Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie

Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften - auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's

Steiner, Jacob

1876

Dritter Abschnitt. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar

Dritter Abschnitt.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

---

§. 39. Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel.

Die in §. 23 ausgeführte Untersuchung der Beziehung zwischen einem von vier Punkten eines Kegelschnitts gebildeten Viereck und dem von den vier Tangenten in diesen Punkten gebildeten Vierseit und eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes in §. 27 lassen erkennen, wenn wir die vier Punkte festhalten und die Tangenten, von denen eine willkürlich angenommen werden kann, verändern, dass durch vier Punkte unendlich viele Kegelschnitte gehen, deren Gesammtheit gleich mächtig ist mit den sämmtlichen Strahlen, welche durch einen Punkt gehen; denn jeder durch einen der vier Punkte gehende Strahl, als Tangente des Kegelschnitts aufgefasst, bestimmt denselben vollständig und eindeutig; die Tangenten in den andern drei Punkten sind dadurch (§. 23) mitbestimmt, und es giebt daher so viel Kegelschnitte durch vier Punkte, als es Strahlen durch einen Punkt giebt. Die Gesammtheit der durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte soll ein *Kegelschnittbüschel* heissen und die vier Punkte selbst die *Grundpunkte (Mittelpunkte) des Büschels.* Das Kegelschnittbüschel ist daher ein Gebilde von einfacher Unendlichkeit; hiergegen spricht scheinbar, dass durch einen in der Ebene der vier Grundpunkte willkürlich gewählten Punkt ein Kegelschnitt des Büschels vollständig und eindeutig bestimmt wird und die Ebene selbst eine doppelt-unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten enthält. Dieser Einwurf wird aber dadurch widerlegt, dass ein solcher durch fünf Punkte bestimmter Kegelschnitt zugleich unendlich viele andere Punkte enthält und jeder von ihnen, anstatt des fünften gewählt, immer wieder denselben Kegelschnitt hervorruft. Bei der Bewegung des fünften Punktes durch das ganze doppelt-unendliche Gebiet der Ebene tritt also jeder Kegelschnitt des Büschels selbst unendlich oft auf, und die sämmtlichen von einander verschiedenen Kegelschnitte des Büschels umfassen also nur eine

Mannigfaltigkeit von einfacher Unendlichkeit. Seien $ABCD$ die vier Grundpunkte des Büschels und ein beliebiger durch A gehender Strahl $\mathfrak{A}$ die Tangente eines dem Büschel angehörigen Kegelschnitts, welcher dadurch vollständig bestimmt ist, so erhalten wir (Seite 123) die Tangenten in BCD, indem wir die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $ABCD$ bestimmen:

$$(AB,\ CD) = x \quad (AC,\ BD) = y \quad (AD,\ BC) = z$$

und die Seiten dieses Diagonaldreiecks:

$$(y,\ z) = X \quad (z,\ x) = Y \quad (x,\ y) = Z$$

und bemerken, dass die Tangenten in A und B sich auf X schneiden müssen; die Diagonale X trifft also $\mathfrak{A}$ in einem Punkte, dessen Verbindungslinie mit B die Tangente in B ist; ebenso trifft $\mathfrak{A}$ die Gerade Y in einem andern Punkte, dessen Verbindungslinie mit C die Tangente in C ist, und endlich giebt die Verbindungslinie des Schnittpunktes von $\mathfrak{A}$ und Z mit D die Tangente in D. Drehen wir also den Strahl $\mathfrak{A}$ um A, wodurch wir sämmtliche Kegelschnitte des Büschels erhalten, so drehen sich auch die Tangenten $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ um die resp. Punkte B, C, D und beschreiben Strahlbüschel, welche perspectivisch liegen mit demjenigen, welches $\mathfrak{A}$ beschreibt; die perspectivischen Durchschnitte sind die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Grundpunkte des Büschels. Wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Die Tangenten an einem Kegelschnitte des Büschels in irgend zweien der vier Grundpunkte beschreiben, wenn der Kegelschnitt das ganze Büschel durchläuft, zwei projectivische Strahlbüschel, welche perspectivisch liegen und zu ihrem perspectivischen Durchschnitt eine der drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Grundpunkte haben.

Hierdurch werden wir in den Stand gesetzt, das Kegelschnittbüschel selbst als ein neues Gebilde einfacher Unendlichkeit mit irgend einem andern von gleicher Mächtigkeit, z. B. einem ebenen Strahlbüschel, einer geraden Punktreihe oder einem andern Kegelschnittbüschel in projectivische Beziehung zu setzen, so dass die Elemente der beiden Gebilde sich eindeutig entsprechen, indem wir zur Herstellung dieser Beziehung ein Strahlbüschel verwenden, welches von den Tangenten des Kegelschnittbüschels in irgend einem der vier Grundpunkte gebildet wird, und für jede Tangente dann den Kegelschnitt des Büschels substituiren, welcher durch dieselbe eindeutig bestimmt ist. Wir gelangen durch Einführung dieses neuen Gebildes zu der projectivischen Erzeugung der allgemeinen Curven dritten und vierten Grades ebenso, wie wir durch die projectivische Beziehung zweier Strahlbüschel zum Kegelschnitt gelangen. (*Chasles*, comptes rendus 1853. tome XXXVI et XXXVII.)

Die gleiche Mächtigkeit des Kegelschnittbüschels und des Strahlbüschels deutet darauf hin, dass ersteres aus dem letzteren unmittelbar hervorgehen könnte, und in der That führt dazu folgende ebenso sinnreiche, wie nützliche Betrachtung *Steiner's**).

Denken wir uns B und B_1 als die Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ zu ihrem perspectivischen Durchschnitt haben, so ist die projectivische Beziehung derselben vollständig bestimmt durch die Lage von $\mathfrak{A}$; die Verbindungslinie der Mittelpunkte BB_1 enthält bei dieser Beziehung zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen e und e_1. Verändern wir aber die Lage des perspectivischen Durchschnitts $\mathfrak{A}$, indem wir denselben um einen festen Punkt P drehen, so können wir uns für jede neue Lage von $\mathfrak{A}$ eine neue Beziehung zweier Strahlbüschel mit denselben Mittelpunkten BB_1 hergestellt denken, und es haben die beiden neuen Strahlbüschel alsdann die Strahlen e und e_1 ebenfalls zu entsprechenden; das Strahlenpaar, welches von B und B_1 nach dem unveränderten Punkte P der Geraden $\mathfrak{A}$ geht, p und p_1, ist für die alte Beziehung wie für die neue gleichzeitig ein Paar entsprechender Strahlen. Bei der Bewegung von $\mathfrak{A}$ beschreibt diese Gerade selbst ein Strahlbüschel, dessen Strahlen, nach einander als die perspectivischen Durchschnitte je zweier Strahlbüschel mit den festen Mittelpunkten B und B_1 aufgefasst, unendlich viele Paare von projectivischen Strahlbüscheln hervorrufen, die wir uns in B und B_1 über einander liegend denken können. Werden diese projectivischen Beziehungen festgehalten, aber die perspectivische Lage aufgehoben etwa dadurch, dass das eine oder beide Systeme von Strahlbüscheln um ihre Mittelpunkte B und B_1 beliebig gedreht oder in der Ebene verschoben und gedreht werden, so wird aus jeder Geraden $\mathfrak{A}$ und dem Strahl BB_1 nunmehr ein Kegelschnitt, den die beiden nicht mehr perspectivisch liegenden aber projectivisch bleibenden Strahlbüschel erzeugen; alle diese Kegelschnitte haben zunächst die Punkte B und B_1 (die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlbüschel) gemein, ferner einen Punkt $\mathfrak{e}$, den Schnittpunkt der beiden Strahlen e und e_1 nach Aufhebung der perspectivischen Lage, weil diese beiden Strahlen für jede der vorigen Beziehungen entsprechende waren, und endlich aus demselben Grunde den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ der Strahlen p und p_1 nach Aufhebung der perspectivischen Lage.

---

*) Ueber diese unter dem Namen „projectivischer Drehung" von *Steiner* häufig angewendete Betrachtung vergl. *F. August* in *Borchardt's* Journal, Bd. LXVIII Seite 239.

Die sämmtlichen auf diese Weise erzeugten Kegelschnitte gehen also durch vier feste Punkte $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$, d. h. sie bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten, und dieses ist unmittelbar aus dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen Strahlbüschel hervorgegangen, indem jeder Strahl desselben zu einem Kegelschnitt des Büschels wurde. Beide Gebilde sind also von gleicher Mächtigkeit.

Wir erkennen ferner, wenn wir die Bedingung, dass der perspectivische Durchschnitt $\mathfrak{A}$ durch einen festen Punkt P gehen solle, aufheben und ihn das ganze doppelt-unendliche Gebiet der Ebene durchstreifen lassen, dass aus den sämmtlichen Geraden der Ebene nach Aufhebung der perspectivischen Lage ebenso viele Kegelschnitte werden, die durch drei feste Punkte gehen, dass diese also ein Gebilde von doppelter Unendlichkeit (Büschel-Büschel) ausmachen. Es leuchtet die Nützlichkeit dieser Betrachtung augenscheinlich ein, weil nun umgekehrt jedes Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten durch eine passende Drehung in ein Strahlbüschel verwandelt werden kann und hierdurch die Untersuchung der Eigenschaften des Kegelschnittbüschels wesentlich vereinfacht wird. Suchen wir zunächst zu ermitteln, wie sich die verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten: Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln in dem Büschel vertheilen.

Um die Begriffe zu fixiren, denken wir uns die Punkte B und B_1 fest bleibend, aber das ganze System von Strahlbüscheln in B um einen beliebigen Winkel δ und das ganze System von Strahlbüscheln in B_1 um einen Winkel δ^1 gedreht, wo δ und δ^1 ihrer Grösse und Drehrichtung nach gegeben sind; alsdann entsteht durch diese beiden Drehungen (von denen auch eine z. B. $\delta^1 = 0$ sein könnte) aus BB_1 und dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen Strahlbüschel (P) ein Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$. Es ist zuvörderst ersichtlich, dass in dem Kegelschnittbüschel drei Linienpaare (besondere Hyperbeln) vorkommen; denn unter den durch P gehenden Strahlen $\mathfrak{A}$ befindet sich einmal auch der Strahl PB; die beiden perspectivischen Strahlbüschel in B und B_1, welche ihn zum perspectivischen Durchschnitt haben, befinden sich in der eigenthümlichen Lage, welche wir die parabolische (S. 73) genannt haben, indem allen Strahlen des Strahlbüschels in B_1 der einzige Strahl BP in dem Strahlbüschel B und allen Strahlen des Strahlbüschels B der einzige Strahl B_1B des Strahlbüschels B_1 entspricht; nach der Drehung um die Winkel δ und δ^1 werden diese beiden besonderen Strahlbüschel einen Kegelschnitt erzeugen, dessen Punkte auf den beiden Geraden $B\mathfrak{p}$ und $B_1\mathfrak{e}$ liegen, also ein Linienpaar; in gleicher Weise wird aus dem besonderen durch B_1 gehenden Strahl $\mathfrak{A}$ ein Kegelschnitt, welcher sich in das Linienpaar $B_1\mathfrak{p}$ und $B\mathfrak{e}$ auflöst. Wir bemerken endlich, dass vor der Drehung um die Winkel δ und δ^1 zwei besondere Strahlen, welche mit der Verbindungslinie BB_1 in entgegengesetztem Drehungssinne die resp. Winkel δ und δ^1 bildeten und sich in einem Punkte ε trafen, nach der Drehung auf einander fallen müssen; wir sehen hieraus, dass aus BB_1 und demjenigen Strahl $\mathfrak{A}$, welcher durch ε geht, also $P\varepsilon$, ein Kegelschnitt wird, der wiederum in ein Linienpaar zerfällt, weil die beiden ihn erzeugenden projectivischen Strahlbüschel auch nach der Drehung perspectivisch werden; folglich enthält das Kegelschnittbüschel noch ein drittes Linienpaar BB_1 und $\mathfrak{p}\mathfrak{e}$. Aus allen übrigen Geraden $\mathfrak{A}$ werden aber allgemeine Kegelschnitte, und wir wollen nachsehen, wie viel Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen unter ihnen vorkommen.

Hierzu müssen wir diejenigen Punkte in der Ebene aufsuchen, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen; alle Punkte im Unendlichen der Ebene liegen auf der Geraden G_∞ oder sind die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projectivisch-gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel, welche sich in perspectivischer Lage befinden (S. 77); vor der Drehung müssen zwei solche in B und B_1 placirte Strahlbüschel einen Kreis erzeugen (S. 106); alle Punkte dieses Kreises gehen also nach der Drehung in die Unendlichkeit, oder vielmehr die beiden diesen Kreis erzeugenden Strahlbüschel werden nach der Drehung perspectivisch, erzeugen also ein Linienpaar, dessen einer Theil BB_1 und dessen anderer Theil G_∞ ist. Dieser Kreis, welchen wir kurzweg den „*Drehkreis*“ nennen wollen, ist leicht zu ermitteln; er wird offenbar durch die drei Punkte BB_1 und ε gehen und durch dieselben bestimmt sein; ε ist aber derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch B und B_1 schneiden, welche nach der Drehung auf BB_1 zusammenfallen, die also um die Winkel δ und δ^1 zurückgedreht erscheinen, und $\mathfrak{e}$ ist derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch B und B_1 nach der Drehung treffen, welche vor der Drehung in dem Strahle BB_1 vereinigt waren; daher liegen $\mathfrak{e}$ und ε symmetrisch zu der Geraden BB_1. Ist der Drehkreis ermittelt, so wird aus einem solchen Strahle $\mathfrak{A}$, welcher ihn in zwei reellen Punkten schneidet, eine Hyperbel, weil die beiden Schnittpunkte nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen, aus denjenigen Strahlen $\mathfrak{A}$, welche den Drehkreis berühren, je eine Parabel und aus allen Strahlen $\mathfrak{A}$, welche ihn nicht treffen, Ellipsen; ferner kommt unter den Strahlen $\mathfrak{A}$ ein einziger vor, der durch den Mittelpunkt des Drehkreises geht; aus diesem wird eine gleichseitige Hyperbel, weil die unendlich-entfernten Punkte derselben unter einem rechten Winkel erscheinen.

Liegt daher der Punkt P ausserhalb des Drehkreises, *so giebt es* *unter dem Büschel von Kegelschnitten unendlich viele Ellipsen, unendlich viele Hyperbeln und nur zwei Parabeln, welche diese beiden Gruppen von einander trennen; unter den Hyperbeln kommt nur eine einzige gleichseitige vor.* Wir bemerken noch einen besondern Fall: Da nämlich alle Punkte, die im Unendlichen liegen, in B und B_1 zwei gleiche und gleichlaufende projectivische Strahlbüschel hervorrufen, also nach der Drehung Punkte eines bestimmten Kreises werden, welcher zu dem Drehkreise symmetrisch liegt in Bezug auf die Axe BB_1, so folgt, dass, wenn P im Unendlichen liegt, allemal die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels auf einem Kreise liegen müssen; wenn aber P im Unendlichen liegt, so sind die beiden aus ihm an den Drehkreis zu legenden Tangenten parallel, ihre Berührungssehne erscheint also von B (oder B_1) aus unter einem rechten Winkel. Aus diesen beiden Tangenten werden nach der Drehung zwei Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, und dies Verhalten findet auch umgekehrt statt: Wenn die Berührungspunkte zweier Tangenten des Drehkreises unter rechtem Winkel von B (oder B_1) aus erscheinen, so liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen. Wir schliessen also:

Wenn in einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten zwei Parabeln vorkommen, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so liegen allemal die vier Grundpunkte des Büschels auf einem Kreise. Oder:

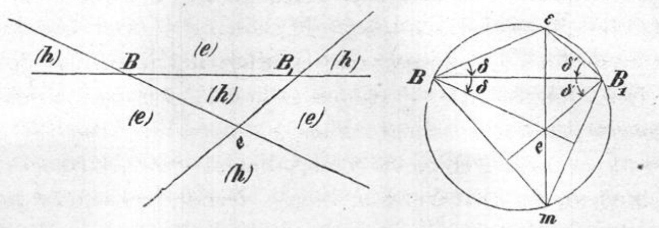
Legt man durch drei Punkte zwei Parabeln, deren Axen auf einander senkrecht stehen, so schneiden sich dieselben noch in einem vierten Punkte, welcher mit den drei gegebenen auf einem Kreise liegt. Oder:

Zwei Parabeln, deren Axen auf einander senkrecht stehen, treffen sich im Allgemeinen in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen.

Liegt andererseits P innerhalb des Drehkreises, *so besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln, unter denen sich nur eine gleichseitige findet*; weil in diesem Falle alle durch P gezogenen Strahlen $\mathfrak{A}$ den Drehkreis in zwei reellen Punkten treffen. Liegt endlich P auf dem Drehkreise selbst, so kommt in dem Büschel nur eine einzige Parabel vor, d. h. zwei zusammenfallende, alle übrigen Kegelschnitte desselben sind Hyperbeln. Ist insbesondere der Punkt P gerade der Mittelpunkt des Drehkreises, so werden alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln; *es giebt also ein besonderes Kegelschnittbüschel, welches aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht.* Suchen wir die gewonnenen Resultate in der Weise umzugestalten, dass wir von dem Drehkreise abstrahiren können und nur die das Kegelschnittbüschel bestimmenden vier Grundpunkte als gegeben annehmen. Lassen wir zu diesem Behuf den

Punkt P alle möglichen Lagen innerhalb des Drehkreises annehmen. Da die Kreisfläche durch das Dreieck $BB_1\varepsilon$ (Fig. 62) in vier Stücke

Fig. 62.



zerschnitten wird, nämlich das Dreieck und die drei Segmente über den Seiten desselben, so wird 1) wenn P innerhalb der Dreiecksfläche $BB_1\varepsilon$ liegt, nach der Drehung der Punkt $\mathfrak{p}$ in das Dreieck $BB_1\mathfrak{e}$ hineinfallen; 2) wenn P in dem Kreissegmente über $B\varepsilon$ liegt, so wird der Punkt $\mathfrak{p}$ nach der Drehung in demjenigen Scheitelraume liegen, welchen die Geraden B_1B und $B_1\mathfrak{e}$ begrenzen und der ausserhalb des Dreiecks $BB_1\mathfrak{e}$ liegt; denn von zwei Strahlen B_1P und BP, welche nach einem in diesem Kreissegmente liegenden Punkt P hingehen, fällt nach der Drehung der erste nothwendig in diesen Winkelraum, und der zweite in den Winkelraum, welchen die Geraden BB_1 und die Tangente in B nach der Drehung begrenzen; die letztere wird aber parallel $B_1\mathfrak{e}$; beide Winkelräume haben nun gemeinsam denjenigen Scheitelraum des Winkels $BB_1\mathfrak{e}$, welcher ausserhalb des Dreiecks liegt; 3) wenn P in dem Kreissegmente über $B_1\varepsilon$ liegt, so fällt nach der Drehung aus gleichem Grunde $\mathfrak{p}$ in denjenigen Scheitelraum des Winkels $B_1B\mathfrak{e}$, welcher ausserhalb dieses Dreiecks liegt, und endlich 4) wenn P in dem Kreissegmente über BB_1 angenommen wird, so muss nach der Drehung $\mathfrak{p}$ nothwendig in denjenigen Scheitelraum des Winkels $B\mathfrak{e}B_1$ hineinfallen, welcher ausserhalb dieses Dreiecks liegt, weil die Tangenten in B und B_1 nach der Drehung mit $B_1\mathfrak{e}$ und $B\mathfrak{e}$ parallel werden. Liegt daher P überhaupt innerhalb des Drehkreises, so muss nach der Drehung $\mathfrak{p}$ in einen der vier mit (h) in der Figur bezeichneten Räume, nämlich die Dreiecksfläche $BB_1\mathfrak{e}$ und die drei unendlichen Winkelräume an den Ecken des Dreiecks hineinfallen; liegt dagegen P ausserhalb des Drehkreises, so muss $\mathfrak{p}$ in einen der drei übrigen mit (e) bezeichneten, den Dreiecksseiten anliegenden unendlichen Räume hineinfallen; die ganze unendliche Ebene wird nämlich durch die Seiten des Dreiecks $BB_1\mathfrak{e}$ in 7 Räume zerschnitten, von denen die vier mit (h) bezeichneten die hyperbolischen, die drei mit (e) bezeichneten die elliptischen genannt werden können.

Befindet sich nun der vierte Grundpunkt $\mathfrak{p}$ des Büschels in einem der drei elliptischen Räume, so liegen die vier Grundpunkte so, dass jeder sich ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet, oder sie bilden ein convexes Viereck; liegt dagegen $\mathfrak{p}$ in einem der vier hyperbolischen Räume, so haben die vier Grundpunkte die charakteristische Lage, dass einer nothwendig innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich findet, oder sie bilden ein concaves Viereck. Wir schliessen hieraus folgenden Satz:

Wenn die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels so liegen, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet (d. h. wenn sie ein convexes Viereck bilden), *so zerfallen die Kegelschnitte des Büschels in eine Gruppe von Ellipsen, eine Gruppe von Hyperbeln und zwei Parabeln, welche die Uebergänge von der einen Gruppe zur andern bilden; unter den Hyperbeln kommt nur eine einzige gleichseitige und drei Linienpaare vor. Wenn dagegen die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet* (d. h. wenn sie ein concaves Viereck bilden), *so bestehen die Kegelschnitte des Büschels aus lauter Hyperbeln und unter diesen kommen im Allgemeinen nur eine einzige gleichseitige Hyperbel und drei Linienpaare vor.*

Einer der beiden vorigen Fälle muss, wie wir gesehen haben, immer eintreten; im letzten Falle kann insbesondere nach dem Vorigen der Punkt $\mathfrak{p}$ so liegen, dass alle Hyperbeln des Büschels gleichseitige werden, wenn nämlich P gerade der Mittelpunkt des Drehkreises ist; es ist leicht zu erkennen, welche eigenthümliche Lage die vier Grundpunkte des Büschels zu einander haben müssen, damit dieser specielle Fall eintrete. Aus der Figur geht nämlich hervor, wenn M der Mittelpunkt des Drehkreises ist, welcher nach der Drehung in die Lage m kommt (Fig. 62), dass:

$\angle BMB_1 = 2\delta + 2\delta^1$, also $\angle MBB_1 = \angle MB_1B = 90^0 - \delta - \delta^1$ ist,

daher wird $\angle B_1Bm = 90^0 - \delta^1$ und $\angle BB_1m = 90^0 - \delta$, also

$$\angle BmB_1 = \delta + \delta^1,$$

also liegt der Punkt m auf dem Drehkreise.

Nun ist aber:

$$\angle \mathfrak{e}Bm = 90^0 - \delta^1 - \delta \quad \text{und}$$
$$\angle \mathfrak{e}B_1m = 90^0 - \delta - \delta^1,$$

folglich steht $B\mathfrak{e}$ auf B_1m senkrecht und $B_1\mathfrak{e}$ auf Bm, d. h. $\mathfrak{e}$ ist der Höhenpunkt des Dreiecks BB_1m oder, was dasselbe sagt: Die vier Punkte $BB_1\mathfrak{e}m$ liegen so, dass jeder von ihnen der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Dies war allerdings auch durch folgendes Raisonnement vorherzusehen: Aus einem durch M, den Mittelpunkt des Drehkreises, gehenden Strahl $\mathfrak{A}$ wird nothwendig eine gleichseitige Hyperbel nach der Drehung, weil diejenigen Punkte, welche ins Unendliche gehen, unter einem rechten Winkel von B oder B_1 aus erscheinen; gehen zwei Strahlen $\mathfrak{A}$ durch M, so ist der Punkt P mit M identisch, also sämmtliche $\mathfrak{A}$ gehen durch M; mithin werden aus sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels gleichseitige Hyperbeln, insbesondere auch aus den drei Linienpaaren des Büschels, welche specielle Hyperbeln sind und daher aus je zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen bestehen müssen; wir schliessen also: „Wenn zwei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks zwei Paare rechtwinkliger Strahlen sind, so ist auch das dritte Seitenpaar zu einander rechtwinklig“, was nur in anderer Form der bekannte Elementarsatz ist: „Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte“, da eine Dreiecksseite und die zugehörige Höhe ein Seitenpaar desjenigen vollständigen Vierecks sind, welches von den Dreiecksecken und dem Höhenpunkt gebildet wird. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels so liegen, dass einer (jeder) der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, so bestehen die Kegelschnitte des Büschels aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, von denen drei besondere die drei zu einander rechtwinkligen Seitenpaare dieses vollständigen Vierecks sind.

Oder auch:

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreieck umschrieben sind, gehen gleichzeitig durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks.

Hieraus folgt beiläufig eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, welche eine gewisse Analogie mit der bekannten Grundeigenschaft des Kreises darbietet:

Begegnet von zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen, welche sich in o schneiden, der eine einer gleichseitigen Hyperbel in den Punkten a und a^1, der andere in b und b^1, so ist immer

$$oa \,.\, oa^1 + ob \,.\, ob^1 = 0,$$

d. h. es ist das Product der Abschnitte auf dem einen Schenkel des rechten Winkels gleich dem Product der Abschnitte auf dem andern; aber die Schnittpunkte liegen so, dass zwei auf derselben Seite von o sich finden und die beiden andern auf entgegengesetzten Seiten von o; denn die vier Punkte aa^1bb^1 liegen immer so, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist.

Das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind und zugleich durch den Höhenpunkt des Dreiecks gehen, besitzt unter andern folgende bemerkenswerthe Eigenschaft, welche, als besonderer Fall einer später zu erweisenden allgemeinen Eigenschaft, schon hier vorausgeschickt werden mag:

Das von den drei Ecken des Dreiecks und dem Höhenpunkt gebildete vollständige Viereck hat zu seinem Diagonaldreiecke xyz, das von den drei Fusspunkten der Höhen gebildete Dreieck, weil jede Seite und die darauf senkrecht stehende Höhe ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks bilden. Dieses Dreieck xyz ist aber ein Tripel conjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels (S. 147); denken wir uns um dasselbe einen Kreis gelegt, so muss dieser (S. 185) alle Kreise rechtwinklig schneiden, welche die Ortskreise der Scheitel der den Kegelschnitten des Büschels umschriebenen rechten Winkel sind; und da alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln sind, für die jener Ortskreis sich immer auf einen Punkt, den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel reducirt, so muss der um xyz gelegte Kreis die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln des Büschels enthalten. Er geht also insbesondere auch durch die Mitten der sechs Seiten unseres vollständigen Vierecks d. h. durch die Mitten der Seiten des Dreiecks und die Mitten der oberen Abschnitte der Höhen (Verbindungslinien des Höhenpunkts mit den Ecken); also:

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben werden können, liegen auf einem Kreise, der durch die Fusspunkte der Höhen, die Mitten der Seiten und die Mitten der drei oberen Abschnitte auf den Höhen hindurchgeht (*Feuerbach's* Kreis, Neunpunktkreis). Die Eigenschaft, dass die genannten neun Punkte auf einem Kreise liegen, ist aus den Elementen bekannt und leicht auf elementarem Wege zu beweisen*).

Der schon vorhin erwähnte Fall, dass P auf der Peripherie des Drehkreises liegt, führt zu einem Büschel von lauter Hyperbeln, welches nur eine einzige Parabel enthält, denn in diesem Falle geht der Punkt $\mathfrak{p}$, einer der vier Grundpunkte, in die Unendlichkeit und durch vier Punkte, von denen einer im Unendlichen liegt, ist nur eine einzige Parabel möglich, weil die unendlich-entfernte Gerade Tangente der Parabel ist; alle übrigen Kegelschnitte eines solchen Büschels sind aber offenbar Hyperbeln und die Gruppe Ellipsen verschwindet in diesem Falle.

---

*) Vergl. *J. Steiner*: Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, S. 53; und *Neumann's* Math. Annalen, Bd. VII, S. 517: Der *Feuerbach*'sche Satz von den Berührungskreisen des ebenen Dreiecks von *H. Schröter*.

§. 40. Charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und einige Folgerungen aus derselben.

Die in dem vorigen Paragraphen gegebene Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels führt zu einer charakteristischen Eigenschaft desselben, welche häufig benutzt wird; denken wir uns nämlich eine beliebige gerade Linie (Transversale) in der Ebene des Kegelschnittbüschels, so wird dieselbe von jedem Kegelschnitt des Büschels im Allgemeinen in zwei Punkten x, $\mathfrak{x}$ getroffen, welche ein Punktsystem bilden. In der That, seien $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$ die vier Grundpunkte des Büschels und $\mathfrak{L}$ die gegebene Transversale, so können wir uns in B und B_1 zwei perspectivische Strahlbüschel denken, welche $\mathfrak{L}$ zu ihrem perspectivischen Durchschnitt haben und ausserdem in B und B_1 die Mittelpunkte je zweier projectivischer Strahlbüschel, welche allemal einen Kegelschnitt des Büschels erzeugen. Denken wir uns dann die ganze Gruppe von Strahlbüschelpaaren in B und B_1 so um die Mittelpunkte BB_1 herumgedreht, dass $B\mathfrak{e}$ und $B_1\mathfrak{e}$ zusammenfallen, so wird aus dem Kegelschnittbüschel ein einfaches Strahlbüschel ($\mathfrak{A}$) um den Mittelpunkt P und der Strahl BB_1; aus der Geraden $\mathfrak{L}$ wird aber ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, da die beiden vor der Drehung perspectivischen Strahlbüschel, welche $\mathfrak{L}$ erzeugten, jetzt im Allgemeinen nicht mehr perspectivisch liegen werden; die beiden Schnittpunkte x und $\mathfrak{x}$ irgend eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels mit der Transversale $\mathfrak{L}$ gehen daher in die Schnittpunkte $x^1\mathfrak{x}^1$ eines Strahles $\mathfrak{A}$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ über; lässt man nun $\mathfrak{A}$ das ganze Strahlbüschel um P durchlaufen, so werden nach einem auf Seite 151 bewiesenen Satze Bx^1 und $B\mathfrak{x}^1$ (oder auch B_1x^1 und $B_1\mathfrak{x}^1$) ein Strahlsystem beschreiben, welches also auch vor der Drehung ein Strahlsystem gewesen sein muss; die Punkte x und $\mathfrak{x}$ bilden daher ein Punktsystem, und wir erhalten den allgemeinen Satz:

Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittbüschels wird von den Kegelschnitten desselben in Punktpaaren getroffen, welche die conjugirten Punkte eines Punktsystems sind.

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir bereits auf Seite 66 bewiesen; wir erhalten denselben, wenn wir aus dem Kegelschnittbüschel die drei Linienpaare herausnehmen; die dort aufgesuchte Bedingung, wann das Punktsystem elliptisch und wann es hyperbolisch ist, kommt uns hier zu Statten:

Sobald von den vier Grundpunkten des Büschels eine ungerade Anzahl zu beiden Seiten von der Transversale liegt, ist das Punktsystem auf derselben elliptisch; liegt eine gerade Anzahl zu beiden Seiten, so ist das

Punktsystem hyperbolisch, falls nämlich die vier Grundpunkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet. Liegen dagegen die vier Grundpunkte so, dass einer von ihnen in dem von den drei andern gebildeten Dreieck enthalten ist, so findet das Umgekehrte statt: Das Punktsystem auf der Transversale ist hyperbolisch, wenn eine ungerade Anzahl von den vier Grundpunkten des Büschels, dagegen elliptisch, wenn eine gerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale liegt.

Diese Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Transversale in einem Punktsystem zu schneiden, charakterisirt dasselbe und unterscheidet es von andern Gruppen von Kegelschnitten; sie lässt sich auch so umkehren:

Alle Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte und ausserdem durch je zwei conjugirte Punkte eines gegebenen Punktsystems gehen, laufen noch durch einen vierten festen Punkt und bilden also ein Kegelschnittbüschel.

Denken wir uns nämlich diese Kegelschnitte durch Paare von Strahlbüscheln erzeugt, welche in zwei von den drei festen Punkten BB_1 und $\mathfrak{C}$, nämlich in B und B_1, ihre Mittelpunkte haben, und auch die Gerade $\mathfrak{L}$, welche der Träger des gegebenen Punktsystems ist, durch zwei perspectivische Strahlbüschel in B und B_1 hervorgerufen, und drehen das ganze Gebilde so, dass $B\mathfrak{C}$ und $B_1\mathfrak{C}_1$ auf einander fallen, so werden aus sämmtlichen Kegelschnitten Gerade und aus $\mathfrak{L}$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; diese Geraden müssen aber sämmtlich durch einen festen Punkt laufen, weil die Strahlenpaare von B (oder B_1) nach den Schnittpunkten jeder solchen Geraden mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Strahlsystem bilden (S. 151); folglich müssen denn auch, wenn wir wieder zurück drehen, die Kegelschnitte durch einen vierten festen Punkt laufen.

Die obige Eigenschaft des Kegelschnittbüschels führt uns zur Lösung der Aufgabe: „*Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade zur Tangente hat*“; da nämlich alle durch die vier Punkte gelegten Kegelschnitte auf der Geraden Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems bestimmen und, falls die Gerade Tangente sein soll, die beiden Schnittpunkte zusammenfallen müssen, so werden die Asymptotenpunkte dieses Punktsystems die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte sein, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Aufgabe lässt also im Allgemeinen *zwei* Lösungen zu, und wir sind im Stande, nicht allein aus der Lage der vier Punkte zu der Geraden über die Realität dieser Lösungen zu entscheiden (je nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl von Punkten zu beiden Seiten der Geraden liegt, giebt es zwei reelle Lösungen der Aufgabe oder keine), sondern auch die beiden Kegelschnitte, wenn sie reell vorhanden sind, selbst zu construiren, indem wir die Asymptotenpunkte eines bekannten Punktsystems ermitteln.

Das Punktsystem wird bestimmt durch die Schnittpunkte zweier Seitenpaare des von den vier gegebenen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks. Die Asymptotenpunkte zu finden kommt dann auf eine (§. 14 und 15) allgemein gelöste Aufgabe hinaus.

Hieran knüpft sich die aus derselben Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleitende Lösung der Aufgabe: „*Einen Kegelschnitt zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade zu Tangenten hat*“; lässt man nämlich von den vier Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels zwei zusammenfallen und die beiden andern auch zusamenfallen, so erhält man ein Büschel, dessen Kegelschnitte sich alle in denselben beiden festen Punkten berühren; die Tangenten in diesen beiden gemeinschaftlichen Berührungspunkten nehmen die Stelle eines der drei Linienpaare aus dem Büschel ein, die beiden andern Linienpaare fallen zusammen in die gemeinschaftliche Berührungssehne sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels; ein so eigenthümlich gestaltetes Büschel wird nun auch von einer beliebigen Transversale in einem Punktsystem geschnitten, und dies muss immer ein hyperbolisches sein, wie aus der besonderen Lage der vier Grundpunkte hervorgeht; wir können auch sofort einen Asymptotenpunkt desselben bestimmen; ein solcher ist nämlich der Schnittpunkt der Transversale mit der Berührungssehne, weil diese als ein zusammengefallenes Linienpaar anzusehen ist oder als ein besonderer Kegelschnitt, dessen beide Schnittpunkte mit der Transversale vereinigt sind; dies ist daher ein Asymptotenpunkt des Punktsystems; das gemeinschaftliche Tangentenpaar trifft ausserdem die Transversale in zwei conjugirten Punkten desselben Punktsystems, und wir schliessen hieraus den Satz: Ein beliebiges Tangentenpaar eines Kegelschnitts und die Berührungssehne desselben treffen irgend eine Transversale in der Ebene in einem Punktpaar $a\alpha$ und einem Punkte g; die Transversale trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten $b\beta$; alsdann ist immer g ein Asymptotenpunkt desjenigen Punktsystems, von welchem $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare conjugirter Punkte sind. Diese allerdings auch unmittelbar aus den Polarbeziehungen des Kegelschnitts hervorgehende Eigenschaft löst die vorgelegte Frage.

Seien nämlich $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ die beiden gegebenen Geraden, welche den gesuchten Kegelschnitt berühren, und ABC die drei Punkte, durch welche er gehen soll, so ziehe man AB, merke die Schnittpunkte $\gamma\gamma_1$ dieser Geraden mit den gegebenen $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$; durch die Paare AB und $\gamma\gamma_1$ als conjugirte Punkte wird ein Punktsystem bestimmt, dessen Asymptotenpunkte ermittelt werden müssen; sie seien g und h; ebenso ziehe man zweitens AC, merke die Schnittpunkte $\beta\beta_1$ dieser Geraden mit den beiden gegebenen $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$; betrachte AC und $\beta\beta_1$ als zwei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems und bestimme dessen Asymptotenpunkte $g'h'$. Zieht man nun eine Verbindungslinie zweier solcher Asymptotenpunkte aus dem einen und dem andern Paar, so muss dieselbe jede der beiden Geraden $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ in zwei solchen Punkten treffen, welche die Berührungspunkte eines durch ABC gehenden und $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ berührenden Kegelschnitts sind; da aber die vier Punkte gh und $g'h'$ ausser durch die beiden Geraden AB und AC auf vier Arten verbunden werden können, nämlich durch die Geraden gg', hh', gh', hg', so giebt es im Allgemeinen *vier Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene Gerade berühren.* Zögen wir noch BC, bestimmten die Schnittpunkte $\alpha\alpha_1$ mit den Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ und ermittelten die Asymptotenpunkte $g''h''$ des durch die Punktpaare BC und $\alpha\alpha_1$ bestimmten Punktsystems, so müssten dieselben auf den vorhin gefundenen vier Geraden liegen, weil der gesuchte Kegelschnitt durch jene schon vollkommen bestimmt ist; also die 6 Punkte $ghg'h'g''h''$ können sich nur auf vier Geraden schneiden, sind daher die Ecken eines vollständigen Vierseits: es muss also $g'' = (gg', hh')$, $h'' = (gh', hg')$ sein und es ist $A = (gh, g'h')$ $B = (gh, g''h'')$ $C = (g'h', g''h'')$, d. h. ABC das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits, was sich auch als besonderer Satz aussprechen lässt. Aus der im Vorigen erhaltenen Lösung geht hervor, dass entweder alle vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen, reell vorhanden sind oder keiner, dass ersteres nur stattfindet, wenn von den auf AB, AC, BC bestimmten Punktsystemen zwei, folglich auch das dritte hyperbolisch sind, letzteres dagegen, wenn eines dieser Punktsysteme elliptisch ist, woraus zugleich hervorgeht, dass noch ein zweites elliptisch sein muss, denn wären die beiden andern hyperbolisch, so müsste auch das erstere hyperbolisch sein. Die Betrachtung aller möglichen Lagen der Punkte ABC zu den beiden Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ zeigt, dass von den drei Punktsystemen auf den Geraden AB, AC, BC entweder alle drei hyperbolisch oder eines hyperbolisch und zwei elliptisch sein müssen; im ersten Falle sind die vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen, reell, im zweiten imaginär.

Die beiden noch übrigen Fälle, wenn zur Construction eines Kegelschnitts gegeben sind: a) drei Tangenten und zwei Punkte, b) vier Tangenten und ein Punkt, werden durch die polare Nebenbetrachtung in gleicher Weise, wie die beiden oben behandelten, gelöst, und es finden sich im Allgemeinen bei a) vier Lösungen, bei b) zwei Lösungen der Aufgabe; die nähere Ausführung darf füglich unterbleiben, weil sie der obigen ohne jede Schwierigkeit nachgebildet werden kann. Auch die Lösung der mitunter sich darbietenden Aufgabe: „*Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten drei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, den vierten zu finden*“, ergiebt sich leicht aus dem Vorigen; seien abc die drei bekannten gemeinschaftlichen Punkte und ausserdem de zwei Punkte des einen Kegelschnitts K, welche denselben bestimmen, $d_1 e_1$ zwei Punkte des andern Kegelschnitts K_1, so ziehe man die Verbindungslinie dd_1 und bestimme auf ihr die beiden übrigen Schnittpunkte $\delta\delta_1$ der gegebenen Kegelschnitte KK_1 vermittelst des *Pascal*'schen Satzes; die Paare d, δ; d_1, δ_1 bestimmen ein Punktsystem, welches von sämmtlichen Kegelschnitten desjenigen Büschels, dem K und K_1 angehören, auf diesem Träger ausgeschnitten wird; also auch die Linienpaare dieses Büschels treffen in conjugirten Punkten jenes Punktsystems; trifft also bc die Verbindungslinie dd_1 in ξ und ist der conjugirte Punkt von ξ in dem bekannten Punktsystem x, so ist ax eine gemeinschaftliche Secante beider Kegelschnitte; trifft ca die Gerade dd_1 in η und ist der conjugirte Punkt des Punktsystems y, so ist auch by eine gemeinschaftliche Secante, folglich der Schnittpunkt (ax, by) der gesuchte vierte gemeinschaftliche Punkt beider Kegelschnitte; dieser könnte auch dadurch gefunden werden, dass wir den andern Schnittpunkt eines der beiden Kegelschnitte K (oder K_1) mit der Geraden ax bestimmen; suchen wir noch den Schnittpunkt ζ von ab und dd_1 und seinen conjugirten z, so geht auch cz durch den gesuchten vierten gemeinschaftlichen Punkt beider Kegelschnitte, worin ein Satz enthalten ist. (Sind von den Punkten abc zwei imaginär, so tritt eine Modification in die Auflösung der Aufgabe, welche nach der auf S. 146 gemachten Bemerkung leicht zu finden ist.)

Auf derselben charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels beruht die Lösung der Aufgabe: *Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, die beiden übrigen zu finden.* Seien ab die bekannten gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kegelschnitte KK_1 und ausserdem vom ersten drei Punkte cde, vom andern $c_1 d_1 e_1$ zu seiner Bestimmung gegeben; dann ziehe man cc_1, bestimme die Schnittpunkte $\gamma\gamma_1$ der Kegelschnitte KK_1 mit der Geraden cc_1; die Punktpaare c, γ; c_1, γ_1 bestimmen das Punktsystem des Büschels (K, K_1); in gleicher Weise ziehe man dd_1 und bestimme die übrigen Schnittpunkte $\delta\delta_1$ mit den Kegelschnitten KK_1;

die Paare d, δ; d_1, δ_1 bestimmen ein zweites Punktsystem auf dd_1; trifft nun die Gerade ab die cc_1 in ξ und dd_1 in η, und sind x und y die conjugirten Punkte in den bekannten Punktsystemen, so ist xy eine gemeinschaftliche Secante der Kegelschnitte KK_1, und ihre Schnittpunkte mit einem derselben sind mithin die gesuchten gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte.

Dieselbe Betrachtung, welche im Anfange dieses Paragraphen zu der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Transversale in einem Punktsystem geschnitten zu werden, geführt hat, lässt sich noch erweitern; denken wir uns nämlich einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und zwei Punkte B und B_1 als die Mittelpunkte zweier ihn erzeugenden projectivischen Strahlbüschel: ausserdem ein beliebiges Strahlbüschel (P) in der Ebene, dessen Strahlen $\mathfrak{A}$ den Kegeschnitt $\mathfrak{K}$ in je zwei Punkten treffen, welche mit B verbunden ein Strahlsystem in dem Punkte B liefern (S. 151); fassen wir endlich den Strahl $\mathfrak{A}$ als den perspectivischen Durchschnitt zweier projectivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten B und B_1 auf und drehen nun das ganze System von Strahlbüschelpaaren in B und B_1 um beliebige Drehwinkel, so wird aus dem Strahlbüschel (P) ein Kegelschnittbüschel von vier Punkten $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$, aus dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein gewisser anderer Kegelschnitt $\mathfrak{K}^1$ (vorhin drehten wir dergestalt, dass $\mathfrak{K}^1$ in ein Linienpaar zerfiel); jeder Kegelschnitt K des Büschels wird von $\mathfrak{K}^1$ in zwei Punkten geschnitten, welche vor der Drehung die Schnittpunkte des Strahles $\mathfrak{A}$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ waren; da diese mit B verbunden zwei Strahlen gaben, welche ein Strahlsystem bilden, so wird dasselbe auch nach der Drehung stattfinden müssen; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^1$ geht nun selbst durch den Punkt B (und B_1); das Strahlsystem in B trifft ihn daher in Punktpaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt laufen müssen (S. 151); wir erhalten also folgenden Satz:

Legt man durch zwei von den vier Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen Kegelschnitt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels im Allgemeinen noch zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt läuft; dieser feste Punkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden übrigen Grundpunkte des Büschels.

Ein besonderer Fall dieses Satzes verdient noch bemerkt zu werden; wenn nämlich der Kegelschnitt, welcher durch zwei Grundpunkte des Büschels gelegt wird, insbesondere ein Linienpaar ist (was jederzeit eintritt, sobald der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus zwei Geraden besteht, deren eine durch B, die andere durch B_1 geht, wo dann die beiden diesen Kegelschnitt erzeugenden Strahlbüschel in dem sogenannten parabolischen Fall projectivischer Beziehung sich befinden, Seite 73), so wird die eine durch B gehende Gerade das Kegelschnittbüschel in einer Punktreihe treffen, welche projectivisch ist mit derjenigen Punktreihe, in welcher die andere durch B_1 gehende Gerade von dem Kegelschnittbüschel getroffen wird, und diese beiden Punktreihen müssen perspectivisch liegen. Also: *Jede Gerade, welche durch einen der vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels hindurchgeht, wird von den Kegelschnitten des Büschels (ausserdem) in einer Punktreihe getroffen; irgend zwei solcher Punktreihen sind allemal projectivisch rücksichtlich derjenigen Schnittpunkte, welche derselbe Kegelschnitt auf ihnen bestimmt, und sie liegen perspectivisch, wenn die Träger derselben durch verschiedene Grundpunkte des Büschels laufen.* Alle diese Punktreihen sind projectivisch mit demjenigen Strahlbüschel (P), aus welchem das Kegelschnittbüschel entstanden gedacht werden kann, und auch projectivisch mit jedem der vier Strahlbüschel, welche von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Grundpunkte gebildet werden; denn letztere sind, wie leicht zu sehen ist, mit dem Strahlbüschel (P) projectivisch (indem wir berücksichtigen, dass die Tangenten in B diejenigen Strahlen sind, welche dem gemeinsamen Strahl B_1B für alle Beziehungen entsprechen).

Gehen dagegen zwei Gerade durch denselben Grundpunkt B des Büschels, so sind die durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte des Büschels auf ihnen fixirten Punktreihen offenbar auch projectivisch, liegen aber nicht mehr perspectivisch, weil ein Kegelschnitt des Büschels, welcher die erste Gerade in B berührt, nicht gleichzeitig die andere berühren kann, also in dem Schnittpunkte der beiden Geraden nicht zwei entsprechende Punkte vereinigt sind. Die Verbindungsstrahlen aller entsprechenden Punkte werden daher einen Kegelschnitt umhüllen, welcher ausser den Trägern der beiden Punktreihen, wie leicht einzusehen ist, die drei Seiten desjenigen Dreiecks zu Tangenten haben muss, welches von den drei übrigen Grundpunkten des Büschels gebildet wird; mithin haben wir den Satz:

Zieht man durch einen der vier Grundpunkte des Büschels irgend zwei Gerade, so treffen alle Kegelschnitte des Büschels dieselben in je zwei Punkten, deren Verbindungslinie einen Kegelschnitt umhüllt. Dieser Kegelschnitt berührt die beiden angenommenen Geraden selbst und ist ausserdem dem Dreiecke einbeschrieben, welches von den drei übrigen Grundpunkten des Büschels gebildet wird.

Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall eines allgemeineren, zu welchem wir gelangen, wenn wir durch einen der vier Grundpunkte des Büschels einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ anstatt des Linienpaares hindurchlegen. Obgleich dieser Satz später aus allgemeineren Betrachtungen unmittelbar hervortritt, so lässt er sich auch hier in folgender Art ableiten:

Seien $PABC$ die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels und sei durch einen derselben P ein beliebiger aber fester Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegt; möge irgend ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels den $\mathfrak{K}^{(2)}$ in den vier Punkten $Pxyz$ treffen, so kann ich $Pxyz$ als die vier Grundpunkte eines neuen Büschels auffassen, von welchem $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ zwei Individuen sind. Die Verbindungslinie AB wird von diesem neuen Büschel in einem Punktsystem geschnitten, von welchem AB ein Paar conjugirter Punkte, die beiden Schnittpunkte $c\gamma$ der Geraden AB mit dem festen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein zweites Paar conjugirter Punkte sind, und da durch diese beiden Paare das ganze Punktsystem bestimmt ist, so bleibt es unverändert dasselbe, wenn wir den Kegelschnitt $K^{(2)}$ des gegebenen Büschels verändern; ein drittes Punktpaar ist nun dasjenige Paar Schnittpunkte, welches von den Geraden Px und yz auf AB ausgeschnitten wird. Verändern wir aber den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in dem gegebenen Büschel, so verändert sich dies dritte Paar und durchläuft mithin sämmtliche Paare conjugirter Punkte eines festen Punktsystems auf AB. Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(Px, AB) = x_1$ und $(yz, AB) = \xi_1$, so sind $x_1 \xi_1$ ein Paar conjugirter Punkte eines bekannten Punktsystems und durchlaufen also bei der Veränderung von $K^{(2)}$ zwei zu einander projectivische Punktreihen (S. 52) auf derselben Geraden AB. Nehmen wir andererseits die Gerade AC, so gilt für sie ganz dieselbe Betrachtung; wird also der Schnittpunkt $(Px, AC) = x_2$ und $(yz, AC) = \xi_2$ bezeichnet, so durchlaufen auch x_2 und ξ_2 zwei projectivische Punktreihen auf dem Träger AC, weil sie conjugirte Punkte eines bestimmten festen Punktsystems sind; da aber die Punktreihen x_1 und x_2 perspectivisch liegen in dem von Px beschriebenen Strahlbüschel, so müssen die von ξ_1 und ξ_2 durchlaufenen Punktreihen projectivisch sein, also ihre Verbindungslinie, d. h. yz muss einen Kegelschnitt umhüllen, welcher zugleich die Geraden AB und AC berührt; derselbe Kegelschnitt wird zugleich von den Verbindungslinien xz und xy umhüllt, denn die Strahlen Py und xz treffen AB in zwei conjugirten Punkten desselben oben ermittelten Punktsystems auf AB und auch AC in zwei conjugirten Punkten des zweiten auf AC festen Punktsystems; es trifft also auch xz die Träger AB und AC in zwei entsprechenden Punkten der beiden auf ihnen befindlichen Punktreihen ξ_1 und ξ_2, und dasselbe gilt von xy. Die Seiten des mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ veränderlichen Dreiecks xyz umhüllen daher einen und denselben Kegelschnitt, welcher, wie unmittelbar einleuchtet, nicht nur AB und AC, sondern auch BC berührt (weil die sechs Seiten zweier einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecke selbst einen andern Kegelschnitt berühren, S. 129). Wir haben hiernach folgenden Satz:

Wenn man durch einen der vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen (festen) Kegelschnitt hindurchlegt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels im Allgemeinen noch drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die Seiten dieser sämmtlichen Dreiecke umhüllen einen und denselben neuen Kegelschnitt, welcher zugleich demjenigen Dreieck einbeschrieben ist, das von den drei übrigen Grundpunkten des Büschels gebildet wird.

Dieser Satz, welcher in dem besonderen Fall, dass der durch einen der vier Grundpunkte gelegte Kegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt, auf den vorhin bewiesenen zurückkommt, lässt sich auch in etwas anderer Form so aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte einen Punkt gemein haben, so haben je zwei derselben im Allgemeinen noch drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die neun Seiten der hierdurch erhaltenen drei Dreiecke berühren einen und denselben Kegelschnitt. Oder umgekehrt:

Wenn einem Kegelschnitt drei Dreiecke umschrieben werden, so liegen die sechs Ecken je zweier derselben allemal auf einem neuen Kegelschnitt (S. 129)*; die auf diese Weise erhaltenen drei neuen Kegelschnitte laufen durch einen und denselben Punkt.*

Die Richtigkeit dieser Umkehrung ist ohne Schwierigkeit einzusehen. Der allgemeinste Satz, welcher aus der Verbindung eines Kegelschnittbüschels mit einem beliebig liegenden Kegelschnitt hervorgeht, kann erst später aufgesucht werden (§. 63).

Anmerkung. Es ist in den vorigen Sätzen stillschweigend vorausgesetzt worden, dass zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Schnittpunkte haben; es ist nun zwar umgekehrt nachgewiesen, dass durch vier Punkte der Ebene zwei Kegelschnitte (und zugleich ein ganzes Büschel) gehen; auch ist es an sich klar, dass zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier gemeinschaftliche Punkte haben können, denn hätten sie fünf Punkte gemein, so würden sie identisch zusammenfallen, weil fünf Punkte den Kegelschnitt vollständig und eindeutig bestimmen (S. 99); es ist aber unentschieden, ob zwei Kegelschnitte immer vier reelle Schnittpunkte haben? Diese Frage wird im Folgenden erledigt werden, wo es sich zeigen wird, dass zwei Kegelschnitte entweder vier oder zwei oder keine reellen Schnittpunkte haben; trotzdem sagen wir, zwei Kegelschnitte haben im Allgemeinen vier Schnittpunkte, von denen zwei oder auch alle vier imaginär sein können (§. 54 und 62).

§. 41. Andere Entstehungsart des Kegelschnittbüschels.

Denken wir uns von einem Kegelschnittbüschel mit den vier Grundpunkten $ABCD$ ein beliebiges Individuum $K^{(2)}$ durch zwei Strahlbüschel erzeugt, deren eines seinen Mittelpunkt in B und das andere seinen Mittelpunkt in einem beliebigen Punkte X des Kegelschnitts $K^{(2)}$ hat, so haben wir drei Paare entsprechender Strahlen dieser beiden erzeugenden Strahlbüschel: BC und XC, BD und XD, BA und XA. Halten wir nun die Gerade XA fest, verändern aber X auf ihr, so entstehen successive sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, und von den beiden projectivischen Strahlbüscheln, welche jeden solchen Kegelschnitt erzeugen, ist das eine B absolut unverändert, das andere verändert seinen Mittelpunkt auf einer festen Geraden AX, geht aber beständig durch eine feste Punktreihe auf der Geraden CD, welche mit dem Strahlbüschel in B projectivisch ist; die drei oben angegebenen Strahlenpaare bestimmen nämlich die projectivische Beziehung jenes Strahlbüschels mit dieser Punktreihe, und diese drei Paare entsprechender Elemente bleiben bei der Bewegung von X unverändert. Wir können also umgekehrt folgende neue Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels aussprechen:

In der Ebene ist ein festes Strahlbüschel

$$B\,(a\,b\,c\,..\,x\,..)$$

und eine Gerade $\mathfrak{A}$ *als Träger einer festen mit dem Strahlbüschel projectivischen Punktreihe* $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\,..)$ *gegeben und es bewegt sich ein veränderlicher Punkt* X *auf einer gegebenen Geraden* $\mathfrak{G}$ *als Mittelpunkt eines mit der Punktreihe perspectivischen Strahlbüschels* $X\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,..\,\mathfrak{x}\,..)$; *dann wird jedesmal von den beiden projectivischen Strahlbüscheln* (B) *und* (X) *ein Kegelschnitt erzeugt; alle diese Kegelschnitte gehen durch vier feste Punkte und bilden also ein Kegelschnittbüschel.*

Die Richtigkeit hiervon erhellt unmittelbar aus der Umkehrung der vorigen Betrachtung, denn die in der angegebenen Weise construirten Kegelschnitte gehen zunächst sämmtlich durch den festen Punkt B, sodann durch die beiden Doppelpunkte C und D derjenigen beiden auf dem Träger $\mathfrak{A}$ befindlichen projectivischen Punktreihen, deren eine die gegebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,..\,\mathfrak{x}\,..)$ ist, und deren andere durch das feste Strahlbüschel B $(abc\,..\,x\,..)$ auf $\mathfrak{A}$ ausgeschnitten wird, endlich noch durch einen vierten festen Punkt A, denjenigen nämlich, in welchem die Gerade $\mathfrak{G}$ von einem Strahle des Strahlbüschels (B) getroffen wird, welcher entsprechend ist dem einzigen Punkte der Punktreihe auf $\mathfrak{A}$, der zugleich auf $\mathfrak{G}$ liegt. Diese reelle Construction der sämmtlichen Kegelschnitte eines Büschels liefert nicht nur das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten, wie die frühere (§. 39), sondern auch ein Kegelschnittbüschel, von dem nur zwei Grundpunkte reell und die beiden andern imaginär sind. Die Grundpunkte A und B sind nämlich der Natur der Construction zufolge immer reell vorhanden; die Punkte C und D sind aber die Doppelpunkte zweier aufeinander liegender projectivischer Punktreihen auf dem Träger $\mathfrak{A}$, deren eine die gegebene $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$ ist und die andere durch das gegebene Strahlbüschel $B\ (abc\ldots x\ldots)$ auf $\mathfrak{A}$ ausgeschnitten wird. Ob diese beiden zusammenliegenden projectivischen Punktreihen reelle Doppelpunkte haben oder nicht, hängt von der Natur ihrer projectivischen Beziehung ab (S. 42). Wir können die das Kegelschnittbüschel bestimmenden Gebilde offenbar so annehmen, dass einmal die Doppelpunkte reell werden, das andere Mal nicht, und beide Gruppen von Kegelschnitten werden denselben Namen des Kegelschnittbüschels beanspruchen können, denn alle Eigenschaften, welche der einen zukommen, müssen unter der Modalität, dass gewisse Elemente imaginär werden, in gleicher Weise auch der andern zukommen.

