pol der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ ist Mittelpunkt für alle Punktsysteme der durch ihn gehenden Geraden (wofern er nicht selbst unendlich-entfernt liegt). Um den so beschaffenen Punkt M zu finden, sei m der Mittelpunkt einer bestimmten durch m gehenden Geraden $\mathfrak{A}$, und A der conjugirte Strahl für das dem Punkte m zugehörige Strahlssystem des Netzes, dann wird A durch den Mittelpunkt derjenigen Geraden $\mathfrak{M}$ gehen, welche die Polare von m ist, und zugleich die Polare desjenigen unendlich-entfernten Punktes sein, nach welchem die parallelen Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ gerichtet sind; sucht man nun den Mittelpunkt M der Geraden A , so wird dieser die verlangte Eigenschaft besitzen, zugleich Mittelpunkt der Geraden zu sein, welche durch ihn parallel zu $\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{M}$) gezogen wird; er wird also der Mittelpunkt für jede durch ihn gehende Gerade sein.

Dieser Punkt M soll *Mittelpunkt des Netzes* genannt werden; dass es nur einen solchen Punkt geben kann, ist klar; denn gäbe es zwei, so müsste die Gerade, welche beide verbände, jeden dieser Punkte

zum Mittelpunkt, also zwei Mittelpunkte haben, was dem Wesen des Punktsystems widerstreitet. Ferner sollen sämtliche Gerade, welche durch den Mittelpunkt M gehen, *Durchmesser des Netzes*, die conjugirten Strahlen des dem Punkte M rücksichtlich des Netzes zugehörigen Strahlsystems *conjugirte Durchmesser* und die Axen dieses Strahlsystems die *Axen des Netzes* genannt werden. Hiernach ist die Construction des Mittelpunktes M und des ihm zugehörigen Strahlsystems durch folgende Eigenschaft gegeben:

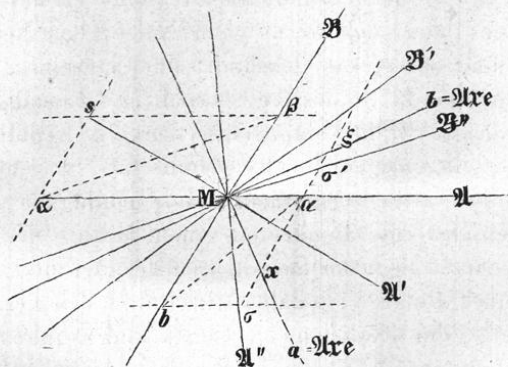
Wenn man in einer beliebigen Richtung zwei oder mehrere parallele Gerade in der Ebene eines Netzes zieht, so liegen die Mittelpunkte der ihnen zugehörigen Punktsysteme allemal auf einem Durchmesser des Netzes; verändert man die angenommene Richtung, so laufen alle Durchmesser durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt des Netzes, und je zwei Durchmesser, von denen einer der angenommenen Richtung parallel ist, der andere die Mittelpunkte aller zu dieser Richtung parallelen Geraden enthält, sind ein Paar conjugirter Strahlen eines Strahlsystems oder conjugirte Durchmesser, indem auch umgekehrt die dem letzteren parallelen Geraden ihre Mittelpunkte sämmtlich auf dem ersteren haben.

Dies lässt sich mit anderen Worten auch so aussprechen: *Der Mittelpunkt M des Netzes ist der Pol der unendlich-entfernten Geraden $\mathcal{G}_\infty$, das conjugirte Durchmesser-System das diesem Punkte zugehörige Strahlsystem des Netzes.* Fällt insbesondere der Mittelpunkt M des Netzes selbst ins Unendliche, so liegt er auf seiner Polare und ist also ein Punkt des Kerns vom Netze; das Netz ist also ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt offenbar eine Parabel. Liegt dagegen der Mittelpunkt M des Netzes nicht im Unendlichen, so wird das ihm zugehörige Strahlsystem entweder ein hyperbolisches oder ein elliptisches sein; ist es ein hyperbolisches, so enthält jede der beiden Asymptoten zwei zusammenfallende conjugirte Strahlen, und da der unendlich-entfernte Punkt des einen Strahls der Pol des conjugirten Strahls ist, so liegt der unendlich-entfernte Punkt der Asymptote zugleich auf seiner Polare, ist daher ein Punkt des Kerns vom Netze; das Netz ist also ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt eine Hyperbel. Ist das Strahlsystem des Mittelpunktes M dagegen ein elliptisches, so können zwei Fälle eintreten: Entweder ist das Netz ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt eine Ellipse, oder das Netz ist ein elliptisches und der Kernkegelschnitt imaginär; der erste Fall tritt ein, sobald das auf irgend einem Durchmesser befindliche Punktsystem des Netzes ein hyperbolisches, der letzte Fall, sobald es ein elliptisches ist; alsdann sind auch die Punktsysteme sämtlicher Durchmesser im ersten Fall hyperbolisch, im letzten elliptisch.

Wir bemerken noch, dass das einem beliebigen Punkte B in der Ebene des Netzes zugehörige Strahlensystem immer ein Paar conjugirter Strahlen besitzt, welche einem Paar conjugirter Durchmesser parallel laufen, und dass sogar der eine jener Strahlen mit dem einen dieser Durchmesser zusammenfällt; denn ziehen wir BM , so läuft der conjugirte Durchmesser parallel mit dem zu BM conjugirten Strahle des Strahlensystems (B); hieraus folgt, dass alle Strahlensysteme, deren Mittelpunkte auf einem und demselben Durchmesser liegen, ein System paralleler conjugirter Strahlen haben, von denen die eine Hälfte auf diesen Durchmesser fällt.

Zwischen den verschiedenen Punktsystemen auf sämmtlichen Durchmessern des Netzes bestehen ganz analoge Beziehungen, wie zwischen den conjugirten Durchmessern des Kegelschnitts (S. 169). Dieselben lassen sich auf analogem Wege aus der Construction der Axen ableiten; nehmen wir zu diesem Zweck ein Paar conjugirter Durchmesser mit den auf ihnen befindlichen Punktsystemen als gegeben an; diese sind bekanntlich zur Bestimmung des Netzes erforderlich und ausreichend; stellen wir uns dann die Aufgabe, die Axen mit den auf ihnen befindlichen Punktsystemen zu construiren. Durch den Mittelpunkt und den unendlich-entfernten Punkt ist auf jedem Durchmesser bereits ein Paar conjugirter Punkte gegeben; durch ein zweites Paar wird also das Punktsystem vollständig bestimmt. Seien (Fig. 96)

Fig. 96.



A und B die sich in M schneidenden gegebenen conjugirten Durchmesser, auf dem ersteren das Paar conjugirter Punkte a und α , auf dem letzteren b und β gegeben, und setzen wir den Fall eines *elliptischen* Netzes voraus, weil dieser in dem Früheren nicht enthalten ist; dann müssen a und α und ebenso b und β auf entgegengesetzten Seiten von M liegen; das Product $Ma \cdot Ma$ heisst die Potenz des auf dem Durchmesser A befindlichen Punktsystems und ist eine negative Grösse,

weil Ma und $M\alpha$ entgegengesetzte Richtung haben (der Gang der Untersuchung bleibt im Wesentlichen ungeändert für jede andere Annahme hinsichtlich der Lage der Punkte $a\alpha, b\beta$). Wir bezeichnen die Potenz des auf dem Durchmesser $\mathfrak{A}$ befindlichen Punktsystems durch $P_{\mathfrak{A}} = Ma \cdot M\alpha$ und ebenso die auf $\mathfrak{B}$ durch $P_{\mathfrak{B}} = Mb \cdot M\beta$. Wäre das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, so wäre die Potenz $P_{\mathfrak{A}}$ positiv und gleich dem Quadrat des halben Abstandes der beiden Asymptotenpunkte von einander, also gleich dem Halbmesser des Kernkegelschnitts auf dem Durchmesser $\mathfrak{A}$.

Um die Axen des Netzes zu finden, müssen wir das dem Mittelpunkt M zugehörige Strahlensystem des Netzes, von dem wir bis jetzt nur ein Paar conjugirter Strahlen haben, vollständig kennen und seine Axen ermitteln, welche die gesuchten Axen des Netzes sind. Die Polare des Punktes a ist nun die durch α zu $\mathfrak{B}$ gezogene Parallele und die Polare von b die durch β zu $\mathfrak{A}$ gezogene Parallele, der Schnittpunkt s dieser beiden Parallelen also der Pol von ab ; der unendlich-entfernte Punkt von ab hat zu seiner Polare offenbar Ms ; ziehen wir also durch M eine Parallele zu ab , nennen dieselbe $\mathfrak{B}'$, während $Ms = \mathfrak{A}'$ ist, so sind $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ein neues Paar conjugirter Durchmesser, d. h. ein zweites Paar conjugirter Strahlen des Strahlensystems (M), und dieses ist hierdurch vollständig bestimmt; wir können noch ein drittes Paar conjugirter Durchmesser erhalten, indem wir durch a und b ein Paar Parallelen zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ ziehen, die sich in σ treffen, dann sind $M\sigma (= \mathfrak{A}'')$ und die durch M zu $\alpha\beta$ gezogene Parallele $\mathfrak{B}''$ ein drittes Paar conjugirter Durchmesser des Netzes. Um die Axen des Strahlensystems (M) zu finden, lassen wir dasselbe von einer Geraden (Transversale) schneiden, welche durch a parallel zu $\mathfrak{B}$ gezogen ist; auf dieser Transversale wird durch das Strahlensystem (M) ein Punktsystem ausgeschnitten, dessen Mittelpunkt offenbar a ist. Die Kreise, welche über den Strecken zwischen je zwei conjugirten Punkten dieses Punktsystems als Durchmesser beschrieben werden können, bilden ein Kreisbüschel mit zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten oder einer ideellen gemeinschaftlichen Secante, und es giebt einen einzigen, leicht construierbaren Kreis dieses Büschels, welcher durch M geht; dieser Kreis schneidet die Transversale offenbar in zwei solchen conjugirten Punkten ihres Punktsystems, welche mit M verbunden zwei conjugirte Strahlen des Strahlensystems (M) liefern, und da diese Strahlen einen Peripherie-Winkel über einem Halbkreise einschliessen, also zu einander rechtwinklig sind, so sind sie die gesuchten Axen a und b des Netzes. Seien Mx und $M\xi$ die so construirten Axen, x und ξ ihre Schnittpunkte mit der Transversale durch a , so ist zu bemerken, dass wegen

Der ganz elementare Beweis dieser Sätze kann hier unterdrückt werden; der zweite Satz ist die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes für den besonderen Fall, dass a in der Mitte der Hypotenuse liegt.

Die Strecken My und $M\eta$ können wir nun, indem wir diese Sätze auf unsere Figur anwenden, ersetzen durch Mx' und $M\xi'$, denn die Parallelität liefert folgende Verhältnisse:

$$\frac{My}{Mx'} = \frac{Ma}{M\alpha} = \frac{M\eta}{M\xi'};$$

dies in die vorigen Relationen substituiert giebt:

$$Mx \cdot Mx' \cdot M\xi \cdot M\xi' = x\alpha \cdot a\xi \cdot M\alpha^2 \cdot \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

$$Mx \cdot Mx' + M\xi \cdot M\xi' = Ma \cdot Ma + x\alpha \cdot a\xi \cdot \frac{M\alpha}{Ma},$$

oder, wenn nach dem Obigen für $x\alpha \cdot a\xi = Mb \cdot M\beta \cdot \frac{Ma}{M\alpha}$ gesetzt wird, und die Producte durch die eingeführte Bezeichnung der Potenz ersetzt werden:

$$\text{I. } P_{\mathfrak{A}} \cdot P_{\mathfrak{B}} \cdot \sin^2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = P_a \cdot P_b$$

$$\text{II. } P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}} = P_a + P_b, \text{ d. h.}$$

I) „Das Product aus den Potenzen der auf einem Paar conjugirter Durchmesser des Netzes befindlichen Punktsysteme multiplicirt mit dem Quadrat des sinus des eingeschlossenen Winkels ist constant.“

II) „Die Summe der Potenzen der auf einem Paar conjugirter Durchmesser des Netzes befindlichen Punktsysteme ist constant.“

Diese Sätze sind gleichlautend mit den bekannten Eigenschaften der conjugirten Durchmesser des Kegelschnitts; sie bleiben bestehen für das Netz, auch wenn dasselbe elliptisch ist, also keinen reellen Kernkegelschnitt besitzt, wofern wir nur an die Stelle der Durchmesser den allgemeineren Begriff der Potenz des zugehörigen Punktsystems setzen. In dem Falle eines elliptischen Netzes sind allemal beide Werthe $P_{\mathfrak{A}}$ und $P_{\mathfrak{B}}$ negativ, in dem Falle eines hyperbolischen Netzes entweder beide positiv (Kernkegelschnitt = Ellipse) oder einer positiv, der andere negativ (Kernkegelschnitt = Hyperbel). Für zwei conjugirte Hyperbeln, welche dasselbe Strahlensystem der conjugirten Durchmesser haben (S. 165), findet allemal ein derartiges Verhalten statt, dass, wenn bei der einen $P_{\mathfrak{A}}$ positiv und $P_{\mathfrak{B}}$ negativ, bei der andern umgekehrt $P_{\mathfrak{A}}$ negativ und $P_{\mathfrak{B}}$ positiv ist, übrigens aber die absoluten Werthe dieser Potenzen beziehlich dieselben sind. In diesem Sinne können wir uns auch zu der Ellipse den conjugirten Kegelschnitt, der vollständig imaginär ist, denken, indem wir ihm dasselbe Strahl-

system der conjugirten Durchmesser zuweisen, aber auf jedem Paar conjugirter Durchmesser die Potenzen der zugehörigen Punktsysteme gleich und entgegengesetzt annehmen, also die hyperbolischen Punktsysteme in gleichwerthige elliptische verwandeln. Solche vier Netze (Kegelschnitte), welchen die Werthe:

$$\begin{array}{l} + P_a \mid + P_a \mid - P_a \mid - P_a \\ + P_b \mid - P_b \mid + P_b \mid - P_b \end{array}$$

zukommen, sind vier *harmonisch-zugeordnete Netze*, wie auf Seite 426 nachgewiesen ist.

Sind insbesondere die Werthe von P_a und P_b einander gleich, so lässt die obige Construction erkennen, dass, wenn beide positiv oder beide negativ sind, das dem Mittelpunkte M zugehörige Strahlensystem des Netzes (das System der conjugirten Durchmesser) ein *circulares Strahlensystem* wird, also je zwei conjugirte Durchmesser auf einander rechtwinklig sind, woraus denn folgt, dass der Kernkegelschnitt des Netzes ein reeller oder imaginärer Kreis wird. Hieraus folgt die bekannte Eigenschaft eines solchen besonderen Netzes, dass die Polare irgend eines Punktes p senkrecht steht auf der Verbindungslinie (pM) desselben mit dem Mittelpunkte des Netzes, und zwar in demjenigen Punkte π dieses Durchmessers pM , für welchen $Mp \cdot M\pi$ gleich ist dem festen (positiven oder negativen) Werthe der Potenz $P_a (= P_b)$. Sind dagegen die Werthe von P_a und P_b gleich und entgegengesetzt, so ist das Netz *hyperbolisch* und der Kernkegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel, indem das dem Mittelpunkte M zugehörige Strahlensystem des Netzes ein *gleichseitig-hyperbolisches* wird.

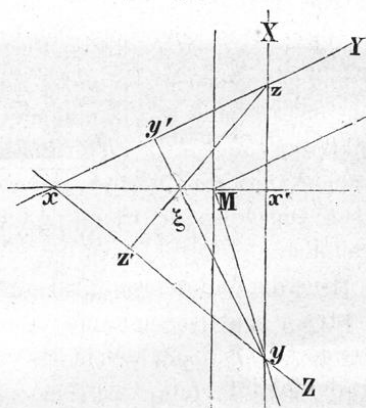
§. 60. Die Brennpunkte des Netzes.

Es bietet sich uns als nächste Aufgabe dar, solche Punkte in der Ebene des Netzes aufzusuchen, deren zugehörige Strahlensysteme *circulare* werden; ein *circulares Strahlensystem* ist ein besonderes *elliptisches Strahlensystem*, welches nicht nur *ein* Paar, sondern *unendlich-viele* Paare von Axen hat d. h. bei welchem je zwei conjugirte Strahlen zu einander rechtwinklig sind; dies ist der Fall, sobald es zwei Paare zu einander rechtwinkliger conjugirter Strahlen giebt, durch welche das Strahlensystem bestimmt wird. Es ist nun leicht einzusehen, dass, wenn es überhaupt Punkte in der Ebene des Netzes giebt, deren zugehörige Strahlensysteme *circulare* sind, diese *nothwendig* auf den Axen des Netzes liegen müssen. Denn wäre B irgend ein nicht auf einer Axe liegender Punkt und M der Mittelpunkt des Netzes, so würde dem Durchmesser BM ein conjugirter Durchmesser zugehören,

welcher nicht senkrecht auf ihm stände; zögen wir nämlich durch B eine Parallele zu letzterem, so hätten wir den conjugirten Strahl zu BM in dem Strahlensystem (B) ; wir hätten also zwei conjugirte Strahlen dieses Strahlensystems, welche nicht rechtwinklig zu einander wären; das Strahlensystem (B) wäre also augenscheinlich kein *circulares*. Hier-von macht allerdings der Fall eine Ausnahme, wenn das dem Punkte (M) zugehörige Strahlensystem selbst ein *circulares* ist; in diesem Falle ist es indessen leicht einzusehen, dass das so construirte Paar das einzige Paar rechtwinkliger conjugirter Strahlen des Strahlensystems (B) ist; denn ziehen wir durch B einen beliebigen zweiten Strahl, so wird dessen Pol auf der aus M auf ihn herabgelassenen Senkrechten liegen und im Allgemeinen nicht im Unendlichen; verbinden wir ihn mit B , so haben wir also wieder ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlensystems (B) , die nicht zu einander rechtwinklig sind, und das Strahlensystem (B) ist also kein *circulares*.

Wir haben demnach die Punkte von der verlangten Eigenschaft nur auf den Axen des Netzes zu suchen; wir nehmen einen beliebigen Punkt x auf einer Axe (Fig. 98), ermitteln seine Polare X , welche in x' senkrecht auf dieser Axe steht, dann sind $x'M$ und X die Axen

Fig. 98.



des dem Punkte x zugehörigen Strahlensystems, ebenso xM und die Senkrechte in x die Axen des dem Punkte x zugehörigen Strahlensystems; andere Paare conjugirter Strahlen des letzteren können wir dadurch finden, dass wir das Punktsystem auf X ermitteln, welches mit dem Strahlensystem (x) perspectivisch liegt. Ziehen wir durch x einen beliebigen Strahl Y , welcher in z die Polare X trifft, und bestimmen den Pol y von Y , welcher auf X liegen muss, so ist $(xy) = Z$

die Polare von z ; y und z sind ein Paar conjugirter Punkte des dem Netze zugehörigen Punktsystems auf X , und Z und Y sind ein Paar conjugirter Strahlen des dem Punkte x zugehörigen Strahlensystems im Netze. Die beiden Strahlen Y und Z werden aber im Allgemeinen nicht rechtwinklig auf einander stehen, und das Strahlensystem (x) wird also im Allgemeinen kein *circulares* sein; verändern wir indessen den Punkt x auf der Axe, so kann es sich ereignen, dass diese Perpendicularität eintritt, und ein solcher Punkt x , für welchen dies der

Fall ist, muss die Eigenschaft besitzen, dass sein Strahlensystem ein circulares wird. Bei der Bewegung von x können wir noch die Richtung der durch ihn gehenden Geraden Y ganz willkürlich annehmen, es wird aber für die Betrachtung zweckmässig sein, für Y eine (übrigens beliebige) Richtung unverändert beizubehalten und also Y nur parallel mit sich zu verschieben; die Allgemeinheit der Betrachtung wird dadurch nicht beeinträchtigt; in dem Punktsystem auf X , von welchem y und z ein Paar conjugirter Punkte sind, ist offenbar x' der Mittelpunkt, und wegen der Eigenschaft der constanten Potenz eines Punktsystems haben wir:

$$x'y \cdot x'z = \text{const.}$$

In dem Dreieck xyz ist xx' eine Höhe, die beiden andern Höhen yy' und zz' schneiden sich also in einem Punkte ξ der ersteren, d. h. der in Betracht gezogenen Axe des Netzes. Die Aehnlichkeit der Dreiecke giebt ferner:

$$x'y \cdot x'z = x'x \cdot \xi x' = \text{const.}$$

Wenn wir also den Punkt x festhalten und das Paar conjugirter Punkte y, z auf seiner Polare X beliebig verändern, d. h. das ganze Punktsystem durchlaufen lassen, so bleibt der Höhenpunkt ξ des Tripeldreiecks xyz immer derselbe feste Punkt.

Die Fusspunkte y' und z' der aus y und z auf die Seiten des Tripeldreiecks xyz gefällten Perpendikel besitzen die Eigenschaft, dass $y'y$ und $y'z$, ebenso $z'y$ und $z'z$ je zwei conjugirte Strahlen des Netzes sind und, da diese auf einander senkrecht stehen, die Axen der den Punkten y' und z' zugehörigen Strahlensysteme des Netzes. Bei der Veränderung von y und z beschreiben nun y' und z' einen Kreis, dessen Durchmesser $x\xi$ ist. Jeder Punkt dieses Kreises mit x und ξ verbunden liefert die Axen des ihm zugehörigen Strahlensystems im Netze.

Um die Veränderung zu verfolgen, welche mit der Bewegung des Punktes x eintritt, müssen wir ermitteln, wie der Punkt ξ mit x sich verändert; mit x verändert sich zunächst X , indem es sich beständig parallel bleibt und

$$Mx \cdot Mx' = \text{const.}$$

ist; die durch x gezogene Gerade Y soll auch, wie oben bestimmt ist, in ihrer Richtung festgehalten werden, der Pol y wird also auf dem zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser My sich bewegen; das Perpendikel yy' bleibt beständig sich parallel, und es bleiben daher die Verhältnisse constant:

$$\frac{My}{M\xi} = \text{const.}, \quad \frac{Mx'}{My} = \text{const.},$$

und hieraus auch:

$$\frac{Mx}{M\xi} = \text{const.}$$

Diese Relation mit der obigen verbunden giebt:

$$Mx \cdot M\xi = \text{const.},$$

und hieraus schliessen wir, dass die Punkte x und ξ conjugirte Punkte eines bestimmten *neuen* auf der Axe befindlichen Punktsystems sind, welches denselben Mittelpunkt M hat. [Wollten wir die kleine Rechnung vermeiden, so wäre ebenso leicht zu zeigen, dass bei der Bewegung von x der Punkt ξ eine mit ihm projectivische Punktreihe durchläuft, und dass entsprechende gleiche Strecken der beiden projectivischen Punktreihen verkehrt auf einander fallen, d. h. wenn ξ nach x gelangt, x nach ξ kommt, woraus dann ebenfalls die involutorische Eigenschaft des Punktpaares (x, ξ) erhellt.]

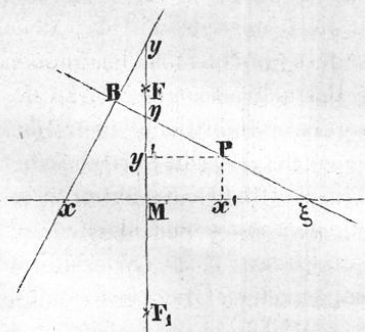
Nachdem diese Abhängigkeit der Punkte x und ξ von einander ermittelt ist, wird die ursprünglich vorgelegte Frage leicht zu beantworten sein. Soll nämlich das dem Punkte x zugehörige Strahlensystem ein circulares werden, so muss das Tripeldreieck xyz bei x rechtwinklig sein, d. h. der Höhenpunkt ξ dieses Dreiecks muss mit der Ecke x zusammenfallen, und umgekehrt: Wenn der Höhenpunkt ξ mit x zusammenfällt, nur dann werden Y und Z rechtwinklig zu einander sein. Da nun x und ξ conjugirte Punkte eines bestimmten und aus dem Obigen leicht zu ermittelnden Punktsystems sind, so kommt es darauf an, die Asymptotenpunkte dieses Punktsystems zu finden. Diese sind nur reell, wenn das Punktsystem hyperbolisch ist, im andern Falle werden sie durch dieses bestimmte (elliptische) Punktsystem vertreten. Es kann also auf jeder Axe des Netzes höchstens zwei Punkte von solcher Beschaffenheit geben, dass die ihnen zugehörigen Strahlensysteme des Netzes circulare werden. Um zu erfahren, ob diese Punkte reell sind, müssen wir das oben ermittelte Punktsystem (x, ξ) auf jeder Axe genauer zu bestimmen suchen. Da die Punkte x, ξ auf der in Betracht gezogenen Axe des Netzes ein Punktsystem bilden, so werden sämtliche über den Strecken $x\xi$ als Durchmesser beschriebenen Kreise ein Kreisbüschel bilden und zwar mit einer reellen gemeinschaftlichen Secante, wenn das Punktsystem (x, ξ) elliptisch ist, dagegen mit einer ideellen gemeinschaftlichen Secante, wenn das Punktsystem (x, ξ) hyperbolisch ist, indem die beiden Asymptotenpunkte desselben die Grenzpunkte (Null-Kreise) des Kreisbüschels werden. Welcher Art aber auch dieses Kreisbüschel sei, immer giebt es durch einen Punkt B der Ebene nur einen einzigen, stets reellen Kreis, welcher dem Büschel angehört, oder mit andern Worten, das Kreisbüschel erfüllt die ganze

unendliche Ebene. Wir haben oben gesehen, dass jeder Punkt B eines solchen Kreises, welcher über $x\xi$ als Durchmesser beschrieben ist, mit x und ξ verbunden zwei rechtwinklige Strahlen liefert, welche die Axen des Strahlensystems für B im Netze sind. Da aber jedem Punkte B in der Ebene des Netzes nur ein bestimmtes Strahlensystem zugehört und auch durch jeden Punkt B nur ein bestimmter Kreis des Kreisbüschels hindurchgeht, so können wir umgekehrt schliessen:

Denkt man sich in sämtlichen Punkten B der Ebene eines Netzes die Axen der ihnen im Netze zugehörigen Strahlensysteme ermittelt, und trifft ein solches Axenpaar eine (oder die andere) Axe des Netzes in dem Punktpaar x, ξ , so bildet die Gesamtheit dieser Paare x, ξ ein bestimmtes Punktsystem auf der Axe des Netzes, d. h. x, ξ sind allemal ein Paar conjugirter Punkte eines und desselben Punktsystems, wo auch der Punkt B in der Ebene angenommen werden mag.

Hierdurch wird das Punktsystem (x, ξ) auf eine zweite, sehr einfache Weise bestimmt und zwar für jede der Axen des Netzes in gleichartiger Weise, denn die eine der Betrachtung zu Grunde gelegte Axe hat vor der anderen nichts voraus, und durch einen bestimmten Punkt B giebt es nur ein einziges Paar Axen desjenigen Strahlensystems, welches dem Punkte B im Netze zugehört. Denken wir uns also einen beliebigen Punkt B in der Ebene und die Axen seines Strahlensystems, welche in x und ξ die eine, in y und η die andere Axe des Netzes treffen mögen, so bestimmen x, ξ und der Mittelpunkt M das eine, y, η und der Mittelpunkt M das andere Punktsystem auf den Axen des Netzes, und es ist jetzt leicht ersichtlich, dass von diesen beiden Punktsystemen nothwendig eines hyper-

Fig. 99.



bolisch und das andere elliptisch sein muss; denn sobald x und ξ auf derselben Seite von M gelegen sind, müssen y und η auf entgegengesetzten Seiten von M liegen und umgekehrt (Fig. 99). Die vier Punkte $x\xi y\eta$ liegen nämlich so, dass jeder von ihnen der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, und es findet demzufolge die Bedingung statt:

$$Mx \cdot M\xi + My \cdot M\eta = 0;$$

das eine dieser beiden Producte ist also gleich, aber entgegengesetzt dem andern, d. h. wenn das eine positiv ist, muss das andere negativ sein und umgekehrt. Von den beiden auf den Axen des Netzes her-

vorgerufenen Punktsystemen ist also eines nothwendig hyperbolisch, das andere elliptisch. Die Asymptotenpunkte des hyperbolischen Punktsystems, F und F_1 , sind die einzigen reellen Punkte in der Ebene des Netzes, für welche das zugehörige Strahlensystem ein circulares wird; sie heissen die *Brennpunkte des Netzes*; auf der andern Axe giebt es ein bestimmtes elliptisches Punktsystem, dessen Potenz den gleichen aber entgegengesetzten Werth hat, und dessen imaginäre Asymptotenpunkte als das zweite Paar Brennpunkte des Netzes aufgefasst werden können. Wollen wir noch die unendlich-entfernte Gerade $\mathcal{G}_\infty$ als dritte Axe des Netzes gelten lassen, insofern sie der dritte Tripelstrahl zu den beiden endlichen Axen des Netzes ist und gewissermassen als auf jeder Geraden in der Ebene senkrecht stehend angenommen werden kann, so wird auf dieser dritten Axe ebenfalls ein Punktsystem (z, ξ) durch die Axen eines jeden Strahlensystems im Netze bestimmt werden, und dieses Punktsystem ist ein für allemal dasselbe (circulare), indem es von je zwei unendlich-entfernten Punkten in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen erzeugt wird. Die imaginären Asymptotenpunkte desselben sind die imaginären Kreispunkte der unendlich-entfernten Geraden (S. 78) und können allemal als ein Paar imaginäre Brennpunkte für jedes Netz angesehen werden.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Potenz des Punktsystems (x, ξ) , welche gleich und entgegengesetzt der des andern Punktsystems (y, η) ist, zu bestimmen oder, was dasselbe ist, den Abstand jedes der Brennpunkte FF_1 von dem Mittelpunkt M des Netzes zu ermitteln; dieser ist leicht auszudrücken durch die Potenzen P_a und P_b derjenigen beiden Punktsysteme, welche den Axen des Netzes zugehören. Nehmen wir von den beiden Axen des dem Punkte B zugehörigen Strahlensystems eine, welche in x und y die Axen des Netzes treffen möge, so wird ihr Pol P auf der andern liegen müssen (Fig. 99), also in der durch B auf ihr gezogenen Senkrechten, welche in ξ und η die Axen des Netzes trifft; die Polare von x muss nun durch P gehen und senkrecht stehen auf Mx , also, wenn das aus P auf Mx herabgelassene Perpendikel diese Gerade in x' trifft, so ist $Mx \cdot Mx' = P_a$ und ebenso $My \cdot My' = P_b$, wo y' den Fusspunkt des aus P auf My herabgelassenen Perpendikels, d. h. der Polare von y bedeutet. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber:

$$\frac{M\eta}{M\xi} = \frac{y'\eta}{y'P} = \frac{y'\eta}{Mx'} = \frac{M\eta - My'}{Mx'},$$

und setzen wir dies Verhältniss in die oben gefundene Relation:

$$Mx \cdot M\xi + My \cdot M\eta = 0$$

ein, so folgt:

$$Mx \cdot Mx' - My \cdot My' = -My \cdot M\eta = Mx \cdot M\xi$$

oder:

$$\begin{cases} Mx \cdot M\xi = P_a - P_b \\ My \cdot M\eta = P_b - P_a \end{cases}$$

Die Potenz desjenigen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte die Brennpunkte des Netzes sind, ist hiernach gefunden, also auch die Entfernung der Brennpunkte FF_1 vom Mittelpunkt, deren Quadrat gleich dem absoluten Werthe von $(P_a - P_b)$ ist.

Es ist vorhin erwähnt worden, dass die Kreise, welche über je einer Strecke $x\xi$ zwischen zwei conjugirten Punkten des Punktsystems (x, ξ) als Durchmesser beschrieben werden, ein Kreibüschel bilden, dessen Grenzpunkte (Nullkreise) die Brennpunkte des Netzes sind. Wir erhalten hiernach für die beiden endlichen Axen des Netzes zwei Kreibüschel, deren eines zur ideellen, das andere zur reellen gemeinschaftlichen Secante die eine und die andere Axe des Netzes und zur Centrale die jedesmalige zweite Axe hat; da die Potenz des Punktes M in Bezug auf die Kreise des einen Büschels gleich aber entgegengesetzt der Potenz desselben Punktes in Bezug auf die Kreise des andern Büschels ist, so schneidet jeder Kreis des einen jeden des andern Büschels rechtwinklig, und die Kreise über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser stehen daher in der bekannten Beziehung zu einander, dass sie zwei *conjugirte Kreibüschel* bilden. Wir können dies als Satz folgendermassen aussprechen:

Die beiden Brennpunkte auf der einen Axe des Netzes und die Schnittpunkte der andern mit irgend einem Axenpaar des Strahlsystems, welches einem beliebigen Punkte in der Ebene des Netzes zugehört, liegen allemal auf einem Kreise.