Wir begnügen uns hier damit, aus der neuen Entstehungsart des Kegelschnittbüschels, welche auch zu einem *Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten* führt, die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleiten, dass jede Transversale der Ebene durch dasselbe in einem Punktsysteme geschnitten wird. Denken wir uns nämlich eine beliebige Transversale $\mathfrak{T}$ in der Ebene, und werde dieselbe von dem Strahlbüschel $B\ (abc\ldots x\ldots)$ in einer Punktreihe $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots$ geschnitten, so sind die beiden Punktreihen auf $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}$ projectivisch und die Verbindungslinie $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ wird daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ umhüllen, welcher selbst $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}$ berührt. Um die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels mit der Transversale $\mathfrak{T}$ zu ermitteln, haben wir solche zwei Strahlen $X\mathfrak{x}$ und x zu ermitteln, welche sich auf $\mathfrak{T}$ schneiden, d. h. wir haben aus X an den eben ermittelten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ das Tangentenpaar zu legen; die Schnittpunkte dieser beiden Tangenten mit der Transversale $\mathfrak{T}$ werden zugleich die Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ sein; nun ist aber $\mathfrak{T}$ selbst eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ und es gilt der Satz (S. 152), dass, wenn man aus den Punkten X einer Geraden $\mathfrak{G}$ die Tangentenpaare an einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ legt, irgend eine feste Tangente $\mathfrak{T}$ desselben allemal in den Punktpaaren eines Punktsystems von jenen Tangentenpaaren getroffen wird; folglich wird die beliebige Transversale $\mathfrak{T}$ von den Kegelschnitten $K^{(2)}$ des Büschels in Punktpaaren getroffen, welche Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems sind, w. z. b. w. Diese Eigenschaft findet jetzt also ganz unabhängig davon statt, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle Grundpunkte hat oder zwei reelle und zwei imaginäre.

Sobald das Kegelschnittbüschel vier reelle Grundpunkte hat, kommen, wie wir bereits von anderer Seite her wissen, drei Linienpaare unter den Kegelschnitten des Büschels vor; dasselbe zeigt sich auch hier; denn seien C und D die beiden reellen Doppelpunkte der in $\mathfrak{A}$ auf einander liegenden projectivischen Punktreihen, so leuchtet ein, dass für einen solchen Punkt X_0 auf G, welcher in der Linie BC sich befindet, die beiden den Kegelschnitt des Büschels erzeugenden Strahlbüschel perspectivisch werden, der Kegelschnitt selbst also in ein Linienpaar zerfällt; dasselbe gilt für denjenigen Punkt X_0', in welchem BD die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft. Diese beiden Linienpaare existiren aber nicht, wenn die Doppelpunkte C und D der beiden in $\mathfrak{A}$ zusammenliegenden projectivischen Punktreihen imaginär sind. Es kommt aber noch ein drittes Linienpaar vor, welches der Lage X_0'' des Schnittpunktes von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}$ entspricht. In diesem Falle tritt die schon oft gefundene parabolische Lage ein und der Kegelschnitt löst sich in die beiden Geraden BA und $\mathfrak{A}$ auf. Dieses Linienpaar bleibt bestehen, auch wenn die Doppelpunkte auf dem Träger $\mathfrak{A}$ nicht reell sind. Wir schliessen hieraus: In einem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten giebt es nur ein *reelles Linienpaar*, und dasselbe besteht aus der Verbindungslinie der beiden reellen Grundpunkte und einer bestimmten anderen Geraden $\mathfrak{A}$, welche als die Verbindungslinie der beiden imaginären Grundpunkte aufgefasst werden kann und *ideelle gemeinschaftliche Secante* genannt wird.

Nimmt man irgend zwei Kegelschnitte K und K^1 des Büschels als gegeben an, und haben dieselben die beiden reellen Punkte A und B gemein, so sind wir im Stande, die andere gemeinschaftliche Secante, d. h. den andern Theil des Linienpaares, dessen einer die reelle gemeinschaftliche Secante AB ist, zu construiren, unabhängig davon, ob diese eine reelle oder ideelle gemeinschaftliche Secante ist; denn wegen der charakteristischen Eigenschaft des Büschels haben wir nur nöthig, auf einer beliebigen Transversale $\mathfrak{T}$ die Schnittpunktpaare a und α, a^1 und α^1 der Kegelschnitte K und K^1 zu merken und in dem Punktsystem, welches durch die beiden Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ bestimmt wird, denjenigen Punkt σ zu bestimmen, welcher dem Schnittpunkte s der Geraden AB mit $\mathfrak{T}$ conjugirt ist; alle Punkte σ, welche wir auf diese Weise construiren, müssen auf einer bestimmten Geraden $\mathfrak{A}$ liegen, welche die gesuchte ist; die Construction eines Punktes σ geht aus §. 16 unzweideutig hervor entweder vermittelst der Gleichheit der Doppelverhältnisse oder der bekannten Relationen für die Involution von sechs Punkten.

Diese Construction kann linear so ausgeführt werden:

Sind von dem Kegelschnitt K die Punkte $ABpqr$ und von dem Kegelschnitt K^1 die Punkte $ABp^1q^1r^1$ gegeben, so ziehe man pp^1 und ermittele die andern Schnittpunkte $\pi\pi^1$ mit den Kegelschnitten KK^1; trifft pp^1 die Gerade AB in s, und ist σ der conjugirte Punkt zu s in demjenigen Punktsystem, welches durch die beiden Paare conjugirter Punkte $p\pi$ und $p^1\pi^1$ bestimmt wird, so liegt σ auf der gesuchten Geraden. Verfährt man also mit der Geraden qq^1 ebenso wie mit pp^1, so erhält man einen zweiten Punkt derselben, und sie ist durch diese beiden Punkte schon bestimmt; aber man kann natürlich auch mehr Punkte von ihr finden und erhält dadurch neue Sätze.

Wir können uns auch anstatt der Transversale $\mathfrak{T}$ eines beliebigen Kegelschnitts bedienen, welcher nur durch A und B geht. Sei $\mathfrak{K}$ ein solcher Kegelschnitt, welcher durch A und B geht, übrigens aber ganz willkürlich ist; möge er den Kegelschnitt K in zwei Punkten treffen, deren Verbindungslinie $\mathfrak{B}$ sei, und K^1 in zwei Punkten, deren Verbindungslinie $\mathfrak{B}^1$ sei, so wird der Schnittpunkt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^1)$ auf der Geraden $\mathfrak{A}$ liegen; denn bezeichnen wir ihn mit σ und ziehen durch σ eine Transversale $\mathfrak{T}$, welche K in a und α, K^1 in a^1 und α^1 trifft, und die Gerade AB in s, endlich den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in b und β, so sind erstens $a\alpha$, $b\beta$ und $s\sigma$ drei Punktpaare eines Punktsystems, zweitens auch $a^1\alpha^1$, $b\beta$ und $s\sigma$; beide Punktsysteme müssen identisch sein, weil zwei Paare conjugirter Punkte dieselben sind: $b\beta$ und $s\sigma$; folglich sind auch $a\alpha$, $a^1\alpha^1$ und $s\sigma$ drei Paare conjugirter Punkte dieses Punktsystems; also liegt σ auf der andern gemeinschaftlichen Secante $\mathfrak{A}$ der beiden Kegelschnitte K und K^1; wir können mithin folgenden Satz aussprechen:

Haben irgend drei Kegelschnitte zwei reelle Punkte gemeinschaftlich oder eine reelle gemeinschaftliche Secante, so haben je zwei derselben allemal noch eine zweite (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante (die Verbindungslinie der beiden übrigen Schnittpunkte); die auf diese Weise erhaltenen drei geraden Linien laufen durch einen Punkt.

Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, die ideelle gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, zu construiren; sind nämlich K und K^1 die beiden gegebenen Kegelschnitte, welche die reellen Schnittpunkte A und B haben, so lege man durch A und B einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der K in zwei andern Punkten trifft und K^1 ebenfalls; die beiden Verbindungslinien dieser je zwei Punkte treffen sich in einem Punkte σ

derjenigen Geraden $\mathfrak{A}$, welche die gesuchte (ideelle) gemeinschaftliche Secante der gegebenen Kegelschnitte K und K^1 ist; es reicht also hin, einen zweiten Punkt σ vermittelst eines andern Kegelschnitts $\mathfrak{K}^1$ zu construiren, um die Gerade $\mathfrak{A}$ zu erhalten. Halten wir den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ fest und verändern K, indem wir ihn sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durchlaufen lassen, so bleibt der Punkt σ fest und wir erkennen hieraus die Gültigkeit eines in §. 40 für den Fall eines Kegelschnittbüschels mit vier reellen Grundpunkten bewiesenen Satzes auch in dem Falle, dass nur zwei Grundpunkte reell und die beiden andern imaginär sind (S. 239).

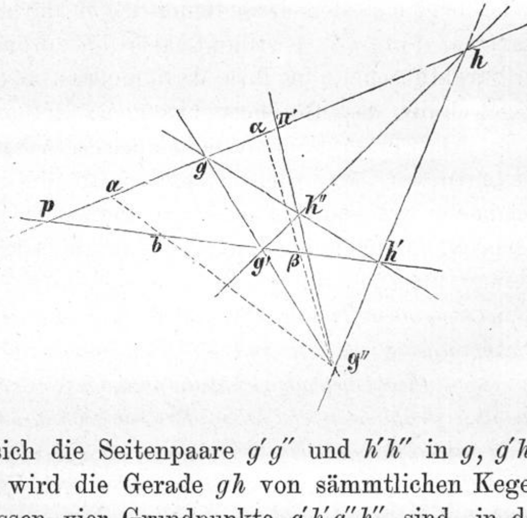
Die Bestimmung der Gattung der einzelnen Kegelschnitte, welche in dem Büschel vorkommen, ist bei der hier zu Grunde gelegten Entstehungsart nicht schwieriger, wie bei der in §. 39 gegebenen. Um zu entscheiden, ob ein Kegelschnitt des Büschels Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, haben wir nur nachzusehen, wie oft in den beiden projectivischen Strahlbüscheln, welche ihn erzeugen, zwei entsprechende Strahlen parallel laufen; denken wir uns daher zu jedem Strahl x des festen Strahlbüschels (B) eine Parallele durch den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}$ der gegebenen Punktreihe $(\mathfrak{A})$ gezogen, so wird diese Parallele die Gerade $\mathfrak{G}$ in einem solchen Punkte X treffen, dass $X\mathfrak{x}$ und x zwei entsprechende parallele Strahlen sind, also der Kegelschnitt, welcher dieser Lage von X entspricht, einen unendlich-entfernten Punkt hat. Nun umhüllen aber alle diese Parallelen, welche durch die Punkte $\mathfrak{x}$ den Strahlen x parallel gezogen werden, eine bestimmte Parabel $P^{(2)}$, wie leicht zu erkennen ist, denn die Strahlen x des Strahlbüschels (B) treffen die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ in einer Punktreihe, welche mit der vom Punkte $\mathfrak{x}$ beschriebenen projectivisch ist; die durch $\mathfrak{x}$ parallel dem Strahle x gezogene Gerade verbindet mithin entsprechende Punkte zweier projectivischer Punktreihen und umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente hat, folglich eine Parabel ist. Es ist auch auf andere Weise leicht einzusehen, *dass die durch die Punkte einer Punktreihe zu den entsprechenden Strahlen eines mit ihr projectivischen Strahlbüschels gezogenen Parallelen eine Parabel umhüllen*, indem man aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse vermittelst der durch den Parallelismus gegebenen Proportionen nachweist, dass der gesuchte Ort das Erzeugniss zweier projectivisch-ähnlicher Punktreihen ist. Denken wir uns diese Parabel $P^{(2)}$ hergestellt, so können zwei Fälle eintreten: 1) Die Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet die Parabel $P^{(2)}$ nicht; alsdann sind sämmtliche Kegelschnitte des Büschels Hyperbeln, weil durch jeden Punkt X der Geraden $\mathfrak{G}$ ein Tangentenpaar an die Parabel geht, also der dem Punkte X zugehörige

Kegelschnitt des Büschels zwei unendlich-entfernte Punkte hat; oder 2) die Gerade 𝔊 schneidet die Parabel $P^{(2)}$ in zwei reellen Punkten; alsdann giebt es in dem Kegelschnittbüschel eine Gruppe von Hyperbeln und eine Gruppe von Ellipsen, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; die letzteren gehören denjenigen beiden Punkten X der Geraden 𝔊 zu, in welchen dieselbe von der Parabel $P^{(2)}$ geschnitten wird; die zwischen den beiden Schnittpunkten liegenden Punkte X können nur Ellipsen hervorrufen, da durch sie keine Tangenten der Parabel $P^{(2)}$ gehen; die ausserhalb jener beiden Schnittpunkte, d. h. ausserhalb der Parabel $P^{(2)}$ liegenden Punkte X der Geraden 𝔊 liefern nur Hyperbeln. Im ersten wie im zweiten Falle giebt es nur eine gleichseitige Hyperbel in dem Kegelschnittbüschel; diese entspricht dem Schnittpunkte der Geraden 𝔊 mit der Leitlinie der Parabel $P^{(2)}$, weil die Leitlinie der Ort aller rechtwinkligen Tangentenpaare an die Parabel ist; in dem besonderen Falle, dass die Gerade 𝔊 die Leitlinie selbst ist, besteht das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, und in dem besonderen Falle, dass die Gerade 𝔊 die Parabel $P^{(2)}$ berührt, findet sich in dem Büschel, welches aus lauter Hyperbeln besteht, nur eine einzige Parabel vor, und die Gruppe von Ellipsen geht vollständig fort. Die Parabel $P^{(2)}$ entscheidet auch darüber, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle oder nur zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte hat, denn das aus B an diese Parabel gelegte Tangentenpaar trifft die Gerade 𝔄 offenbar in den beiden festen Punkten C und D, durch welche sämmtliche Kegelschnitte des Büschels gehen; liegt also der Punkt B ausserhalb der Parabel $P^{(2)}$, so hat das Büschel vier reelle Grundpunkte, liegt B innerhalb der Parabel, so hat es zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte. Wir könnten endlich für den Fall von von vier reellen Grundpunkten auch aus der neuen Entstehungsweise das Kriterium herleiten, welches wir in §. 39 gefunden haben, und wonach aus der relativen Lage der vier Grundpunkte sofort zu entscheiden ist, welcher der beiden Fälle 1) oder 2), die nach dem Obigen eintreten können, wirklich stattfindet. Doch überlassen wir dies dem Leser, da das Kriterium aus dem Früheren bekannt ist. Wenn dagegen das Büschel zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte hat, so zeigt es sich, dass der Fall 1) eintritt, sobald die Gerade 𝔄, auf welcher die beiden imaginären Grundpunkte liegen, die beiden reellen Grundpunkte von einander trennt, d. h. zu beiden Seiten von sich hat, der Fall 2) aber, sobald die Gerade 𝔄 die beiden reellen Grundpunkte auf derselben Seite von sich hat.

§. 42. Erzeugung des Kegelschnittbüschels vermittelst zweier Punktsysteme.

Wir haben im Vorigen zwei Kegelschnittbüschel kennen gelernt, die in ihren charakteristischen Eigenschaften übereinstimmen, aber in den sie bestimmenden Elementen verschieden sind, nämlich das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten und das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten. Die sämmtlichen Kegelschnitte des einen, wie des anderen Büschels haben wir auf reellem Wege construiren gelehrt und uns aus diesen Constructionen von der Uebereinstimmung der wesentlichen Eigenschaften beider Büschel überzeugt; es giebt noch ein drittes *Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten*, und es kommt darauf an, auch für diesen Fall sämmtliche Kegelschnitte eines solchen Büschels auf reellem Wege zu construiren. Diese Construction muss auch die beiden vorigen Fälle umfassen und wir gelangen zu ihr am kürzesten, indem wir von dem Fall, dass die vier Grundpunkte des Büschels reell sind, ausgehen. Seien g' h' g'' h'' vier beliebige Punkte in der Ebene als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels (Fig. 63) gewählt,

Fig. 63.



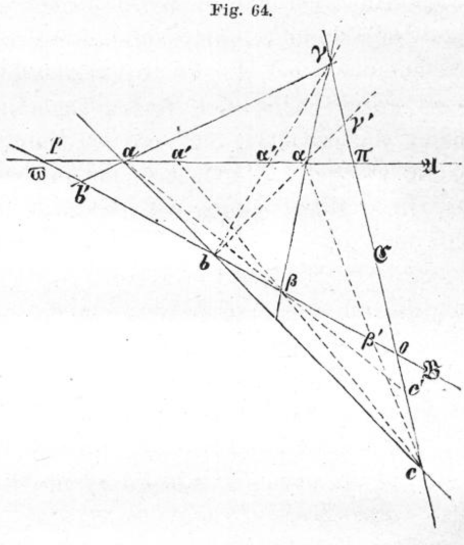
und mögen sich die Seitenpaare $g'g''$ und $h'h''$ in g, $g'h''$ und $h'g''$ in h treffen, so wird die Gerade gh von sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels, dessen vier Grundpunkte $g'h'g''h''$ sind, in den conjugirten Punktpaaren $a\alpha$ eines Punktsystems getroffen, dessen Asymptotenpunkte g und h sind, so dass also immer $a\alpha$ zugeordnet-harmonische Punkte zu g und h sind; insbesondere trifft auch das Linienpaar $g'h'$ und $g''h''$ in zwei conjugirten Punkten p und π desselben Punktsystems. Wir können also irgend zwei conjugirte Punkte $a\alpha$ dieses Punktsystems als die Mittelpunkte zweier projectivischen Strahlbüschel annehmen, welche einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels erzeugen, und die projectivische Beziehung dieser beiden Strahlbüschel ist vollständig bestimmt, da der Kegelschnitt durch die vier gemeinschaftlichen Grundpunkte $g'h'g''h''$ gehen soll. Diese beiden den Kegelschnitt erzeugenden projectivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten a und α treffen die Gerade $g'h'$ in zwei projectivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte g' und h' sind; die beiden sich entsprechenden Strahlen ag'' und $\alpha g''$ treffen in b und β die Gerade $g'h'$, und die Punkte $b\beta$ sind zugeordnet-harmonisch zu $g'h'$, weil $a\alpha$ zu gh harmonisch liegen. Hierdurch sind schon drei Paare entsprechender Punkte der beiden projectivischen Punktreihen auf $g'h'$ bekannt, nämlich der Doppelpunkt g', der Doppelpunkt h' und das Punktpaar $b\beta$, also die ganze projectivische Beziehung ist vollständig bestimmt. Sämmtliche Paare entsprechender Punkte dieser beiden auf einander liegenden projectivischen Punktreihen bilden, wie leicht zu erkennen ist, ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte $g'h'$ sind; denn umgekehrt besteht ein solches Punktsystem aus zwei auf einander liegenden projectivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte die Asymptotenpunkte $g'h'$ sind, und von denen zwei entsprechende Punkte $b\beta$ zugeordnet-harmonisch liegen zu $g'h'$. Dieses durch die beiden festen Grundpunkte $g'h'$ unveränderlich gegebene Punktsystem auf $g'h'$ bestimmt also die projectivische Beziehung zweier Strahlbüschel, die ihre Mittelpunkte in a und α haben und einen Kegelschnitt des Büschels erzeugen; verändern wir das Punktpaar $a\alpha$ in dem ersten Punktsysteme, dessen Asymptotenpunkte gh sind, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, und wir gelangen daher zu folgender neuen Construction derselben, welche, allgemein aufgefasst, unabhängig davon ist, ob die Grundpunkte des Büschels reell oder imaginär sind:

Sind auf zwei geraden Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Punktsysteme (a, α) und (b, β) beliebig gegeben, und nimmt man irgend ein Paar conjugirter Punkte $a\alpha$ des ersten Punktsystems zu Mittelpunkten zweier Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen nach allen Paaren conjugirter Punkte $b\beta$ des andern Punktsystems hingehen, so erzeugen diese beiden Strahlbüschel einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, den Ort des Schnittpunktes $(ab, \alpha\beta)$ oder auch $(a\beta, \alpha b)$. Verändert man das Punktpaar $a\alpha$ auf dem ersten Träger $\mathfrak{A}$, so gehören sämmtliche Kegelschnitte $K^{(2)}$ einem Kegelschnittbüschel an.

In der That, da zwei conjugirte Punkte eines Punktsystems immer zwei entsprechende Punkte zweier auf einander liegender projectivischer Punktreihen sind, so ist der Ort des Schnittpunktes $(ab, \alpha\beta)$ das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlbüschel (a) und (α), also ein

Kegelschnitt $K^{(2)}$; weil aber beim Punktsystem alle Paare entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen (S. 49), so ist der Ort des Schnittpunktes $(\alpha\beta,\ ab)$ derselbe Kegelschnitt $K^{(2)}$. Dieser geht offenbar durch die beiden Asymptotenpunkte $g'h'$ des auf dem Träger $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsystems, wenn dasselbe hyperbolisch ist, und alle Kegelschnitte $K^{(2)}$, die wir bei der Veränderung von $a\alpha$ erhalten, gehen durch dieselben beiden festen Punkte $g'h'$, welche reell vorhanden sind, sobald das gegebene Punktsystem auf $\mathfrak{B}$ hyperbolisch, dagegen imaginär sind, sobald dasselbe elliptisch ist. Sei ferner in dem Schnittpunkte der beiden Träger $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ein Punkt p des ersten Punktsystems auf $\mathfrak{A}$ und ein Punkt $\tilde{\omega}$ des andern Punktsystems auf $\mathfrak{B}$ vereinigt, und seien die zu diesem conjugirten Punkte in dem einen und andern Punktsystem π und o, so ziehen wir $o\pi = \mathfrak{C}$, eine Gerade, die natürlich immer reell vorhanden sein muss. Nehmen wir jetzt irgend ein Punktpaar $a\alpha$ des ersten und ein beliebiges Punktpaar $b\beta$ des zweiten Punktsystems heraus, und möge die Gerade $\mathfrak{C}$ von ab in c und von $\alpha\beta$ in γ getroffen werden (Fig. 64), so werden, wenn wir zunächst a und α festhalten, aber $b\beta$ bewegen, die Punkte c und γ zwei auf einander liegende projectivische Punktreihen durchlaufen und überdies ein Punktsystem bilden, denn ebenso wie dem Punkt c der ersten Punktreihe der Punkt γ der zweiten entspricht, muss auch dem Punkt γ der ersten Punktreihe der Punkt c der zweiten entsprechen; ziehen wir nämlich $a\gamma$ und αc, so treffen dieselben die Gerade $\mathfrak{B}$ in den Punkten $b'\beta'$ eines Paares conjugirter Punkte des auf $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsystems, weil die drei Seitenpaare des

Fig. 64.



Vierecks $a\alpha c\gamma$ die Transversale $\mathfrak{B}$ in drei Punktpaaren eines Punktsystems treffen müssen, welche sind $b\beta$, $o\tilde{\omega}$, $b'\beta'$. Wir sehen also, dass bei den von c und γ beschriebenen projectivischen Punktreihen zwei entsprechende gleiche Strecken verkehrt auf einander fallen, mithin $c\gamma$ die conjugirten Punkte eines Punktsystems sind; diesem Punktsystem gehört auch o und π als ein Paar conjugirter Punkte und ebenso diejenigen Punkte $c'\gamma'$ an, in welchen $\mathfrak{C}$ von $a\beta$ und $b\alpha$

getroffen wird. Wenn daher irgend ein auf die oben angegebene Weise construirter Kegelschnitt $K^{(2)}$ als das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlbüschel aufgefasst wird, welche in einem Paare $a\alpha$ ihre Mittelpunkte haben, so treffen zwei entsprechende Strahlen die Gerade $\mathfrak{C}$ immer in zwei conjugirten Punkten $c\gamma$ eines Punktsystems; es zeigt sich ferner, dass dieses Punktsystem für alle Kegelschnitte $K^{(2)}$ dasselbe bleibt. Denken wir uns nämlich für den Augenblick ein Paar $b\beta$ fest und verändern $a\alpha$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$, so werden ba und $\beta\alpha$ in zwei conjugirten Punkten c und γ eines Punktsystems die Gerade $\mathfrak{C}$ treffen, weil $\mathfrak{C}$ durch den Punkt π geht, der dem im Schnittpunkte $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ liegenden p conjugirt ist; also werden auch $b\gamma$ und βc in einem Paar conjugirter Punkte $a'\alpha'$ die Gerade $\mathfrak{A}$ treffen müssen; es folgt daraus, dass dieses neue Punktsystem (c, γ), welches wir bei Festhaltung von b und β auf $\mathfrak{C}$ erhalten, mit dem vorigen identisch ist, weil ein Paar $c\gamma$ und das Paar $o\pi$, welche zur Bestimmung ausreichen, coincidiren. Nehmen wir nun irgend zwei Paare conjugirter Punkte $x\xi$ und $y\eta$ der beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme willkürlich heraus, so werden, weil ba und $\beta\alpha$ in einem Paare conjugirter Punkte $c\gamma$ des eben bestimmten Punktsystems die Gerade $\mathfrak{C}$ treffen, auch bx und $\beta\xi$ in einem andern Paare desselben treffen, und weil xb und $\xi\beta$ in einem solchen Paare treffen, auch xy und $\xi\eta$ in einem neuen Paare conjugirter Punkte. Wir erhalten mithin auf der Geraden $\mathfrak{C}$ ein festes durch die beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme mitbestimmtes Punktsystem (c, γ) und sehen, dass, wenn die Verbindungslinie irgend zweier Punkte x und y auf den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die dritte $\mathfrak{C}$ in z trifft, die Verbindungslinie der beiden zu x und y conjugirten Punkte ξ und η die Gerade $\mathfrak{C}$ in dem zu z conjugirten Punkte ζ trifft, so dass z und ζ ein Punktpaar des dritten Punktsystems sind.

Die drei Punktsysteme (x, ξ) (y, η) (z, ζ) auf den Trägern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ stehen noch in der allgemeineren Beziehung zu einander, *dass, wenn man aus jedem derselben ein beliebiges Paar conjugirter Punkte herausnimmt, diese drei Punktpaare $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$ immer sechs Punkte eines Kegelschnitts sind*, wovon die vorige Eigenschaft, dass, wenn xyz in einer Geraden liegen, auch die drei conjugirten $\xi\eta\zeta$ in einer Geraden liegen müssen, nur ein specieller Fall ist. Der allgemeine Fall lässt sich aber so erweisen: Seien x, ξ; y, η; z, ζ die drei willkürlich gewählten Paare conjugirter Punkte auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so treffen xy und $\eta\xi$ die Gerade $\mathfrak{C}$ in zwei conjugirten Punkten des auf $\mathfrak{C}$ bekannten Punktsystems; ein zweites Paar conjugirter Punkte sind die Schnittpunkte von $x\xi$ und ηy mit $\mathfrak{C}$, ein drittes Paar endlich z und ζ, folglich gilt die

Gleichheit der Doppelverhältnisse der Strahlbüschel:

$$x(\xi y z \zeta) = \eta (y \xi \zeta z)$$

und da nach S. 8 identisch:

$$\eta (y \xi \zeta z) = \eta (\xi y z \zeta), \quad \text{also}$$
$$x (\xi y z \zeta) = \eta (\xi y z \zeta), \quad \text{ist,}$$

so liegen die sechs Punkte $x \xi y \eta z \zeta$ auf einem Kegelschnitt (S. 126).

Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der obigen Behauptung, dass das Punktsystem $c\gamma$ für alle Kegelschnitte $K^{(2)}$ dasselbe bleibt. Ist daher dies Punktsystem auf $\mathfrak{C}$ ein hyperbolisches, mit den beiden Asymptotenpunkten $g''h''$, so müssen sämmtliche Kegelschnitte $K^{(2)}$ durch diese beiden festen Punkte $g''h''$ und ausserdem durch die beiden vorhin ermittelten Punkte $g'h'$, also durch vier feste Punkte gehen; sie bilden mithin ein Kegelschnittbüschel. Da das Punktsystem auf $\mathfrak{C}$ von den beiden gegebenen Punktsystemen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abhängt, so bleibt noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen es elliptisch oder hyperbolisch wird, um zu erkennen, wann die beiden festen Grundpunkte $g''h''$ des Büschels reell und wann sie imaginär sind. Das immer reell vorhandene, von den drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildete Dreiseit bestimmt für jedes der drei Punktsysteme ein Paar conjugirter Punkte, nämlich die beiden Schnittpunkte jeder der drei Geraden mit den beiden andern; sind also die Ecken dieses Dreiseits (Fig. 64) o, π und p (oder $\tilde{\omega}$), und wir nehmen irgend zwei Punkte a und b innerhalb der Dreiecksseiten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so wird nach dem bekannten Kriterium (S. 56) das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ elliptisch oder hyperbolisch sein, je nachdem der conjugirte Punkt α auf der Verlängerung der Dreiecksseite $\mathfrak{A}$ oder zwischen πp liegt, und dasselbe gilt für das Punktsystem auf $\mathfrak{B}$. Die Verbindungslinie ab trifft nun die dritte Dreiecksseite $\mathfrak{C}$ in c, welches ausserhalb $o\pi$ liegt, die Verbindungslinie $\alpha\beta$ dagegen in dem zu c conjugirten Punkte γ; wenn daher α zwischen πp und β zwischen $o\tilde{\omega}$ liegt, so trifft $\alpha\beta$ die $\mathfrak{C}$ ausserhalb $o\pi$; dasselbe findet auch statt, wenn α ausserhalb πp und gleichzeitig β ausserhalb $o\tilde{\omega}$ liegt; sind also die beiden Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *gleichartig*, d. h. beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist das Punktsystem auf $\mathfrak{C}$ hyperbolisch; sind sie dagegen *ungleichartig*, d. h. eines elliptisch und das andere hyperbolisch, so ist das dritte Punktsystem auf $\mathfrak{C}$ elliptisch. Wir sehen hieraus, dass von den drei Punktsystemen auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nothwendig entweder alle drei hyperbolisch oder eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen. Wir können hiernach folgende vier Fälle unterscheiden:

Punktsystem auf $\mathfrak{A}$:	Punktsystem auf $\mathfrak{B}$:	Das Kegelschnittbüschel hat:
I. hyperbolisch	hyperbolisch	vier reelle Grundpunkte $g'h'$ $g''h''$
II. hyperbolisch	elliptisch	vier imaginäre Grundpunkte
III. elliptisch	hyperbolisch	zwei reelle Grundpunkte $g'h'$
IV. elliptisch	elliptisch	zwei reelle Grundpunkte $g''h''$

und in diesen vier Fällen ist:

	das Punktsystem auf $\mathfrak{C}$:
I.	hyperbolisch
II.	elliptisch
III.	elliptisch
IV.	hyperbolisch.

Wir sehen hieraus, dass nur in dem Falle I drei reelle Linienpaare unter den Kegelschnitten des Büschels auftreten, dass aber in jedem der drei übrigen Fälle nur ein und immer ein Linienpaar $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in dem Büschel vorkommt. Dieses Linienpaar geht nämlich hervor, wenn das besondere Punktpaar $p\pi$ zu Mittelpunkten zweier erzeugenden Strahlbüschel gewählt wird, wobei dann wieder der parabolische Fall projectivischer Beziehung eintritt (S. 73); sonst kann der Kegelschnitt $K^{(2)}$ auf keine andere Weise in ein Linienpaar zerfallen, als wenn die Mittelpunkte der ihn erzeugenden Strahlbüschel a und α zusammenfallen, also das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch ist, und auch dann wird ein solches Linienpaar nur reell vorhanden sein, wenn gleichzeitig das Punktsystem auf $\mathfrak{B}$ hyperbolisch ist, also im Falle (I), wie leicht zu erkennen. Zugleich sehen wir, dass in diesem vollständig reellen Falle die sechs Asymptotenpunkte zu je dreien auf vier Geraden liegen, also ein vollständiges Vierseit bilden, dessen drei Diagonalen die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sind. Hieraus ergiebt sich beiläufig der elementare Satz: *Sind die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits gh, $g'h'$, $g''h''$ und trifft irgend eine Gerade in der Ebene diese drei Diagonalen gh, $g'h'$, $g''h''$ beziehlich in den Punkten $ss's''$, so liegen die zugeordneten vierten harmonischen Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ zu jenen, indem jedes Paar Gegenecken das andere Paar zugeordnet-harmonischer Punkte ist, allemal in einer neuen Geraden.**)

Das vorhin gefundene Resultat, dass die Kegelschnitte $K^{(2)}$ des Büschels sämmtlich durch die Asymptotenpunkte der auf den Trägern $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ befindlichen Punktsysteme (b, β) und (c, γ) hindurchgehen, falls diese Punktsysteme oder eines von ihnen hyperbolisch sind, lässt

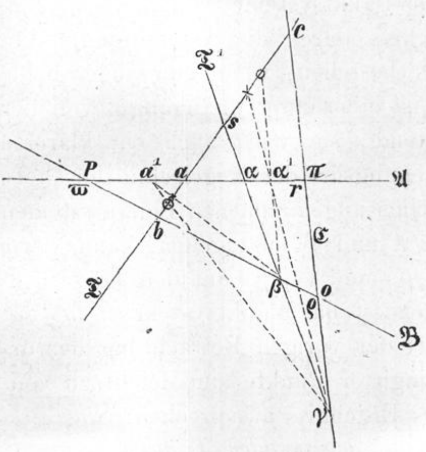
*) Siehe: *J. Steiner,* Aufgaben u. Lehrsätze in *Crelle*'s Journal, Bd. III. S. 212.

sich anders aussprechen und wird dadurch unabhängig von der Natur der beiden Punktsysteme. Es ist ersichtlich, dass die beiden festen Punktsysteme auf 𝔅 und ℭ in Bezug auf jeden Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels diejenigen sind, welche diesem Kegelschnitt zugehören (S. 140), d. h. für alle Kegelschnitte $K^{(2)}$ sind b und β ein Paar conjugirter Punkte (S. 146), oder die Polare von b geht durch β, und ebenso ist es mit c, γ; denn nehmen wir irgend ein Paar Punkte $a\alpha$ auf 𝔄 als Mittelpunkte der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Strahlbüschel, so sind die Schnittpunkte $(ab, \alpha\beta)$ und $(a\beta, \alpha b)$ zwei Punkte dieses Kegelschnitts, der auch durch a und α geht, und das Viereck im Kegelschnitt hat b und β zu zwei Diagonalpunkten, folglich sind diese conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt (S. 147). Also *für sämmtliche Kegelschnitte $K^{(2)}$ des Büschels ist das auf 𝔅 befindliche Punktsystem (b, β) und ebenfalls das auf ℭ befindliche Punktsystem (c, γ) dasjenige, welches jedem Kegelschnitt zugehört.* Diese Eigenschaft involvirt die obige, dass, wenn eines oder beide Punktsysteme hyperbolisch sind, sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durch die Asymptotenpunkte gehen müssen; sie bleibt aber auch bestehen, wenn eines oder beide Punktsysteme elliptisch sind, und ist überhaupt unabhängig von der besonderen Natur dieser Punktsysteme; sie wirft auch ein klareres Licht auf die hier betrachtete Entstehungsart des Kegelschnittbüschels, denn anstatt von den beiden willkürlich angenommenen Punktsystemen (a, α) und (b, β) auf den Trägern 𝔄 und 𝔅 auszugehen, können wir die beiden festen Punktsysteme (b, β) und (c, γ) auf den Trägern 𝔅 und ℭ als gegeben ansehen; dadurch ist das Punktsystem (a, α) auf 𝔄 vollständig mitbestimmt, wie aus der vorigen Betrachtung hervorgeht, und beliebig viele Paare conjugirter Punkte sind leicht zu construiren. Wir können also folgendes Ergebniss aussprechen: *Sind zwei feste Punktsysteme (b, β) und (c, γ) auf den geraden Trägern 𝔅 und ℭ gegeben, so bilden sämmtliche Kegelschnitte in der Ebene, für welche diese Punktsysteme die ihnen zugehörigen sind* (d. h. jedes Paar conjugirter Punkte eines Punktsystems ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt ist), *ein Kegelschnittbüschel, und zwar hat dasselbe vier reelle Grundpunkte, die Asymptotenpunkte der beiden Punktsysteme, sobald dieselben hyperbolisch sind, zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte, sobald eines der beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch, das andere elliptisch ist, und vier imaginäre Grundpunkte, wenn beide Punktsysteme elliptisch sind. Diejenige Gerade 𝔄, welche die conjugirten Punkte zu den in dem Schnittpunkte $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = o$ vereinigten Punkten verbindet, ist die Polare von o für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels; irgend zwei Verbindungslinien bc und $\beta\gamma$ treffen 𝔄 beziehlich in zwei Punkten a und*

α, welche conjugirte Punkte eines und desselben festen Punktsystems (a, α) auf $\mathfrak{A}$ sind, und zwar desjenigen, in welchem das Kegelschnittbüschel die Gerade $\mathfrak{A}$ schneidet; hiernach lassen sich sämmtliche Kegelschnitte des Büschels auf reelle Weise construiren, wie oben angegeben ist, mögen die Grundpunkte des Büschels reell oder imaginär sein. Die Träger $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selbst bilden ein Linienpaar, welches ein besonderer Kegelschnitt des Büschels ist.

Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass eine beliebige Transversale in der Ebene desselben von jedem Kegelschnitte des Büschels in je zwei conjugirten Punkten eines Punktsystems getroffen wird, lässt sich nun auch aus dieser neuen Construction des Büschels nachweisen und bleibt bestehen, ob die Grundpunkte des Büschels alle vier reell oder nur zwei oder keiner reell vorhanden ist. Treffe (Fig. 65) eine beliebige gerade Transversale $\mathfrak{T}$ die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in den resp. Punkten abc, und seien $\alpha\beta\gamma$ die zu diesen conjugirten Punkte in den drei auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ befindlichen Punktsystemen, so liegen nach dem Vorigen $\alpha\beta\gamma$ in einer neuen Geraden $\mathfrak{T}^1$, und der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^1$ sei s. Nehmen wir nun ein beliebiges Punktpaar $a^1\alpha^1$ des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems zu Mittelpunkten zweier projectivischen Strahlbüschel, welche einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ des Büschels erzeugen, so werden leicht vier Paare entsprechender Strahlen dieser beiden Strahlbüschel anzugeben sein, nämlich die folgenden:

Fig. 65.



$$a^1(b\beta c\gamma) \quad \text{und} \quad \alpha^1(\beta b \gamma c).$$

Die Doppelverhältnisse dieser beiden Strahlbüschel von je vier Strahlen sind also gleich und weil identisch:

$$\alpha^1(\beta b\gamma c) = \alpha^1(b\beta c\gamma) \quad \text{ist} \quad \text{(Seite 7)},$$

so folgt:

$$a^1(b\beta c\gamma) = \alpha^1(b\beta c\gamma),$$

d. h. die sechs Punkte $a^1\alpha^1 b\beta c\gamma$ liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ (der offenbar nicht zum Büschel gehört). Fassen wir aber die vier Punkte $a^1\alpha^1\beta\gamma$ dieses Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ auf, so lassen sich durch dieselben drei Linienpaare legen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ selbst und diese drei

Linienpaare bestimmen auf der Transversale $\mathfrak{T}$ vier Paare conjugirter Punkte eines gewissen Punktsystems (S. 234), nämlich das Paar bc, das Paar as und die Schnittpunkte der $\mathfrak{T}$ mit den Linienpaaren $a^1\beta$, $\alpha^1\gamma$ und $a^1\gamma$, $\alpha^1\beta$, welche wir nicht besonders bezeichnen wollen. Diese beiden letzten Punktpaare, welche das Punktsystem vollständig bestimmen, liegen gleichzeitig mit denjenigen beiden Punkten xy in Involution, in denen der Kegelschnitt $K^{(2)}$ die Transversale $\mathfrak{T}$ trifft, denn wegen der Projectivität der beiden den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Strahlbüschel müssen die Doppelverhältnisse gleich sein:

$$a^1(b\gamma xy) = \alpha^1(\beta cxy) \quad \text{oder}$$
$$= \alpha^1(c\beta yx)$$

Die vier Strahlen $a^1(b\gamma xy)$ treffen also $\mathfrak{T}$ in vier Punkten, deren Doppelverhältniss gleich demjenigen zwischen den vier Punkten ist, in welchen die andern vier Strahlen $\alpha^1(c\beta yx)$ dieselbe treffen, und da zwei entsprechende gleiche Strecken (xy und yx) verkehrt auf einander fallen, so erhalten wir auf $\mathfrak{T}$ ein Punktsystem, von welchem ein Paar conjugirter Punkte xy, ein zweites Paar bc und ein drittes Paar die Schnittpunkte des Linienpaares $a^1\gamma$, $\alpha^1\beta$ sind. Dieses Punktsystem ist identisch mit dem vorhin ermittelten, weil zwei Punktpaare dieselben sind; in ähnlicher Weise können wir aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$a^1(\beta cxy) = \alpha^1(b\gamma xy) = \alpha^1(\gamma byx)$$

schliessen, dass bc, xy und die Schnittpunkte des Linienpaares $a^1\beta$, $\alpha^1\gamma$ mit $\mathfrak{T}$ sechs Punkte in Involution sind, was übrigens nicht mehr nöthig ist. Wir sehen also, dass die sechs Punkte bc, as, xy Involution bilden, und verändern wir das Punktpaar $a^1\alpha^1$, also den Kegelschnitt $K^{(2)}$, so erkennen wir, weil bc und as unverändert bleiben, dass sämmtliche Kegelschnitte $K^{(2)}$ des Büschels die Transversale $\mathfrak{T}$ in Paaren conjugirter Punkte eines Punktsystems schneiden, w. z. b. w. Die Schnittpunkte bc entsprechen dem besonderen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher in das Linienpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ degenerirt, und die Schnittpunkte as demjenigen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher als das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlbüschel auftritt, deren Mittelpunkte a und α sind.

Aus der hierdurch nachgewiesenen Haupteigenschaft des Kegelschnittbüschels ergiebt sich nun auch unabhängig davon, ob dasselbe reelle oder paarweise imaginäre Grundpunkte hat, die Folgerung, dass *durch jeden beliebigen Punkt der Ebene ein und nur ein einziger reeller Kegelschnitt geht, welcher dem Büschel angehört*; denn ziehen wir durch einen beliebigen Punkt P der Ebene eine Transversale, so fixiren die Kegelschnitte des Büschels auf ihr ein Punktsystem, welches schon durch irgend zwei Paare conjugirter Punkte bestimmt wird. Der dem

Punkte P conjugirte Punkt des Punktsystems auf dieser Transversale gehört dem einzigen Kegelschnitt des Büschels an, welcher durch P geht, und drehen wir die Transversale um P, so erhalten wir als Aufeinanderfolge der conjugirten Punkte den ganzen reell vorhandenen Kegelschnitt. Es können aber durch P keine zwei verschiedenen Kegelschnitte des Büschels gehen, denn sonst müsste es in einem Punktsystem zu irgend einem Punkte mehr als einen conjugirten Punkt geben, was der Natur des Punktsystems widerspricht.

Es folgt ferner, dass *das Kegelschnittbüschel durch zwei beliebig in der Ebene anzunehmende Kegelschnitte vollständig bestimmt ist*, weil dieselben auf jeder Transversale das Punktsystem durch zwei Paare conjugirter Punkte bestimmen. Aber eine solche Transversale $\mathfrak{T}$ in der Ebene braucht nicht von jedem Kegelschnitte des Büschels getroffen zu werden, d. h. es kann auch imaginäre Punktpaare eines Punktsystems geben. Um dieses Verhalten klarer zu übersehen, denken wir uns die beiden Schnittpunkte der Transversale $\mathfrak{T}$ mit einem Kegelschnitte des Büschels als die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ zugehört (S. 140); ist dieses Punktsystem hyperbolisch, so sind die Schnittpunkte reell, ist es elliptisch, so sind sie imaginär. Für jeden Kegelschnitt $K^{(2)}$ erhalten wir also auf der Transversale $\mathfrak{T}$ ein anderes Punktsystem, und alle diese unendlich vielen Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ stehen in dem Zusammenhange mit einander, dass ihre Asymptotenpunkte selbst ein Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ bilden, welches von dem Kegelschnittbüschel auf $\mathfrak{T}$ ausgeschnitten wird. Nehmen wir nun einen beliebigen Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in der Ebene an, und verlegen nach irgend einem Punkt B desselben die Mittelpunkte von Strahlsystemen, welche mit den auf $\mathfrak{T}$ befindlichen unendlich vielen Punktsystemen perspectivisch liegen, so wird, wenn wir ein Strahlsystem der Art bilden, jedes Paar conjugirter Strahlen eine Sehne auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ausschneiden, die durch einen festen Punkt P läuft (S. 151), und wir verwandeln also ein jedes Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ in einen Punkt P oder ein einfaches Strahlbüschel (P). Ist das betrachtete Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch, so muss P ausserhalb des Hülfskegelschnittes $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, nämlich der Schnittpunkt der beiden Tangenten sein in denjenigen Punkten, in welchen die Asymptoten des in B befindlichen mit jenem Punktsystem perspectivischen Strahlsystems den $\mathfrak{K}^{(2)}$ treffen. P ist also jedesmal der Pol derjenigen Geraden, welche die beiden Schnittpunkte des Hülfskegelschnitts mit den Strahlen, welche von B nach den beiden Asymptotenpunkten eines auf $\mathfrak{T}$ befindlichen Punktsystems hinlaufen, verbindet. Da nun diese Asymptotenpunkte selbst ein Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ bilden, welches durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, so laufen die Sehnen alle durch einen festen Punkt O, und der Punkt P bewegt sich also auf einer festen Geraden $\mathfrak{L}$, der Polare von O in Bezug auf den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Alle Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ sind also in die sämmtlichen Punkte P einer bestimmten Geraden $\mathfrak{L}$ verwandelt, der Art, dass, wenn wir nunmehr von irgend einem Punkte P der Geraden $\mathfrak{L}$ die Polare construiren und ihre Schnittpunkte auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ mit B verbinden, dieses Strahlenpaar die Transversale $\mathfrak{T}$ in einem Punktpaar $(x, \mathfrak{x})$ trifft. Hieraus zeigt sich, dass, wenn das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{T}$ elliptisch ist, der Punkt O innerhalb des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen muss, also die Gerade $\mathfrak{L}$ denselben gar nicht trifft, mithin alle unendlich vielen Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch sind, oder was dasselbe sagt: *Alle Kegelschnitte des Büschels treffen eine Transversale $\mathfrak{T}$ in reellen Punktpaaren, sobald das Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ elliptisch ist, welches die Schnittpunkte je eines Kegelschnitts des Büschels zu einem Paare conjugirter Punkte hat.* Wenn dagegen das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch ist, so liegt O ausserhalb des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, die Gerade $\mathfrak{L}$ schneidet ihn daher in zwei reellen Punkten, welche die beiden Gebiete auf $\mathfrak{L}$ abgrenzen, innerhalb deren solche Punkte P liegen, die reelle Tangentenpaare an $\mathfrak{K}^{(2)}$ zulassen, und solche P, durch welche keine Tangente geht. Von den unendlich vielen Punktsystemen auf $\mathfrak{T}$ ist also eine Gruppe hyperbolisch und die andere elliptisch. Den Uebergang bilden zwei parabolische Punktsysteme, welche den Asymptotenpunkten des Punktsystems $(x, \mathfrak{x})$ zugehören, d. h. es giebt zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Transversale $\mathfrak{T}$ berühren, wie bereits bekannt ist. *Ist also das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, welches von den Kegelschnitten eines Büschels auf einer Transversale $\mathfrak{T}$ ausgeschnitten wird, hyperbolisch, so treffen nicht alle Kegelschnitte desselben die $\mathfrak{T}$ in reellen Punktpaaren. Das hyperbolische Punktsystem hat also auch imaginäre Paare conjugirter Punkte*, was beim elliptischen Punktsystem nicht der Fall ist.

Ist das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf der Transversale $\mathfrak{T}$ hyperbolisch, und sind p und q die Asymptotenpunkte desselben, so muss jedes reelle Schnittpunktpaar eines Kegelschnitts des Büschels mit $\mathfrak{T}$ ein Paar zugeordnet-harmonischer Punkte mit p und q sein; diese Eigenschaft hört aber auf, wenn das Schnittpunktpaar imaginär ist; wir können an ihre Stelle eine allgemeinere Eigenschaft setzen, welche jene nicht nur ersetzt, sondern auch von der Realität der Schnittpunkte unabhängig ist, nämlich folgende: *Die Asymptotenpunkte pq des auf der Transversale $\mathfrak{T}$ durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnittenen Punktsystems sind ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf sämmtliche*

Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt, wenn wir irgend zwei Kegelschnitte des Büschels auffassen, von denen jeder auf der Transversale $\mathfrak{T}$ ein bestimmtes ihm zugehöriges Punktsystem inducirt, dass diese beiden Punktsysteme ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte haben, die Asymptotenpunkte des auf $\mathfrak{T}$ durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnittenen Punktsystems (x, $\mathfrak{x}$), und umgekehrt, sobald zwei das Kegelschnittbüschel bestimmende Kegelschnitte gegeben sind und eine Transversale $\mathfrak{T}$, von welcher nicht erforderlich ist, dass sie die beiden Kegelschnitte in reellen Punkten treffe, so wird das Punktsystem (x, $\mathfrak{x}$) auf $\mathfrak{T}$ dadurch gefunden werden können, dass wir das gemeinschaftliche Paar conjugirter Punkte der beiden auf $\mathfrak{T}$ durch die beiden gegebenen Kegelschnitte inducirten Punktsysteme aufsuchen (S. 58); ist dieses pq gefunden, so werden pq die Asymptotenpunkte des Punktsystems (x, $\mathfrak{x}$) sein, welches dadurch vollständig bestimmt ist. Das Kegelschnittbüschel besitzt also folgende Eigenschaft: *Alle Punktsysteme, welche auf einer beliebigen Transversale als den verschiedenen Kegelschnitten des Büschels zugehörig inducirt werden, haben ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte, nämlich die Asymptotenpunkte des auf der Transversale durch die Kegelschnitte des Büschels ausgeschnittenen Punktsystems* (x, $\mathfrak{x}$). Diese Eigenschaft wird später bei den Polaritäts-Beziehungen des Kegelschnittbüschels noch näher erörtert werden (§. 47).

Es drängt sich hiernach die unabweisbare Frage auf, ob aus der in diesem Paragraphen angegebenen Erzeugungsweise des Kegelschnittbüschels in allen vier oben unterschiedenen Fällen sämmtliche Kegelschnitte hervorgehen, die in dem Büschel enthalten sind. Dies ist nach dem Vorigen evident in den Fällen III und IV, wo das erzeugende Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ elliptisch ist; in den Fällen I und II aber, wo es hyperbolisch ist, fragt es sich, ob für jeden Punkt s der Ebene der durch s gehende einzige Kegelschnitt, welcher zum Büschel gehört, durch zwei projectivische Strahlbüschel erzeugt werden kann, welche ihre Mittelpunkte in einem Paare conjugirter Punkte a und α des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems haben, d. h. ob durch jeden Punkt s zwei solche Strahlen ab und $\alpha\beta$ gehen, deren Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nämlich $a\alpha$ und $b\beta$, zwei Paare conjugirter Punkte der beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme sind. Legen wir durch s zwei Strahlsysteme perspectivisch mit (a, α) und (b, β), so haben dieselben (Seite 158) ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Strahlen, sobald eines der beiden Strahlsysteme elliptisch ist, also immer in den Fällen II, III, IV; sind dagegen beide hyperbolisch, also im Falle I, so haben sie nur dann ein gemeinsames Paar, wenn die Asymptoten des einen durch die des andern nicht getrennt werden, im andern

Falle keins. Mithin werden in der That durch unsere Construction in dem Falle I nicht sämmtliche Kegelschnitte des Büschels erhalten; dies ist aber gerade der bequemste Fall von vier reellen Grundpunkten, welcher am einfachsten durch die in §. 39 ausgeführte Betrachtung erledigt wird. In dem Falle II eines Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Grundpunkten, für den die in diesem Paragraphen mitgetheilte Construction die einzige war, zeigt sich also, dass dieselbe sämmtliche (reellen) Kegelschnitte des Büschels liefert; denn es giebt durch irgend einen reellen Punkt s der Ebene nur einen Kegelschnitt des Büschels; dieser ist unter den von uns construirten enthalten, weil durch s ein Paar reelle Strahlen sab und $s\alpha\beta$ gehen, wenn (im Falle II) das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, auf $\mathfrak{B}$ elliptisch ist; die Strahlbüschel (a) (α) erzeugen aber diesen Kegelschnitt. Mithin darf ein Kegelschnitt des Büschels, dessen Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ imaginär wären, überhaupt keinen reellen Punkt s haben, muss also ganz imaginär sein.

Diese eigenthümliche Erscheinung, dass durch die oben mitgetheilte reelle Construction des Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Grundpunkten sämmtliche reellen Kegelschnitte des Büschels erhalten werden, obwohl das erzeugende Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch ist, hat ihren Grund in der besonderen Beziehung, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ zu dem Kegelschnittbüschel hat. In diesem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten kommt nämlich ein reelles Linienpaar $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, dessen Schnittpunkt o ist, und zwei imaginäre Linienpaare vor, deren jedes einen reellen (Doppel-) Punkt hat; die letzteren sind die Asymptotenpunkte g und h des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen hyperbolischen Punktsystems; jeder dieser beiden Punkte ist als ein Kegelschnitt (*Null-Kegelschnitt*, analog den Null-Kreisen oder Grenzpunkten eines Kreisbüschels mit ideeller gemeinschaftlicher Secante), der sich auf einen Punkt zusammengezogen hat, oder als Schnittpunkt eines imaginären Linienpaares (S. 112) anzusehen, weil das Strahlsystem $g(b, \beta)$ elliptisch ist, ebenso $h(b, \beta)$. Die Gerade $\mathfrak{A}$ hat also die eigenthümliche Beziehung zum Kegelschnittbüschel, dass sie die beiden Nullkegelschnitte enthält. Sie ist zugleich die Polare des Punktes o für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, weil, wie leicht aus der angegebenen Construction zu sehen ist, die beiden Tangenten in a und α für einen Kegelschnitt des Büschels durch o gehen. Ist das Punktsystem (a, α) auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, was in den Fällen (I) und (II), d. h. bei einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen, und bei einem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten eintritt, so sind die beiden Asymptotenpunkte g und h harmonisch zugeordnet zu jedem Schnittpunktpaar $a\alpha$, also conjugirte Punkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Büschels;

da nun $\mathfrak{A}$ die Polare von o ist, so bilden die drei Punkte ogh ein Tripel conjugirter Punkte oder ein Polardreieck für alle Kegelschnitte des Büschels; also ebenso wie bei dem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten die drei Diagonalpunkte des von jenen gebildeten vollständigen Vierecks oder die Doppelpunkte der drei reellen in dem Kegelschnittbüschel enthaltenen Linienpaare *ein gemeinschaftliches Tripel conjugirter Punkte* für alle Kegelschnitte des Büschels sind, giebt es auch bei dem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten ein reelles gemeinschaftliches Polardreieck (o, g, h) für alle Kegelschnitte des Büschels; der eine Tripelpunkt ist der Durchschnittspunkt des einzigen reellen Linienpaares, welches in dem Büschel enthalten ist; von den beiden andern Tripelpunkten ist jeder als der Durchschnittspunkt eines imaginären Linienpaares anzusehen. Bei dem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten ist von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Punkt (o), der Doppelpunkt des einzigen im Büschel enthaltenen Linienpaars, und die Polare von ihm $(\mathfrak{A})$ reell, die beiden andern Tripelpunkte auf ihr (g und h) sind imaginär.

§. 43. Ueber die besondere Natur der in einem Büschel enthaltenen Kegelschnitte.

Die Frage, ob gleichzeitig Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen in einem Kegelschnittbüschel vorkommen, ist zwar schon in §§. 39 und 41 für den Fall, dass dasselbe vier oder wenigstens zwei reelle Grundpunkte besitzt, beantwortet worden, soll aber hier noch einmal unabhängig davon, ob die Grundpunkte reell oder paarweise imaginär sind, allgemeiner und umfassender erörtert werden, indem wir nur die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels voraussetzen, dass jede geradlinige Transversale von demselben in einem Punktsystem geschnitten wird, was oben für alle Fälle erwiesen ist. Nehmen wir nämlich statt einer solchen willkürlichen Transversale die unendlich-entfernte Gerade G_∞, so wird auch auf ihr durch das Büschel ein bestimmtes Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ fixirt. Dieses ist durch zwei Paare conjugirter Punkte vollständig bestimmt; setzen wir die Entstehungsart des Kegelschnittbüschels im vorigen Paragraphen voraus, so können wir zwei reelle Paare conjugirter Punkte des Punktsystems $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ dadurch erhalten, dass wir einmal die beiden unendlich-entfernten Punkte des einen immer reellen Linienpaars $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ als ein Paar nehmen und zweitens den unendlich-entfernten Punkt des Trägers $\mathfrak{A}$ und den unendlich-entfernten Punkt derjenigen Geraden $\mathfrak{M}$ als zweites Paar wählen, welche die Mittelpunkte der drei Punktsysteme auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ enthält; der Mittelpunkt des Punktsystems (a, α) und sein conjugirter, der unendlich-entfernte auf $\mathfrak{A}$, sind nämlich die Mittelpunkte zweier eine Hyperbel erzeugenden projectivischen Strahlbüschel und der andere unendlich-entfernte Punkt dieser Hyperbel liegt im Unendlichen der Geraden $\mathfrak{M}$, welche die Mittelpunkte der gegebenen Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verbindet. Ist das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ bekannt, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, so können wir unmittelbar daraus auf die Natur der Kegelschnitte schliessen, welche in dem Büschel enthalten sind; jede Hyperbel des Büschels schneidet nämlich G_∞ in zwei reellen conjugirten Punkten dieses Punktsystems, jede Ellipse in zwei imaginären und eine Parabel in zwei zusammenfallenden. Es giebt also in dem Kegelschnittbüschel allemal *zwei Parabeln*, sobald das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ hyperbolisch ist; die Asymptotenpunkte desselben sind die Berührungspunkte dieser Parabeln, sie bestimmen die Richtungen ihrer Axen; es giebt dagegen *keine Parabel* in dem Büschel, sobald das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ elliptisch ist; ist es insbesondere parabolisch, d. h. fallen die beiden Asymptotenpunkte zusammen (S. 52), so ist dieser Punkt einer der vier Grundpunkte des Büschels selbst, welches dann nur eine Parabel enthält.

Wir haben noch ein bequemeres Mittel, um zu erfahren, wann das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ elliptisch und wann es hyperbolisch ist; da nämlich die Geraden $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ein Paar conjugirter Richtungen und die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ ein zweites Paar conjugirter Richtungen, für das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ bestimmen, so ist nachzusehen, ob die ersten beiden Richtungen durch die andern beiden getrennt werden oder nicht; im ersten Falle wird das Punktsystem elliptisch, im zweiten Falle hyperbolisch sein; wir haben also durch den Schnittpunkt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ eine Parallele zu $\mathfrak{M}$ zu ziehen und nachzusehen, ob dieselbe zwischen den Punkten p und π (Fig. 65) durchgeht oder nicht; im ersten Falle ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, im andern hyperbolisch. Wir werden nun alle vier (S. 254) unterschiedenen Fälle ins Auge zu fassen haben, um die Lage der Geraden $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. Fassen wir das von den drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildete Dreiseit auf, dessen Ecken paarweise conjugirte Punkte für jedes der drei Punktsysteme auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sind, und bezeichnen demgemäss diese Ecken doppelt mit p und $\tilde{\omega}$, π und r, ϱ und o, so dass die Paare p und π auf $\mathfrak{A}$, o und $\tilde{\omega}$ auf $\mathfrak{B}$, r und ϱ auf $\mathfrak{C}$ conjugirte Punkte sind (Fig. 65); bezeichnen wir ferner die drei Mittelpunkte der Punktsysteme, welche in der Geraden $\mathfrak{M}$ liegen, beziehlich mit $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$, $\mathfrak{m}_c$, so wird, wenn das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch ist, $\mathfrak{m}_a$ ausserhalb $p\pi$ liegen, wenn es elliptisch ist, zwischen $p\pi$, und ebenso bei den beiden andern; von den Asymptotenpunkten liegt aber immer einer zwischen jedem Paare conjugirter Punkte und der andere ausserhalb; endlich wird jede Seite des Dreiecks durch die beiden in ihr befindlichen Ecken in ein endliches Stück und zwei unendliche zerlegt, z. B. 𝔄 in die drei Strecken p bis ∞, π bis ∞ und p bis π. Dies festgehalten, haben wir jetzt:

I. Das Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch, 𝔅 hyperbolisch, ℭ hyperbolisch; das Kegelschnittbüschel hat vier reelle Grundpunkte, die Asymptotenpunkte auf 𝔅 und ℭ. Die Mittelpunktslinie 𝔐 muss alle drei Dreiecksseiten in ihren Verlängerungen treffen, d. h. 𝔐 trifft entweder:

1) 𝔅 in der Strecke von $\tilde{\omega}$ bis ∞ und ℭ von ϱ bis ∞
oder 2) 𝔅 - - - - o - ∞ - ℭ - r - ∞
- 3) 𝔅 - - - - $\tilde{\omega}$ - ∞ - ℭ - r - ∞
- 4) 𝔅 - - - - o - ∞ - ℭ - ϱ - ∞;

in den beiden Fällen 1) und 2) wird eine mit 𝔐 parallel durch o gelegte Gerade zwischen $p\pi$ durchgehen, in den Fällen 3) und 4) ausserhalb; also in 1) und 2) ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, in 3) und 4) hyperbolisch. Die beiden ersten Fälle unterscheiden sich aber von den beiden letzten rücksichtlich der Lage der vier Asymptotenpunkte (der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels) folgendermassen: In den beiden ersten Fällen trennt die Verbindungslinie zweier die beiden andern, wogegen die Verbindungslinie der letzteren die beiden ersteren nicht trennt; in den Fällen 3) und 4) trennt die Verbindungslinie zweier die beiden andern nicht und auch die Verbindungslinie der letzteren die beiden ersteren nicht, oder es trennt gleichzeitig die Verbindungslinie zweier die beiden andern und die Verbindungslinien der letzteren die beiden ersten. Dies lässt sich auch so aussprechen: In den Fällen 1) und 2) liegen die vier Asymptotenpunkte auf 𝔅 und ℭ (Grundpunkte des Kegelschnittbüschels) so, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, und das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ ist dann elliptisch; in den Fällen 3) und 4) liegen die vier Punkte so, dass jeder ausserhalb des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sich befindet, und das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ ist dann hyperbolisch. Dies stimmt mit unserem früher (§. 39) gefundenen Kriterium überein.

II. Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch, 𝔅 elliptisch, ℭ elliptisch; das Kegelschnittbüschel hat vier imaginäre Grundpunkte; die Gerade 𝔐 muss die Dreiecksseiten 𝔅 und ℭ in Punkten treffen, die zwischen den Ecken des Dreiecks liegen; sie selbst, daher auch die durch o zu ihr gezogene Parallele, wird nothwendig die dritte Dreiecksseite 𝔄 ausserhalb $p\pi$ treffen, also das zu untersuchende Punktsystem ist hyperbolisch: *Ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten schneidet auf der unendlich-entfernten Geraden ein Punktsystem aus, welches allemal hyperbolisch ist.*

III. Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ elliptisch, $\mathfrak{B}$ hyperbolisch, $\mathfrak{C}$ elliptisch; das Kegelschnittbüschel hat zwei reelle Grundpunkte, die Asymptotenpunkte auf $\mathfrak{B}$, und zwei imaginäre auf $\mathfrak{C}$, der ideellen gemeinschaftlichen Secante oder dem zweiten Theil des reellen Linienpaars, dessen einer Theil die reelle gemeinschaftliche Secante $\mathfrak{B}$ ist. Die Gerade $\mathfrak{M}$ trifft $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zwischen den Dreiecksecken und $\mathfrak{B}$ ausserhalb; es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $\mathfrak{M}$ trifft entweder

1) $\mathfrak{B}$ in der Strecke von o bis ∞

oder 2) $\mathfrak{B}$ - - - - $\bar{\omega}$ - ∞;

im ersten Falle wird die durch o zu $\mathfrak{M}$ gezogene Parallele die Gerade $\mathfrak{A}$ zwischen p und π treffen, im zweiten Falle ausserhalb $p\pi$, also im ersten Falle ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, im zweiten hyperbolisch; wir sehen aber zugleich, dass im ersten Falle die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten durchgeht, im andern Falle nicht; also:

Ein Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten (auf der ideellen gemeinschaftlichen Secante) schneidet auf der unendlich-entfernten Geraden ein elliptisches Punktsystem aus, wenn die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten hindurchgeht, dagegen ein hyperbolisches Punktsystem, wenn dies nicht der Fall ist. (S. 248.)

IV. Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ elliptisch, $\mathfrak{B}$ elliptisch, $\mathfrak{C}$ hyperbolisch; das Kegelschnittbüschel hat zwei reelle Grundpunkte, die Asymptotenpunkte auf $\mathfrak{C}$, und zwei imaginäre auf $\mathfrak{B}$. In ganz gleicher Weise, wie im Falle III. stellt sich hier dasselbe Kriterium heraus.

Die Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Geraden können wir, ganz abgesehen davon, ob sie reell oder imaginär sind, durch ein immer reelles Gebilde vertreten lassen, nämlich das Punktsystem, welches der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört (S. 140); ist dieses hyperbolisch, so sind die Asymptotenpunkte desselben die reellen Schnittpunkte; ist es elliptisch, so sind die Schnittpunkte imaginär; ist es parabolisch, so berührt die Gerade den Kegelschnitt. Der G_∞ gehört nun in Bezug auf einen Kegelschnitt dasjenige Punktsystem zu, in welchem das System der conjugirten Durchmesser des Kegelschnitts (S. 162) dieselbe trifft; letzteres liegt im Endlichen, während die unendlich-entfernte Gerade sich der Anschauung entzieht; wir fassen daher zweckmässiger die Strahlsysteme der conjugirten Durchmesser für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels ins Auge und ziehen durch irgend einen Punkt B der Ebene Parallele zu den Paaren conjugirter Strahlen dieser sämmtlichen Strahlsysteme oder verschieben dieselben parallel, ohne sie zu drehen, nach irgend einem gemeinschaftlichen Centrum B. Dadurch erhalten wir in B unendlich viele auf einander liegende Strahlsysteme, welche die G_∞ in denjenigen Punktsystemen treffen, die ihr in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels zugehören. Diese Strahlsysteme in B haben einen leicht zu ermittelnden Zusammenhang mit einander. Legen wir nämlich durch B einen beliebigen Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und fassen eines jener Strahlsysteme ins Auge, so schneidet jedes Paar conjugirter Strahlen desselben eine Sehne in $\mathfrak{K}^{(2)}$ aus, welche durch einen festen Punkt P geht und umgekehrt bestimmt der Punkt P das ganze Strahlsystem in B, indem jede durch P gehende Transversale den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten trifft, dass ihre Verbindungslinien mit B ein Paar conjugirter Strahlen dieses Strahlsystems sind; das aus P an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegte Tangentenpaar liefert also, wenn man die Berührungspunkte mit B verbindet, die Asymptoten des Strahlsystems. Jedes von den nach B verlegten Strahlsystemen liefert also einen bestimmten Punkt P, und der Ort der Punkte P für sämmtliche Strahlsysteme in B kann dadurch bestimmt werden, dass wir P als den Pol derjenigen Sehne des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ auffassen, welche die beiden Asymptoten eines jener Strahlsysteme ausschneiden. Diese Asymptoten bilden aber selbst ein eigenes Strahlsystem, welches nach dem Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf G_∞ hingeht. Jene Sehnen laufen daher durch einen festen Punkt O, und der Ort des Punktes P ist die Polare von O in Bezug auf den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, also eine Gerade. Wir haben hiernach zunächst folgenden Satz:

Verschiebt man alle Strahlsysteme der conjugirten Durchmesser sämmtlicher Kegelschnitte eines Büschels mit Beibehaltung der ursprünglichen Richtung ihrer Strahlenpaare nach irgend einem Punkte B der Peripherie eines beliebigen Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ und macht sie dadurch concentrisch, so bestimmen die conjugirten Strahlenpaare jedes Strahlsystems für sich solche Sehnen auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, die durch einen Punkt P laufen, und alle solche Punkte P, die den gesammten Strahlsystemen entsprechen, liegen auf einer und derselben Geraden $\mathfrak{L}$ (und erfüllen dieselbe).

Schneidet die Gerade $\mathfrak{L}$ den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ nicht, *so besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln;* jedes aus einem Punkte P der Geraden $\mathfrak{L}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegte Tangentenpaar berührt in zwei Punkten, welche mit B verbunden die Richtungen der Asymptoten dieser Hyperbeln liefern; da der Pol der Geraden $\mathfrak{L}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ in diesem Fall innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, so ist das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$

auf G_∞ elliptisch, oder *die durch den Punkt B den Asymptoten sämmtlicher Hyperbeln des Büschels parallel gezogenen Strahlenpaare bilden selbst ein elliptisches Strahlsystem.* Berührt die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, so zeigt dies an, dass alle Kegelschnitte des Büschels einen unendlich-entfernten Punkt gemein haben, also einer der vier Grundpunkte des Büschels im Unendlichen liegt; *das Kegelschnittbüschel enthält in diesem Fall eine einzige Parabel und lauter Hyperbeln;* das Punktsystem (x, ξ) auf G_∞ ist parabolisch.

Schneidet die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten, so besteht *das Kegelschnittbüschel aus einer Gruppe Hyperbeln, einer Gruppe Ellipsen und zwei Parabeln*, welche jene beiden Gruppen von einander trennen; denjenigen Punkten P nämlich, welche auf der Geraden $\mathfrak{L}$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, entsprechen die Hyperbeln des Büschels, denjenigen Punkten P, welche innerhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, die Ellipsen und den beiden Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ die beiden Parabeln. In der That, sobald das nach B parallel verlegte System der conjugirten Durchmesser hyperbolisch ist, ist auch der zugehörige Kegelschnitt eine Hyperbel, und sobald es elliptisch ist, eine Ellipse; der Punkt P erzeugt aber, wenn er ausserhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, in B ein hyperbolisches Strahlsystem, und wenn er innerhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, ein elliptisches, daher ist der ihm zugehörige Kegelschnitt des Büschels im ersten Falle Hyperbel, im zweiten Ellipse. Liegt P in einem der beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{K}^{(2)}$, so wird das Strahlsystem in B parabolisch, weil die beiden Asymptoten zusammenfallen, und der zugehörige Kegelschnitt des Büschels aus demselben Grunde Parabel, weil seine beiden Schnittpunkte mit G_∞ zusammenfallen; es giebt also zwei Parabeln in dem Büschel. Das Punktsystem (x, ξ) auf G_∞ ist hyperbolisch, und die beiden Asymptotenpunkte desselben geben die Richtungen der Axen der beiden zum Büschel gehörigen Parabeln an.

Da jeder Punkt P der Geraden $\mathfrak{L}$ dasjenige Strahlsystem in B hervorruft, welches dem conjugirten Durchmesser-Systeme eines Kegelschnitts des Büschels parallel läuft, welcher P entspricht, und da alle Punkte P in derselben Geraden $\mathfrak{L}$ liegen, so haben alle Strahlsysteme in B ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Strahlen, die nach den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ hingehen, denn durch jeden Punkt P geht eben auch die Gerade $\mathfrak{L}$ selbst, welche dies Paar bestimmt, also:

Sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels haben je ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser, welches dieselben zwei festen Richtungen hat; diese Richtungen sind die der Axen derjenigen beiden Parabeln, welche *in dem Büschel vorkommen; sie sind also mit diesen selbst reell oder imaginär.* Hieraus lassen sich die beiden Parabeln eines Büschels finden, sobald dasselbe durch irgend zwei Kegelschnitte gegeben ist. Man verlege in einen beliebigen Punkt B der Ebene zwei Strahlsysteme, welche beziehungsweise parallel laufen den Systemen der conjugirten Durchmesser der beiden gegebenen Kegelschnitte, und bestimme das gemeinschaftliche Paar conjugirter Strahlen dieser beiden concentrischen Systeme (S. 158); dasselbe ist immer reell, sobald nur einer der beiden Kegelschnitte Ellipse ist, oder falls beide Hyperbeln sind, sobald die beiden Asymptoten der einen ihrer Richtung nach in denselben Winkelraum zwischen die Asymptoten der andern hineinfallen; nur wenn die Asymptoten der einen durch die der andern getrennt werden, giebt es kein reelles gemeinschaftliches Paar conjugirter Strahlen, also auch keine Parabel.

Es ist von besonderem Interesse, die vorige Betrachtung in der Weise zu specialisiren, dass man für den Hülfskegelschnitt einen Kreis annimmt; dann wird ein solcher durch den veränderlichen Punkt P gehender Strahl, welcher Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist, denselben in zwei Punkten treffen, welche mit B verbunden die Axen des zugehörigen Strahlsystems geben; das Tangentenpaar aus P an den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ (falls P ausserhalb liegt) liefert zwei Berührungspunkte, die mit B verbunden die Asymptoten des Strahlsystems geben. Der Asymptotenwinkel einer Hyperbel ϑ wird aber durch das Verhältniss der Axen bestimmt (S. 179) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}$; der Winkel des aus P an den Hülfskreis gelegten Tangentenpaars ist aber $180^0 - 2\vartheta$; nehmen wir an, die Gerade $\mathfrak{L}$ (der Ort des Punktes P) treffe den Hülfskreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ nicht, also das ganze Kegelschnittbüschel bestehe aus Hyperbeln, so verändert sich der Winkel $180^0 - 2\vartheta$, oder sein Nebenwinkel 2ϑ, indem er von 0 (für den unendlich-entfernten Punkt) bis zu einem gewissen grössten Werthe wächst, welcher demjenigen Punkte $\mathfrak{m}$ der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht, der dem Kreise am nächsten liegt, also dem Fusspunkt des aus dem Kreismittelpunkte auf die Gerade $\mathfrak{L}$ gefällten Perpendikels, und ebenso wieder von diesem Maximumswerthe bis 0 abnimmt, wobei für zwei gleichweit von $\mathfrak{m}$ abstehende Punkte der Winkel 2ϑ, also auch ϑ denselben Werth annimmt. Zwei Kegelschnitte, für welche das Verhältniss der Axen $\left(\frac{b}{a}\right)$ denselben Werth hat (oder deren Asymptoten denselben Winkel bilden), heissen *ähnlich.* Wir schliessen also:

Besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln, so kommt unter *ihnen eine und (im Allgemeinen) nur eine gleichseitige Hyperbel vor* (sie entspricht dem unendlich-entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{L}$), *ferner eine Hyperbel, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht* (sie entspricht dem Fusspunkte $\mathfrak{m}$ des aus dem Kreismittelpunkte auf $\mathfrak{L}$ herabgelassenen Perpendikels), d. h. *eine solche, für welche das Verhältniss der Axen einen Maximumswerth hat; ausserdem besteht das Büschel aus Hyperbeln, welche paarweise ähnlich sind* (indem je zwei Punkte, welche von $\mathfrak{m}$ gleichweit abstehen, zweien Hyperbeln entsprechen, deren Asymptoten denselben Winkel mit einander bilden). *Ereignet es sich insbesondere, dass die Gerade $\mathfrak{L}$ ganz im Unendlichen liegt, mit G_∞ zusammenfällt, so besteht das ganze Büschel aus gleichseitigen Hyperbeln:* die Linienpaare, welche in dem Büschel vorkommen (eines oder drei), müssen je ein Paar rechtwinkliger Strahlen sein; also wenn die vier Grundpunkte reell sind, müssen sie so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist (S. 232).

Nehmen wir andererseits an, die Gerade $\mathfrak{L}$ treffe den Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei reellen Punkten, so besteht das Kegelschnittbüschel aus Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln. Einem Punkte P innerhalb des Kreises entspricht eine Ellipse; derjenige Durchmesser des Kreises, welcher durch P geht, schneidet in zwei Punkten, die mit B verbunden die Axen des Strahlsystems geben, welche den Axen des Kegelschnitts parallel laufen; die durch den Punkt P (innerhalb des Kreises) gehende kleinste Sehne des Kreises, welche auf dem Durchmesser senkrecht steht, schneidet in zwei Punkten, die mit B verbunden Strahlen geben, welche den *gleichen* conjugirten Durchmessern der Ellipse parallel laufen (S. 170), denn die Winkel zwischen den gleichen conjugirten Durchmessern werden halbirt durch die Axen und der Winkel ϑ zwischen den gleichen conjugirten Durchmessern wird bestimmt durch das Verhältniss der Axen $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}\right)$. Zwei Ellipsen, bei denen das Paar gleicher conjugirter Durchmesser denselben Winkel einschliesst, heissen daher ähnlich, weil das Verhältniss der Axen dasselbe ist. Bezeichnen wir nun die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so entsprechen den Punkten zwischen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ in dem Büschel Ellipsen, und unter diesen wird diejenige, welche dem Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ entspricht, den grössten Werth des Axenverhältnisses liefern, d. h. dem Kreise am nächsten kommen*); zwei solchen Punkten, die gleichweit von $\mathfrak{m}$

---

*) Vgl. *Steiner:* Auflösung einer geometrischen Aufgabe, in *Crelle*'s Journal für Mathematik, Bd. II Seite 64, und „Vermischte Sätze und Aufgaben“ von *J. Steiner* im 55. Bde. des *Crelle-Borchardt*'schen Journals, Seite 372.

abstehen, entsprechen zwei ähnliche Kegelschnitte; wir schliessen also:

Besteht das Kegelschnittbüschel aus einer Gruppe von Ellipsen und einer Gruppe von Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden, so giebt es unter den Ellipsen eine bestimmte, welche sich dem Kreise am meisten nähert; ihre gleichen conjugirten Durchmesser sind parallel demjenigen Paare conjugirter Durchmesser, welches für alle Kegelschnitte des Büschels dieselben Richtungen hat, oder den Axen der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln; sie entspricht der Mitte $\mathfrak{m}$ der Sehne, welche die Gerade $\mathfrak{L}$ im Kreise ausschneidet; je zweien Punkten, die gleich weit von $\mathfrak{m}$ abstehen, entsprechen zwei ähnliche Kegelschnitte des Büschels und zwar zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln, je nachdem jene Punkte innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen, *so dass also die Kegelschnitte des Büschels paarweise ähnlich sind, aber nicht ähnlich liegen; in dem Büschel kommt nur eine einzige gleichseitige Hyperbel vor,* welche dem unendlich-entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht. Geht die Gerade $\mathfrak{L}$ insbesondere durch den Mittelpunkt des Hülfskreises, *so befindet sich ein Kreis in dem Büschel,* welcher dem Mittelpunkte des Hülfskreises entspricht. Es muss also die eben genannte Bedingung erfüllt werden, damit unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis vorkomme; sind die vier Grundpunkte des Büschels reell, so kommt sie mit derjenigen überein, welche aus den Elementen bekannt ist für die Lage von vier Punkten auf einem Kreise. Sie stimmt mit der in §. 39 gefundenen überein: *Damit unter den Kegelschnitten eines Büschels ein Kreis vorkomme, müssen die Axen der beiden Parabeln, welche das Büschel enthält, zu einander rechtwinklig sein.*

Ausser diesem einen Kreise kann in dem Kegelschnittbüschel kein zweiter vorkommen; dies steht in scheinbarem Widerspruch zu dem Umstande, dass das Kegelschnittbüschel durch zwei beliebig anzunehmende Kegelschnitte vollständig bestimmt wird; es hindert uns nämlich nichts, zwei Kreise für die das Büschel bestimmenden Kegelschnitte zu wählen. In diesem Falle wird das eine Strahlsystem in B ein circulares Strahlsystem (sämmtliche Paare rechtwinkliger Strahlen), der zugehörige Punkt P also der Mittelpunkt M des Hülfskreises $\mathfrak{K}^{(2)}$; das zweite Strahlsystem in B wird aber auch ein circulares, also identisch mit dem vorigen; der zugehörige Punkt P fällt daher mit M zusammen, und diese beiden in M zusammenfallenden Punkte P bestimmen gar keine Gerade $\mathfrak{L}$, welche als der Ort sämmtlicher Punkte P anzusehen wäre. Wir sehen aber auch, dass auf G_∞ die den beiden Kreisen zugehörigen Punktsysteme identisch werden, also ihre (imaginären) Asymptotenpunkte nothwendig als gemeinschaftliche Punkte der beiden Kreise aufgefasst werden müssen. Das Büschel hat daher auf G_∞ zwei Grundpunkte, die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte (Seite 78 und 195), und da alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Grundpunkte gehen, so muss das Punktsystem auf G_∞ für alle dasselbe sein, also sie sind in diesem Falle sämmtlich Kreise: *Kommen zwei Kreise in einem Kegelschnittbüschel vor, so besteht dasselbe aus lauter Kreisen, und diese bilden das aus den Elementen bekannte Kreisbüschel mit reeller oder ideeller gemeinschaftlicher Secante.* Die unendlich-entfernte Gerade G_∞ ist selbst als eine ideelle gemeinschaftliche Secante aller Kreise anzusehen und macht den einen Theil des einzigen in dem Büschel enthaltenen Linienpaars aus, dessen anderer Theil die endliche gemeinschaftliche Secante (Potenzlinie des Kreisbüschels) ist. Das Kreisbüschel zeigt sich also hier als specieller Fall des Kegelschnittbüschels.

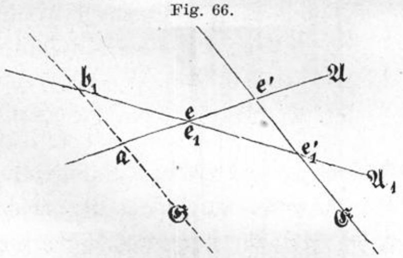
Dieselbe Bemerkung führt zugleich zu einem allgemeineren Resultat, nämlich: *In dem Kegelschnittbüschel sind im Allgemeinen keine zwei Kegelschnitte ähnlich und ähnlich-liegend; kommen insbesondere zwei ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte in demselben vor, so besteht das ganze Büschel aus ähnlichen Kegelschnitten und hat zwei seiner Grundpunkte auf der unendlich-entfernten Geraden G_∞; sind diese beiden reell, so besteht das Büschel aus lauter ähnlichen Hyperbeln; sind sie imaginär, aus lauter ähnlichen Ellipsen (insbesondere Kreisen); je zwei Kegelschnitte des Büschels sind in diesem Fall ähnlich und ähnlich-liegend.* (Zwei Kegelschnitte heissen nämlich ähnlich und ähnlich-liegend, wenn ihnen dasselbe Punktsystem auf der unendlich-entfernten Geraden G_∞ zugehört, d. h. G_∞ eine reelle oder ideelle gemeinschaftliche Secante derselben ist. Zwei Kegelschnitte heissen dagegen nur ähnlich, wenn ihre conjugirten Durchmesser-Systeme gleich sind, ohne sich in paralleler Lage zu befinden, oder wenn ihr Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ dasselbe ist.)

§. 44. Entstehung der Kegelschnittschaar aus der geraden Punktreihe.

Ehe wir in der Untersuchung des Kegelschnittbüschels weiter fortfahren, ist es angemessen, das polare Nebengebilde desselben, die *Kegelschnittschaar*, d. h. sämmtliche Kegelschnitte, welche dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben, näher ins Auge zu fassen. Alle Betrachtungen und Entstehungsarten des Kegelschnittbüschels, welche in den §§. 39—43 auseinandergesetzt sind, und alle dort erlangten Resultate haben ihre analogen bei der Kegelschnittschaar, und es ist diese Analogie nach den uns bereits bekannten Principien ohne Schwierigkeit herzustellen. Wir werden daher diese Uebertragung oder Wiederholung hier unterlassen (siehe Aufgaben und Sätze) und uns zunächst darauf beschränken, nur die Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten aus der geraden Punktreihe (analog §. 39) entstehen zu lassen, wobei wir besonders die abweichenden Umstände angeben wollen.

Nehmen wir zwei gerade Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in der Ebene an und einen beliebigen Punkt B als den Projectionspunkt zweier perspectivisch liegender Punktreihen auf diesen Trägern, so bestimmt derselbe diese beiden projectivischen Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der Art, dass in dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ vereinigt liegen; denken wir uns, nachdem diese Beziehung durch den Punkt B hergestellt ist, die Träger fest, aber die beiden auf ihnen befindlichen Punktreihen um zwei beliebige Strecken, ohne die Beziehung in sich zu ändern, auf den beiden Trägern verschoben, so wird dadurch die vorige perspectivische Lage aufgehoben, und das Erzeugniss der beiden projectivischen Punktreihen wird ein Kegelschnitt, welcher die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ zu Tangenten hat und noch eine dritte leicht angebbare Tangente, nämlich den Verbindungsstrahl derjenigen beiden Punkte der Träger nach der Verschiebung, welche vorher im Schnittpunkte $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ vereinigt waren. Diese bestimmte Gerade $\mathfrak{E}$ ist nur von der Grösse und Richtung der *„Schiebstrecken“* abhängig, nicht von der Lage des Projectionspunktes B. Verändern wir also die Lage des Punktes B in der ganzen Ebene, so erhalten wir dadurch immer neue Kegelschnitte bei derselben Verschiebung, und sämmtlichen Punkten B der Ebene entsprechen unendlich viele Kegelschnitte, welche dieselben drei festen Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$ haben (Fig. 66) d. h. demselben Dreiseit einbeschrieben sind. Dies ist eine doppelte Unendlichkeit oder eine Schaar-Schaar von Kegelschnitten.

Fig. 66.

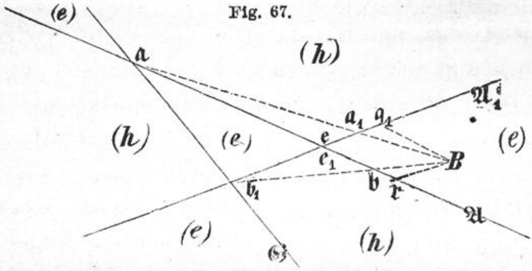


Lassen wir B nur die sämmtlichen Punkte einer Geraden $\mathfrak{L}$ durchlaufen, so werden die beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ sein, wo übrigens auch B auf $\mathfrak{L}$ liegen mag; nehmen nach der Verschiebung $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ die Lagen $\mathfrak{d}^1$ und $\mathfrak{d}^1{}_1$ an, so ist der Verbindungsstrahl $\mathfrak{d}^1\mathfrak{d}^1{}_1 = \mathfrak{L}^1$ eine

Tangente für alle Kegelschnitte, welche den Punkten B auf der Geraden $\mathfrak{L}$ entsprechen; *aus einer geraden Punktreihe entsteht also eine Kegelschnittschaar mit vier festen Tangenten* ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{L}^1$), und diese Kegelschnittschaar ist von einfacher Unendlichkeit, d. h. gleich mächtig mit den unendlich-vielen Punkten einer Geraden.

Um zu erkennen, ob für eine bestimmte Lage von B der durch die Verschiebung entstehende Kegelschnitt Ellipse, Hyperbel oder Parabel wird, suchen wir diejenigen beiden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ auf, welche nach der Verschiebung in den Schnittpunkt der Träger hineinfallen; $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{e}_1$ sind also die Schiebstrecken ihrer Grösse und Richtung nach, und durch diese sind die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ gegeben; die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ sei die Gerade $\mathfrak{G}$; durch die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ (und die unendlich-entfernte Gerade G_∞) zerfällt die ganze Ebene in sieben Räume, den endlichen Dreiecksraum, die drei den Ecken anliegenden unendlichen Winkelräume und die drei den Seiten anliegenden unendlichen Räume; es wird sich nun zeigen, dass, wenn der Punkt B in einem der vier ersten Räume liegt, der entsprechende Kegelschnitt eine Ellipse wird, wenn B dagegen in einem der drei letzteren liegt, derselbe eine Hyperbel wird, und dass die Uebergänge in eigenthümlicher Weise durch die vier begrenzenden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}G_\infty$ vermittelt werden. Wir bedürfen zu diesem Nachweis der in §. 26 erörterten Kriterien (S. 117), welche entscheiden, ob der durch zwei projectivische Punktreihen erzeugte Kegelschnitt

Fig. 67.



Ellipse oder Hyperbel ist. Der von zwei projectivischen Punktreihen erzeugte Kegelschnitt ist nämlich Ellipse, wenn auf jedem der beiden Träger (oder einem, was ausreichend ist) der den vereinigten Punkten entsprechende (Berührungspunkt) innerhalb der Strecke liegt zwischen dem Schnittpunkt der Träger und den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen ($\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$), dagegen Hyperbel, wenn er ausserhalb dieser Strecke liegt. Sind also (Fig. 67) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die beiden Träger und $\mathfrak{G}$ die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, welche nach der Verschiebung in den Schnittpunkt der Träger gelangen, so wird, wenn B z. B. in einem der Scheitelräume (e) liegt, der Strahl $B\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}_1$ die Gerade $\mathfrak{A}_1$ treffen und der Parallelstrahl zu $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{a}_1$ aber nothwendig zwischen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$ liegen, was denn natürlich auch nach der Verschiebung der Fall ist; $\mathfrak{a}_1$ ist aber der entsprechende zu dem im Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) befindlichen $\mathfrak{a}$, also der Berührungspunkt des erzeugten Kegelschnitts; folglich ist dieser eine Ellipse, weil $\mathfrak{a}_1$ zwischen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$ liegt. In gleicher Weise lehrt die unmittelbare Anschauung, dass, wenn B in einem der vier Räume (e) liegt, der Kegelschnitt immer Ellipse wird, und wenn B in einem der drei übrigen Räume (h) liegt, der Kegelschnitt Hyperbel wird. Wenn insbesondere B in die Gerade $\mathfrak{G}$ hineinfällt, so werden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ entsprechende Punkte, welche also nach der Verschiebung in den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) hineinfallen; in diesem Falle werden die beiden projectivischen Punktreihen auch nach der Verschiebung perspectivisch bleiben, also alle Projectionsstrahlen durch einen Punkt laufen; der Kegelschnitt löst sich in diesem Uebergangsfalle in ein Punktpaar auf: jenen Projectionspunkt und den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$), und dies Punktpaar ist in der That (S. 118) als ein Uebergang von Ellipse zu Hyperbel anzusehen, indem die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten als unendlich-schmale Ellipse oder die beiden unendlichen Strecken auf der Verbindungslinie beider Punkte ausserhalb derselben als unendlich-schmale Hyperbel aufgefasst werden können, mithin der Kegelschnitt gleichzeitig Ellipse und Hyperbel ist. Derselbe Uebergangsfall tritt auch auf, wenn B insbesondere in einen der beiden Träger $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}_1$ hineinfällt, indem die projectivische Beziehung den besonderen parabolischen Charakter annimmt (S. 73); fällt nämlich B in $\mathfrak{A}$ hinein, so entspricht allen Punkten der Geraden $\mathfrak{A}_1$ der einzige Punkt B der Geraden $\mathfrak{A}$ und allen Punkten der Geraden $\mathfrak{A}$ der einzige Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) der Geraden $\mathfrak{A}_1$; diese Beziehung bleibt nach der Verschiebung ungeändert, und der Kegelschnitt löst sich daher in dasjenige Punktpaar auf, welches von dem Schnittpunkt ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$) und dem Punkt B nach der Verschiebung eingenommen wird; ein Gleiches tritt ein, wenn der Punkt B auf dem andern Träger $\mathfrak{A}_1$ liegt. Die Punkte B der drei abgrenzenden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ liefern also sämmtlich *Kegelschnitte*, welche in Punktpaare ausarten.

Es bleiben noch diejenigen Punkte B zu untersuchen, welche auf der vierten begrenzenden Geraden G_∞ liegen; hier tritt ein anderer Uebergang von Ellipse zu Hyperbel auf, nämlich durch die Parabel. Sobald B im Unendlichen liegt, wird die Beziehung der beiden Träger projectivisch-ähnlich, und dieses muss auch nach der Verschiebung bleiben, weil die entsprechenden unendlich-entfernten Punkte im

Unendlichen bleiben; das Erzeugniss nach der Verschiebung wird also eine Parabel (S. 114), und für sämmtliche Punkte B der unendlich-entfernten Geraden G_∞ wird der durch die Verschiebung hervorgehende Kegelschnitt eine Parabel; diese sämmtlichen Parabeln bilden einen besonderen Fall der Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten, die *Parabelschaar*; sie haben nämlich die drei gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ und ausserdem selbstverständlich G_∞ zur vierten gemeinschaftlichen Tangente.

Um eine Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten zu erhalten, haben wir den Projectionspunkt B eine Gerade $\mathfrak{L}$ durchlaufen lassen. Die Gerade $\mathfrak{L}$ muss, wie sie übrigens auch in der Ebene liegen mag, im Allgemeinen in zwei elliptischen Räumen (e) und zwei hyperbolischen Räumen (h) enthalten sein (Fig. 67), denn durch die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\infty$ werden vier Punkte auf ihr fixirt, zwischen denen vier Strecken liegen; zwei von diesen gehören den elliptischen, die beiden andern dazwischen liegenden, den hyperbolischen Räumen an; den drei Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{L}$ mit den Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ gehören insbesondere Kegelschnitte zu, welche sich in Punktpaare auflösen; dem unendlich-entfernten Punkt der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht die einzige Parabel, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt. Also haben wir folgendes Ergebniss:

Die sämmtlichen Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen in zwei Gruppen von Ellipsen und zwei Gruppen von Hyperbeln, die mit einander abwechseln; der Uebergang von einer Gruppe zu einer andern geschieht dreimal durch ein Punktpaar (die drei Paar Gegenecken des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits) und einmal durch eine Parabel, die einzige, welche im Allgemeinen in der Kegelschnittschaar vorkommt.

Wir haben gesehen, dass die beiden durch den Projectionspunkt B parallel zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gezogenen Projectionsstrahlen in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ dieselben treffen, und dass diese Punkte nach der Verschiebung ihre Eigenschaft behalten, Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen zu sein, oder den unendlich-entfernten Punkten zu entsprechen; hieraus folgt, dass, während B die Gerade $\mathfrak{L}$ durchläuft, die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zwei projectivisch-ähnliche Punktreihen beschreiben, ihre Verbindungslinie (nach der Verschiebung) also eine Parabel umhüllt; denken wir uns nach der Verschiebung die Parallelstrahlen hergestellt, welche sich in B^1 treffen mögen, so wird der Punkt B^1 zu den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe relative Lage haben müssen, wie der Punkt B zu zwei durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ gezogenen Parallelen mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$, denn diese gehen nach der Verschiebung in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ über; wenn also B eine gerade Linie $\mathfrak{L}$ durchläuft, so muss auch nach der Verschiebung B^1 eine bestimmte Gerade durchlaufen, welche zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe relative Lage hat, wie $\mathfrak{L}$ zu jenen beiden durch $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}$ gedachten Parallelen. Nun ist B^1 immer die Ecke eines Parallelogramms, welches einem Kegelschnitte der Schaar umschrieben ist und zu zwei Seiten die festen Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ hat; die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}_1)$ mit B^1 wird also halbirt durch den Mittelpunkt M des Kegelschnitts, welcher dem Parallelogramm einbeschrieben ist, und da B^1 eine gerade Linie durchläuft, so muss auch M eine Gerade durchlaufen, die jener parallel ist, aber halb so weit von $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}_1)$ absteht, als sie; wir schliessen hieraus:

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten liegen auf einer Geraden, welche insbesondere auch die Mittelpunkte der drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits enthält (Letzteres ist ein schon bekannter elementarer Satz). Diese Mittelpunktslinie zerfällt durch die drei Mitten der Diagonalen und den unendlich-entfernten Punkt, den Mittelpunkt der einzigen Parabel der Schaar, in vier Abschnitte, welche abwechselnd die Mittelpunkte der beiden Gruppen von Ellipsen und die Mittelpunkte der beiden Gruppen von Hyperbeln enthalten.

Dieselbe Betrachtung, aus welcher die Kegelschnittschaar entsprang, zeigt auch, wie die Berührungspunkte eines Kegelschnitts der Schaar auf zweien gemeinschaftlichen Tangenten sich verändern; denn Fig. 67 zeigt, dass $B\mathfrak{a}$ und $B\mathfrak{b}_1$ die Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen, also wenn B eine Gerade $\mathfrak{L}$ durchläuft, so beschreiben $\mathfrak{a}B$ und $\mathfrak{b}_1 B$ zwei perspectivische Strahlbüschel, mithin $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ zwei projectivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$, welche nach der Verschiebung in perspectivische Lage gelangen, weil auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ zwei entsprechende Punkte dieser beiden projectivischen Punktreihen werden und diese Punkte nachher in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ hineinfallen. Hieraus folgt der Satz:

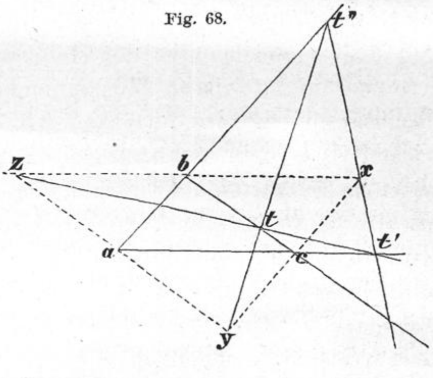
Fasst man bei einer Kegelschnittschaar von vier festen Tangenten die Berührungspunkte ins Auge, welche der veränderliche Kegelschnitt auf irgend zweien von den vier festen Tangenten bestimmt, so sieht man, dass dieselben zwei projectivische Punktreihen bilden, welche perspectivisch liegen; ihr Projectionspunkt ist immer einer der drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits, welches die vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden.

Dieser Satz ist der analoge von dem auf Seite 225 ausgesprochenen und kann ebenso wie jener aus den Eigenschaften des einem Kegelschnitte umschriebenen Vierseits (§§. 23, 27) abgeleitet werden;

hier erkennen wir, dass jede von den Berührungspunkten gebildete Punktreihe zugleich projectivisch ist mit der erzeugenden Punktreihe, welche B auf der Geraden $\mathfrak{L}$ durchläuft.

Es bleibt noch der besondere Fall ins Auge zu fassen, dass die Gerade $\mathfrak{L}$, welche der Projectionspunkt durchläuft, die unendlich-entfernte Gerade G_∞ ist; in diesem Falle wird die projectivische Beziehung immer Aehnlichkeit, also nach der Verschiebung sind die entstehenden Kegelschnitte sämmtlich Parabeln, d. h.: *Wenn in einer Kegelschnittschaar zwei Parabeln vorkommen, so besteht die Schaar aus lauter Parabeln*, welche ausser der unendlich-entfernten Geraden G_∞, die allen Parabeln gemeinschaftliche Tangente ist, noch drei gemeinschaftliche Tangenten haben und eine specielle Kegelschnittschaar bilden, so wie das Büschel gleichseitiger Hyperbeln ein besonderes Kegelschnittbüschel bildete (S. 232). Unter diesen Parabeln giebt es drei besondere, die in je eine einzige (doppelt zu zählende) Gerade übergehen, nämlich die drei durch die Ecken des übrig bleibenden Dreiseits parallel den Seiten desselben gezogenen Geraden. Die Mittelpunktslinie dieser Parabelschaar ist natürlich ebenfalls die unendlich-entfernte Gerade. Von dem vollständigen Vierseit, dessen eine Seite G_∞ wird, bleibt nur ein Dreiseit abc im Endlichen der Ebene zurück; die Diagonalpunkte xyz des vollständigen Vierseits werden die Ecken desjenigen Dreiseits (Diagonaldreiseits), dessen Seiten durch die Ecken des ersteren abc parallel den Seiten desselben laufen (Fig. 68).

Fig. 68.



Bei jeder dem Dreiseit abc einbeschriebenen Parabel gehen die Berührungssehnen beziehlich durch drei feste Punkte, durch die Ecken des dem Dreiseit abc parallel umschriebenen Dreiseits xyz. Nimmt man einen beliebigen Punkt t auf bc als Berührungspunkt einer einbeschriebenen Parabel, so wird $(zt, ac) = t'$ und $(yt, ab) = t''$, und die Punkte $tt't''$ sind die drei Berührungspunkte, woraus zugleich folgt, dass $t't''$ durch x gehen muss. Bekanntlich laufen bei einem dem Kegelschnitt umschriebenen Dreiseit die Verbindungsstrahlen der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt o (S. 96); wir können daher hier nach dem Orte des Punktes o fragen für sämmtliche dem Dreiseit einbeschriebene Parabeln. Derselbe ist leicht zu ermitteln, wenn wir den Punkt t auf der Geraden bc bewegen und den Schnittpunkt (at, bt') verfolgen; da nämlich t und t' perspectivische Punktreihen durchlaufen, so beschreiben at und bt' projectivische Strahlbüschel; der Ort des Punktes o ist also ein Kegelschnitt, und da der Verbindungslinie ab in den beiden Strahlbüscheln bz und az entsprechen, so sind dies die Tangenten des gefundenen Kegelschnitts, welcher auch durch c geht und xy berührt; der Ort des Punktes o ist also *eine Ellipse, welche dem Dreiseit abc um- und zugleich dem Dreieck xyz einbeschrieben ist, oder den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Dreiecke zum Mittelpunkte hat.* (Siehe Aufgaben und Sätze.)

Denken wir uns die einzige Parabel, welche einem gegebenen Vierseit $(\mathfrak{ABCD})$ einbeschrieben werden kann, so gehört dieselbe vier verschiedenen Parabelschaaren, welche den Dreiseiten $(\mathfrak{ABC})$ $(\mathfrak{ACD})$ $(\mathfrak{ABD})$ $(\mathfrak{BCD})$ einbeschrieben sind, gleichzeitig an; die vier diesen Dreiseiten parallel umschriebenen Dreiseite haben also ihre zwölf Ecken paarweise auf sechs Geraden, welche durch die drei Diagonalpunkte xyz des vollständigen Vierseits $(\mathfrak{ABCD})$ gehen und die Berührungssehnen jener Parabel sind, wobei durch jeden Punkt xyz immer zwei von diesen sechs Geraden gehen.

Die Parabelschaar, welche einem Dreiseit einbeschrieben ist, und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind (und zugleich durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks gehen), stehen in einem unmittelbaren Zusammenhange vermittelst des Princips der Polarisation (S. 146). Denken wir uns nämlich das Büschel gleichseitiger Hyperbeln und beschreiben um einen der vier Grundpunkte dieses Büschels als Mittelpunkt einen Kreis, so wird *die Polarfigur des Hyperbelbüschels in Bezug auf diesen Kreis als Basis die Parabelschaar* werden; denn aus jeder gleichseitigen Hyperbel wird ein Kegelschnitt, der vier feste Tangenten hat, die Polaren der vier Grundpunkte des Büschels, und da der Mittelpunkt des Kreises zu seiner Polare in Bezug auf den Kreis die unendlich-entfernte Gerade G_∞ hat, so muss der Polarkegelschnitt G_∞ berühren, also Parabel sein; wir erhalten daher sämmtliche Parabeln, die demselben festen Dreiseit einbeschrieben sind, welches von den drei Polaren der übrigen drei Grundpunkte des Hyperbelbüschels gebildet wird. Aus der bekannten dem Kreise zukommenden Eigenschaft, dass die Polare senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Pol, weil das conjugirte Durchmessersystem des Kreises ein circulares Strahlsystem ist, geht hervor, dass der Mittelpunkt M der Kreis-Basis nicht nur Höhenpunkt des gemeinschaftlichen Dreiecks des Hyperbelbüschels, sondern auch Höhenpunkt des gemeinschaftlichen Dreiseits der Parabelschaar ist; da nun für jede gleichseitige Hyperbel die unendlich-entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so werden ihre Polaren, d. h. die beiden in M sich schneidenden Tangenten einer jeden Parabel der Schaar ebenfalls zu einander rechtwinklig sein müssen; der Ort des Schnittpunktes aller rechtwinkligen Tangentenpaare einer Parabel ist aber die Leitlinie (S. 183); also gehen die Leitlinien sämmtlicher Parabeln der Schaar durch den Punkt M, d. h.: *Von sämmtlichen einem gegebenen Dreiseit einbeschriebenen Parabeln gehen die Leitlinien durch denselben festen Punkt, welcher der Höhenpunkt dieses Dreiseits ist.*

Nehmen wir jetzt die einzige Parabel, welche einem gegebenen Vierseit einbeschrieben werden kann, deren Leitlinie eine bestimmte Gerade ist, so folgt, dass in ihr die vier Höhenpunkte derjenigen vier Dreiseite liegen müssen, welche sich aus je dreien der vier gegebenen Seiten des Vierseits bilden lassen. Dies giebt einen bekannten elementaren Satz über das vollständige Vierseit, welcher einer ganzen Reihe von Eigenschaften desselben angehört, deren eine oder die andere wir gelegentlich als specielle Fälle allgemeinerer Eigenschaften erwähnen werden. Sie hängen zumeist mit der Parabel zusammen, welche dem vollständigen Vierseit einbeschrieben werden kann, oder treten als besondere Fälle der Eigenschaften unserer Kegelschnittschaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten auf*).

Schliesslich wollen wir noch eine Eigenschaft der Parabelschaar erwähnen, welche sich auf ihre Brennpunkte bezieht. Es war eine unmittelbare Folgerung aus der Grundeigenschaft der Brennpunkte (S. 199), dass das Strahlenpaar von irgend einem Punkte a nach den Brennpunkten eines Kegelschnitts symmetrisch liegt zu dem Tangentenpaar aus a an den Kegelschnitt. Haben wir nun irgend eine dem Dreieck abc einbeschriebene Parabel, welche einen ihrer Brennpunkte im Unendlichen hat (in der Richtung der Axe), und ziehen durch a eine Parallele zur Axe, so wird die symmetrisch liegende Gerade in Bezug auf das Tangentenpaar ab, ac durch den Brennpunkt der Parabel gehen müssen; ebenso, wenn wir durch b eine Parallele zur Axe ziehen und die symmetrisch liegende Gerade in Bezug auf das Tangentenpaar bc, ba bestimmen. Der Schnittpunkt der beiden auf diese Weise construirten Geraden ist also der Brennpunkt F der Parabel. Verändern wir die einbeschriebene Parabel, indem wir sie die ganze Parabelschaar durchlaufen lassen, so beschreiben die

*) Vergl.: Aufgaben und Lehrsätze von *J. Steiner*, *Crelle*'s Journal Bd. II. S. 97.

beiden durch a und b zur jedesmaligen Parabelaxe gezogenen Parallelen zwei projectivisch-gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel; die symmetrisch liegende aF beschreibt aber ein mit der ersten Parallelen gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, die symmetrisch liegende bF ein mit der zweiten Parallelen gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, also aF und bF wiederum zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel, deren Erzeugniss ein Kreis ist; der Ort des Brennpunktes F ist also ein Kreis, welcher ausser durch a und b auch durch c geht, wie leicht zu sehen ist; also:

Die Brennpunkte sämmtlicher einem Dreiseit einbeschriebenen Parabeln liegen auf demjenigen Kreise, welcher dem Dreiseit umschrieben ist.

Durch dasselbe Raisonnement erhalten wir den allgemeineren Satz: *Für alle Kegelschnitte, welche einem Dreiseit einbeschrieben sind und den einen ihrer Brennpunkte auf einer geraden Linie haben, ist der Ort des andern Brennpunktes ein bestimmter Kegelschnitt, welcher dem gegebenen Dreiseit umschrieben ist**).

Hieraus folgt beiläufig, wenn wir die einzige einem vollständigen Vierseit einbeschriebene Parabel auffassen, welche zu gleicher Zeit vier Parabelschaaren angehört, dass die den vier Dreiseiten eines vollständigen Vierseits umschriebenen Kreise durch einen Punkt laufen, den Brennpunkt dieser Parabel; ferner, da die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf die Tangenten einer Parabel herabgelassenen Perpendikel in einer Geraden liegen, der Scheiteltangente der Parabel, so müssen die aus einem Peripheriepunkte des einem Dreiseit umschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten herabgelassenen Perpendikel ihre Fusspunkte in gerader Linie haben; die weitere Folgerung fürs Vierseit übergehen wir, sowie die bekannten elementaren Sätze, welche sich hieran anschliessen.

§. 45. Charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar und einige Folgerungen aus derselben.

Der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass jede geradlinige Transversale in Paaren conjugirter Punkte eines Punktsystems getroffen wird, steht die gleichlaufende der Kegelschnittschaar zur Seite:

Die Tangentenpaare aus einem beliebigen festen Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar sind Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems.

---

*) Ueber den Ort der Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar vergl. *H. Schröter:* „Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung etc.“ Math. Ann. von *Clebsch* und *Neumann* Bd. V. S. 50.