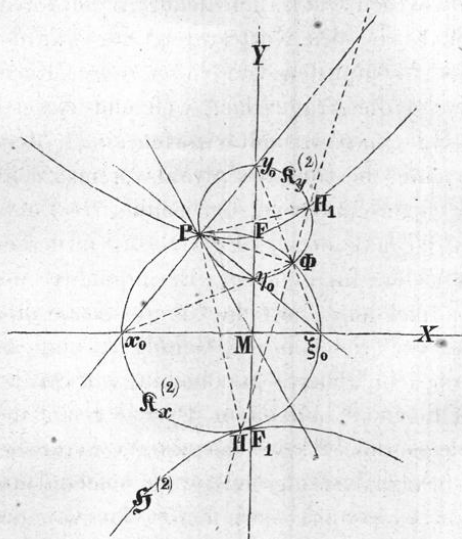
Das dritte zu den beiden conjugirten Kreibüscheln zugehörige Kegelschnittbüschel, welches aus sämtlichen gleichseitigen Hyperbeln besteht, die M zum Mittelpunkt haben und durch die Brennpunkte FF_1 gehen (S. 339), tritt bei dieser Betrachtung ebenfalls hervor, wenn man $\mathcal{G}_\infty$ als dritte Axe des Netzes hinzunimmt. Wenn man die Axen des einem beliebigen Punkte P in Bezug auf das Netz zugehörigen Strahlsystems hat und durch M Parallele zu denselben zieht, so giebt es eine gleichseitige Hyperbel, welche diese beiden Parallelen zu Asymptoten hat und durch P geht; alle diese Hyperbeln bilden ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln mit zwei reellen (FF_1) und zwei imaginären Grundpunkten. Wir erhalten eine solche gleichseitige Hyperbel, wenn wir (Fig. 98) bei dem obigen Tripel xyz die Bewegung eintreten lassen, dass wir Y parallel mit sich verschieben und aus dem jedesmaligen Pole y von Y das Perpendikel auf Y fallen, dessen Fusspunkt y' die gleichseitige Hyperbel beschreibt.

§. 61. Einige Eigenschaften der Axen sämtlicher Strahlsysteme, welche den Punkten in der Ebene eines Netzes zugehören.

Wir haben oben (S. 422) das Gesetz aufgesucht, welchem die Asymptoten sämtlicher Strahlsysteme, die den Punkten in der Ebene eines Netzes zugehören, unterworfen sind, sowie den Ort sämtlicher Asymptotenpunkte auf allen Geraden in der Ebene des Netzes; letzterer war der Kern des Netzes und sämtliche Asymptoten Tangenten dieses Kernkegelschnitts. Es bietet sich jetzt die Frage dar, welchem Gesetze die Axen sämtlicher Strahlsysteme im Netze unterworfen sind? Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene ist Axe eines bestimmten Strahlsystems; denn treffe sie eine Axe X des Netzes in x und sei ξ der conjugirte Punkt in demjenigen Punktsystem (x, ξ) auf dieser Axe (S. 458), dessen Asymptotenpunkte die reellen (oder imaginären) Brennpunkte des Netzes sind, so wird das Perpendikel aus ξ auf die Gerade $\mathfrak{A}$ dieselbe in demjenigen Punkte p treffen, für welchen die Gerade $\mathfrak{A}$ und die darauf Senkrechte die Axen des dem Punkte p zugehörigen Strahlsystems im Netze sind. Durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene gehen also unendlich-viele Gerade $\mathfrak{A}$, welche als Axen für bestimmte dem Netze zugehörige Strahlsysteme auftreten; suchen wir den Ort der zugehörigen zweiten Axe $\mathfrak{B}$ zu bestimmen. Das von der Geraden $\mathfrak{A}$ beschriebene Strahlbüschel (P) trifft die Axe X des Netzes in der Punktreihe (x) und die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ in einer Punktreihe, die mit der Punktreihe (x) perspectivisch liegt; denken wir uns das Strahlbüschel (P) um 90° gedreht, so trifft es die $\mathfrak{G}_\infty$ in einer neuen Punktreihe, welche ebenfalls mit dem Strahlbüschel (P) projectivisch ist; der dem x conjugirte Punkt ξ beschreibt bei der Bewegung von x eine Punktreihe (ξ) , welche wegen der projectivischen Natur des Punktsystems (S. 52) ebenfalls mit der Punktreihe (x) projectivisch ist, und die Perpendikel aus ξ auf den jedesmaligen Strahl $\mathfrak{A}$ sind nichts anderes, als Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen auf den Trägern X und $\mathfrak{G}_\infty$, indem letztere von dem um 90° gedrehten Strahlbüschel (P) auf $\mathfrak{G}_\infty$ geschnitten wird. Die der Axe $\mathfrak{A}$ zugehörige zweite Axe $\mathfrak{B}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt und zwar eine *Parabel*, weil $\mathfrak{G}_\infty$ eine Tangente desselben ist; diese Parabel berührt die beiden endlichen Axen X und Y des Netzes, und der Mittelpunkt M des Netzes ist daher ein Punkt der Leitlinie dieser Parabel, weil durch ihn zwei rechtwinklige Tangenten an dieselbe gehen. Da ferner dem festen Punkte P selbst ein bestimmtes Strahlssystem im Netz zugehört, dessen Axen ein be-

sonderes Axenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind, so liegt auch P in der Leitlinie, und PM ist daher die Leitlinie der Parabel. Wir können auch leicht den Brennpunkt dieser Parabel ermitteln; die Axen des dem Punkte P zugehörigen Strahlensystems mögen X in $x_0\xi_0$ und Y in $y_0\eta_0$ treffen (Fig. 100), dann gehören die beiden über $x_0\xi_0$ und $y_0\eta_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise

Fig. 100.



den beiden vorhin (S. 460) erwähnten conjugirten Kreisbüscheln an; diese beiden Kreise haben aber ausser dem Punkte P noch einen zweiten (reellen) Punkt Φ gemein, und Φ ist der Brennpunkt unserer Parabel; denn da der Brennpunkt einer Parabel, welche einem Dreieit eingeschrieben ist, allemal auf dem dem Dreieit umschriebenen Kreise liegt (S. 280) und wir hier zwei der Parabel umschriebene Dreiecke $Px_0\xi_0$ und $Py_0\eta_0$ haben, so muss der gemeinschaftliche Punkt der ihnen

umschriebenen Kreise der gesuchte Brennpunkt der Parabel sein; da aber P dieser Punkt offenbar nicht sein kann, so ist Φ der Brennpunkt der Parabel. Es ist ferner leicht zu sehen, dass $\Phi = (x_0\eta_0, y_0\xi_0)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $x_0\eta_0$ und $y_0\xi_0$ ist, und dass dieselben auf einander senkrecht stehen, oder dass Φ der dritte Diagonalepunkt des vollständigen Vierecks $x_0y_0\xi_0\eta_0$ ist, dessen beide andern P und M sind. Die Gerade, welche die Fusspunkte der aus Φ auf die Axen XY gefällten Perpendikel verbindet, ist also nach bekannten Eigenschaften der Parabel die Tangente am Scheitel derselben und läuft parallel der Leitlinie PM . Die hier auftretende Parabel ist uns also jetzt durch Leitlinie und Brennpunkt vollständig bekannt, und wir können das Ergebniss der vorigen Untersuchung folgendermassen zusammenfassen:

Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene eines Netzes ist eine Axe eines bestimmten dem Netze zugehörigen Strahlensystems; die andere Axe $\mathfrak{B}$ wird gefunden, indem man den Schnittpunkt x der Geraden $\mathfrak{A}$ mit einer Axe X des Netzes aufsucht, den conjugirten Punkt ξ desjenigen Punktsystems bestimmt, welches die (reellen oder imaginären) Brennpunkte des Netzes

auf dieser Axe zu Asymptotenpunkten hat, und aus ξ ein Perpendikel auf $\mathfrak{A}$ herablässt; dieses Perpendikel ist die andere Axe $\mathfrak{B}$ und der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = p$ derjenige Punkt von $\mathfrak{A}$, dessen Strahlensystem im Netze $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu Axen hat. Bewegt man die Gerade $\mathfrak{A}$ um einen beliebigen festen Punkt P , so verändert sich auch $\mathfrak{B}$ und umhüllt eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Diese Parabel hat PM , die Verbindungslinie des festen Punktes P mit dem Mittelpunkte M des Netzes, zur Leitlinie und berührt sowohl die beiden Axen des Netzes, als auch die beiden Axen des besonderen Strahlensystems, welches dem Punkte P im Netze zugehört. Jedem Punkte P in der Ebene entspricht also eine bestimmte Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; bewegt sich P auf einer Geraden $\mathfrak{A}_0$, so durchläuft $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine Parabelschaar von vier festen Tangenten; dies sind die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, die beiden Axen XY des Netzes und diejenige Gerade $\mathfrak{B}_0$, welche zur anderen Axe $\mathfrak{A}_0$ hat; die Leitlinien dieser Parabelschaar laufen durch den festen Punkt M (S. 279) u. s. f.

Halten wir den Punkt P fest und suchen den Zusammenhang der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ mit den beiden conjugirten Kreisbüscheln zu erkennen, denen wir noch das dritte conjugirte Büschel gleichseitiger Hyperbeln hinzufügen, so zeigen sich die in §. 51 allgemein gefundenen Eigenschaften dreier conjugirten Kegelschnittbüschel für diesen besonderen Fall vollständig bestätigt. Ein Kegelschnitt, welchem die beiden Punktsysteme (x, ξ) und (y, η) auf den Axen X und Y des Netzes zugehören, ist allemal eine gleichseitige Hyperbel, welche M zum Mittelpunkte hat; denn nach der auf S. 150 angegebenen Construction geht durch einen gegebenen Punkt P nur ein einziger bestimmter Kegelschnitt, welcher die Punktsysteme (x, ξ) und (y, η) zu zugehörigen hat, und dieser Kegelschnitt wird gefunden, indem man das einzige Strahlenpaar durch P aufsucht, welches gleichzeitig sowohl das eine, wie das andere Punktsystem in einem Paare conjugirter Punkte trifft. In unserm Falle ist nun dieses Strahlenpaar immer reell, nämlich das Axenpaar des dem Punkte P im Netze zugehörigen Strahlensystems, welches in $x_0\xi_0$ die Axe X und in $y_0\eta_0$ die Axe Y trifft. Die Punkte, in welchen diese beiden Strahlen die Polare des Schnittpunkts $(X, Y) = M$, d. h. $\mathfrak{G}_\infty$ treffen, also die unendlich-entfernten Punkte jener beiden rechtwinkligen, durch P gehenden Strahlen sind Punkte des gesuchten Kegelschnitts, und dieser ist also eine gleichseitige Hyperbel, weil er zwei unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen hat. Diese beiden Punkte, die Brennpunkte FF_1 des Netzes, und der Punkt P bestimmen vollständig den Kegelschnitt. Nennen wir zur Abkürzung die beiden Kreise, welche $x_0\xi_0$ und $y_0\eta_0$ zu Durchmessern haben, $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_y^{(2)}$, die gleichseitige Hyper-

bel $\mathfrak{H}^{(2)}$ (Fig. 100), so hat $\mathfrak{H}^{(2)}$ mit jedem der beiden Kreise noch einen reellen gemeinschaftlichen Punkt ausser P , und diese Punkte HH_1 sind leicht zu finden; $x_0\xi_0$ sind nämlich ein Paar conjugirter Punkte für die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ und P ein Punkt derselben; die Strahlen Px_0 und $P\xi_0$ treffen die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ in den beiden unendlich-entfernten Punkten, deren Verbindungslinie ($\mathfrak{G}_\infty$) den Pol von $x_0\xi_0$ in Bezug auf die Hyperbel enthält, weil $x_0\xi_0$ durch M geht; folglich müssen (S. 149) die durch x_0 und ξ_0 parallel zu $P\xi_0$ und Px_0 gezogenen Geraden sich in einem Punkte H der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ treffen; dieser liegt gleichzeitig auf dem Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$, denn er ist der diametral gegenüberliegende Punkt zu P auf diesem Kreise oder, was dasselbe bedeutet, der zweite Schnittpunkt der Tangente in P am Kreise $\mathfrak{R}_y^{(2)}$, mit dem Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$; in gleicher Weise trifft die Tangente in P am Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ den Kreis $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ in einem Punkte H_1 der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; die beiden Punkte H und H_1 liegen in gerader Linie mit Φ , dem zweiten Schnittpunkte der Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_y^{(2)}$, denn die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Mitten der Strecken PH und PH_1 , und die Centrale halbirt die gemeinschaftliche Secante $P\Phi$; da sie zugleich auf ihr senkrecht steht, so ist auch die Gerade, in welcher die Punkte $HH_1\Phi$ liegen, zur Geraden $P\Phi$ rechtwinklig. Ferner zeigt sich, dass $P\Phi$ die Tangente im Punkte P an der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist, denn da $x_0\xi_0$ ein Paar conjugirter Punkte sind in Bezug auf $\mathfrak{H}^{(2)}$ und $y_0\eta_0$ ein zweites Paar, so ist (S. 153) das Paar $(x_0y_0, \xi_0\eta_0) = P$ und $(x_0\eta_0, \xi_0y_0) = \Phi$ ein drittes Paar conjugirter Punkte für die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; und da P selbst auf ihr liegt, so ist $P\Phi$ Tangente in P . Die Gerade $HH_1\Phi$ ist die Polare des Punktes P in Bezug auf die ihm entsprechende Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, denn P liegt in der Leitlinie dieser Parabel, deren Pol der Brennpunkt Φ derselben ist; ferner steht HH_1 senkrecht auf $P\Phi$; folglich ist nach bekannten Eigenschaften der Parabel HH_1 die Polare von P in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; die Schnittpunkte von HH_1 mit den beiden durch P gehenden rechtwinkligen Strahlen Px_0 und $P\xi_0$ sind daher deren Berührungspunkte mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, und hieraus folgt, dass H und H_1 die Pole der durch P zu X und Y gezogenen Parallelen in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind, ebenso wie Φ der Pol von PM ist. Wir können hiernach folgendes Ergebniss zusammenstellen:

Die auf den Geraden $X, Y, Z (= \mathfrak{G}_\infty)$ des Netzes befindlichen Punktsysteme $(x, \xi) (y, \eta) (z, \zeta)$, welche von den Axenpaaren sämtlicher Strahlsysteme im Netze ausgeschnitten werden, bestimmen paarweise zusammengefasst drei conjugirte Kegelschnittbüschel, sodass die Kegelschnitte eines Büschels je zwei von den Punktsystemen zu zugehörigen haben; diese drei Büschel bestehen aus zwei conjugirten Kreisbüscheln,

welche über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser beschrieben sind, und einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche durch je zwei unendlich-entfernte Punkte z, ξ , die in rechtwinkligen Richtungen zu einander liegen, sowie durch die beiden reellen Brennpunkte des Netzes FF_1 gehen und den Mittelpunkt M des Netzes zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben. Durch einen beliebigen Punkt P des Netzes gehen drei bestimmte Kegelschnitte dieser Büschel: zwei Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)} \mathfrak{R}_y^{(2)}$ und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; treffen nämlich die dem Punkte P im Netze zugehörigen Axen in $x_0\xi_0$ die Axe X , in $y_0\eta_0$ die Y , in $z_\infty\xi_\infty$ die Axe Z ($\mathfrak{G}_\infty$), so ist $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ der über $x_0\xi_0$ als Durchmesser beschriebene Kreis, $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ der über $y_0\eta_0$ als Durchmesser beschriebene Kreis und $\mathfrak{H}^{(2)}$ die durch $z_\infty\xi_\infty FF_1$ und P gelegte gleichseitige Hyperbel. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{R}_x^{(2)} \mathfrak{R}_y^{(2)} \mathfrak{H}^{(2)}$ haben zu je zweien noch einen vierten reellen Punkt gemein, nämlich $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ den Punkt Φ , $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ den Punkt H , $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ den Punkt H_1 . Die drei Punkte $HH_1\Phi$ liegen in einer Geraden, welche die Polare des Punktes P in Bezug auf die oben betrachtete Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist, und die drei Strahlen $PH, PH_1, P\Phi$ sind die Tangenten der beiden Kreise $\mathfrak{R}_x^{(2)} \mathfrak{R}_y^{(2)}$ und der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ in dem gemeinschaftlichen Punkte P . Die Punkte $HH_1\Phi$ sind auch die Pole der drei Strahlen, welche von P nach den Schnittpunkten der Seiten des Dreiseits XYZ hingehen, in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Da jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene des Netzes eine Axe für ein bestimmtes dem Netze zugehöriges Strahlensystem ist und der Punkt p , welchem dieses Strahlensystem zugehört, nach dem Obigen leicht gefunden wird als Schnittpunkt der zweiten Axe $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$, so bietet sich die Frage dar, welches der Ort des Punktes p ist, wenn wir die Gerade $\mathfrak{A}$ um einen festen Punkt P drehen. Da die Gerade $\mathfrak{B}$ bei dieser Bewegung eine bestimmte Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ beschreibt, wie wir gesehen haben, so ist der Ort des Punktes p der Ort der Fusspunkte von allen Perpendikeln, welche aus P auf die Tangenten dieser Parabel herabgelassen werden können, d. h. die Fusspunktcurve für die Parabel in Bezug auf den Punkt P . Diese ist eine Curve dritten Grades $C^{(3)}$, welche in P einen Doppelpunkt hat, denn sie ist das Erzeugniss zweier projectivischer Gebilde: eines Strahlbüschels (P) und eines krummen Tangentenbüschels (der Parabel)*); wir können aber auch direct nachweisen, dass sie vom dritten Grade ist, indem wir zeigen, dass es auf jeder beliebigen Geraden in der Ebene im Allgemeinen und höchstens drei Punkte des gesuchten Ortes giebt. Lassen wir auf

*) Siehe *Crelle-Borchardt'sches Journal für Mathematik* Bd. LIV, Seite 31 ff.: „Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde“ von *H. Schröter*.

einer beliebigen Geraden $\mathfrak{L}$ einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ sich bewegen, ziehen $P\mathfrak{x}$ und die darauf Senkrechte in $\mathfrak{x}$, so umhüllt die letztere offenbar eine zweite Parabel $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, welche P zum Brennpunkte und $\mathfrak{L}$ zur Tangente am Scheitel hat; die beiden Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ haben in der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ bereits eine gemeinschaftliche Tangente, mithin im Allgemeinen und höchstens noch drei andere; die Schnittpunkte derselben mit der Geraden $\mathfrak{L}$ sind offenbar Punkte des gesuchten Ortes, dieser ist also vom dritten Grade. Denken wir uns continuirlich den Strahl $\mathfrak{A}$ um den festen Punkt P gedreht, so trifft ihn die jedesmal zu seiner Richtung senkrechte (einzige) Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ in dem Punkte p , welcher continuirlich die ganze Curve $C^{(3)}$ beschreibt; auf jedem durch P gehenden Strahl $\mathfrak{A}$ giebt es also nur einen solchen Punkt p des Ortes $C^{(3)}$; insbesondere aber gelangt der Strahl $\mathfrak{A}$ bei seiner continuirlichen Drehung nothwendig einmal in die Lage $\mathfrak{A}_0$ einer der beiden Axen des Strahlensystems, welches dem Punkte P in Bezug auf das Netz zugehört; die andere Axe $\mathfrak{B}_0$ trifft ihn dann in P selbst, und P ist daher auch ein Punkt des Ortes; zweitens gelangt aber auch der veränderliche Strahl $\mathfrak{A}$ in die Lage von $\mathfrak{B}_0$, und der veränderliche Punkt p fällt also zum zweiten Mal nach P ; hieraus erkennen wir, dass der Punkt P ein *Doppelpunkt* der Curve $C^{(3)}$ ist; die Verbindungslinie Pp ist immer Sehne der Curve $C^{(3)}$ und geht also bei der continuirlichen Drehung um P , sobald $\mathfrak{A}$ in die Lage von $\mathfrak{A}_0$ oder $\mathfrak{B}_0$ kommt, in die Tangente an $C^{(3)}$ für den Doppelpunkt P über, weil in jedem dieser Fälle P mit p zusammenfällt. Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte der Curve $C^{(3)}$ stehen daher auf einander senkrecht.

Es ist leicht, einige besondere Punkte der Curve $C^{(3)}$ anzugeben; offenbar geht sie durch die Brennpunkte FF_1 des Netzes, denn die Gerade PF und die darauf Senkrechte in F sind auch ein Paar Axen des dem Punkte F zugehörigen Strahlensystems, weil dieses ein circulares ist. (Hieraus schliessen wir, dass sie in gleicher Weise durch die beiden imaginären Brennpunkte auf der zweiten Axe und die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte auf der dritten Axe $\mathfrak{G}_\infty$ geht.) Ferner geht $C^{(3)}$ durch die Fusspunkte der beiden Perpendikel, welche von P aus auf die beiden endlichen Axen XY des Netzes herabgelassen werden, weil die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ die Axen XY zu Tangenten hat; sodann geht $C^{(3)}$ durch den unendlich-entfernten Punkt der Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, weil $\mathfrak{G}_\infty$ als die einzige Tangente der Parabel, welche auf dieser senkrecht steht, anzusehen ist. Endlich sind noch zwei Punkte der Curve $C^{(3)}$ in dem Falle anzugeben, dass das Netz ein hyperbolisches ist. Dann kann es nämlich zwei reelle Tangenten aus P an den

Kernkegelschnitt des Netzes geben, deren Berührungspunkte offenbar der $C^{(3)}$ angehören, weil Tangente und Normale allemal als ein Axenpaar eines dem Kegelschnitt zugehörigen Strahlensystems anzusehen sind. Der Polare von P im Netze gehört also ein Punktsystem zu, dessen Asymptotenpunkte auf der Curve $C^{(3)}$ liegen.

Noch zu erwähnen sind einige besondere Fälle, in denen die betrachtete Curve $C^{(3)}$ zerfällt. Wenn nämlich P insbesondere auf einer Axe des Netzes angenommen wird, z. B. auf X , und wir nennen x diese besondere Lage des Punktes P , so treffen alle durch x gehenden Strahlen $\mathfrak{A}$ die Axe X in demselben Punkte x , und die Perpendikel aus dem conjugirten Punkte ξ des Punktsystems (x, ξ) schneiden jene Strahlen $\mathfrak{A}$ in solchen Punkten p , welche auf einem Kreise liegen, der $x\xi$ zum Durchmesser hat; dieser Kreis $\mathfrak{R}_x^{(2)}$ ist ein Theil der Curve $C^{(3)}$, und der andere ist die Axe X selbst, denn für jeden ihrer Punkte ist die Axe X und die darauf Senkrechte ein Axenpaar des dem Netze zugehörigen Strahlensystems und X geht beständig durch den angenommenen Punkt x . Die Curve dritten Grades zerfällt also in diesem Falle in einen Kreis $\mathfrak{R}_x$ und eine Gerade X ; die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zieht sich dabei auf zwei Punkte, den Punkt ξ und den unendlich-entfernten Punkt von Y , oder auf deren doppelt zu zählende Verbindungslinie zusammen. In ganz analoger Weise zerfällt $C^{(3)}$ in einen Kreis $\mathfrak{R}_y^{(2)}$ und eine Gerade Y , falls der angenommene Punkt P auf der Axe Y des Netzes liegt. Wird endlich P insbesondere auf der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ (der dritten Axe Z des Netzes) angenommen, so zerfällt die Curve $C^{(3)}$ in diese Gerade selbst und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$, denn sobald P im Unendlichen liegt, werden sämmtliche durch ihn gehende Strahlen parallel; suchen wir zu jedem Schnittpunkt x der Geraden $\mathfrak{A}$ mit X den conjugirten Punkt ξ des Punktsystems (x, ξ) und fällen aus ihm ein Perpendikel auf $\mathfrak{A}$, so bleiben auch diese Perpendikel $\mathfrak{B}$ sich beständig parallel, und da x, ξ ein Punktsystem bilden, also projectivische Punktreihen durchlaufen, so beschreiben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei projectivische Strahlbüschel, deren Mittelpunkte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen. Ihr Erzeugniss ist daher eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$, und $\mathfrak{R}_x^{(2)} \mathfrak{R}_y^{(2)} \mathfrak{H}^{(2)}$ gehören den oben erwähnten drei conjugirten Büscheln an; denn es ist ersichtlich, dass die Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ durch die Brennpunkte des Netzes FF_1 geht und die Tangenten in ihren unendlich-entfernten Punkten sich in M , dem Mittelpunkt des Netzes, schneiden, dieser also zugleich Mittelpunkt von $\mathfrak{H}^{(2)}$ ist. Wir können die gewonnenen Resultate folgendermassen zusammenfassen:

Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene des Netzes ist Axe für ein bestimmtes

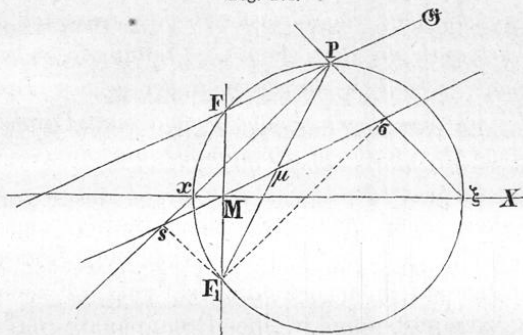
dem Netze zugehöriges Strahlensystem; der Mittelpunkt p desselben beschreibt, während $\mathfrak{A}$ sich um einen festen Punkt P dreht, eine bestimmte Curve dritten Grades $C^{(3)}$, welche P zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat, nämlich die Axen desjenigen Strahlensystems, welches dem Punkte P im Netze zugehört; die Curve $C^{(3)}$ geht durch die Brennpunkte des Netzes, durch die Fusspunkte der aus P auf die beiden endlichen Axen des Netzes herabgelassenen Perpendikel, durch den unendlich-entfernten Punkt der Verbindungslinie PM des festen Punktes P mit dem Mittelpunkte M des Netzes, durch die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte und durch die beiden Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches der Polare des Punktes P im Netze zugehört. Insbesondere zerfällt die Curve $C^{(3)}$, sobald der Punkt P auf einer der drei Axen des Netzes $X, Y, Z (= \mathfrak{G}_\infty)$ angenommen wird, und zwar in die jedesmalige Axe und einen Kegelschnitt, welcher für die Axen X und Y je ein Kreis $\mathfrak{K}_x^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_y^{(2)}$, für die Axe $Z (= \mathfrak{G}_\infty)$ eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ wird. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x^{(2)} \mathfrak{K}_y^{(2)} \mathfrak{H}^{(2)}$ gehören drei conjugirten Kegelschnittbüscheln an (§. 51).

Schliesslich wollen wir noch die Frage beantworten, welchen Ort die Axen der dem Netze zugehörigen Strahlensysteme aller solchen Punkte umhüllen, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ liegen; wir brauchen, um die Klasse dieses Ortes zu bestimmen, nur zu untersuchen, wie viele solcher Axen durch einen beliebigen Punkt P des Netzes gehen. Denken wir uns zu diesem Zweck die vorhin betrachtete Curve $C^{(3)}$, welche dem Punkte P entspricht, construiert, so schneidet dieselbe die Gerade $\mathfrak{G}$ im Allgemeinen und höchstens in drei Punkten, welche offenbar die verlangte Eigenschaft besitzen, dass ihre Verbindungslinien mit P drei Axen solcher Strahlensysteme sind, welche ihnen im Netze zugehören. Da durch den beliebig angenommenen Punkt P drei Axen der verlangten Art gehen, so ist der gesuchte Ort eine Curve dritter Klasse $K^{(3)}$; dieselbe berührt die angenommene Gerade $\mathfrak{G}$ selbst und zwar in demjenigen Punkte p , in welchem sie von der zweiten Axe des Strahlensystems getroffen wird, welches die Gerade $\mathfrak{G}$ zu einer Axe hat; denn da $\mathfrak{G}$ Axe eines einzigen bestimmten Strahlensystems im Netze ist, so berührt sie $K^{(3)}$, und durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ gehen also drei Tangenten, von denen die eine $\mathfrak{G}$ fest bleibt; bewegt sich nun ein veränderlicher Punkt auf $\mathfrak{G}$, so fallen, wenn er nach p gelangt, zwei unendlich-nahe Tangenten zusammen, und es ist also p der Berührungspunkt von $\mathfrak{G}$ mit $K^{(3)}$. Tangenten von $K^{(3)}$ sind ferner die beiden endlichen Axen X, Y des Netzes und die in den Schnittpunkten derselben mit $\mathfrak{G}$ zu den Axen gezogenen Parallelen; auch die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ berührt $K^{(3)}$. Insbesondere

zerfällt diese Curve, wenn die angenommene Gerade $\mathcal{G}$ durch einen der beiden Brennpunkte des Netzes, z. B. F , hindurchgeht. In diesem Falle ist nämlich jedes durch F gehende Paar zu einander rechtwinkliger Strahlen ein Axenpaar des Netzes, weil das Strahlensystem für den Brennpunkt F ein circulares ist; die Curve $K^{(3)}$ zerfällt daher in einen Punkt F und einen Kegelschnitt, nämlich eine *Parabel*, welche den andern Brennpunkt des Netzes F_1 zu ihrem Brennpunkt und die Gerade $\mathcal{G}$ zur Leitlinie hat.

In der That zeigt sich dies in folgender ganz elementaren Weise: Sei P ein beliebiger Punkt der durch F gehenden Geraden $\mathcal{G}$ (Fig. 101), so finden wir die Axen des dem Punkte P im Netze zugehörigen

Fig. 101.



Strahlensystems dadurch, dass wir durch PFF_1 einen Kreis legen; derselbe treffe die andere Axe X des Netzes, welche die Brennpunkte nicht enthält, in den Punkten x und ξ ; dann sind Px und $P\xi$ die Axen des Strahlensystems für P , deren Ort, während P sich auf $\mathcal{G}$ bewegt, gesucht wird. Da nun X in der Mitte M zwischen FF_1 senkrecht darauf steht, so sind in dem Kreise die Winkel $\angle F Px$ und $\angle x PF_1$ einander gleich; ziehen wir durch M eine Parallele zu $\mathcal{G}$, welche Px und $P\xi$ in s und σ , PF_1 in μ treffe, so wird also $\angle F Px = \angle P s \mu = \angle s P \mu$; folglich $\mu s = \mu P$ und, weil das Dreieck $s P \sigma$ bei P rechtwinklig ist, $s \mu = \mu P = \mu \sigma$; ferner ist, weil M die Mitte von FF_1 , auch μ die Mitte von $F_1 P$, und hieraus folgt, dass $F_1 s$ und $F_1 \sigma$ senkrecht stehen auf Px und $P\xi$ und auch auf einander; um nun zu erkennen, wie die Geraden Px und $P\xi$ (oder nur eine von ihnen) sich verändern, wenn P auf der Geraden $\mathcal{G}$ fortrückt, brauchen wir nur zu bemerken, dass s und σ auf der festen Geraden, welche durch M parallel zu $\mathcal{G}$ gezogen ist, sich bewegen und die auf $F_1 s$ und $F_1 \sigma$ errichteten Perpendikel in s und σ eben jene Strahlen Px und $P\xi$ sind. Hieraus erkennen wir, dass dieselben eine Parabel

umhüllen, welche F_1 zum Brennpunkt und $\mathcal{G}$ zur Leitlinie hat, auch die Axe X des Netzes berührt (Seite 197). Verändern wir die Gerade $\mathcal{G}$, indem wir sie um den Punkt F drehen, so verändert sich auch die entsprechende Parabel, behält aber immer denselben Brennpunkt F_1 und die Tangente X ; ihre Tangenten am Scheitel gehen durch den festen Punkt M , und die Scheitel liegen auf einem Kreise, welcher MF_1 zum Durchmesser hat.

Das Ergebniss der letzten Betrachtung lässt sich demgemäss so zusammenfassen:

Die Axen der Strahlssysteme im Netze für alle solche Punkte, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathcal{G}$ liegen, umhüllen eine Curve dritter Klasse $K^{(3)}$, welche die Gerade $\mathcal{G}$ selbst in demjenigen Punkte berührt, für welchen $\mathcal{G}$ eine Axe des ihm zugehörigen Strahlensystems im Netze ist; die Curve $K^{(3)}$ berührt auch die drei Axen X , Y und $Z (= \mathcal{G}_\infty)$ des Netzes. Sie zerfällt allemal, sobald $\mathcal{G}$ durch einen der beiden Brennpunkte des Netzes, z. B. F , geht, in diesen Punkt F und eine Parabel, welche den andern Brennpunkt F_1 zu ihrem Brennpunkt und die Gerade $\mathcal{G}$ zu ihrer Leitlinie hat.

Wir bemerken noch, dass die ganze Betrachtung dieses Paragraphen allein abhängt von den drei Axen des Netzes X , Y und $Z (= \mathcal{G}_\infty)$ und den auf ihnen befindlichen Punktsystemen (x, ξ) (y, η) (z, ζ) , deren Asymptotenpunkte die Brennpunkte des Netzes sind. Von diesen drei Punktsystemen ist das eine (z, ζ) auf $\mathcal{G}_\infty$ ein für allemal bekannt, seine Asymptotenpunkte die imaginären unendlich-entfernten Kreispunkte, die beiden andern auf den beiden endlichen Axen des Netzes haben gleiche, aber entgegengesetzte Potenz, und nur eines von ihnen ist also hyperbolisch und hat zu seinen Asymptotenpunkten die reellen Brennpunkte F und F_1 des Netzes. Durch diese Stücke ist aber das Netz nicht vollkommen bestimmt, sondern es giebt unendlich-viele Netze, welchen dieselben zugehören; diese bilden eine *Schaar von confocalen Netzen*. Das Netz ist erst völlig bestimmt, sobald wir noch eine Gerade $\mathcal{Q}$ senkrecht auf derjenigen Axe des Netzes X , welche die reellen Brennpunkte FF_1 enthält, willkürlich als die Polare eines Brennpunktes F annehmen (die *Leitlinie* für den Brennpunkt F). Die Gerade $\mathcal{Q}$ kann dabei noch parallel mit sich willkürlich verschoben werden; der Mittelpunkt des Netzes M theilt die Axe X in zwei unendliche Hälften; trifft die Gerade $\mathcal{Q}$ diejenige Hälfte, welche nicht den Brennpunkt F enthält, so ist das Netz allemal elliptisch, trifft sie die andere Hälfte, so ist es hyperbolisch, und zwar ist alsdann der Kernkegelschnitt Hyperbel, sobald $\mathcal{Q}$ die Axe X zwischen M und F trifft, dagegen Ellipse, sobald $\mathcal{Q}$ diese Hälfte der

Axe ausserhalb MF trifft. In der Schaar von confocalen Netzen ist also ausser der Schaar confocaler Kegelschnitte (Kernkegelschnitte), welche sich in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln trennen (S. 352), noch eine Unendlichkeit von elliptischen Netzen (imaginären Kegelschnitten) enthalten. In der ganzen Schaar von confocalen Netzen ist nun nach der obigen Untersuchung für einen beliebigen Punkt P das Axenpaar des Strahlensystems, welches ihm in jedem der Netze zugehört, allemal dasselbe, und es bleiben ebenso die conjugirten Kreisbüschel $(\mathfrak{K}_x^{(2)})$, $(\mathfrak{K}_y^{(2)})$ und das conjugirte Büschel gleichseitiger Hyperbeln $(\mathfrak{H}^{(2)})$ ungeändert, sowie auch sämtliche Parabeln $\mathfrak{P}^{(2)}$, welche den Punkten P entsprechen, und die Curven $C^{(3)}$ und $K^{(3)}$. Hieraus folgt u. A. nach den oben gefundenen Resultaten der Satz:

Die Berührungspunkte sämtlicher Tangentenpaare aus einem festen Punkte P an die Kegelschnitte einer confocalen Kegelschnittschaar liegen auf einer Curve dritten Grades $C^{(3)}$, welche P zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat.

§. 62. Zwei Netze in der Ebene. Netzbüschel und Netzschaar.

Nehmen wir zwei Involutionsnetze (Polarsysteme) in derselben Ebene gelegen an, so entsprechen jedem Punkte P in der Ebene zwei Polaren für das eine und das andere Netz; mögen sich diese beiden Polaren in dem Punkte Q schneiden, dann müssen offenbar auch die Polaren von Q für beide Netze sich in dem Punkte P schneiden; P und Q heissen daher *conjugirte Punkte* und sind auch in dem früheren Sinne conjugirte Punkte für beide Netze gleichzeitig; zu jedem Punkte P der Ebene gehört demgemäss ein bestimmter conjugirter Punkt Q und umgekehrt zu Q der conjugirte Punkt P . Bewegen wir den Punkt P auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$, so durchläuft der conjugirte Punkt Q einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, und jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{G}$ ist ein bestimmter Punkt dieses Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ conjugirt. Denn die Polaren der Punkte P auf der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf das erste Netz laufen durch einen festen Punkt π und beschreiben ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe, die P durchläuft, projectivisch ist. Ebenso beschreiben die Polaren der Punktreihe (P) in Bezug auf das zweite Netz ein Strahlbüschel (π_1) , welches mit der Punktreihe (P) projectivisch ist. Die Strahlbüschel (π) und (π_1) sind daher unter sich projectivisch, und je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich in demjenigen Punkte Q , welcher dem jedesmaligen P conjugirt ist. Der Ort sämtlicher conjugirten Punkte Q zu den auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegenden Punkten P

ist daher das Erzeugniss zweier projectivischen Strahlbüschel, d. h. ein Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, der durch die Pole π und π_1 der Geraden $\mathfrak{G}$ rücksichtlich beider gegebenen Netze hindurchgeht. Jeder Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene gehört hiernach ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ zu, der diejenigen Punkte Q enthält, welche den Punkten P der Geraden $\mathfrak{G}$ rücksichtlich beider gegebenen Netze conjugirt sind. Nehmen wir zwei beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ an, welche sich in dem Punkte P_0 schneiden mögen, so gehören ihnen beziehungsweise zwei bestimmte Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ zu, welche die conjugirten Punkte von den Punkten jener Geraden enthalten. Die Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ müssen nothwendig einen reellen, leicht angebbaren Punkt Q_0 gemeinschaftlich haben, nämlich denjenigen, welcher dem gemeinschaftlichen Punkte $P_0 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1)$ conjugirt ist. Sie haben daher noch einen zweiten reellen Punkt x , oder noch drei reelle Punkte xyz gemeinschaftlich. Diese besitzen eine besondere Eigenschaft in Bezug auf die beiden gegebenen Netze.

Weil nämlich der Punkt x auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt, so müssen seine beiden Polaren rücksichtlich der beiden gegebenen Netze sich in einem Punkte der Geraden $\mathfrak{G}$ treffen; weil er gleichzeitig auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ liegt, so müssen seine beiden Polaren sich auch in einem Punkte der Geraden $\mathfrak{G}_1$ treffen; in dem Punkte P_0 , dem einzigen, der $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ gemeinschaftlich ist, treffen sie sich aber nicht, denn x ist verschieden von Q_0 , folglich müssen die beiden Polaren von x für beide Netze zusammenfallen, denn zwei Gerade, die zwei verschiedene Schnittpunkte haben, fallen zusammen. Folglich besitzt der Punkt x (und ebenso auch y und z , wenn sie reell sind) die Eigenschaft, dass seine Polare in Bezug auf beide Netze dieselbe Gerade ist. Diese drei Punkte xyz und ihre für beide Netze zusammenfallenden Polaren XYZ hängen nun in gewisser leicht zu erkennender Weise mit einander zusammen. Sie machen eine besondere Ausnahme von allen übrigen Punkten der Ebene; während nämlich im Allgemeinen jedem Punkte P der Ebene nur ein einziger bestimmter Punkt Q rücksichtlich beider Netze conjugirt ist, darf dem Punkte x jeder Punkt von X als conjugirt angesehen werden, weil seine Polaren für beide Netze auf X zusammenfallen und mithin jeder Punkt der beiden zusammenfallenden Geraden als ihr Schnittpunkt gelten kann. Mehr Punkte von solcher Beschaffenheit, als die gefundenen drei: xyz , von denen nothwendig einer reell sein muss, kann es überhaupt in der ganzen Ebene nicht geben; denn gäbe es noch einen vierten Punkt u , dessen Polare U für beide Netze dieselbe Gerade wäre, so müsste diese $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ in zwei solchen Punkten treffen, deren conjugirte in

u zusammenfielen, also beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ gemeinschaftlich wären; die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben aber ausser dem schon berücksichtigten Punkte Q_0 keine anderen Punkte gemeinschaftlich als xyz , wenn sie nicht ganz zusammenfallen. Es giebt daher im Allgemeinen keine Punkte weiter in der Ebene, als xyz , von der Beschaffenheit, dass ihre Polaren XYZ in beiden Netzen dieselben Geraden sind.

Dies festgestellt, nehmen wir den einen immer reellen Punkt x und seine reelle Polare X für beide Netze; der Geraden X gehören dann in den beiden Netzen zwei (im Allgemeinen verschiedene) Punktsysteme zu, welche ein (reelles oder imaginäres) gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte besitzen; ist dasselbe reell, so ist es mit den Punkten y und z identisch, denn dem Punkt y gehört dann in beiden Netzen sowohl der Punkt z als auch der Punkt x zu, und zx ist also die Polare Y von y für beide Netze; ebenso $(xy) = Z$ die Polare von z für beide Netze; die Punkte y und z besitzen also die obige Beschaffenheit und müssen mit den noch einzig möglichen der Art identisch sein. Es folgt hieraus, dass die drei Punkte xyz ein Tripel bilden, welches beiden Netzen gemeinschaftlich ist, und dass ihre Polaren die gegenüberliegenden Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks sind:

$$(yz) = X; (zx) = Y; (xy) = Z; (Y, Z) = x; (Z, X) = y; (X, Y) = z.$$

Umgekehrt sind die Geraden XYZ , von denen nothwendig eine reell sein muss, die einzigen Geraden in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass ihre Pole für beide gegebenen Netze zusammenfallen, und sie bilden ein Tripel conjugirter Strahlen, welches beiden Netzen gemeinschaftlich ist. Dass zwei beliebig gegebene Netze ausser einem *Tripel conjugirter Punkte und Strahlen* nicht noch ein Paar von Pol und Polare gemeinschaftlich haben können, geht auch daraus hervor, dass das Netz vollständig und eindeutig bestimmt ist durch ein Tripel und ein beliebiges Paar von Pol und Polare, (S. 429) und dass zwei Netze, welche diese Stücke gemeinschaftlich haben, identisch sein müssen.

Was die Realität des gemeinschaftlichen Tripels zweier Netze betrifft, so ist, wie wir gesehen haben, einer seiner drei Punkte x und dessen Polare X , die Gerade, auf welcher die beiden andern liegen, allemal reell; diese selbst y und z sind stets reell, sobald eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind, weil einer jeden Geraden in Bezug auf ein elliptisches Netz ein elliptisches Punktsystem zugehört und zwei auf einander liegende Punktsysteme allemal ein reelles gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte haben, wenn wenigstens

eines von beiden Systemen elliptisch ist; wenn dagegen beide Netze hyperbolisch sind, so können y und z imaginär werden; dies ist aber der Fall zweier reellen Kegelschnitte, welcher in §. 54 genau discutirt ist. *Zwei imaginäre Kegelschnitte haben daher immer ein reelles gemeinschaftliches Tripel.*

Aus der ausgezeichneten den Punkten xyz allein zukommenden Eigenschaft folgt, dass die Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$, welche sämtlichen Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene der beiden Netze entsprechen, durch die drei festen Punkte xyz gehen müssen; denn weil irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ die X in einem Punkte trifft, dessen conjugirter rücksichtlich beider Netze x ist, muss der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ durch x gehen u. s. f. Auch umgekehrt wird irgend ein durch die Punkte xyz gelegter Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Eigenschaft besitzen, dass alle Punkte der Ebene, welche seinen Punkten conjugirt sind, auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen (eigentlich auf einer Curve vierten Grades, welche sich in vier Gerade auflöst, von denen drei allemal XYZ sind). Dies lässt sich sehr einfach umgekehrt nachweisen: Nehmen wir zwei beliebige Punkte $Q'Q''$ eines dem Dreieck xyz umschriebenen Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$, und seien deren conjugirte Punkte P' und P'' , so hat die Verbindungslinie $P'P''$, als Gerade $\mathfrak{G}$ aufgefasst, sämtliche Punkte Q , welche ihren Punkten P conjugirt sind, auf dem durch die fünf Punkte $Q'Q''xyz$ eindeutig bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, und es liegen also auch umgekehrt diejenigen Punkte, welche den Punkten des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ conjugirt sind, auf der Geraden $\mathfrak{G}$.

Durch die beiden in der Ebene gegebenen Netze ist nicht allein das eben angedeutete Beziehungssystem hergestellt, wonach jedem Punkte P ein bestimmter Punkt Q conjugirt ist und jeder Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene ein durch drei feste Punkte xyz gehender Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ entspricht, sondern auch zugleich das polare Verhalten, wonach jeder Geraden eine Gerade und jedem Punkte ein dem festen Dreieck XYZ einbeschriebener Kegelschnitt entspricht, denn eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ hat zu Polen in den beiden Netzen zwei Punkte π und π_1 , deren Verbindungslinie $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft besitzt, dass ihre Pole für beide Netze wiederum auf $\mathfrak{G}$ liegen; $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ heissen daher *conjugirte Strahlen*, und wenn $\mathfrak{G}$ sich um einen festen Punkt P dreht, so umhüllt $\mathfrak{H}$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher dem festen Dreieck XYZ einbeschrieben ist. Das Ergebniss der bisherigen Untersuchung kann daher folgendermassen zusammengefasst werden:

Sind zwei Netze in der Ebene gegeben, so schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes P in Bezug auf beide Netze in dem conjugirten Punkte Q , dessen Polaren sich wiederum in P treffen. Bewegt sich der

Punkt P auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$, so durchläuft der conjugirte Punkt Q einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$. Sämmtliche Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ laufen durch drei feste Punkte xyz . Diese bilden das beiden Netzen gemeinschaftliche Tripel conjugirter Punkte; ihre Polaren sind:

$$X = (yz); \quad Y = (zx); \quad Z = (xy).$$

Die Punkte xyz sind die einzigen in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass für sie die Polaren rücksichtlich beider Netze zusammenfallen. Die drei Punkte xyz sind allemal reell, sobald beide oder eines der beiden gegebenen Netze elliptisch ist; sind beide Netze hyperbolisch, so können zwei Tripelpunkte yz imaginär sein, während der dritte x und seine Polare X immer reell ist; die der Geraden X rücksichtlich beider Netze zugehörigen Punktsysteme haben als gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte y und z . Andererseits gehören einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene rücksichtlich beider Netze zwei Pole zu, deren Verbindungslinie $\mathfrak{H}$ der conjugirte Strahl zu $\mathfrak{G}$ heisst, und zur Verbindungslinie ihrer Pole wiederum $\mathfrak{G}$ hat. Dreht sich $\mathfrak{G}$ um einen festen Punkt P , so umhüllt $\mathfrak{H}$ einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$. Sämmtliche Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ berühren drei feste Gerade XYZ , welche das beiden Netzen gemeinschaftliche Tripel conjugirter Strahlen bilden und die einzigen Geraden von solcher Beschaffenheit sind, dass ihre Pole rücksichtlich beider Netze zusammenfallen. Das Tripel XYZ coincidirt mit dem Tripel xyz .

Es ist nicht ohne Interesse, insbesondere solche Lagen der Geraden $\mathfrak{G}$ aufzusuchen, für welche der zugehörige Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ eine Parabel, gleichseifige Hyperbel, ein Kreis oder Linienpaar wird. Geht die Gerade $\mathfrak{G}$ in die Unendlichkeit, wird sie also $\mathfrak{G}_\infty$, so geht der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ in einen besonderen Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ über, welcher die Mittelpunkte mm_1 beider Netze und das gemeinschaftliche Tripel xyz enthält und durch diese fünf Punkte vollständig bestimmt ist. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält diejenigen Punkte, welche sämmtlichen unendlich-entfernten Punkten rücksichtlich beider Netze conjugirt sind, und umgekehrt liegen die den Punkten des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ conjugirten Punkte im Unendlichen; er entscheidet also über die Natur des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$. Jeder Geraden $\mathfrak{G}$, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten trifft, entspricht als Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ eine Hyperbel, jeder Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ nicht trifft, eine Ellipse und allen Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ berühren, Parabeln; den sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ entsprechen also Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$, welche sämmtlich Parabeln sind, und auch umgekehrt sämmtlichen Parabeln, die dem Dreieck xyz umschrieben sind, Gerade $\mathfrak{G}$, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ umhüllen.

Um zweitens eine solche Gerade $\mathcal{G}$ zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel wird, nehmen wir auf $\mathcal{G}_\infty$ zwei solche Punkte z und ξ , die in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen; alle solche Punktpaare bilden auf $\mathcal{G}_\infty$ das bekannte Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte die beiden imaginären unendlich-entfernten Kreispunkte sind. Das Punktpaar z, ξ hat zu Polaren im ersten Netz zwei bestimmte durch den Mittelpunkt m gehende Strahlen, welche bei der Veränderung von z, ξ ein bestimmtes Strahlensystem beschreiben; in der That, da z und ξ conjugirte Punkte eines Punktsystems sind, so beschreiben ihre Polaren projectivische Strahlbüschel, die auf einander liegen und bei denen, wie leicht zu sehen ist, entsprechende gleiche Winkel verkehrt auf einander fallen (S. 59); sie constituiren also ein Strahlensystem. Je zwei conjugirte Strahlen desselben treffen den Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt P_0 läuft (S. 151), derselbe Punkt würde natürlich resultiren, wenn wir die Polaren von z, ξ in Bezug auf das zweite Netz zu Hülfe nehmen. Hiernach lässt sich der Punkt P_0 in leichter Weise finden: Die Axen des ersten Netzes durchbohren den Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ nur noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie bestimmt wird; ebenso liefern die Axen des zweiten Netzes eine Durchbohrungssehne in $\mathcal{M}^{(2)}$, und der Schnittpunkt dieser beiden Durchbohrungssehnern ist der gesuchte Punkt P_0 ; jede durch P_0 gehende Gerade trifft den Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, deren conjugirte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen; einer solchen Geraden entspricht allemal eine gleichseitige Hyperbel als Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$. Es giebt daher unendlich-viele Gerade $\mathcal{G}$, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathcal{K}^{(2)}$ *gleichseitige Hyperbeln* werden; dieselben gehen durch einen festen Punkt P_0 , dessen Construction oben angegeben ist. Der conjugirte Punkt Q_0 zu P_0 muss der Höhenpunkt des Dreiecks xyz sein, weil alle gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind, zugleich durch den Höhenpunkt desselben gehen (S. 232), woraus eine neue einfache Construction von P_0 sich ergibt.

Hiernach wird es auch möglich, eine solche Gerade $\mathcal{G}$ zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$ ein Kreis wird. Seien nämlich t und τ zwei solche Punkte auf dem Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$, deren conjugirte z und ξ unendlich-entfernt in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, oder $t\tau$ irgend eine durch P_0 gehende Sehne des Kegelschnitts $\mathcal{M}^{(2)}$, so entsprechen den beiden Tangenten in t und τ am Kegelschnitt $\mathcal{M}^{(2)}$ zwei Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei rechtwinkligen Richtungen liegen: Diese beiden Parabeln,

welche durch xyz gehen, haben als vierten gemeinschaftlichen Punkt einen solchen, der nothwendig mit xyz auf einem Kreise liegt (S. 229), und der conjugirte Punkt zu diesem rücksichtlich der beiden Netze ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in t und τ am Kegelschnitte $\mathfrak{M}^{(2)}$. Dieser liegt auf der Polare des Punktes P_0 , und jeder Punkt dieser Polare $\mathfrak{G}_0$ des Punktes P_0 in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ besitzt umgekehrt die Eigenschaft, dass sein conjugirter auf dem dem Dreieck xyz umschriebenen Kreise liegt. Es giebt also nur eine einzige bestimmte Gerade $\mathfrak{G}_0$ in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass der ihr entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Kreis wird, und diese besondere Gerade $\mathfrak{G}_0$ ist die Polare des vorhin ermittelten Punktes P_0 in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$.

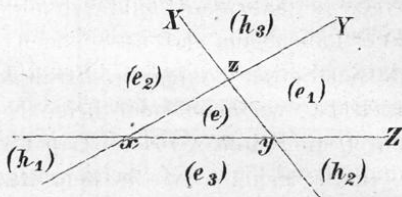
Suchen wir endlich solche Gerade $\mathfrak{G}$ in der Ebene auf, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ in Linienpaare zerfallen. Den Punkten einer derartigen Geraden müssen in den beiden gegebenen Netzen zwei Strahlbüschel von Polaren (π) und (π_1) zugehören, welche perspectivisch liegen, also in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt haben; eine derartige Gerade $\mathfrak{G}$ muss aber nothwendig einen solchen Punkt enthalten, dessen Polaren im Netze zusammenfallen; es giebt in der ganzen Ebene nur drei Punkte der Art xyz ; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ kann mithin nur dann in ein *Linienpaar* zerfallen, wenn die Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen der drei Eckpunkte des gemeinschaftlichen Tripels hindurchgeht, und umgekehrt: Sobald die Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen Punkt des gemeinschaftlichen Tripels, z. B. x hindurchgeht, zerfällt der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Gerade X ist. Suchen wir den andern Theil desselben auf; dieser muss eine Gerade g sein, welche durch x geht; denn demjenigen Punkte von $\mathfrak{G}$, welcher zugleich in X liegt, entspricht als conjugirter Punkt x . Die Gerade g ist also bestimmt, sobald wir nur irgend einen Punkt der durch x gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ kennen, indem sein conjugirter mit x verbunden den Strahl g liefert. Wenn wir die Gerade $\mathfrak{G}$ um x drehen, so verändert sich auch g , indem es sich um x dreht; es ist leicht zu erkennen, dass $\mathfrak{G}$ und g conjugirte Strahlen eines bestimmten neuen Strahlensystems sind, dessen Mittelpunkt x ist, d. h.: Wenn wir einen beliebigen Punkt P und seinen conjugirten Punkt Q mit x verbinden, so sind allemal $xP = \mathfrak{G}$ und $xQ = g$ zwei conjugirte Strahlen eines bestimmten Strahlensystems (x); in der That, wir haben nur nöthig, P auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{H}$ so zu bewegen, dass Q den ihr entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ durchläuft, welcher durch x (y und z) geht und von zwei projectivischen Strahlbüscheln (π) und (π_1) er-

zeugt wird, die zugleich mit der von P durchlaufenen Punktreihe projectivisch sind; da x auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt, so beschreibt auch xQ ein mit πQ oder $\pi_1 Q$, also auch mit xP projectivisches Strahlbüschel; es beschreiben also xP und xQ zwei auf einander liegende projectivische Strahlbüschel; dieselben erzeugen nun ein Strahlssystem, weil sowohl Q der conjugirte Punkt zu P ist, als auch P der conjugirte Punkt zu Q (S. 59). Dieses bestimmte Strahlssystem (x) , welches von dem Strahlenpaar $\mathfrak{G}, g$ erzeugt wird, hat auch die durch x gehenden beiden Geraden Y und Z zu einem Paar conjugirter Strahlen, denn sobald für P irgend ein Punkt auf Y genommen wird, ist sein conjugirter allemal y , mithin sind Y und $(xy) = Z$ ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (x) . In ganz gleicher Weise erhalten wir zwei Strahlssysteme (y) und (z) , deren Mittelpunkte y und z sind, und für welche wir immer zwei conjugirte Strahlen erhalten, indem wir ihren Mittelpunkt mit irgend einem Paare conjugirter Punkte P und Q in der Ebene verbinden.

Die drei Strahlssysteme (x) (y) (z) hängen in der Weise von einander ab, dass durch zwei von ihnen das dritte mitbestimmt ist; denn sobald das gemeinschaftliche Tripel xyz beider gegebenen Netze und irgend ein Paar conjugirter Punkte P und Q für dieselben bekannt sind, sind auch die drei Strahlssysteme (x) (y) (z) vollständig bekannt, weil je zwei Seiten des Tripeldreiecks und die von einer Ecke nach P und Q hingehenden Strahlen allemal zwei Paare conjugirter Strahlen eines solchen Strahlsystems sind, welches durch diese beiden Paare vollständig bestimmt wird. Sobald wir nun in zweien dieser Strahlssysteme, z. B. (x) und (y) , ausser den selbstverständlichen Paaren Y, Z und Z, X noch je ein Paar conjugirter Strahlen kennen, $\mathfrak{G}$ und g in (x) , $\mathfrak{G}'$ und g' in (y) , dann sind die Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') = P$ und $(g, g') = Q$ allemal conjugirte Punkte und geben mit z verbunden zwei conjugirte Strahlen des dritten Strahlsystems (z) , welches dadurch vollständig bestimmt wird; [auch die Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, g') = P'$ und $(\mathfrak{G}', g) = Q'$ sind natürlich conjugirte Punkte, und wir erhalten daher zugleich ein zweites Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (z)]. Wir können den gegenseitigen Zusammenhang der drei Strahlssysteme (x) (y) (z) auch so aussprechen: *Wenn wir irgend drei Strahlen dieser drei Systeme (x) (y) (z) durch einen Punkt P ziehen, so treffen sich die conjugirten Strahlen zu ihnen allemal wieder in einem Punkte Q , welcher der conjugirte Punkt zu P ist in Bezug auf die beiden gegebenen Netze.* Hieraus können wir auf die besondere Natur dieser drei Strahlssysteme schliessen und erkennen, dass, sobald das gemeinschaftliche Tripel xyz reell ist, von

den drei Systemen entweder 1) alle hyperbolisch oder 2) eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen. Die Seiten XYZ des Tripeldreiecks theilen nämlich die ganze unendliche Ebene in sieben Räume (Fig. 102), von denen, wie schon früher bemerkt (S. 230), einer, der endliche Dreiecksraum (e) , und die drei den Seiten anliegenden unendlichen Räume (e_1) (e_2) (e_3) die elliptischen, die drei an die Ecken anstossenden unendlichen Räume (h_1) (h_2) (h_3) aber die hyperbolischen Räume genannt werden; je nachdem nun das eine Paar conjugirter Punkte P und Q , welches zur Bestimmung der drei Strahlensysteme (x) (y) (z) ausreicht, in diesen Räumen gelegen ist, wird sich nach dem bekannten Kriterium (S. 61) sofort entscheiden lassen,

Fig. 102.



ob die Strahlensysteme hyperbolisch oder elliptisch sind, und hiernach ergibt sich folgende Tabelle, welche alle möglichen Fälle enthält: Bedeuten nämlich e = elliptisch und h = hyperbolisch, und drei neben einander gestellte Buchstaben, z. B. ehh , den Charakter der drei Strahlensysteme (x) (y) (z) in dieser Reihenfolge, so haben wir:

Liegt P in dem Raume:

		(e) (e ₁) (e ₂) (e ₃) (h ₁) (h ₂) (h ₃)						
Liegt Q in dem Raume:	(e)	hhh	hee	ehh	eeh	hee	ehh	eeh
	(e ₁)	hee	hhh	eeh	ehh	hhh	eeh	ehh
	(e ₂)	ehh	eeh	hhh	hee	eeh	hhh	hee
	(e ₃)	eeh	ehh	hee	hhh	ehh	hee	hhh
	(h ₁)	hee	hhh	eeh	ehh	hhh	eeh	ehh
	(h ₂)	ehh	eeh	hhh	hee	eeh	hhh	hee
	(h ₃)	eeh	ehh	hee	hhh	ehh	hee	hhh

Es treten also überhaupt nur zwei verschiedene Fälle ein: *entweder sind alle drei Strahlensysteme hyperbolisch oder eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch*, und zwar tritt der letzte Fall ungefähr dreimal so oft ein, als der erste (strenge in dem Verhältniss von 36 : 13). Ferner erkennen wir aus dem obigen Schema, dass der Fall dreier hyperbolischer Strahlensysteme (x) (y) (z) nur dann eintritt, wenn die beiden conjugirten Punkte P , Q entweder beide in demselben Raume von jenen sieben oder gleichzeitig in einem Paar von Räumen: e_1 und h_1 | e_2 und h_2 | e_3 und h_3 | enthalten sind; für jede

andere Lage tritt der zweite Fall ein, dass eines der drei Strahlensysteme hyperbolisch, die beiden andern elliptisch sind. Hieraus folgt ferner, dass, wenn eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind (der Kernkegelschnitt imaginär), allemal nur der zweite Fall eintreten kann, indem von den Strahlensystemen (x) (y) (z) eines hyperbolisch, die beiden andern elliptisch werden. Wir erkennen dies nämlich sofort, wenn wir uns des Kriteriums für das elliptische Netz erinnern (S. 423): Sobald auf zwei conjugirten Strahlen die beiden dem Netze zugehörigen Punktsysteme elliptisch sind, ist das Netz elliptisch. Wir haben nun das den beiden Netzen gemeinschaftliche Tripel xyz , dessen Seiten conjugirte Strahlen sind, und welches in dem Falle reell ist, wo eines oder beide Netze elliptisch sind. Die Ebene wird durch die Seiten XYZ des Tripeldreiecks in sieben Regionen $ee_1e_2e_3h_1h_2h_3$ getheilt; nehmen wir in dem Raume (e) einen beliebigen Punkt P , so treffen Py und Pz resp. die Geraden Y und Z zwischen den Punkten xz und xy ; soll das Netz elliptisch sein, so muss also die Polare von P die Seiten xz und xy in ihren Verlängerungen treffen, d. h. sie darf in die Region (e) nicht eintreten; wo also auch der Punkt Q auf dieser Polare angenommen werden mag, er kann nicht in (e) liegen, also kann nach dem obigen Schema der Fall $h\bar{h}h\bar{h}$ nicht eintreten. Nehmen wir zweitens P in der Region (e_1) an, so muss seine Polare, wenn das Netz elliptisch sein soll, xz und xy zwischen diesen Eckpunkten des Tripels treffen; sie darf also in die Regionen (e_1) und (h_1) nicht eintreten, und es kann daher wiederum nach unserm Schema der Fall $h\bar{h}h\bar{h}$ nicht stattfinden; dasselbe gilt, wenn P in der Region (h_1) angenommen wird, und in gleicher Weise erkennen wir es für die Regionen (e_2) und (h_2) , (e_3) und (h_3) . Es ist also klar, dass, *wofern wenigstens eines der beiden gegebenen Netze elliptisch ist, allemal von den drei Strahlensystemen (x) (y) (z) eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen.*

Wenn beide Netze hyperbolisch sind und von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Eckpunkt x reell, die beiden andern y und z (auf X) imaginär sind, so lässt sich erkennen, dass das Strahlensystem (x) nothwendig hyperbolisch sein muss. Lassen wir nämlich einen veränderlichen Punkt P eine beliebige Gerade $\mathcal{G}$ durchlaufen und verfolgen den conjugirten Punkt Q auf dem entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch x geht, so beschreiben xP und xQ das Strahlensystem (x) , und je zwei conjugirte Strahlen desselben durchbohren den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in Punktpaaren, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt ξ laufen muss (S. 151); trifft nun xP den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zum andern Male in Q' , so ist QQ' eine solche Durchbohrungs-

sehne; andererseits hat aber der Punkt Q' zu seinem conjugirten einen Punkt P' , welcher nothwendig auf $\mathfrak{G}$ liegen muss (weil Q' auf $\mathfrak{R}^{(2)}$ liegt) und zugleich auf dem zu $xQ' = xP$ conjugirten Strahl des Systems (x) , d. h. auf xQ ; also ist P' der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ mit xQ ; wir haben daher zwei Paare conjugirter Punkte rücksichtlich beider Netze: P und Q , P' und Q' , und finden mittelst derselben unmittelbar ein drittes Paar: (PP', QQ') und $(PQ', P'Q)$ (S. 419); es ist aber $(PQ', P'Q)$ nichts anderes als der Punkt x , folglich muss sein conjugirter (PP', QQ') auf X liegen und, da $PP' = \mathfrak{G}$ ist, der Schnittpunkt $(\mathfrak{G}, X)$ sein; dieser Punkt bleibt fest, während P und Q sich auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}^{(2)}$ verändern; es läuft also die Durchbohrungssehne QQ' durch den festen Punkt $\xi = (\mathfrak{G}, X)$, woraus sich nachträglich eine Bestätigung dafür ergibt, dass xP und xQ das Strahlensystem erzeugen. Wenn nun die Punkte y und z , d. h. die Schnittpunkte der Geraden X mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, imaginär sind, so muss X ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ (ganz in dem von seinen Tangenten erfüllten Gebiete) gelegen sein, d. h. durch jeden Punkt von X müssen zwei reelle Tangenten an $\mathfrak{R}^{(2)}$ möglich sein, mithin auch durch den Punkt ξ ; das Strahlensystem (x) ist daher hyperbolisch, indem seine Asymptoten die aus x nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen sind, in welchen die Tangenten aus ξ den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ berühren.