Dies folgt unmittelbar aus der Entstehung der Kegelschnittschaar (§. 44). Denken wir uns nämlich einen gegebenen Punkt P in der Ebene als den Projectionspunkt für zwei neue projectivische Punktreihen auf den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in perspectivischer Lage, so werden dieselben vor der Verschiebung im Allgemeinen nicht perspectivisch gewesen sein, sondern die Projectionsstrahlen, welche jetzt alle durch P laufen, werden vor der Verschiebung einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ umhüllt haben, welcher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ selbst zu Tangenten hat; so oft nun zwei solche Projectionsstrahlen vor der Verschiebung sich in einem Punkte B der Geraden $\mathfrak{L}$ treffen, werden dieselben nach der Verschiebung zwei durch P laufende Tangenten des Kegelschnitts sein, welcher aus B hervorgeht. Alle Tangentenpaare aus den Punkten B einer Geraden $\mathfrak{L}$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ fixiren aber auf der Tangente $\mathfrak{A}$ Punktpaare eines Punktsystems (S. 152), welches nach der Verschiebung ein Punktsystem bleibt; die von P nach den Punktpaaren desselben hingehenden Strahlen bilden daher ein Strahlsystem, also die Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der Schaar bilden ein Strahlsystem, w. z. b. w.

Ein besonderer Fall dieses Satzes ist bereits auf S. 71 bewiesen worden, indem als besondere Kegelschnitte der Schaar die drei Punktpaare, welche in ihr vorkommen, oder die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits aufgefasst werden; der dort geführte Beweis des besonderen Falles lässt sich auch unmittelbar auf den allgemeinen Satz übertragen. Seien $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits und treffe irgend ein aus P an einen Kegelschnitt der Schaar gelegtes Tangentenpaar die Seite ab in x und y, die Seite $\alpha\beta$ beziehlich in ξ und η, so findet zwischen den Schnittpunkten zweier Tangenten ab und $\alpha\beta$ des Kegelschnitts durch vier andere die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(abxy) = (\beta\alpha\xi\eta)$$

also auch nach S. 7, 1)

$$(abxy) = (\alpha\beta\eta\xi);$$

die von P nach diesen vier Paaren von Punkten hingehenden Strahlen sind also vier Paare entsprechender Strahlen zweier projectivischen Strahlbüschel, und da dem Strahl Px der Strahl $P\eta$, dem Py der $P\xi$ entspricht, so fallen in diesen beiden auf einander liegenden projectivischen Strahlbüscheln die Schenkel zweier entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander; mithin sind (S. 59) die drei Strahlenpaare: Pa, $P\alpha$; Pb, $P\beta$; Px, Py (wo letzteres das Tangentenpaar aus P an einen beliebigen Kegelschnitt der Schaar bedeutet), sechs Strahlen einer Involution oder drei Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems; dieses ist schon durch zwei Paare vollständig bestimmt; lassen wir also den Kegelschnitt die ganze Schaar durchlaufen, so bleiben $a\alpha$, $b\beta$ unverändert, also die Tangentenpaare aus P an sämmtliche Kegelschnitte der Schaar liefern immer Paare conjugirter Strahlen eines und desselben Strahlsystems, w. z. b. w.

Das auf S. 71 angegebene Kriterium für die Lage des Punktes P, je nachdem das in ihm entstehende Strahlsystem elliptisch oder hyperbolisch ist, unterschied von den elf Räumen, in welche die ganze Ebene durch die vier Seiten des vollständigen Vierseits zerschnitten wird (Fig. 27), fünf hyperbolische (h) und sechs elliptische (e); die ersteren sind diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, und letztere die übrig bleibenden, welche von keiner Diagonale getroffen werden. Wenn nun das Strahlsystem, welches von den Tangentenpaaren aus einem Punkte P an die Kegelschnitte der Schaar gebildet wird, hyperbolisch ist, so hat es zwei reelle Doppelstrahlen oder Asymptoten; jede Asymptote muss daher in P selbst eine Tangente sein für einen besonderen Kegelschnitt der Schaar, weil das Tangentenpaar aus P an diesen Kegelschnitt zusammenfällt. Wir schliessen also: *Es giebt im Allgemeinen zwei Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen*; sie sind aber nur dann reell vorhanden, wenn der gegebene Punkt in einem der fünf hyperbolischen Räume liegt, in welche die vier gegebenen Geraden die Ebene zerschneiden, d. h. in einem derjenigen Räume, welche die drei Diagonalen des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits enthalten. Liegt P auf einer der vier Geraden selbst, so giebt es selbstverständlich nur einen Kegelschnitt, der sie berührt und durch diesen Punkt geht, weil dann das Strahlsystem parabolisch wird. Liegt P in einem der sechs elliptischen Räume, so sind die beiden Kegelschnitte imaginär. Die Aufgabe, diese beiden Kegelschnitte zu finden, ist also darauf zurückgeführt, die Asymptoten (oder Doppelstrahlen) eines bekannten Strahlsystems zu bestimmen, welche sich mit Hülfe eines festen Kreises lösen lässt (§. 15). Wir ersehen hieraus, *dass sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar nicht die ganze unendliche Ebene erfüllen, sondern nur die fünf hyperbolischen Räume, während die sechs elliptischen frei bleiben.*

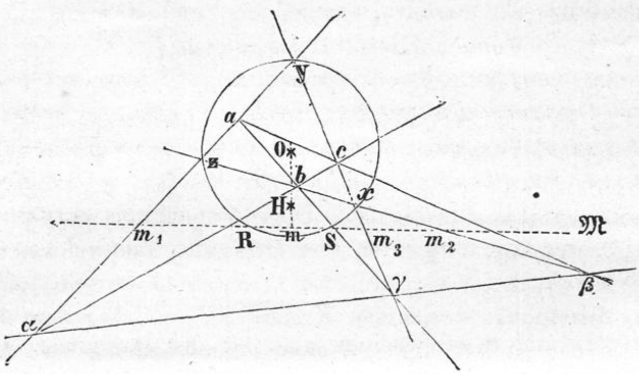
Es knüpft sich hieran die Frage, wo der Punkt P liegen müsse, damit das Strahlsystem, welches durch die Kegelschnittschaar in ihm hervorgerufen wird, insbesondere ein circulares werde. Da bei einem circularen Strahlsystem je zwei conjugirte Strahlen zu einander rechtwinklig sind, so wäre für einen solchen Punkt P erforderlich, dass jedes Tangentenpaar aus ihm an einen Kegelschnitt der Schaar aus zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen bestände. Nehmen wir P willkürlich in der Ebene an, so sind die Axen des in ihm bestimmten Strahlsystems ein Paar rechtwinkliger Tangenten für einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar; damit aber in P ein circulares Strahlsystem entstehe, müsste es noch ein zweites Paar rechtwinkliger conjugirter Strahlen geben. Wir wissen aber (S. 179), dass für jeden Kegelschnitt der Ort des Schnittpunktes je zweier rechtwinkligen Tangenten ein bestimmter Kreis ist, welcher denselben Mittelpunkt wie der Kegelschnitt hat; für die ganze Kegelschnittschaar erhalten wir dadurch unendlich viele Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, der Mittelpunktslinie der Kegelschnittschaar, haben, und von welchen durch jeden Punkt der Ebene ein bestimmter geht. Nehmen wir daher zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar (etwa zwei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$) und bestimmen die Ortskreise des Schnittpunktes der rechtwinkligen Tangenten (d. h. zwei Kreise über $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmesser), so schneiden sich dieselben im Allgemeinen in zwei (reellen oder imaginären) Punkten P_0 und Q_0; diese beiden besonderen Punkte, wenn sie reell sind, müssen die Eigenschaft haben, dass für jeden derselben zwei Tangentenpaare an zwei bestimmte Kegelschnitte der Schaar Paare rechtwinkliger Tangenten sind; folglich müssen die Strahlsysteme in diesen beiden Punkten circulare sein, oder alle Tangentenpaare sind rechtwinklig; sobald die beiden Punkte P_0 und Q_0 imaginär sind, giebt es überhaupt keinen reellen Punkt in der Ebene, für welchen das betreffende Strahlsystem ein circulares wird; sind die beiden Punkte P_0 und Q_0 reell, so müssen, weil die Tangentenpaare aus jedem derselben an alle Kegelschnitte der Schaar rechtwinklig sind, die sämmtlichen Ortskreise des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangenten für die ganze Kegelschnittschaar durch P_0 und Q_0 gehen, also selbst ein Kreisbüschel bilden; insbesondere geht für die einzige Parabel, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt, der Ortskreis in die Leitlinie über, welche also auch durch P_0 und Q_0 geht und die Potenzlinie (gemeinschaftliche Secante) dieses Kreisbüschels wird.

Aber auch wenn die Punkte P_0 und Q_0 nicht reell sind, bilden die sämmtlichen Ortskreise für die Kegelschnittschaar ein Kreisbüschel, welches die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar enthaltenen Parabel zur Potenzlinie (ideellen gemeinschaftlichen Secante) hat; dies lässt sich auf folgende Weise erkennen: Wir wissen (S. 147), dass das Diagonaldreieck xyz des vollständigen Vierseits ein Polardreieck für jeden Kegelschnitt der Schaar ist, und (S. 185), dass der einem Polardreieck umschriebene Kreis immer den Ortskreis des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangentenpaare unter einem rechten Winkel schneidet; folglich genügen alle Ortskreise den beiden Bedingungen, dass ihre Mittelpunkte in einer Geraden (der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$) liegen, und dass sie einen festen Kreis, den um das Diagonaldreieck xyz beschriebenen, rechtwinklig schneiden, woraus nach bekannten Elementar-Sätzen folgt, dass sie ein Kreisbüschel bilden. Der um das Diagonaldreieck beschriebene Kreis, welcher seinen Mittelpunkt in der Potenzlinie des Kreisbüschels oder in der Leitlinie der einzigen Parabel der Kegelschnittschaar hat, gehört dem conjugirten Kreisbüschel an und entscheidet darüber, ob die Punkte P_0 und Q_0 reell sind, oder nicht; wenn nämlich dieser Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ (xyz) die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ nicht trifft, so sind die Punkte P_0 und Q_0 reell, wenn er dagegen die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten trifft, so sind P_0 und Q_0 imaginär; ein besonderer Fall von untergeordneterem Interesse ist der, dass der Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ (xyz) die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ berührt, wobei P_0 und Q_0 zusammenfallen. Fassen wir das gewonnene Resultat zusammen:

Bestimmt man für jeden Kegelschnitt einer Schaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten den Ortskreis solcher Punkte, in welchen sich je zwei rechtwinklige Tangenten treffen, so bilden diese Kreise ein Kreisbüschel, dessen Potenzlinie die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar vorkommenden Parabel ist. Diese Potenzlinie enthält (S. 279) die vier Höhenpunkte derjenigen vier Dreiseite, aus welchen das vollständige Vierseit der vier gegebenen Tangenten besteht; sie enthält auch den Mittelpunkt desjenigen Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher dem Diagonaldreieck xyz des vollständigen Vierseits umschrieben ist, und steht endlich senkrecht auf der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, welche die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar enthält und zugleich die Mittelpunktslinie des Kreisbüschels ist. *Die Potenzlinie ist eine reelle gemeinschaftliche Secante des Kreisbüschels, wenn der dem Diagonaldreieck xyz umschriebene Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Mittelpunktslinie nicht trifft; in diesem Falle gehen alle Kreise des Büschels durch dieselben beiden Punkte P_0 und Q_0 der Potenzlinie, und dies sind die einzigen Punkte in der Ebene, für welche das aus den Tangentenpaaren an die Kegelschnitte der Schaar gebildete Strahlsystem ein circulares wird.* Die Potenzlinie ist dagegen eine ideelle gemeinschaftliche Secante des Kreisbüschels, d. h. es giebt keine reellen Punkte in der Ebene von der verlangten Eigenschaft, sobald der oben erwähnte Kreis $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten R und S trifft. In diesem Falle sind die Punkte R und S selbst Nullkreise des Kreisbüschels, d. h. solche Ortskreise des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangenten, für welche der Radius Null ist; dieser Fall tritt bekanntlich nur bei der gleichseitigen Hyperbel ein; *die Punkte R und S sind also die Mittelpunkte der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche in der Kegelschnittschaar vorkommen können; sobald die Punkte R und S imaginär sind, giebt es keine gleichseitige Hyperbel in der Kegelschnittschaar.*

Wir haben hieraus zu gleicher Zeit ersehen, dass in einer Kegelschnittschaar im Allgemeinen zwei gleichseitige Hyperbeln vorkommen, und wie die Mittelpunkte derselben zu finden sind. Wir können jetzt eine von den vier Seiten des vollständigen Vierseits verändern und den Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln aufsuchen, welche einem gegebenen Dreiseit einbeschrieben sind. Sind die drei Paare von Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und die Diagonalpunkte xyz (Fig. 69), so können wir die Seite $\alpha\beta\gamma$ verändern

Fig. 69.



und das Dreiseit abc festhalten; ohne indessen der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir die vierte Seite $\alpha\beta\gamma$ so bewegen, dass der Punkt α fest bleibt; denn welches auch die dem Dreiseit abc einbeschriebene gleichseitige Hyperbel sei, immer wird sich aus einem Punkte α der Tangente bc eine und nur eine zweite Tangente legen lassen; wir halten also den Punkt α fest und drehen die vierte Seite $\alpha\beta\gamma$ des vollständigen Vierseits um α; sind dann $m_1 m_2 m_3$ resp. die Mitten der Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, welche in der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ liegen, so bleibt m_1 bei der Bewegung fest; die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ dreht sich also um den festen Punkt m_1; das Tripel xyz verändert sich; sei O der Mittelpunkt des um dasselbe beschriebenen Kreises, und möge dieser Kreis die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in den Punkten R und S treffen, so wird das Perpendikel aus O auf $\mathfrak{M}$ in m die Sehne RS halbiren; das Perpendikel Om ist aber unsere oben gefundene Potenzlinie, oder die Leitlinie der einzigen Parabel; diese Gerade enthält die Höhenpunkte der vier Dreiseite; von den vier Dreiseiten bleibt nur das Dreiseit abc fest, dessen Höhenpunkt H sei; das Perpendikel Om dreht sich also bei der Bewegung um den festen Punkt H; folglich ist der Ort des Punktes m ein Kreis, welcher die festen Punkte H und m_1 zu Endpunkten eines Durchmessers hat, also:

$$Hm^2 + m_1 m^2 = Hm_1{}^2.$$

Da nun m die Mitte der Sehne RS ist, so folgt:

$$\begin{aligned}
Rm &= mS \quad \text{oder} \quad Rm + Sm = 0 \quad \text{und} \\
m_1 m &= m_1 R + Rm = m_1 S + Sm \\
m_1 m^2 &= (m_1 R + Rm)(m_1 S + Sm) \\
&= m_1 R \,.\, m_1 S + m_1 R \,.\, Sm + m_1 S \,.\, Rm + mR \,.\, mS \\
&= m_1 R \,.\, m_1 S + Rm \,.\, RS - Rm^2 \\
&= m_1 R \,.\, m_1 S + Rm^2,
\end{aligned}$$

also haben wir:

$$\begin{aligned}
Hm^2 + Rm^2 &= Hm_1{}^2 - m_1 R \,.\, m_1 S \\
HR^2 = HS^2 &= Hm_1{}^2 - m_1 R \,.\, m_1 S.
\end{aligned}$$

Es ist aber $m_1 R \,.\, m_1 S$ gleich der Potenz des Punktes m_1 in Bezug auf den Kreis O, und da dieser durch y und z geht, auch gleich $m_1 y \,.\, m_1 z$; da y und z harmonisch liegen zu dem Paar Gegenecken a und α, deren Mitte m_1 ist, so haben wir gleichzeitig $m_1 y \,.\, m_1 z = m_1 a^2 = m_1 \alpha^2$, also:

$$HR^2 = HS^2 = Hm_1{}^2 - m_1 a^2 = \text{const.};$$

die Punkte R und S beschreiben also bei der Bewegung einen Kreis um den festen Punkt H, denn ihr Abstand von H bleibt unverändert, und der Radius dieses Kreises wird leicht zu ermitteln sein; schlagen wir nämlich über $a\alpha$ als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt m_1 und dessen Radius $m_1 a$ sein wird, so ist die Potenz des Punktes H in Bezug auf diesen Kreis gleich $Hm_1{}^2 - m_1 a^2$; es schneidet aber Ha den gedachten Kreis zum andern Male in demjenigen Punkte a^1, welcher der Fusspunkt des aus a auf bc herabgelassenen Perpendikels ist; wenn daher die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks abc mit $a^1 b^1 c^1$ bezeichnet werden, so ist:

$$Ha \,.\, Ha^1 = Hb \,.\, Hb^1 = Hc \,.\, Hc^1 = r^2$$

und r der Radius des gesuchten Kreises. Das Quadrat des Radius dieses Kreises ist nur positiv, also der Kreis nur reell, wenn a und a^1, ebenso b und b^1, c und c^1 auf derselben Seite von H liegen, wenn also H ausserhalb des Dreiecks abc liegt, oder was dasselbe sagt, wenn das Dreieck abc stumpfwinklig ist; er reducirt sich auf einen Punkt beim rechtwinkligen Dreieck und wird imaginär beim spitzwinkligen. Dieser Kreis hat ferner, wie unmittelbar aus den Polar-Eigenschaften hervorgeht, zu dem Dreieck abc die Beziehung, dass letzteres ein Polardreieck für diesen Kreis ist, der demnach *„der dem Dreieck conjugirte Kreis“* heisst. Wir haben mithin folgenden Satz:*)

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreiseit einbeschrieben sind, liegen auf einem Kreise, der den Höhenpunkt des Dreiseits zu seinem Mittelpunkte und die Ecken des Dreiseits zu einem Tripel conjugirter Punkte hat; dieser Kreis ist nur dann reell, wenn das Dreiseit stumpfwinklig ist, und das Quadrat seines Radius ist alsdann gleich dem constanten Rechteck aus den Abständen des Höhenpunktes von jeder Ecke und der gegenüberliegenden Seite des Dreiseits. Es kann also auch nur einem stumpfwinkligen Dreiseit eine gleichseitige Hyperbel einbeschrieben werden.

§. 46. Ueber die besondere Natur der in einer Schaar enthaltenen Kegelschnitte.

Um die Kegelschnitte einer Schaar hinsichtlich ihrer Gattung genauer zu erforschen, suchen wir das dem Mittelpunkte jedes Kegelschnitts zugehörige Strahlsystem, d. h. das System der conjugirten Durchmesser für jeden Kegelschnitt der Schaar zu bestimmen; je nachdem dasselbe elliptisch oder hyperbolisch ist, wird der Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel sein, und insbesondere ist er Kreis oder gleichseitige Hyperbel, wenn sein System conjugirter Durchmesser ein circulares oder ein gleichseitig-hyperbolisches Strahlsystem, endlich Parabel, wenn es ein parabolisches Strahlsystem ist. Um das System der conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt m gegeben ist, zu erhalten, reicht die Kenntniss eines Tripels conjugirter Punkte xyz in Bezug auf den Kegelschnitt aus; denn ziehen wir mx und durch m eine Parallele zu yz, so erhalten wir ein Paar conjugirter Durchmesser, weil es ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt ist; denn der unendlich-entfernte Punkt auf yz ist der Pol zu mx; ziehen wir zweitens my und eine Parallele durch m zu zx, so erhalten wir ein zweites Paar conjugirter Durchmesser und in gleicher Weise ein drittes Paar; zwei Paare conjugirter Durchmesser bestimmen schon das ganze Strahlsystem, und wir bedürfen des dritten Paares nicht mehr.

Sobald der Mittelpunkt m eines Kegelschnitts und ein Tripel con-

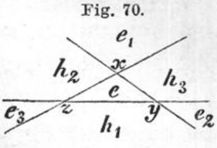
*) „Vermischte Sätze und Aufgaben“ von *J. Steiner* im 55. Bde. des *Crelle-Borchardt*'schen Journals für reine und angewandte Mathematik, Seite 371.

jugirter Punkte xyz in Bezug auf denselben gegeben ist, ist derselbe nicht nur seiner Art nach, sondern überhaupt vollständig bestimmt; denn ziehen wir mx, my, mz, welche Strahlen die Gegenseiten yz, zx, xy resp. in $\xi\eta\zeta$ treffen, so bestimmen $x\xi$ ein Punktsystem, dessen Mittelpunkt m ist; die Asymptotenpunkte der drei Punktsysteme auf mx, my, mz liegen aber auf einem Kegelschnitt, welcher m zum Mittelpunkt und xyz zum Polardreieck hat; denn da $x\xi$ und $y\eta$ zwei Paare conjugirter Punkte in Bezug auf diesen Kegelschnitt sind, so muss auch (S. 153) $z = (x\eta, y\xi)$ und der Schnittpunkt $(xy, \xi\eta)$ ein Paar conjugirter Punkte sein; andererseits sind aber z und ζ ein zweites Paar conjugirter Punkte, folglich ist xy die Polare von z u. s. f.

Der Kegelschnitt ist nun eigentlich durch die drei Punktsysteme mehr als bestimmt; da sich aber ihre Träger in demselben Punkt m treffen, welcher Mittelpunkt für alle drei Punktsysteme ist, so widersprechen sich die ihn bestimmenden Bedingungen nicht. Nur für den Fall, dass die drei Strahlsysteme alle hyperbolisch sind, galt die vorige Bestimmung des Kegelschnitts; alle drei können nicht elliptisch sein, weil nothwendig von drei Tripelpunkten xyz einer innerhalb des Kegelschnitts liegen muss, also seine Verbindungslinie mit m den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten treffen muss (S. 148). Umgekehrt, wären bei willkürlicher Annahme von m, x, y, z alle drei Punktsysteme elliptisch, so müsste der gesuchte Kegelschnitt ganz imaginär sein; wohl aber kann von den drei Punktsystemen eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch, oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein, allerdings nur bei der Hyperbel, für welche ausserdem auch der erste Fall, dass alle drei hyperbolisch sind, eintreten kann. Für die Hyperbel muss nun das Strahlsystem der conjugirten Durchmesser, welches in m bekannt ist, hyperbolisch sein; seine beiden Asymptoten sind die Asymptoten der Hyperbel, und da ausserdem noch ein Punktpaar auf einem Durchmesser mx allemal reell ist, so ist die Hyperbel ebenfalls als bekannt anzusehen.

Bei willkürlicher Annahme von m, x, y, z gestaltet sich das Kriterium, ob der Kegelschnitt Hyperbel oder Ellipse ist, in folgender Art:

Fig. 70.



Die Seiten des Dreiecks xyz theilen die ganze Ebene in 7 Räume, den endlichen Dreiecksraum (e), die drei den Ecken anliegenden Scheitelräume $e_1 e_2 e_3$ und die drei den Seiten anliegenden Räume $h_1 h_2 h_3$. Liegt der angenommene Mittelpunkt m in e, so giebt es keinen reellen Kegelschnitt; liegt er in $e_1 e_2 e_3$, so giebt es einen, und derselbe ist Ellipse; liegt endlich m in einem der Räume $h_1 h_2 h_3$, *so giebt es ebenfalls einen reellen Kegelschnitt, und derselbe ist Hyperbel.* (Vgl. §§. 58 und 62.)

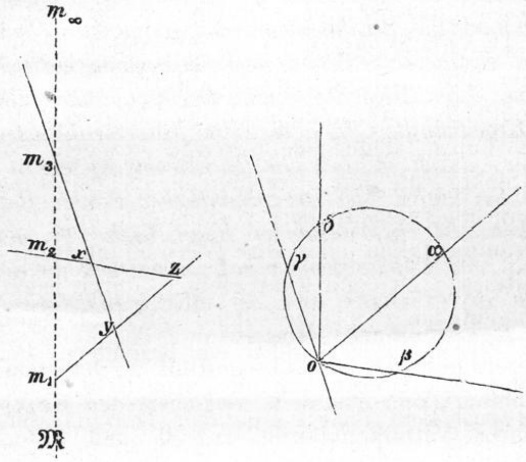
Die Kegelschnittschaar hat ein allen Kegelschnitten gemeinschaftliches Tripel conjugirter Punkte: das Diagonaldreieck xyz des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der Schaar gebildeten vollständigen Vierseits (S. 147), und ferner liegen die Mittelpunkte m aller Kegelschnitte der Schaar auf einer Geraden $\mathfrak{M}$, der Mittelpunktslinie (S. 276), und erfüllen dieselbe; die Strahlen mx und my beschreiben also zwei perspectivische Strahlbüschel, während der Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt m ist, die ganze Schaar durchläuft, und die conjugirten Durchmesser zu mx und my behalten constante Richtung.

Wir denken uns nun die Durchmessersysteme sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar parallel mit sich nach einem und demselben Punkte o der Ebene hin verschoben und legen einen beliebigen Kegelschnitt $C^{(2)}$ durch den Punkt o; dann liefert jedes der nach o verlegten Strahlsysteme der conjugirten Durchmesser einen bestimmten Punkt P in der Ebene; denn bekanntlich schneiden die Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems, dessen Mittelpunkt in der Peripherie eines Kegelschnitts liegt, Sehnen in dem Kegelschnitte aus, welche sämmtlich durch einen Punkt P laufen (S. 151); dieser Punkt ist schon durch zwei Strahlenpaare bestimmt; ziehen wir also durch o eine Parallele zu yz, welche den Hülfskegelschnitt $C^{(2)}$ in α trifft, eine Parallele zu zx, welche ihn in β trifft; ziehen wir ferner durch o zwei Parallele zu xm und ym, welche den Hülfskegelschnitt in α^1 und β^1 treffen, so wird der Schnittpunkt von $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ der Punkt P sein, welcher dem Strahlsystem der conjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt (m) entspricht. Verändern wir jetzt m auf der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, um die ganze Schaar zu erhalten, so beschreiben xm und ym zwei perspectivische Strahlbüschel, folglich auch $o\alpha^1$ und $o\beta^1$ zwei projectivische Strahlbüschel; weil aber o und α zwei feste Punkte des Hülfskegelschnitts $C^{(2)}$ sind, so werden $o\alpha^1$ und $\alpha\alpha^1$ zwei projectivische Strahlbüschel beschreiben, ebenso $o\beta^1$ und $\beta\beta^1$, folglich beschreiben auch $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ zwei projectivische Strahlbüschel; der Ort ihres Schnittpunktes P ist also ein bestimmter Kegelschnitt $C_1^{(2)}$, welcher durch α und β geht; dass er auch durch γ, den Schnittpunkt eines parallel mit xy durch o gezogenen Strahles mit dem Kegelschnitte $C^{(2)}$, hindurchgeht, ist einleuchtend, da wir statt α und β auch α und γ oder β und γ hätten wählen können; es geht auch daraus hervor, dass, wenn m insbesondere in den Schnittpunkt der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit xy rückt, der Punkt P nach γ gelangt. Es ist nun auch leicht, den vierten Schnittpunkt der Kegelschnitte $C^{(2)}$ und $C_1^{(2)}$ zu finden; gelangt nämlich m insbesondere nach dem unendlich-entfernten Punkte der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, so wird der Punkt P die Lage eines Punktes δ annehmen, welcher der Schnittpunkt einer durch o zur Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ gezogenen Parallelen mit dem Hülfskegelschnitte $C^{(2)}$ ist. Die Kegelschnitte $C^{(2)}$ und $C_1^{(2)}$ begegnen sich also in den leicht angebbaren vier Punkten $\alpha\beta\gamma\delta$. Wir haben demnach zunächst folgenden Satz gefunden:

Verschiebt man die Strahlsysteme der conjugirten Durchmesser für sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten mit Beibehaltung ihrer Richtung (ohne Drehung) nach einem Punkte o eines beliebigen Kegelschnitts $C^{(2)}$, so bestimmt jedes Strahlsystem einen Punkt P in der Ebene, durch welchen die Durchbohrungssehnen jedes Paares conjugirter Strahlen laufen; der Ort sämmtlicher Punkte P für alle Kegelschnitte der Schaar ist ein bestimmter Kegelschnitt $C_1^{(2)}$, der insbesondere mit $C^{(2)}$ diejenigen vier Punkte gemein hat, in welchen die durch o mit den drei Diagonalen des Vierseits und der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ gezogenen Parallelen dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ begegnen.

Ist der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ einmal ermittelt, so haben wir eine leicht übersehbare Abhängigkeit einerseits zwischen den Kegelschnitten der Schaar oder ihren Mittelpunkten m auf $\mathfrak{M}$ und ihren zugehörigen Durchmessersystemen und andererseits den sämmtlichen Punkten P des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$; jeder Punkt dieses Kegelschnitts, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels aufgefasst, liefert nämlich Strahlen, welche den Hülfskegelschnitt $C^{(2)}$ in Punktpaaren treffen, und diese, mit o verbunden, geben je ein Strahlsystem, welches dem Durchmessersystem eines bestimmten Kegelschnitts der Schaar parallel läuft; oder auch: Die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, welche die Mitten $m_1 m_2 m_3$ der drei Diagonalen des Vierseits enthält, und deren unendlich-entfernten Punkt wir mit m_∞ bezeichnen wollen, wird durch die vier Punkte $m_1 m_2 m_3 m_\infty$ in vier Stücke zerschnitten, und andererseits zerfällt der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ durch die vier in ihm enthaltenen Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ in vier Stücke (falls er eine Hyperbel ist, muss dieselbe als zusammenhängende Curve in dem auf Seite 120 angegebenen Sinne aufgefasst werden); alsdann enthalten die Strecken zwischen $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_\infty$, $m_\infty m_1$ die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte der Schaar, deren Durchmessersysteme, nach o verlegt, Punkte P liefern, welche beziehungsweise die Stücke $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ erfüllen (Fig. 71). Für die besonderen Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ selbst wird das Strahlsystem parabolisch, die vier Kegelschnitte, welche diesen Punkten entsprechen, müssen also Parabeln sein; dies ist in der That der Fall, obwohl nur der einzige dem Punkt δ entsprechende Kegelschnitt eine eigentliche Parabel ist; die den drei Punkten $\alpha\beta\gamma$ entsprechenden Kegelschnitte der Schaar sind aber die drei Punktpaare (drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits), und ein solches Punktpaar oder die doppelt gedachte Verbindungslinie desselben kann nicht blos, wie wir gesehen haben, als Ellipse oder Hyperbel (mit einer verschwindend kleinen Axe), sondern ebensowohl

Fig. 71.



als eine specielle Parabel aufgefasst werden, denn sie hat zwei zusammenfallende unendlich-entfernte Punkte, was das charakteristische Merkmal der Parabel ist; auch trat schon bei der Betrachtung der Parabelschaar (S. 277) eine solche Doppellinie als specielle Parabel auf. Je nachdem nun der Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Hülfskegelschnitts $C^{(2)}$ liegt, ist das Strahlsystem in o oder das mit ihm parallele Durchmessersystem des Kegelschnitts der Schaar elliptisch oder hyperbolisch, dieser Kegelschnitt selbst also auch Ellipse oder Hyperbel. Wir erkennen hieraus das bereits früher (S. 275) gefundene Resultat, dass die Kegelschnittschaar im Allgemeinen aus zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln besteht, welche mit einander abwechseln, so dass auf eine Gruppe Ellipsen eine Gruppe Hyperbeln u. s. w. folgt, und dass diese vier Gruppen durch die vier erwähnten Parabeln von einander getrennt werden, denn sobald der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ durch einen der vier Schnittpunkte $\alpha\beta\gamma\delta$ geht, tritt er entweder aus der Region innerhalb des Kegelschnitts $C^{(2)}$ in die ausserhalb desselben oder umgekehrt (mit Ausnahme des besonderen Falles, dass zwei von den vier Punkten zusammenfallen).

Denken wir uns irgend ein Paar conjugirter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes der Schaar parallel nach o verschoben, so wird die Durchschnittssehne in dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ im Allgemeinen und höchstens in zwei Punkten P und P^1 treffen, welche zwei bestimmten Kegelschnitten der Schaar entsprechen; *jedes Paar conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes der Schaar ist also im Allgemeinen mit einem Paar conjugirter Durchmesser eines der übrigen parallel; daher haben die Kegelschnitte insbesondere auch paarweise parallele Axen;* solche Paare von Kegelschnitten mit parallelen Axen erhalten wir in der Weise, dass wir nach o ein circulares Strahlsystem verlegen, dessen Durchbohrungssehnen in $C^{(2)}$ durch einen festen Punkt μ laufen; jeder durch μ gezogene Strahl trifft $C_1^{(2)}$ in zwei solchen Punkten P und P^1, deren entsprechende Kegelschnitte der Schaar parallele Axen haben, denn jede durch μ gezogene Sehne bestimmt in $C^{(2)}$ zwei Punkte, die mit o verbunden die Richtungen der Axen liefern. Es kann aber insbesondere vorkommen, dass die Schnittpunkte P und P^1 zusammenfallen oder ihre Verbindungslinie eine Tangente des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ ist, und zwar giebt es durch jeden Punkt P eine bestimmte Tangente an $C_1^{(2)}$; eine solche liefert als Sehne in $C^{(2)}$ zwei Schnittpunkte, die mit o verbunden ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser des dem P entsprechenden Kegelschnitts bestimmen; mit diesem Paare wird kein Paar conjugirter Durchmesser irgend eines andern Kegelschnittes der Schaar parallel sein; also *jeder Kegelschnitt der Schaar hat ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser, welches mit keinem Paar conjugirter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist, und es giebt im Allgemeinen zwei Kegelschnitte, bei denen dies besondere Paar die Axen sind;* die beiden aus dem Punkte μ an den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ gelegten Tangenten haben nämlich zu Berührungspunkten die besonderen Punkte P, deren entsprechende Kegelschnitte der Schaar das besondere Paar conjugirter Durchmesser zu Axen haben.

Um zu ermitteln, ob und wie viele *gleichseitige Hyperbeln* in der Kegelschnittschaar enthalten sind, denken wir uns in den Schnittpunkten der durch μ gezogenen Sehnen mit dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ Tangentenpaare an dem letzteren, die sich in Punkten schneiden, welche auf der Polare von μ in Bezug auf $C^{(2)}$ liegen; diese Polare $\mathfrak{L}$ wird nun den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ im Allgemeinen in zwei Punkten P und P^1 treffen; jeder derselben hat die Eigenschaft, dass sein Tangentenpaar an $C^{(2)}$ den Kegelschnitt in zwei Punkten berührt, die mit o verbunden zwei rechtwinklige Strahlen liefern; diese sind aber die Asymptoten des Strahlsystems, welches dem P zugehört; es ist ein gleichseitig-hyperbolisches, weil seine beiden Asymptoten rechtwinklig zu einander sind; jene beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ bestimmen also zwei solche Punkte P, dass die ihnen entsprechenden Kegelschnitte der Schaar gleichseitige Hyperbeln werden; es giebt mithin in der Kegelschnittschaar zwei oder eine oder keine gleichseitige Hyperbel, je nachdem $\mathfrak{L}$ und $C_1^{(2)}$ sich schneiden oder berühren oder nicht treffen. (Vergl. S. 285.)

Insbesondere kann die Kegelschnittschaar einen *Kreis* enthalten, wenn der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ durch den Punkt μ geht, für welchen das Strahlsystem in o ein circulares wird. Sollen zwei Kreise in der Kegelschnittschaar vorkommen, so muss der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in μ einen Doppelpunkt haben, d. h. in ein Linienpaar zerfallen; suchen wir überhaupt die Bedingungen auf, damit der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ zerfalle; dies wird dann eintreten, wenn die beiden den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ erzeugenden projectivischen Strahlbüschel (α) und (β) perspectivisch liegen, also in die Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechende Strahlen hineinfallen; dies ist aber nur dann möglich, wenn die Richtungen von m_2x und m_1y zusammenfallen oder die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der Diagonale xy coincidirt; alsdann fällt m_2 in x und m_1 in y hinein, und da m_2 die Mitte zweier Gegenecken des vollständigen Vierseits ist, welche mit x und z harmonisch liegen, so muss, da x in die Mitte zwischen zwei zugeordneten Punkten fällt, der vierte harmonische Punkt z in die Unendlichkeit gehen; ebenso auf der Diagonale yz; also das ursprünglich gegebene Vierseit muss die Eigenschaft haben, dass zwei Diagonalen desselben parallel laufen, wobei die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der dritten Diagonale zusammenfällt. Der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ reducirt sich dann, weil $\alpha\beta$ zusammenfallen und auch $\gamma\delta$ zusammenfallen, also zwei Doppelpunkte in ihm vorkommen, auf die doppelt zu zählende Verbindungslinie derselben und enthält nicht nur einen, sondern unendlich viele Doppelpunkte. Ein Doppelpunkt des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ liefert nun in o zwei gleiche auf einander fallende Strahlsysteme, entspricht also in der Kegelschnittschaar zwei Kegelschnitten, deren Durchmessersysteme gleich und gleichgerichtet sind; zwei solche Kegelschnitte heissen ähnlich und ähnlich-liegend; wir schliessen hieraus:

Unter den gesammten Kegelschnitten der Schaar giebt es im Allgemeinen keine zwei, welche ähnlich und ähnlich-liegend sind; wenn es aber insbesondere ein solches Paar giebt, so sind alle übrigen auch paarweise ähnlich und ähnlich-liegend; dieser besondere Fall tritt ein, wenn zwei Diagonalen des Vierseits parallel sind, wo dann die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der dritten Diagonale zusammenfällt. Der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ degenerirt dabei in eine doppelte gerade Linie; geht diese insbesondere noch durch den Punkt μ, so giebt es *zwei Kreise* in der Kegelschnittschaar, welche ebenfalls als ein Paar ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte aufzufassen sind. (Wir überlassen dem Leser die Untersuchung eines andern Falles, in welchem gleicherweise die Richtungen

$m_2 x$ und $m_1 y$ auf einander fallen, wenn nämlich y mit x coincidirt; alsdann entsteht ein besonderes Vierseit, von welchem zwei Seiten zusammenfallen und auch zwei Diagonalen auf dieselben; die Kegelschnitte dieser speciellen Schaar berühren sämmtlich eine Gerade (das zusammenfallende Seitenpaar) in einem und demselben festen Punkte und ausserdem zwei andere Gerade; die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ enthält nur eine elliptische und zwei hyperbolische Regionen; der Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ degenerirt in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt auf dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ liegt; es giebt also keine zwei ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte u. s. w.; auch weitere Specialisirungen ergeben sich ohne Schwierigkeit aus der obigen allgemeinen Betrachtung.)

Eine besondere Einfachheit gewinnt die Untersuchung, wenn wir für den beliebig zu wählenden Hülfskegelschnitt $C^{(2)}$ einen Kreis annehmen; für den Kreis wird nämlich zunächst der Punkt μ der Mittelpunkt, und alle solche Punkte P, die gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, also auf einem concentrischen Kreise liegen, geben in o gleiche Strahlsysteme, was aus der auf S. 268 gemachten Bemerkung hervorgeht, indem einerseits das Tangentenpaar aus P an den Kreis zwei Berührungspunkte liefert, welche mit o verbunden die Asymptoten des Strahlsystems geben, oder andererseits die durch P gezogene kleinste Sehne des Kreises denselben in zwei Punkten trifft, welche mit o verbunden das den gleichen conjugirten Durchmessern entsprechende Strahlenpaar liefern (gh_1 und hg_1), dessen Halbirungsstrahlen die Axen sind. Mit Hülfe dieser Bemerkung erkennen wir, dass irgend ein mit dem Kreise $C^{(2)}$ concentrischer Kreis im Allgemeinen den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in vier solchen Punkten P treffen wird, deren entsprechende Kegelschnitte ähnlich (aber nicht ähnlich-liegend) sind, weil die diesen vier Kegelschnitten der Schaar zugehörigen Durchmessersysteme gleich sind, und zwar wird, wenn wir den Radius eines solchen mit dem ursprünglichen concentrisch angenommenen Kreises verändern, ein Kreis, dessen Radius grösser ist als der von $C^{(2)}$, im Allgemeinen in vier Punkten den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ treffen, welche vier ähnliche Hyperbeln der Kegelschnittschaar liefern, während ein Kreis, dessen Radius kleiner ist als der von $C^{(2)}$, immer in vier solchen Punkten trifft, welche vier ähnliche Ellipsen der Kegelschnittschaar liefern; auch ist ersichtlich, dass von diesen vier ähnlichen Kegelschnitten immer zwei einer der vier oben hervorgehobenen Gruppen und die beiden andern der zweiten gleichartigen Gruppe angehören; doch treten bei der stetigen Veränderung des mit $C^{(2)}$ concentrischen Kreises gewisse Grenzen auf, welche zu alleinstehenden Kegelschnitten führen, oder bei denen ein solches Paar in einen einzigen Kegelschnitt zusammenfällt. Im Allgemeinen wird es bei jeder der vier Gruppen in der Kegelschnittschaar einmal vorkommen, dass die beiden ähnlichen Kegelschnitte zusammenfallen, indem durch das Wachsen oder Abnehmen des Radius eines mit $C^{(2)}$ concentrischen Kreises die zwei Schnittpunkte desselben mit einem der vier Curvenstücke $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ einander genähert werden können, bis sie zuletzt zusammenfallen; ein solcher Kreis wird den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ berühren, sein nach dem Berührungspunkte gezogener Radius wird also eine Normale des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ sein, und jene alleinstehenden Kegelschnitte werden daher bestimmt durch die Fusspunkte der Normalen, welche sich aus dem Mittelpunkte μ des Hülfskreises $C^{(2)}$ an den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ ziehen lassen.*) Diese Fusspunkte können wir auf folgende Weise ermitteln: Möge ein solcher um den Mittelpunkt μ beschriebener Kreis den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in zwei Punkten $\alpha^1\beta^1$ treffen, so wird die Mitte der Sehne $\alpha^1\beta^1$ einmal in dem von μ auf dieselbe gefällten Perpendikel liegen und andererseits in demjenigen Durchmesser des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$, welcher der Richtung $\alpha^1\beta^1$ conjugirt ist; der Ort des Mittelpunkts dieser Sehne ist daher leicht zu bestimmen: Wir ziehen durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ einen veränderlichen Strahl l und den conjugirten Duchmesser λ; aus dem festen Punkte μ fällen wir auf l ein Perpendikel, dessen Schnittpunkt mit λ der Mittelpunkt der Sehne ist; bei der Veränderung von l beschreiben nun l und λ ein Strahlsystem, also zwei in sich projectivische Strahlbüschel, das Perpendikel von μ auf l ebenfalls ein mit jenen projectivisches Strahlbüschel, folglich ist der Ort des Mittelpunktes der Sehne ein Kegelschnitt, welcher durch M und μ geht, und zwar *eine gleichseitige Hyperbel*, weil, wenn l und λ die Axen des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ werden, die beiden unendlich-entfernten Punkte des gefundenen Kegelschnitts hervorgehen, die in zwei rechtwinkligen Richtungen liegen. Diese gleichseitige Hyperbel trifft nun den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ in solchen Punkten, für welche die gemeinschaftliche Sehne $\alpha^1\beta^1$ den Werth Null hat, also der um μ beschriebene Kreis den Kegelschnitt $C_1^{(2)}$ berührt; es giebt daher im Allgemeinen vier solche Kreise, deren Berührungspunkte die Fusspunkte der aus μ an $C_1^{(2)}$ gezogenen Normalen sind; diese Berührungspunkte haben zugleich die Eigenthümlichkeit, dass ihr Abstand von dem Kreismittelpunkte μ unter den Abständen aller Punkte P des Kegelschnitts $C_1^{(2)}$ von dem Punkte μ ein Maximum oder Minimum ist, woraus folgt, dass die von diesen besonderen Punkten P in o hervor-

---

*) Vergl. §. 37.

gerufenen Strahlsysteme die Eigenthümlichkeit besitzen, dass sie entweder dem circularen Strahlsysteme am nächsten kommen oder von dem gleichseitig-hyperbolischen Strahlsystem am meisten abweichen, da (S. 269) der Winkel zwischen den gleichen conjugirten Durchmessern, oder der Winkel zwischen den Asymptoten oder das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ für einen solchen Punkt ein Maximum oder Minimum wird. Hieraus folgt, dass es auch in der Kegelschnittschaar *vier besondere Kegelschnitte* giebt, *deren Axenverhältniss ein Maximum oder Minimum ist,* und zwar in jeder Gruppe Ellipsen eine solche, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt (oder selbst ein Kreis ist), und in jeder Gruppe Hyperbeln eine solche, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht. Die Aufgabe, diese vier ausgezeichneten Kegelschnitte der Schaar zu finden, ist nach dem Vorigen darauf zurückgeführt, aus einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt Normalen zu ziehen, oder die Durchschnittspunkte eines gegebenen Kegelschnitts mit einer gleichseitigen Hyperbel zu ermitteln; das Resultat der vorigen Untersuchung lässt sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Unter den Kegelschnitten einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten sind im Allgemeinen immer je vier einander ähnlich, und solche vier ähnliche Kegelschnitte gehören paarweise zwei gleichartigen Gruppen an (S. 275), *so dass man also auch sagen kann, die Kegelschnitte jeder Gruppe, für sich betrachtet, seien paarweise ähnlich. In jeder Gruppe giebt es einen einzelnen Kegelschnitt, welcher keinem andern derselben Gruppe ähnlich ist, und zwar in jeder der beiden Gruppen Ellipsen ist dies eine solche, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt* (oder insbesondere selbst ein Kreis ist), *in jeder der beiden Gruppen Hyperbeln eine solche Hyperbel, welche unter allen von der gleichseitigen am meisten abweicht, oder überhaupt ein solcher Kegelschnitt, für welchen das Axenverhältniss ein Maximum oder Minimum wird*).*

Wir haben bisher die Untersuchung einer Kegelschnittschaar auf den Fall von vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten beschränkt; die den Betrachtungen in §§. 41 und 42 analogen führen aber auch zu Kegelschnittschaaren mit zwei reellen und zwei imaginären oder mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten. Für diese beiden Fälle treten mitunter Modificationen der gefundenen Eigenschaften der Kegelschnittschaar ein, welche sich aus der Uebertragung der in §§. 41 und 42 angestellten Betrachtungen ermitteln lassen; es giebt aber für die nähere Untersuchung dieser beiden Kegelschnittschaaren

---

*) *Steiner,* Vermischte Sätze und Aufgaben, *Crelle-Borchardt*'s Journal, Bd. LV. S. 374.

noch ein einfacheres Mittel, nämlich die Polarisation eines Kreisbüschels mit einer reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Secante (Potenzlinie); dadurch, dass man in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt (oder Kreis) als Basis diese beiden Gebilde polarisirt, erhält man einmal eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten und das andere Mal eine Kegelschnittschaar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten. Wir unterlassen die Ausführung dieser Untersuchung, welche sich zu geometrischen Uebungen sehr empfiehlt. Die Ergänzung der vorigen Betrachtungen für den Fall imaginärer gemeinschaftlicher Tangentenpaare der Kegelschnittschaar kann erst später (§. 50) gegeben werden, nachdem die Polareigenschaften einer Schaar ermittelt sind.

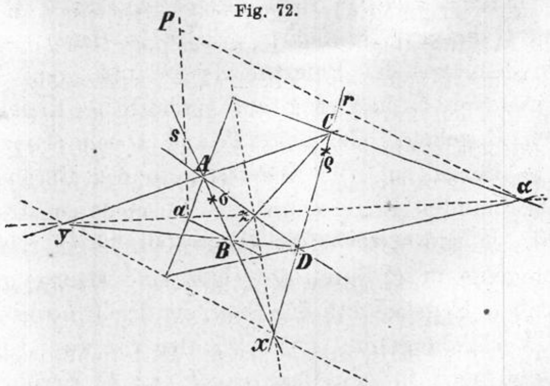
§. 47. Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels.

Das oben (S. 276) gefundene Resultat, dass die Mittelpunkte einer Kegelschnittschaar auf einer Geraden liegen, sowie das schon früher (S. 233) hervorgetretene Ergebniss, dass die Mittelpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln auf einem Kreise liegen, führt darauf hin, sowohl für das allgemeine Kegelschnittbüschel den Ort der Mittelpunkte aufzusuchen, als auch in erweiterter Fassung, da der Mittelpunkt der Pol der unendlich-entfernten Geraden, also nur ein besonderer Fall des Poles irgend einer Geraden in der Ebene ist, die vier Fragen zu beantworten: *Was ist der Ort des Poles einer festen Geraden in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels und einer Schaar? Was ist der Ort der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar und eines Büschels?* wovon die beiden letzteren die polaren Fragen der beiden ersteren sind, also in bekannter Weise von jenen abhängen.

Indem wir zuvörderst von einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten $ABCD$ ausgehen, wollen wir den Ort der Polaren eines festen Punktes P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels ermitteln. Ist xyz das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $ABCD$ (Fig. 72), so erhalten wir (Seite 225) leicht einen Kegelschnitt des Büschels, indem wir einen beliebigen Punkt a der Diagonale yz mit A verbinden und diese Gerade als Tangente des Kegelschnitts ansehen; aB ist dann die Tangente in B, und verbinden wir den Schnittpunkt der Geraden aA und der Diagonale xz mit C, den Schnittpunkt der Geraden aB und der Diagonale xz mit D, so treffen sich diese beiden Geraden, welche die Tangenten in C und D am Kegelschnitte sind, auf der Diagonale yz in einem Punkte α; a und α liegen harmonisch zu yz u. s. w.

Um nun zu irgend einem Punkte P in der Ebene die Polare zu erhalten in Bezug auf den bestimmten Kegelschnitt des Büschels, dessen Tangente in A Aa ist, ziehe ich die Gerade aP, welche in s die Berührungssehne AB trifft, und bestimme von s den vierten harmonischen Punkt σ zu A und B; dann wird, weil a der Pol von AB ist, σ der Pol von aP sein; zweitens ziehe ich die Gerade $P\alpha$, welche in r die

Fig. 72.



Sehne CD trifft, und bestimme zu r den vierten harmonischen Punkt ϱ auf CD; dann wird ϱ der Pol von $P\alpha$ sein, folglich $\varrho\sigma$ die Polare von P. Halten wir diese Construction fest und verändern den Kegelschnitt des Büschels, indem wir den Punkt a auf der Diagonale yz fortrücken, so beschreiben $a\alpha$ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte yz sind, weil $a\alpha$ beständig zu y und z harmonisch liegen; ebenso beschreiben $s\sigma$ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte A und B sind, und auch $r\varrho$ ein solches, dessen Asymptotenpunkte C und D sind. Jedes Punktsystem ist aber in sich projectivisch, d. h. die conjugirten Punkte eines Punktsystems bilden zwei projectivische Punktreihen (S. 52); also beschreiben a und α zwei projectivische Punktreihen, s und σ zwei solche und r und ϱ ebenfalls; nun liegen die Punktreihen s und a perspectivisch in Bezug auf den Projectionspunkt P, ebenso r und α; folglich da σ mit s, s mit a, a mit α, α mit r, r mit ϱ projectivisch sind, so ist auch σ mit ϱ projectivisch; diese beiden von ϱ und σ beschriebenen projectivischen Punktreihen liegen, wie leicht zu erkennen ist, perspectivisch, weil in den Schnittpunkt der Träger AB und CD, d. h. in den Punkt x zwei entsprechende Punkte hineinfallen (wenn a nämlich in AB hineinfällt, also α in CD u. s. w.), folglich läuft die Verbindungslinie $\varrho\sigma$ durch einen festen Punkt. Die Polaren des Punktes P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels laufen daher durch einen festen Punkt Q und bilden ein Strahlbüschel, welches projectivisch ist mit der von dem

Punkte a beschriebenen Punktreihe, d. h. mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Grundpunkte gebildeten Strahlbüschel. Der Punkt Q kann jetzt leicht gefunden werden, indem wir P mit den Diagonalpunkten xyz verbinden und zu jedem dieser Strahlen und dem in dem Diagonalpunkte sich kreuzenden Linienpaar den vierten harmonischen Strahl construiren; diese drei Strahlen müssen sich in dem gesuchten Punkte Q treffen; die Punkte P und Q heissen *„conjugirte Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel“*, denn aus der Polartheorie (S. 144) geht hervor, dass auch die Polaren von Q in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durch P gehen, oder dass P und Q ein Paar conjugirter Punkte sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels. Denken wir uns den bestimmten Kegelschnitt des Büschels construirt, welcher durch P geht, so muss auch die Polare von P in Bezug auf ihn, d. h. seine Tangente in P, durch Q gehen, und ebenso muss für den durch Q gehenden Kegelschnitt des Büschels die Tangente in Q durch P gehen; die Verbindungslinie PQ wird also von zwei Kegelschnitten des Büschels und zwar in den Punkten P und Q berührt oder: auf der Verbindungslinie PQ sind P und Q die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird (S. 234). Das gefundene Resultat lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Die Polaren eines festen Punktes P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen Grundpunkten $ABCD$ laufen durch einen und denselben festen Punkt Q, so dass P und Q ein Paar conjugirter Punkte sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und auch die Polaren von Q sämmtlich durch P laufen. Für irgend zwei Punkte P und P^1 in der Ebene bilden die Polaren zwei Strahlbüschel (Q) und (Q^1), welche allemal projectivisch sind, indem je zwei Polaren in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels entsprechende Strahlen werden. Das Strahlbüschel (Q) ist insbesondere auch projectivisch mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Grundpunkte gebildeten und also auch (S. 235), wenn wir auf die Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel zurückgehen, mit demjenigen Strahlbüschel (P) (S. 226), aus welchem das Kegelschnittbüschel entspringt.

Hieraus folgt weiter, wenn wir zwei Punkte P und P^1 festhalten und die Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels construiren, deren Schnittpunkt der Pol der Verbindungslinie PP^1 sein muss, dass der Ort des Poles einer festen Geraden (PP^1) in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels der Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen der beiden projectivischen Strahlbüschel (Q) und (Q^1), also im Allgemeinen ein *Kegelschnitt* sein wird. Dieser Kegelschnitt ist zugleich der Ort derjenigen Punkte, welche in Bezug auf das Kegelschnittbüschel den sämmtlichen Punkten der festen Geraden (PP^1) conjugirt sind; denn der conjugirte Punkt zu dem Schnittpunkte zweier entsprechender Strahlen der Strahlbüschel (Q) und (Q^1) muss auf der festen Geraden (PP^1) liegen. Hieraus folgen sofort sechs Punkte unseres Kegelschnitts, nämlich diejenigen, welche den Schnittpunkten der festen Geraden mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf jedes Paar Ecken. Andererseits ist ersichtlich, dass die drei Diagonalpunkte xyz ebenfalls Punkte des gefundenen Kegelschnitts sein müssen, weil sie die Pole der festen Geraden in Bezug auf die drei Linienpaare des Kegelschnittbüschels sind, und endlich können wir noch zwei Punkte dieses Kegelschnitts angeben (welche aber imaginär werden können), nämlich die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches das Kegelschnittbüschel auf der festen Geraden ausschneidet, denn diese Punkte sind, wie wir vorhin gesehen haben, selbst ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel: wir haben daher folgendes Ergebniss: *Die Pole einer festen Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen Grundpunkten liegen im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher dem Diagonaldreieck xyz des von den vier Grundpunkten gebildeten vollständigen Vierecks umschrieben ist und ausserdem diejenigen sechs Punkte enthält, welche den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{G}$ mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf jedes Eckenpaar*; durch diese neun Punkte ist der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ schon mehr als bestimmt, woraus also ein elementarer Satz folgt. *Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist zugleich der Ort sämmtlicher Punkte Q, welche den Punkten P der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf das Kegelschnittbüschel conjugirt sind.*

Die Gerade $\mathfrak{G}$ wird von den Kegelschnitten des Büschels in Paaren conjugirter Punkte eines Punktsystems geschnitten (S. 234); dieses Punktsystem auf der Geraden $\mathfrak{G}$ hat zu dem Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine eigenthümliche Beziehung. Trifft nämlich irgend ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade $\mathfrak{G}$ in dem Punktpaare P und p, so wird die Tangente des Kegelschnitts in P durch den conjugirten Punkt Q in Bezug auf das Kegelschnittbüschel gehen müssen und ebenso die Tangente in p durch den conjugirten Punkt q, und ausserdem schneiden sich die beiden Tangenten in einem Punkte s, dem Pol von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf den angenommenen Kegelschnitt des Büschels; es leuchtet ein, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch die drei Punkte Qq und s gehen muss, weil er einmal die conjugirten Punkte aller Punkte von 𝔊 in Bezug auf das Kegelschnittbüschel und andererseits die Pole der Geraden 𝔊 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels enthält. Da nun P und Q ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels sind und ebenfalls p und q, so müssen nach einem oben (S. 153) bewiesenen Satze auch die Schnittpunkte (Pp, Qq) und (Pq, Qp) ein Paar conjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels sein; der erste Punkt (Pp, Qq) liegt aber auf der Geraden 𝔊, folglich muss der andere, sein conjugirter in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen; mithin schneiden sich Pq und Qp in einem Punkte r des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$. Wir haben jetzt vier Punkte $Qqsr$ auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; die Schnittpunkte zweier Seitenpaare dieses Vierecks sind die Punkte P und p, folglich sind P und p ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, und dasselbe gilt für jedes Schnittpunktpaar eines Kegelschnitts des Büschels mit der Geraden 𝔊; wir haben also folgenden Satz:

Die Kegelschnitte eines Büschels treffen eine Gerade 𝔊 in Punktpaaren, welche allemal conjugirte Punkte sind in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher die Pole von 𝔊 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels enthält; diese Schnittpunktpaare bilden also auf 𝔊 dasjenige Punktsystem, welches dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört (S. 140); *ist es hyperbolisch, so geht nothwendig $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch die beiden Asymptotenpunkte desselben.* (Hierdurch ist zugleich ein neuer Beweis für die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels gegeben.)

Durch das Kegelschnittbüschel wird ein eigenthümliches paarweises Entsprechen von Punkten in der Ebene vermittelt: Jedem Punkt P in der Ebene des Kegelschnittbüschels entspricht ein bestimmter conjugirter Punkt Q, welcher wiederum die Eigenschaft hat, dass sein conjugirter Punkt P ist; bewegt sich P auf einer Geraden 𝔊, so durchläuft der conjugirte Punkt Q einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch das gemeinschaftliche Tripel xyz des Kegelschnittbüschels hindurchgeht; dreht sich 𝔊 um einen festen Punkt P, so beschreibt der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten xyz und Q, dem conjugirten zu dem festen Punkte P der Geraden 𝔊. Allen Geraden 𝔊 in der Ebene entsprechen sämmtliche Kegelschnitte eines Büschel-Büschels (von doppelter Unendlichkeit), welche durch die drei Punkte xyz gehen. Es kommt im Allgemeinen in der Ebene nur viermal vor, dass zwei conjugirte Punkte P und Q zusammenfallen, und dies geschieht in den vier Grundpunkten des Kegelschnittbüschels. Nimmt insbesondere P die Lage eines der drei Diagonalpunkte z. B. x ein, so wird sein conjugirter Punkt Q unbestimmt, indem er jeder Punkt der Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte yz sein kann. Jeder Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene entspricht im Allgemeinen ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; dieser zerfällt in ein Linienpaar, sobald $\mathfrak{G}$ durch einen der drei Diagonalpunkte z. B. durch x geht, und von diesem Linienpaar ist allemal der eine Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte yz, der andere Theil der vierte harmonische, der $\mathfrak{G}$ zugeordnete Strahl durch x, indem das durch x gehende Seitenpaar das andere Paar harmonisch-zugeordneter Strahlen ist*).

Die im Obigen entwickelten allgemeinen Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels sind nur bewiesen für den Fall eines Büschels mit vier reellen Grundpunkten; dass sie auch bestehen bleiben, wenn zwei oder alle vier Grundpunkte imaginär werden, können wir nachweisen, indem wir zu der in §. 42 angegebenen Entstehungsart des Kegelschnittbüschels zurückgehen; wir sahen dort, dass, wenn zwei Punktsysteme (b, β) und (c, γ) auf den Trägern $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ willkürlich gegeben sind, unendlich-viele Kegelschnitte sich auf reelle Weise construiren lassen, für welche die gegebenen beiden Punktsysteme die den Geraden $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in Bezug auf jeden solchen Kegelschnitt zugehörigen sind, und dass diese sämmtlichen Kegelschnitte ein Büschel bilden, welches durch dieselben vier reellen Punkte geht, wenn die beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch sind, nämlich durch die Asymptotenpunkte derselben, dagegen durch zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte, wenn nur eines der beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch, das andere elliptisch ist, oder endlich durch vier imaginäre gemeinschaftliche Punkte, wenn die beiden gegebenen Punktsysteme elliptisch sind; dieselbe in §. 42 auseinandergesetzte Construction liefert alle drei Arten von Kegelschnittbüscheln und lässt auch ebenso unmittelbar die vorhin bewiesenen Polareigenschaften derselben erkennen. Durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene giebt es nämlich im Allgemeinen ein und nur ein einziges Strahlenpaar, welches gleichzeitig sowohl durch ein Paar conjugirter Punkte (b, β) des ersten Punktsystems, als auch durch ein Paar conjugirter Punkte (c, γ) des andern Punktsystems hindurchgeht; denn denken wir uns in P zwei auf einander liegende Strahlsysteme, welche beziehlich mit den beiden gegebenen Punktsystemen perspectivisch liegen, so haben diese beiden concentrischen Strahlsysteme ein gemein-

*) Eine derartige Verwandtschaft zwischen Punkten der Ebene heisst „*Steiner'sche Verwandtschaft*"; sie leistet nützliche Dienste bei der Untersuchung mancher Curven höherer Ordnung; vgl. *Durège*, Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871, und: Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten von *H. Durège*, Sitzb. d. Wien. Acad. d. W. II. Abth. Oct. 1875.

sames Paar conjugirter Strahlen (S. 158), und zwar ist dies Paar immer reell vorhanden, sobald beide oder nur eines der beiden Strahlsysteme elliptisch sind; nur in dem Falle, dass beide hyperbolisch sind, braucht das gemeinschaftliche Paar nicht reell zu sein; dies ist aber gerade der Fall von vier reellen Grundpunkten des Büschels, wenn (b, β) und (c, γ) beide hyperbolisch sind, und in dem Obigen erledigt, während die beiden übrigen Fälle, wenn eines hyperbolisch und das andere elliptisch oder beide elliptisch sind, die Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären oder mit vier imaginären Grundpunkten liefern. Hier giebt es also immer durch P ein Strahlenpaar, welches durch zwei conjugirte Punkte b, β und zugleich durch zwei conjugirte Punkte c, γ geht; mögen die beiden Strahlen bc und $\beta\gamma$ sich in P schneiden, so haben wir ein Paar conjugirter Punkte b, β in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und ein zweites Paar c, γ ebenfalls conjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels; folglich sind die Schnittpunkte $(bc, \beta\gamma) = P$ und $(b\gamma, c\beta) = Q$ auch ein Paar conjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels (S. 153), oder die Polaren von P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels laufen durch denselben festen Punkt Q w. z. b. w.

Das Weitere ergiebt sich jetzt leicht in folgender Weise: Lassen wir einen Punkt P auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ sich bewegen, so wird der conjugirte Punkt Q in Bezug auf das Büschel schon dadurch bestimmt, dass wir von P die Polaren in Bezug auf zwei bestimmte Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ ermitteln und ihren Schnittpunkt Q aufsuchen. Die Polaren von sämmtlichen Punkten P der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ laufen aber durch einen Punkt und bilden ein Strahlbüschel, welches projectivisch ist mit der von P beschriebenen Punktreihe (S. 145); dasselbe gilt von den Polaren des veränderlichen Punktes P in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, folglich sind auch die beiden von den Polaren beschriebenen Strahlbüschel unter sich projectivisch, mithin der Ort des Punktes Q im Allgemeinen ein Kegelschnitt; bewegt sich also der Punkt P auf einer Geraden $\mathfrak{G}$, so durchläuft sein conjugirter Punkt Q in Bezug auf das Kegelschnittbüschel einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher zugleich die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ als Mittelpunkte der ihn erzeugenden Strahlbüschel enthält; da aber die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ ganz willkürlich aus dem Kegelschnittbüschel herausgenommen sind, und für jede zwei anderen derselbe Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ als Ort der conjugirten Punkte Q resultiren muss, so enthält der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gleichzeitig die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in

Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt umgekehrt, dass, wenn wir zu zwei beliebigen Punkten in der Ebene P und P^1 die Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels construiren, dieselben zwei Strahlbüschel (Q) und (Q^1) bilden, welche allemal projectivisch sind, indem entsprechende Strahlen die Polaren von P und P^1 in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels sind, denn jene beiden Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Verändern wir P^1 beliebig in der Ebene, so bleibt das Strahlbüschel (Q^1) seiner Polaren beständig projectivisch mit dem Strahlbüschel (Q) oder irgend einem andern Polaren-Strahlbüschel. Der Beweis der übrigen Polareigenschaften bleibt unverändert bestehen, ob die Grundpunkte des Büschels reell oder imaginär sind.

§. 48. Ueber den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels.

Wir wollen jetzt einige besondere Fälle der gewonnenen allgemeinen Resultate hervorheben; wird nämlich zuvörderst die Gerade $\mathfrak{G}$ in die Unendlichkeit verlegt $(\mathfrak{G}_\infty)$, so enthält der ihr entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels; wir nennen ihn daher den Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$; das der Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ in Bezug auf diesen Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zugehörige Punktsystem ist dasjenige, welches von den Richtungen des Systems der conjugirten Durchmesser des Mittelpunktskegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ fixirt wird, und dieses muss nach dem oben bewiesenen Satze identisch sein mit demjenigen Punktsystem, welches die Kegelschnitte des Büschels auf $\mathfrak{G}_\infty$ ausschneiden; also *die Asymptoten jeder Hyperbel in dem Büschel sind einem Paare conjugirter Durchmesser des Mittelpunktskegelschnitts* $\mathfrak{M}^{(2)}$ *parallel*. Hieraus folgt weiter, wenn wir annehmen, $\mathfrak{M}^{(2)}$ sei Hyperbel, (mithin seine Asymptoten s und t mit jedem Paare conjugirter Durchmesser x, $\mathfrak{x}$ harmonisch gelegen), da $x\mathfrak{x}$ den Asymptoten eines bestimmten Kegelschnitts des Büschels parallel sind, dass auch st einem bestimmten Paare conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts parallel laufen; also:

Die Asymptoten des Mittelpunktskegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ *haben die Richtungen eines Paares conjugirter Durchmesser für jeden Kegelschnitt des Büschels.* Wir haben nun früher das von einem Kegelschnittbüschel auf $\mathfrak{G}_\infty$ ausgeschnittene Punktsystem in allen drei Fällen (S. 266) des Kegelschnittbüschels ermittelt und die Kriterien gefunden, unter welchen dasselbe elliptisch oder hyperbolisch ist; da das Strahlsystem der conjugirten Durchmesser für den Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ mit jenem Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$ perspectivisch liegt, nach dem oben bewiesenen allgemeinen Satze, so können wir mit Berücksichtigung der angeführten Kriterien folgende Beziehungen für den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ angeben:

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$; dieser ist:

1) wenn das Büschel vier reelle Grundpunkte hat, eine *Ellipse*, sobald diese vier Punkte so liegen, dass einer sich innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet; dagegen eine *Hyperbel*, sobald sie derart liegen, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt; endlich eine *Parabel*, sobald einer der vier Punkte im Unendlichen liegt. Im ersten Falle besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln; im zweiten Falle aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; die Asymptoten der Mittelpunktshyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben die Richtungen der Axen dieser beiden Parabeln, oder die beiden unendlich-entfernten Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind die Mittelpunkte der beiden Parabeln; da sie die beiden Zweige der Hyperbel trennen, so enthält der eine Zweig der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte aller Ellipsen und der andere die Mittelpunkte aller Hyperbeln des Büschels. Im dritten Falle besteht das Büschel auch aus lauter Hyperbeln und einer einzigen Parabel. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ geht durch die Mitten der sechs Seiten des vollständigen Vierecks, welches von den Grundpunkten des Büschels gebildet wird, und durch die drei Diagonalpunkte desselben, das gemeinschaftliche Polardreieck für alle Kegelschnitte des Büschels. Jedes Paar conjugirter Durchmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist parallel einem Asymptotenpaar eines Kegelschnittes des Büschels, und die Axen des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind parallel den Asymptoten der einzigen gleichseitigen Hyperbel, welche in dem Kegelschnittbüschel vorkommt.

Ausser den *neun Punkten*, durch welche der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ schon mehr als bestimmt ist, können wir noch andere Elemente zu seiner Construction angeben; es lässt sich nämlich leicht der Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ bestimmen. Gehen wir von der allgemeinsten Erzeugung des Kegelschnittbüschels aus (§. 42), und seien entsprechend der früheren Bezeichnung $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Träger zweier Punktsysteme, die für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels die zugehörigen sind; sei der unendlich-entfernte Punkt auf $\mathfrak{B}$: b_∞ und auf $\mathfrak{C}$: c_∞, und die ihnen conjugirten, d. h. die Mittelpunkte beider Punktsysteme auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, mögen m_b und m_c heissen, dann sind m_b und b_∞ ein Paar conjugirter Punkte für das ganze Büschel, ebenso m_c und c_∞, folglich (Seite 153) auch die Schnittpunkte $(m_b m_c, b_\infty c_\infty)$ und

$(m_b c_\infty, m_c b_\infty)$, also: wenn wir durch m_b und m_c Parallelen zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ ziehen, die sich in s treffen mögen, so ist s der conjugirte Punkt zu dem unendlich-entfernten auf der Verbindungslinie $m_b m_c$; folglich muss s auf dem Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ liegen, denn s ist der conjugirte zu einem unendlich-entfernten Punkte in Bezug auf das Büschel. Mithin bilden der Schnittpunkt o der Träger $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die Punkte m_b und m_c und der Punkt s ein dem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ einbeschriebenes Parallelogramm, dessen Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sein muss; hieraus folgt, dass die Mitte μ zwischen den beiden Punkten m_b und m_c der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist; dieser lässt sich immer reell construiren, ob die Grundpunkte des Büschels reell vorhanden sind oder nicht. Hat das Kegelschnittbüschel vier reelle Grundpunkte, so folgt hieraus zugleich der bekannte elementare Satz: *Wenn man in einem vollständigen Viereck die Mitten jedes der drei Paare Gegenseiten mit einander verbindet, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte und halbiren sich in demselben; dies ist der Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts, welcher die Mittelpunkte sämmtlicher dem vollständigen Viereck umschriebenen Kegelschnitte enthält und sowohl durch die Mitten der sechs Seiten, als auch durch die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks hindurchgeht.*

2) Wenn das Büschel zwei reelle Grundpunkte hat und zwei imaginäre, welche auf der zweiten (ideellen) gemeinschaftlichen Secante liegen, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ *Ellipse*, sobald die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten hindurchgeht, dagegen *Hyperbel*, sobald dieselbe die beiden reellen Grundpunkte nicht trennt, endlich *Parabel*, wenn einer der beiden reellen Grundpunkte im Unendlichen liegt; im ersten Falle besteht wiederum das Büschel aus lauter Hyperbeln, im zweiten Falle aus einer Gruppe Ellipsen, einer Gruppe Hyperbeln und zwei Parabeln, im dritten Falle aus lauter Hyperbeln und einer einzigen Parabel. Denken wir uns dies Kegelschnittbüschel nach §. 42 durch die beiden Punktsysteme auf dem einzig reellen Linienpaar ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$), welche allen Kegelschnitten gleichzeitig zugehören, erzeugt, so geht der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ durch den Schnittpunkt dieses Linienpaares (den einzig reellen Punkt des gemeinschaftlichen Tripels) und durch die Mittelpunkte der beiden Punktsysteme auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; durch diese drei Punkte ist er aber noch nicht völlig bestimmt; nehmen wir die Gerade $\mathfrak{A}$, die einzig reelle Seite des gemeinschaftlichen Tripels, und das Punktsystem (a, α) auf ihr, welches von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird und in diesem Falle nothwendig elliptisch ist, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ vollständig bestimmt durch die drei genannten Punkte

und dadurch, dass das bekannte Punktsystem (a, α) das ihm zugehörige sein soll. (Siehe Seite 150).

3) Wenn das Kegelschnittbüschel vier imaginäre Grundpunkte hat, so ist der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ allemal *Hyperbel* und völlig bestimmt durch den Schnittpunkt des einzig reellen Linienpaares $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, durch die Mittelpunkte der beiden (elliptischen) Punktsysteme auf diesen Trägern, welche gleichzeitig allen Kegelschnitten des Büschels zugehören, und durch die beiden übrigen reellen Tripelpunkte des gemeinschaftlichen Tripels, nämlich die Asymptotenpunkte des auf der Polare $(\mathfrak{A})$ des Schnittpunktes $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ befindlichen hyperbolischen Punktsystems, welches auf dieser Geraden von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird. Das Kegelschnittbüschel besteht also in diesem Falle immer aus einer Gruppe Ellipsen, einer Gruppe Hyperbeln und zwei Parabeln; die Mittelpunkte der letzteren sind die unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ und trennen die beiden Zweige derselben, deren einer die Mittelpunkte der Ellipsengruppe, der andere die der Hyperbelgruppe enthält; das Büschel enthält nur ein reelles Linienpaar und zwei imaginäre Linienpaare (Nullkegelschnitte), deren jedes sich auf einen Punkt zusammenzieht; dies sind die beiden Asymptotenpunkte des hyperbolischen Punktsystems auf $\mathfrak{A}$ oder zwei Tripelpunkte des ganz reellen gemeinschaftlichen Tripels.

Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ kann in den Fällen 1) und 2) insbesondere ein *Kreis* werden; alsdann besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln (S. 233); in dem Falle 1), wo die vier Grundpunkte des Büschels reell sind, also drei Linienpaare in dem Büschel existiren, deren jedes ein Paar rechtwinkliger Geraden sein muss, folgt die schon oben gefundene Bedingung: die vier Grundpunkte müssen so liegen, dass einer (jeder) der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Diese Bedingung lässt sich aber etwas anders fassen, so dass sie auch in dem Falle 2) von nur zwei reellen Grundpunkten bestehen bleibt; seien nämlich $ABCD$ die vier Grundpunkte und x der Schnittpunkt (AB, CD) zwischen A und B gelegen, was nothwendig wenigstens einmal unter den drei Linienpaaren vorkommen muss, sobald $\mathfrak{M}^{(2)}$ Ellipse ist, dann kommt die vorige Bedingung darauf hinaus, dass CD auf AB senkrecht stehe und

$$xA \,.\, xB + xC \,.\, xD = 0 \quad \text{sei} \quad \text{(S. 232).}$$

Anstatt der Punkte C und D, welche die Asymptotenpunkte des allen Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlich zugehörigen Punktsystems auf CD sind, können wir zwei andere Punkte einführen, die

Mitte zwischen CD, d. h. den Mittelpunkt dieses gemeinschaftlichen Punktsystems, und den dem Punkte x conjugirten Punkt $\mathfrak{x}$ desselben, d. h. den vierten harmonischen zu x, C, D, der dem x zugeordnet ist; denn nach Seite 13. V. haben wir:

$$xC \,.\, xD = xm \,.\, x\mathfrak{x}, \quad \text{also auch}$$
$$xA \,.\, xB + xm \,.\, x\mathfrak{x} = 0,$$

d. h. die vier Punkte $ABm\mathfrak{x}$ müssen so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Soll nun in dem Falle 2) das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln werden (oder $\mathfrak{M}^{(2)}$ ein Kreis), und denken wir uns dasselbe durch die beiden den Kegelschnitten zugehörigen Punktsysteme auf dem einzig reellen Linienpaar erzeugt (§. 42), so ist zunächst erforderlich, dass die ideelle gemeinschaftliche Secante zwischen den beiden reellen Grundpunkten AB hindurchgehe und dieselbe in x rechtwinklig schneide; ist $\mathfrak{x}$ der conjugirte Punkt zu x in dem auf dieser ideellen Secante gegebenen (elliptischen) Punktsystem, welches allen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehört, und m der Mittelpunkt desselben, so muss:

$$xA \,.\, xB + xm \,.\, x\mathfrak{x} = 0$$

sein, oder die vier Punkte $ABm\mathfrak{x}$ müssen so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist; natürlich wird, während im Falle 1) m ausserhalb $x\mathfrak{x}$ lag, im Falle 2) m zwischen $x\mathfrak{x}$ liegen. Dass in der That zwei so gelegte Punktsysteme ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln erzeugen, lässt sich auch a posteriori leicht nachweisen, indem wir zeigen, dass ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der beiden Punktsysteme, den Schnittpunkt x ihrer Träger geht und das (elliptische) Punktsystem auf der gemeinschaftlichen Polare von x zu dem ihm zugehörigen hat, ein Kreis sein muss.

Es bleibt noch der Fall zu erörtern übrig, wenn der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in ein *Linienpaar* zerfällt. Sind die vier Grundpunkte des Büschels reell, so sind auch die sechs Mitten der Seiten dieses vollständigen Vierecks reell; der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält aber dieselben, und damit er in ein Linienpaar zerfalle, müssen wenigstens drei jener Mitten auf einer Geraden liegen; dies ist nur auf zwei Arten möglich: entweder haben drei in einer Ecke zusammenstossende Seiten ihre Mitten in einer Geraden, dann müssen die drei übrigen Ecken des Vierecks selbst auf einer Geraden liegen, also alle Kegelschnitte des Büschels zerfallen in Linienpaare, und das Kegelschnittbüschel löst sich in eine feste Gerade und ein gewöhnliches Strahlbüschel auf; dieser Fall kann uns weiter nicht interessiren, weil wir es dann nicht mit einem

Kegelschnittbüschel im eigentlichen Sinne des Wortes zu thun haben; oder zweitens: drei nicht zusammenstossende Seiten des vollständigen Vierecks haben ihre Mitten auf einer Geraden; bilden diese ein Dreieck, so haben wir wieder den vorigen Fall; sind es aber z. B. folgende AB, BC, CD, so folgt daraus, dass das Seitenpaar AC, BD parallel sein muss, also *einer der drei gemeinschaftlichen Tripelpunkte im Unendlichen* liegt. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt dann in der That in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen im Endlichen bleibenden Tripelpunkte und dessen anderer Theil diejenige Gerade ist, welche zwischen den beiden parallelen Seiten des Vierecks in gleichem Abstande von beiden selbst mit ihnen parallel läuft. Diese gerade Linie enthält aber eigenthümlicher Weise keinen einzigen Mittelpunkt eines eigentlichen Kegelschnitts dieses Büschels; vielmehr muss jeder Punkt von ihr als der Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts angesehen werden, der aus dem parallelen Seitenpaar besteht, für welches eben der Mittelpunkt unbestimmt wird. Alle übrigen (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels haben ihre Mittelpunkte allein auf derjenigen Geraden, welche die beiden im Endlichen liegenden Eckpunkte des gemeinschaftlichen Tripels verbindet, und jeder Punkt dieser Geraden ist der Mittelpunkt eines bestimmten Kegelschnitts dieses Büschels. Wird noch ein zweites Seitenpaar parallel, also das Viereck ein Parallelogramm, so tritt aufs Neue der eigenthümliche Umstand ein, dass für zwei Kegelschnitte des Büschels, die beiden parallelen Seitenpaare, der Mittelpunkt unbestimmt wird, indem er jeder Punkt der durch den Mittelpunkt des Parallelogramms zu einem Seitenpaare parallel gezogenen Geraden sein kann, während alle übrigen (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels den einzigen Mittelpunkt des Parallelogramms zu ihrem Mittelpunkt haben. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ löst sich in dasjenige Linienpaar auf, welches von den durch den Mittelpunkt des Parallelogramms zu den Seiten gezogenen Parallelen gebildet wird, aber dieses Linienpaar ist illusorisch als Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels, weil diese sich alle auf einen Punkt concentriren.

Auch für ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten oder mit vier imaginären Grundpunkten kann der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ nur zerfallen, wenn das einzig reelle Linienpaar, welches in dem Büschel vorkommt, zu einem Paar Parallellinien wird, also ihr Schnittpunkt, d. h. ein Punkt des gemeinschaftlichen Tripels, in die Unendlichkeit geht; der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt dann in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen Tripelpunkte ist, während der andere Theil wieder illusorisch wird, weil der Mittelpunkt eines Kegelschnitts, welcher aus einem Paar Parallellinien besteht, unbestimmt ist. Noch mehr specialisirt sich das Kegelschnittbüschel, wenn ein Theil des Linienpaares, welches in demselben vorkommt, in die Unendlichkeit geht (zu $\mathfrak{G}_\infty$ wird); alsdann müssen, weil das auf dieser Geraden befindliche Punktsystem allen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehört, sämmtliche Kegelschnitte in dem Büschel ähnlich und ähnlich-liegend sein, denn die Systeme der conjugirten Durchmesser, welche mit dem auf $\mathfrak{G}_\infty$ befindlichen, den Kegelschnitten zugehörigen Punktsystem perspectivisch liegen, werden alle gleich; ist das Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$ hyperbolisch, so sind sie ähnliche Hyperbeln, ist es elliptisch, so sind sie ähnliche Ellipsen. Hierher gehören die beiden *Kreisbüschel* mit reeller oder ideeller gemeinschaftlicher Secante, deren zweite (ideelle) gemeinschaftliche Secante $\mathfrak{G}_\infty$ ist; das auf ihr befindliche Punktsystem ist ein solches, dass je zwei conjugirte Punkte in rechtwinkligen Richtungen liegen, oder die beiden imaginären Kreispunkte auf $\mathfrak{G}_\infty$ die imaginären Asymptotenpunkte dieses (elliptischen) Punktsystems sind. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt natürlich ebenfalls in eine gerade Linie, die Verbindungslinie der übrigen beiden (reellen oder imaginären) Punkte des gemeinschaftlichen Tripels, welche sämmtliche Mittelpunkte der (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels enthält, und in einen illusorischen Theil, welcher mit $\mathfrak{G}_\infty$ zusammenfällt.

Schliesslich möge noch der besondere Fall in Betracht gezogen werden, wenn der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine *gleichseitige Hyperbel* wird; das Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, muss in diesem Fall hyperbolisch sein und seine beiden Asymptotenpunkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen haben; aus der in §. 43 angestellten Betrachtung folgt, dass die Gerade $\mathfrak{L}$ durch den Mittelpunkt des Hülfskreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ gehen muss; und da jeder Punkt in der Geraden $\mathfrak{L}$ ein Strahlsystem in dem Peripheriepunkte B des Kreises $\mathfrak{K}^{(2)}$ hervorruft, welches dem System der conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts des Büschels parallel läuft, so muss unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis vorkommen, weil unter jenen Strahlsystemen ein circulares vorkommt; wir schliessen daher: Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ wird gleichseitige Hyperbel, sobald in dem Büschel ein Kreis vorkommt oder diejenige Ellipse des Büschels, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt, selbst ein Kreis wird. Da wir aus dem Obigen wissen, dass die Asymptoten des Mittelpunktskegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ allemal die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser für jeden Kegelschnitt des Büschels haben, so folgt, weil diese für die gleichseitige Hyperbel zu einander rechtwinklig sind, dass sie den Richtungen der Axen sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels parallel laufen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis enthalten ist, so sind die Axen sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels zwei bestimmten zu einander rechtwinkligen Richtungen parallel, welche zugleich mit den Richtungen der Axen der beiden in dem Büschel enthaltenen Parabeln zusammenfallen oder auch mit den Richtungen der Asymptoten derjenigen gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$, *welche die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels enthält.* Nehmen wir insbesondere die vier Grundpunkte des Büschels reell an und berücksichtigen die drei Linienpaare des Büschels, deren Axen die Halbirungslinien ihres Winkels und Nebenwinkels sind, so resultirt der bekannte elementare Satz: *Halbirt man in einem Kreisviereck die Winkel und Nebenwinkel jedes der drei Seitenpaare, die sich in den Diagonalpunkten schneiden, so sind von diesen sechs Halbirungslinien drei und drei parallel, und die drei ersten stehen auf den drei letzten senkrecht**). Diese beiden zu einander rechtwinkligen Richtungen sind zugleich die der Axen sämmtlicher Kegelschnitte, welche durch die vier Ecken des Kreisvierecks gehen.

Hiervon lässt sich beiläufig eine nützliche Anwendung machen: Ist ein Kegelschnitt in der Ebene gezeichnet, so findet man hiernach leicht die Richtungen seiner Axen, indem man einen beliebigen Kreis hindurchlegt und die vier Schnittpunkte paarweise durch Linienpaare verbindet; die Halbirungslinien von Winkel und Nebenwinkel eines solchen Linienpaares sind den Axen des gegebenen Kegelschnitts parallel. Halten wir den Kegelschnitt fest und zwei von den Schnittpunkten mit dem Kreise, verändern aber den Kreis selbst, so dass er ein Kreisbüschel mit zwei reellen Grundpunkten durchläuft, dann wird, weil von einem Linienpaar der eine Theil und die Halbirungslinie unveränderte Richtung behalten, auch der andere Theil beständig sich parallel bleiben; also: Legt man durch zwei feste Punkte eines Kegelschnitts beliebig viele Kreise, so hat jeder derselben mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante, deren Richtung constant bleibt. Dies ist ein specieller Fall eines auf S. 239 allgemein bewiesenen Satzes. Lassen wir die beiden Punkte des Kegelschnitts, durch welche das Kreisbüschel gelegt wurde, zusammenfallen, so dass die gemeinschaftliche Secante eine Tangente in einem Punkte P des Kegelschnitts wird und die Kreise in demselben Punkte diese Gerade berühren, also ihre Mittelpunkte auf der Normale des

---

*) Geometrische Aufgaben und Lehrsätze von *J. Steiner*, *Crelle*'s Journal, Bd. II, S. 97.

Kegelschnitts in dem angenommenen Punkte haben, so folgt: Zieht man in einem Punkte P eines Kegelschnitts Tangente und Normale und beschreibt eine Reihe von Kreisen, welche ihre Mittelpunkte in der Normale haben und durch den angenommenen Punkt P des Kegelschnitts gehen, so hat ein jeder derselben mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante, welche beständig sich parallel bleibt und mit den Axen des Kegelschnitts dieselben Winkel bildet, wie die Tangente in dem angenommenen Punkte P des Kegelschnitts, aber in symmetrischer Lage sich befindet. Fasst man nur diejenigen Kreise dieses besonderen Büschels auf, welche den Kegelschnitt in noch zwei reellen Punkten schneiden, deren Verbindungslinie die constante Richtung hat, so wird man einen solchen ausgezeichneten Kreis auffinden können, für welchen von den beiden noch übrigen Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte einer P selbst wird, und dieser muss der Krümmungskreis für den Punkt P des Kegelschnitts sein, weil er durch drei unendlich-nahe Punkte desselben geht (S. 208); man findet hieraus folgende einfache Construction des Krümmungskreises, welche von der in §. 38 angegebenen wesentlich verschieden ist: Um für einen Punkt P eines gegebenen Kegelschnitts den Krümmungskreis zu erhalten, ziehe man die Tangente in P und eine zweite Gerade durch P, welche zu einer der Axen des Kegelschnitts dieselbe Neigung, aber symmetrische Lage hat wie die Tangente; trifft diese zweite Gerade den Kegelschnitt zum andern Male in P', so lege man durch P und P' einen Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Normale für P hat; dies ist der gesuchte Krümmungskreis an dem Punkte P des Kegelschnitts. Hieran knüpft sich der elegante *Joachimsthal*'sche Beweis eines auf die Krümmungskreise eines Kegelschnitts bezüglichen Theorems von *Steiner**). (Siehe Aufgaben und Sätze zum zweiten Abschnitt.)

§. 49. Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar.

Den im §. 47 bewiesenen allgemeinen Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels stehen gleichlaufende der Kegelschnittschaar zur Seite, deren Beweis dem dort geführten ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann. Um indessen die dem §. 42 zu Grunde liegende Betrachtung noch klarer hervortreten zu lassen, geben wir die polare Nebenbetrachtung in etwas anderer Form und leiten daraus die Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar mit zum Theil anderen Beweisen direct ab. *Sind A und B die Mittelpunkte zweier beliebigen Strahlsysteme in der Ebene und (a, α) irgend ein Paar conjugirter*

*) Siehe *Crelle*'s Journal Bd. XXXVI, S. 95.

Strahlen des ersten, (b, β) *ein Strahlenpaar des zweiten Strahlsystems, so bilden sämmtliche Kegelschnitte in der Ebene, für welche diese beiden Strahlsysteme die ihnen zugehörigen sind* (S. 139), *d. h. je zwei conjugirte Strahlen der Strahlsysteme* $a\alpha$ *und* $b\beta$ *zwei conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt sind, eine Kegelschnittschaar.*

Die Kegelschnitte dieser Schaar haben vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, sobald die beiden gegebenen Strahlsysteme hyperbolisch sind, nämlich die Asymptoten g, h des einen und g^1, h^1 des andern Strahlsystems, und es können beliebig viele Kegelschnitte der Schaar vermittelst dieser vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten auf bekannte Weise construirt werden. Wenn dagegen nur eines der beiden Strahlsysteme hyperbolisch, das andere elliptisch ist, so haben die Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, die Asymptoten des hyperbolischen Strahlsystems, und man sagt der Analogie wegen, sie haben ausserdem zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten; endlich wenn beide gegebenen Strahlsysteme elliptisch sind, so sagt man, die Kegelschnitte der Schaar haben vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten; in diesen beiden letzten Fällen lassen sich sämmtliche Kegelschnitte der Schaar auf folgendem reellen Wege construiren: Die Verbindungslinie AB ist ein Strahl, der sowohl dem einen, als dem andern Strahlsystem angehört; im ersten Strahlsystem möge er durch l und sein conjugirter durch λ, im zweiten Strahlsystem durch μ und sein conjugirter durch m bezeichnet werden; die Strahlen λ und m treffen sich in einem Punkte C, welcher zum Mittelpunkte eines dritten, vollständig bestimmten, von den beiden gegebenen Strahlsystemen abhängigen Strahlsystems wird; treffen sich nämlich irgend zwei Strahlen a und b der beiden ersten Strahlsysteme in dem Punkt (a, b) und die conjugirten in dem Schnittpunkt (α, β), so sind die Verbindungslinien dieser beiden Punkte mit C zwei Strahlen c und γ des dritten Strahlsystems (c, γ), welches wir in seiner Totalität erhalten, wenn wir die Paare (a, α) und (b, β) beliebig verändern. In der That, halten wir zuerst a und α fest und verändern b und β, so beschreiben die Strahlen c und γ zwei auf einander liegende projectivische Strahlbüschel, bei denen die Schenkel entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen; denn die vier Strahlen $a\alpha c\gamma$ bilden allemal ein vollständiges Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken mit B verbunden drei Strahlenpaare eines Strahlsystems liefern; von diesen ist das eine b, β, das andere μm, also auch das dritte ein solches, welches dem gegebenen Strahlsystem (B) angehört; hieraus folgt, dass, wenn ein Strahl γ^1 auf c fällt, nothwendig c^1 auf γ fallen muss, folglich bilden $c\gamma$ ein Strahlsystem (S. 59). Dasselbe Strahlsystem geht auch hervor, wenn wir b, β fest halten und a, α verändern; denn die Strahlen CA, CB sind in dem einen und dem andern Falle ein Paar conjugirter Strahlen, und ein zweites gemeinschaftliches Paar ist selbstverständlich dasjenige, welches nach den Schnittpunkten der festgehaltenen Strahlen (a, b) und (α, β) hingeht; folglich coincidiren die in beiden Fällen erhaltenen Strahlsysteme (c, γ). Da CA und CB ein Paar conjugirter Strahlen dieses dritten Strahlsystems sind, so wollen wir sie mit n und ν bezeichnen, so dass also $CA = n = \lambda$; $CB = m = \nu$ und $AB = l = \mu$ ist, und (l, λ) (m, μ) (n, ν) drei Paare conjugirter Strahlen beziehlich in den drei Strahlsystemen (A) (B) (C) sind. Diese drei Strahlsysteme stehen daher in dem eigenthümlichen Zusammenhange mit einander, dass, wenn irgend drei Strahlen abc derselben, durch einen Punkt gehen, die conjugirten Strahlen $\alpha\beta\gamma$ ebenfalls durch einen Punkt gehen.

Hieraus folgt ein weiterer bemerkenswerther Zusammenhang der drei Strahlsysteme (A) (B) (C). Denken wir uns um das Dreieck ABC einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegt, so schneidet bekanntlich jedes Strahlsystem Sehnen in dem Kegelschnitt aus, die durch einen Punkt laufen (S. 151); nennen wir diesen der Kürze wegen den „*Sehnenpol*“ des Strahlsystems, dann müssen die drei Sehnenpole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der resp. Strahlsysteme (A) (B) (C) in einer Geraden liegen. Denn nehmen wir irgend einen Punkt P des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ und ziehen AP, BP, CP, so müssen die conjugirten Strahlen sich in einem Punkte Π treffen; mögen $A\Pi$, $B\Pi$, $C\Pi$ dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ resp. in abc begegnen, dann werden AP, Aa ein Paar, AB, AC ein zweites Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (A), also Pa und BC zwei Durchbohrungssehnen, der Schnittpunkt $(Pa, BC) = \mathfrak{a}$ der Sehnenpol des Strahlsystems (A) sein; ebenso $(Pb, CA) = \mathfrak{b}$ der Sehnenpol des Strahlsystems (B), und endlich $(Pc, AB) = \mathfrak{c}$ der Sehnenpol des Strahlsystems (C). Wir haben nun das *Pascal*'sche Sechseck:

$$a\,P\,b\,B\,C\,A,$$

also die Schnittpunkte:

$$\underset{\mathfrak{a}}{(Pa, BC)} \quad \underset{\mathfrak{b}}{(Pb, CA)} \quad \underset{\Pi}{(Aa, Bb)} \qquad \text{oder}$$

in gerader Linie; andererseits das *Pascal*'sche Sechseck:

$$b\,P\,c\,C\,A\,B,$$

also die Schnittpunkte:

$$\underset{\mathfrak{b}}{(Pb, CA)} \quad \underset{\mathfrak{c}}{(Pc, AB)} \quad \underset{\Pi}{(Bb, Cc)} \qquad \text{d. h.}$$

in gerader Linie; da nun beide Geraden die Punkte $\mathfrak{b}$ und Π gemein haben, so fallen sie zusammen, folglich liegen $\mathfrak{abc}$ in einer Geraden w. z. b. w., also gilt der Satz:

Die drei in Betracht kommenden Strahlsysteme (A) (B) (C) *haben den eigenthümlichen Zusammenhang, dass, wenn man einen beliebigen Kegelschnitt um* ABC *legt und die Sehnenpole (d. h. Durchschnittspunkte der Durchbohrungssehnen) der drei Strahlsysteme für den Kegelschnitt bestimmt, dieselben allemal in einer Geraden liegen.*

Mit Berücksichtigung der oben (S. 252) bemerkten Eigenschaft, dass irgend drei Paar Strahlen aus solchen drei Strahlsystemen $(A)(B)(C)$ allemal sechs Tangenten eines Kegelschnitts sind, können wir folgenden Satz aussprechen:

Haben wir ein Dreieck ABC *im Kegelschnitt und eine beliebige Transversale, welche die Dreiecksseiten* BC, CA, AB *resp. in* $\mathfrak{abc}$ *trifft; ziehen wir durch* $\mathfrak{abc}$ *drei beliebige Strahlen, deren erster in* α *und* α^1, *der zweite in* β *und* β^1, *der dritte in* γ *und* γ^1 *dem Kegelschnitte begegnet, so berühren die sechs Strahlen* $A\alpha$, $A\alpha^1$, $B\beta$, $B\beta^1$, $C\gamma$, $C\gamma^1$, *einen neuen Kegelschnitt.*

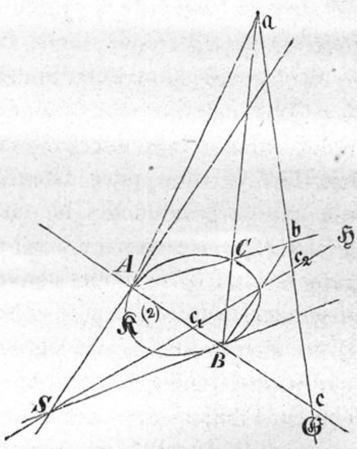
Wenn wir nun irgend zwei conjugirte Strahlen c, γ des Strahlsystems (C) als die Träger zweier projectivischer Punktreihen auffassen, welche von zwei veränderlichen conjugirten Strahlen x, ξ des ersten Strahlsystems (A) fixirt werden [oder auch von einem Strahlenpaar y, η des zweiten Strahlsystems (B)], so erzeugen diese beiden projectivischen Punktreihen einen Kegelschnitt, welcher die Träger c und γ berührt und die Strahlen $x\xi$ zu einem Paar conjugirter Strahlen hat; denn es sind die Schnittpunkte (c, x), (γ, ξ) ein Paar entsprechender Punkte der beiden projectivischen Punktreihen, aber auch gleichzeitig (c, ξ), (γ, x) sind entsprechende Punkte; die beiden Projectionsstrahlen und c, γ bilden ein dem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit, dessen zwei Diagonalen x und ξ sind; folglich sind x und ξ conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt; da dasselbe von jedem Paar $x\xi$ gilt, so ist das ganze Strahlsystem (A) dasjenige, welches dem construirten Kegelschnitte zugehört, und da dieselben beiden erzeugenden Punktreihen auf c und γ auch durch y, η fixirt werden, so gilt die genannte Eigenschaft auch für das zweite gegebene Strahlsystem (B). Der Kegelschnitt hat also die beiden gegebenen Strahlsysteme zu den ihm zugehörigen und gehört daher nach unserer Definition der Schaar an. Verändern wir das willkürlich gewählte Paar c, γ des dritten Strahlsystems, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte der Schaar durch reelle Construction. Die Strahlenpaare z, ζ des dritten Strahlsystems sind die Tangentenpaare aus dem

Punkte C an die Kegelschnitte der Schaar; die Verbindungslinie AB ist die Polare des Punktes C für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar und das Punktpaar A, B ein specieller Kegelschnitt derselben. Die drei Strahlsysteme (A) (B) (C) stehen hinsichtlich ihrer Natur in folgendem Zusammenhange:

Strahlsystem (A)	Strahlsystem (B)	Strahlsystem (C)	Kegelschnittschaar von
I. elliptisch	elliptisch	hyperbolisch	vier imag. gem. Tangenten
II. elliptisch	hyperbolisch	elliptisch	zwei reellen, zwei imag. Tang.
III. hyperb.	elliptisch	elliptisch	zwei imag., zwei reellen Tang.
IV. hyperb.	hyperbolisch	hyperbolisch	vier reellen gem. Tangenten.

Sind x, ξ und y, η zwei Paare conjugirter Strahlen aus den beiden Strahlsystemen (A) und (B) und, wie wir wissen, zugleich zwei Paare conjugirter Strahlen in Bezug auf jeden Kegelschnitt der Schaar, so erhalten wir aus ihnen nach dem auf S. 153 bewiesenen Satze ein drittes Paar $(xy, \xi\eta)$ und $(x\eta, \xi y)$, welches ebenfalls ein Paar conjugirter Strahlen sein muss für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, d. h. die Pole von einer dieser beiden Geraden für alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf der andern, und solcher Paare conjugirter Geraden können wir durch Veränderung der Paare x, ξ und y, η unendlich viele in doppelter Mannigfaltigkeit herstellen. Irgend zwei Paare von diesen gefundenen lassen sich wieder zur Herstellung eines neuen dritten Paares verwenden, und diese Operation hat einen netzartigen Fortgang bis ins Unendliche. Es entsteht die *Frage, ob jede beliebig gegebene Gerade einmal mit dem einen Theil eines solchen Linienpaares zusammenfällt?* Diese Frage wollen wir indirect beantworten: Wir wissen, dass, wenn wir irgend einen Punkt p in der Ebene mit ABC durch drei Strahlen abc verbinden, die drei conjugirten Strahlen $\alpha\beta\gamma$ sich in einem correspondirenden Punkte π treffen; wir verändern jetzt p auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ und suchen den Ort des Punktes π auf; derselbe ist offenbar ein Kegelschnitt, welcher dem Dreieck ABC umschrieben ist; denn da a und b zwei perspectivische Strahlbüschel beschreiben und α ein mit a, β ein mit b projectivisches Strahlbüschel durchläuft (wegen der Strahlsysteme), so sind auch die Strahlbüschel, welche α und β beschreiben, projectivisch; ihr Erzeugniss oder der Ort des Punktes π ist also ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, der durch A und B und ebenso auch durch C geht, und dessen Tangenten in diesen Punkten leicht zu ermitteln sind. Wenn nun der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ in zwei Punkten s und t schneidet, so muss für einen derselben, z. B. s, wenn wir uns p in denselben hineinfallend denken, der correspondirende π sowohl im Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, als auch in der Geraden $\mathfrak{G}$, weil s sowohl in der Geraden, als auch im Kegelschnitt liegt; der correspondirende Punkt zu s muss also t sein und umgekehrt, d. h. es ist sowohl As und At, als auch Bs und Bt je ein Paar conjugirter Strahlen der beiden gegebenen Strahlsysteme (A) und (B). Hieraus folgt nach dem obigen Satze: die Gerade $\mathfrak{G}$ als Verbindungslinie der Schnittpunkte $[(As, Bs), (At, Bt)]$ und die Gerade $\mathfrak{H}$ als Verbindungslinie der Schnittpunkte $[(As, Bt), (At, Bs)]$ sind ein neues Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, d. h. *die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf der Geraden $\mathfrak{H}$.*

Fig. 73.

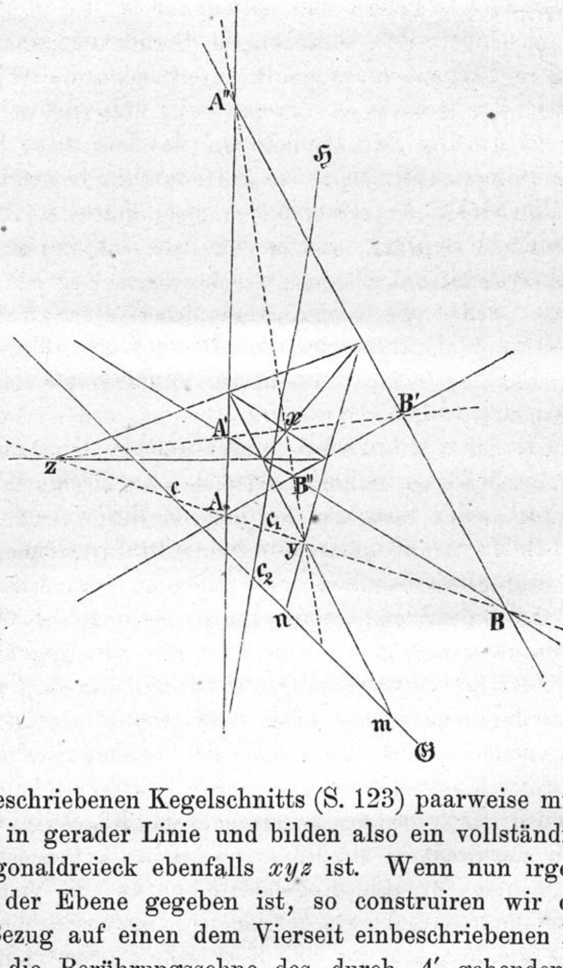


Wenn dagegen der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ nicht trifft, so hören die Punkte s und t zu existiren auf, wohl aber bleibt die Gerade $\mathfrak{H}$ bestehen, denn sie ist nach der vorigen Construction nichts anderes, als die Polare desjenigen Punktes, in welchem die Verbindungslinie AB die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft, in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Es ist also zu vermuthen, dass die geometrische Eigenschaft der gefundenen Geraden $\mathfrak{H}$ fortbestehen wird, aber der oben gegebene Beweis ist nicht mehr zulässig, und wir werden uns für diesen Fall nach einem andern Beweise umsehen müssen. Um zunächst die Gerade $\mathfrak{H}$ unabhängig von der Realität der Punkte s und t zu construiren, bezeichnen wir (Fig. 73) den Schnittpunkt von AB mit $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{c}$, den vierten harmonischen Punkt zu den dreien $\mathfrak{c}$, A, B, wobei A und B als zugeordnete aufgefasst werden, durch $\mathfrak{c}_1$ und endlich denjenigen Punkt auf der Geraden $\mathfrak{G}$, welcher in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ dem $\mathfrak{c}$ conjugirt ist, durch $\mathfrak{c}_2$, dann geht $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ und ist durch diese beiden immer reellen Punkte bestimmt; bezeichnen wir noch die Schnittpunkte von BC und AC mit $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so wird, weil das in B befindliche Strahlsystem BC und BA zu conjugirten Strahlen hat, der zu $A\mathfrak{a}$ conjugirte Strahl des Strahlsystems (A) die Tangente in A am Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ sein und ebenso der zu $B\mathfrak{b}$ conjugirte Strahl des Strahlsystems (B) die Tangente in B am Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Wir haben also in A und in B zwei Strahlenpaare der beiden gegebenen Strahlsysteme; da nun sämmtliche Strahlenpaare in dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ Durchbohrungssehnen ausschneiden, welche für das ganze Strahlsystem durch einen festen Punkt laufen, so erkennen wir, dass das in A gegebene Strahlsystem als solchen Durchschnittspunkt der Durchbohrungssehnen mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ den Punkt $\mathfrak{a}$ liefert, und ebenso das in B gegebene Strahlsystem den Punkt $\mathfrak{b}$; also auch umgekehrt: jede durch $\mathfrak{a}$ gehende Sehne trifft $\mathfrak{K}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, welche mit A verbunden ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (A) liefern und ebenso für $\mathfrak{b}$. Liegt also $\mathfrak{a}$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, so geben die Berührungspunkte des aus $\mathfrak{a}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegten Tangentenpaares mit A verbunden die Asymptoten des Strahlsystems (A), welches in diesem Falle hyperbolisch sein muss, und ebenso für $\mathfrak{b}$. Die Berührungssehne des aus $\mathfrak{a}$ an $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegten Tangentenpaars geht aber durch den Pol von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$, folglich treffen die beiden Asymptoten des Strahlsystems (A) die Gerade $\mathfrak{G}$ in zwei solchen Punkten, welche ein Paar conjugirter Punkte desjenigen Punktsystems auf $\mathfrak{G}$ sind, welches dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört; ebenso treffen die beiden Asymptoten des Strahlsystems (B) die Gerade $\mathfrak{G}$ in zwei conjugirten Punkten des dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehörigen Punktsystems, und dieses Punktsystem ist durch die beiden Punktpaare vollständig bestimmt.

Wir müssen nun untersuchen, unter welchen Umständen die oben mit s und t bezeichneten Schnittpunkte des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$ reell oder imaginär werden; da die von A und B nach ihnen hingehenden Strahlenpaare für beide Strahlsysteme (A) und (B) je ein Paar conjugirter Strahlen sind, so sehen wir, dass s und t das gemeinschaftliche Paar conjugirter Punkte zweier auf $\mathfrak{G}$ zusammenliegender Punktsysteme sind, welche durch die gegebenen Strahlsysteme (A) und (B) ausgeschnitten werden; es existirt aber (S. 58) immer ein reelles gemeinschaftliches Paar, sobald wenigstens eins der beiden Punktsysteme, also auch eins der beiden Strahlsysteme (A) oder (B) elliptisch ist, oder was dasselbe bewirkt, sobald wenigstens einer der beiden Punkte $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt; d. h. in den oben mit I., II., III. bezeichneten Fällen ist das Punktpaar st reell, also für eine Kegelschnittschaar mit vier imaginären oder zwei imaginären und zwei reellen gemeinschaftlichen Tangenten; nur in dem Falle IV., also für eine Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten, können die Punkte s und t imaginär werden. Für diesen Fall lässt sich aber andererseits aus den Eigenschaften des einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits (§. 27) direct nachweisen, dass die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar, die einem Vierseit einbeschrieben ist, auf einer zweiten Geraden liegen, und dann, was noch erforderlich ist, zeigen, dass diese Gerade mit der oben construirten Geraden $\mathfrak{H}$ identisch ist. Das Erstere geschieht auf analoge Weise, wie in §. 47 (S. 299):

Ist nämlich das vollständige Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken AB, $A'B'$, $A''B''$ und dessen drei Diagonalpunkte xyz sind (Fig. 74), gegeben, so liegen die Berührungspunkte irgend eines dem-

Fig. 74.



selben einbeschriebenen Kegelschnitts (S. 123) paarweise mit den Diagonalpunkten in gerader Linie und bilden also ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck ebenfalls xyz ist. Wenn nun irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ in der Ebene gegeben ist, so construiren wir den Pol derselben in Bezug auf einen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, indem wir die Berührungssehne des durch A' gehenden Tangentenpaars die Gerade $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{m}$ und die Berührungssehne des durch B' gehenden Tangentenpaares die Gerade $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{n}$ treffen lassen, sodann zu dem Tangentenpaar in A' und $A'\mathfrak{m}$ den vierten harmonischen Strahl, ebenso zu dem Tangentenpaar in B' und $B'\mathfrak{n}$ den vierten harmonischen Strahl herstellen und den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ dieser beiden vierten harmonischen Strahlen aufsuchen; dann ist $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf denjenigen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, dessen Berührungssehnen für die Construction verwendet sind. Diese beiden Berührungssehnen schneiden sich in dem Diagonalpunkte y und sind zu yx und yz harmonisch; bei der Veränderung des Kegelschnitts beschreiben also $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ein Punktsystem, d. h. zwei auf einander liegende projectivische Punktreihen, folglich $A'\mathfrak{m}$ und $B'\mathfrak{n}$ zwei projectivische Strahlbüschel. Ferner sind $A'\mathfrak{m}$ und $A'\mathfrak{p}$ zugeordnet harmonisch mit dem Tangentenpaar durch A', also beschreiben bei der Veränderung des Kegelschnitts die Strahlen $A'\mathfrak{m}$ und $A'\mathfrak{p}$ zwei projectivische Strahlbüschel, ebenso auch $B'\mathfrak{n}$ und $B'\mathfrak{p}$, folglich auch $A'\mathfrak{p}$ und $B'\mathfrak{p}$, deren Schnittpunkt der gesuchte Pol $\mathfrak{p}$ ist. Diese beiden von $A'\mathfrak{p}$ und $B'\mathfrak{p}$ beschriebenen projectivischen Strahlbüschel liegen aber perspectivisch, weil auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen; dies tritt nämlich in dem besonderen Fall ein, wenn die eine Berührungssehne durch A' selbst geht, also $A'y$ wird, die andere $B'y$, der Kegelschnitt der Schaar aber in das Punktpaar $A'B'$ ausartet. Der Ort des Pols $\mathfrak{p}$ ist daher der Durchschnitt zweier perspectivischen Strahlbüschel d. h. eine Gerade.