Die Strahlensysteme (x) (y) (z) haben eine ganz besondere Bedeutung für die beiden in der Ebene gegebenen Netze. Da nämlich irgend zwei conjugirte Strahlen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ des Strahlensystems (x) nach dem Obigen von solcher Beschaffenheit sind, dass zu den Punkten P des einen die conjugirten Punkte Q auf dem andern liegen und P , Q immer conjugirte Punkte rücksichtlich beider gegebenen Netze sind, so folgt, dass, wenn das Strahlensystem (x) hyperbolisch ist, jede seiner Asymptoten s , t die Eigenschaft besitzen muss, dass ihr rücksichtlich beider Netze dasselbe Punktsystem zugehört, oder mit andern Worten, dass sie eine gemeinschaftliche Secante für die Kernkegelschnitte beider Netze ist; denn eine solche Asymptote enthält zwei zusammenfallende conjugirte Strahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, und die Punkte P der einen haben ihre conjugirten Q rücksichtlich beider Netze auf der andern; also P , Q bilden auf dieser Asymptote ein Punktsystem, welches beiden Netzen zugehört. Nehmen wir den Fall an, dass zwei Strahlensysteme (x) und (y) hyperbolisch seien und das erste die Asymptoten s , t , das zweite die Asymptoten s_1 , t_1 habe, dann wird der Schnittpunkt S zweier Asymptoten, z. B. s und s_1 , seinen conjugirten rücksichtlich beider Netze sowohl in s haben, als auch in s_1 ; folglich muss dieser S selbst sein; es fallen also in S zwei conjugirte Punkte P , Q zu-

sammen, und es muss daher auch zS eine Asymptote des Strahlensystems (z) sein, was mit der vorhin gemachten Bemerkung übereinstimmt, dass die drei Punktsysteme (x) (y) (z) entweder sämmtlich hyperbolisch sein müssen, oder nur eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch. Schneiden sich t und t_1 in dem Punkte S_1 , so ist zS_1 die zweite Asymptote des Strahlensystems (z) ; da aber ein Strahlensystem nur zwei Asymptoten haben kann, so müssen in diesen auch die Schnittpunkte:

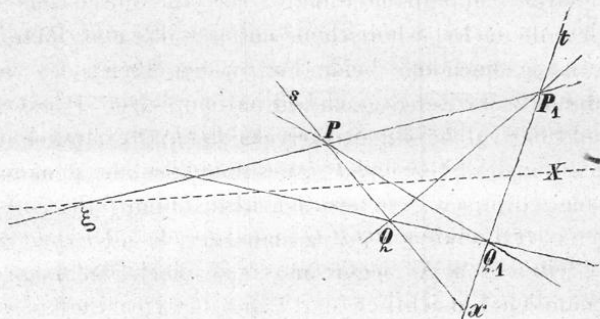
$$(s, t_1) = S_2 \quad \text{und} \quad (s_1, t) = S_3$$

liegen, d. h.: die sechs Asymptoten der drei Strahlensysteme (x) (y) (z) schneiden sich, wenn sie reell sind, zu je dreien in vier Punkten $SS_1S_2S_3$, deren jeder die Eigenschaft besitzt, dass er mit seinem conjugirten rücksichtlich beider Netze zusammenfällt. Diese vier Punkte sind offenbar zugleich die Asymptotenpunkte der Punktsysteme auf denjenigen sechs Geraden, welche von den Asymptoten der drei Strahlensysteme (x) (y) (z) gebildet werden und deren zugehörige Punktsysteme rücksichtlich beider Netze identisch sind. Die Punkte $SS_1S_2S_3$ sind daher den Kernkegelschnitten beider Netze gemeinschaftlich d. h. deren Schnittpunkte, und das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $SS_1S_2S_3$ ist das gemeinschaftliche Tripel xyz . Dies stimmt mit der oben gemachten Bemerkung überein, dass sie nur reell sein können, wenn beide Netze hyperbolisch sind, weil nur in diesem Falle drei hyperbolische Strahlensysteme (x) (y) (z) eintreten können; aber nicht für jede zwei hyperbolischen Netze (reelle Kegelschnitte) müssen die Strahlensysteme (x) (y) (z) alle drei hyperbolisch sein; die Untersuchung dieses reellen Falles ist in §. 54 durchgeführt worden. Hier zeigt sich indessen der bemerkenswerthe Umstand, dass auch zwei elliptische Netze (imaginäre Kegelschnitte) allemal ein reelles Paar gemeinschaftlicher Secanten, d. h. zwei solche sich in x schneidende Gerade [die Asymptoten s, t des Strahlensystems (x)] besitzen, deren zugehörige Punktsysteme für die Netze identisch sind. Diese beiden Punktsysteme müssen immer elliptisch sein, sobald eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind, sie können aber auch beide elliptisch sein, sobald beide Netze hyperbolisch sind; im letzteren Fall kann indessen auch eines elliptisch und das andere hyperbolisch, oder beide hyperbolisch sein, d. h. die Kernkegelschnitte können keinen, zwei oder vier Punkte gemein haben (S. 365).

Gehen wir von einem stets reellen Tripelpunkte x aus, dessen Strahlensystem (x) hyperbolisch ist und die Asymptoten s, t hat, so können wir aus der Annahme, dass von den Punktsystemen auf s und

t 1) beide elliptisch, 2) eines elliptisch und das andere hyperbolisch, 3) beide hyperbolisch sind, auf die Realität der beiden übrigen Tripelpunkte y, z auf X schliessen; nehmen wir nämlich von dem beiden Netzen gleichzeitig zugehörigen Punktsysteme auf s irgend ein Paar conjugirter Punkte PQ und auf der andern Asymptote t irgend ein Paar P_1Q_1 (Fig. 103), so können wir die Verbindungslinie PP_1 als $\mathfrak{G}$ auffassen, deren entsprechender Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ durch xQQ_1 gehen muss und zum Schnittpunkte der Tangenten in Q und Q_1 den Punkt

Fig. 103.

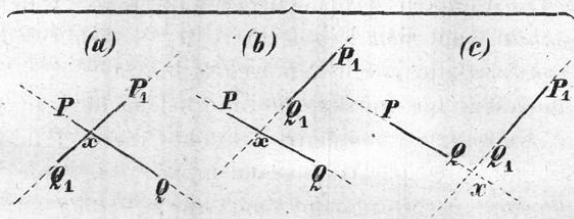


ξ haben wird, in welchem $PP_1 = \mathfrak{G}$ der Polare X begegnet, wie aus dem Obigen erhellt; X trifft also PP_1 in dem Pol der Geraden QQ_1 rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$, oder PP_1 und QQ_1 treffen X in zwei conjugirten Punkten desjenigen Punktsystems, welches der Geraden X in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ zugehört; dies ist nun, wie wir wissen, für alle möglichen Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ immer ein und dasselbe; seine Asymptotenpunkte sind die beiden übrigen Tripelpunkte y und z ; ein zweites Paar conjugirter Punkte dieses Punktsystems erhalten wir in ganz gleicher Weise, indem wir die Schnittpunkte von PQ_1 und QP_1 mit X bestimmen, und hieraus folgt denn auch ein drittes Paar nach der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierecks (S. 66), nämlich die Schnittpunkte von PQ und P_1Q_1 mit X . Die drei Seitenpaare des vollständigen Vierecks PQP_1Q_1 treffen demnach die Gerade X in drei Paaren conjugirter Punkte desjenigen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte y, z sind, und dies ist immer dasselbe, wie übrigens die Paare PQ und P_1Q_1 auf den Asymptoten s und t gewählt werden.

Um zu entscheiden, ob das Punktsystem auf X hyperbolisch oder elliptisch wird, haben wir das bekannte Kriterium (Seite 67) anzuwenden, wonach das von den Seitenpaaren eines vollständigen Vierecks auf einer Transversale X bestimmte Punktsystem hyperbolisch ist,

sobald eine gerade Anzahl, elliptisch, sobald eine ungerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten der Transversale liegt, oder umgekehrt, je nachdem die vier Ecken so liegen, dass jede ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, oder eine innerhalb des von den andern gebildeten Dreiecks gelegen ist. Die beiden Punktsysteme auf den Geraden s und t werden nun durch je zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt, von denen PQ das eine auf s , P_1Q_1 auf t , das andere aber der gemeinschaftliche Punkt x und der jeweilige Schnittpunkt mit X ist; beim elliptischen Punktsystem muss von zwei Paaren conjugirter Punkte das eine durch das andere getrennt werden, beim hyperbolischen schliesst das eine Paar das andere ein oder aus, je nachdem beide Paare denselben oder verschiedene Asymptotenpunkte zwischen sich enthalten. Der Punkt x ist ein Diagonalepunkt des vollständigen Vierecks PQP_1Q_1 , nämlich der Schnittpunkt des Seitenpaares PQ und P_1Q_1 ; sollen also die genannten Punktsysteme beide elliptisch sein, so lehrt die unmittelbare Anschauung, dass von den vier Punkten PQP_1Q_1 eine gerade oder ungerade Anzahl auf beiden Seiten von X liegen muss, je nach der Lage derselben; es können nämlich hinsichtlich der Lage der vier Punkte PQP_1Q_1 zu x drei Fälle eintreten: entweder a) liegt x innerhalb beider Strecken PQ und P_1Q_1 , oder b) zwischen der einen und ausserhalb der andern, oder c) ausserhalb beider (Fig. 104). In dem Falle a) wird, damit

Fig. 104.



beide Punktsysteme auf s und t elliptisch seien, X ausserhalb PQ und ausserhalb P_1Q_1 die Geraden s und t treffen müssen, also nothwendig alle vier Punkte PQP_1Q_1 auf der einen und keinen auf der andern Seite von sich haben; in dem Falle b), wenn x zwischen PQ und ausserhalb P_1Q_1 angenommen wird, muss, damit beide Punktsysteme elliptisch seien, X die Strecke PQ ausserhalb und P_1Q_1 innerhalb treffen, also eine ungerade Anzahl von Punkten zu beiden Seiten von sich haben; dann ist aber das Punktsystem auf X wiederum hyperbolisch, weil PQP_1Q_1 so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet; in dem Falle c) endlich,

wo x ausserhalb beider Strecken PQ und P_1Q_1 liegt, also die vier Punkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den andern gebildeten Dreiecks sich befindet, muss, damit beide Punktsysteme elliptisch seien, X sowohl PQ , als auch P_1Q_1 zwischen diesen Punkten treffen, also zwei Punkte auf der einen und zwei auf der andern Seite von sich haben; das Punktsystem auf X ist daher wiederum hyperbolisch, und wir erkennen daraus, dass es allemal hyperbolisch wird, sobald die Punktsysteme auf s und t beide elliptisch sind. Die Punkte y und z sind also in diesem Falle reell.

In ähnlicher Weise können wir leicht einsehen, dass, wenn die Punktsysteme auf s und t beide hyperbolisch sind, ebenfalls für alle drei Lagen a), b), c) das Punktsystem auf X hyperbolisch wird, also y und z ebenfalls reell sind, was auch von vorn herein klar ist, weil dann alle vier Punkte $SS_1S_2S_3$ reell sind und xyz zum Diagonaldreieck haben. Wenn dagegen drittens von den Punktsystemen auf s und t eines hyperbolisch, das andere elliptisch ist, so wird für alle drei Lagen a), b), c) das Punktsystem auf X elliptisch, also y und z imaginär, wie die unmittelbare Anschauung lehrt, während von den vier Punkten $SS_1S_2S_3$ nur zwei reell, die beiden andern imaginär sind. Die eben ausgeführte Betrachtung kommt auch mit der auf S. 253 bei einer andern Veranlassung angestellten überein. Die erlangten Resultate lassen sich nunmehr in folgender Weise zusammenfassen:

Unter den sämtlichen Kegelschnitten $\mathfrak{R}^{(2)}$, welche den Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene rücksichtlich beider gegebenen Netze entsprechen, giebt es Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Denken wir uns denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ construirt, welcher der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ entspricht und durch das gemeinschaftliche Tripel xyz und die Mittelpunkte mm_1 beider Netze bestimmt wird, so entsprechen sämtlichen Tangenten dieses Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ Parabeln, solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten schneiden, Hyperbeln und solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}^{(2)}$ nicht schneiden, Ellipsen. Unter den Hyperbeln giebt es unendlich-viele gleichseitige; sie entsprechen allen solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche durch einen bestimmten Punkt P_0 gehen; dies ist der Durchschnittspunkt der beiden Durchbohrungs-Schnen des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ durch die Axenpaare der gegebenen beiden Netze; sein conjugirter Punkt Q_0 , durch welchen alle gleichseitigen Hyperbeln ausserdem gehen, ist der Höhenpunkt des Dreiecks xyz . Unter den Ellipsen giebt es einen einzigen Kreis; er entspricht derjenigen Geraden $\mathfrak{G}_0$, welche die Polare des Punktes P_0 in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist.

Geht die veränderliche Gerade $\mathfrak{G}$ insbesondere durch einen der Punkte des gemeinschaftlichen Tripels, z. B. durch x , so zerfällt der entsprechende

Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in ein Linienpaar, dessen einer Theil jedesmal die Polare X dieses Tripelpunktes und dessen anderer Theil eine bestimmte Gerade g ist, welche ebenfalls durch x geht. Diejenigen Punkte Q , welche den Punkten P einer solchen durch x gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ conjugirt sind, liegen auf der Geraden g und umgekehrt. Drehen wir die Gerade $\mathfrak{G}$ um den festen Punkt x , so dreht sich auch g um denselben, und $\mathfrak{G}$, g sind conjugirte Strahlen eines bestimmten Strahlensystems (x). Zwei conjugirte Strahlen eines solchen Strahlensystems erhalten wir auch, indem wir x mit irgend einem Paare conjugirter Punkte P , Q in der Ebene verbinden; insbesondere sind die beiden durch x gehenden Tripelstrahlen ein Paar conjugirter Strahlen des Systems (x). Wir erhalten auf diese Weise, wenn die Tripelpunkte xyz alle drei reell sind, drei bestimmte Strahlensysteme (x) (y) (z), welche entweder alle drei hyperbolisch oder von denen nur eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind. Wenn von den Tripelpunkten nur einer, x , reell ist, so ist das Strahlensystem (x) allemal hyperbolisch.

Die beiden Asymptoten s , t eines solchen Strahlensystems sind allemal solche Gerade in der Ebene, für welche die den beiden Netzen zugehörigen Punktsysteme identisch werden; es giebt also nur zwei oder sechs solcher Geraden. In dem letzteren Falle schneiden sich die sechs Asymptoten st , s_1t_1 , s_2t_2 der drei hyperbolischen Strahlensysteme (x) (y) (z) zu je dreien in vier Punkten $SS_1S_2S_3$, die mithin ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck xyz ist. Die Punkte $SS_1S_2S_3$ sind die einzigen in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass jeder von ihnen mit seinem conjugirten rücksichtlich beider Netze zusammenfällt; sie sind zugleich die Asymptotenpunkte derjenigen Punktsysteme, welche den Asymptoten $st \dots$ rücksichtlich des einen (oder anderen) Netzes zugehören (da sie für beide identisch sind). Von diesen vier ausgezeichneten Punkten $SS_1S_2S_3$ sind entweder alle vier oder nur zwei oder keiner reell.

Gehen wir von einem allemal reellen Tripelpunkte x aus, dessen Strahlensystem (x) hyperbolisch ist und die Asymptoten s , t hat, so können die beiden Punktsysteme auf s und t entweder beide elliptisch sein, dann sind alle vier Punkte $SS_1S_2S_3$ imaginär, aber die beiden übrigen Tripelpunkte y und z reell; oder von jenen beiden Punktsystemen auf s und t ist eines hyperbolisch und das andere elliptisch, dann sind zwei Punkte SS_1 reell, die beiden andern S_2S_3 imaginär und die beiden übrigen Tripelpunkte y und z auch imaginär; oder drittens beide Punktsysteme auf s und t sind hyperbolisch, dann sind alle vier Punkte $SS_1S_2S_3$ reell und auch die übrigen Tripelpunkte y , z . Wenn die beiden Netze hyperbolisch sind, so sind die Punkte $SS_1S_2S_3$ die Durchschnittspunkte ihrer Kernkegelschnitte, xyz ihr gemeinschaftliches Tripel und die Asymptoten

st, s_1t_1, s_2t_2 der drei Strahlsysteme (x) (y) (z) die sechs gemeinschaftlichen Secanten beider Kegelschnitte; aber auch wenn eines oder beide Netze elliptisch sind, ist das gemeinschaftliche Tripel xyz immer reell und von den drei Strahlsystemen (x) (y) (z) eines hyperbolisch, die beiden andern elliptisch, also ein Paar gemeinschaftlicher Secanten st immer reell, d. h. in diesem Falle zwei solche Gerade, für deren jede die den Netzen zugehörigen beiden Punktsysteme identisch sind.

Es ist noch zu bemerken, dass aus der vorigen Betrachtung auch das umgekehrte Resultat sich ergibt: Wenn von dem beiden Netzen gemeinschaftlichen Tripel allein x und X reell (y und z imaginär) sind, ein Fall, der nur bei zwei hyperbolischen Netzen eintreten kann und zur Folge hat, dass immer das Strahlsystem (x) hyperbolisch ist, also die reellen Asymptoten s und t hat, so muss von den beiden Punktsystemen auf s und t , welche den Netzen gemeinschaftlich zugehören, das eine hyperbolisch, das andere elliptisch sein, denn wäre dies nicht, so müssten y und z reell sein. Also die beiden Kernkegelschnitte der Netze müssen, damit y und z imaginär seien, zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte haben.

Vermöge der dem Netze innewohnenden Polarität lässt sich eine der vorigen gleichlaufende Betrachtung anstellen, indem man die Paare conjugirter Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ in Bezug auf beide Netze auffasst und die Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ untersucht, welche allen Punkten P in der Ebene entsprechen und sämmtlich dem Dreieit XYZ eingeschrieben sind. Diese Betrachtung ist der obigen nach dem bekannten Uebertragungsprincip so gleichförmig nachzubilden, dass es genügt, die Resultate hervorzuheben und nur die abweichenden Punkte etwas näher zu beleuchten.

Die Pole einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die beiden gegebenen Netze bestimmen die conjugirte Gerade $\mathfrak{H}$, und wenn $\mathfrak{G}$ sich um einen festen Punkt P dreht, so umhüllt $\mathfrak{H}$ einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$. Insbesondere ist der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ diejenige Gerade $\mathfrak{M}_0$ conjugirt, welche die Mittelpunkte beider Netze verbindet, und allen Punkten P dieser Geraden $\mathfrak{M}_0$ entsprechen daher Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$, welche *Parabeln* sind. Einem solchen Punkte P , welcher auf einem Strahle des gemeinschaftlichen Tripels liegt, z. B. auf X , entspricht jedesmal ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher sich in ein Punktpaar auflöst, dessen einer Theil immer derselbe Punkt x , der Pol der Geraden X , und dessen anderer Theil ein gewisser Punkt p ist, welcher auf X liegt. Verändern wir den Punkt P auf der Geraden X , so verändert sich auch p auf derselben, und es erzeugt das Punktpaar P, p ein bestimmtes Punktsystem (X) . Irgend zwei con-

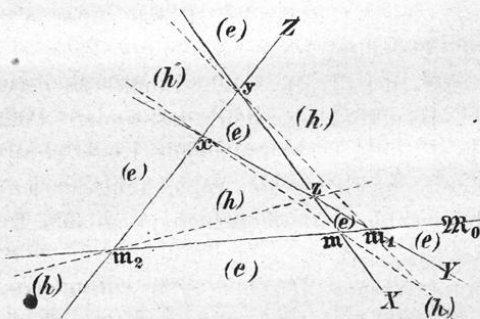
jugirte Gerade $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ treffen einen Tripelstrahl X immer in einem solchen Paar conjugirter Punkte P , p des Punktsystems (X) , und die Gerade $\mathfrak{M}_0$ trifft daher die X in dem Mittelpunkt m desselben. Hieraus folgt, dass, wenn die drei Strahlen des gemeinschaftlichen Tripels XYZ sämmtlich reell sind, von den drei Punktsystemen (X) (Y) (Z) nothwendig entweder alle drei hyperbolisch, oder eins hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen; denn auf jedem Tripelstrahl, z. B. X , sind immer die beiden Eckpunkte y , z des gemeinschaftlichen Tripels ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (P, p) , und die Gerade $\mathfrak{M}_0$ kann die Seiten des Dreiecks xyz immer nur in drei solchen Punkten mm_1m_2 treffen, welche entweder alle drei auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten, oder von denen nur einer auf der Verlängerung und die beiden andern auf den Dreiecksseiten selbst liegen; da nun mm_1m_2 die Mittelpunkte der drei Punktsysteme (X) (Y) (Z) und $y, z; z, x; x, y$ je ein Paar conjugirter Punkte derselben sind, so müssen von den drei Punktsystemen entweder alle oder nur eins hyperbolisch sein.

In dem Falle, dass von den drei Tripelstrahlen nur einer X und der Schnittpunkt x der beiden andern, der Pol von X , reell ist, lässt sich leicht zeigen, dass das Punktsystem (X) hyperbolisch sein muss. Denken wir uns nämlich einen beliebigen Punkt P und den entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ hergestellt, so wird in dem Falle, dass Y, Z imaginär sind, ihr Schnittpunkt x innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegen müssen, weil das Tangentenpaar aus x an den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ imaginär ist. Ziehen wir nun durch P irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ und construiren die conjugirte Gerade $\mathfrak{H}$, Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, so bestimmen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ein Paar conjugirte Punkte des Punktsystems (X) . Bezeichnen wir dieselben für den Augenblick: $(\mathfrak{G}, X) = s$ und $(\mathfrak{H}, X) = \sigma$, so wird durch s eine zweite Tangente $\mathfrak{H}'$ an $\mathfrak{C}^{(2)}$ gehen, deren conjugirte Gerade $\mathfrak{G}' = P\sigma$ sein muss. Wir haben also zwei Paare conjugirter Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, finden aus ihnen ein drittes Paar $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$ und $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$, und da von diesen beiden Geraden die erstere durch $P = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ geht, so muss die letztere $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$ den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ berühren. In der That ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}')$ nichts anderes als s und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}')$ nichts anderes als σ , folglich $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}') = s\sigma = X$, und die conjugirte Gerade muss daher durch x gehen, d. h. $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ auf der Verbindungslinie Px liegen. Diese Gerade Px bleibt nun fest, während wir die Gerade $\mathfrak{G}$, also auch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ verändern; wenn wir aus den Punkten der Geraden Px die Tangentenpaare $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ legen, so treffen dieselben die feste Tangente X dieses Kegelschnitts in Punktpaaren s, σ des vorhin gefundenen Punktsystems

(X) (S. 152). Wir wissen aber im Allgemeinen, dass dieses von der Geraden Px abhängende Punktsystem ein elliptisches ist, wenn die Gerade Px den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ nicht schneidet, ein hyperbolisches, wenn sie denselben in zwei reellen Punkten trifft, weil im letzteren Falle zweimal je ein Tangentenpaar zusammenfällt. Da nach dem Früheren der Punkt x in unserem Falle innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegt, so muss Px denselben in zwei reellen Punkten schneiden, also das Punktsystem (X) hyperbolisch sein, w. z. b. w.

Wenn wir sämtliche Punkte P in der Ebene auffassen und schnell entscheiden wollen, ob der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ Ellipse oder Hyperbel wird, so brauchen wir jetzt nur diejenigen Punkte P in der Ebene zu verfolgen, für welche der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in einen jener beiden Grenzübergänge zwischen Ellipse und Hyperbel: eine Parabel oder ein Punktpaar ausartet; diese Orte kennen wir aber aus dem Vorigen, nämlich die Gerade $\mathfrak{M}_0$, deren Punkten P lauter Parabeln als Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ entsprechen, und die drei Tripelstrahlen XYZ (wenn sie sämtlich reell sind), deren Punkten P Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ entsprechen, welche in Punktpaare ausarten. Die vier Geraden $XYZ\mathfrak{M}_0$ theilen das ganze unendliche Gebiet der Ebene in elf Regionen, welche durch jene von einander getrennt werden, und den Punkten P innerhalb derselben Region entsprechen immer Kegelschnitte derselben Art; wir haben aber zu untersuchen, welchen Regionen Hyperbeln und welchen Ellipsen entsprechen. Hierüber erhalten wir unter der Annahme, dass alle drei Tripelstrahlen XYZ reell sind, Auskunft, indem wir die Punktsysteme (X) (Y) (Z) ins Auge fassen, welche bestimmt sind durch je ein Paar conjugirter Punkte: $y, z; z, x; x, y$ und die Mittelpunkte: mm_1m_2 , nämlich die Schnittpunkte von $\mathfrak{M}_0$ mit XYZ (Fig. 105). Denken wir uns um

Fig. 105.



einen beliebigen Punkt P eine Gerade $\mathfrak{G}$ gedreht, welche XYZ in den Punkten abc treffe, und seien $\alpha\beta\gamma$ die conjugirten Punkte in den

drei Systemen $(X) (Y) (Z)$, so liegen $\alpha\beta\gamma$ auf der Geraden $\mathfrak{H}$, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ umhüllt. Wir können denselben auch als das Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen, z. B. auf den Trägern Y und Z auffassen, indem wir die Punkte β und γ verfolgen; um dann den Berührungspunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ mit der Geraden Y zu erhalten, ziehen wir Py , welches Y in τ treffe, und nehmen den zu τ conjugirten Punkt t des Punktsystems (Y) , welches der gesuchte Berührungspunkt sein wird. Um denjenigen Punkt β zu finden, welcher dem unendlich-entfernten auf Z entspricht, ziehen wir Pm_2 , welches in b die Gerade Y treffe, und bestimmen den conjugirten β zu b des Punktsystems (Y) . Jetzt können wir das auf S. 117 angegebene Kriterium in Anwendung bringen: Liegt nämlich t zwischen $x\beta$, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ Ellipse, liegt t ausserhalb $x\beta$, so ist er Hyperbel. Durchmustern wir mit Hülfe dieses Kriteriums die ganze Ebene, indem wir den Punkt P dieselbe durchwandern lassen, so erkennen wir leicht, dass von den elf Regionen, in welche sie durch die Geraden $XYZ\mathfrak{M}_0$ zertheilt wird, fünf den hyperbolischen (h) und die übrigen sechs den elliptischen Charakter (e) haben, indem der dem Punkte P entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ allemal Hyperbel wird, sobald P in einem der Räume (h) liegt, dagegen Ellipse, sobald P in einem der Räume (e) liegt; die Räume (h) sind aber diejenigen, in welche die drei Diagonalen des von den Geraden $XYZ\mathfrak{M}_0$ gebildeten vollständigen Vierseits ganz hineinfallen, während die Räume (e) von den Diagonalen nicht getroffen werden; um jeden Eckpunkt des vollständigen Vierseits gruppiren sich immer zwei Scheitelräume elliptischen und die beiden Neben-Scheitelräume hyperbolischen Charakters (Fig. 105). Wir unterlassen der Kürze wegen die Untersuchung des Falles, in welchem von den drei Tripelstrahlen nur einer X und der Schnittpunkt der x beiden andern reell ist; die beiden Geraden X und $\mathfrak{M}_0$ theilen dann das ganze Gebiet der Ebene nur in vier unendliche Räume, zwei Paar Scheitelräume; dasjenige Paar Scheitelräume, in deren einem x liegt, enthält alle solche Punkte P , deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ Hyperbeln werden, das andere Paar Scheitelräume diejenigen Punkte P , deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ Ellipsen sind. Auch möge dem Leser die Aufsuchung derjenigen besonderen Punkte P überlassen bleiben, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ Kreise oder gleichseitige Hyperbeln werden.

Die drei Punktsysteme $(X) (Y) (Z)$, von denen entweder eines oder alle drei hyperbolisch sein müssen, haben zu Asymptotenpunkten: $\mathfrak{s}, t; \mathfrak{s}_1, t_1; \mathfrak{s}_2, t_2$, Punkte von besonderer Eigenthümlichkeit in Bezug auf die beiden gegebenen Netze; das Strahlsystem, welches einem

dieser sechs Punkte in Bezug auf die beiden Netze zugehört, ist nämlich ein und dasselbe; wenn es hyperbolisch ist, so sind seine beiden Asymptoten sowohl Tangenten des einen als auch des andern Kernkegelschnitts, d. h. gemeinschaftliche Tangenten. Von den sechs Punkten $\bar{s}_1 t_1 \bar{s}_2 t_2$ sind entweder zwei oder alle sechs reell; im letzteren Falle liegen sie zu je dreien auf vier geraden Linien, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kernkegelschnitte beider Netze sind; das von denselben gebildete vollständige Vierseit hat XYZ zu seinen drei Diagonalen. Wenn dagegen nur zwei Punkte $\bar{s}$ und t reell sind auf X , so müssen die ihnen zugehörigen Strahlensysteme, welche rücksichtlich beider Netze dieselben sind, entweder beide elliptisch sein, und dann sind auch Y und Z reell, oder eines elliptisch und das andere hyperbolisch sein, dann sind Y und Z imaginär. Im ersteren Fall sind entweder beide oder ein Netz elliptisch, oder falls beide Netze hyperbolisch sind, haben ihre Kernkegelschnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente; im letzteren Fall, der nur eintreten kann, wenn beide Netze hyperbolisch sind, haben die Kernkegelschnitte zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, jedes Paar aber einen reellen Schnittpunkt $\bar{s}$ und t auf dem Tripelstrahl X . Sobald also umgekehrt von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Strahl X und der Schnittpunkt x der beiden andern reell, diese selbst aber imaginär sind, müssen beide Netze hyperbolisch sein und ihre Kernkegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben. Halten wir dies mit dem analogen früher gefundenen Resultat zusammen, so folgt aus der Identität und zusammengehörigen Realität des Tripeldreiecks xyz mit dem Tripeldreieck XYZ , dass, wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, sie auch nothwendig zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten und nur zwei solche haben müssen und umgekehrt. (S. 370.)

Das in dem Vorstehenden betrachtete doppelte Beziehungssystem, welches durch die beiden in der Ebene gegebenen Netze hergestellt wird — indem einerseits jedem Punkte P in der Ebene ein bestimmter Punkt Q conjugirt ist und den Punkten P einer Geraden $\mathfrak{G}$ Punkte Q eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ entsprechen, welcher durch drei unveränderliche Punkte xyz geht, andererseits jeder Geraden $\mathfrak{G}$ eine bestimmte Gerade $\mathfrak{H}$ conjugirt ist und sämtlichen durch einen Punkt P gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ Gerade $\mathfrak{H}$ entsprechen, die einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ umhüllen, welcher demselben festen Dreieck XYZ eingeschrieben ist — erfordert zu seiner Bestimmung nicht die vollständige Kenntniss der beiden Netze, sondern nur des gemeinschaftlichen Tripels xyz oder XYZ und einerseits irgend eines Paares conjugirter Punkte P, Q

oder andererseits conjugirter Strahlen $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ in Bezug auf beide Netze. In der That nehmen wir zuerst das Tripel xyz und irgend ein Paar conjugirter Punkte P , Q als gegeben an, so ist das Beziehungssystem der ersten Art vollständig bestimmt; indem wir nämlich P und Q mit xyz und diese Punkte unter sich verbinden, erhalten wir durch jeden von ihnen zwei Strahlenpaare, welche ein Strahlensystem bestimmen, z. B. in x werden die Strahlen xP und xQ , xy und xz als zwei Paare conjugirter Strahlen des Strahlensystems (x) aufgefasst, welches dadurch vollständig bestimmt ist; haben wir auf diese Weise die drei Strahlensysteme (x) (y) (z) hergestellt, so finden wir zu jedem andern Punkte P in der Ebene den conjugirten Q , indem wir xP und yP ziehen und in den Strahlensystemen (x) und (y) die beiden conjugirten Strahlen zu jenen aufsuchen, welche sich in dem gesuchten Punkte Q treffen. Hierdurch ist nun auch zu jeder Geraden $\mathcal{G}$ der entsprechende Kegelschnitt $\mathcal{R}^{(2)}$ leicht herzustellen.

Andererseits ist durch das Tripel XYZ und irgend ein Paar conjugirter Strahlen $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ das Beziehungssystem der zweiten Art vollständig bestimmt; die Schnittpunktpaare von X einmal mit Y , Z und zweitens mit $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ bestimmen das Punktsystem (X) , und in gleicher Weise erhalten wir die Punktsysteme (Y) und (Z) ; sind diese ermittelt, so erhalten wir zu jeder andern Geraden $\mathcal{G}$ die conjugirte $\mathcal{H}$, indem wir die Schnittpunkte der ersteren mit X , Y (oder Z) aufsuchen und die zu denselben conjugirten Punkte in den Punktsystemen (X) (Y) (oder Z) mit einander verbinden, welche die Gerade $\mathcal{H}$ bestimmen. Zu jedem beliebigen Punkte P können wir dann in bekannter Weise den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{C}^{(2)}$ herstellen, indem wir zu allen durch P gehenden Strahlen $\mathcal{G}$ die conjugirten $\mathcal{H}$ construiren. Als ein besonderes Paar conjugirter Strahlen, welches neben dem Tripel XYZ zur Bestimmung dieses Beziehungssystems dient, empfiehlt sich $\mathcal{G}_\infty$ und $\mathcal{M}_0$; die drei Schnittpunkte von X , Y , Z mit $\mathcal{M}_0$ sind dann die drei Mittelpunkte der Punktsysteme (X) (Y) (Z) .

Wir müssen noch den andern möglichen Fall in Betracht ziehen, dass von dem Tripel nur ein Eckpunkt x und die gegenüberliegende Seite X (Polare von x), auf dieser aber ein elliptisches Punktsystem gegeben ist, dessen Asymptotenpunkte y , z imaginär sind; fügen wir dann noch ein Paar conjugirter Punkte P , Q hinzu, so ist das Beziehungssystem der ersten Art wiederum vollständig bestimmt, aber die vorhin angegebene Construction beliebig vieler anderer Paare conjugirter Punkte P , Q ist nicht mehr in Anwendung zu bringen, weil die Punkte y , z selbst nicht reell existiren. Wir werden uns in diesem Falle zunächst das Strahlensystem (x) herzustellen haben, von

welchem unmittelbar nur das einzige Paar conjugirter Strahlen xP und xQ gegeben ist; die Asymptoten s, t dieses Strahlensystems (x) müssen sowohl harmonisch liegen mit xP und xQ , als auch mit xy und xz , falls die letzteren beiden reell sind; dies lässt sich aber auch unabhängig von ihrer Realität so aussprechen: Die Asymptoten s und t sind das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen für zwei concentrisch liegende Strahlensysteme in x , deren eines hyperbolisch ist und xP, xQ zu Asymptoten hat, während das andere die Strahlen xy und xz zu Asymptoten hat; wenn nun y und z imaginär sind, so wird das zweite Strahlensystem erhalten, indem wir durch x ein Strahlensystem perspectivisch mit dem auf X gegebenen Punktsystem legen, welches elliptisch ist und die imaginären Punkte y, z zu Asymptotenpunkten hat. Die beiden concentrischen Strahlensysteme in x sind also bekannt, und sie müssen ein reelles Paar conjugirter Strahlen gemeinschaftlich haben, weil eines von ihnen elliptisch ist (S. 58). Dieses Paar s, t bildet die Asymptoten des Strahlensystems (x), welches, wie wir auch von früher wissen, nothwendig hyperbolisch sein muss.

Ist das Strahlensystem (x) also ermittelt, so lässt sich jetzt zu jeder durch den gegebenen Punkt P gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ herstellen; dieser muss nämlich durch x und Q gehen, das auf X gegebene elliptische Punktsystem zu seinem zugehörigen haben und endlich von dem Strahlensystem (x) in solchen Punktpaaren durchbohrt werden, deren Verbindungssehne durch den Schnittpunkt $(\mathfrak{G}, X)$ läuft; verbinden wir daher x mit diesem Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, X)$ und suchen den conjugirten Strahl in dem Strahlensystem (x) auf, so muss derselbe den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ in x berühren; wir kennen daher jetzt fünf Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$, wodurch derselbe vollständig bestimmt wird, nämlich den Punkt Q , die beiden in x zusammenfallenden Punkte, d. h. die Tangente in x und das zugehörige Punktsystem auf X , d. h. die beiden imaginären Punkte y und z . Die Construction des durch diese Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitts ist auf S. 150 ausgeführt. Wir sind demnach im Stande, zu jeder durch P gezogenen Geraden $\mathfrak{G}$ den entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ herzustellen und ebenso zu jeder durch Q gehenden Geraden $\mathfrak{G}_1$ den entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ zu finden; jeder beliebige Punkt in der Ebene kann nun als der Schnittpunkt zweier solcher Geraden $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1$ angesehen werden; die beiden entsprechenden Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben dann zu ihrem vierten gemeinschaftlichen Punkte ausser xyz denjenigen, welcher dem Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1)$ conjugirt ist. Wie der vierte gemeinschaftliche Punkt der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}, \mathfrak{R}_1^{(2)}$ gefunden wird, ist auf S. 238 angegeben worden.

Wir sind nunmehr im Stande, zu jedem Punkte der Ebene den conjugirten Punkt zu construiren, mithin auch zu jeder beliebigen Geraden $\mathcal{G}$ den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{K}^{(2)}$; wir haben also das ganze Beziehungssystem der ersten Art auch für den angenommenen Fall herzustellen gelehrt. In ganz analoger Weise wird das Beziehungssystem der zweiten Art hergestellt, wenn zur Bestimmung desselben neben einem beliebigen Paar conjugirter Strahlen $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ von dem Tripel allein ein reeller Strahl X und der Schnittpunkt x der beiden andern mit dem elliptischen Strahlensystem gegeben ist, dessen imaginäre Asymptoten Y und Z sind.

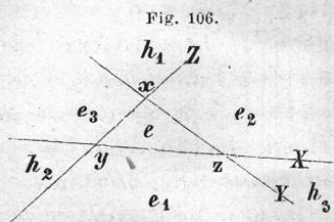
Erwägen wir, dass durch ein Paar conjugirter Punkte P , Q und ein Tripel xyz das Netz nicht vollkommen bestimmt wird, sondern dass es unendlich-viele Netze giebt, welche diese Stücke gemein haben, so steht es uns frei, anstatt der beiden als gegeben angesehenen Netze, von welchen wir ausgingen, andere zu setzen, für welche P , Q conjugirte Punkte und xyz ein Tripel ist; durch je zwei solche Netze wird immer dasselbe Beziehungssystem der ersten Art bestimmt, und für diese Netze gelten daher genau dieselben Eigenschaften, wie für die beiden ursprünglich angenommenen. Wir können uns sämmtliche Netze der Art auf die Weise hergestellt denken, dass wir um Q eine Gerade $\mathcal{L}$ drehen und zur Bestimmung des Netzes immer das Tripel conjugirter Punkte xyz und das Paar Pol und Polare P und $\mathcal{L}$ nehmen, wodurch das Netz jedesmal vollständig und eindeutig bestimmt wird. Die Gesammtheit dieser Netze nennen wir ein *Netz-Büschel*; die Mächtigkeit desselben ist gleich gross mit der eines Strahlbüschels, denn es giebt so viel Netze im Netzbüschel, als Strahlen $\mathcal{L}$ durch einen Punkt Q . Irgend ein Paar conjugirter Punkte $P_1 Q_1$ des Beziehungssystems, welches durch xyz und P , Q bestimmt wird, muss nun auch ein Paar conjugirter Punkte sein für irgend zwei andere Netze des Büschels, welche wir beliebig herausnehmen können, oder mit andern Worten: *Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf sämmtliche Netze eines Netz-Büschels laufen durch einen festen (conjugirten) Punkt*, welcher Satz bereits oben (S. 447) auf directem Wege nachgewiesen ist. Da wir irgend zwei Netze des Büschels zur Hervorbringung des Beziehungssystems wählen können, so folgt ferner: Denken wir uns von zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 die Polaren in Bezug auf irgend ein Netz des Büschels ermittelt, so geht die erste durch den conjugirten Punkt Q_1 , die zweite durch Q_2 , und sie schneiden sich in einem Punkte Q_3 , dessen Polare in Bezug auf das gewählte Netz die Verbindungslinie $P_1 P_2$ ist; der conjugirte Punkt P_3 zu Q_3 muss also auf $P_1 P_2$ liegen. Verändern wir das aus dem Büschel gewählte

Netz, so verändert sich Q_3 und beschreibt denjenigen Ort, welcher alle Punkte enthält, die den Punkten der Geraden $P_1 P_2 = \mathfrak{G}$ conjugirt sind, d. h. den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$.

Hieraus folgt: *Die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämtliche Netze eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel xyz umschrieben ist.* Dies lässt sich auch so aussprechen: *Die Polaren zweier beliebigen Punkte P_1 und P_2 in Bezug auf sämtliche Netze eines Büschels beschreiben allemal zwei projectivische Strahlbüschel (Q_1) und (Q_2) , welche zu je zwei entsprechenden Strahlen die Polaren in Bezug auf dasselbe Netz haben.* Nehmen wir für $\mathfrak{G}$ insbesondere die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, so enthält der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ die Mittelpunkte aller Netze des Büschels, also: *Die Mittelpunkte sämtlicher Netze eines Büschels liegen auf einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher dem Tripel xyz umschrieben ist.* Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ entscheidet zugleich über die Natur der in dem Büschel enthaltenen Netze, d. h. ob dieselben hyperbolisch oder elliptisch sind. Zuvörderst ist nämlich klar, dass, wenn die vorhin ermittelten ausgezeichneten Punkte $S S_1 S_2 S_3$, in deren jeden zwei conjugirte Punkte P, Q zusammenfallen, entweder alle vier reell sind oder, wenn auch nur zwei von ihnen reell sind, offenbar alle Netze des Büschels hyperbolisch sein müssen und ihre Kernkegelschnitte nichts anderes, als ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier oder zwei reellen Grundpunkten bilden. Sobald daher von dem gemeinschaftlichen Tripel nur x und X reell sind, y und z imaginär, sind alle Netze des Büschels hyperbolisch, und die Kernkegelschnitte haben zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Grundpunkte. Wenn dagegen das Tripel xyz völlig reell ist, so können entweder die oben bestimmten Strahlssysteme (x) (y) (z) alle drei hyperbolisch, oder nur eines hyperbolisch und die beiden anderen elliptisch sein; im ersteren Falle enthält das Netz-Büschel wiederum lauter hyperbolische Netze, deren Kernkegelschnitte ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten $S S_1 S_2 S_3$ bilden; im letzteren Falle wird das Büschel theils hyperbolische, theils elliptische Netze enthalten; die Kernkegelschnitte der hyperbolischen Netze bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten; dies ist aber, wie wir jetzt sehen, nur ein unvollständiges Gebilde, zu dessen Ergänzung noch die *imaginären Kegelschnitte* hinzutreten müssen, welche den elliptischen Netzen eines solchen Netzbüschels entsprechen.

Wir sehen die Richtigkeit der letzten Behauptung leicht ein, wenn wir für den Fall des reellen Tripels und, falls von den Strahlssystemen (x) (y) (z) eines hyperbolisch und die beiden andern ellip-

tisch sind, genauer untersuchen, in welcher Weise die conjugirten Punkte P , Q die verschiedenen Gebiete der Ebene bedecken. Die



ganze unendliche Ebene wird nämlich, wie wir wissen, durch die Seiten des Dreiecks xyz in die sieben Regionen e , e_1 h_1 , e_2 h_2 , e_3 h_3 (Fig. 106) getheilt; nehmen wir an, es sei das Strahlsystem (x) hyperbolisch, dagegen (y) und (z) elliptisch, dann ist mit Berücksichtigung

des bekannten Kriteriums für das elliptische und hyperbolische Strahlsystem (S. 61) ersichtlich, dass,

wenn P in der Region (e) liegt, der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_1) oder (h_1) liegen muss;

wenn P in den Regionen (e_1) oder (h_1) liegt, der conjugirte Punkt Q in der Region (e) liegen muss;

wenn P in den Regionen (e_2) oder (h_2) liegt, der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_3) oder (h_3) liegen muss;

wenn P in den Regionen (e_3) oder (h_3) liegt, der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_2) oder (h_2) liegen muss.

Obgleich es zunächst nicht weiter benutzt wird, bemerken wir noch, dass in dem andern Fall, wenn (x) (y) (z) alle drei hyperbolische Strahlsysteme sind, die Vertheilung in folgender Weise stattfindet:

wenn P in der Region (e) liegt, so muss auch der conjugirte Punkt Q in der Region (e) liegen;

wenn P in den Regionen (e_1) oder (h_1) liegt, so muss auch der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_1) oder (h_1) liegen;

wenn P in den Regionen (e_2) oder (h_2) liegt, so muss auch der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_2) oder (h_2) liegen; und

wenn P in den Regionen (e_3) oder (h_3) liegt, so muss auch der conjugirte Punkt Q in den Regionen (e_3) oder (h_3) liegen.

Ferner wissen wir, dass den unendlich-entfernten Punkten P der Ebene die Punkte Q des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ conjugirt sind. Jeder Punkt m dieses Kegelschnitts ist der Mittelpunkt eines Netzes vom Büschel, und dieses Netz ist vollständig bestimmt durch das Tripel xyz und den Mittelpunkt m , dessen Polare $\mathfrak{G}_\infty$ bekannt ist. Die Anschauung lehrt ferner, dass, wenn m in der Region (e) liegt, das Netz nothwendig elliptisch sein muss, weil die drei dem Netze zugehörigen Punktsysteme auf den Tripelstrahlen XYZ alle drei elliptisch werden, wie dies bereits auf S. 288 gelegentlich bemerkt worden ist; wenn da-

gegen m in einer der andern Regionen liegt, muss das Netz allemal hyperbolisch sein, weil von jenen drei Punktsystemen immer zwei hyperbolisch werden und das dritte elliptisch (S. 423), und zwar zeigt sich, indem wir das dem Punkte m zugehörige Strahlsystem des Netzes ermitteln, dass, wenn m in einem der drei Räume $e_1 e_2 e_3$ liegt, der Kernkegelschnitt des hyperbolischen Netzes eine Hyperbel, wenn dagegen m in einem der drei Räume $h_1 h_2 h_3$ liegt, derselbe eine Ellipse ist, weil sein Strahlsystem (System der conjugirten Durchmesser) in dem ersten Falle hyperbolisch, in dem zweiten elliptisch wird. Halten wir dies fest und bedenken, dass die unendlich-entfernten Punkte nur in den Regionen $e_1 h_1 e_2 h_2 e_3 h_3$ vorkommen, so werden die ihnen conjugirten, welche auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ liegen, unter der gemachten Annahme, dass das Strahlsystem (x) hyperbolisch, (y) und (z) elliptisch sind, nur in den Regionen $e e_2 h_2 e_3 h_3$ vorkommen können und müssen, d. h. der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher dem Dreieck xyz umschrieben ist, trifft die Regionen $ee_2 e_3 h_2 h_3$ (dagegen nicht e_1 und h_1). Hieraus folgt zunächst, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in diesem Falle Hyperbel sein muss, weil er Punkte hat, die in dem Raume e , d. h. innerhalb des Dreieck xyz liegen (S. 231), ferner, dass diejenigen seiner Punkte m , welche in den Raum (e) hineinfallen, die Mittelpunkte der elliptischen Netze des Büschels, die übrigen die Mittelpunkte der hyperbolischen Netze desselben sind, welche selbst wieder in zwei Kategorien zerfallen: Diejenigen, welche in den Räumen e_2 und e_3 enthalten sind, werden die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen sein, deren Kernkegelschnitte Hyperbeln sind, während die in den Räumen h_2 und h_3 enthaltenen Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen des Büschels sind, deren Kernkegelschnitte Ellipsen sind. Wenn aber vier Punkte $xyzm$ einer Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ so liegen, dass einer m innerhalb des von den drei andern xyz gebildeten Dreiecks sich befindet, so müssen immer drei von diesen Punkten auf einem Zweige der Hyperbel und einer auf dem andern Zweige derselben liegen; da nun der Zweig der Mittelpunktshyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher durch x geht, den Raum h_1 nicht treffen darf, so kann er auch den Raum e nicht treffen, sondern muss ganz in den Räumen e_2 und e_3 enthalten sein, während der andere Zweig durch die Punkte y und z geht und die Räume $eh_2 h_3$ durchstreift. Der eine Zweig der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält also die Mittelpunkte sämtlicher hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte Hyperbeln sind, der andere Zweig derselben wird durch die Punkte y und z in drei Stücke getheilt: Das endliche Stück zwischen y und z enthält die Mittelpunkte der elliptischen Netze (imaginären Kegel-

schnitte), die beiden übrigen unendlichen Stücke die Mittelpunkte der hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte Ellipsen sind.

Hierbei tritt der bemerkenswerthe Uebergang von einem reellen Kegelschnitte (einer Ellipse) zum imaginären Kegelschnitt durch einen Punkt, d. h. Nullkegelschnitt (jeden der Punkte y und z) auf. Endlich sind die beiden unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte zweier hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte zwei Parabeln sind (S. 267). Hierdurch ist also die obige Behauptung gerechtfertigt.

Auch für den andern Fall, dass die drei Strahlssysteme (x) (y) (z) hyperbolisch sind, zeigt die letzte Betrachtung eine vollkommene Uebereinstimmung mit dem bei der Untersuchung des Kegelschnittbüschels Gefundenen. Der Mittelpunktkegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ darf nämlich in diesem Fall den Raum (e) nicht treffen und kann sowohl Ellipse, als auch Hyperbel sein; ist er Ellipse, so trifft er nur die Räume $e_1 e_2 e_3$; die Kernkegelschnitte aller Netze des Büschels sind also Hyperbeln; ist er Hyperbel, so muss er die Räume $e_1 e_2 e_3$ treffen, welche den einen ganzen Zweig der Hyperbel enthalten, während der andere Zweig ganz in einem der Räume h_1 oder h_2 oder h_3 enthalten ist; die Kernkegelschnitte zerfallen also in eine Gruppe Ellipsen, welche ihre Mittelpunkte auf einem Zweige der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben, und in eine Gruppe Hyperbeln, welche ihre Mittelpunkte auf dem andern Zweige der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben, und beide Gruppen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt, deren Mittelpunkte die unendlich-entfernten Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind, wie wir es früher von anderer Seite her (S. 267) erkannt haben.

Die Ausführung der gegenüberstehenden Betrachtung ist ohne weitere Schwierigkeit; durch ein Tripel conjugirter Strahlen XYZ und ein beliebiges Paar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ist nicht nur ein, sondern es sind unendlich-viele Netze bestimmt, welche eine *Netz-Schaar* bilden, deren Mächtigkeit gleich gross ist mit der einer geraden Punktreihe. Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf sämtliche Netze der Schaar liegen auf einer andern (conjugirten) Geraden; daher liegen insbesondere die Mittelpunkte sämtlicher Netze der Schaar auf einer Geraden $\mathfrak{M}_0$, welche der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ conjugirt ist. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf sämtliche Netze einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel XYZ einbeschrieben ist. Die Netze einer Schaar sind sämtlich hyperbolisch, sobald a) von dem gemeinschaftlichen Tripel allein ein Strahl X und der Schnittpunkt x der beiden andern Y , Z reell, diese selbst aber imaginär sind; die Kernkegelschnitte bilden

eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten; b) sobald das Tripel XYZ völlig reell und die oben ermittelten Punktsysteme (X) (Y) (Z) auf ihnen alle drei hyperbolisch sind; die Kernkegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten; wenn dagegen c) das Tripel XYZ völlig reell und von den Punktsystemen (X) (Y) (Z) nur eines hyperbolisch (X) , die beiden andern elliptisch sind, so besteht die Netzschaar theils aus hyperbolischen, theils aus elliptischen Netzen; die Kernkegelschnitte der hyperbolischen Netze bilden eine Schaar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten; dieses Gebilde wird aber erst zu einem vollständigen durch Hinzufügung der imaginären Kegelschnitte, welche durch die elliptischen Netze einer solchen Schaar vertreten werden. Nach dem Obigen muss in diesem Falle c) die Gerade $\mathfrak{M}_0$ die Seiten des von den Geraden XYZ gebildeten Dreiecks so treffen, dass von den Schnittpunkten zwei in den Seiten selbst und nur einer in der Verlängerung einer Dreiecksseite liegt, also ein Stück der Geraden $\mathfrak{M}_0$ in den endlichen Dreiecksraum (e) hineinfällt. Dieses Stück enthält die Mittelpunkte der elliptischen Netze der Schaar, während diejenigen Stücke von $\mathfrak{M}_0$, welche in $e_1 e_2 e_3$ enthalten sind, die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen mit Hyperbeln als Kernkegelschnitten und die Stücke, welche in die Räume $h_1 h_2 h_3$ fallen, die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen mit Ellipsen als Kernkegelschnitten enthalten.

Schliesslich ermitteln wir noch, in welcher Weise bei diesem durch die Netzschaar hervorgerufenen Beziehungssystem der zweiten Art die conjugirten Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ im Allgemeinen die Ebene erfüllen, wenn wir das gemeinschaftliche Tripel XYZ als vollständig reell annehmen; jede Gerade in der Ebene kann dabei überhaupt nur zwei wesentlich verschiedene Lagen haben: entweder trifft sie alle drei Seiten des von den Geraden XYZ gebildeten Dreiecks in ihren Verlängerungen; in diesem Falle wollen wir sie durch einen einfachen Accent ($'$) bezeichnen; oder sie trifft eine Dreiecksseite in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Dreiecks; in diesem Falle soll sie einen doppelten Accent erhalten ($''$); unterscheiden wir nun die beiden möglichen Fälle:

1) Die drei Punktsysteme (X) (Y) (Z) sind alle hyperbolisch; dann wird einer Geraden $\mathfrak{G}'$ nothwendig eine Gerade $\mathfrak{H}'$ conjugirt sein und einer Geraden $\mathfrak{G}''$ eine Gerade $\mathfrak{H}''$.

2) Von den drei Punktsystemen (X) (Y) (Z) ist eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch, und zwar nennen wir das hyperbolische (X) , die beiden elliptischen (Y) und (Z) ; dann ist

jeder Geraden $\mathcal{G}'$ nothwendig eine Gerade $\mathcal{H}''$ conjugirt, aber einer Geraden $\mathcal{G}''$ nur dann eine Gerade $\mathcal{H}'$, wenn sie X ausserhalb der Dreiecksseite, Y und Z innerhalb trifft; dagegen, wenn sie X innerhalb, Y innerhalb und Z ausserhalb trifft, eine Gerade $\mathcal{H}''$, welche X innerhalb, Y ausserhalb und Z innerhalb trifft; endlich, wenn $\mathcal{G}''$ X innerhalb, Y ausserhalb, Z innerhalb trifft, muss die conjugirte $\mathcal{H}'$ X innerhalb, Y innerhalb und Z ausserhalb treffen. —

Das Netzbüschel und die Netzschaar oder das damit zusammenhängende Beziehungssystem der ersten und zweiten Art kann auch anstatt durch das gemeinschaftliche Tripel und ein beliebiges Paar conjugirter Punkte oder Strahlen allgemeiner definirt werden, einerseits durch vier Paare conjugirter Punkte P , Q und andererseits durch vier Paare conjugirter Strahlen $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$. Fassen wir nur die erste Art ins Auge, so zeigt die in §. 58 ausgeführte Untersuchung, dass sich zwei Netze herstellen lassen, welche vier beliebig gegebene Paare conjugirter Punkte P , Q gemeinschaftlich haben; solche zwei Netze bestimmen ein Netzbüschel, und jedes Paar conjugirter Punkte P , Q für jene beiden Netze ist zugleich ein Paar für jedes beliebige Netz des Büschels, wie wir es oben (S. 447) direct nachgewiesen haben; folglich müssen umgekehrt alle Netze, welche jene vier Paare conjugirter Punkte gemeinschaftlich haben, demselben Büschel angehören; ebenso bilden alle Netze, welche vier Paare conjugirter Strahlen $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ gemeinschaftlich haben, eine Netzschaar; ähnliche Gruppen von Netzen erhalten wir, indem wir vier Paare theils conjugirter Punkte, theils conjugirter Strahlen zur Bestimmung eines solchen Gebildes von einfacher Unendlichkeit auswählen; die nähere Untersuchung derartiger Gebilde bleibe aber dem Leser überlassen.

§. 63. Drei Netze in der Ebene. Die Tripelecurve. Das Kegelschnittnetz. *)

Nehmen wir drei beliebige Netze in der Ebene an, so gehört zu einem Punkte P in Bezug auf jedes derselben eine Polare, und diese drei Polaren werden sich im Allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden; es ist aber von Interesse, den Ort solcher besonderen Punkte P in der Ebene aufzusuchen, für welche die Polaren durch einen und denselben Punkt Q laufen. Suchen wir, um den Grad dieses Ortes zu bestimmen, auf einer beliebigen Geraden $\mathcal{G}$ die Punkte P von der verlangten Beschaffenheit zu ermitteln. Bezeichnen wir zu

*) Vergl. „Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades“ von H. Schröter. Monatsbericht der Berliner Academie vom 26. November 1863.

diesem Zwecke die drei gegebenen Netze durch (A) (B) (C) oder auch, falls die Netze hyperbolisch sind, die Kernkegelschnitte derselben durch diese Buchstaben, so werden, wenn wir einen veränderlichen Punkt die Gerade $\mathfrak{G}$ durchlaufen lassen, seine Polaren abc in den drei Netzen (A) (B) (C) drei projectivische Strahlbüschel um die Mittelpunkte $\alpha\beta\gamma$ beschreiben; die von a und b beschriebenen Strahlbüschel (α) und (β) erzeugen also einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch $\alpha\beta$ und das gemeinschaftliche Tripel der Netze (A) und (B) hindurchgeht und durch diese fünf Punkte völlig bestimmt ist. Die Strahlen b und c erzeugen in gleicher Weise einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher durch $\beta\gamma$ und das gemeinschaftliche Tripel von (B) und (C) hindurchgeht. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben nun im Allgemeinen ausser dem gemeinschaftlichen Punkte β noch drei Punkte $QQ'Q''$ zu Schnittpunkten, und weil ein solcher Punkt Q auf beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zugleich liegt, müssen αQ , βQ , γQ die drei Polaren eines und desselben Punktes P der Geraden $\mathfrak{G}$ sein, d. h. P und Q werden ein solches besonderes Paar von Punkten sein, welche gleichzeitig für alle drei gegebenen Netze conjugirt sind. Da nun die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ ausser dem Punkte β höchstens noch drei Punkte $QQ'Q''$ gemein haben (von denen auch zwei imaginär sein können), so giebt es im Allgemeinen drei Punkte $PP'P''$ auf der willkürlich gewählten Geraden $\mathfrak{G}$, welche dem gesuchten Orte angehören; dieser ist also eine *Curve dritten Grades*.

Die drei Punkte $QQ'Q''$ stehen, wenn sie alle drei reell sind, mit ihren conjugirten Punkten $PP'P''$ in einem sehr einfachen Zusammenhange, vermöge dessen sie aus jenen unmittelbar gefunden werden können. Fassen wir nämlich nur zwei Paare von ihnen PQ und $P'Q'$ auf, so müssen (S. 419) die Schnittpunkte (PP', QQ') und (PQ', QP') ein drittes Paar conjugirter Punkte für alle drei gegebenen Netze sein; da der erste Punkt auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegt und es nur noch einen solchen P'' giebt, so muss dieser mit ihm identisch sein und daher der andere mit Q'' , also:

$$(PP', QQ') = P'' \quad (PQ', QP') = Q'',$$

d. h. die Punkte P, P', P'' sind die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten $Q'Q'', Q''Q, QQ'$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$, oder *die sechs Punkte $PP'P''QQ'Q''$ liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, welche ein vollständiges Vierseit bilden*.

Es ist klar, dass die gefundene Ortcurve dritten Grades durch die drei gemeinschaftlichen Tripel je zweier der gegebenen Netze (B) und (C) , (C) und (A) , (A) und (B) hindurchgehen muss und

durch diese neun Punkte vollständig bestimmt wird. In der That, sei xyz das gemeinschaftliche Tripel von (B) und (C) , so ist die Polare von x für beide Netze (B) und (C) dieselbe Gerade $(yz) = X$, also schneiden sich die Polaren von x für alle drei gegebenen Netze (B) , (C) und (A) in einem Punkte, und x ist also ein Punkt des gesuchten Ortes; sein conjugirter ist der Schnittpunkt von X mit der Polare von x in Bezug auf (A) ; dasselbe gilt für y und z ; da aber bekanntlich die Polaren der Ecken eines Dreiecks xyz in Bezug auf ein Netz (A) die Gegenseiten desselben resp. yz , zx , xy in drei Punkten treffen, welche auf einer Geraden liegen, so müssen auch die conjugirten Punkte zu den Punkten xyz eines gemeinschaftlichen Tripels von je zwei Netzen auf derselben Geraden sich befinden. [Durch diese neun Punkte der drei gemeinschaftlichen Tripel ist unsere Ortscurve vollständig bestimmt, d. h. es gibt keine zwei Curven dritten Grades, welche gleichzeitig durch diese neun Punkte hindurchgehen; denn wäre dies der Fall, so müsste ein ganzes Büschel von Curven dritten Grades durch dieselben neun Grundpunkte gehen, und da zwei Tripel desselben Netzes allemal auf einem Kegelschnitt liegen, so würden besondere Curven jenes Büschels zerfallen in Kegelschnitte und Gerade, d. h. die drei Tripelpunkte des dritten Tripels müssten auf einer Geraden liegen. Die Punkte eines Tripels können aber im Allgemeinen nie auf einer Geraden liegen, folglich geht durch jene neun Punkte nur eine einzige Curve dritten Grades.]

Durch die drei als gegeben angenommenen Netze (A) (B) (C) sind zugleich drei Büschel von Netzen gegeben, da je zwei derselben ein Büschel bestimmen; bezeichnen wir diese drei Büschel durch (B, C) (C, A) (A, B) und bemerken, dass ein Paar conjugirter Punkte P, Q für zwei Kegelschnitte (oder Netze) eines Büschels zugleich für sämtliche Kegelschnitte (oder Netze)*) desselben conjugirt sind, so folgt, dass, wenn wir aus den drei Büscheln (B, C) (C, A) (A, B) irgend drei neue Kegelschnitte resp. $A'B'C'$ herausnehmen und dieselben an Stelle der ursprünglichen ABC setzen, für den Ort solcher Paare conjugirter Punkte P, Q , welche in Bezug auf diese drei gleichzeitig conjugirt sind, nothwendig dieselbe vorhin gefundene Ortscurve resultirt; diese Curve enthält daher auch die gemeinschaftlichen Tripel der neuen Kegelschnittpaare $B'C', C'A', A'B'$, und diese bestimmen drei neue Büschel, aus denen wir wiederum je einen beliebigen $A''B''C''$

*) Wir werden uns im Folgenden der Einfachheit wegen nur des Ausdrucks „Kegelschnitt“ statt des allgemeineren „Netz“ bedienen, indem wir unter jenem auch den imaginären Kegelschnitt, welcher durch das elliptische Netz vertreten wird, mitverstehen.

herausnehmen können u. s. f. Wir erhalten dadurch einen netzartigen Fortgang bis ins Unendliche, immer neue Büschel von Kegelschnitten und neue Tripel xyz . Alle diese Tripel liegen auf einer und derselben Ortscurve dritten Grades, welche die *Tripelcurve* genannt werden soll; sämtliche Kegelschnitte (oder Netze) von doppelt-unendlicher Mächtigkeit, welche allen jenen Büscheln angehören, bilden ein *Kegelschnitt-netz* von der Beschaffenheit, dass je zwei Punkte P, Q , welche in Bezug auf irgend drei Kegelschnitte des Netzes gleichzeitig conjugirt sind, auf der Tripelcurve liegen; solche zwei Punkte sollen *conjugirte Punkte der Tripelcurve* heissen und sind in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Netzes conjugirt; auch soll irgend ein Tripel xyz , welches zweien Kegelschnitten des Netzes gemeinschaftlich ist und daher auf der Tripelcurve liegt, ein *Tripel der Tripelcurve* genannt werden. Die Tripelcurve kann daher doppelt aufgefasst werden, erstens als der Ort solcher Punkte P , deren Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Kegelschnitte $(A) (B) (C)$ sich in einem Punkte Q treffen, welcher ebenfalls auf der Tripelcurve liegt, und zweitens als der Ort aller gemeinschaftlichen Tripel xyz irgend zweier Kegelschnitte aus den drei Büscheln $(B, C) (C, A) (A, B)$.