Diese Gerade geht durch diejenigen drei Punkte der Diagonalen AB, $A'B'$, $A''B''$, welche den Schnittpunkten mit $\mathfrak{G}$ harmonisch-zugeordnet sind; insbesondere also auch durch den oben mit $\mathfrak{c}_1$ bezeichneten Punkt auf AB; den Punkt, in welchem sie die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft, können wir ebenfalls angeben. Unter den Kegelschnitten der Schaar giebt es nämlich einen, welcher zugleich die Gerade $\mathfrak{G}$ berührt; der Pol von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf ihn ist der Berührungspunkt, und da dieser in der gefundenen Ortsgeraden von $\mathfrak{p}$ liegen muss, so ist er der Schnittpunkt derselben mit $\mathfrak{G}$. Diesen Punkt $\mathfrak{c}_2$ können wir mit Hülfe des besonderen Kegelschnitts, welcher dem Vierseit einbeschrieben ist und zugleich $\mathfrak{G}$ berührt, noch anders definiren. Bekanntlich (S. 152) bestimmen die Tangentenpaare aus den Punkten einer Geraden an einen Kegelschnitt auf einer festen Tangente desselben ein Punktsystem; betrachten wir den dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, welcher gleichzeitig $\mathfrak{G}$ berührt, so bestimmt das Tangentenpaar aus A und das aus B zwei Punktpaare auf $\mathfrak{G}$, welche dies Punktsystem constituiren. Alle Punkte der Geraden AB geben also Tangentenpaare, die $\mathfrak{G}$ immer in je zwei conjugirten Punkten dieses Punktsystems treffen, insbesondere auch der Schnittpunkt $\mathfrak{c}$ von AB mit $\mathfrak{G}$; von seinem Tangentenpaar ist aber eine $\mathfrak{G}$ selbst, also der eine Schnittpunkt der Berührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ und der andere $\mathfrak{c}$; hiernach bestimmen die Schnittpunkte des Seitenpaares durch A und des Seitenpaares durch B auf $\mathfrak{G}$ ein Punktsystem, von welchem $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_2$ ein

Paar conjugirter Punkte ist. Nach dem Früheren sind nun die Punkte $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ dieselben, welche dort zur Bestimmung der Geraden $\mathfrak{H}$ dienten; folglich coincidirt die früher construirte Gerade $\mathfrak{H}$ auch für den Fall einer Kegelschnittschaar von vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten mit der jetzt gefundenen Ortsgeraden der Pole von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar, und somit ist für alle Fälle die Gültigkeit des Satzes erwiesen: *Die Pole einer Geraden* $\mathfrak{G}$ *in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer neuen Geraden* $\mathfrak{H}$, *und also auch die Pole von* $\mathfrak{H}$ *auf der Geraden* $\mathfrak{G}$, oder: Die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar und heissen daher *„conjugirte Gerade in Bezug auf die Kegelschnittschaar"*.

Zu jeder Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene einer Kegelschnittschaar gehört demnach eine bestimmte conjugirte Gerade, insbesondere zu der unendlichentfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, auf welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar liegen. Die Paare von conjugirten Geraden erfüllen also auf doppelte Art die ganze Ebene. Fassen wir irgend ein solches Paar von conjugirten Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ins Auge und nennen P ihren Schnittpunkt, so wird die Polare von P in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zusammen ein Tripel conjugirter Strahlen in Bezug auf diesen Kegelschnitt bilden; alle Kegelschnitte der Schaar haben ausserdem das Tripel conjugirter Strahlen gemeinschaftlich, welches von den Seiten des Diagonaldreiecks xyz gebildet wird, und da zwei Tripel conjugirter Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt allemal einen neuen Kegelschnitt berühren (S. 154), so berührt die Polare von P in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar einen gewissen neuen Kegelschnitt, welcher durch die fünf Tangenten: die Seiten des Diagonaldreiecks xyz und die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ vollständig bestimmt ist; also: Die Polaren des Punktes P in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem Diagonaldreiseit einbeschrieben ist.

Diese Eigenschaft gilt ganz allgemein für jeden Punkt P der Ebene, auch wenn das Diagonaldreieck nicht vollständig reell ist und der Punkt P nicht als Schnittpunkt eines reellen Paares conjugirter Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ aufgefasst werden kann, denn die Schnittpunkte sämmtlicher Paare von conjugirten Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ erfüllen nicht die ganze Ebene. Um die Allgemeingültigkeit der genannten Eigenschaft darzuthun, bemerken wir, dass, wenn wir zu einem gegebenen Punkte P die Polare in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar construiren und zu ihr wiederum die conjugirte Gerade in Bezug auf die

Kegelschnittschaar, die letztere Gerade nothwendig durch P gehen muss; verändern wir also den Kegelschnitt der Schaar, so laufen diese letzteren Geraden sämmtlich durch P, und auch umgekehrt, wenn wir irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch P ziehen, so muss die ihr conjugirte Gerade $\mathfrak{H}$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar nothwendig die Polare von P in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar sein; denn construiren wir von dem Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Polaren in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, so umhüllen dieselben nach dem Obigen einen gewissen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ berührt, und die Schnittpunkte sämmtlicher Tangenten dieses Kegelschnitts mit $\mathfrak{G}$ sind die Pole von $\mathfrak{H}$ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar; diese erfüllen aber die Gerade $\mathfrak{G}$ ganz, und unter ihnen kommt also auch P vor; es sind mithin P und $\mathfrak{H}$ Pol und Polare für einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar. Hieraus geht hervor, dass der Ort der Polaren des Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar identisch ist mit dem Ort derjenigen Geraden $\mathfrak{H}$, welche sämmtlichen durch P gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind. Wir werden also, um jenen Ort zu bestimmen, eine veränderliche Gerade $\mathfrak{G}$ um den festen Punkt P drehen und den Ort der conjugirten Geraden $\mathfrak{H}$ aufsuchen.

Nach dem Früheren erschien die Gerade $\mathfrak{H}$ als die Polare desjenigen Punktes $\mathfrak{c}$, in welchem $\mathfrak{G}$ von AB getroffen wird, in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ (Fig. 73). Dieser Kegelschnitt verändert sich mit $\mathfrak{G}$; läuft nämlich $\mathfrak{G}$ beständig durch einen festen Punkt P, und haben die Strahlen AP, BP zu ihren conjugirten in den beiden erzeugenden Strahlsystemen (A) und (B) die Strahlen $A\Pi$, $B\Pi$, welche sich in Π treffen, so geht der veränderliche Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch den festen Punkt Π und ausserdem durch ABC, beschreibt also ein Büschel mit vier reellen Grundpunkten. Die beiden Tangenten in A und B an dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ treffen sich in einem Punkte S, dessen Ort eine feste Gerade sein wird, eine Diagonale des vollständigen Vierecks $ABC\Pi$, nämlich die Verbindungslinie der Schnittpunkte $(A\Pi, BC)$ und $(B\Pi, AC)$. Die Polare von $\mathfrak{c}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ geht aber durch S und den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{c}_1$ zu $\mathfrak{c}$, A, B, während A und B zugeordnete Punkte sind; durch die beiden Punkte S und $\mathfrak{c}_1$ ist $\mathfrak{H}$ bestimmt, und wir erkennen jetzt leicht, dass bei der Bewegung von $\mathfrak{G}$ die Punkte S und $\mathfrak{c}_1$ zwei projectivische Punktreihen auf ihren Trägern durchlaufen; zu der Tangente AS ist nämlich im Strahlsystem (A) der Strahl $A\mathfrak{a}$ conjugirt und $\mathfrak{a}$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ mit BC. Wenn sich also $\mathfrak{G}$ um den festen Punkt P dreht, so beschreiben $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ perspectivische gerade Punktreihen auf BC und AB, folglich der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{c}_1$ eine mit $\mathfrak{c}$ projectivische Punktreihe, weil $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ ein hyperbolisches Punktsystem auf AB constituiren; ferner beschreibt $A\mathfrak{a}$ ein Strahlbüschel, welches projectivisch ist mit der Punktreihe $\mathfrak{c}$ und AS ein mit $A\mathfrak{a}$ projectivisches Strahlbüschel, weil AS und $A\mathfrak{a}$ immer zwei conjugirte Strahlen des Strahlsystems (A) sind; also werden endlich die von S und $\mathfrak{c}_1$ durchlaufenen geraden Punktreihen projectivisch sein, und der Ort der Verbindungslinie $S\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{H}$ wird ein Kegelschnitt, welcher insbesondere auch AB, sowie $A\Pi$ und $B\Pi$ berührt. Dieser Kegelschnitt heisst der *Polarkegelschnitt des Punktes P in Bezug auf die Kegelschnittschaar* und besitzt folgende Eigenschaft:

Die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt, welcher zugleich der Ort aller Geraden $\mathfrak{H}$ ist, die zu sämmtlichen durch P gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar conjugirt sind. Hat die Kegelschnittschaar vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, so berührt dieser Polarkegelschnitt von P allemal die drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits und ausserdem diejenigen sechs Strahlen, welche man erhält, wenn man durch jede der sechs Ecken des vollständigen Vierseits den vierten harmonischen Strahl construirt zu dem Seitenpaar und dem Verbindungsstrahl der Ecke mit P, diesem letzteren zugeordnet. Liegt P ausserhalb des Polarkegelschnitts, so ist das aus ihm an denselben gelegte Tangentenpaar ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf die Schaar, und es giebt zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, welche durch P gehen, und deren Tangenten in P eben diese beiden Strahlen sind.

Aus der Eigenschaft des Polarkegelschnitts folgt zugleich eine nützliche Bemerkung: Die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden $\mathfrak{H}$ und bilden eine gerade Punktreihe; die Pole einer zweiten Geraden $\mathfrak{G}'$ bilden eine zweite gerade Punktreihe auf $\mathfrak{H}'$. Betrachten wir in diesen beiden Punktreihen als entsprechende Punkte die Pole von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt der Schaar, so sind die beiden Punktreihen auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ allemal *projectivisch*, wie auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ angenommen werden mögen; denn die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte umhüllt den Polarkegelschnitt des Schnittpunktes $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ in Bezug auf die Schaar, welcher zugleich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zu Tangenten hat, folglich schneiden alle übrigen Tangenten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ in zwei projectivischen Punktreihen.

Ferner lässt der Polarkegelschnitt die charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar in unmittelbarer Weise hervortreten; der Polarkegelschnitt eines beliebigen Punktes P heisse $C^{(2)}$; nehmen wir zuerst an, dass P ausserhalb $C^{(2)}$ liegt, so geht durch P ein Tangentenpaar an $C^{(2)}$, welches zugleich ein Paar conjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar ist, also für jeden Kegelschnitt der Schaar zu dem Tangentenpaar aus P an letzteren harmonisch gelegen ist. Die sämmtlichen Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der Schaar bilden daher ein hyperbolisches Strahlsystem, welches zusammenfällt mit demjenigen Strahlsystem, das dem Punkt P in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ zugehört, und dessen Asymptoten eben aus dem Tangentenpaar von P an $C^{(2)}$ bestehen. Wenn dagegen P innerhalb des Polarkegelschnitts $C^{(2)}$ liegt, so existirt kein reelles Tangentenpaar an $C^{(2)}$, aber trotzdem bilden die Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der Schaar ein elliptisches Strahlsystem, welches mit demjenigen zusammenfällt, das dem Punkt P in Bezug auf $C^{(2)}$ zugehört. Um dies zu erkennen, denken wir uns ein Tangentenpaar aus P an einen Kegelschnitt der Schaar, es sei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$; die Polare von P in Bezug auf denselben sei $\mathfrak{L}$, welche die beiden Berührungspunkte auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ verbindet; sei ferner $\mathfrak{H}$ die conjugirte Gerade von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Schaar, und $\mathfrak{H}'$ die von $\mathfrak{G}'$, so geht $\mathfrak{H}$ durch den Berührungspunkt von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{H}'$ durch den Berührungspunkt von $\mathfrak{G}'$, d. h. die Verbindungslinie $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'\mathfrak{H}')$ ist identisch mit $\mathfrak{L}$. Der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ muss aber die drei Geraden $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{L}$ berühren, weil $\mathfrak{L}$ die Polare von P ist in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar und $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ conjugirte Gerade von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sind, welche sich in P treffen. Da nun $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ zwei Paare conjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar sind, so werden auch (S. 153) $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ und $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$ ein drittes Paar conjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar sein, und weil von diesen die erstere durch P geht, so wird die letztere $C^{(2)}$ berühren; wir haben also jetzt vier Tangenten von $C^{(2)}$, nämlich:

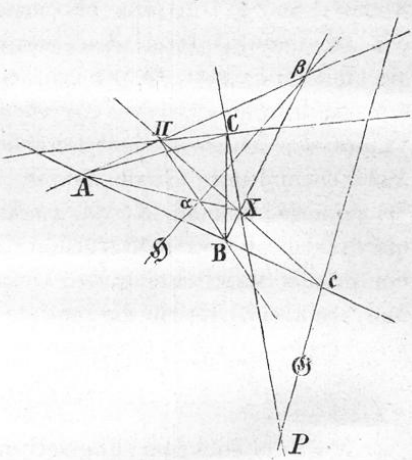
$$\mathfrak{H} \quad \mathfrak{H}' \quad (\mathfrak{G}\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'\mathfrak{H}') \quad (\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{G}'\mathfrak{H}).$$

Von diesem dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ umschriebenen Vierseit sind offenbar die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zwei Diagonalen, wie aus dem Anblick der Buchstaben hervorgeht, folglich sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$, und da alle durch P gehende Paare conjugirter Strahlen in Bezug auf denselben ein Strahlsystem bilden, so folgt der Satz:

Die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte P an die Kegelschnitte einer Schaar bilden ein Strahlsystem, welches identisch ist mit demjenigen, das dem Punkte P in Bezug auf seinen Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ zugehört; also je zwei Tangenten aus P an einen Kegelschnitt der Schaar sind ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$.

Der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ eines Punktes P in Bezug auf die Kegelschnittschaar ist insbesondere, wie wir gesehen haben, dem gemeinschaftlichen Tripel conjugirter Strahlen für alle Kegelschnitte der Schaar einbeschrieben; dieses Tripel ist aber nur reell, wenn das Strahlsystem (C) hyperbolisch ist, und besteht alsdann aus den Asymptoten desselben und der Verbindungslinie AB, welche die drei Diagonalen sind. Ist dagegen das Strahlsystem (C) elliptisch, so tritt an die Stelle der genannten Eigenschaft die mit ihr gleichbedeutende, dass *das Strahlsystem* (C) *allemal dasjenige ist, welches dem Punkte* C *in Bezug auf irgend einen Polarkegelschnitt* $C^{(2)}$ *zugehört.* Um diese Behauptung zu rechtfertigen, denken wir uns den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ eines beliebigen Punktes P auf etwas andere Weise hergestellt. Construiren wir die den Strahlen AP, BP, CP conjugirten Strahlen in den drei Strahlsystemen (A) (B) (C), so schneiden sich dieselben in einem Punkte Π, und ziehen wir durch P irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$, welche AB in $\mathfrak{c}$ trifft (Fig. 75), so wird $\Pi\mathfrak{c}$ die feste Gerade CP in einem Punkte X treffen, so dass durch die fünf Punkte $ABC\Pi X$ der oben mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ bezeichnete Kegelschnitt bestimmt wird, denn da CP und $C\Pi$ ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (C) sind, so muss die Durchbohrungssehne ΠX mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch den Punkt $\mathfrak{c}$ gehen, wie es schon oben für die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nachgewiesen ist und in gleicher Weise für den Punkt $\mathfrak{c}$ gilt; wir sehen also umgekehrt, dass CP und $\Pi\mathfrak{c}$ sich in einem Punkte X des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ treffen müssen, und können jetzt von diesem Kegelschnitte ganz abstrahiren, indem wir den zu seiner Bestimmung dienenden Punkt X allein ins Auge fassen; verbinden wir die Schnittpunkte $(AX,\ \Pi B) = \alpha$ und $(BX,\ \Pi A) = \beta$, so ist die Verbindungslinie $\alpha\beta = \mathfrak{H}$ die conjugirte Gerade zu $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Schaar, und indem wir die Gerade $\mathfrak{G}$ um den festen Punkt P drehen, umhüllt die in der angegebenen Weise construirte Gerade $\mathfrak{H}$ den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$. Diese Construction gestattet, leicht die Veränderung zu überblicken, welche die Figur durch die Drehung von $\mathfrak{G}$ erfährt; es beschreibt nämlich $\mathfrak{c}$ eine gerade Punktreihe auf AB, X

Fig. 75.



eine mit ihr projectivische gerade Punktreihe auf CP, α und β mit X, also auch mit einander projectivische Punktreihen auf ΠB und ΠA, folglich umhüllt $\mathfrak{H}$ einen Kegelschnitt $C^{(2)}$, welcher ΠA und ΠB berührt; auch ist leicht zu erkennen, dass er AB zur Tangente hat, dies geht daraus hervor, dass, wenn $\mathfrak{G}$ mit PC zusammenfällt, $\mathfrak{H}$ auf AB zu liegen kommt. Auf den beiden Trägern ΠA und ΠB sind mithin einmal A und B und dann β und α je ein Paar entsprechender Punkte der beiden projectivischen Punktreihen, folglich liegt der Schnittpunkt $(A\alpha, B\beta) = X$ auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Träger (S. 93), oder, da X die Gerade PC durchläuft, so ist PC die Polare von Π in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$; ferner bilden ΠA, ΠB, AB, $\alpha\beta$ ein dem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit, dessen zwei Diagonalen XA, XB sind; XA und XB sind also stets ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$; insbesondere also auch CA und und CB, und auch CP und $C\Pi$, weil Π der Pol von CP ist; folglich bestimmen diese beiden Paare conjugirter Strahlen das dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ zugehörige Strahlsystem in C und dieses coincidirt mit dem Strahlsystem (C), welches, wie früher angegeben ist, von den beiden gegebenen Strahlsystemen (A) und (B) abhängt, indem CA und CB ein Paar und CP und $C\Pi$ ein zweites Paar conjugirter Strahlen desselben sind. Die oben ausgesprochene Behauptung ist also erwiesen und der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ des Punktes P in Bezug auf die Schaar ist nunmehr dadurch bestimmt, dass er dem Dreieck $AB\Pi$ einbeschrieben ist und ΠA und ΠB in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von PC getroffen werden.

§. 50. Die Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten.

Die in §. 46 durchgeführte Untersuchung, welche über die besondere Natur der in einer Kegelschnittschaar enthaltenen Kegelschnitte Aufschluss gab, beruhte wesentlich darauf, dass die Kegelschnittschaar ein reelles gemeinschaftliches Tripel xyz besitzt, behält also nur ihre Gültigkeit, wenn die Kegelschnittschaar entweder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten hat oder vier imaginäre; es bleibt daher eine Lücke für den Fall, wenn die Schaar zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten besitzt, und diese Lücke auszufüllen ist der gegenwärtige Paragraph bestimmt, in welchem die dort gewonnenen Resultate von einem neuen Gesichtspunkte aus den allgemeinen Polareigenschaften der Kegelschnittschaar nochmals abgeleitet werden sollen, unabhängig davon, ob das gemeinsame Tripel xyz ganz oder nur zum Theil reell ist.

Gehen wir von der allgemeinsten Erzeugung der Kegelschnittschaar aus vermittelst der beiden Strahlsysteme (A) und (B), von welchen das Strahlsystem (C) in bestimmter Weise abhängt (S. 313), und nehmen insbesondere die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, so wird deren conjugirte Gerade $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die Schaar die Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar enthalten. Der unendlich-entfernte Punkt $\mathfrak{m}_\infty$ dieser Geraden $\mathfrak{M}$ ist der Mittelpunkt der einzigen in der Schaar vorkommenden Parabel; von diesem Punkte $\mathfrak{m}_\infty$ wollen wir den Polarkegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ in Bezug auf die Schaar bestimmen; derselbe muss eine *Parabel* sein, weil die Polare von $\mathfrak{m}_\infty$ in Bezug auf die einzige in der Schaar vorkommende Parabel $\mathfrak{G}_\infty$ selbst ist und mithin $\mathfrak{G}_\infty$ eine Tangente von $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist; folglich ist $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine Parabel; sie berührt $\mathfrak{M}$, weil $\mathfrak{M}$ die conjugirte Gerade zu $\mathfrak{G}_\infty$ ist und $\mathfrak{G}_\infty$ durch $\mathfrak{m}_\infty$ geht; sie berührt ebenfalls AB; das Strahlsystem (C) ist das ihr zugehörige, wie bei jedem Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ (S. 325). Jede Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ trifft $\mathfrak{M}$ in einem Punkte $\mathfrak{m}$, welcher Mittelpunkt eines bestimmten Kegelschnitts der Schaar ist, und bildet mit $\mathfrak{M}$ zusammen ein Paar conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts, weil diese beiden Strahlen und $\mathfrak{G}_\infty$ ein Tripel conjugirter Strahlen für einen solchen Kegelschnitt sind. Ziehen wir ferner $\mathfrak{m}C$ und eine Parallele durch $\mathfrak{m}$ zu AB, so haben wir ein zweites immer reelles Paar conjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts der Schaar, weil C und die Verbindungslinie AB Pol und Polare für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar sind. Durch diese beiden Paare conjugirter Durchmesser ist das ganze Strahlsystem der conjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt der Schaar, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, vollständig bestimmt, und die Natur dieses Strahlsystems giebt Aufschluss über die Natur des Kegelschnitts, ob er Ellipse oder Hyperbel ist. Wir können hiernach, indem wir eine veränderliche Tangente an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ herumbewegen, den Verlauf jenes Strahlsystems, also die Natur der Kegelschnitte der Schaar verfolgen und gelangen unabhängig von der Realität des gemeinsamen Tripels, von welchem C und AB immer reell sind, zu den Resultaten des §. 46, die aber für den Fall nur zweier reeller gemeinschaftlicher Tangenten der Schaar eine Modification erleiden.

Zuvörderst ist es nun nöthig, die Construction der Geraden $\mathfrak{M}$ und der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, wovon Alles abhängt, genauer anzugeben. Die Gerade $\mathfrak{M}$ wird nach §. 49 so gefunden: Ein durch A zu BC gezogener Parallelstrahl hat zu seinem conjugirten in dem Strahlsystem (A) den Strahl AS, und ein durch B zu AC gezogener Parallelstrahl hat zu seinem conjugirten in dem Strahlsystem (B) den Strahl BS; bezeichnet S den Schnittpunkt der beiden so gefundenen Strahlen und o die Mitte von AB, so ist oS die gesuchte Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$.

Ziehen wir sodann durch A und B Parallelen zu $\mathfrak{M}$ und die zu ihnen conjugirten Strahlen in den Strahlsystemen (A) und (B), welche sich in Π_0 treffen, endlich durch C eine Parallele zu $\mathfrak{M}$, welche $\Pi_0 A$ und $\Pi_0 B$ in α und β trifft, so ist derjenige Kegelschnitt, welcher dem Dreiseit $\Pi_0 AB$ einbeschrieben ist und die Seiten $\Pi_0 A$, $\Pi_0 B$ in den Punkten α und β berührt, die gesuchte Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; sie berührt auch $\mathfrak{M}$ und zwar, wie leicht zu erkennen ist, in demjenigen Punkte $\mathfrak{m}_h$, welcher die Mitte des Abschnittes ist, den $\Pi_0 A$ und $\Pi_0 B$ auf $\mathfrak{M}$ ausschneiden; dieser Punkt $\mathfrak{m}_h$ ist der Mittelpunkt derjenigen Hyperbel, welche der Schaar angehört und die Gerade $\mathfrak{M}$ zu einer Asymptote hat, also durch den Punkt $\mathfrak{m}_\infty$ geht, denn $\mathfrak{m}_h$ ist der Schnittpunkt zweier zusammenfallenden Tangenten der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, also zweier zusammenfallenden conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts der Schaar. Die Verbindungslinie $\Pi_0 \mathfrak{m}_h$ geht daher nach dem unendlich-entfernten Punkte der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ d. h. ist parallel mit der Axe derselben. Hierdurch ist die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ mehr als bestimmt, und es lässt sich der vorhin angedeutete Vorgang deutlich verfolgen, wenn man aus den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{m}$ der Geraden $\mathfrak{M}$ die noch übrige zweite Tangente an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ legt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_\infty$ den jedesmaligen unendlich-entfernten Punkt derselben, so beschreiben $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ auf $\mathfrak{G}_\infty$ zwei projectivische Punktreihen, weil $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}_\infty$ selbst Tangenten eines Kegelschnitts (der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$) sind und daher von allen übrigen Tangenten desselben projectivisch geschnitten werden; bezeichnen wir noch den unendlich-entfernten Punkt von AB durch $\mathfrak{c}_\infty$, so sind nach dem Obigen $\mathfrak{m}C$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_\infty$ ein Paar, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ ein zweites Paar conjugirter Durchmesser desjenigen Kegelschnitts der Schaar, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, und durch diese beiden Paare ist das ganze Durchmessersystem bestimmt. Um zu entscheiden, ob ein Strahlsystem elliptisch oder hyperbolisch ist, haben wir nachzusehen, ob ein Paar conjugirter Strahlen durch ein zweites und dieses durch jenes getrennt wird oder nicht; dies lässt sich leicht bei der obigen Figur verfolgen.

Wir können uns aber auch des in §. 46 angewendeten Hülfsmittels bedienen, indem wir das Strahlsystem parallel mit sich nach irgend einem Punkte O eines Hülfskegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$ verlegen; die Durchbohrungssehne je zweier conjugirter Strahlen mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ läuft dann durch einen festen Punkt P, und je nachdem dieser Punkt ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegt, ist das Strahlsystem hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch. Verschieben wir nun, wie in §. 46, sämmtliche Durchmessersysteme der Schaar ohne Drehung nach einem beliebigen Punkte O eines Hülfskegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, so bestimmt jedes derselben einen Punkt P, und den Ort sämmtlicher Punkte P für die ganze Schaar ermitteln wir folgendermassen: Die durch O zu $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_\infty$ gezogenen Parallelen treffen $\mathfrak{C}^{(2)}$ in den festen Punkten δ und γ; die zu $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ durch O gezogene Parallele beschreibt ein Strahlbüschel, welches perspectivisch liegt mit der Punktreihe $\mathfrak{p}_\infty$, und die zu $\mathfrak{m}C$ gezogene Parallele durch O beschreibt ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe $\mathfrak{m}$ projectivisch ist; da nun die Punktreihen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ projectivisch sind, weil $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ die veränderliche Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist, so durchbohren die beiden letzten Strahlbüschel den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in Punkten, welche resp. mit den festen Punkten δ und γ auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ verbunden zwei projectivische Strahlbüschel liefern müssen; der Schnittpunkt je zweier entsprechender Strahlen derselben ist aber P, folglich ist der Ort der Punkte P ein neuer Kegelschnitt $\mathfrak{C}_1^{(2)}$, welcher mit $\mathfrak{C}^{(2)}$ die beiden Punkte γ und δ gemein hat. Die Punkte P dieses Kegelschnitts $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ bestimmen Sehnen auf $\mathfrak{C}^{(2)}$, deren Schnittpunkte mit O verbunden Strahlsysteme in O liefern, welche den Durchmessersystemen der Kegelschnittschaar parallel laufen; denjenigen Punkten von $\mathfrak{C}_1^{(2)}$, welche ausserhalb $\mathfrak{C}^{(2)}$ liegen, entsprechen also Hyperbeln in der Kegelschnittschaar, denjenigen Punkten innerhalb $\mathfrak{C}^{(2)}$ Ellipsen und den beiden Punkten γ und δ Parabeln, und zwar ist nur die dem Punkte δ entsprechende eine eigentliche Parabel, während die dem Punkte γ entsprechende die Doppellinie AB ist, welche als Parabel aufgefasst werden kann.

Zur weiteren Untersuchung müssen nun zwei Fälle unterschieden werden, nämlich ob der Punkt C 1) innerhalb oder 2) ausserhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt. Da das dem Punkte C in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zugehörige Strahlsystem dasjenige ist, welches von den beiden als gegeben angenommenen Strahlsystemen (A) und (B) abhängt (S. 313), und es im Falle 1) elliptisch, im Falle 2) hyperbolisch ist, so hat die Kegelschnittschaar im ersten Falle zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten (II und III), im zweiten Falle entweder vier imaginäre oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten (I und IV). Im ersten Falle können nun die Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ ausser den Punkten γ und δ keinen Punkt weiter gemeinschaftlich haben, oder es kann weiter keins von den Durchmessersystemen parabolisch werden; denn damit ein Strahlsystem parabolisch sei, müssen zwei beliebige Strahlen desselben ein und denselben conjugirten Strahl haben, welcher dann zu allen Strahlen der conjugirte ist; es müssten also auch $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_\infty$ denselben conjugirten Strahl haben, d. h. eine durch $\mathfrak{m}$ gehende Tangente der Parabel müsste mit $\mathfrak{m}C$ zusammenfallen; da aber C innerhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt, so geht keine Tangente durch ihn, also schliessen wir: *Eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten zerfällt nur in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche von einander getrennt werden einmal durch die einzige in der Schaar vorkommmende Parabel und das andere Mal durch das einzige in ihr vorkommende Punktpaar.* Im zweiten Falle dagegen haben die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ ausser den Punkten γ und δ noch zwei andere Punkte gemein, welche parabolischen Strahlsystemen entsprechen; die beiden aus C an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ gelegten Tangenten sind nämlich selbst, jede doppelt gedacht, als zwei besondere Parabeln der Schaar aufzufassen und bilden mit AB zusammen das reelle gemeinschaftliche Tripel d. h. sind die drei Diagonalen des entweder ganz reellen oder ganz imaginären vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar einbeschrieben ist. In diesem Falle bleiben die im §. 46 gefundenen Resultate bestehen: Die Kegelschnittschaar besteht aus zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln, welche durch vier Parabeln von einander getrennt werden u. s. f. Auch die interessanten Folgerungen, welche sich aus der Untersuchung des Kegelschnitts $\mathfrak{C}_1^{(2)}$ in §. 47 ergaben, bleiben hier bestehen mit der Modification, welche aus der abweichenden Beschaffenheit der Kegelschnittschaar von zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten sich von selbst ergiebt.

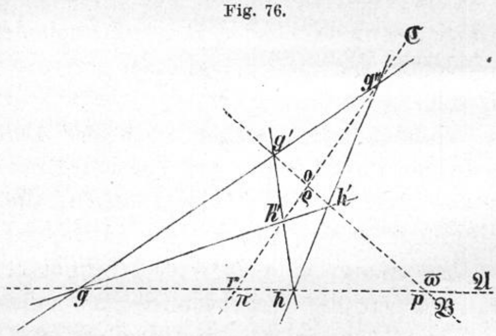
Es ist der Vollständigkeit wegen noch der Uebergangsfall zu untersuchen, wenn der Punkt C auf der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ selbst liegt; in diesem Fall ist das Strahlsystem (C) parabolisch, die beiden Asymptoten fallen zusammen in eine Gerade, die Tangente in C an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; diese Asymptoten sind aber zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar einbeschrieben ist, und da sie zugeordnete harmonische Strahlen mit CA und CB sind, so muss der Strahl, in welchem sie zusammenfallen, entweder durch A oder durch B gehen; nehmen wir an, er gehe durch B, so zeigt sich, dass das durch B gehende Seitenpaar des vollständigen Vierseits zusammenfällt, also das Strahlsystem (B) ebenfalls parabolisch wird, d. h. die Kegelschnittschaar den speciellen Charakter annimmt, in einem festen Punkte B beständig dieselbe feste Tangente BC und ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, die durch A gehen, zu besitzen, je nachdem das gegebene Strahlsystem (A) hyperbolisch oder elliptisch ist. Die Kegelschnittschaar specialisirt sich also in diesem Uebergangsfalle derart, dass zwei von den gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen.

§. 51. Conjugirte Kegelschnittbüschel.

Die in §. 42 angegebene Erzeugung des Kegelschnittbüschels aus zwei beliebig in der Ebene angenommenen geraden Punktsystemen, welche gleichzeitig sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels zugehören, führt unmittelbar zu einer eigenthümlichen Verbindung von drei Kegelschnittbüscheln, welche conjugirt genannt werden und ganz dieselben Eigenschaften besitzen, wie zwei conjugirte Kreisbüschel*) und ein von ihnen abhängiges Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Indem wir bei der folgenden Untersuchung dieser Eigenschaften nur einen Fall ins Auge fassen und zwar der Einfachheit wegen denjenigen, für welchen die wesentlichsten Theile der Figur reell werden, wird es nach Anleitung der vorigen Auseinandersetzungen keine Schwierigkeit mehr haben, die übrigen Fälle, in welchen gewisse Theile der Figur imaginär werden, gleicherweise auszuführen und die dabei eintretenden Modificationen zu ermitteln.

Wir gehen von zwei hyperbolischen Punktsystemen (x, ξ) und (y, η) auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus, mit den Asymptotenpunkten g, h und $g'h'$ (Fig. 76), also von einem Kegelschnittbüschel mit vier

Fig. 76.



reellen Grundpunkten $ghg'h'$. Von diesen beiden als gegeben angenommenen Punktsystemen hängt nun ein drittes in gewisser Weise ab; dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = p$, im ersten Punktsystem aufgefasst, entspricht nämlich der conjugirte Punkt π und als ϖ im zweiten Punktsystem der conjugirte Punkt o; die Verbindungslinie πo, welche $\mathfrak{C}$ heisse, ist der Träger eines bestimmten dritten Punktsystems (z, ζ), welches

*) *J. Steiner:* Einige geometrische Betrachtungen, *Crelle's* Journal f. Math. Bd. I, Seite 168.

dadurch entsteht, dass wir die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit den Verbindungslinien xy und $\xi\eta$ oder auch $x\eta$ und $y\xi$ als je ein Paar conjugirter Punkte z und ζ auffassen. Es ist in §. 42 bewiesen, dass, wie auch die beiden Paare $x\xi$ und $y\eta$ aus den ersten beiden Punktsystemen gewählt werden mögen, $z\zeta$ immer einem und demselben dritten Punktsystem angehören, und dass dieses insbesondere hyperbolisch ist in dem unserer Betrachtung zu Grunde gelegten Falle, wenn (x, ξ) und (y, η) hyperbolische Punktsysteme sind; seine Asymptotenpunkte $g''h''$ sind diejenigen Punkte, in welchen gg' und gh' oder auch hh' und hg' die Gerade $\mathfrak{C}$ treffen, so dass also:

$$(gg', hh') = g'' \qquad (gh', hg') = h''$$

und die sechs Asymptotenpunkte $ghg'h'g''h''$ die Ecken eines vollständigen Vierseits sein müssen, als dessen drei Diagonalen die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auftreten. Die beiden Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugen ein Kegelschnittbüschel, welches die vier Grundpunkte $ghg'h'$ hat; die Kegelschnitte dieses Büschels treffen $\mathfrak{C}$ in je zwei Punkten $z\zeta$ ihres Punktsystems d. h. haben $g''h''$ zu conjugirten Punkten; nehmen wir irgend ein Paar $z\zeta$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, die nach den Punkten $x\xi$ eines veränderlichen Punktpaares auf $\mathfrak{A}$ (oder auch nach $y\eta$, einem veränderlichen Paare auf $\mathfrak{B}$) hingehen, so erzeugen diese beiden projectivischen Strahlbüschel einen Kegelschnitt des Büschels $(ghg'h')$ und $pg''h''$ ist das gemeinschaftliche Tripel dieses Büschels. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche wir π und o genannt haben, sind aber auch gleichzeitig ein Paar conjugirter Punkte des Systems (z, ζ), und in diesem Sinne bezeichnen wir sie mit r und ϱ.

Es liegt jetzt nahe, ebenso wie das durch die beiden Punktsysteme (x, ξ) und (y, η) hervorgerufene Kegelschnittbüschel ein zweites Kegelschnittbüschel aus den beiden Punktsystemen (x, ξ) und (z, ζ) und ein drittes aus den Systemen (y, η) und (z, ζ) hervorgehen zu lassen; diese drei Kegelschnittbüschel wollen wir durch:

$[\mathfrak{A}]$	mit den Grundpunkten	$g'h'g''h''$
$[\mathfrak{B}]$	- - -	$g''h''gh$
$[\mathfrak{C}]$	- - -	$ghg'h'$

bezeichnen und *conjugirte Kegelschnittbüschel* nennen. Solche drei Kegelschnittbüschel hängen in eigenthümlicher Weise mit einander zusammen und bieten eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften dar, welche im Folgenden abgeleitet werden sollen.

Durch einen beliebigen Punkt s in der Ebene gehen drei Kegelschnitte ABC, deren jeder beziehungsweise einem der drei conjugirten Büschel angehört; von diesen drei Kegelschnitten schneiden sich je zwei ausser in den drei ersichtlichen Punkten noch in einem jedesmaligen vierten, nämlich:

B und C in den Punkten $g\ h\ s$ und σ
C - A - - - $g'h's$ - σ'
A - B - - - $g''h''s$ - σ''.

Die drei Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ liegen in gerader Linie; durch den Punkt s giebt es nämlich im Allgemeinen zwei Strahlen, die sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$ in je einem Paare conjugirter Punkte der auf ihnen befindlichen Punktsysteme, folglich auch $\mathfrak{C}$ in einem Paare seines Punktsystems treffen; allerdings können, da die beiden Punktsysteme $(x, \mathfrak{x})$ und (y, η) hyperbolisch angenommen sind, jene beiden Strahlen durch s auch imaginär werden, welchen Fall wir nachher untersuchen wollen; seien zuerst die beiden Strahlen durch s reell und so beschaffen, dass, wenn der eine die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in abc trifft, der andere ihnen in den conjugirten Punkten $\alpha\beta\gamma$ begegnet, dann sind die Schnittpunkte:

$$(a\beta,\ b\alpha) = \sigma'' \qquad (a\gamma,\ c\alpha) = \sigma' \qquad (b\gamma,\ c\beta) = \sigma$$

und liegen in gerader Linie (Seite 100). Da nämlich $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare conjugirter Punkte sind für das Büschel $[\mathfrak{C}]$, so sind auch (Seite 153) $(ab,\ \alpha\beta) = s$ und $(a\beta,\ b\alpha) = \sigma''$ ein Paar conjugirter Punkte für das ganze Büschel $[\mathfrak{C}]$; ebenso ist σ der conjugirte Punkt zu s für das Büschel $[\mathfrak{A}]$ und σ' für das Büschel $[\mathfrak{B}]$. Die Tangenten in s an den drei Kegelschnitten ABC gehen also resp. durch $\sigma\sigma'\sigma''$; es trifft aber der Kegelschnitt A die Gerade $\mathfrak{A}$ in den obigen Punkten a und α, denn die beiden Strahlbüschel mit den Mittelpunkten a und α, welche nach den Paaren conjugirter Punkte (y, η) oder (z, ζ) hingehen, erzeugen den Kegelschnitt A, weil ab und $\alpha\beta$ sich in s treffen und durch diesen einen Punkt der Kegelschnitt des Büschels $[\mathfrak{A}]$ schon bestimmt ist; hieraus folgt, dass auch $(a\beta,\ \alpha b) = \sigma''$ ein Punkt des Kegelschnitts A sein muss; andererseits trifft der Kegelschnitt B die Gerade $\mathfrak{B}$ in den Punkten b und β, folglich ist auch $(b\alpha,\ \beta a) = \sigma''$ ein Punkt des Kegelschnitts B, und da die Kegelschnitte A und B bereits die drei Punkte $sg''h''$ gemein haben, so ist σ'' ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt; in gleicher Weise folgt, dass $(b\gamma,\ c\beta) = \sigma$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte B und C, und endlich, dass $(c\alpha,\ a\gamma) = \sigma'$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte A und C ist. Wir haben also folgendes Ergebniss:

Hat man drei conjugirte Kegelschnittbüschel, so geht durch einen beliebigen Punkt s in der Ebene aus jedem Büschel je ein Kegelschnitt; diese drei Kegelschnitte ABC haben zu je zweien noch einen vierten *gemeinschaftlichen Punkt, und zwar B und C den Punkt* σ, *C und A den Punkt* σ', *A und B den Punkt* σ''; *die drei Punkte* $\sigma\sigma'\sigma''$ *liegen in einer Geraden* $\mathfrak{L}$, *und die drei Strahlen* $s\sigma$, $s\sigma'$, $s\sigma''$ *sind die Tangenten der drei Kegelschnitte ABC im Punkte s; die Punkte* $\sigma\sigma'\sigma''$ *sind ferner die conjugirten Punkte von s in Bezug auf die drei conjugirten Büschel. Die drei Kegelschnitte ABC treffen endlich im Allgemeinen die Träger* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ *der drei erzeugenden Punktsysteme in drei conjugirten Punktpaaren* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, *und von diesen sechs Punkten liegen zweimal drei in je einer Geraden:* abc *und* $\alpha\beta\gamma$, *welche beiden Geraden selbst durch s gehen; diese drei Punktpaare sind entweder alle drei reell oder alle drei imaginär. Die sechs Grundpunkte der drei conjugirten Kegelschnittbüschel bilden ein vollständiges Vierseit, und es giebt eine Kegelschnittschaar, welche dem letzteren einbeschrieben ist; von den beiden möglichen Kegelschnitten dieser Schaar, welche durch s gehen, sind die beiden Tangenten in s die vorigen Geraden* abc *und* $\alpha\beta\gamma$ *und daher die Asymptoten desjenigen Strahlsystems, welches von den Tangentenpaaren aus s an die Kegelschnittschaar gebildet wird. Der Polarkegelschnitt von s in Bezug auf diese Kegelschnittschaar berührt die Geraden* abc *und* $\alpha\beta\gamma$ *und ist ausserdem dem Diagonaldreieck* opr *des vollständigen Vierseits einbeschrieben; die Punkte* $\sigma\sigma'\sigma''$ *sind die Pole der drei Strahlen* so, sr, sp *in Bezug auf den genannten Polarkegelschnitt, und die Gerade* $\mathfrak{L}$ *ist also die Polare von s in Bezug auf denselben.* Das Letztere folgt unmittelbar daraus, dass $a\alpha b\beta$ ein diesem Polarkegelschnitt umschriebenes Viereck ist, dessen Diagonaldreieck $s\sigma''p$ ein Tripel in Bezug auf denselben bildet.

Wir müssen jetzt dieselben Resultate auch für den andern möglichen Fall nachweisen, wenn nämlich die beiden durch den angenommenen Punkt s gehenden Strahlen, welche die Träger der drei Punktsysteme $(x, \mathfrak{x})$ (y, η) (z, ζ) gleichzeitig in drei Paaren conjugirter Punkte treffen, *nicht* reell sind. Hierzu construiren wir den dem s conjugirten Punkt in Bezug auf das Büschel [$\mathfrak{A}$], dessen Grundpunkte $g'h'g''h''$ sind und dessen gemeinschaftliches Tripel gho ist; wenn wir also sg, sh, so ziehen und die vierten harmonisch-zugeordneten Strahlen bestimmen, indem jedes Seitenpaar des vollständigen Vierecks $g'h'g''h''$ das andere Paar zugeordneter Strahlen ist, so sind diese drei vierten Harmonischen die Polaren von s in Bezug auf die drei Linienpaare des Büschels [$\mathfrak{A}$] und schneiden sich in dem zu s conjugirten Punkte σ; also sind die vier Strahlen $g\,(g'h's\sigma)$ vier harmonische Strahlen, ebenso auch $h\,(g'h's\sigma)$ und in gleicher Weise $g\,(g''h''s\sigma)$ und $h\,(g''h''s\sigma)$; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g\,(g'h's\sigma) = h\,(g'h's\sigma)$$

folgt aber, dass die sechs Punkte $ghg'h's\sigma$ auf einem Kegelschnitt liegen, und aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g\,(g''h''s\sigma) = h\,(g''h''s\sigma)\,,$$

dass die sechs Punkte $ghg''h''s\sigma$ auf einem Kegelschnitt liegen; diese beiden Kegelschnitte B und C, welche den Büscheln [𝔅] und [ℭ] angehören und durch s gehen, schneiden sich also in dem vierten Punkte σ, welcher der conjugirte ist zu s in Bezug auf das Büschel [𝔄] und also in der Tangente eines durch die fünf Punkte $g'h'g''h''s$ gelegten Kegelschnitts A an dem Punkte s sich befindet. Die in gleicher Weise für die Kegelschnitte A und B, A und C ersichtliche Eigenschaft bestätigt somit den ersten Theil des obigen Satzes. Da die fünf Punkte $g'h'g''h''s$ auf einem Kegelschnitte A liegen, dessen Tangente $s\sigma$ ist, so werden, wenn wir die Strahlen sg', sh' als ein Paar conjugirter Strahlen, sg'', sh'' als ein zweites Paar eines neuen Strahlsystems auffassen, deren Durchbohrungssehnen $g'h'$ und $g''h''$ mit A sich in o treffen, so und $s\sigma$ ein drittes Paar dieses Strahlsystems (s) sein (S. 151). Dieses Strahlsystem (s), welches durch die beiden Strahlenpaare sg', sh' und sg'', sh'' bestimmt wird, hat auch sg und sh zu einem Paare conjugirter Strahlen und ist dasjenige, welches von den Tangentenpaaren aus s an die Kegelschnittschaar gebildet wird, welche dem vollständigen Vierseit $ghg'h'g''h''$ einbeschrieben ist, oder (Seite 324) dasjenige Strahlsystem, welches dem Polarkegelschnitt des Punktes s in Bezug auf diese Kegelschnittschaar zugehört; folglich sind so und $s\sigma$ ein Paar conjugirter Strahlen für den genannten Polarkegelschnitt; andererseits berührt dieser Polarkegelschnitt die Seiten des Diagonaldreiecks orp, und $o\sigma$ ist, wie wir gesehen haben, der vierte harmonische Strahl zu os, or, op, dem os zugeordnet, also sind auch os und $o\sigma$ conjugirte Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt und daher σ der Pol von so in Bezug auf denselben; in gleicher Weise folgt, weil der Polarkegelschnitt von s in Bezug auf die dem vollständigen Vierseit einbeschriebene Schaar unverändert bleibt, dass der Pol von rs der Punkt σ' und von ps der Punkt σ'' ist, und da die drei Strahlen os, rs, ps durch einen Punkt s gehen, so müssen die drei Pole $\sigma\sigma'\sigma''$ in einer Geraden 𝔏 liegen, welche die Polare von s ist. Hierdurch ist der zweite Theil des obigen Satzes erwiesen und damit zugleich ein elementarer Satz gewonnen:

Wenn man die drei Paare der Gegenecken eines vollständigen Vierseits gh, $g'h'$, $g''h''$ mit einem beliebigen Punkte s der Ebene verbindet und zu jedem dieser Strahlen den vierten harmonischen Strahl construirt, z. B. zu gs und den beiden sich in g kreuzenden Seiten des Vierseits den vierten harmonischen, welcher gs zugeordnet ist, ebenso zu hs u. s. f., so *schneiden sich solche Strahlen, die durch je zwei Gegenecken, z. B. g und h gehen, in einem Punkte σ, die vierten harmonischen Strahlen durch g' und h' in σ' und die durch g'' und h'' in σ'' dergestalt, dass die drei Schnittpunkte $\sigma\sigma'\sigma''$ in einer Geraden liegen.*

Ein besonderer Fall des polaren Nebensatzes ist sehr bekannt, nämlich: „*Die Verbindungslinien der Mitten der drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks laufen durch einen Punkt*“ (*Schwerpunkt).*

Die drei conjugirten Kegelschnittbüschel $[\mathfrak{A}]\,[\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}]$ haben weitere bemerkenswerthe Eigenschaften: Legt man aus irgend einem Punkte a der Geraden $\mathfrak{A}$ das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt B des Büschels $[\mathfrak{B}]$, dessen Grundpunkte $ghg''h''$ sind, und mögen die Berührungspunkte tt' heissen, so geht die Polare tt' von a in Bezug auf B durch den conjugirten Punkt α des Punktsystems $(x, \mathfrak{x})$, weil α der vierte harmonische, dem a zugeordnete Punkt zu agh ist. Die vier Punkte $ghtt'$ auf dem Kegelschnitt B besitzen aber die Eigenschaft, dass sie mit irgend einem andern Punkte dieses Kegelschnitts verbunden vier harmonische Strahlen liefern (S. 125), folglich sind ebensowohl $g''(ghtt')$, als auch $h''(ghtt')$ je vier harmonische Strahlen und aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g''(ghtt') = h''(hgtt') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S.\ 12)$$

ergiebt sich, dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, also die vier Punkte $g'h'tt'$ mit $g''h''$ auf einem Kegelschnitt A liegen und dass die Punkte $g'h'tt'$ vier harmonische Punkte dieses Kegelschnitts A sind (S. 125), folglich tt' durch den Pol von $g'h'$ gehen muss; der Pol von $g'h'$ in Bezug auf den Kegelschnitt A muss aber auf gh liegen, weil ogh ein Tripel in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist, also ist der Schnittpunkt von tt' mit gh, d. h. der Punkt α der Pol von $g'h'$ und $\alpha g'$ und $\alpha h'$ sind Tangenten des Kegelschnitts A in den Punkten $g'h'$. Da ferner ogh das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $g'h'g''h''$ ist und die Tangenten des dem letzteren umschriebenen Kegelschnitts A in $g'h'$ sich auf der Diagonale gh im Punkte α treffen, so müssen auch die Tangenten des Kegelschnitts A in $g''h''$ sich auf der Diagonale gh schneiden in dem zu $gh\alpha$ harmonisch liegenden, dem α zugeordneten Punkte, also in a. Der Kegelschnitt A hat also ag'' und ah'' zu Tangenten in den Punkten g'' und h''. Fassen wir das Gefundene zusammen, so ergiebt sich: Legt man aus irgend einem Punkte a der Geraden $\mathfrak{A}$ das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt des Büschels $[\mathfrak{B}]$, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt A, welcher durch die vier Punkte $g'h'g''h''$ geht und ag'', ah'' zu Tangenten hat; verändern wir daher den Kegelschnitt B des

Büschels [𝔅], halten aber den Punkt a fest, so verändern sich die Berührungspunkte tt', während der Kegelschnitt A, auf welchem sie liegen müssen, derselbe bleibt, also:

Legt man aus irgend einem Punkte a der Geraden 𝔄 an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels [𝔅] die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt A des Büschels [𝔄], welcher ag'', ah'' zu Tangenten hat. Weil dieser Kegelschnitt A aber auch $\alpha g'$ und $\alpha h'$ zu Tangenten hat, so folgt: *Legt man aus irgend einem Punkte α der Geraden 𝔄 an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels [ℭ] die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt A des Büschels [𝔄], welcher $\alpha g'$, $\alpha h'$ zu Tangenten hat, und zwar entsteht, wenn a und α harmonisch liegen zu g, h, für den Punkt a und das Büschel [𝔅] derselbe Kegelschnitt A, wie für den Punkt α und das Büschel [ℭ], ebenso auch für den Punkt a und das Büschel [ℭ] derselbe Kegelschnitt* $\mathbf{A}$, *wie für den Punkt α und das Büschel [𝔅]; die Kegelschnitte A und* $\mathbf{A}$ *sind aber verschieden; sie gehören beide dem Büschel [𝔄] an, aber der erstere hat ag'', ah'' zu Tangenten, der andere ag', ah' und zugleich der erstere $\alpha g'$, $\alpha h'$, der andere $\alpha g''$, $\alpha h''$.*

Verändern wir jetzt den Punkt a (und α) auf 𝔄, so durchläuft der Kegelschnitt A (und $\mathbf{A}$) das ganze Büschel [𝔄], und die Kegelschnitte A und $\mathbf{A}$ erfüllen dasselbe auf doppelte Weise. Wir sehen hieraus, wie das Büschel [𝔄] aus dem conjugirten Büschel [𝔅] oder [ℭ] hervorgeht; in gleicher Weise entsteht das Büschel [𝔅] auf doppelte Art aus den Büscheln [𝔄] und [ℭ] und endlich das Büschel [ℭ] aus den Büscheln [𝔄] und [𝔅]. Geht man andererseits von einem beliebigen Kegelschnittbüschel mit vier Grundpunkten aus, so kann man die beiden andern zu ihm conjugirten Büschel dadurch ableiten, dass man ein Linienpaar des ersten Kegelschnittbüschels auffasst, in der einen gemeinschaftlichen Secante dieses Linienpaars einen Punkt a annimmt und aus a die Tangentenpaare an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels legt; dann liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher mit der Veränderung von a das eine conjugirte Büschel erzeugt; in gleicher Art liefert die andere gemeinschaftliche Secante das dritte conjugirte Büschel. Kommen in dem anfänglich angenommenen Büschel drei reelle Linienpaare vor, so giebt es dreimal solche je drei conjugirte Büschel, im Ganzen also sieben Kegelschnittbüschel, da das ursprüngliche dreimal zählt.