Fassen wir irgend einen Punkt P der Tripelcurve auf, welcher nicht gerade ein Eckpunkt eines gemeinschaftlichen Tripels xyz der Büschel $(B, C) (C, A) (A, B)$ ist, so werden die Polaren von P in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels (B, C) durch den conjugirten Punkt Q laufen und ein Strahlbüschel beschreiben dergestalt, dass jedem Kegelschnitt des Büschels eine und nur *eine* bestimmte Gerade durch Q entspricht und auch umgekehrt für jede durch Q gezogene Gerade nur ein einziger Kegelschnitt aus dem Büschel (B, C) existirt, in Bezug auf welchen sie die Polare von P ist; dasselbe gilt für das zweite Büschel (C, A) ; ziehen wir also durch Q eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt A' aus dem Büschel (B, C) und einen bestimmten Kegelschnitt B' aus dem Büschel (C, A) dergestalt, dass jene Gerade $\mathfrak{G}$ und der Punkt P Polare und Pol für beide Kegelschnitte A' und B' gleichzeitig sind. Wenn aber zwei Kegelschnitte ein Paar von Pol und Polare gemeinschaftlich haben, so gehört dies ihrem gemeinsamen Tripel an; folglich ist jeder Punkt P der Tripelcurve zugleich als Eckpunkt eines Tripels anzusehen, welches zweien Kegelschnitten des Netzes gemeinsam ist, d. h. die Tripelcurve ist der Ort aller gemeinsamen Tripel irgend zweier Kegelschnitte des Netzes.

Halten wir die vorhin durch Q willkürlich gezogene Gerade $\mathfrak{G}$ fest und denken uns die beiden Kegelschnitte A' und B' resp. aus

den Büscheln (B, C) und (C, A) ermittelt, für welche P ein Eckpunkt des gemeinschaftlichen Tripels ist, so lassen sich auch die beiden andern Tripelpunkte desselben leicht ermitteln; sie liegen natürlich auf $\mathfrak{G}$ und auf der Tripelcurve selbst, müssen daher die beiden übrigen Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Tripelcurve sein, denn der Punkt Q ist im Allgemeinen kein Punkt des gemeinschaftlichen Tripels von A' und B' ; die Gerade $\mathfrak{G}$ ist nämlich ganz willkürlich durch Q gezogen; verändern wir sie, so erkennen wir, dass nur ein einziges Mal P und Q Tripelpunkte des gemeinschaftlichen Tripels zweier Kegelschnitte A' und B' werden können, weil durch diese beiden auch der dritte Tripelpunkt unzweideutig mitbestimmt ist; käme es also zweimal vor, so müsste auch der dritte Tripelpunkt derselbe sein und doch auf zwei verschiedenen durch Q gehenden Geraden liegen, was ein Widerspruch ist; folglich sind die beiden übrigen Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Tripelcurve die Tripelpunkte des gemeinsamen Tripels von A' und B' , dessen erster P ist; nur einmal, wenn die Gerade $\mathfrak{G}$ Tangente an der Tripelcurve im Punkte Q wird, fällt einer jener beiden Tripelpunkte nach Q ; hieraus schliessen wir folgende Eigenschaft der Tripelcurve:

Jeder beliebige Punkt P der Tripelcurve kann als ein Tripelpunkt von einfach unendlich-vielen Tripeln des Kegelschnittnetzes angesehen werden; die Verbindungslinie der jedesmaligen andern beiden Tripelpunkte läuft durch einen festen Punkt Q der Tripelcurve, den conjugirten Punkt von P . Ferner, wenn ein Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve zugleich zwei Punkte eines Tripels vom Kegelschnittnetze sein sollen, so muss der dritte auf der Tangente in Q an der Tripelcurve und daher auch auf der Tangente in P an derselben gelegen sein, d. h.:

*Die Tangenten in zwei conjugirten Punkten P, Q der Tripelcurve schneiden sich in einem dritten Punkte R derselben, und PQR bilden das gemeinschaftliche Tripel eines in dem Kegelschnittnetze vorkommenden Büschels. Hierin liegt eine charakteristische Eigenschaft eines Paares conjugirter Punkte auf der Tripelcurve. Eine Tangente in einem beliebigen Punkte der Tripelcurve dritten Grades schneidet nothwendig dieselbe noch in einem dritten Punkte, weil von ihren drei Schnittpunkten zwei in dem Berührungspunkte zusammenfallen; nennt man diesen dritten Schnittpunkt der Tangente den *Tangentialpunkt*, welcher dem Berührungspunkte zugehört, so erscheinen zwei conjugirte Punkte PQ der Tripelcurve als solche Punkte derselben, welche denselben Tangentialpunkt haben.*

Nehmen wir zwei beliebige Punkte der Tripelcurve Q und Q' , welche nicht conjugirte Punkte derselben sein sollen, so ist es immer erlaubt, diese als zwei Tripelpunkte eines Tripels anzusehen,

welches in dem Kegelschnittnetze als gemeinschaftliches Tripel eines Büschels auftritt; denn um den dritten Tripelpunkt Q'' zu finden, haben wir nur nöthig, die conjugirten Punkte P und P' zu Q und Q' aufzusuchen, dann muss $Q'P$ durch Q'' gehen und ebenso auch QP' , also der Schnittpunkt $(QP', Q'P) = Q''$ sein; der conjugirte Punkt von Q'' muss nun bekanntlich der Schnittpunkt $(PP', QQ') = P''$ sein, weil die beiden Paare P, Q und P', Q' das dritte Paar conjugirter Punkte $P''Q''$ mitbestimmen.

Um zu den beiden willkürlich auf der Tripelcurve angenommenen Punkten QQ' den dritten Tripelpunkt Q'' zu finden, haben wir also nur nöthig, den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie QQ' mit der Tripelcurve, den Punkt P'' , zu bestimmen und seinen conjugirten Punkt Q'' zu ermitteln. Dieses Ergebniss lässt sich auch so ausdrücken:

Verbindet man ein beliebiges Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve mit irgend einem dritten Punkte Q' derselben, so treffen diese beiden Strahlen die Tripelcurve zum dritten Male in zwei neuen Punkten, welche wieder ein Paar conjugirter Punkte $Q''P''$ der Tripelcurve sind.

Solche drei Paare conjugirter Punkte der Tripelcurve $PQ, P'Q', P''Q''$ sind also die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, und je drei nicht in einer Geraden liegende Ecken desselben allemal ein Tripel xyz in dem Kegelschnittnetze. Wir schliessen hieraus folgenden Satz:

Die Seiten eines auf der Tripelcurve liegenden Tripeldreiecks, welches das gemeinschaftliche Tripel xyz eines in dem Kegelschnittnetze auftretenden Büschels ist, schneiden die Tripelcurve immer in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen, und die drei Schnittpunkte sind zugleich die conjugirten Punkte der Tripelcurve zu den drei Eckpunkten des Tripels, indem je eine Ecke und der dritte Schnittpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tripeldreiecks mit der Tripelcurve einander conjugirt sind. Wir können auch umgekehrt sagen:

Wenn irgend eine Gerade der Tripelcurve in den drei Punkten $PP'P''$ begegnet, so bilden die zu ihnen conjugirten Punkte $QQ'Q''$ allemal ein Tripel, welches einem in dem Kegelschnittnetze auftretenden Büschel gemeinschaftlich ist.

Um die vorige Betrachtung noch zu vervollständigen, denken wir uns ein beliebiges Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve und durch P eine Gerade $\mathfrak{G}$ gezogen; dann giebt es in dem Büschel (B, C) einen einzigen bestimmten Kegelschnitt A' , welcher Q und $\mathfrak{G}$ zu Pol und Polare hat, in dem Büschel (C, A) einen einzigen bestimmten Kegelschnitt B' , welcher ebenfalls Q und $\mathfrak{G}$ zu Pol und Polare hat, und endlich auch in dem Büschel (A, B) einen solchen Kegelschnitt C' . Die Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet die Tripelcurve ausser

in P noch in zwei Punkten Q' und Q'' von solcher Beschaffenheit, dass $QQ'Q''$ das gemeinschaftliche Tripel der Kegelschnitte A' und B' ist; aus gleichem Grunde muss aber auch $QQ'Q''$ das gemeinschaftliche Tripel der Kegelschnitte B' und C' , sowie C' und A' sein; hieraus folgt, dass $A'B'C'$ einem und demselben Büschel angehören müssen; denn gehörte C' nicht dem Büschel (A', B') an, so hätten C' und A' noch ein zweites von $QQ'Q''$ verschiedenes gemeinschaftliches Tripel; es ist aber nicht möglich, dass zwei verschiedene Kegelschnitte mehr als ein gemeinschaftliches Tripel haben (wofern sie sich nicht doppelt berühren), folglich gehören die drei Kegelschnitte $A'B'C'$ zu demselben Büschel. Dieses Resultat lässt sich auch unabhängig von den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes als Satz aussprechen:

Hat man drei Kegelschnitte CBA' eines Büschels und ACB' eines zweiten Büschels, welches mit dem ersten den Kegelschnitt C gemeinschaftlich hat, so bestimmen auch die Kegelschnittpaare A, B und $A'B'$ zwei Büschel, welche einen Kegelschnitt $\mathcal{C}$ gemeinschaftlich haben, d. h. die acht Grundpunkte der beiden Büschel (A, B) und (A', B') liegen auf einem und demselben Kegelschnitte. Oder mit andern Worten:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte ABC hat und legt einmal durch die Schnittpunkte von B und C einen beliebigen Kegelschnitt A' , dann durch die Schnittpunkte von C und A einen beliebigen Kegelschnitt B' , so liegen die vier Schnittpunkte von A' und B' mit den vier Schnittpunkten von A und B auf einem und demselben Kegelschnitt. Dies lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte ABC hat und legt durch irgend einen Punkt P der Ebene drei neue Kegelschnitte, welche ausserdem durch die vier Schnittpunkte je zweier der gegebenen $B, C; C, A; A, B$ hindurchgehen, so treffen sich diese neuen Kegelschnitte ausser in P noch in denselben drei Punkten.

Diese Sätze sind ihrer Allgemeinheit wegen bemerkenswerth und enthalten viele besondere Fälle in sich, welche anzuführen hier unterbleiben muss. Für den gegenwärtigen Zweck giebt uns der obige Satz das Mittel an die Hand, zu einem beliebigen Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ dasjenige Büschel des Kegelschnittnetzes zu finden, dessen gemeinschaftliches Tripel das gegebene $QQ'Q''$ ist; denn zur Bestimmung dieses Büschels haben wir nach dem Obigen nur nöthig, die beiden Kegelschnitte A' und B' zu ermitteln, durch welche dies Büschel bestimmt wird. Dass sämmtliche Kegelschnitte des Netzes, welche ein Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ gemein haben, umgekehrt ein Büschel bilden müssen, ist von vorn herein klar, weil sie ausserdem noch ein beliebiges anderes Paar conjugirter Punkte der Tripel-

curve $P_1 Q_1$ gemein haben und daher einem Büschel angehören (S. 447). Zu jedem Tripel $Q Q' Q''$ der Tripelcurve gehört daher ein bestimmtes Büschel des Kegelschnittnetzes. Nehmen wir zwei beliebige Tripel der Tripelcurve $Q Q' Q''$ und $Q_1 Q'_1 Q''_1$, so lassen sich die zugehörigen Büschel des Kegelschnittnetzes so ermitteln, dass wir denjenigen Kegelschnitt A' aus dem Büschel (B, C) , für welchen Q und $Q' Q''$ Pol und Polare sind, und denjenigen Kegelschnitt B' aus dem Büschel (C, A) , für welchen ebenfalls Q und $Q' Q''$ Pol und Polare sind, aufsuchen; die beiden Kegelschnitte $A' B'$ bestimmen das Büschel des Kegelschnittnetzes, für welches $Q Q' Q''$ das gemeinschaftliche Tripel ist; in ganz analoger Weise werden zwei Kegelschnitte $A'_1 B'_1$ gefunden, deren gemeinschaftliches Tripel das gegebene $Q_1 Q'_1 Q''_1$ ist. Nun haben wir aber drei Kegelschnitte $CA' A'_1$, welche einem Büschel (B, C) angehören, und drei Kegelschnitte $CB' B'_1$, welche einem zweiten Büschel (C, A) angehören; jene beiden Büschel haben den Kegelschnitt C gemein, folglich müssen nach unserm obigen Satze auch die beiden durch die Kegelschnittpaare $(A' B')$ und $(A'_1 B'_1)$ bestimmten Büschel einen Kegelschnitt $\mathcal{C}$ gemein haben; für diesen sind daher die gemeinschaftlichen Tripel jener beiden Büschel, d. h. $Q Q' Q''$ und $Q_1 Q'_1 Q''_1$ ebenfalls Tripel conjugirter Punkte, und da bekanntlich zwei Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt immer sechs Punkte eines neuen Kegelschnitts sind (S. 415), so schliessen wir folgenden Doppel-Satz:

Irgend zwei Büschel des Kegelschnittnetzes haben allemal einen Kegelschnitt gemeinschaftlich, und

Irgend zwei Tripel der Tripelcurve liegen allemal auf einem Kegelschnitt.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren: Legt man durch irgend ein Tripel der Tripelcurve einen beliebigen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die Curve im Allgemeinen in drei neuen Punkten, welche wieder ein Tripel bilden; denn da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelcurve willkürlich gewählt werden dürfen und durch das erste Tripel und zwei Punkte der Tripelcurve ein Kegelschnitt bestimmt wird, so muss der dem zweiten Tripel angehörige einzige dritte Tripelpunkt sowohl auf dem Kegelschnitt als auch auf der Tripelcurve liegen, d. h. der sechste Schnittpunkt beider sein. Hieraus folgt mit Berücksichtigung der oben gefundenen Eigenschaft der Tripelcurve der Satz:

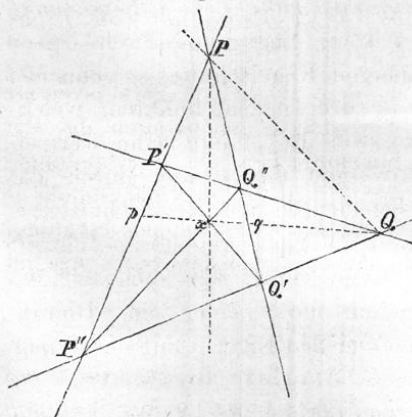
Wenn man durch drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve und einen beliebigen Punkt Q derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelcurve im Allgemeinen noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt

P der Tripelcurve läuft, welcher der dem Punkte *Q* conjugirte ist. Dieser Satz gilt auch allgemein, unabhängig von den Eigenschaften der Tripel, und führt zu einer Erzeugung der Curve dritten Grades durch ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlbüschel, welche in projectivische Beziehung zu einander gesetzt werden.*)

Hieran knüpft sich eine weitere bemerkenswerthe Eigenschaft der Tripelcurve; seien $RR'R''$ die Punkte des ersten Tripels, und das Büschel von Kegelschnitten mit den vier Grundpunkten $[QRR'R'']$ schneide die Tripelcurve in der veränderlichen Sehne $Q'Q''$, welche durch den festen Punkt *P* läuft, so wird der vierte harmonische zu *P* zugeordnete Punkt, indem $Q'Q''$ das andere Paar zugeordneter Punkte bilden, derjenige Punkt sein, in welchem die Polare von *P* in Bezug auf den Kegelschnitt des Büschels $[QRR'R'']$, welcher durch $Q'Q''$ geht, den Strahl $PQ'Q''$ trifft. Die Polaren von *P* in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels $[QRR'R'']$ laufen aber bekanntlich durch einen festen Punkt *II* und beschreiben ein Strahlbüschel, welches projectivisch ist mit dem Kegelschnittbüschel und auch mit dem Strahlbüschel, welches der veränderliche Strahl $Q'Q''P$ beschreibt; das Erzeugniss der beiden projectivischen Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, und wir erhalten folgenden Satz:

Zieht man durch irgend einen Punkt P der Tripelcurve Strahlen, welche dieselbe ausserdem in Punktpaaren Q'Q'' treffen, und construirt man den zu P zugeordneten vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort desselben ein bestimmter Kegelschnitt, welcher in P die Tripelcurve berührt und durch die Berührungspunkte der übrigen (vier) aus P an die Tripelcurve zu legenden Tangenten geht.

Fig. 107.



Wir vervollständigen noch die Figur, indem wir zu Q' und Q'' die conjugirten Punkte P' und P'' bestimmen, welche mit *P* auf einer Geraden liegen müssen und zwar so, dass $PQ P'Q' P''Q''$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind; dann wissen wir, dass von dem obigen Kegelschnittbüschel $[QRR'R'']$ ein Kegelschnitt durch $Q'Q''$ und ein anderer durch $P'P''$

geht. Die vierten harmonischen zu *P* zugeordneten Punkte auf

*) *Chasles*, Comptes rendus t. XLI, 1853.

allen durch P gezogenen Sehnen liegen, wie wir gesehen haben, auf einem bestimmten Kegelschnitt $P^{(2)}$, den wir den *Polarkegelschnitt* des Punktes P nennen wollen. Auf diesem liegen daher auch p und q (Fig. 107), welche mit Hülfe des vollständigen Vierseits $PQ'P'Q''Q''$ leicht construirt werden; bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt:

$$(P'Q', P''Q'') = x,$$

und zieht die Gerade Qx , so begegnet dieselbe den Strahlen $PP'P''$ und $PQ'Q''$ in den beiden Punkten p und q .

Lassen wir nun den durch die vier Grundpunkte $QRR'R'$ gelegten Kegelschnitt des Büschels sich verändern, so verändern sich auch $Q'Q''P'P''$, während P fest bleibt; die Punkte p und q bewegen sich auf dem Polarkegelschnitt $P^{(2)}$, und die Sehne pq läuft durch den festen Punkt Q ; folglich beschreibt das Strahlenpaar $PP'P''$ und $PQ'Q''$ ein Strahlensystem (P) , und wir erhalten den Satz:

Wenn man einen beliebigen Punkt P der Tripelcurve mit allen möglichen Paaren conjugirter Punkte $P'Q'$ derselben verbindet, so bilden diese Strahlenpaare ein Strahlensystem, welches dem Punkte P zugehört.

Ebenso erhält man ein bestimmtes dem Punkte Q zugehöriges Strahlensystem. Die Strahlensysteme (P) und (Q) zweier conjugirter Punkte stehen aber in eigenthümlicher Verbindung mit einander. Der Punkt $x = (P'Q', P''Q'')$ liegt nämlich auf der Polare von Q in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$, und da diese Polare ungeändert bleibt bei der Veränderung des Büschelkegelschnitts, so ist der Ort von x eine gerade Linie. Beiläufig erkennen wir den Satz:

Die Polare des Punktes Q in Bezug auf den Polarkegelschnitt $P^{(2)}$ ist identisch mit der Polare des Punktes P in Bezug auf den Polarkegelschnitt $Q^{(2)}$.

Durch die gerade Punktreihe x werden die beiden Strahlensysteme (P) und (Q) eindeutig auf einander bezogen; x ist nämlich der Ort des Schnittpunktes zweier vierten harmonischen der Verbindungslinie PQ zugeordneten Strahlen, die von P und Q ausgehen, indem je ein Strahlenpaar des Strahlensystems (P) und das entsprechende Strahlenpaar des Strahlensystems (Q) die andern Paare zugeordnet-harmonischer Strahlen bilden, d. h. es sind:

$$P(QxP'Q') \text{ und } Q(PxP'Q')$$

je vier harmonische Strahlen. Durch die Annahme des Punktes x auf der Geraden, welche x durchläuft, werden die entsprechenden Strahlenpaare der Strahlensysteme (P) und (Q) vollständig bestimmt. Hierauf gründet sich eine Erzeugung der Tripelcurve und einfache Constructionen derselben durch zwei in projectivische Beziehung gesetzte

Strahlensysteme, die in eigenthümlicher Verbindung mit einander stehen*). Aus der obigen Bemerkung, dass zwei Tripel der Tripelcurve allemal auf einem Kegelschnitt liegen, folgt eine charakteristische Eigenschaft eines solchen Tripels in Rücksicht auf die Tripelcurve selbst. Denken wir uns nämlich durch das Tripel $QQ'Q''$ der Tripelcurve insbesondere einen solchen Kegelschnitt gelegt, welcher in Q und Q' dieselben Tangenten mit der Tripelcurve hat, so hat er bereits fünf Punkte mit der Tripelcurve gemein, welche ihn zugleich bestimmen; sein sechster Schnittpunkt mit der Tripelcurve muss daher der dritte Tripelpunkt zu Q und Q' sein, d. h. Q'' ; es müssen daher auch in Q'' zwei Punkte des Kegelschnitts und der Tripelcurve zusammenfallen oder dieser Punkt muss ein Berührungspunkt beider Curven sein; wir schliessen also:

Die drei Punkte eines Tripels der Tripelcurve liegen allemal so, dass ein Kegelschnitt die Tripelcurve in denselben berühren kann.

Da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelcurve willkürlich auf derselben angenommen werden dürfen, der dritte Tripelpunkt dann aber vollständig und eindeutig bestimmt ist, so können wir, wenn ein Tripel $QQ'Q''$ als bekannt angesehen wird, nach dem obigen Satze die Totalität der übrigen Tripel leicht überschauen, indem wir alle möglichen Kegelschnitte durch die drei Punkte $QQ'Q''$ legen, von denen jeder durch seine drei übrigen Schnittpunkte mit der Tripelcurve immer ein neues Tripel derselben bestimmt. Kennen wir daher zwei Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ und $Q_1Q_1'Q_1''$ und wollen zu zwei auf der Tripelcurve willkürlich angenommenen Punkten SS' als zwei Eckpunkten eines Tripels derselben den dritten Eckpunkt S'' finden, so haben wir nur nöthig, zwei Kegelschnitte durch die resp. fünf Punkte $QQ'Q''SS'$ und $Q_1Q_1'Q_1''SS'$ zu legen, welche sich in dem gesuchten Punkte S'' auf der Tripelcurve schneiden müssen. Nach dem Früheren sind nun, wenn wir zwei beliebige Paare conjugirter Punkte auf der Tripelcurve P, Q und P', Q' haben, die Schnittpunkte:

$$(PQ, P'Q) = Q'' \quad (PP', QQ') = P''$$

ein drittes Paar conjugirter Punkte, und diese sechs Ecken des von den vier Geraden:

$$\begin{array}{ccc} P & P' & P'' \\ P & Q' & Q'' \\ P' & Q'' & Q \\ P'' & Q & Q' \end{array}$$

gebildeten vollständigen Vierseits, welches der Tripelcurve einbeschrieben

*) Vgl. Ueber Curven dritter Ordnung von *H. Schröter*, Math. Annalen von *Clebsch* und *Neumann*. Bd. V. S. 50. Bd. VI. S. 85.

ist, haben zu ihren conjugirten Punkten beziehungsweise:

$$\left. \begin{array}{ccc} Q & Q' & Q'' \\ Q & P' & P'' \\ Q' & P'' & P \\ Q'' & P & P' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vier Tripel der} \\ \text{Tripelcurve.} \end{array}$$

Um jetzt zu zwei willkürlich auf der Tripelcurve gewählten Punkten SS' als Eckpunkten eines Tripels der Tripelcurve den dritten Tripelpunkt S'' zu finden, haben wir nur durch die resp. fünf Punkte $QQ'Q'SS'$ und $QP'P'SS'$ einen Kegelschnitt zu legen; der vierte Schnittpunkt dieser beiden Kegelschnitte muss der gesuchte Punkt S'' der Tripelcurve sein. Wir haben hierdurch beiläufig folgenden Satz gefunden:

Wenn man ein vollständiges Vierseit hat, dessen sechs Ecken zu je dreien auf vier Geraden liegen, so kann man auf vier Arten je drei derselben herausnehmen, welche ein Dreieck bilden, während die drei übrigen auf einer Geraden liegen. Umschreibt man diesen vier Dreiecken vier Kegelschnitte, welche ausserdem durch zwei beliebig gegebene feste Punkte gehen, so laufen alle vier Kegelschnitte durch einen und denselben neuen Punkt. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist aus den Elementen bekannt, nämlich, dass die den vier Dreiecken, welche sich aus den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden lassen, umschriebenen Kreise durch einen und denselben Punkt gehen (den Brennpunkt der Parabel, welche dem Vierseit einbeschrieben werden kann).

Wir können auch sehr einfach den vorigen Satz direct beweisen. Seien nämlich die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits PQ , $P'Q'$, $P''Q''$, so dass die vier Geraden je drei Punkte: $PP'P''$, $PQ'Q''$, $P'Q''Q$, $P''Q'Q'$ enthalten und ausserdem zwei beliebige Punkte SS' gegeben, so werden die beiden durch je fünf Punkte $QQ'Q'SS'$ und $PP'Q'SS'$ gelegten Kegelschnitte einen vierten Punkt S'' gemein haben; da nun bekanntlich die Seiten zweier Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind, selbst einen andern Kegelschnitt berühren (S. 129), so müssen die Seiten der beiden Dreiecke $QQ'Q''$ und $SS'S''$ einen Kegelschnitt berühren und ebenso die Seiten der beiden Dreiecke $PP'Q''$ und $SS'S''$; diese beiden Kegelschnitte sind aber identisch, weil sie fünf Tangenten gemein haben, die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ und die Geraden $Q''QP'$ und $Q''Q'P$; folglich berühren auch $QQ'P''$ und $PP'P''$ diesen Kegelschnitt, d. h. derselbe berührt alle vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$; da aber die Seiten der beiden Dreiecke $QP'P''$ und $SS'S''$ einen Kegelschnitt berühren, so liegen auch die sechs Ecken derselben auf einem andern Kegelschnitt (S. 129), d. h.

der durch $QP'P''SS'$ gelegte Kegelschnitt geht durch S' und endlich aus demselben Grunde der durch $Q'P''PSS'$ gelegte Kegelschnitt; also laufen die vier angegebenen Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt, w. z. b. w.

Der Kegelschnitt, welcher die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ berührt, kann auch als bestimmt angesehen werden durch zwei beliebige Tripel $QQ'Q''$ und $SS'S''$, deren sechs Seiten ihn berühren; da nun die Gerade, welche die drei zu $QQ'Q''$ conjugirten Punkte $PP'P''$ enthält, denselben Kegelschnitt berührt, so muss auch diejenige Gerade, welche die zu $SS'S''$ conjugirten Punkte $RR'R''$ enthält, ihn berühren, und wir erkennen also, dass die acht Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite einen und denselben Kegelschnitt berühren. Dies giebt folgenden Satz:

Die Seiten zweier Tripel der Tripelcurve berühren einen Kegelschnitt, der auch diejenigen beiden Geraden zu Tangenten hat, welche die den Eckpunkten der Tripel conjugirten Punkte der Tripelcurve enthalten, so dass also die Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite, wie oben eines ($PQP'Q'P''Q''$) in Betracht gekommen ist, allemal acht Tangenten eines und desselben Kegelschnitts sind.

Von besonderem Interesse für die vorliegende Betrachtung ist es, die beiden willkürlichen Punkte SS' auf zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits anzunehmen: S auf der Diagonale PQ und S' auf der Diagonale $P'Q'$, dann muss auch der dritte Punkt S'' auf der Diagonale $P''Q''$ liegen. In der That, durch die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die Gerade SS' als Tangenten ist derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ bestimmt, welcher zugleich SS'' und $S'S''$ berührt. Das Diagonaldreieck des einem Kegelschnitt umschriebenen vollständigen Vierseits ist immer ein Tripel in Bezug auf diesen Kegelschnitt (S. 147); folglich bilden die drei Geraden PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ ein Tripel conjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; da nun SS' eine Tangente desselben ist, welche PQ in S trifft, so wird die andere durch S gehende Tangente der vierte harmonische dem SS' zugeordnete Strahl sein, während SP und der von S nach dem Schnittpunkte ($P'Q'$, $P''Q''$) hingehende Strahl das andere Paar zugeordneter Strahlen ist; in gleicher Weise construiren wir die zweite durch S' gehende Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$; diese Tangente, sowie die vorige müssen durch den vierten harmonischen Punkt auf $P''Q''$ gehen, welcher dem Schnittpunkte mit SS' zugeordnet ist, während die beiden andern zugeordneten die Punkte (PQ , $P''Q''$) und ($P'Q'$, $P''Q''$) sind; also ist dieser vierte harmonische Punkt der Schnittpunkt jener beiden Tangenten, d. h. der Punkt S'' . Wir haben mithin gesehen,

dass, wenn von den beiden willkürlich anzunehmenden Punkten SS' der eine S auf der Diagonale PQ und der andere S' auf $P'Q'$ liegt, dann der dritte S'' auf der dritten Diagonale $P''Q''$ des vollständigen Vierseits liegen muss.

Wählen wir nun, indem wir zu unserer Tripelcurve zurückkehren, auf welcher das vollständige Vierseit liegt, dessen drei Paar Gegenecken PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ drei Paare conjugirter Punkte der Tripelcurve sind, die beiden Punkte S und S' so, dass S der dritte Schnittpunkt der Geraden PQ mit der Tripelcurve und gleichzeitig S' der dritte Schnittpunkt von $P'Q'$ mit derselben wird, dann muss S'' auf der Geraden $P''Q''$ liegen und zugleich auf der Tripelcurve, weil $SS'S''$ ein Tripel der Tripelcurve bilden, folglich ist S'' der dritte Schnittpunkt der Geraden $P''Q''$ mit der Tripelcurve; wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Wenn man ein beliebiges Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ hat, so treffen die Seiten desselben $Q'Q''$, $Q''Q$, QQ' die Curve zum dritten Male in drei neuen Punkten $PP'P''$, welche die conjugirten Punkte der Tripelcurve zu den ersteren sind und in gerader Linie liegen; die drei Verbindungslinien PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ treffen aber die Tripelcurve in drei neuen Punkten $SS'S''$, welche ein neues Tripel der Tripelcurve bilden.

Da wir ferner wissen, dass die Tangenten in zwei conjugirten Punkten PQ an der Tripelcurve sich in einem dritten Punkte R derselben (dem Tangentialpunkte) treffen und die drei Punkte PQR ein Tripel der Tripelcurve bilden, so muss der conjugirte Punkt zu R der dritte Schnittpunkt S der Geraden PQ mit der Tripelcurve sein; die dritten Schnittpunkte der Tangenten in $PP'P''$ oder in $QQ'Q''$ mit der Tripelcurve sind also die drei Punkte $RR'R''$ und conjugirte Punkte zu den obigen Punkten $SS'S''$; da diese ein Tripel bilden, so müssen jene auf einer geraden Linie liegen; d. h.:

Die drei Tangenten der Tripelcurve in den drei Eckpunkten eines Tripels derselben treffen sie in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Schneidet eine beliebige Gerade die Tripelcurve in drei Punkten, und man zieht die Tangenten in denselben, so treffen sie die Tripelcurve in drei neuen Punkten, welche wieder auf einer Geraden liegen.

Diese Sätze gestatten ein eigenthümliches Fortschreiten in einem Cyklus, indem man einerseits von einer Geraden $PP'P''$ zu einer folgenden $RR'R''$ u. s. f. oder andererseits von einem Tripel $QQ'Q''$ zu einem folgenden $SS'S''$ und so weiter geht; die Frage, ob ein solcher Cyklus sich

schliesst oder bis ins Unendliche fortläuft, ist dabei von hohem Interesse, erfordert jedoch tiefer gehende Untersuchungen*).

Nehmen wir zwei beliebige Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$, $Q_1Q'_1Q''_1$ und ihre conjugirten Punkte $PP'P''$, $P_1P'_1P''_1$, so haben wir zwei vollständige Vierseite, die der Tripelcurve einbeschrieben sind, und deren acht Seiten, wie wir gesehen haben, einen und denselben Kegelschnitt berühren; bezeichnen wir diese acht Geraden:

$$\begin{array}{ll} Q'Q''P = \mathfrak{A} & Q'_1Q''_1P_1 = \mathfrak{A}_1 \\ Q''QP' = \mathfrak{B} & Q''_1Q'_1P'_1 = \mathfrak{B}_1 \\ QQ'P'' = \mathfrak{C} & Q_1Q'_1P''_1 = \mathfrak{C}_1 \\ PP'P'' = \mathfrak{D} & P_1P'_1P''_1 = \mathfrak{D}_1. \end{array}$$

Zugleich haben wir acht Tripel der Tripelcurve, nämlich:

$$\begin{array}{ll} P'P''Q & \text{und} & P'_1P''_1Q_1 \\ P''PQ' & & P''_1P_1Q'_1 \\ P'P'Q'' & & P'_1P'_1Q''_1 \\ QQ'Q'' & & Q_1Q'_1Q''_1. \end{array}$$

Da irgend zwei Tripel der Tripelcurve immer sechs Punkte eines Kegelschnitts sind, also auch die Seiten zweier Tripeldreiecke immer sechs Tangenten eines Kegelschnitts sind, so haben wir ein *Brianchon'sches* Sechseit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{B}_1,$$

dessen Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden; diese sind:

$$PP_1 \quad P'P'_1 \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1).$$

Der Schnittpunkt:

$$(PP_1, P'P'_1)$$

liegt also in der Geraden $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$; andererseits haben wir das *Brianchon'sche* Sechseit:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1,$$

dessen Hauptdiagonalen:

$$QQ_1 \quad Q'Q'_1 \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$$

sich ebenfalls in einem Punkte treffen, also liegt auch der Schnittpunkt:

$$(QQ_1, Q'Q'_1) \text{ in der Geraden } (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1);$$

folglich ist die Verbindungslinie:

$$[(PP_1, P'P'_1), (QQ_1, Q'Q'_1)]$$

identisch mit der Geraden $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$.

*) Vergl. *Steiner*, geometrische Lehrsätze, *Crelle's Journal* Bd. XXXII. S. 182 und 300.

In gleicher Weise zeigen die beiden *Brianchon'schen* Sechsstseite:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1 \text{ und } \mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,$$

dass die Verbindungslinie:

$$[(P'P_1, P''P_1), (Q'Q_1, Q''Q_1)]$$

identisch mit der Geraden $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1)$ ist, und endlich die beiden *Brianchon'schen* Sechsstseite:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1 \text{ und } \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,$$

dass die Verbindungslinie:

$$[(P''P_1, PP_1), (Q''Q_1, QQ_1)]$$

identisch mit der Geraden $(\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1)$ ist. Aus dem *Brianchon'schen* Sechsstseit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$$

folgt aber, dass die drei Hauptdiagonalen:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1) \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1)$$

sich in einem Punkte treffen, also auch die mit ihnen identischen durch die $PP'P''$ und $QQ'Q''$ ausgedrückten Geraden; sehen wir die letzteren an, so erkennen wir, dass es die Verbindungslinien correspondirender Ecken zweier Dreiseite sind, gebildet von den Geraden

$$\begin{array}{lll} \text{einerseits} & PP_1 & P'P'_1 \quad P''P''_1 \\ \text{und andererseits} & QQ_1 & Q'Q'_1 \quad Q''Q''_1; \end{array}$$

folglich müssen die correspondirenden Seiten selbst sich in drei Punkten treffen, die auf einer Geraden liegen (S. 26), d. h. die drei Schnittpunkte:

$$(PP_1, QQ_1) \quad (P'P'_1, Q'Q'_1) \quad (P''P''_1, Q''Q''_1)$$

liegen auf einer Geraden; diese drei Punkte:

$$P_2 \qquad P'_2 \qquad P''_2$$

sind nach dem Früheren nichts anderes, als die dritten Schnittpunkte der Geraden $PP_1, P'P'_1, P''P''_1$ mit der Tripelcurve; also haben wir den Satz:

Schneidet irgend eine Gerade die Tripelcurve in den drei Punkten $PP'P''$ und eine zweite Gerade in $P_1P'_1P''_1$, so treffen die drei Geraden $PP_1, P'P'_1, P''P''_1$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten $P_2P'_2P''_2$, welche wiederum auf einer Geraden liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz willkürlich und giebt zu weiteren Betrachtungen Anlass.)

Oder:

Hat man irgend zwei Tripel der Tripelcurve $QQ'Q''$ und $Q_1Q'_1Q''_1$ (die allemal auf einem Kegelschnitt liegen), so treffen die drei Verbindungslinien $QQ_1, Q'Q'_1, Q''Q''_1$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten, die alle-

mal auf einer Geraden liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.) Da die drei Punkte:

$$P_2 = (PP_1, QQ_1) \quad P'_2 = (P'P'_1, Q'Q'_1) \quad P''_2 = (P''P''_1, Q''Q''_1)$$

auf einer Geraden liegen, so müssen ihre conjugirten:

$$Q_2 = (PQ_1, QP_1) \quad Q'_2 = (P'Q'_1, Q'P'_1) \quad Q''_2 = (P''Q''_1, Q''P''_1)$$

ein Tripel bilden, also:

Hat man irgend ein Tripel $QQ'Q''$ der Tripelcurve und eine beliebige Gerade, welche derselben in den Punkten $P_1P'_1P''_1$ begegnet, so treffen die drei Verbindungslinien $QP_1, Q'P'_1, Q''P''_1$ die Tripelcurve in drei neuen Punkten $Q_2Q'_2Q''_2$, welche allemal ein Tripel der Tripelcurve bilden. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.)

Aus den verschiedenen Zuordnungen, welche hierbei möglich sind, werden sich neue Beziehungen ergeben, deren Aufsuchung hier zu weit führen würde. Der vorige Satz lässt aber noch einige andere Folgerungen zu, die wir kurz hervorheben wollen.

Da von den Schnittpunkten zweier Geraden $PP'P''$ und $P_1P'_1P''_1$ mit der Tripelcurve die Verbindungslinien $PP_1, P'P'_1$ und $P''P''_1$ der Curve in drei neuen Punkten $P_2P'_2P''_2$ begegnen, welche wieder auf einer Geraden liegen, so werden auch die Verbindungslinien $PP'_1, P'P'_1$ und $P''P''_1$ in drei Punkten $R_2R'_2R''_2$ der Tripelcurve begegnen, die auf einer Geraden liegen, oder anders ausgesprochen:

Durch vier Punkte $PP'P'_1P''_1$ einer Tripelcurve lassen sich drei Linienpaare legen; jedes derselben begegnet der Curve in einem neuen Punktpaar, dessen Sehne man ziehe; diese drei Sehnen laufen durch einen und denselben Punkt P''_2 der Tripelcurve. Wir können die drei Linienpaare, welche durch vier beliebig auf der Tripelcurve gewählte Punkte gelegt sind, als drei Individuen eines Kegelschnittbüschels $[PP'P'_1P''_1]$ auffassen und die drei zugehörigen Durchbohrungssehnen als drei Individuen eines Strahlbüschels $[P''_2]$; die Elemente dieser beiden Gebilde können wir eindeutig auf einander beziehen, wozu die drei bekannten Paare entsprechender Elemente ausreichend und erforderlich sind. Dann wird sich zu jedem Kegelschnitt des Büschels ein bestimmter entsprechender Strahl des Strahlbüschels construiren lassen (S. 225) und umgekehrt, und der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente dieser beiden Gebilde ist eine allgemeine Curve dritten Grades. Da dieselbe mit der Tripelcurve bereits 11 Punkte gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz mit ihr zusammen. Umgekehrt schliessen wir hieraus den Satz:

Jeder durch vier Punkte $PP'P'_1P''_1$ einer Tripelcurve gelegte Kegel-

schnitt begegnet derselben im Allgemeinen in zwei neuen Punkten, deren Sehne durch einen und denselben festen Punkt P_2'' der Curve hindurchgeht.

Oder:

Liegen irgend sechs Punkte $PP'P_1P_1'P_2P_2'$ einer Curve dritten Grades auf einem Kegelschnitt, so schneiden drei sie verbindende Sehnen PP', P_1P_1', P_2P_2' dieselbe in drei neuen Punkten einer Geraden. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.) Oder auch umgekehrt:

Zieht man durch jeden von drei in einer Geraden befindlichen Punkten einer Tripelcurve je einen Strahl, welcher derselben in zwei neuen Punkten begegnet, so liegen diese sechs neuen Punkte auf einem Kegelschnitt.

Da endlich der durch die vier Punkte $PP'P_1P_1'$ der Tripelcurve gelegte Kegelschnitt eine Sehne P_2P_2' auf ihr ausschneidet, welche immer durch denselben festen Punkt P_2'' läuft, und da die zu P_2 und P_2' conjugirten Punkte Q_2Q_2' nach dem Obigen auch eine Sehne Q_2Q_2' geben, welche durch P_2'' läuft, so liegen auch $PP'P_1P_1'Q_2Q_2'$ auf einem Kegelschnitt; aus demselben Grunde aber auch $PP'Q_1Q_1'Q_2Q_2'$ und endlich auch $QQ'Q_1Q_1'Q_2Q_2'$; wir erhalten also folgenden Satz:

Liegen irgend sechs Punkte der Tripelcurve auf einem Kegelschnitt, so liegen auch die sechs conjugirten Punkte auf einem Kegelschnitt.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung des Kegelschnitt-Netzes zurück.

Um die Totalität sämmtlicher Kegelschnitte, welche in einem Netze enthalten sind und sich zu Büscheln ordnen, in anschaulicher Weise zu übersehen, denken wir uns, indem wir von den drei willkürlich angenommenen Kegelschnitten ABC , welche nicht einem Büschel angehören, ausgehen, zunächst ein Büschel (B, C) aus den beiden Kegelschnitten B und C hergestellt und verfolgen einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher das ganze Büschel (B, C) durchläuft; der dritte feste Kegelschnitt A und der veränderliche $\mathfrak{A}$ constituiren nun ein veränderliches Büschel $(A, \mathfrak{A})$, und alle Kegelschnitte desselben bilden die Gesamtheit der Kegelschnitte des Netzes, d. h. wenn wir an Stelle von ABC drei beliebige andere Kegelschnitte des Netzes, welche nicht demselben Büschel angehören, in der angegebenen Weise zur Bildung des Netzes verwenden, so treten keine neuen Kegelschnitte mehr auf, sondern nur die früheren, aber *in anderer Anordnung zu Büscheln vereinigt*. Nehmen wir nämlich zunächst aus dem Büschel (C, A) einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ und bilden das veränderliche Büschel $(B, \mathfrak{B})$, so wird jeder Kegelschnitt X desselben gleichzeitig in einem der vorigen Büschel $(A, \mathfrak{A})$ enthalten sein und umgekehrt; denn weil $B\mathfrak{B}X$ einem Büschel angehören und $C\mathfrak{B}A$ einem andern, so wird nach dem oben (S. 506) bewiesenen Satze ein Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existiren müssen, welcher gleichzeitig dem Büschel (B, C)

und dem Büschel (A, X) angehört, d. h. die Grundpunkte dieser beiden Büschel müssen auf einem und demselben Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ liegen; folglich gehört X einem Büschel $(A, \mathfrak{A})$ an, bei welchem $\mathfrak{A}$ aus dem Büschel (B, C) genommen ist; also jeder Kegelschnitt aus dem veränderlichen Büschel $(B, \mathfrak{B})$ ist gleichzeitig unter den aus dem veränderlichen Büschel $(A, \mathfrak{A})$ hervorgehenden Kegelschnitten enthalten und umgekehrt. Es gehen daher dieselben Kegelschnitte des Netzes hervor, ob wir (B, C) und A , oder (C, A) und B , oder endlich auch (A, B) und C in der angegebenen Weise zur Bildung des Netzes verwenden. Nehmen wir ferner einen beliebigen Kegelschnitt D aus einem der unendlich-vielen Büschel $(A, \mathfrak{A})$ heraus, z. B. aus dem Büschel $(A, \mathfrak{A}_0)$, so liegen einmal $DA\mathfrak{A}_0$ in einem Büschel, zweitens $B\mathfrak{A}_0$ in einem Büschel, folglich haben die Büschel (D, B) und $(A, \mathfrak{A})$ einen Kegelschnitt gemein; dieser bestimmt mit A das veränderliche Büschel $(A, \mathfrak{A})$ und kann also jedesmal auch aus dem Büschel (B, D) genommen werden, d. h. verwenden wir (B, D) und A zur Bildung des Netzes, so erhalten wir dieselben Kegelschnitte, als wenn wir (B, C) und A in gleicher Weise dazu verwenden; hieraus folgt weiter, dass auch (B, A) und D dieselben Kegelschnitte des Netzes liefern, folglich auch (B, E) und D und endlich auch (D, E) und F , wenn DEF irgend drei nicht demselben Büschel angehörige Kegelschnitte bezeichnen, welche aus der Gesamtheit $(A, \mathfrak{A})$ entnommen sind. Aus dem Vorigen ergibt sich unmittelbar, dass *durch einen willkürlich angenommenen Punkt p der Ebene unendlich-viele Kegelschnitte des Netzes gehen, welche ein Büschel bilden*, denn man braucht nur durch p den einzigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{A}_0$ zu legen, welcher dem Büschel (B, C) angehört, und den einzigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{B}_0$, welcher dem Büschel (C, A) angehört; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0$ bestimmen ein Büschel, welches sämtliche Kegelschnitte des Netzes enthält, die durch p gehen. Bestimmen wir noch den Kegelschnitt $\mathfrak{C}_0$, welcher durch p geht und dem Büschel (A, B) angehört, so gehört er, wie wir oben gesehen haben, gleichzeitig dem Büschel $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ an. Ferner folgt hieraus, dass *durch zwei willkürlich in der Ebene angenommene Punkte p und p_1 nur ein einziger bestimmter Kegelschnitt des Netzes hindurchgeht*, denn es giebt in dem vorhin bestimmten Büschel $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ nur einen einzigen bestimmten Kegelschnitt, welcher durch den gegebenen Punkt p_1 geht. Das Kegelschnittnetz ist also ein Gebilde von doppelter Mannigfaltigkeit, weil jeder Kegelschnitt desselben zwei Willkürlichkeiten enthält.

Die vorige Bemerkung giebt zugleich Aufschluss über die besondere Natur der in einem Netze enthaltenen Kegelschnitte. Es

giebt nämlich *unendlich-viele gleichseitige Hyperbeln* in dem Netze, welche ein besonderes Büschel des Netzes bilden; nehmen wir die beiden obigen Punkte pp_1 im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen an, so geht durch sie eine bestimmte gleichseitige Hyperbel des Netzes; nehmen wir ein zweites Paar unendlich-entfernter Punkte pp_1 in zwei rechtwinkligen Richtungen an, so bestimmt dasselbe eine zweite gleichseitige Hyperbel; diese beiden bestimmen ein ganzes Büschel von gleichseitigen Hyperbeln (S. 232), welche dem Netze angehören; weiter giebt es im Allgemeinen keine gleichseitige Hyperbel in dem Netze; denn käme noch eine dritte vor, welche nicht dem vorigen Büschel angehörte, so würde sie mit jeder der früheren ein neues Büschel von lauter gleichseitigen Hyperbeln erzeugen und es müssten daher alle Kegelschnitte des Netzes gleichseitige Hyperbeln sein; sind daher die Kegelschnitte ABC , welche wir als gegeben ansehen, nicht alle drei gleichseitige Hyperbeln, so giebt es in dem Netze nur ein einziges bestimmtes Büschel gleichseitiger Hyperbeln; wenn aber die drei gegebenen Kegelschnitte ABC selbst gleichseitige Hyperbeln sind, so besteht *das Netz aus lauter gleichseitigen Hyperbeln* und hat daher einen speciellen Charakter. Unter den Kegelschnitten des Netzes giebt es ferner im Allgemeinen unendlich-viele *Parabeln*; lassen wir nämlich die willkürlich anzunehmenden Punkte pp_1 in einen Punkt der unendlich-entfernten Geraden $\mathcal{G}_\infty$ zusammenfallen, so wird der durch jene bestimmte Kegelschnitt des Netzes eine Parabel, weil er $\mathcal{G}_\infty$ berührt. Jeder Punkt von $\mathcal{G}_\infty$ ist also der Mittelpunkt einer bestimmten dem Netze angehörigen Parabel, welche nach dem Obigen leicht herzustellen ist. Denken wir uns zwei solche Parabeln des Netzes construirt, deren unendlich-entfernte Punkte p, π in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so bestimmen dieselben ein Büschel des Netzes, in welchem nothwendig ein Kreis vorkommen muss, d. h. die vier Schnittpunkte dieser beiden Parabeln liegen auf einem Kreise (S. 229); dies ist im Allgemeinen *der einzige Kreis* unter den Kegelschnitten des Netzes; denn construiren wir ein anderes Paar Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte p' und π' ebenfalls in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so müssen ihre Schnittpunkte auf demselben Kreise liegen; seien nämlich P und Π die beiden ersten, P' und Π' die beiden andern Parabeln, so können wir $P\Pi P'$ für die drei ursprünglichen das Netz erzeugenden Kegelschnitte ABC setzen; in dem Büschel (P, Π) ist der Kreis $\mathfrak{K}$ enthalten; $\mathfrak{K}$ und P' bestimmen ein zweites Büschel des Netzes, in welchem nothwendig noch eine Parabel ausser P' enthalten sein muss, welche ihren unendlich-entfernten Punkt in einer rechtwinkligen Richtung zu

derjenigen des unendlich-entfernten Punktes von P' hat; ist p' der letztere und π' der erstere, so giebt es durch π' nur eine einzige Parabel des Netzes II' , welche die eben genannte ist; daher haben auch umgekehrt die beiden Parabeln $P'II'$ ihre Schnittpunkte auf dem Kreise $\mathfrak{K}$, d. h. $\mathfrak{K}$ ist gemeinschaftlich den beiden Büscheln (P, II) und (P', II') .

Endlich kommen unter den Kegelschnitten des Netzes auch *Linienpaare* in unendlicher Menge vor; jedes Büschel enthält im Allgemeinen drei Linienpaare, von denen eines immer reell ist. Der von allen diesen Geraden umhüllte Ort ist eine bestimmte *Curve dritter Klasse* $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche mit der Tripelcurve in innigem Zusammenhange steht. Da nämlich durch einen beliebigen Punkt p der Ebene nur einfach unendlich-viele Kegelschnitte des Netzes gehen, welche ein Büschel $(\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0)$ bilden, so gehen durch den Punkt p im Allgemeinen nur drei gerade Linien, welche Theile von Linienpaaren sind, die, als Kegelschnitte betrachtet, dem Netze angehören; also ist der Ort von diesen Geraden eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Vermöge der obigen Erzeugung des Netzes können wir die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ in der Weise construiren, dass wir einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ das Büschel (B, C) durchlaufen lassen und für die beiden Kegelschnitte A und $\mathfrak{A}$ jedesmal die sechs gemeinschaftlichen Secanten ermitteln, welche den gesuchten Ort $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen.

Dieses Resultat lässt sich in Form eines Satzes aussprechen, der zu vielen interessanten speciellen Fällen Veranlassung bietet:

Drei beliebige Kegelschnitte haben zu zweien zusammengefasst dreimal je sechs gemeinschaftliche Secanten; diese achtzehn Geraden sind Tangenten einer und derselben Curve dritter Klasse.

Zu der Tripelcurve hat die gefundene Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ eine besondere leicht erkennbare Beziehung; eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte des Netzes hat nämlich die Eigenschaft, dass die beiden Punktsysteme, welche ihr in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, identisch sind (S. 480); nehmen wir nun irgend einen dritten Kegelschnitt des Netzes, welcher nicht mit den beiden vorigen demselben Büschel angehört, so gehört in Bezug auf ihn jener Geraden ein zweites Punktsystem zu, und die beiden auf einander liegenden Punktsysteme haben im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte P, Q . Da dies conjugirte Punkte für drei Kegelschnitte des Netzes sind, welche nicht demselben Büschel angehören, so sind es conjugirte Punkte für sämtliche Kegelschnitte des Netzes, also ein Paar conjugirter Punkte der Tripelcurve; eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte des Netzes ist mithin allemal die Verbin-

dungslinie zweier conjugirten Punkte P, Q der Tripelcurve und auch umgekehrt; denn ziehen wir die Verbindungslinie irgend eines Paares conjugirter Punkte der Tripelcurve P, Q und nehmen einen beliebigen Punkt p derselben, so geht durch p ein einziger bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ aus dem Büschel (B, C) und ein einziger bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ aus dem Büschel (C, A) ; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ müssen PQ ausser in p in einem und demselben Punkte π treffen, welcher der vierte harmonische, dem p zugeordnete ist, während P und Q die beiden andern zugeordneten Punkte sind; folglich ist PQ eine gemeinschaftliche Secante der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Netzes. Wir haben also folgenden Satz:

Die Verbindungslinien sämmtlicher Paare conjugirter Punkte PQ der Tripelcurve umhüllen eine Curve dritter Klasse, welche identisch ist mit derjenigen, die von sämmtlichen Linienpaaren, welche unter den Kegelschnitten des Netzes auftreten, berührt wird.

Aus dieser Construction der durch den beliebig gewählten Punkt p gehenden drei Strahlen, welche Paare conjugirter Punkte PQ verbinden oder der drei Tangenten aus p an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$, folgt noch ein anderer Satz: Die beiden durch p gelegten Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Netzes bestimmen ein ganzes Kegelschnittbüschel, welches dem Netze angehört, und die drei Linienpaare desselben, von denen drei Gerade durch p gehen, kreuzen sich in einem Tripel des Büschels, welches auch ein Tripel der Tripelcurve ist. Also:

Solche drei Verbindungsstrahlen conjugirter Punkte PQ , welche durch einen gegebenen Punkt p der Ebene gehen, d. h. die drei aus p an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ gelegten Tangenten, treffen die Tripelcurve noch in drei neuen Punkten, welche ein Tripel derselben bilden.

Die Verbindungslinie PQ zweier conjugirter Punkte der Tripelcurve schneidet im Allgemeinen jeden Kegelschnitt des Netzes in zwei Punkten, welche harmonisch liegen mit P, Q und zugeordnet sind, also immer in Punktpaaren eines und desselben Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte PQ sind. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Eine Gerade von solcher Beschaffenheit, dass sie drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte ABC in drei Punktpaaren eines Punktsystems (sechs Punkten einer Involution) trifft, umhüllt eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{R}^{(3)}$, welche zugleich die achtzehn gemeinschaftlichen Secanten je zweier der gegebenen drei Kegelschnitte berührt. Die Asymptotenpunkte der Punktsysteme auf allen solchen Geraden liegen auf einer Curve dritten Grades (der Tripelcurve von den drei Kegelschnitten ABC).

Es ist leicht, den Berührungspunkt einer Geraden PQ mit der von ihr eingehüllten Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ zu ermitteln; denken wir uns ein der Tripelcurve einbeschriebenes vollständiges Vierseit, wie es früher in Betracht gezogen ist: $PQ P' Q' P'' Q''$, dessen drei Paar Gegenecken aus drei Paaren conjugirter Punkte der Tripelcurve bestehen, in der Weise verändert, dass wir ein Paar PQ festhalten und das zweite Paar $P' Q'$ ihm allmählich nähern, indem wir zuletzt P' mit P und also auch Q' mit Q zusammenfallen lassen, dann geht P'' in den Schnittpunkt der beiden Tangenten an der Tripelcurve in P und Q , und Q'' also in den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve über; es ist aber $Q'' = (PQ, P' Q)$; um nun den Schnittpunkt $(PQ, P' Q')$ für den Grenzfall des Zusammenfallens von P, Q mit $P' Q'$ zu ermitteln, haben wir nur die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks zu berücksichtigen und erkennen, dass der gesuchte Berührungspunkt der vierte harmonische, dem dritten Schnittpunkt Q'' zugeordnete Punkt sein wird; also: *Die veränderliche Verbindungslinie PQ zweier conjugirter Punkte der Tripelcurve berührt die von ihr eingehüllte Curve dritter Klasse in dem vierten harmonischen Punkt, welcher dem dritten Schnittpunkt von PQ mit der Tripelcurve zugeordnet ist, während P und Q das andere Paar harmonisch-zugeordneter Punkte sind.*

Dieser dritte Schnittpunkt Q'' der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve hat zu seinem conjugirten Punkte P'' den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt für die beiden conjugirten Punkte P und Q ; hieraus folgt die Construction der Tangente in einem beliebigen Punkte P der Tripelcurve: Man suche zu P den conjugirten Punkt Q , ferner den dritten Schnittpunkt Q'' der Verbindungslinie PQ mit der Tripelcurve, endlich den conjugirten Punkt P'' zu Q'' , dann ist PP'' die gesuchte Tangente.

Schneidet die Verbindungslinie PQ zweier conjugirten Punkte der Tripelcurve dieselbe in Q'' , so gehen durch Q'' ausser der Tangente PQ noch zwei andere Tangenten an die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ d. h. Strahlen, welche $C^{(3)}$ in je einem Paare conjugirter Punkte treffen. Werden diese vier Punkte mit P'' verbunden, so erhalten wir die Tangenten in ihnen an $C^{(3)}$. Da nun jedes dieser Punktpaare mit P'' zusammen ein Tripel der Tripelcurve bilden und zwei Tripel allemal auf einem Kegelschnitt liegen, so folgt der Satz:

Aus einem Punkte (P'') der Tripelcurve lassen sich ausser der Tangente in ihm selbst im Allgemeinen noch vier andere Tangenten an dieselbe legen; die vier Berührungspunkte liegen mit dem ursprünglichen

Punkte auf einem Kegelschnitt, welcher die Tripelcurve in dem letzteren berührt.

Dies ist nur ein Theil des oben (S. 508) allgemein ausgesprochenen Satzes über den Polarkegelschnitt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Tripelcurve $C^{(3)}$ und die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ sich in denjenigen Punkten, in welchen sie sich treffen, auch berühren, d. h. dieselben Tangenten haben, oder anders ausgedrückt, dass die sämtlichen Schnittpunkte beider Curven paarweise zusammenfallen. Denn sei Q ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$, und denken wir uns die Tangente in Q an der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ gezogen, so muss von ihren beiden übrigen Schnittpunkten mit der Tripelcurve, die P und P' heissen mögen, einer der conjugirte Punkt P zu Q sein, weil $\mathfrak{R}^{(3)}$ der von sämtlichen Verbindungslinien PQ umhüllte Ort ist, und der andere P' muss mit Q zusammenfallen, weil Q der Berührungspunkt mit $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist, also der vierte harmonische Punkt zu PQP' ; da nun dieser mit Q zusammenfällt, so muss auch P' in Q hineinfallen (S. 14); der übrigens noch denkbare Fall, dass P und P' conjugirte Punkte der Tripelcurve sein könnten, zeigt sich als unzulässig; denn da Q der Berührungspunkt mit $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist, so müsste sein zugeordneter vierter harmonischer Punkt zu PP' der dritte Schnittpunkt mit der Tripelcurve sein, also wiederum Q ; wenn aber von vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete zusammenfallen, so muss auch von dem andern Paare zugeordnete Punkte einer hineinfallen; fiel der vierte harmonische Punkt aber nicht auf Q , so hätte die Gerade vier Schnittpunkte mit der Tripelcurve, was unmöglich ist; folglich muss P oder P' mit Q zusammenfallen, wie oben behauptet ist. Ein solcher Schnittpunkt Q_0 der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ besitzt also die Eigenthümlichkeit, dass die Tangente in ihm für beide Curven dieselbe ist; diese Tangente schneidet die Tripelcurve $C^{(3)}$ zum dritten Mal in dem Punkte P_0 , welcher der conjugirte zu Q_0 ist. Nun ist früher bewiesen worden, dass die Tangente in P_0 die Tripelcurve $C^{(3)}$ zum dritten Male in demjenigen Punkte schneidet, der conjugirt ist dem dritten Schnittpunkte von P_0Q_0 mit $C^{(3)}$; da dieser aber Q_0 selbst ist, so ist sein conjugirter wieder P_0 , d. h. die Tangente in P_0 schneidet die Tripelcurve $C^{(3)}$ in drei zusammenfallenden Punkten; sie ist daher eine *Wendetangente* und ihr Berührungspunkt P_0 ein *Wendepunkt* der Tripelcurve. Die weitere Ausführung dieser Betrachtung lässt die Anzahl und gegenseitige Lage der Wendepunkte einer Curve dritten Grades $C^{(3)}$ erkennen:

Ist Q_0 ein Schnittpunkt der Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$, in welchem sich dieselben, wie wir gesehen haben, berühren, so trifft die Tangente

in Q_0 die Curve $C^{(3)}$ zum dritten Mal in P_0 , dem conjugirten Punkte zu Q_0 , und P_0 ist ein Wendepunkt der Curve $C^{(3)}$; sei ferner Q'_0 ein zweiter Schnittpunkt beider Curven und sein conjugirter P'_0 , ein zweiter Wendepunkt, dann folgt aus den beiden Paaren conjugirter Punkte $P_0 Q_0 P'_0 Q'_0$ ein drittes Paar:

$$(Q_0 Q'_0, P_0 P'_0) = P''_0 \quad (Q_0 P'_0, P_0 Q'_0) = Q''_0,$$

und $P''_0 Q''_0$ liegen auf der Curve $C^{(3)}$, während ihre Verbindungslinie die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ berührt. Ferner wissen wir, dass $Q_0 Q'_0 Q''_0$ ein Tripel der Triplecurve bilden und die Tangenten in diesen Punkten der Curve $C^{(3)}$ in drei neuen Punkten begegnen müssen, welche auf einer Geraden liegen; da aber die Tangente in Q_0 die $C^{(3)}$ in P_0 und die Tangente in Q'_0 die $C^{(3)}$ in P'_0 trifft, und da $P_0 P'_0 P''_0$ in einer Geraden liegen, so muss auch die Tangente in Q''_0 der $C^{(3)}$ in P''_0 begegnen. Von den drei Schnittpunkten der Verbindungslinie $P''_0 Q''_0$ mit der Curve $C^{(3)}$ fallen also zwei in Q''_0 zusammen; der Berührungspunkt des Strahles $P''_0 Q''_0$ mit der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ muss daher auch nach Q''_0 fallen, oder Q''_0 muss ein dritter Schnittpunkt der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ sein, folglich P''_0 ein dritter Wendepunkt der Curve $C^{(3)}$; wir haben daher folgende beiden Sätze:

Die Verbindungslinie zweier Wendepunkte der Tripelcurve trifft dieselbe allemal in einem dritten Wendepunkt, oder: Die Wendepunkte einer Curve dritten Grades liegen zu je dreien auf geraden Linien; und zweitens:

Aus zwei Schnittpunkten der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ kann man allemal einen dritten ableiten, indem man sie als Eckpunkte eines Tripels ansieht und den zugehörigen dritten Tripelpunkt construirt, wie oben angegeben ist.