Die beiden oben betrachteten Kegelschnitte A und $\mathbf{A}$ stehen mit den beiden Punkten a und α, welchen sie entsprechen, in einem eigenthümlichen Zusammenhange: Da der Ort der Berührungspunkte aller an die Kegelschnitte des Büschels [𝔅] aus dem Punkte a gelegten Tangentenpaare der Kegelschnitt A ist, so wird es, wenn irgend eine durch a gelegte Transversale den Kegelschnitt A in den Punkten t und τ trifft, zwei Kegelschnitte des Büschels [𝔅] geben, welche die Transversale in den Punkten t und τ berühren, und es werden daher t und τ die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems sein, welches von den Kegelschnitten des Büschels [𝔅] auf der Transversale ausgeschnitten wird. Betrachten wir nun den Kegelschnitt **A**, der durch $g'h'g''h''$ geht, und dessen Tangenten ag', ah' sind; möge die vorige durch a gezogene Transversale ihn in r und ϱ treffen, so sind $g'h'r\varrho$ vier harmonisch gelegene Punkte dieses Kegelschnitts (S. 124), folglich

$$g''(g'h'r\varrho) \quad \text{und} \quad h''(g'h'r\varrho)$$

je vier harmonische Strahlen; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse, welche den Werth — 1 haben:

$$g''(g'h'r\varrho) = h''(h'g'r\varrho)$$

folgt aber, dass die sechs Punkte $ghr\varrho g''h''$ auf einem Kegelschnitte liegen, welcher natürlich dem Büschel [𝔅] angehört; es sind daher r, ϱ ein Paar conjugirter Punkte jenes Punktsystems auf der Transversale, welches t und τ zu Asymptotenpunkten hat; r, ϱ liegen daher zu t, τ harmonisch, und diese vier Punkte sind in der Art paarweise zugeordnet, dass je zwei Schnittpunkte mit einem der Kegelschnitte A und **A** zugeordnete Punkte sind; jede durch den Punkt a gezogene Transversale trifft demnach die beiden Kegelschnitte A und **A** in vier harmonisch gelegenen Punkten, von denen je zwei Schnittpunkte mit demselben Kegelschnitt zugeordnete sind; dasselbe gilt offenbar für den Punkt α. Das Verhalten der beiden Kegelschnitte A und **A** zu den Punkten a und α ist mithin genau dasselbe, wie es in der Kreistheorie bei zwei sich rechtwinklig schneidenden Kreisen und ihren Mittelpunkten sich darbietet; hat man zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise, so ist aus den Elementen bekannt, dass jede durch einen der beiden Kreismittelpunkte gehende Transversale die Kreise in vier harmonisch gelegenen Punkten trifft, von denen die Schnittpunkte mit je einem Kreise zugeordnete sind. Die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft besteht nunmehr in folgendem Satze:

Legt man aus irgend einem Punkte a einer gemeinschaftlichen Secante eines Kegelschnittbüschels die Tangentenpaare an dasselbe, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt A; legt man aus dem conjugirten Punkte α zu a in Bezug auf das Büschel ebenfalls die Tangentenpaare an die Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einem andern Kegelschnitt **A**; *die beiden Kegelschnitte A*

und **A** *haben zu den Punkten a und α die eigenthümliche Lage, dass jede durch a oder α gehende Transversale von den beiden Kegelschnitten in vier harmonischen Punkten getroffen wird, von denen je zwei Schnittpunkte desselben Kegelschnitts zugeordnete sind.*

Weitere Eigenschaften, welche conjugirte Kegelschnittbüschel darbieten (wenn z. B. aus einem beliebigen Punkte der Ebene die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Büschel gelegt werden, wobei die Berührungspunkte auf einer Curve dritten Grades liegen, und diese drei Curven dritten Grades in Bezug auf die conjugirten Kegelschnittbüschel in eigenthümliche Verbindung treten), müssen wir hier übergehen, um nicht die Grenzen, welche diesem Buche gesteckt sind, zu überschreiten. Es bleibt noch übrig, den im Eingange dieses Paragraphen berührten besonderen Fall von drei conjugirten Kegelschnittbüscheln, welcher schon in den Elementen auftritt, mit dem hier behandelten allgemeinen Falle in Verbindung zu setzen. Nehmen wir nämlich an, dass von den drei erzeugenden Punktsystemen (x, ξ) (y, η) und (z, ζ) eines den besonderen Charakter hat, dass sein Träger die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ ist und dasselbe aus allen Paaren unendlich-entfernter Punkte besteht, welche in je zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, also dasjenige Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$, dessen Asymptotenpunkte die beiden imaginären Kreispunkte auf der unendlich-entfernten Geraden sind (Seite 78); ist (x, ξ) dieses besondere Punktsystem, dessen Träger $\mathfrak{A}$ also $\mathfrak{G}_\infty$ ist, dagegen (y, η) ein beliebiges, etwa hyperbolisches Punktsystem mit den Asymptotenpunkten $g'h'$ auf dem Träger $\mathfrak{B}$, so wird der Träger $\mathfrak{C}$ des dritten Punktsystems diejenige Gerade sein, welche in dem Mittelpunkte o des Punktsystems (y, η), der dem unendlich-entfernten conjugirt ist, d. h. in der Mitte o zwischen $g'h'$ senkrecht steht auf $\mathfrak{B}$, und das dritte Punktsystem (z, ζ) auf $\mathfrak{C}$, welches nothwendig ein elliptisches sein muss (S. 254), wird erhalten, indem wir durch y einen beliebigen Strahl yz und durch η einen darauf senkrechten $\eta\zeta$ ziehen, welche $\mathfrak{C}$ in z und ζ treffen; o wird ebenfalls der Mittelpunkt dieses Punktsystems sein, und $z\zeta$ liegen nach entgegengesetzten Seiten von o so, dass

$$oy \,.\, o\eta + oz \,.\, o\zeta = 0$$

ist, d. h. die Potenzen der beiden Punktsysteme auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gleich aber entgegengesetzt werden. Die von solchen drei Punktsystemen erzeugten conjugirten Kegelschnittbüschel nehmen einen besonders einfachen Charakter an, indem zwei von ihnen *conjugirte Kreisbüschel* werden, und das dritte ein *Büschel gleichseitiger Hyperbeln* wird, welches in den Elementen unerwähnt zu bleiben pflegt. In der That, das Büschel

[$\mathfrak{C}$] wird ein gewöhnliches Kreisbüschel, welches durch die beiden reellen gemeinschaftlichen Punkte $g'h'$ geht, weil die imaginären Kreispunkte auf $\mathfrak{G}_\infty$ allen Kegelschnitten dieses Büschels gemeinschaftlich sind, letztere also alle Kreise werden; diese Kreise haben ihre Mittelpunkte auf $\mathfrak{C}$ und treffen $\mathfrak{C}$ in je zwei conjugirten Punkten des Punktsystems (z, ζ). Das Büschel [$\mathfrak{B}$] wird ebenfalls ein Kreisbüschel mit der ideellen gemeinschaftlichen Secante $\mathfrak{C}$; es hat nämlich seine Mittelpunkte auf $\mathfrak{B}$, und jeder Kreis desselben trifft $\mathfrak{B}$ in je zwei conjugirten Punkten y, η des gegebenen Punktsystems; die Kreise dieses Büschels haben also die Strecken zwischen je zwei conjugirten Punkten $y\eta$ zu Durchmessern. Die Asymptotenpunkte $g'h'$ repräsentiren insbesondere die Nullkreise dieses Büschels. Die beiden genannten Kreisbüschel heissen bekanntlich conjugirte Kreisbüschel, indem jeder Kreis des einen jeden des andern rechtwinklig schneidet. Das dritte Büschel [$\mathfrak{A}$] besteht endlich aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, welche die reellen Punkte $g'h'$ zu reellen Grundpunkten haben und das Punktsystem (z, ζ) auf dem Träger $\mathfrak{C}$ zu demjenigen, welches allen Kegelschnitten dieses Büschels zugehört; dadurch ist es schon bestimmt und besteht offenbar aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, da es den oben (S. 308) aufgestellten Bedingungen dafür genügt, dass ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Grundpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln sei; je zwei unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen sind also die unendlich-entfernten Punkte einer Hyperbel dieses Büschels; der Punkt o ist der Mittelpunkt aller dieser Hyperbeln; der Mittelpunktskreis reducirt sich daher auf einen Punkt o, und je zwei durch o gehende rechtwinklige Strahlen sind die Asymptoten einer Hyperbel dieses Büschels; da die Hyperbeln ausserdem durch die reellen Punkte $g'h'$ gehen, so sind sie leicht zu construiren. (S. 120.) (Vgl. §. 61.)

Wir erwähnen noch im Allgemeinen, dass bei drei conjugirten Kegelschnittbüscheln hinsichtlich ihrer besonderen Beschaffenheit überhaupt nur zwei Fälle eintreten können; entweder 1) hat jedes der drei conjugirten Büschel vier reelle Grundpunkte, was der von uns behandelte Fall ist, oder 2) eines der drei conjugirten Büschel hat zwei reelle und zwei imaginäre Grundpunkte, das andere ebenfalls, und das dritte vier imaginäre Grundpunkte, wovon die beiden Kreisbüschel und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln einen besonderen Fall bilden; denn nach §. 42 (S. 254) hängen die drei erzeugenden Punktsysteme (x, ξ) (y, η) (z, ζ) immer so mit einander zusammen, dass entweder alle drei hyperbolisch oder eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind.

Der in diesem Paragraphen durchgeführten Betrachtung steht die gleichlaufende polare Nebenbetrachtung zur Seite, welche von zwei beliebig angenommenen Strahlsystemen ausgeht (wie auf S. 312), von denen ein drittes in bestimmter Weise abhängt; diese drei Strahlsysteme bestimmen, zu je zweien in Verbindung gebracht, *drei conjugirte Kegelschnittschaaren*, deren Eigenschaften in ganz gleicher Weise, wie die obigen der conjugirten Büschel, abgeleitet werden können. Da diese Uebertragung ohne alle Schwierigkeit ausgeführt werden kann, so übergehen wir dieselbe, sowie die Wiederholung der gewonnenen Resultate, welche fast gleichlautend ausgesprochen werden können unter der bekannten Veränderung in der Bedeutung der angewendeten Bezeichnung. (Siehe Aufgaben und Sätze.)

§. 52. Besondere Fälle von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren: Kegelschnitte, die sich doppelt berühren, confocale Kegelschnitte.

Kegelschnitt-Büschel und -Schaaren bieten eine Anzahl von besonderen Fällen dar, welche hervorgehen aus der besonderen Beschaffenheit und Lage der sie erzeugenden Gebilde oder bestimmenden Elemente, und welche von grösserem oder geringerem Interesse sind. Wir haben bereits als besondere Schaar die einem Dreiseit einbeschriebene Parabelschaar gefunden, welche die unendlich-entfernte Gerade zur vierten gemeinschaftlichen Tangente hat, ferner das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, dessen vier Grundpunkte in eigenthümlicher Verbindung stehen, endlich das Kreisbüschel, welches aus den Elementen bekannt ist, aber auch aus der allgemeinen Erzeugung durch zwei Punktsysteme hervorgeht, wenn das eine derselben dasjenige ist, welches auf der unendlich-entfernten Geraden durch je zwei in rechtwinkligen Richtungen liegende Punkte bestimmt wird, und dessen Asymptotenpunkte die imaginären Kreispunkte sind. In diesem Paragraphen sollen noch einige besondere Fälle anderer Art untersucht werden.

Wenn von den beiden erzeugenden Punktsystemen $(x, \mathfrak{x})$ und (y, η) auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehören, eines parabolisch ist, d. h. seine beiden Asymptotenpunkte zusammenfallen (es seien g und h auf $\mathfrak{A}$), so hat dieser Punkt zu seinem conjugirten jeden beliebigen andern des Trägers und jeder beliebige Punkt des Trägers wiederum g zu seinem conjugirten (S. 52); die Gerade $\mathfrak{C}$, welche die conjugirten Punkte des Schnittpunktes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in beiden Punktsystemen verbindet, geht also durch g, und das dritte Punktsystem $(z, \mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{C}$ wird folglich auch parabolisch und hat ebenfalls seine zusammenfallenden Asymptotenpunkte in g. *Alle Kegelschnitte des Büschels berühren daher die Gerade* $\mathfrak{A}$ *in dem Punkte* g *und gehen ausserdem durch die reellen oder imaginären Asymptotenpunkte des andern gegebenen Punktsystems* (y, η). Das gemeinschaftliche Tripel des Büschels reducirt sich in diesem Falle auf den Schnittpunkt p der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und den doppelt zu zählenden Punkt g, in welchem sich sämmtliche Kegelschnitte des Büschels berühren; von den drei unter den Kegelschnitten des Büschels vorkommenden Linienpaaren ist das eine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; die beiden andern coincidiren und gehen von g nach den beiden Asymptotenpunkten des Punktsystems auf $\mathfrak{B}$. Der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels geht durch den Schnittpunkt p der beiden Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, durch den Mittelpunkt m_b des Punktsystems auf $\mathfrak{B}$, durch den Punkt g, in welchem er die Gerade $\mathfrak{C}$ zur Tangente hat und, falls das Punktsystem auf $\mathfrak{B}$ hyperbolisch ist und zu Asymptotenpunkten $g'h'$ hat, auch durch die Mitten der beiden Strecken gg' und gh'; wenn es dagegen elliptisch ist, so ist er durch die vorigen Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt; wir wissen aber, dass die Mitte von gm_b der Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnitts sein muss; es wird also die Tangente in m_b parallel laufen mit $\mathfrak{C}$, und hierdurch ist der Mittelpunktskegelschnitt unzweideutig bestimmt; zugleich erkennen wir, dass er Hyperbel sein muss, das Büschel also aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln besteht, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden.

Aehnlich verhält es sich mit einer Kegelschnittschaar, bei welcher eines der beiden erzeugenden Strahlsysteme parabolisch angenommen wird, und *deren Kegelschnitte eine und dieselbe Gerade in einem festen Punkte berühren, während sie ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben.* Wir unterlassen hier die nähere Ausführung, weil sowohl jenes specielle Büschel, als auch diese besondere Schaar von geringerem Interesse ist, als eine noch speciellere, zu der wir gelangen, wenn wir beide erzeugenden Punktsysteme oder beide erzeugenden Strahlsysteme parabolisch annehmen; hier tritt nämlich in beiden Fällen dasselbe Gebilde auf, welches *gleichzeitig als Kegelschnitt-Büschel und -Schaar* angesehen werden muss und daher auch die Eigenschaften beider Gebilde mit einigen Modificationen in sich vereinigt. Sind nämlich zwei parabolische Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben und die zusammenfallenden Asymptotenpunkte des ersten in g, die des zweiten in g' vereinigt, so besteht das *Kegelschnittbüschel aus sämmtlichen Kegelschnitten, welche in* g *und* g' *dieselben Tangenten* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *haben, also sich selbst in diesen* *beiden Punkten (doppelt) berühren.* Wir können gleichzeitig die Punkte g und g' als Mittelpunkte zweier parabolischen Strahlsysteme auffassen, deren zusammenfallende Asymptoten beziehlich die Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind; die Kegelschnitte der durch diese beiden Strahlsysteme erzeugten Schaar berühren sämmtlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beziehlich in den Punkten g und g' und werden daher mit den Kegelschnitten jenes Büschels identisch. In dieser *Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte* kommt sowohl das Punktpaar gg' vor, dessen Verbindungslinie doppelt gezählt als specieller Kegelschnitt angesehen werden muss, als auch das Linienpaar $\mathfrak{AB}$, dessen Schnittpunkt p sei. Aus den bekannten Eigenschaften des Büschels und der Schaar folgt hier insbesondere: *Jede Gerade $\mathfrak{L}$ in der Ebene eines Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte wird in einem Punktsystem geschnitten von den Kegelschnitten, und die Tangentenpaare aus jedem Punkte P an dieselben bilden ein Strahlsystem.* Das Punktsystem ist stets hyperbolisch und hat einen Asymptotenpunkt auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne; der andere Asymptotenpunkt ist der vierte harmonische, dem Schnittpunkt mit der Berührungssehne zugeordnete, während die Schnittpunkte mit den beiden gemeinschaftlichen Tangenten das andere Paar zugeordneter Punkte sind; es giebt daher nur einen einzigen Kegelschnitt dieser Schaar, welcher die Transversale $\mathfrak{L}$ berührt, und zwar in dem eben construirten vierten harmonischen Punkte; ebenso ist das Strahlsystem in dem Punkte P immer hyperbolisch und Pp eine Asymptote desselben, Pg und Pg' ein Paar conjugirter Strahlen, so dass der vierte harmonische, zu Pp zugeordnete Strahl Pt die Tangente an dem einzigen Kegelschnitte dieses Büschels ist, welcher durch P geht; die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte dieses Büschels liegen auf derjenigen Geraden, welche durch p und die Mitte der Berührungssehne gg' geht. Diese Gerade ist zugleich der eine Theil des Mittelpunktskegelschnitts, welchen jedes Büschel besitzt, und der hier in ein Linienpaar zerfällt; der andere Theil ist die Berührungssehne gg' selbst; denn da diese als ein zusammengefallenes Linienpaar aufzufassen ist, so kann jeder Punkt von ihr als Mittelpunkt angesehen werden.

Die Kegelschnitte dieser sich doppelt berührenden Schaar zerfallen im Allgemeinen in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche von einander getrennt werden einmal durch das Punktpaar gg' und das andere Mal durch die einzig vorkommende Parabel, deren Mittelpunkt der unendlich-entfernte Punkt der vorhin construirten Mittelpunktslinie ist. Die sämmtlichen Kegelschnitte dieses Büschels haben ersichtlicher Weise den Punkt p und die Verbindungslinie gg' zum Pol und zur Polare, und das Strahlsystem, welches dem ersteren, das

Punktsystem, welches der letzteren in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels zugehört, ist für alle dasselbe, und beide Systeme liegen perspectivisch. Hiernach lässt sich diese Kegelschnittschaar auch in anderer Weise erzeugen:

Wenn ein Punktsystem auf dem Träger $\mathfrak{L}$ und ein mit jenem perspectivisches Strahlsystem, dessen Mittelpunkt o ist, gegeben sind, so bilden sämmtliche Kegelschnitte, in Bezug auf welche diese beiden Gebilde die dem Punkte o und der Geraden $\mathfrak{L}$ zugehörigen Systeme sind, eine Schaar von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren. Ist das gegebene Punktsystem und also auch das mit ihm perspectivische Strahlsystem hyperbolisch, so berühren sich sämmtliche Kegelschnitte in den beiden Asymptotenpunkten jenes Punktsystems und haben in diesen Punkten die Asymptoten des Strahlsystems zu gemeinschaftlichen Tangenten; sind dagegen beide Systeme elliptisch, so ist die Kegelschnittschaar nichtsdestoweniger vollständig bestimmt und kann reell construirt werden; in diesem Falle sagen wir der Analogie wegen: Die Kegelschnitte haben eine *imaginäre doppelte Berührung.* Die oben angegebenen Eigenschaften behalten ihre Gültigkeit; denn da für alle Kegelschnitte der Schaar o und $\mathfrak{L}$ Pol und Polare sind, so wird, wenn wir irgend einen Punkt s auf der Geraden $\mathfrak{L}$ annehmen und den conjugirten Punkt σ zu s in dem gegebenen Punktsysteme mit o verbinden, $o\sigma$ die Polare von s für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar sein; wenn also irgend eine durch s gezogene Gerade in t die Polare $o\sigma$ trifft, so werden s und t harmonisch liegen zu sämmtlichen Schnittpunktpaaren, in welchen die Transversale st von den Kegelschnitten der Schaar getroffen wird; und wenn wir andererseits irgend einen Punkt in der Polare $o\sigma$ annehmen, so werden diese und die Verbindungslinie mit s harmonisch liegen zu allen Tangentenpaaren aus dem angenommenen Punkte an die Kegelschnitte der Schaar; jene Punktpaare auf der Transversale bilden also ebenso ein Punktsystem, wie diese Tangentenpaare aus dem Punkte ein Strahlsystem, woraus denn das Weitere sich von selbst ergiebt.

Die reelle Construction dieser einander doppelt berührenden Kegelschnitte für den Fall, dass die beiden Berührungspunkte und also auch die gemeinschaftlichen Tangenten imaginär sind, lässt sich so ausführen: Zieht man irgend einen Strahl durch o, welcher die Berührungssehne $\mathfrak{L}$ in s treffen mag, und nimmt auf demselben ein Paar harmonisch-zugeordneter Punkte p und π zu o und s als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel an, welche nach den Paaren conjugirter Punkte x, ξ des auf $\mathfrak{L}$ gegebenen Punktsystems hingehen, so erzeugen dieselben einen Kegelschnitt der Schaar, welcher der Ort des Schnittpunktes $(px, \pi\xi)$ oder $(\pi x, p\xi)$ ist; verändern wir das Paar p und

π, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte dieser Schaar. Diese Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte entspringt also auch aus der Annahme zweier Punktsysteme, von denen das eine hyperbolisch ist und einen Asymptotenpunkt in dem Träger des andern hat. Auch ist es wichtig zu bemerken, dass die Kegelschnitte dieser Schaar nicht blos ein *einziges*, sondern unendlich viele gemeinsame Polardreiecke haben, welchen eine Ecke (o) und die gegenüberliegende Seite ($\mathfrak{L}$) gemeinschaftlich ist.

Einige sehr einfache Fälle solcher Schaaren gehen aus besonderer Annahme von o und $\mathfrak{L}$ hervor: 1) liegt o im Unendlichen, so ist $\mathfrak{L}$ ein Durchmesser sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar, und diese sind alle concentrisch, da sie den Mittelpunkt des Punktsystems auf $\mathfrak{L}$ zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte m haben; ist das Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ hyperbolisch, so berühren sich also sämmtliche Kegelschnitte in den Endpunkten eines allen gemeinschaftlichen Durchmessers; ist dasselbe elliptisch, so müssen sämmtliche Kegelschnitte Hyperbeln sein, welche m zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und da mo und $\mathfrak{L}$ ein Paar conjugirter Durchmesser aller dieser Hyperbeln sind, so bilden die Asymptoten dieser Hyperbelschaar mit imaginärer doppelter Berührung selbst ein Strahlsystem, welches $\mathfrak{L}$ und mo zu Asymptoten hat; 2) geht $\mathfrak{L}$ in die Unendlichkeit, so ist o gemeinschaftlicher Mittelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar und das gegebene Strahlsystem (o) das System der conjugirten Durchmesser; ist dieses also hyperbolisch, so besteht die Schaar aus lauter Hyperbeln, welche denselben Mittelpunkt und dieselben Asymptoten haben, nämlich die Asymptoten des Strahlsystems (o); ist dasselbe dagegen elliptisch, so besteht die Kegelschnittschaar aus ähnlichen und ähnlich-liegenden concentrischen Ellipsen; ist insbesondere das Strahlsystem (o) ein circulares, so wird die Kegelschnittschaar mit doppelter imaginärer Berührung im Unendlichen eine Schaar concentrischer Kreise.*)

Aus dem Vorstehenden geht u. a. die Lösung der Aufgabe hervor: *Durch drei gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher einen gegebenen Kegelschnitt* $K^{(2)}$ *doppelt berührt***). Es giebt vier Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen, doch zeigt es sich, dass dieselben nur dann reell vorhanden sind, wenn entweder alle drei gegebenen Punkte pqr innerhalb oder alle drei ausserhalb des gegebenen Kegelschnitts liegen; zieht man nämlich die drei Verbindungslinien pq, qr, rp,

*) *Poncelet*, traité des propriétés projectives des figures pag. 228.

**) Siehe *Steiner*: „Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte“; *Crelle*'s Journal Bd. XLV S. 222.

so trifft jede derselben den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in zwei andern Punkten, welche als ein zweites Paar conjugirter Punkte eines Punktsystems aufgefasst werden können; liegen nun pqr innerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$, so werden auf den drei Verbindungslinien pq, qr, rp durch je zwei dieser Punkte und die beiden Schnittpunkte mit $K^{(2)}$ drei hyperbolische Punktsysteme bestimmt; diese befinden sich genau in derselben Lage, wie die drei zusammengehörigen Punktsysteme $(x, \xi)(y, \eta)(z, \zeta)$ auf den Trägern $\mathfrak{ABC}$ in §. 42; die drei Paar Asymptotenpunkte $gh, g'h', g''h''$ liegen daher zu je dreien auf vier geraden Linien: $gg'g''$, $gh'h''$, $hg'h''$, $hh'g''$. Jede dieser vier Geraden trifft nun den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, in welchen ihn ein durch pqr und diese Punkte selbst gelegter Kegelschnitt doppelt berührt (reell oder imaginär), denn es ist ersichtlich, dass ein Kegelschnitt, welcher durch p gelegt wird und $K^{(2)}$ in den beiden Schnittpunkten einer dieser vier Geraden doppelt berührt, nothwendig durch q und r gehen muss; also hat die vorgelegte Aufgabe im Allgemeinen vier Lösungen, sobald die drei Punktsysteme auf pq, qr, rp hyperbolisch sind; dies ist aber der Fall, sobald entweder die drei Punkte pqr innerhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ liegen, oder alle drei ausserhalb; sollte in dem letzteren Falle die Verbindungslinie pq den Kegelschnitt $K^{(2)}$ nicht treffen, so können wir doch leicht die Asymptotenpunkte gh auf ihr bestimmen, indem wir nämlich zwei auf einander liegende Punktsysteme: das erste, elliptische, welches der Geraden pq in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ zugehört, das andere hyperbolische mit den Asymptotenpunkten p und q auffassen und das gemeinschaftliche Paar conjugirter Punkte (S. 58 und 158) beider Punktsysteme bestimmen, welches nothwendig reell ist; dies ist das gesuchte Punktpaar g, h; sobald also pqr alle drei ausserhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ liegen, sind ebenfalls die drei Punktsysteme auf pq, qr, rp hyperbolisch, und die Aufgabe hat vier reelle Lösungen. Sobald aber von den drei gegebenen Punkten pqr einer innerhalb und die beiden andern ausserhalb des Kegelschnitts $K^{(2)}$ liegen, oder umgekehrt, ist nur eines von den drei Punktsystemen auf pq, qr, rp hyperbolisch, die beiden andern sind elliptisch; von den sechs Ecken des vollständigen Vierseits $gg'g''hh'h''$ ist also nur ein Paar Gegenecken reell, und die vier Seiten sind imaginär; die Aufgabe lässt also keine reelle Lösung zu.

Fassen wir aus der Schaar Kegelschnitte mit doppelter (reeller oder imaginärer) Berührung nur zwei ins Auge, $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, so erkennen wir interessante Beziehungen, welche dieselben darbieten. Sind o und $\mathfrak{L}$ das besondere Paar Pol und Polare für beide Kegelschnitte, denen dasselbe Strahl- und Punktsystem in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, und welche wir kurz die Berührungssehne und ihren Pol nennen wollen, so liegt o innerhalb beider Kegelschnitte, und $\mathfrak{L}$ trifft keinen von beiden, wenn die doppelte Berührung eine imaginäre ist; dagegen liegt o ausserhalb beider, und $\mathfrak{L}$ trifft beide in denselben zwei reellen Punkten, wenn die Kegelschnitte eine reelle doppelte Berührung haben. Nehmen wir nun irgend eine Transversale, welche den Kegelschnitt $K^{(2)}$ in den Punkten t und t_1, die Berührungssehne $\mathfrak{L}$ in s treffen möge, so schneiden sich die Tangenten in t und t_1 an dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ in einem Punkte r, und ro ist die Polare von s für beide Kegelschnitte; die vier Strahlen rt, rt_1, ro und rs sind harmonisch, die ersteren beiden und die letzteren beiden zugeordnet; trifft nun die Tangente für t den andern Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in zwei Punkten $x\xi$, die zweite Tangente für t_1 aber in dem Punktpaar $x_1\xi_1$, und wir denken uns die Verbindungslinie xs gezogen, so wird dieselbe den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in demjenigen zweiten Punkte treffen, welcher der vierte harmonische, dem x zugeordnete ist, während s und der Schnittpunkt (xs, ro) das andere Paar zugeordneter Punkte ist. Dieser vierte harmonische Punkt muss aber auf dem vierten harmonischen Strahl zu rx, ro, rs liegen, und da dieses der Strahl rt_1 ist, welcher den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in x_1 und ξ_1 trifft, so muss xs den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ in x_1 oder ξ_1 treffen; gehe also xx_1 durch s, so muss auch ersichtlicherweise $\xi\xi_1$ durch s gehen, und es schneiden sich $x\xi_1$ und $x_1\xi$ in einem Punkte p der Geraden ro, indem prs ein Tripel in Bezug auf den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ sind. Wir haben hieraus folgenden Satz:

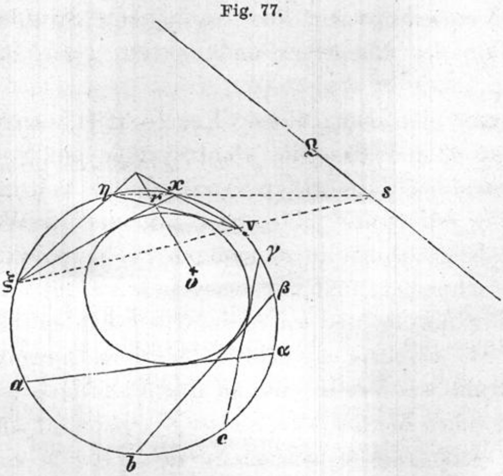
Hat man zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte und zieht zwei beliebige Tangenten an dem einen, welche den andern in den Punktpaaren $x\xi$ *und* $x_1\xi_1$ *treffen, so liegt von den drei Schnittpunkten* $(xx_1, \xi\xi_1)$ $(x\xi_1, x_1\xi)$ $(x\xi, x_1\xi_1)$ *der eine auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne* $\mathfrak{L}$ *und die beiden andern auf der Polare des ersteren, welche durch den gemeinschaftlichen Pol* o *der Berührungssehne geht.* Der erste Punkt liegt mit den beiden Berührungspunkten in gerader Linie.

Halten wir jetzt eine der beiden Tangenten fest und bewegen die andere am Kegelschnitt $K^{(2)}$ herum, so bleibt der Berührungspunkt t_1 und die Punkte $x_1\xi_1$ fest; s beschreibt eine gerade Punktreihe auf $\mathfrak{L}$ und x_1s, ξ_1s also projectivische Strahlbüschel, die zugleich mit dem von t_1t beschriebenen Strahlbüschel projectivisch sind. Wir schliessen daraus folgenden Satz:

Bewegt sich bei zwei einander doppelt berührenden Kegelschnitten $K^{(2)}$ *und* $K_1^{(2)}$ *eine veränderliche Tangente an dem einen* $K^{(2)}$ *herum und schneidet jedesmal den andern* $K_1^{(2)}$ *in den Punktpaaren* x *und* ξ, *so beschreiben* x *und* ξ *zwei krumme Punktreihen auf diesem Kegelschnitt,* *welche mit irgend zwei Peripheriepunkten B und $\mathfrak{B}$ auf $K_1^{(2)}$ verbunden zwei projectivische Strahlbüschel liefern, und die Berührungspunkte der Tangente des ersten Kegelschnitts bilden gleichfalls eine Punktreihe auf demselben, welche mit einem seiner Peripheriepunkte verbunden ein mit jenen beiden projectivisches Strahlbüschel liefert.* Solche zwei krumme Punktreihen x und $\mathfrak{x}$, welche auf demselben Kegelschnitt ausgeschnitten werden durch die Strahlen zweier projectivischen Strahlbüschel, die ihre Mittelpunkte in zwei beliebigen Peripheriepunkten des Kegelschnitts haben, und deren entsprechende Strahlen immer zwei entsprechende Punkte x, $\mathfrak{x}$ auf dem Kegelschnitt bestimmen, heissen *krumm-projectivische Punktreihen*, und es zeigt sich für dieselben die Umkehrung des vorigen Satzes als allgemein gültig: *Hat man zwei krumm-projectivische Punktreihen, auf demselben Kegelschnitt, so umhüllt die Verbindungslinie entsprechender Punkte einen neuen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte (reelle oder imaginäre) Berührung hat.*

In der That, da drei Paar willkürlich als entsprechend auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte a und α, b und β, c und γ die beiden krumm-projectivischen Gebilde bestimmen und für jedes vierte Paar entsprechender Punkte x, $\mathfrak{x}$ die Strahlbüschel $B(abcx)$ und $\mathfrak{B}(\alpha\beta\gamma\mathfrak{x})$ dasselbe Doppelverhältniss haben, wenn B und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Peripheriepunkte des Kegelschnitts bedeuten, so beschreiben auch $a\mathfrak{x}$ und αx

Fig. 77.



zwei projectivische Strahlbüschel, während wir $a\alpha$ festhalten und $x\mathfrak{x}$ verändern (Fig. 77); diese liegen aber perspectivisch, weil in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen hineinfallen; der Ort des Schnittpunkts ($a\mathfrak{x}$, αx) ist also eine gerade Linie;

nehmen wir anstatt a und α ein anderes Paar $b\beta$, so erhalten wir dieselbe gerade Linie, weil sowohl $(a\beta, \alpha b)$ als auch $(a\gamma, \alpha c)$ und $(b\gamma, \beta c)$ auf derselben Geraden liegen (wegen des *Pascal*'schen Sechsecks $a\beta c\alpha b\gamma$); es ist daher, wenn $x\xi$ und $y\eta$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte der beiden krumm-projectivischen Gebilde bedeuten, der Ort des Schnittpunktes $(x\eta, y\xi)$ eine feste Gerade $\mathfrak{L}$, und die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte $(x\xi, y\eta)$ und $(xy, \xi\eta)$ läuft daher durch einen festen Punkt o, den Pol der Geraden $\mathfrak{L}$ in Bezug auf den Kegelschnitt. Der Punkt o und die Gerade $\mathfrak{L}$ sind vollständig und eindeutig bestimmt, sobald die Beziehung der beiden krumm-projectivischen Gebilde durch drei Paar als entsprechend festgesetzte Punkte des Kegelschnitts gegeben wird; jeder Punkt des Kegelschnitts gehört sowohl der einen, als auch der andern krummen Punktreihe an, der ihm entsprechende in dem einen und dem andern Sinne ist aber nicht derselbe zweite Punkt des Kegelschnitts, sondern es sind verschiedene; die Punkte, in welchen $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt trifft, sind zusammenfallende entsprechende Punkte der beiden Gebilde und können reell oder imaginär sein. Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(x\eta, y\xi) = s$ auf der Geraden $\mathfrak{L}$ und $(x\xi, y\eta) = r$, so ist or die Polare von s wegen der Eigenschaft des Vierecks im Kegelschnitt; dem Punkte o gehört ein bestimmtes Strahlsystem, seiner Polare $\mathfrak{L}$ ein bestimmtes mit jenem perspectivisches Punktsystem in Bezug auf den Kegelschnitt zu; von jenem sind os und or ein Paar conjugirter Strahlen, von diesem die Schnittpunkte der Linien rs und ro mit $\mathfrak{L}$ ein Paar conjugirter Punkte.

Denken wir uns nun einen Kegelschnitt, welchem dasselbe Strahlsystem in o und dasselbe Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ zugehört, und welcher ausserdem $x\xi$ berührt, wodurch dieser vollständig und eindeutig bestimmt ist (Seite 344), oder mit andern Worten, welcher den gegebenen Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen $\mathfrak{L}$ ihn schneidet, und der ausserdem $x\xi$ zur Tangente hat, so müssen auch für ihn ro und rs conjugirte Strahlen sein, also da rx eine Tangente ist, so muss die andere der vierte harmonische, dem rx zugeordnete Strahl sein, d. h. (wegen des Vierecks $x\xi y\eta$) die Gerade ry oder $y\eta$; wir sehen hieraus, dass dieser Kegelschnitt auch $y\eta$ berührt, und verändern wir $y\eta$, so verändern sich zwar r und s, aber der oben bestimmte Kegelschnitt, welchem das Strahlsystem in o und das Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ zugehört, bleibt derselbe; es berühren daher alle Verbindungsstrahlen $y\eta$ entsprechender Punkte der beiden krumm-projectivischen Gebilde einen Kegelschnitt, welcher den Träger der beiden Gebilde doppelt berührt, w. z. b. w.; jeder Strahl hat zum Berührungspunkte den vierten harmonischen Punkt, der dem Schnittpunkte mit der Berührungssehne $\mathfrak{L}$ zugeordnet ist.

Auf die zahlreichen Folgerungen, welche aus dieser Grundeigenschaft einander doppelt berührender Kegelschnitte hervortreten, gestattet der Raum nicht, näher einzugehen*). Wir bemerken nur, dass zwei besondere Fälle dieser allgemeineren Betrachtung in dem Laufe unserer Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit geworden sind; nämlich erstens, wenn der Kegelschnitt aus einem Linienpaar besteht, wo dann die beiden krummen Gebilde zwei gewöhnliche gerade projectivische Punktreihen werden und ihr Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, welcher mit dem Linienpaar der beiden Träger eine doppelte Berührung hat (§. 21); zweitens, wenn die beiden krummen Gebilde auf dem Kegelschnitt die besondere *involutorische Lage* haben, dass einem Punkte des Kegelschnitts, als Element beider Gebilde aufgefasst, in dem jedesmaligen andern ein und derselbe Punkt entspricht; in diesem Falle laufen alle Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt, und die entsprechenden Punkte mit einem Peripheriepunkte des Kegelschnitts verbunden liefern ein Strahlsystem (S. 151); der doppelt berührende Kegelschnitt zerfällt in ein Punktpaar.

In gleicher Weise, wie die Punkte eines Kegelschnitts eine krumme Punktreihe, bilden die Tangenten desselben ein krummes Strahlbüschel, und die Punktreihe, in welcher sie eine beliebige feste Tangente treffen, lässt sich mit der Punktreihe, in welcher sie irgend eine zweite feste Tangente treffen, in projectivische Beziehung setzen der Art, dass die Tangenten des Kegelschnitts einander paarweise entsprechen und man an demselben Kegelschnitt zwei krumm-projectivische Strahlbüschel erhält; der Ort des Schnittpunktes je zweier entsprechender Tangenten wird wieder ein Kegelschnitt, welcher den Träger der beiden Tangentenbüschel doppelt berührt. Dies tritt in ganz analoger Weise zu Tage, wie das oben bewiesene Resultat und bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Unter den besonderen Fällen von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren, von denen die eben betrachtete Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte eine hervorragende Bedeutung hat, könnten

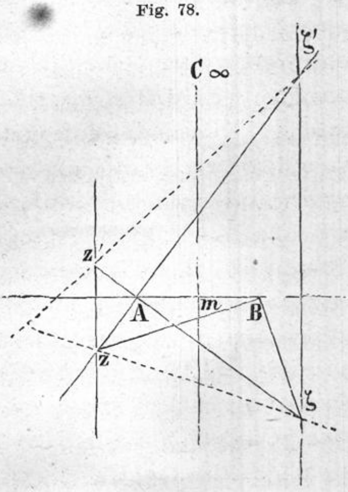
---

*) Wir verweisen in dieser Beziehung auf die Abhandlung *Goepel's:* „Ueber Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde", *Crelle's* Journal Bd. XXXVI S. 317 und die Erweiterung derselben: „Ueber die Erzeugnisse krummer projectivischer Gebilde" von *H. Schröter* in dem *Crelle-Borchardt'*schen Journal Bd. LIV S. 31; sowie „Erzeugnisse krumm-projectivischer Gebilde von *A. Milinowski* in *Schlömilch's* Zeitschrift (1873) und „Kegelschnitte in doppelter Berührung" von *A. Milinowski*, Gymn.-Progr. Tilsit 1870.

wir noch diejenigen untersuchen, bei welchen die Kegelschnitte des Büschels in einem gegebenen Punkte eine dreipunktige Berührung haben und a) durch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt gehen, oder b) eine vierte gemeinschaftliche Tangente haben; endlich, wenn die Kegelschnitte des Büschels in einem gegebenen Punkte eine vierpunktige Berührung haben. Doch wollen wir die nähere Untersuchung dieser besonderen Fälle dem Leser überlassen und nur noch eine specielle Kegelschnittschaar erwähnen, welche häufiger auftritt.

Wenn nämlich die beiden erzeugenden Strahlsysteme einer Kegelschnittschaar (S. 312) (A) und (B) zwei circulare Strahlsysteme sind, so haben die Kegelschnitte dieser Schaar die Mittelpunkte A und B zu gemeinschaftlichen Brennpunkten, denn es giebt in der Ebene eines Kegelschnitts nur zwei reelle Punkte, für welche die zugehörigen Strahlsysteme in Bezug auf den Kegelschnitt circulare sind, und dies sind die Brennpunkte des Kegelschnitts (S. 190); also bilden sämmtliche Kegelschnitte, welche A und B zu ihren gemeinschaftlichen Brennpunkten haben, eine besondere Kegelschnittschaar mit vier imaginären Tangenten; die Brennpunkte sind als das einzig reelle Paar Gegenecken dieses imaginären Vierseits anzusehen. Wir nennen diese Kegelschnittschaar eine *Schaar confocaler Kegelschnitte* und können zur reellen Construction derselben nach den früheren allgemeinen Betrachtungen auf folgende Weise gelangen: Das dritte, von den beiden gegebenen circularen Strahlsystemen (A) und (B) abhängige Strahlsystem (C) wird nämlich besonderer Art, indem sein Mittelpunkt in die Unendlichkeit geht und derjenige unendlich-entfernte Punkt C_∞ wird, welcher in senkrechter Richtung zu AB liegt. Das Strahlsystem (C_∞) wird ein gleichseitig-hyperbolisches, dessen beide Asymptoten die in der Mitte m zwischen AB errichtete Senkrechte und die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ sind; je zwei conjugirte Strahlen desselben sind zwei solche, die zu der Geraden mC_∞ parallel laufen und gleichweit von ihr abstehen. Die beiden Asymptoten des Strahlsystems (C_∞) und die Gerade AB sind das gemeinschaftliche Tripel conjugirter Strahlen für alle Kegelschnitte der Schaar, folglich ist m der Mittelpunkt, und die beiden Senkrechten mC_∞ und AmB sind die Axen für sämmtliche Kegelschnitte, was auch a priori klar ist. Denken wir uns irgend ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems (C_∞), d. h. zwei von m gleich weit abstehende parallele Gerade, welche senkrecht auf AB stehen, und drehen um A (oder B) einen rechten Winkel, dessen Schenkel jene beiden Parallelen in den Punkten $z\zeta$ (und $z'\zeta'$) durchbohren, so umhüllt die Verbindungslinie $z\zeta$ einen Kegelschnitt der Schaar, dessen Tangenten in zwei gegenüberliegenden Scheiteln das angenommene Paar von Parallelen ist (Fig. 78). Verändern wir dieses Paar, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte der confocalen Schaar; diese zerfällt demnach in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, je nachdem jenes Parallelenpaar ausserhalb der Strecke AB liegt oder zwischen A und B hindurchgeht. Die beiden Gruppen werden von einander getrennt einmal durch das Punktpaar AB, oder deren doppelt gedachte Verbindungslinie, welche als Parabel aufgefasst werden kann, und zweitens durch die doppelt gedachte unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, in welche diejenige Parabel, die in der Schaar vorkommen muss, übergeht; die doppelt gedachte Gerade mC_∞ ist zwar auch als ein besonderer Kegelschnitt der Schaar aufzufassen; er steht aber isolirt da in der Hyperbelgruppe. Die Mittelpunktslinie der Schaar wird unbestimmt, was denn auch damit übereinstimmt, dass m der Mittelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte der confocalen Schaar ist. Die Polar-Eigenschaften dieser besonderen Kegelschnittschaar zeigen einige Eigenthümlichkeiten, welche sich sowohl aus der allgemeinen Betrachtung (§. 49), als auch aus den Focaleigenschaften des Kegelschnitts (§. 36) ergeben. Die Winkel zwischen dem Tangentenpaar aus einem Punkte P an einen Kegelschnitt der Schaar haben nämlich dieselben beiden zu einander rechtwinkligen Halbirungsstrahlen, wie die Winkel zwischen den Strahlen PA und PB; folglich bilden sämmtliche Tangentenpaare aus P an die Kegelschnitte der confocalen Schaar ein *gleichseitig-hyperbolisches Strahlsystem*, dessen Asymptoten die beiden zu einander senkrechten Halbirungsstrahlen der Winkel zwischen dem Strahlenpaar PA, PB sind. Es giebt also durch den beliebig angenommenen Punkt P immer zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, von denen einer Ellipse, der andere Hyperbel ist; sie schneiden sich rechtwinklig in diesem Punkte; wir erkennen hieraus, dass in der confocalen Kegelschnittschaar weder zwei Ellipsen, noch zwei Hyperbeln einen reellen gemeinschaftlichen Punkt haben können, dass aber jede Ellipse jede Hyperbel in vier reellen (zu m symmetrisch liegenden) Punkten trifft, und dass sie sich überall rechtwinklig durchschneiden. Dies lässt sich auch so aussprechen: *Je zwei conjugirte Gerade in Bezug auf die Schaar confocaler Kegelschnitte stehen auf einander*

Fig. 78.



senkrecht. Ermitteln wir von irgend einem Punkte P den Polarkegelschnitt in Bezug auf die Schaar, so erkennen wir, dass derselbe eine *Parabel* sein muss, weil er allemal dem gemeinschaftlichen Tripel conjugirter Strahlen für die Schaar einbeschrieben ist und dasselbe hier aus den drei Geraden AB, mC_∞ und $\mathfrak{G}_\infty$ besteht; ein Kegelschnitt, der $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente hat, ist aber Parabel (S. 114). Diese Parabel hat die Verbindungslinie Pm zur Leitlinie, weil die durch m gehenden Axen jedes Kegelschnitts der Schaar und die durch P gehenden Halbirungsstrahlen der Winkel zwischen PA und PB zwei Paare zu einander rechtwinkliger Tangenten dieser Parabel sind; der Brennpunkt derselben findet sich also auch leicht, indem man von diesem der Parabel umschriebenen vollständigen Vierseit denjenigen Diagonalpunkt aufsucht, welcher nicht in der Diagonale mP liegt. Die beiden conjugirten Kegelschnittschaaren (§. 51), welche zu der confocalen Kegelschnittschaar gehören und durch die drei Strahlsysteme (A) (B) (C_∞) erzeugt werden, bestehen, wie leicht zu sehen ist, aus Parabeln, weil $\mathfrak{G}_\infty$ eine Asymptote von (C_∞) ist, und zwar wird die eine Schaar gebildet von sämmtlichen Parabeln, welche A zum Brennpunkt und jede durch B gehende Gerade zur Leitlinie haben, die andere Schaar von sämmtlichen Parabeln, welche B zum Brennpunkt und jede durch A gehende Gerade zur Leitlinie haben; diese Parabeln berühren gemeinschaftlich die in der Mitte m auf AB senkrecht stehende zweite Asymptote des Strahlsystems (C_∞) u. s. w. — Im Allgemeinen ist noch zu erwähnen, dass, wenn von den beiden erzeugenden Strahlsystemen (A) und (B) nur *eines* ein circulares Strahlsystem, das andere ein beliebiges hyperbolisches oder elliptisches Strahlsystem ist, alsdann eine Kegelschnittschaar zum Vorschein kommt, welche einen Brennpunkt gemeinschaftlich hat und ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, je nachdem das andere Strahlsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; auch diese Kegelschnittschaaren bieten manche Eigenthümlichkeiten dar.

§. 53. Gemischte Kegelschnittschaaren.

Wenn wir Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts als Bestimmungsstücke desselben annehmen, so ist der Kegelschnitt im Allgemeinen durch fünf dieser Elemente ein- oder mehrdeutig bestimmt und zwar: Durch fünf Punkte oder fünf Tangenten eindeutig (S. 99), durch vier Punkte und eine Tangente oder durch vier Tangenten und einen Punkt zweideutig (S. 235), endlich durch drei Punkte und zwei Tangenten oder durch drei Tangenten und zwei Punkte vierdeutig (S. 236). Durch vier dieser Bestimmungsstücke ist der Kegelschnitt nicht bestimmt, sondern es giebt eine unendliche Reihe von Kegelschnitten, welche vier Bedingungen genügen, indem sie durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Gerade berühren. Von solchen unendlichen Reihen von Kegelschnitten haben wir bisher nur zwei einander gegenüberstehende in Betracht gezogen: Das Kegelschnittbüschel als die Totalität aller durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte und die Kegelschnittschaar als die Totalität aller vier Gerade berührenden Kegelschnitte mit Berücksichtigung auch der Fälle, in denen von den vier gemeinschaftlichen Punkten oder Tangenten Paare imaginär sind. Obwohl nun diese beiden Gebilde von hervorragender Bedeutung sind, so lassen sich doch noch andere derartige Reihen von Kegelschnitten bilden, nämlich zunächst wieder zwei einander gegenüberstehende Gebilde: a) sämmtliche Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte gehen und eine feste Gerade berühren, und b) sämmtliche Kegelschnitte, welche drei feste Gerade berühren und durch einen festen Punkt gehen; sodann ein sich selbst gegenüberstehendes, also alleinstehendes Gebilde: c) sämmtliche Kegelschnitte, welche zwei feste Gerade berühren und durch zwei feste Punkte gehen. Diese drei Gebilde, welche „*gemischte Kegelschnittschaaren*“ heissen mögen, sollen jetzt näher untersucht werden.

Ebenso wie *Steiner* durch projectivische Drehung (S. 226) das Kegelschnittbüschel aus dem Strahlbüschel entstehen lässt, kann man eine gemischhte Kegelschnittschaar von drei Punkten und einer Tangente aus einem Tangentenbüschel (Seite 350), d. h. den sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts erzeugen in folgender Art: Denken wir uns einen Kegelschnitt $K^{(2)}$ und zwei beliebige Punkte desselben B und B_1 als die Mittelpunkte von Strahlbüscheln, eine beliebige Tangente t des Kegelschnitts $K^{(2)}$ als den perspectivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel, welche in B und B_1 ihre Mittelpunkte haben, so wird die projectivische Beziehung dieser beiden Strahlbüschel (B) und (B_1) durch die Gerade t vollständig bestimmt, und durch die Veränderung der Tangente t am Kegelschnitt $K^{(2)}$ erhalten wir unendlich-viele Paare von projectivischen Strahlbüscheln mit den Mittelpunkten B und B_1, deren paarweise Beziehung jedesmal unzweideutig festgestellt ist. Endlich haben wir noch zwei projectivische Strahlbüschel in B und B_1, welche den Kegelschnitt $K^{(2)}$ selbst erzeugen. Denken wir uns nun diese unendlich-vielen Paare projectivischer Beziehungen in sich festgehalten, aber um die Mittelpunkte B und B_1 so gedreht, dass die beiden den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Strahlbüschel in perspectivische Lage kommen, also die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden $\mathfrak{L}$ liegen, alsdann werden zwei solche Strahlbüschel, welche vor der Drehung eine Tangente t zum perspectivischen Durchschnitt hatten, sich im Allgemeinen nicht mehr in perspectivischer Lage befinden, also einen Kegelschnitt erzeugen; alle diese Kegelschnitte gehen durch B und B_1; sie gehen ausserdem durch einen dritten festen Punkt C, den Schnittpunkt derjenigen beiden Strahlen, welche vor der Drehung in der Verbindungslinie BB_1 vereinigt waren, und welche für alle projectivischen Beziehungen (bei der perspectivischen Lage) ein Paar entsprechender Strahlen waren; endlich berühren diese Kegelschnitte sämmtlich die Gerade $\mathfrak{L}$, weil vor der Drehung alle t den Kegelschnitt $K^{(2)}$ berührten; aus den gemeinschaftlichen Punkten von t und K werden nämlich nach der Drehung die gemeinschaftlichen Punkte des aus t entspringenden Kegelschnitts mit $\mathfrak{L}$, und da jene beiden zusammenfallen, so müssen auch diese beiden zusammenfallen. Wir erhalten also in der That eine gemischte Kegelschnittschaar von drei Punkten BB_1C und einer Tangente $\mathfrak{L}$ gewissermassen auf organischem Wege aus den sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts.

In ganz analoger Weise kann die gegenüberstehende gemischte Kegelschnittschaar von drei Tangenten und einem Punkte, welche allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sein sollen, aus einer krummen Punktreihe (§. 51), d. h. den sämmtlichen Punkten eines Kegelschnitts erzeugt werden. Nehmen wir zwei feste Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ und betrachten einen veränderlichen Punkt p desselben als Projectionspunkt für zwei projectivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche sich in perspectivischer Lage befinden, so erhalten wir mit der Veränderung von p unendlich-viele Paare projectivischer Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, deren Beziehung vollständig bestimmt ist; endlich werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ noch von den Tangenten des Kegelschnitts $K^{(2)}$ in zwei projectivischen Punktreihen getroffen, die sich nicht in perspectivischer Lage befinden. Denken wir uns nun diese unendlich-vielen Paare projectivischer Beziehungen in sich festgehalten, aber die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, ohne ihre Lage zu verändern, auf sich selbst so verschoben, dass die beiden letzten den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Punktreihen in perspectivische Lage gelangen (was bekanntlich auf unendlich-viele Arten geschehen kann), so werden nach der Verschiebung je zwei vorhin perspectivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sich im Allgemeinen nicht mehr in perspectivischer Lage befinden, sondern einen Kegelschnitt erzeugen; alle so erhaltenen Kegelschnitte berühren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und eine dritte Gerade $\mathfrak{C}$, die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte auf den Trägern nach der Verschiebung, welche vorher in ihrem Schnittpunkte vereinigt waren und für jedes Paar der unendlich-vielen projectivischen Beziehungen bei perspectivischer Lage ein Paar entsprechender Punkte sind und also auch bleiben; endlich gehen sämmtliche aus den Punkten p entspringende Kegelschnitte durch einen festen Punkt P, den Projectionspunkt der beiden projectivischen Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche vor der Verschiebung den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugten und nach der Verschiebung perspectivisch zu liegen kommen. Wir erhalten also eine gemischte Kegelschnittschaar von drei gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ und einem gemeinschaftlichen Punkte P, hervorgegangen aus den sämmtlichen Punkten p eines Kegelschnitts.

Auch umgekehrt können wir, sobald die bestimmenden Elemente einer solchen gemischten Kegelschnittschaar, also a) drei Punkte BB_1C und eine Gerade $\mathfrak{L}$ oder b) drei Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ und ein Punkt P gegeben sind, den Kegelschnitt $K^{(2)}$ herstellen, aus dessen Tangenten oder Punkten das ganze Gebilde durch Drehung oder Verschiebung hervorgeht. Wir denken uns nämlich im Falle a) in B und B_1 zwei perspectivische Strahlbüschel, welche die Gerade $\mathfrak{L}$ zum perspectivischen Durchschnitt haben, und drehen diese beiden Strahlbüschel, deren projectivische Beziehung also bestimmt ist, um solche Winkel, dass die Strahlen BC und B_1C zusammenfallen, dann erzeugen jene Strahlbüschel den Kegelschnitt $K^{(2)}$; oder b) wir denken uns $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ als die Träger zweier perspectivischer Punktreihen, welche P zu ihrem Projectionspunkte haben, und verschieben, indem wir diese projectivische Beziehung festhalten, die Träger auf sich selbst um solche Strecken, dass die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C})$ in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ hineinfallen; dann erzeugen jene beiden nicht mehr perspectivischen Punktreihen den Kegelschnitt $K^{(2)}$.

Diese Entstehung der beiden gemischten Kegelschnittschaaren giebt ebensowohl Aufschluss über ihre Mächtigkeit, welche gleich ist der von den Tangenten oder Punkten eines Kegelschnitts, wie über die Eigenschaften beider Gebilde. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Schaar Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen und eine gerade Linie berühren, mit $S\,(3p,\ 1l)$ und die Schaar Kegelschnitte, welche drei gerade Linien berühren und durch einen Punkt gehen, mit $S\,(3l,\ 1p)$, so zeigt sich zunächst der Doppelsatz:

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen zwei Kegelschnitte der Schaar $S\,(3p,\ 1l)$.	*Eine beliebige Gerade in der Ebene berühren im Allgemeinen zwei Kegelschnitte der Schaar* $S\,(3l,\ 1p)$.

Denn fassen wir zum Beweise des Satzes links irgend zwei Tangenten t des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$ auf, so entspringen aus diesen beiden Tangenten zwei Kegelschnitte der Schaar $S(3p, 1l)$, welche ausser den drei gemeinschaftlichen Punkten BB_1C noch denjenigen vierten Punkt gemein haben müssen, in welchem sich nach der Drehung die beiden Strahlen von B und B_1 treffen, welche zum Schnittpunkte der beiden Tangenten t hingehen; also umgekehrt, da durch einen beliebigen Punkt o nur zwei Tangenten t an den Kegelschnitt $K^{(2)}$ möglich sind, so gehen auch durch einen beliebigen Punkt o' der Ebene nur zwei Kegelschnitte der Schaar $S(3p, 1l)$; und analog rechts. Ferner zeigt sich:

Eine beliebige Gerade in der Ebene wird im Allgemeinen von vier Kegelschnitten der Schaar $S(3p, 1l)$ *berührt.*	*Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen vier Kegelschnitte der Schaar* $S(3l, 1p)$.

Denn denken wir uns zum Beweise des Satzes links eine Gerade $\mathfrak{G}$ als den perspectivischen Durchschnitt noch zweier projectivischer Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in B und B_1 placirt sind, und welche mit jener Gruppe von Strahlbüschelpaaren unveränderlich zusammenhängen, so werden dieselben vor der Drehung einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ erzeugt haben, und soviel Tangenten t, als die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ gemeinschaftlich haben, werden durch die Drehung in Kegelschnitte verwandelt, welche die Gerade $\mathfrak{G}$ berühren; also im Allgemeinen vier; das Analoge zeigt sich bei dem Satze rechts.

Auch über die Natur der in der Schaar $S(3p, 1l)$ vorkommenden Kegelschnitte giebt die obige Entstehungsweise Aufschluss; da nämlich alle Punkte, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit gelangen, vor derselben auf einem Kreise liegen (dem „Drehkreise" S. 228), welcher das Erzeugniss zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel ist, so werden alle diejenigen Tangenten t des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$, welche den Drehkreis in zwei reellen Punkten schneiden, in Hyperbeln, diejenigen, welche ihn berühren, in Parabeln und diejenigen, welche ihn nicht treffen, in Ellipsen verwandelt; solche Tangenten t, welche durch den Mittelpunkt des Drehkreises gehen, werden nach der Drehung in gleichseitige Hyperbeln übergehen, weil die unendlich-entfernten Punkte unter rechtwinkligen Richtungen erscheinen. Wir haben also folgendes Ergebniss:

In der gemischten Kegelschnittschaar $S(3p, 1l)$ *kommen im Allgemeinen vier Parabeln vor, welche zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln von einander trennen; unter letzteren befinden sich* *im Allgemeinen nur zwei gleichseitige Hyperbeln; insbesondere enthält die Schaar drei Linienpaare*, welche ihre Doppelpunkte in der Geraden $\mathfrak{L}$ haben und jedesmal aus zwei Geraden bestehen, deren eine die Verbindungslinie zweier von den $3p$ ist und die andere die Verbindungslinie des dritten mit dem Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ und der vorigen Verbindungslinie. Diese drei Linienpaare entspringen nämlich aus denjenigen beiden Tangenten t des Kegelschnitts $K^{(2)}$, welche in den Punkten BB_1 berühren, weil die projectivische Beziehung hier den parabolischen Charakter annimmt, und drittens aus der Tangente des Kegelschnitts $K^{(2)}$ in demjenigen Punkte D, in welchem sich vor der Drehung zwei Strahlen schnitten, welche nach derselben in die Verbindungslinie BB_1 hineinfallen, weil für diese t die perspectivische Lage erhalten bleibt.