Die Anzahl der Wendepunkte ist gleich der Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte der beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$; da letztere von der dritten Klasse ist, so ist sie allgemein vom sechsten Grade, schneidet also $C^{(3)}$ in $6 \cdot 3 = 18$ Punkten, die paarweise zusammenfallen. *Die Curve dritten Grades hat also neun Wendepunkte.*

Die Lage der Wendepunkte tritt am klarsten hervor aus einer Bemerkung von Clebsch*): Da die Wendepunkte zu je dreien auf geraden Linien liegen, so wird, wenn wir einen Wendepunkt herausnehmen und ihn mit vier anderen verbinden, jede dieser Verbindungslinien noch einen der übrigen vier Wendepunkte enthalten müssen, d. h.: *Durch jeden Wendepunkt gehen vier gerade Linien, deren jede drei Wendepunkte enthält.* Hiernach scheint es, als ob sich $9 \cdot 4 = 36$

*) Crelle-Borchardt's Journal Bd. LXIII S. 120. A. Clebsch: „Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung.“

Gerade durch je drei der Wendepunkte legen liessen. Diese reduciren sich aber auf zwölf, weil jede solche Gerade dreimal auftritt, je nachdem man von einem ihrer drei Wendepunkte ausgeht. Also *die neun Wendepunkte liegen zu je dreien auf zwölf geraden Linien.*

Nehmen wir nun drei Wendepunkte, welche in gerader Linie liegen, heraus, so gehen von den zwölf Geraden, die überhaupt vorhanden sind, durch die Wendepunkte der ersten Geraden nur zehn, nämlich durch jeden derselben die erste Gerade selbst und noch drei andere, d. h. $1 + 3 \cdot 3 = 10$; es bleiben also noch 2 Gerade übrig, die durch keinen der drei ersten Wendepunkte gehen. Nehmen wir von den letzteren eine, so gehen durch ihre drei Wendepunkte und die drei Wendepunkte der ersten Geraden nur elf von den sämtlichen zwölf; nämlich ausser den beiden Geraden selbst nur die neun Verbindungslinien je eines Wendepunktes der ersten mit einem Wendepunkte der zweiten Geraden; es bleibt mithin als zwölfte Gerade noch eine solche übrig, welche die drei letzten Wendepunkte enthält, die auf keiner der beiden ersten Geraden liegen. So erhalten wir ein *Wendepunktsdreiseit*, von dem jede Seite drei verschiedene, also die drei Seiten sämtliche neun Wendepunkte enthalten. Solcher Wendepunktsdreiseite giebt es *vier*, und sie werden erhalten, indem man der Reihe nach mit denjenigen vier Geraden beginnt, die sich in einem Wendepunkte treffen. Bezeichnen wir die drei Wendepunkte auf der ersten Geraden

$$a_1^1 \quad a_1^2 \quad a_1^3,$$

auf der zweiten

$$a_2^1 \quad a_2^2 \quad a_2^3,$$

so liegen die drei übrigen Wendepunkte auf der dritten

$$a_3^1 \quad a_3^2 \quad a_3^3;$$

ziehen wir jetzt $a_1^1 a_2^1$, so geht diese Verbindungslinie durch einen der drei letzten Wendepunkte, den wir mit a_3^1 bezeichnen, so dass

$$a_1^1 \quad a_2^1 \quad a_3^1$$

auf einer Geraden liegen; ziehen wir ferner $a_1^1 a_2^2$, so geht diese Verbindungslinie durch einen der beiden übrigen Wendepunkte auf der dritten Geraden; bezeichnen wir denselben mit a_3^2 , dann kann die Verbindungslinie $a_1^1 a_2^2$ nur noch durch a_3^2 gehen. Jetzt ziehen wir $a_2^1 a_2^2$, welche Gerade durch einen der drei letzten Wendepunkte gehen muss; dies kann aber nur a_3^3 sein, denn wäre es einer der beiden andern, so lägen vier Wendepunkte in einer Geraden, was unmöglich ist; fahren wir so fort, so ergeben sich die zwölf Geraden, auf welchen die neun Wendepunkte liegen, folgendermassen:

$$\begin{array}{cccc}
 a_1^1 a_2^2 a_3^3 & a_1^1 a_2^1 a_3^1 & a_1^1 a_2^2 a_3^3 & a_1^1 a_2^3 a_3^2 \\
 a_2^1 a_2^2 a_2^3 & a_1^2 a_2^2 a_3^2 & a_2^2 a_3^2 a_3^1 & a_2^1 a_2^1 a_3^3 \\
 a_3^1 a_2^3 a_3^3 & a_1^3 a_2^3 a_3^3 & a_1^3 a_2^1 a_3^2 & a_1^3 a_2^2 a_3^1 .
 \end{array}$$

Dies sind zugleich die zwölf Geraden, auf denen die neun Wendepunkte liegen und die vier Wendepunktsdreiseite, deren jedes auf seinen Seiten sämtliche neun Wendepunkte enthält.

Diese Lagenverhältnisse führen auf den Zusammenhang der Wendepunkte einer Curve 3. Ordnung mit äquianharmonischen Systemen und geben dadurch Aufschluss über die Realität der Wendepunkte. Denken wir uns von dem ersten der vier Wendepunktsdreiseite die Seite, welche die drei Wendepunkte $a_1^1 a_2^2 a_3^3$ und die beiden Ecken $A_{12} A_{13}$ des Dreiseits enthält, dessen dritte Ecke A_{23} sei, successive von den Punkten a_2^1, a_2^2, a_2^3 aus, welche auf der zweiten Dreiecksseite liegen, perspectivisch projecirt auf die dritte Dreiecksseite $A_{13} A_{23}$, so erhalten wir nach dem obigen Schema:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{von } a_2^1 \text{ aus die Punkte:} & a_3^1 a_3^3 a_3^2 A_{23} A_{13}, \\
 - a_2^2 - - - - & : a_3^2 a_3^2 a_3^1 A_{23} A_{13}, \\
 - a_2^3 - - - - & : a_3^3 a_3^1 a_3^3 A_{23} A_{13},
 \end{array}$$

und hieraus folgt, dass auf der Seite $A_{23} A_{13}$ des Wendepunktsdreiseits die fünf Punkte $a_3^1 a_3^2 a_3^3 A_{13} A_{23}$ ein äquianharmonisches System bilden, von dem die drei Wendepunkte die cyklisch-vertauschbaren, die beiden Ecken des Dreiseits die Doppelemente sind. Da dies offenbar für jede Seite jedes der vier Wendepunktsdreiseite gilt, so haben wir den Satz:

Auf jeder Seite eines Wendepunktsdreiseits bilden die drei Wendepunkte und die beiden Ecken des Dreiseits ein äquianharmonisches System, von welchem die drei Wendepunkte die cyklisch-vertauschbaren, die beiden Ecken des Dreiseits die Doppelemente sind.

Um nun über die Realität der Wendepunkte Aufschluss zu erlangen ist die genauere Kenntniss des äquianharmonischen Systems erforderlich, wie sie S. 63 und in den „Aufgaben und Sätzen“ zum ersten Abschnitt (Nr. 17) angedeutet ist. Bemerken wir zunächst, dass einer der Wendepunkte nothwendig reell sein muss, weil ihre Anzahl eine ungerade ist, und sei a_1^1 dieser reelle Wendepunkt, von dem wir ausgehen, dann können wir uns a_1^1 als den Mittelpunkt eines Büschels von fünf äquianharmonischen Strahlen denken, von denen einer der Doppelstrahlen eine durch a_1^1 gehende Wendepunktlinie, die cyklisch-vertauschbaren die drei übrigen Wendepunktlinien durch a_1^1 sind und der zweite Doppelstrahl der Verbindungsstrahl von a_1^1 mit der Gegenecke des Wendepunktsdreiseits ist, dessen eine Seite der erste Doppelstrahl war. Da von den drei cyklisch-vertauschbaren Ele-

menten eines äquianharmonischen Systems nothwendig eines reell sein muss, so muss wenigstens eine der Wendepunktslinien durch a_1^1 reell sein. Diese sei $a_1^1 a_1^2 a_1^3$, wobei die Realität der Punkte $a_1^2 a_1^3$ noch dahingestellt bleibt. Wählen wir aber diese reelle Gerade als eine Seite eines Wendepunktsdreiseits, so tritt sie in dem von a_1^1 ausgehenden Büschel als ein reeller Doppelstrahl des von a_1^1 ausgehenden äquianharmonischen Systems auf, folglich muss auch der andere Doppelstrahl $a_1^1 A_{23}$ reell sein und ausserdem eines der drei cyklisch-vertauschbaren Elemente; dies sei $a_1^1 a_2^1 a_3^1$, während die beiden andern Strahlen $a_1^1 a_2^2 a_3^2$ und $a_1^1 a_2^3 a_3^3$ nothwendig conjugirt-imaginär sein müssen; also von den vier durch einen reellen Wendepunkt gehenden Wendepunktslinien müssen zwei reell und zwei conjugirt-imaginär sein.

Da der imaginäre Strahl $a_1^1 a_2^2 a_3^3$ bereits einen reellen Punkt a_1^1 enthält, so müssen die beiden andern a_2^2 und a_3^3 conjugirt-imaginär sein; ebenso müssen a_2^3 und a_3^2 conjugirt-imaginär sein. Wir haben also vier imaginäre Wendepunkte $a_2^2 a_3^3 a_2^3 a_3^2$; fassen wir diese als die imaginären Durchschnittspunkte zweier reellen oder imaginären Kegelschnitte auf, welche ein Büschel bestimmen, so muss, wie wir aus dem Früheren (S. 473) wissen, das gemeinschaftliche Tripel desselben reell sein, d. h. die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken die vier imaginären Punkte sind, müssen reell sein, und von den drei Seitenpaaren des vollständigen Vierecks muss eines reell, die beiden andern imaginär sein. Es ist also der Schnittpunkt:

$$(a_2^2 a_2^3, a_3^2 a_3^3) = A_{23}$$

reell und ebenso

$$(a_2^2 a_3^2, a_2^3 a_3^3) = A_{00},$$

den wir mit A_{00} bezeichnen wollen; der dritte Diagonalpunkt ist

$$(a_2^2 a_3^3, a_2^3 a_3^2) = a_1^1.$$

Es können nun zwei Fälle eintreten: entweder ist das erste Linienpaar, dessen reeller Durchschnittspunkt A_{23} ist, reell, dann muss das zweite Linienpaar, dessen reeller Durchschnittspunkt A_{00} ist, conjugirt-imaginär sein, oder umgekehrt. Beide Fälle haben aber hinsichtlich der Realität der Wendepunkte denselben Effect. Ist das erste Linienpaar reell, so sind $A_{12} A_{13}$ reell, folglich $a_1^2 a_1^3$ conjugirt-imaginär und $a_2^1 a_3^1$ zwei reelle Wendepunkte, als die Durchschnittspunkte der reellen Geraden $a_1^1 a_2^1 a_3^1$ mit den beiden Geraden $A_{12} A_{23}$ und $A_{13} A_{23}$. Ist dagegen das zweite Linienpaar reell, so sind umgekehrt $a_1^2 a_1^3$ reell als die Durchschnittspunkte desselben mit der reellen Geraden $a_1^1 a_2^1 a_3^1$; dagegen $A_{12} A_{23}$ und $A_{13} A_{23}$ conjugirt-imaginär, und da sie bereits einen reellen Punkt A_{23} haben, so müssen ihre übrigen

Punkte imaginär sein, also sind a_2^1 und a_3^1 conjugirt-imaginär. In beiden Fällen haben wir also dasselbe Ergebniss:

Von den neun Wendepunkten einer $C^{(3)}$ sind drei in gerader Linie liegende reell, die übrigen sechs paarweise conjugirt-imaginär; diese sechs imaginären Wendepunkte liegen zu je dreien auf zwei imaginären Geraden, deren Durchschnittspunkt (A_{00}) allemal reell ist. Von den zwölf Wendepunktlinien sind vier reell und acht imaginär, nämlich reell: die Gerade, auf welcher die drei reellen Wendepunkte liegen, und die drei Seiten eines der vier Wendepunktsdreiecke ($A_{12}A_{13}A_{23}$), deren jede einen reellen und zwei conjugirt-imaginäre Wendepunkte enthält.

Die gemeinschaftlichen Punkte der Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$, in welchen sich dieselben berühren, führen in derselben Weise, wie zu den Wendepunkten der Curve $C^{(3)}$, so auch zu den Rückkehrtangente der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$. Wir haben oben (Seite 509) bewiesen, dass alle Strahlenpaare, welche einen beliebigen Punkt o der Tripelcurve mit Paaren conjugirter Punkte P, Q verbinden, ein Strahlensystem bilden, welches dem Punkte (o) zugehört. Die Asymptoten dieses Strahlensystems müssen zwei Tangenten von $\mathfrak{R}^{(3)}$ sein, welche durch o gehen; die dritte wird die Verbindungslinie des Punktes o mit seinem conjugirten Punkte sein; diese Verbindungslinie und die Tangente in o an $C^{(3)}$ werden ein besonderes Strahlenpaar desselben Strahlensystems sein, also harmonisch getrennt werden durch die beiden Asymptoten. Die Asymptoten des Strahlensystems wollen wir zwei *conjugirte* Tangenten der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ nennen; sie besitzen nämlich die Eigenschaft, dass ihre Berührungsschne auch eine Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist. Sind nämlich $P'Q'$ und $P''Q''$ die Paare conjugirter Punkte, welche auf den Asymptoten des Strahlensystems (o) liegen, so werden die Schnittpunkte ($P'Q'', P''Q'$) und ($P'P'', Q'Q''$) ebenfalls conjugirte Punkte des $C^{(3)}$ sein, und ihre Verbindungslinie geht durch die beiden vierten harmonischen Punkte auf den Strahlen $oP'Q'$ und $oP''Q''$; da diese die Berührungspunkte mit $\mathfrak{R}^{(3)}$ sind, so ist die Berührungsschne zweier conjugirter Tangenten von $\mathfrak{R}^{(3)}$ selbst eine Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$. Ebenso wie die Punkte der Curve $C^{(3)}$ sich in Paare conjugirter Punkte ordnen, deren Tangenten sich auf $C^{(3)}$ selbst schneiden, ordnen sich auch die Tangenten der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ in Paare conjugirter Tangenten, deren Berührungsschne selbst eine dritte Tangente ist. Wenn nun insbesondere P_0 und Q_0 ein solches Paar conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ mit dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkte R_0 sind, dass die Tangente in Q_0 durch P_0 geht, dann fällt auch R_0 nach P_0 , und P_0 ist ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ und die Tangente in ihm eine Wendetangente, weil sie drei zusammenfallende Punkte der Curve enthält. Wenn andererseits bei zwei conjugirten

Tangenten der $\mathfrak{R}^{(3)}$ die Berührungsschne mit einer derselben zusammenfällt, dann ist diese eine Rückkehrtangente der $\mathfrak{R}^{(3)}$ und ihr Berührungspunkt ein Rückkehrpunkt, weil für ihn drei Tangenten der $\mathfrak{R}^{(3)}$ zusammenfallen. Wenn nun Q_0 ein gemeinschaftlicher Punkt der Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist und wir ziehen in demselben die Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$, in welche von den drei im Allgemeinen aus Q_0 an $\mathfrak{R}^{(3)}$ zu legenden Tangenten zwei hineinfallen, so giebt es nur noch eine dritte Tangente durch Q_0 an $\mathfrak{R}^{(3)}$; diese sei $\mathfrak{T}_0$; sie enthält ein Paar conjugirter Punkte $P'Q'$, und der vierte harmonische, zu Q_0 zugeordnete sei r_0 , ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{R}^{(3)}$. Da nun Q_0 auch auf $C^{(3)}$ liegt, so wird, wenn P_0 sein conjugirter Punkt ist, P_0Q_0 eine Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$ sein; es giebt aber nur zwei Tangenten aus Q_0 an $\mathfrak{R}^{(3)}$, die eine ist $\mathfrak{T}_0$; sie kann P_0 nicht enthalten, denn sonst hätte sie vier Punkte mit $C^{(3)}$ gemein, was unmöglich ist. Die andere ist die Tangente in Q_0 an $\mathfrak{R}^{(3)}$; folglich muss diese P_0 enthalten; da Q_0P_0 die Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$ in Q_0 ist, so erhalten wir ihren dritten Schnittpunkt mit $C^{(3)}$, indem wir den vierten harmonischen Punkt aufsuchen, der dem Berührungspunkt zugeordnet ist. Da letzterer aber nach Q_0 fällt, so fällt auch der vierte harmonische Punkt in Q_0 hinein; der dritte Schnittpunkt von P_0Q_0 mit $C^{(3)}$ fällt also selbst nach Q_0 , d. h. P_0Q_0 berührt $C^{(3)}$ in Q_0 . Die Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ haben also in Q_0 dieselbe Tangente Q_0P_0 , wie es bereits oben gefunden ist. Da aber die Tangente in Q_0 an $C^{(3)}$ durch P_0 geht, so ist P_0 ein Wendepunkt der $C^{(3)}$. Da ferner die Tangente in Q_0 an $C^{(3)}$ und der Strahl Q_0P_0 zusammenfallen, so bilden sie eine Asymptote des Strahlensystems, welches dem Punkte Q_0 in Bezug auf die Curve $C^{(3)}$ zugehört; die andere Asymptote ist $\mathfrak{T}_0$. Diese beiden Asymptoten sind conjugirte Tangenten der $\mathfrak{R}^{(3)}$; ihre Berührungsschne ist Q_0r_0 , d. h. $\mathfrak{T}_0$ selbst, folglich ist $\mathfrak{T}_0$ eine Rückkehrtangente der $\mathfrak{R}^{(3)}$. Wir haben also folgendes Resultat:

Die beiden Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ haben in ihren gemeinschaftlichen Punkten dieselben Tangenten. Eine solche Tangente trifft $C^{(3)}$ nur noch in einem dritten Punkte, welcher ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ ist, und es lässt sich aus jenen gemeinschaftlichen Berührungspunkten beider Curven nur noch je eine dritte Tangente an $\mathfrak{R}^{(3)}$ legen, welche eine Rückkehrtangente derselben ist.

Wir brechen hier die allgemeine Betrachtung des Kegelschnittnetzes ab, da eine weitere Ausführung die dem Buche gesteckten Grenzen überschreiten und zu einer Theorie der Curven dritten Grades führen würde, hinsichtlich deren wir auf *L. Cremona's* *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Bologna 1862 und auf

die neuerdings publicirte Schrift von *H. Durège*: Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871, verweisen, wo auch die den Gegenstand betreffende Literatur in vollständigster Weise angeführt ist. Wir wollen nur noch auf einen besonderen Fall des Kegelschnittnetzes hinweisen, welcher zu vielen Beziehungen zwischen Kegelschnitten und, noch weiter specialisirt, zu bekannten Resultaten aus der Kreistheorie führt. Wenn nämlich die drei zur Bestimmung des Netzes erforderlichen Kegelschnitte ABC die besondere Lage haben, dass zwei (reelle oder imaginäre) Punkte ihnen gemeinschaftlich sind, d. h. wenn eine gemeinschaftliche Secante aller drei Kegelschnitte existirt, dann muss die Tripelcurve zerfallen in diese Gerade und einen Kegelschnitt; denn da der gemeinschaftlichen Secante dasselbe Punktsystem rücksichtlich aller drei Kegelschnitte zugehört, so ist jedes Paar conjugirter Punkte desselben ein Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve; dieser gehört also die ganze Gerade an, und der übrige Theil kann nur noch ein Kegelschnitt sein; letzterer geht auch durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte der drei Kegelschnitte ABC , d. h. hat dasselbe Punktsystem auf der gemeinschaftlichen Secante von ABC zu seinem zugehörigen, weil die Asymptotenpunkte desselben als ein besonderes zusammenfallendes Paar conjugirter Punkte P, Q der Tripelcurve anzusehen, also die beiden Doppelpunkte derselben sind. Jeder dieser Punkte ist zugleich als ein Theil der Curve dritter Klasse $\mathfrak{R}^{(3)}$ anzusehen, welche von allen Verbindungsstrahlen PQ umhüllt wird. Diese Curve zerfällt daher in drei Punkte; der dritte Punkt ist der Schnittpunkt derjenigen drei gemeinschaftlichen Secanten der Kegelschnittpaare B, C ; C, A ; A, B , welche den übrigen Theil des Linienpaares im Büschel bilden, zu dem die eine gemeinschaftliche Secante aller drei Kegelschnitte ABC gehört (S. 239). Die Verbindungslinien aller Paare conjugirter Punkte PQ auf dem Kegelschnitt, welcher von der Tripelcurve übrig bleibt, laufen daher sämmtlich durch einen Punkt. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte ABC eine (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante s haben, so haben je zwei derselben B und C , C und A , A und B noch eine gemeinschaftliche Secante $tt't'$, den übrigen Theil des Linienpaares, welches in je einem der drei Büschel (B, C) (C, A) (A, B) vorkommt, und von welchem s ein Theil ist. Die drei Geraden $tt't'$ schneiden sich in einem Punkte O . Von den drei gemeinschaftlichen Tripeln der drei Büschel liegen drei Eckpunkte auf s , die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher die Eigenschaft besitzt, dass von jedem Punkte P desselben die drei Polaren in Bezug auf ABC sich

wieder in einem Punkte Q dieses Kegelschnitts $\mathfrak{R}^{(2)}$ treffen; die Verbindungslinie PQ läuft durch den festen Punkt O , der zugleich der Pol der Geraden s in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ ist.

Zu ganz bekannten Resultaten werden wir geführt durch weitere Specialisirung der allgemeinen Betrachtung; nehmen wir nämlich insbesondere für die drei beliebig zu wählenden Kegelschnitte ABC drei Kreise an, so haben dieselben die unendlich-entfernte Gerade zu einer gemeinschaftlichen (ideellen) Secante s ; der Punkt O wird der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise ABC , der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$ der die drei angenommenen Kreise rechtwinklig schneidende Kreis und O sein Mittelpunkt. Das Kegelschnittnetz besteht in diesem Falle aus lauter Kreisen, was mit dem oben gefundenen Resultat, dass in dem allgemeinen Kegelschnittnetz nur ein Kreis vorkommt, in keinem Widerspruch steht.

Die Durchführung der polar-gegenüberstehenden Betrachtung, welche, gleichfalls von drei beliebigen Kegelschnitten ABC ausgehend, die drei Schaaren (B, C) (C, A) (A, B) und die durch sie bestimmte Tripelcurve dritter Klasse ins Auge fasst, darf dem Leser überlassen bleiben, da sie in allen wesentlichen Punkten der in diesem Paragraphen durchgeführten Untersuchung nachgebildet werden kann. Diese besondere Betrachtung ist aber überflüssig, weil sie schon von selbst in die vorige sich hineinverwebt. Die dort auftretende Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ ist selbst Tripelstrahlencurve für ein Kegelschnitt-Gewebe, welches mit dem ursprünglichen Kegelschnittnetze in nächstem Zusammenhang steht, so dass also die beiden polar-gegenüberstehenden Figuren mit einander vereinigt auftreten. Wir müssen aber hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchung auf die schon oben angeführten Abhandlungen in den Mathematischen Annalen Bd. V und VI verweisen.

Wenn wir die Betrachtung des Kegelschnittnetzes, welche von drei beliebig in der Ebene gegebenen Kegelschnitten ausging, in der Weise fortführen, dass wir vier beliebige Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}K_4^{(2)}$, die nicht demselben Netze angehören, annehmen, so lässt sich auch dann noch nach solchen Punkten P fragen, deren vier Polaren in Bezug auf $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}K_4^{(2)}$ sich in einem und demselben Punkte Q schneiden? Construiert man die Tripelcurve $C_{123}^{(3)}$ für das durch die Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}$ bestimmte Netz und die Tripelcurve $C_{124}^{(3)}$ für die Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_4^{(2)}$, so müssen wegen der Eigenschaft der Tripelcurve die gemeinschaftlichen Punkte der Curve $C_{123}^{(3)}$ und $C_{124}^{(3)}$ die verlangte Eigenschaft besitzen. Diese beiden Curven haben aber das gemeinschaftliche Tripel der Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$ gemein, und diese drei Punkte besitzen offenbar nicht diese Eigenschaft, folglich

bleiben im Allgemeinen nur noch sechs Punkte übrig, die der gestellten Forderung genügen. Diese zerfallen offenbar in drei Paare conjugirter Punkte, denn sobald P die Beschaffenheit hat, dass seine Polaren in Bezug auf $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}K_4^{(2)}$ sich in Q treffen, wird auch Q dieselbe haben, also wenn P zu jenen sechs Schnittpunkten gehört, muss auch Q dazu gehören; gehört ferner P_1 dazu, so gehört auch sein conjugirter Punkt Q_1 dazu; sind aber diese beiden Paare bekannt, so erhalten wir durch die Verbindung derselben:

$$(PP_1, QQ_1) = P_2 \quad \text{und} \quad (PQ_1, QP_1) = Q_2$$

ein drittes Paar, welches ebenfalls zu jenen sechs Durchschnittspunkten gehören muss; da es aber nur sechs giebt, so erhalten wir den Satz:

Hat man irgend vier Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}K_4^{(2)}$, die nicht demselben Netze angehören, und construirt zu je dreien derselben die zugehörigen Tripelcurven $C_{1,2,3}^{(3)} C_{1,2,4}^{(3)} C_{1,3,4}^{(3)} C_{2,3,4}^{(3)}$, so laufen diese vier Curven dritten Grades durch dieselben sechs Punkte, welche zu je dreien auf vier geraden Linien liegen und die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, dessen drei Paar Gegenecken gleichzeitig drei Paare conjugirter Punkte in Bezug auf alle vier gegebenen Kegelschnitte sind.

Die sechs Durchschnittspunkte dieser vier Tripelcurven oder das vollständige Vierseit, als dessen drei Paar Gegenecken dieselben auftreten, lassen sich sehr einfach mittelst der gegebenen vier Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}K_4^{(2)}$ construiren, wenn man die oben bewiesene Eigenschaft der Tripelcurve zu Hülfe nimmt (Seite 512), wonach die acht Seiten zweier der Tripelcurve einbeschriebenen vollständigen Vierseite, für welche jedes Paar Gegenecken ein Paar conjugirter Punkte der Tripelcurve ist, allemal einen und denselben Kegelschnitt berühren*). Durch die drei Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_3^{(2)}$ werde die Tripelcurve $C_{1,2,3}^{(3)}$ und durch die drei Kegelschnitte $K_1^{(2)}K_2^{(2)}K_4^{(2)}$ die Tripelcurve $C_{1,2,4}^{(3)}$ bestimmt. Die beiden Tripelcurven haben offenbar als gemeinschaftliche Punkte das gemeinsame Tripel der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$, welches wir $\Omega\Omega_1\Omega_2$ bezeichnen wollen; die übrigen sechs gemeinschaftlichen Punkte bilden als drei Paar Gegenecken das gesuchte Vierseit und liegen, wenn wir sie mit PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 bezeichnen, derart, dass

$$(PP_1, QQ_1) = P_2 \quad \text{und} \quad (PQ_1, QP_1) = Q_2$$

wird. Bezeichnen wir die zu den Punkten des Tripels $\Omega\Omega_1\Omega_2$ con-

*) Vergl. Siebeck: De triangulo, cujus latera continent polos respectu quatuor sectionum conicarum conjugatos, Annali di Matematica da F. Brioschi e L. Cremona. Ser. II, Tom. II. p. 65.

jugirten Punkte der Tripelcurve $C_{123}^{(3)}$ durch $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und die der Tripelcurve $C_{124}^{(3)}$ durch $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}'_2$, so liegen bekanntlich sowohl $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, als auch $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}'_2$ auf je einer Geraden. Nach dem oben angezogenen Satze müssen nun sowohl die acht Seiten der beiden Vierseite, deren Gegenecken $PQ P_1 Q_1 P_2 Q_2$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2$ sind, als auch die acht Seiten der beiden Vierseite, deren Gegenecken $PQ P_1 Q_1 P_2 Q_2$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}\mathfrak{P}'_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}'_2\mathfrak{Q}_2$ sind, je einen Kegelschnitt berühren. Es leuchtet aber ein, dass diese beiden Kegelschnitte identisch sind, denn beide berühren die Seiten der beiden Dreiecke QQ_1Q_2 und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$, wodurch jeder Kegelschnitt schon mehr als bestimmt ist. Nennen wir diesen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, so können wir ihn dadurch ermittelt denken, dass wir die Seiten des gemeinsamen Tripels der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$ und ausserdem die beiden Geraden, in welchen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}'_2$ liegen, als fünf Tangenten zur Bestimmung von $\mathfrak{R}^{(2)}$ auffassen.

Gehen wir in gleicher Weise von den beiden Kegelschnitten $K_1^{(2)}$ und $K_3^{(2)}$ aus, ermitteln das gemeinschaftliche Tripel derselben und die beiden Geraden, welche die conjugirten Punkte dieses Tripels auf den beiden Tripelcurven $C_{123}^{(3)}$ und $C_{134}^{(3)}$ enthalten, so bestimmen diese fünf Geraden als Tangenten einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$. Die beiden gefundenen Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ haben im Allgemeinen vier gemeinschaftliche Tangenten, welche ein vollständiges Vierseit bilden, und die drei Paar Gegenecken desselben sind die gesuchten sechs gemeinschaftlichen Punkte aller vier Tripelcurven.

Aus der bekannten Eigenschaft des einer Tripelcurve einbeschriebenen vollständigen Vierseits, dessen drei Paar Gegenecken Paare conjugirter Punkte der Tripelcurve sind, ergiebt sich nunmehr folgende Construction der gesuchten sechs Durchschnittspunkte:

Man ermittle das gemeinschaftliche Tripel der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_2^{(2)}$; die Polaren der Ecken dieses Dreiecks in Bezug auf den dritten Kegelschnitt $K_3^{(2)}$ treffen die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Geraden $\mathfrak{L}$; die Polaren der Ecken desselben Dreiecks in Bezug auf den vierten Kegelschnitt $K_4^{(2)}$ treffen die Gegenseiten desselben in drei Punkten einer Geraden $\mathfrak{L}'$. Man beschreibe einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher die Seiten des ersten Tripeldreiecks und die beiden Geraden $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ berührt, wodurch dieser gerade bestimmt wird. In gleicher Weise ermittle man zweitens das gemeinschaftliche Tripel der beiden Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ und $K_3^{(2)}$; die Polaren der Ecken desselben in Bezug auf $K_2^{(2)}$ treffen die Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden $\mathfrak{L}_1$; die Polaren der Ecken in Bezug auf $K_4^{(2)}$ treffen die Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden $\mathfrak{L}'_1$. Man beschreibe einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}_1^{(2)}$, welcher die Seiten dieses

zweiten Tripeldreiecks und die beiden Geraden $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}'_1$ berührt, wodurch dieser ebenfalls vollständig bestimmt ist. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}'^{(2)}$ haben im Allgemeinen vier gemeinschaftliche Tangenten, die ein vollständiges Vierseit bilden. Die drei Paar Gegenecken sind die gesuchten sechs Durchschnittspunkte $PQ P_1 Q_1 P_2 Q_2$ der vier Tripelcurven $C^{(3)}_{123} C^{(3)}_{124} C^{(3)}_{134} C^{(3)}_{234}$.

Durch andere Combination der gegebenen vier Kegelschnitte kann man anstatt $\mathfrak{R}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}'^{(2)}$ andere Kegelschnitte erhalten; für alle möglichen sechs Verbindungen erhält man im Ganzen sechs solche Kegelschnitte, welche nothwendig einer und derselben Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten angehören. Zu dieser Schaar gelangt man von allgemeinerem Gesichtspunkte aus folgendermassen:

Wenn man ein Kegelschnittnetz hat und auf der durch dasselbe hervorgerufenen Tripelcurve irgend ein Tripel $QQ_1 Q_2$ nimmt, so liegen die drei conjugirten Punkte $PP_1 P_2$ bekanntlich auf einer Geraden, und man kann eine Schaar von Kegelschnitten herstellen, welche diese Gerade und die Seiten des ersten Tripels berührt. Solcher Kegelschnittschaaren enthält man unendlich-viele, wenn man das erste Tripel $QQ_1 Q_2$ auf der Tripelcurve verändert; alle Kegelschnitte dieser sämtlichen Schaaren bilden ein *Kegelschnitt-Gewebe*, ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit mit dem Kegelschnittnetz und nach dem Princip der Polarität aus diesem hervorgegangen. *Irgend zwei Schaaren des Gewebes haben allemal einen Kegelschnitt gemeinschaftlich*, und das Gewebe ist daher durch drei seiner Kegelschnitte, welche nicht derselben Schaar angehören, vollständig bestimmt, indem man aus der Verbindung je zweier immer neue Schaaren des Gewebes bildet. Alle Kegelschnitte des Gewebes, welche in Punktpaare zerfallen, liefern als Verbindungslinien derselben diejenigen Geraden, welche die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ umhüllen, und die Punktpaare selbst erfüllen die Tripelcurve $C^{(3)}$. Das Kegelschnitt-Gewebe steht daher mit dem zu ihm gehörigen Kegelschnittnetz in innigstem Zusammenhange, und die Kegelschnitte des Gewebes können aus denen des Netzes, wie auch umgekehrt, unmittelbar abgeleitet werden.

Gehen wir nun von vier Kegelschnitten aus, so bestimmen dieselben zu je dreien verbunden vier Kegelschnittnetze, zu deren jedem ein bestimmtes Gewebe gehört. *Diese vier Gewebe haben eine Kegelschnittschaar gemeinschaftlich*, welche mit der oben ermittelten zusammenfällt. Wir können aber noch unendlich-viele andere Kegelschnitt-Netze und zugehörige Gewebe bilden, indem wir aus jenen ersten vier Netzen irgend drei Kegelschnitte herausnehmen, welche nicht demselben Netze angehören, und sie zur Bildung eines neuen Netzes

verwenden. Die Tripelcurven für alle diese Netze laufen durch dieselben sechs oben ermittelten Punkte, und die sämtlichen zugehörigen Kegelschnittgewebe haben eine Schaar gemeinschaftlich. Nehmen wir zu den vier gegebenen Kegelschnitten $K_1^{(2)} K_2^{(2)} K_3^{(2)} K_4^{(2)}$ noch einen fünften $K_5^{(2)}$ hinzu, so erhalten wir zunächst fünf solcher Kegelschnittschaaren, wie oben, indem wir die fünf gegebenen Kegelschnitte in Gruppen zu vierein zusammenfassen. Diese fünf Schaaren müssen aber *einen* Kegelschnitt gemeinschaftlich haben, der dann auch gleichzeitig allen möglichen Geweben gemeinschaftlich ist, welche vermittelst der gegebenen fünf Kegelschnitte sich herstellen lassen.