Für die Schaar $S\,(3l,\ 1p)$ lässt sich leicht der Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte ermitteln; ziehen wir nämlich durch irgend einen Punkt p des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$ ein Paar von Parallelen zu den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, so treffen dieselben in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, und diese behalten ihre Eigenschaft, Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen (S. 28) zu sein, auch nach der Verschiebung. Wir erhalten dadurch nach der Verschiebung ein dem jedesmaligen Kegelschnitte der Schaar umbeschriebenes Parallelogramm, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts wird. Der Ort des Mittelpunktes des ersten Parallelogramms ändert aber durch die Verschiebung nur seine Lage in der Ebene, indem er sich selbst congruent bleibt, und dieser Ort ist, wie leicht zu sehen, ein dem erzeugenden Kegelschnitt $K^{(2)}$ ähnlicher Kegelschnitt; denn bezeichnen wir den Schnittpunkt der Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{e}$ (oder $\mathfrak{f}_1$), als Punkte der beiden den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Punktreihen, und die Berührungspunkte mit $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, so erzeugen bei der Bewegung von p die Strahlbüschel $\mathfrak{f}p$ und $\mathfrak{e}_1 p$ den Kegelschnitt $K^{(2)}$; bezeichnen wir aber mit ε und φ_1 die Mitten der Strecken $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$, mit π die Mitte von $\mathfrak{e}p$, so sind $\varepsilon\pi\ \varphi_1\pi$ parallel resp. mit $\mathfrak{f}p$ und $\mathfrak{e}_1 p$, erzeugen also einen ähnlichen und ähnlich-liegenden Kegelschnitt, welcher in ε und φ_1 die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ berührt; nach der Verschiebung nimmt dieser Kegelschnitt zwar eine andere Lage ein, bleibt aber dem $K^{(2)}$ ähnlich; wir haben mithin folgendes Resultat:

Sämmtliche Kegelschnitte der gemischten Schaar $S\,(3l,\ 1p)$ *haben ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte*, welcher ähnlich ist dem erzeugenden Kegelschnitt $K^{(2)}$. Stellen wir uns noch die Gerade $\mathfrak{D}$ her, welche diejenigen beiden entsprechenden Punkte auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Punktreihen verbindet, die nach der Verschiebung in dem Schnittpunkte ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$) vereinigt werden, d. h. die Gerade $\mathfrak{D}$, welche parallel zu $\mathfrak{C}$ und symmetrisch rücksichtlich des Schnittpunktes ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$) liegt, und welche nothwendig eine Tangente des erzeugenden Kegelschnitts $K^{(2)}$ ist, so können wir nach dem oben (S. 273) gefundenen Kriterium leicht entscheiden, welcher Art die Kegelschnitte der gemischten Schaar $S(3l, 1p)$ sein werden; der Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}$ berührt, liegt entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des von jenen drei Geraden gebildeten Dreiseits. In dem ersten Falle liegt er ganz in einem der Räume (e) (S. 273, Fig. 67) und ist nothwendig Ellipse; die Kegelschnitte der Schaar bestehen also in diesem Falle aus lauter Ellipsen, und auch der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Ellipse. Im zweiten Falle ist der Kegelschnitt $K^{(2)}$ entweder Ellipse und liegt dann ganz in einem der Räume (h), welche den Seiten des Dreiseits anliegen; die Kegelschnitte der Schaar bestehen in diesem Falle aus lauter Hyperbeln, und der Mittelpunktskegelschnitt ist Ellipse; oder der Kegelschnitt $K^{(2)}$ ist Hyperbel und liegt dann mit einem Zweige in einem Raume (h) und mit dem andern in dem gegenüberliegenden Raume (e); die Kegelschnitte der Schaar bestehen aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; der Mittelpunktskegelschnitt ist Hyperbel, und die beiden unendlich-entfernten Punkte derselben sind die Mittelpunkte der beiden in der Schaar vorkommenden Parabeln.

Das auf S. 273 angegebene Kriterium giebt auch unmittelbar Aufschluss über die Natur der gemischten Kegelschnittschaar je nach der Lage der sie bestimmenden Elemente, nämlich der drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ und des Punktes P. Es theilen nämlich die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ das Gebiet der ganzen Ebene in 7 Räume: den endlichen Raum des von ihnen gebildeten Dreiseits, die drei unendlichen den Seiten anliegenden Räume und die drei unendlichen den Ecken anliegenden Scheitelräume; je nachdem der Punkt P in dem einen oder andern dieser Räume liegt, ändert sich die Natur der gemischten Kegelschnittschaar, und zwar: 1) Wenn der gegebene Punkt P innerhalb des endlichen Dreiecksraumes, den die drei gegebenen Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ begrenzen, gelegen ist, so besteht die Schaar aus lauter Ellipsen, und auch der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Ellipse; 2) wenn der Punkt P in einem der drei unendlichen Scheitelräume, welche an die Ecken des Dreiseits anstossen, gelegen ist, so besteht die Schaar aus lauter Hyperbeln, und der Mittelpunktskegelschnitt ist wiederum eine Ellipse; 3) wenn der Punkt P in einem der drei den Seiten des Dreiseits anliegenden unendlichen Räume gelegen ist, so zerfällt die

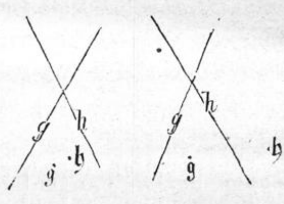
Schaar in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; der Mittelpunktskegelschnitt ist Hyperbel, und der eine Zweig derselben enthält die Mittelpunkte der Ellipsen, der andere die der Hyperbeln, während die beiden unendlich-entfernten Punkte dieser Mittelpunktshyperbel die Mittelpunkte der beiden Parabeln der Schaar sind.

Wir brechen hier die Betrachtung der beiden noch wenig untersuchten Kegelschnittschaaren $S(3p, 1l)$ und $S(3l, 1p)$ ab und überlassen die vielen noch unerledigten Fragen, welche sich hieran knüpfen, dem Leser. Die hier gegebene Entstehungsweise derselben scheint eine ergiebige und empfehlenswerthe Quelle für ihre Untersuchung; sie lässt uns aber in dem Falle im Stich, wenn von den $3p$ oder $3l$ ein Paar imaginär wird, d. h. a) wenn ein Punkt p, eine Gerade l und ein (elliptisches) Punktsystem gegeben ist und alle Kegelschnitte, welche durch p gehen, l berühren und das gegebene Punktsystem zu ihrem zugehörigen haben, die gemischte Kegelschnittschaar bilden; oder b) wenn eine Gerade l, ein Punkt p und ein (elliptisches) Strahlsystem gegeben ist und alle Kegelschnitte, welche l berühren, durch p gehen und das gegebene Strahlsystem zu dem ihnen zugehörigen zu haben, die gemischte Kegelschnittschaar bilden. Zur Construction der Kegelschnitte dieser Schaaren können wir gelangen, indem wir a) einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{p}$ die Gerade l durchlaufen lassen und jedesmal den Kegelschnitt construiren, welcher in $\mathfrak{p}$ die l berührt, durch p geht und das gegebene Punktsystem zu seinem zugehörigen hat (S. 150); b) indem wir einen veränderlichen Strahl $\mathfrak{t}$ um p drehen und jedesmal den Kegelschnitt construiren, welcher in p die $\mathfrak{t}$ berührt, ausserdem l berührt und das gegebene Strahlsystem zu dem ihm zugehörigen hat. Diese Constructionen gestatten, wenn auch nicht einen so unmittelbaren Einblick, wie die obige organische Entstehungsweise, doch eine Anschauung dieser gemischten Kegelschnittschaaren und bieten eine Handhabe für ihre Untersuchung, die übrigens zum Theil schon auf Curven höheren Grades führt.

Wir haben noch die dritte gemischte Kegelschnittschaar $S(2p, 2l)$ von zwei festen Punkten und zwei festen Tangenten in Betracht zu ziehen oder, wenn wir uns von der Realität dieser Paare unabhängig machen wollen, *alle Kegelschnitte* aufzusuchen, *welche gleichzeitig ein gegebenes Punktsystem und ein gegebenes Strahlsystem zu den ihnen zugehörigen haben.* Das Verhalten dieser gemischten Kegelschnittschaar lässt sich leicht aus einem speciellen Falle erkennen, wenn wir nämlich alle Kreise in Betracht ziehen, welche zwei gegebene Gerade berühren, da diese auf der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ ausserdem zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte haben (S. 195); aber auch allgemein zeigt sich leicht Folgendes:

Sind gegeben ein Strahlsystem (x, ξ), dessen Mittelpunkt B ist, und ein Punktsystem (y, η) auf dem Träger $\mathfrak{A}$, so wird es im Allgemeinen einmal vorkommen, dass ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems durch ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems hindurchgeht (S. 58 und 158); ein solches gemeinschaftliches Paar ist immer reell vorhanden, sobald eines oder beide Systeme elliptisch sind, oder wenn beide Systeme hyperbolisch sind mit den Asymptoten g, h und den Asymptotenpunkten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, falls die letzteren durch die ersteren nicht getrennt werden, d. h. die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ entweder in demselben Winkelraume oder in zwei Scheitelräumen von den vier durch g und h gebildeten Winkelräumen enthalten sind; wenn aber $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ in zwei neben einander liegenden Winkelräumen enthalten sind (Fig. 79), so giebt es kein solches perspectivisch liegendes Paar conjugirter Elemente. Dann giebt es aber überhaupt gar keinen reellen Kegelschnitt der Schaar; denn ein Kegelschnitt, welcher g, h berührt und durch $\mathfrak{g}$ geht, ist vollständig in dem Winkel- und seinem Scheitelraume enthalten, in welchem $\mathfrak{g}$ liegt, mag er Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein; er kann also nie durch einen Punkt $\mathfrak{h}$ gehen, welcher in einem der Neben-Scheitelräume liegt. Die Schaar enthält also in diesem Falle keinen einzigen reellen Kegelschnitt.

Fig. 79.

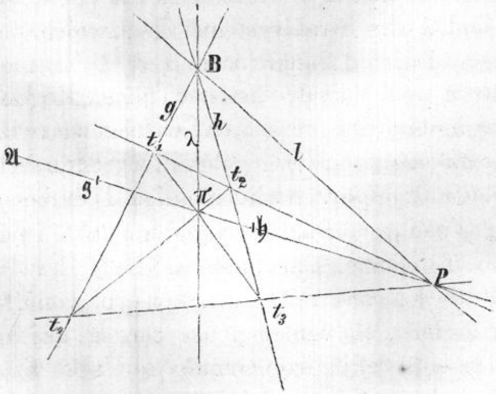


Sehen wir daher von diesem illusorischen Falle ab, so giebt es ein Strahlenpaar l und λ des Strahlsystems (B), welches den Träger $\mathfrak{A}$ in einem Paare conjugirter Punkte p und π des auf ihm gegebenen Punktsystems trifft, und dasselbe ist nach dem Obigen leicht zu construiren. Diese besonderen perspectivisch-liegenden Paare l, λ und p, π conjugirter Elemente beider gegebenen Systeme beherrschen diese gemischte Kegelschnittschaar. Geht nämlich l durch p und λ durch π, so wird, weil p und π ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt dieser Schaar sein müssen, die Polare von p durch π gehen; sie muss aber andererseits auch den Pol von l enthalten, weil l durch p geht; der Pol von l muss ferner auf der Geraden λ liegen, weil l und λ conjugirte Gerade für alle Kegelschnitte der Schaar sind; es sind also nur zwei Möglichkeiten vorhanden, entweder ist π selbst der Pol von l, oder wenn er es nicht ist, so muss λ die Polare von p sein; die Kegelschnitte der Schaar zerfallen daher in zwei Gruppen: für die erste Gruppe sind p und λ Pol und Polare, für die zweite Gruppe sind π und l Pol und Polare. Bezeichnen wir diese beiden Gruppen, in welche die gemischte Kegelschnittschaar zerfällt, durch $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$, so ergiebt sich folgendes Verhalten: Weil in der Gruppe $[p, \lambda]$ die Polare λ von p durch B geht, so muss auch die Polare von B durch p gehen, und weil der Pol p von λ auf $\mathfrak{A}$ liegt, so muss auch der Pol von $\mathfrak{A}$ auf λ liegen, dagegen in der Gruppe $[\pi, l]$ geht die Polare von B beständig durch π, und der Pol von $\mathfrak{A}$ liegt immer auf l. Wir haben also folgendes Resultat:

Die gemischte Kegelschnittschaar von zwei festen Tangenten, deren Schnittpunkt B, und zwei festen Punkten, deren Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ *sei, zerfällt in zwei Gruppen von Kegelschnitten; für jede derselben geht die Polare von B (Berührungssehne der beiden festen Tangenten) durch je einen festen Punkt p und* π*, welche auf* $\mathfrak{A}$ *liegen, und der Pol der Geraden* $\mathfrak{A}$ *(Schnittpunkt der Tangenten in den beiden festen Punkten) liegt auf je einer festen Geraden* λ *und l, welche durch B gehen; die Geraden* λ *und l gehen resp. durch die Punkte* π *und p und sind zugeordnet-harmonische Strahlen zu den beiden festen Tangenten, sowie p und* π *zugeordnet-harmonische Punkte zu den beiden festen Punkten der Schaar sind.*

Für den vollständig reellen Fall, wenn beide Systeme (B) und $(\mathfrak{A})$ hyperbolisch sind, also die Asymptoten gh des Strahlsystems die beiden festen Tangenten und die Asymptotenpunkte $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ des Punktsystems die beiden festen Punkte der gemischten Kegelschnittschaar sind, ist zu bemerken, dass die Kegelschnitte von jeder der beiden Gruppen paarweise mit einander zusammenhängen: Ziehen wir nämlich

Fig. 80.



irgend einen Strahl durch p, welcher g und h in den Punkten t_1 und t_2 trifft, so wird auch, wenn wir t_1 und t_2 mit π verbinden und die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrahlen mit h und g durch t_3 und

t_4 bezeichnen, die Verbindungslinie $t_3 t_4$ durch p laufen müssen (Fig. 80), denn die Strahlen $ghl\lambda$ sind harmonisch, und aus der harmonischen Eigenschaft des Vierecks folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung. Es giebt hiernach zwei Kegelschnitte der Gruppe $[p, \lambda]$, von denen der eine in $t_1 t_2$, der andere in $t_3 t_4$ die Geraden gh berührt und durch $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ geht; andererseits giebt es aber auch zwei Kegelschnitte der Gruppe $[\pi, l]$, deren einer in $t_1 t_3$, der andere in $t_2 t_4$ die Geraden gh berührt und ausserdem durch $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ geht; diese vier Kegelschnitte, welche paarweise den beiden Gruppen angehören, berühren sich in den vier Punkten $t_1 t_2 t_3 t_4$ derartig, dass jeder aus der einen Gruppe die beiden andern aus der andern Gruppe berührt; die vier Punkte $t_1 t_2 t_3 t_4$ liegen ferner mit den festen Punkten $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, weil $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zugeordnete Punkte sind zu p und π, zwei Diagonalpunkten des vollständigen Vierecks $t_1 t_2 t_3 t_4$. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ hat $Bp\pi$ zu einem Tripel conjugirter Punkte, folglich ist $p\pi$ die Polare von B in Bezug auf ihn, und daher sind $B\mathfrak{g}$ und $B\mathfrak{h}$ seine Tangenten in den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Verändern wir den willkürlich durch p gezogenen Strahl, so verändert sich auch das Viereck der vier Berührungspunkte $t_1 t_2 t_3 t_4$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; ersteres behält das feste Diagonaldreieck $Bp\pi$ und ein Seitenpaar gh unverändert, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ beschreibt eine Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte, welche in den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die gemeinsamen Tangenten $B\mathfrak{g}$ und $B\mathfrak{h}$ haben.

In analoger Weise ordnen sich die Kegelschnitte der gemischten Schaar zu zwei und zwei Paaren, wenn man auf l einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ nimmt, ihn mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ verbindet und die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrahlen mit λ abwechselnd mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ verbindet, welche beiden Linien sich wiederum auf l schneiden; man erhält dadurch ein Vierseit, dessen Diagonaldreiseit $\mathfrak{A} l \lambda$ ist, und von dem ein Paar Gegenecken $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind; die vier Seiten dieses Vierseits sind die Tangenten von vier Kegelschnitten, welche paarweise den beiden Gruppen $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$ angehören und sich derartig berühren, dass jeder aus der einen Gruppe die beiden andern aus der andern Gruppe berührt. Die vier Seiten dieses Vierseits und die beiden Geraden g und h sind sechs Tangenten eines Kegelschnitts, der $\mathfrak{A} l \lambda$ zum Tripel conjugirter Strahlen hat und daher die Geraden g und h in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von $\mathfrak{A}$ geschnitten werden; verändern wir den willkürlich angenommenen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Geraden l, so verändert sich sowohl jenes Vierseit, als auch dieser Kegelschnitt und letzterer durchläuft eine Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte, deren beide Berührungspunkte die Schnittpunkte von g und h mit der Geraden $\mathfrak{A}$ sind.

§. 54. Die gemeinschaftlichen Punkte, Tangenten und das gemeinsame Tripel conjugirter Punkte und Strahlen für zwei beliebig angenommene Kegelschnitte.

Zwei willkürlich in der Ebene angenommene Kegelschnitte können höchstens vier gemeinschaftliche Punkte und vier gemeinschaftliche Tangenten haben, denn durch fünf dieser Elemente ist der Kegelschnitt im Allgemeinen eindeutig bestimmt, d. h. zwei Kegelschnitte, welche z. B. fünf Punkte gemeinschaftlich haben, müssen identisch zusammenfallen. Die Frage nach der Realität dieser gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten sowie die Construction derselben ist für viele geometrische Untersuchungen unerlässlich, insbesondere für die Construction des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar, welche beiden Gebilde durch zwei Kegelschnitte vollständig und eindeutig bestimmt werden. Es soll daher diese Frage nachträglich beantwortet werden.

Ein Kegelschnitt theilt die unendliche Ebene in zwei Gebiete, welche wir das äussere und innere Gebiet nennen; ersteres wird erfüllt von sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts, letzteres von keiner getroffen. Denken wir uns eine veränderliche Tangente an dem Contour eines Kegelschnitts herumbewegt, so durchstreift dieselbe das ganze äussere Gebiet doppelt; denn halten wir den Berührungspunkt in der Tangente fest, so theilt er jedesmal dieselbe in zwei unendliche Hälften, und während der Berührungspunkt den Contour des Kegelschnitts einmal durchläuft, durchstreift jede der beiden Hälften das ganze äussere Gebiet. Bei der Hyperbel bildet das äussere Gebiet ein zusammenhängendes Ganze von unendlicher Ausdehnung; das innere Gebiet besteht aus zwei getrennten (im Unendlichen zusammenhängenden) Theilen ebenfalls von unendlicher Ausdehnung. Die Bewegung der Tangente mit ihrem Berührungspunkt längs des Contours der Hyperbel zeigt den Zusammenhang der beiden Hyperbelzweige im Unendlichen (S. 120). Das innere Gebiet der Ellipse ist von endlicher Ausdehnung, das äussere von unendlicher; bei der Parabel sind beide von unendlicher Ausdehnung und jedes in sich zusammenhängend.

Wenn wir zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in der Ebene willkürlich annehmen, so können drei wesentlich verschiedene Fälle rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage eintreten, nämlich 1) ist das innere Gebiet des einen ganz in dem inneren Gebiete des anderen enthalten und zugleich enthält das äussere Gebiet des ersteren ganz das äussere Gebiet des letzteren, d. h. der eine Kegelschnitt liegt ganz innerhalb des anderen, oder 2) das innere Gebiet des einen liegt ganz in dem äusseren Gebiet des anderen und zugleich das äussere Gebiet des ersteren enthält ganz das innere des anderen, d. h. der eine Kegelschnitt liegt ganz ausserhalb des anderen, oder 3) das innere Gebiet des einen greift theilweise über in das innere Gebiet des anderen. In den Fällen 1) und 2) können die Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemeinschaftlich haben, im Falle 3) müssen sie gemeinschaftliche Punkte haben und zwar nothwendig zwei oder vier; denn verfolgen wir den Contour des einen, so muss ein auf demselben sich bewegender Punkt aus dem äusseren Gebiete des anderen in das innere Gebiet desselben übertreten bei der Annahme, dass ein Theil der inneren Gebiete sich deckt; der sich bewegende Punkt muss aber auch wiederum aus dem inneren Gebiet in das äussere zurückkehren, von wo wir ihn ausgehen liessen, bei dem continuirlichen Durchlaufen des zusammenhängenden (bei der Hyperbel durchs Unendliche zusammenhängenden) Contours; er muss also mindestens zweimal die Grenze überschreiten, kann es aber auch viermal thun, d. h. *zwei Kegelschnitte haben entweder keinen oder zwei oder vier gemeinschaftliche Punkte; haben sie einen gemeinschaftlichen Punkt, so müssen sie noch einen zweiten reellen Punkt gemeinschaftlich haben, können aber auch noch drei haben; haben sie drei reelle Punkte gemein, so müssen sie noch einen vierten reellen gemeinschaftlichen Punkt haben* (S. 238). Hieraus folgt unmittelbar das polargegenüberstehende Ergebniss: *Haben zwei Kegelschnitte eine reelle gemeinschaftliche Tangente, so müssen sie noch eine zweite haben, können aber auch noch drei andere gemeinschaftliche Tangenten haben;* denn wenn wir zwei Kegelschnitte mit einer reellen gemeinschaftlichen Tangente in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt als Basis polarisiren (S. 146), so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche einen reellen Punkt gemein haben, folglich nothwendig noch einen zweiten oder drei andere gemeinschaftliche Punkte; die ursprünglichen beiden Kegelschnitte haben daher nothwendig noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente, oder auch drei; hieraus folgt: *Zwei Kegelschnitte haben entweder keine oder zwei oder vier gemeinschaftliche Tangenten.*

Wie nun gemeinschaftliche Punkte und Tangenten bei zwei Kegelschnitten zusammen auftreten, erkennen wir am deutlichsten, indem wir das gemeinschaftliche Tripel conjugirter Punkte und Strahlen in Bezug auf beide Kegelschnitte aufsuchen. Irgend ein Punkt in der Ebene hat in Bezug auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ eine bestimmte Polare; suchen wir solche Punkte in der Ebene auf, für welche die beiden Polaren zusammenfallen; und andererseits, jede Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt hat einen bestimmten Pol; suchen wir solche Gerade auf, welche für beide Kegelschnitte denselben Pol haben; eine Lösung der ersten Frage giebt zugleich eine Lösung der zweiten, wie ersichtlich ist, und zwei Lösungen geben sofort eine dritte, denn seien x und X, y und Y zwei Paar Pole und Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte, so muss der Schnittpunkt (X, Y) und die Verbindungslinie xy ein drittes Paar Pol und Polare für beide Kegelschnitte sein. Mehr als drei Lösungen der Frage können aber im Allgemeinen nicht existiren, sobald die gegebenen Kegelschnitte von einander verschieden sind, denn wären x und X, y und Y, $(X, Y) = z$ und $xy = Z$ diese drei Paare Pole und Polaren und noch ein viertes Paar u und U, so liessen sich unendlich-viele neue Paare herstellen, nämlich $xu = V$ und $(X, U) = v$ u. s. f., und aus diesen wieder neue, was einen netzartigen Fortgang hat; auf jeder Verbindungslinie wie z. B. xy wäre ein Punktsystem bekannt, welches beiden Kegelschnitten gleichzeitig zugehörte, und die beiden Asymptotenpunkte wären allemal ein Paar gemeinschaftlicher Punkte beider Kegelschnitte (reell oder imaginär), die beiden Kegelschnitte hätten also unendlich-viele gemeinschaftliche Punkte und wären somit identisch.

Nach dieser vorläufigen Bemerkung kommt es darauf an, jene besonderen Punkte zu finden, deren Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte zusammenfallen; bewegen wir zu diesem Zwecke einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{p}$ auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$, so wird seine Polare in Bezug auf den ersten Kegelschnitt $K^{(2)}$ ein Strahlbüschel beschreiben, welches um den Pol o der Geraden $\mathfrak{G}$ sich dreht und projectivisch ist mit der von $\mathfrak{p}$ beschriebenen Punktreihe auf dem Träger $\mathfrak{G}$ (S. 145); ebenso die Polaren von den Punkten $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt $K_1^{(2)}$; diese beiden projectivischen Strahlbüschel, deren Mittelpunkte o und o_1 sind, erzeugen selbst einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch o und o_1 geht und die Eigenschaft besitzt, dass sich in jedem Punkte $\mathfrak{q}$ desselben die Polaren eines gewissen Punktes $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ schneiden, also auch umgekehrt: Die Polaren eines jeden Punktes $\mathfrak{q}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ treffen sich in einem Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$; wenn wir jetzt eine zweite Gerade $\mathfrak{G}_1$ annehmen und von einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{p}_1$ durchlaufen lassen, so erhalten wir in derselben Weise einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, welcher durch die beiden Pole m und m_1 der Geraden $\mathfrak{G}_1$ rücksichtlich der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ hindurchgeht und alle Punkte $\mathfrak{q}_1$ enthält, deren Polaren in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{p}_1$ der

Geraden $\mathfrak{G}_1$ treffen. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben nun einen unmittelbar anzugebenden Punkt gemein; der Schnittpunkt P der Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ hat nämlich in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zwei Polaren, welche sich in Q treffen, und durch Q müssen offenbar beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ hindurchgehen; sie haben nach dem Obigen nothwendig noch einen oder drei andere gemeinschaftliche Punkte, welche die Lösung der vorgelegten Frage darbieten; sei x ein gemeinschaftlicher Punkt der Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ ausser dem bekannten Q, so müssen, weil x in $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegt, seine Polaren rücksichtlich $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{x}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ treffen, und weil x in $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ liegt, müssen sie sich in einem Punkte $\mathfrak{x}_1$ der Geraden $\mathfrak{G}_1$ treffen; die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ fallen aber nicht zusammen in P, weil sonst x in Q läge; folglich müssen die Polaren von x rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)} K_1^{(2)}$ in die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ hineinfallen, d. h. x ist ein Punkt der gesuchten Art. Wir schliessen also: *Es giebt in der Ebene im Allgemeinen drei Punkte xyz der Art, dass für jeden derselben die Polaren rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zusammenfallen; von diesen drei Punkten muss einer immer reell sein.* Nehmen wir an, es wären alle drei reell, so zeigt sich ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen ihnen und ihren Polaren für die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Wenn nämlich die Polare von x in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ resp. die Geraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$ trifft und die Polare von y in η und η_1, so muss auch der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1, \eta\eta_1)$ ein solcher Punkt sein, dass er dieselbe Polare xy in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)} K_1^{(2)}$ hat; es giebt aber nur noch einen einzigen dritten Punkt dieser Art, nämlich z, den vierten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$, folglich muss der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1, \eta\eta_1)$ mit z coincidiren, und seine Polare, welche in ζ und ζ_1 resp. die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ trifft, muss die Verbindungslinie xy sein; es ist also z der Pol von xy und in gleicher Weise x der Pol von yz und y der Pol von zx; *die drei Punkte xyz liegen daher so, dass jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern ist, d. h. sie bilden ein Tripel conjugirter Punkte für beide Kegelschnitte* $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, und die Verbindungslinien:

$$(yz) = X \qquad (zx) = Y \qquad (xy) = Z$$

ein Tripel conjugirter Strahlen. Hierdurch ist zugleich die zweite oben aufgestellte Frage beantwortet, nämlich solche Gerade in der Ebene zweier gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ $K_1^{(2)}$ zu finden, deren Pole in Bezug auf beide zusammenfallen; denn eine solche Gerade muss die Träger $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ in zwei derartigen Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ treffen, dass der Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$

mit dem Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{p}_1$ zusammenfällt, und solcher Geraden giebt es, wie wir gesehen haben, nur die drei $\xi\xi_1$, $\eta\eta_1$, $\zeta\zeta_1$ oder X, Y, Z. Wir haben also folgendes Resultat:

Es giebt in der Ebene im Allgemeinen drei Gerade XYZ der Art, dass für jede derselben die Pole rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zusammenfallen; von diesen drei Geraden muss eine immer reell sein; sind alle drei reell, so bilden sie ein Tripel conjugirter Strahlen für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, d. h. der Pol jeder ist der Schnittpunkt der beiden andern.

Da von dem gemeinschaftlichen Polardreieck, dessen Ecken xyz und gegenüberliegende Seiten XYZ gleichzeitig beziehungsweise ein Tripel conjugirter Punkte und Strahlen für beide gegebenen Kegelschnitte sind, entweder alle Ecken und Seiten reell sind oder nur eine Ecke x und die gegenüberliegende Seite X, so brauchen wir auch nur diese beiden immer reellen Elemente, deren Construction oben angegeben ist, zu ermitteln und können die übrigen auf folgende Art aus ihnen finden: Die Polare X von x ist der Träger zweier verschiedenen Punktsysteme, welche beziehungsweise den Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zugehören; haben dieselben ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte (Seite 58 und 158), so muss dasselbe aus den Punkten y und z bestehen; dieses Punktpaar kann also nur dann imaginär sein, wenn die auf X befindlichen Punktsysteme, welche den Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zugehören, beide hyperbolisch sind und die Asymptotenpunkte derselben sich gegenseitig trennen, oder mit andern Worten, wenn die Gerade X beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in je zwei reellen Punkten schneidet, von denen das eine Paar durch das andere und zugleich dieses durch jenes getrennt wird. Wenn die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ keinen reellen Punkt gemein haben, also in der oben mit 1) und 2) bezeichneten Lage sich befinden, bei welcher entweder der eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern gelegen ist, dann ist es ersichtlich, dass jede Gerade, welche beide in reellen Punktpaaren schneidet (also auch X), sie nothwendig so treffen muss, dass die Schnittpunktpaare nicht durch einander getrennt werden; also schliessen wir: *Zwei Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemein haben, müssen nothwendig ein reelles Tripel conjugirter Punkte xyz gemeinschaftlich haben*, denn es giebt überhaupt keine Gerade in der Ebene zweier so gelegener Kegelschnitte, welche dieselben in Punktpaaren träfe, die einander trennen, also auch kein X der Art. Andererseits haben zwei Kegelschnitte, welche vier reelle gemeinschaftliche Punkte haben, immer ein reelles gemeinsames Tripel xyz, welches a priori zu bestimmen von früher her bekannt ist, nämlich das Diagonaldreieck des von den vier Schnittpunkten gebildeten vollständigen Vierecks; also bleibt dafür, dass die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ von dem gemeinsamen Tripel allein x und X reell haben, der einzige Fall übrig, dass die beiden Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben; wir schliessen also: *Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, so ist von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Punkt x und seine Polare X* (die Verbindungslinie der beiden andern) *reell.* Denn wäre das Tripel xyz vollständig reell und die Kegelschnitte hätten nur einen reellen Punkt α gemeinschaftlich, so würde, wenn der Schnittpunkt $(\alpha x, X) = \mathfrak{x}$ ist, der vierte harmonische Punkt zu $\alpha x \mathfrak{x}$, dem α zugeordnet, nothwendig auch ein gemeinschaftlicher Punkt beider Kegelschnitte, also der zweite Punkt β sein müssen; in gleicher Weise würden wir aber noch zwei andere reelle gemeinschaftliche Punkte erhalten, indem wir α mit y und z verbinden und die gleiche Construction ausführen; wenn also die Kegelschnitte ein reelles gemeinschaftliches Tripel und nur einen Punkt gemein hätten, so müssten sie vier reelle gemeinschaftliche Punkte haben; es kann mithin, wenn sie nur zwei reelle Schnittpunkte haben, das Tripel nicht vollständig reell sein, sondern nur x und X, und zugleich müssen die beiden reellen gemeinschaftlichen Punkte mit x in gerader Linie liegen; und umgekehrt: Wenn von dem gemeinschaftlichen Tripel zweier Kegelschnitte allein ein Tripelpunkt x und seine zugehörige Polare X reell sind, so müssen die beiden Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Punkte haben.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte. Wenn zwei Kegelschnitte vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so haben sie ein vollständig reelles gemeinschaftliches Polardreieck, nämlich das Diagonaldreieck des von jenen vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits. Ebenso: *Wenn zwei Kegelschnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, so müssen sie ein reelles Tripel conjugirter Strahlen (und Punkte) besitzen.* Dies folgt durch Polarisation aus dem oben Nachgewiesenen: dass, wenn zwei Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemein haben, ihr gemeinsames Tripel vollständig reell sein muss. Denn polarisiren wir die beiden gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, von welchen angenommen wird, dass sie keine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemein haben, und da diese ein reelles gemeinschaftliches Tripel haben, so müssen auch jene ein solches haben, indem aus Pol und Polare eines Kegelschnitts durch Polarisation allemal wieder Polare und Pol des Polarerzeugnisses wird (S. 146), also auch aus einem Tripel conjugirter

Punkte ein Tripel conjugirter Strahlen, was ja gleichzeitig ein Tripel conjugirter Punkte giebt. Wenn endlich die gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so kann ihr gemeinschaftliches Tripel nicht ganz reell sein, sondern nur X und x; denn wären alle drei conjugirten Strahlen XYZ des Tripels reell, so müssten die Kegelschnitte, sobald sie nur eine reelle gemeinschaftliche Tangente hätten, alle vier reell haben; wir finden nämlich, wenn α die erste wäre, die drei übrigen, indem wir durch jeden Schnittpunkt derselben mit X, Y, Z den vierten harmonischen, ihr zugeordneten Strahl construiren, während je ein Tripelstrahl und die Verbindungslinie jenes Schnittpunktes mit dem Pol dieses Tripelstrahls das andere Paar zugeordneter Strahlen sind. Also: *Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so ist von ihrem gemeinschaftlichen Tripel allein ein Tripelstrahl X und sein Pol x* (der Schnittpunkt der beiden andern) *reell;* und auch umgekehrt: Wenn allein X und x reell sind, so müssen die Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben. Hieraus folgt in Verbindung mit dem Obigen: *Zwei Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, müssen zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, und umgekehrt.* (Vgl. §. 62.)

Hieraus ersehen wir, dass bei zwei beliebig angenommenen Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ rücksichtlich ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten überhaupt nur folgende 5 Fälle eintreten können:

A) Das gemeinschaftliche Tripel xyz und $X=(yz)$, $Y=(zx)$, $Z=(xy)$ ist vollständig reell:

I. *Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt und keine reelle Tangente gemeinschaftlich.*

II. *Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt, aber vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.*

III. *Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte, aber keine reelle Tangente gemeinschaftlich.*

IV. *Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte und vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.*

B) Von dem gemeinschaftlichen Tripel ist nur ein Tripelpunkt x und ein Tripelstrahl X, seine Polare, reell:

V. *Die beiden Kegelschnitte haben nur zwei reelle Punkte und gleichzeitig nur zwei reelle Tangenten gemeinschaftlich.*

Wie in diesen fünf Fällen das gemeinsame Tripel rücksichtlich der beiden gegebenen Kegelschnitte gelegen ist, lässt sich auf folgende Weise erkennen: Ein Tripel conjugirter Punkte für einen Kegelschnitt liegt (S. 148) immer so zu demselben, dass ein Tripelpunkt in dem inneren Gebiete des Kegelschnitts, die beiden anderen in dem äusseren Gebiete enthalten sind d. h. von den drei conjugirten Strahlen zwei den Kegelschnitt in zwei reellen Punktpaaren und der dritte nicht schneidet. Das gemeinschaftliche Tripel zweier Kegelschnitte kann demnach, wenn es vollständig reell ist, nur auf zwei Arten zu demselben gelegen sein:

		entweder			oder
(α)	x	innerh. $K^{(2)}$, innerh. $K_1^{(2)}$	(β)	x	ausserh. $K^{(2)}$, ausserh. $K_1^{(2)}$
	y	ausserh. $K^{(2)}$, ausserh. $K_1^{(2)}$		y	innerh. $K^{(2)}$, ausserh. $K_1^{(2)}$
	z	ausserh. $K^{(2)}$, ausserh. $K_1^{(2)}$		z	ausserh. $K^{(2)}$, innerh. $K_1^{(2)}$
	X	trifft weder $K^{(2)}$, noch $K_1^{(2)}$		X	trifft $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$
	Y	trifft $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$		Y	trifft nicht $K^{(2)}$, aber $K_1^{(2)}$
	Z	trifft $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$		Z	trifft $K^{(2)}$, aber nicht $K_1^{(2)}$

In dem Falle I. *liegt das Tripel nach der Art* (α); da von den beiden Kegelschnitten der eine ganz in dem innern Gebiete des andern enthalten ist (s. S. 364, 1)), so kann der Fall (β) nicht eintreten, denn läge $K_1^{(2)}$ ganz innerhalb $K^{(2)}$, so müsste jeder Punkt innerhalb $K_1^{(2)}$ a fortiori auch innerhalb $K^{(2)}$ liegen, folglich wäre kein z möglich, es muss daher der Fall (α) eintreten.

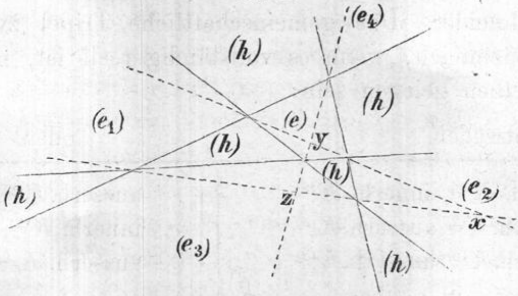
Im Falle II. *liegt das Tripel nach der Art* (β); da der eine Kegelschnitt ganz ausserhalb des andern liegen muss (s. S. 364, 2)), so giebt es keinen Punkt, der innerhalb beider liegt; der Fall (α) kann also nicht stattfinden, weil es kein x giebt, folglich muss der Fall (β) eintreten.

In dem Falle III. *liegt das Tripel nach der Art* (β); dies folgt aus dem vorigen Falle durch Polarisation; denn das polarisirte Gebilde des vorigen giebt zwei Kegelschnitte, welche keine reellen Tangenten, aber vier reelle Punkte gemein haben, und das Tripel conjugirter Punkte geht in das Tripel conjugirter Strahlen über; es ist aber offenbar, dass beide übereinstimmend liegen müssen, folglich liegt das Tripel im Falle III. so wie im Falle II. nach der Art (β).

In dem Falle IV. *liegt das Tripel nach der Art* (α); denken wir uns, da die vier gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, die ganze Schaar der dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte, so erfüllen dieselben, wie wir wissen (S. 282), nur die fünf elliptischen Räume (e), während die sechs hyperbolischen Räume (h) frei bleiben

(Fig. 81), und auf diese fünf elliptischen Räume vertheilen sich die Kegelschnitte der Schaar in zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln der Art, dass die eine Gruppe Ellipsen ganz in dem Raume (e), die eine Gruppe Hyperbeln ganz in den Räumen (e_1) und (e_2), die

Fig. 81.



andere Gruppe Ellipsen ganz in dem Raume (e_3) und die letzte Gruppe Hyperbeln ganz in den Räumen (e_3) und (e_4) enthalten ist. Wenn also zwei Kegelschnitte dieser Schaar $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ reelle Schnittpunkte haben sollen, wie in IV., so müssen sie entweder beide im Raume (e), oder beide in (e_1) und (e_2), oder beide in (e_3), oder beide in (e_3) und (e_4), oder einer in (e_3) und der andere in (e_3) und (e_4) enthalten sein, denn diese Räume e schliessen sich gegenseitig aus; bei diesen fünf Annahmen liegt aber immer das Tripel xyz nach der Art (α); liegen nun beide Kegelschnitte im Raume (e), so liegt x ausserhalb beider und auch z; sind beide in (e_1) und (e_2) enthalten, so liegen y und z ausserhalb beider; sind sie in (e_3) enthalten, so liegt x und y ausserhalb beider; sind beide in (e_3) und (e_4) enthalten, so liegen wiederum x und y ausserhalb beider, und endlich auch, wenn einer in (e_3), der andere in (e_3) und (e_4) enthalten ist. Unter allen möglichen Annahmen liegt also im Falle IV. das Tripel xyz nach der Art (α).

In dem Falle V. liegt der reelle Tripelpunkt x ausserhalb beider Kegelschnitte, und seine Polare X schneidet beide Kegelschnitte in reellen Punktpaaren, welche einander trennen, wie wir dies schon oben gesehen haben.

Es ist noch zu bemerken, dass, während die Lage der Fälle I., II., IV., V. bei jeder Art von zwei Kegelschnitten (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten kann, der Fall III. nur möglich ist, wenn wenigstens einer der beiden Kegelschnitte Hyperbel ist. Dies folgt wiederum durch Polarisation des Falles II., wo jeder Kegelschnitt ganz in dem äusseren Gebiet des andern liegt, also kein Punkt existirt, welcher gleichzeitig innerhalb beider sich befindet. Das Polar-Erzeugniss eines Kegelschnitts $K^{(2)}$ wird aber nur Ellipse, wenn der Mittelpunkt der Basis innerhalb $K^{(2)}$ liegt (S. 146), und da es im Falle II. keinen Punkt giebt, welcher gleichzeitig innerhalb $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ liegt, so muss das Polarerzeugniss der Art sein, dass wenigstens einer der beiden erzeugten Kegelschnitte Hyperbel ist (oder auch beide); weil aber durch Polarisation des Falles II. der Fall III. hervorgeht, so muss von zwei Kegelschnitten, welche vier reelle Punkte, aber keine reelle Tangente gemein haben, wenigstens einer Hyperbel sein.

Wir müssen noch eines besonderen Falles Erwähnung thun, welcher eine Ausnahme macht. Aus der vorigen Untersuchung geht nämlich hervor, dass im Allgemeinen zwei Kegelschnitte nur *ein einziges Tripel conjugirter Punkte gemeinschaftlich* haben, von dem entweder alle drei Punkte xyz oder nur einer x und seine Polare X reell sind; die beiden auf X befindlichen Punktsysteme, welche den beiden Kegelschnitten zugehören, haben als gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte y und z und können, so lange sie von einander verschieden sind, nur ein einziges gemeinschaftliches Paar besitzen; es kann aber der besondere Fall eintreten, dass diese beiden Punktsysteme identisch sind; alsdann haben sie unendlich-viele Paare conjugirter Punkte gemeinschaftlich, und die beiden Kegelschnitte haben *unendlich-viele Tripel conjugirter Punkte gemeinschaftlich*, welche indessen eine Ecke x und die gegenüberliegende Seite X gemein haben. Die Kegelschnitte haben dann (S. 344) eine reelle oder ideelle doppelte Berührung, und es folgt hieraus, dass zwei Kegelschnitte, auch ohne identisch zu sein, mehr als ein gemeinschaftliches Tripel haben können; dass sie dann aber eine (reelle oder ideelle) *doppelte Berührung* haben müssen und den unendlich-vielen gemeinschaftlichen Tripeln eine Ecke und die gegenüberliegende Seite (Polare) gemeinsam ist.

Nachdem wir vermittelst des aufgefundenen gemeinschaftlichen Tripels zweier Kegelschnitte alle möglichen Fälle hinsichtlich der Realität ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten erörtert haben, bleibt es noch übrig, eine directe Construction der letzteren aufzufinden, indem das gemeinschaftliche Tripel, dessen Construction oben gegeben wurde, als bereits ermittelt angenommen wird. Um gemeinschaftliche Punkte zweier Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ aufzufinden, kommt es darauf an, solche Gerade in der Ebene zu ermitteln, welchen in Bezug auf beide Kegelschnitte dasselbe Punktsystem zugehört, denn eine solche Gerade muss reelle oder ideelle gemeinschaftliche Secante beider Kegelschnitte sein, je nachdem jenes Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; um andererseits gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte zu finden, kommt es darauf an, solche Punkte in der Ebene zu ermitteln, denen in Bezug auf beide Kegelschnitte dasselbe

Strahlsystem zugehört; denn die Asymptoten eines solchen Strahlsystems, wenn es hyperbolisch ist, müssen gemeinschaftliche Tangenten beider Kegelschnitte sein, und wenn es elliptisch ist, so nennen wir einen solchen Punkt den Durchschnittspunkt zweier imaginärer gemeinschaftlicher Tangenten beider Kegelschnitte.

Jene Geraden und diese Punkte aufzufinden giebt uns das gemeinschaftliche Tripel ein Hülfsmittel an die Hand; denn ein Tripelpunkt x und seine Polare X besitzen die Eigenschaft, dass auf irgend einem durch x gezogenen Strahl der Schnittpunkt ξ mit X und der Punkt x ein Paar conjugirter Punkte für beide Kegelschnitte sind, also die beiden Punktsysteme auf diesem durch x gezogenen Strahl, welche den beiden Kegelschnitten zugehören, das Punktpaar $x\xi$ zu einem gemeinschaftlichen Paar conjugirter Punkte haben; drehen wir jetzt einen Strahl um x, so kann es vorkommen, dass auf ihm noch ein zweites Paar conjugirter Punkte beiden Punktsystemen gemeinschaftlich wird, und dann müssen sie identisch sein, weil zwei Paare conjugirter Punkte das Punktsystem bestimmen; also eine gemeinschaftliche Secante wäre gefunden. Lassen wir wie am Anfange unserer Betrachtung einen Punkt $\mathfrak{p}$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ durchlaufen, und treffen sich die Polaren von $\mathfrak{p}$ rücksichtlich der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in dem veränderlichen Punkte $\mathfrak{q}$, so beschreibt $\mathfrak{q}$, wie wir gesehen haben, einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel xyz umschrieben ist, und jedem Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ entspricht ein bestimmter Punkt $\mathfrak{q}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein Paar conjugirter Punkte beider gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sind. Dem Punkte x entspricht der Schnittpunkt ξ der Geraden $\mathfrak{G}$ mit X, den Punkten yz (wenn sie reell sind) die Schnittpunkte $\eta\zeta$ der Geraden $\mathfrak{G}$ mit Y und Z. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ immer ein Paar conjugirter Punkte sind für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, und x und ξ ein zweites Paar, so folgt aus dem auf S. 153 bewiesenen Satze, dass die Schnittpunkte $(x\mathfrak{p}, \xi\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^1$ und $(x\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^1$ ebenfalls ein Paar conjugirter Punkte für beide Kegelschnitte sein müssen; weil aber der letztere $\mathfrak{p}^1$ auf $\mathfrak{G}$ liegt, so muss der erstere auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen, d. h. die Verbindungsstrahlen $x\mathfrak{p}$ und $\xi\mathfrak{q}$ treffen sich in einem Punkte $\mathfrak{q}^1$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, dessen conjugirter Punkt $\mathfrak{p}^1$ auf $\mathfrak{G}$ derjenige ist, in welchem $x\mathfrak{q}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft, oder mit andern Worten: Verbinden wir x mit einem Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, resp. auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$, so treffen die Verbindungsstrahlen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ zum andern Male in einem neuen Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{p}^1$ und $\mathfrak{q}^1$. Hieraus geht hervor, dass die beiden Verbindungsstrahlen $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ bei der gleichzeitigen Bewegung von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem erzeugen. Sind nämlich o und o_1 die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, so beschreiben $o\mathfrak{q}$ und $o_1\mathfrak{q}$, die Polaren von $\mathfrak{p}$, zwei projectivische Strahlbüschel mit der von $\mathfrak{p}$ durchlaufenen Punktreihe, erzeugen also jenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, der durch x geht; folglich beschreibt auch $x\mathfrak{q}$ ein mit $o\mathfrak{q}$, also mit der Punktreihe $(\mathfrak{p})$ projectivisches Strahlbüschel; $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ beschreiben mithin zwei concentrische projectivische Strahlbüschel, welche so auf einander liegen, dass die Schenkel entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen; denn wir haben gesehen, dass, wenn $x\mathfrak{p}$ mit $x\mathfrak{q}^1$ coincidirt, $x\mathfrak{q}$ auf $x\mathfrak{p}^1$ fallen muss; nach S. 60 bilden daher $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem; dieses Strahlsystem lässt sich leicht anschauen, sobald die Gerade $\mathfrak{G}$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ bekannt sind; denn wir haben gesehen, dass zwei conjugirte Strahlen $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ desselben den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in den Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}^1$ durchbohren, deren Verbindungssehne durch den festen Punkt $\mathfrak{x}$ geht, woraus noch einfacher folgt, dass $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem erzeugen; jeder durch $\mathfrak{x}$ gehende Strahl trifft also den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ in solchen zwei Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}^1$, welche mit x verbunden zwei Strahlen liefern, die in den conjugirten Punkten $\mathfrak{p}^1$ und $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ begegnen. Hieraus wird es leicht, die eigentlich vorgelegte Frage zu beantworten; denn ist das eben ermittelte Strahlsystem $[x]$ hergestellt, und wir drehen einen veränderlichen Strahl um x, indem wir den jedesmal ihm conjugirten Strahl aus diesem Strahlsystem hinzufügen, so trifft ersterer den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ und letzterer die Gerade $\mathfrak{G}$ (und zugleich umgekehrt) allemal in zwei Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$, welche für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gleichzeitig conjugirt sind; sobald daher zwei solche conjugirte Strahlen des Strahlsystems $[x]$ zusammenfallen, müssen auf diesem Doppelstrahl nicht allein die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, sondern auch die Punkte x und der Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ mit X je ein Paar conjugirter Punkte für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sein, und da durch zwei Paare conjugirter Punkte ein Punktsystem vollständig und eindeutig bestimmt ist, so muss diesem Doppelstrahl in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ dasselbe Punktsystem zugehören, d. h. er muss (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ sein. Es kommt also Alles darauf an, die Asymptoten des Strahlsystems $[x]$ zu finden; dieselben werden dadurch leicht ermittelt, dass wir durch $\mathfrak{x}$ das Tangentenpaar an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ legen und die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$ mit x verbinden. Die vollständige Auflösung der Aufgabe: *„Die gemeinschaftlichen Punkte zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu finden“*, lässt sich also folgendermassen zusammenfassen:

Man nehme von den Punkten $\mathfrak{p}$ einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ die

Polaren in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, welche sich paarweise in einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{q}$ treffen, dessen Ort ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist; dasselbe mache man mit einer zweiten Geraden $\mathfrak{G}_1$, dadurch erhält man einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^{(2)}$. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ haben einen reellen Punkt Q gemein, den Schnittpunkt der Polaren von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1) = P$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Sie haben daher im Allgemeinen noch drei andere Punkte xyz gemein, (von denen wenigstens einer x und die Gerade X, auf welcher die beiden andern liegen, reell sein muss). Die drei Verbindungslinien $(yz) = X$, $(zx) = Y$, $(xy) = Z$ treffen $\mathfrak{G}$ in den Punkten $\xi\eta\zeta$; die Tangentenpaare aus diesen Schnittpunkten an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegt mögen die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$, $\beta\beta^1$, $\gamma\gamma^1$ haben, dann sind die sechs Linien $x\alpha$, $x\alpha^1$, $y\beta$, $y\beta^1$, $z\gamma$, $z\gamma^1$ sechs gemeinschaftliche Secanten der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ und müssen sich zu je dreien in vier Punkten treffen, welche die gesuchten sind.

Hieraus ergiebt sich beiläufig ein Satz, welcher auch auf directem Wege zu verificiren ist:

Hat man einem Dreieck xyz einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ umschrieben, und werden die Seiten des Dreiecks yz, zx, xy von einer beliebigen Transversale resp. in den Punkten $\xi\eta\zeta$ getroffen; legt man aus $\xi\eta\zeta$ die Tangentenpaare an $\mathfrak{K}^{(2)}$ und bestimmt die Berührungspunkte derselben: $\alpha\alpha^1$, $\beta\beta^1$, $\gamma\gamma^1$, so schneiden sich die sechs Verbindungsstrahlen $x\alpha$, $x\alpha^1$, $y\beta$, $y\beta^1$, $z\gamma$, $z\gamma^1$ zu je dreien in vier Punkten und sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen drei Diagonalpunkte xyz sind.

[*Anmerkung.* Wir bemerken noch, dass die Lösung unserer Aufgabe nur eine Zurückführung derselben auf eine andere ist; um nämlich die vier Schnittpunkte zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)} K_1^{(2)}$ zu finden, müssen wir drei Schnittpunkte xyz zweier andern Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)} \mathfrak{K}_1^{(2)}$ ermitteln, welche einen bekannten vierten Punkt Q gemein haben. Diese Zurückführung ist in der Natur der Sache begründet und nicht zu eliminiren; sie ist gleichbedeutend mit der Zurückführung der Lösung der biquadratischen auf die der cubischen Gleichung; wie denn überhaupt in unserer Untersuchung eine geometrische Lösung der biquadratischen vermittelst einer cubischen und quadratischer Gleichungen enthalten ist.]

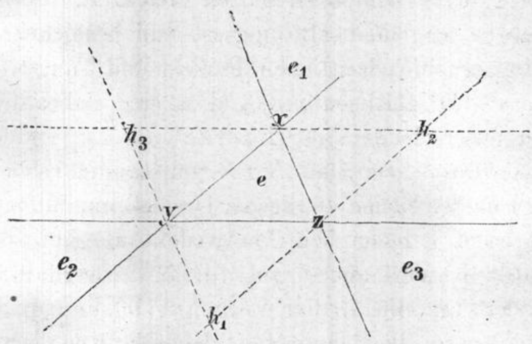
Die analoge Construction der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ ist nach dem bekannten Uebertragungsprincip unmittelbar herzustellen; mit den bereits construirten Linien und Punkten können wir sie ein wenig abkürzen, wie folgt: Von dem Punkte $P = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1)$ werden die beiden Polaren in Bezug auf $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, die sich in Q treffen, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ construirt, welcher dieselben berührt und dem Dreiseit XYZ einbeschrieben ist, also durch diese fünf Tangenten vollständig bestimmt wird; zieht man die drei Strahlen Px, Py, Pz; dann schneiden dieselben den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in sechs Punkten, deren Tangenten an $\mathfrak{C}^{(2)}$ beziehlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^1$ heissen mögen; die Schnittpunkte $(X\mathfrak{a})$ $(X\mathfrak{a}^1)$ $(Y\mathfrak{b})$ $(Y\mathfrak{b}^1)$ $(Z\mathfrak{c})$ $(Z\mathfrak{c}^1)$ sind die sechs Ecken (drei Paar Gegenecken) eines vollständigen Vierseits, welches aus den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte $K^{(2)} K_1^{(2)}$ gebildet wird und zu seinen drei Diagonalen XYZ hat. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ haben die Beziehung zu einander, dass ersterer den beiden Dreiecken xyz, Qoo_1 zugleich umschrieben ist und der letztere diesen beiden Dreiecken gleichzeitig einbeschrieben ist.

Die gegebene allgemeine Lösung ist nun hinsichtlich der Realität der construirten gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zu discutiren, und es sind dabei die obigen Fälle A) und B) zu unterscheiden. (Seite 370.)

A) Ist das Tripel xyz und XYZ vollständig reell, so kann eine gerade Linie $\mathfrak{G}$ in der Ebene zu diesem Dreieck nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder sie trifft alle drei Seiten desselben in ihren Verlängerungen (d. h. ausserhalb der Strecken yz, zx, xy) oder nur eine in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Dreiecks; da der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ dem Dreieck xyz umschrieben ist, so müssen die drei Schnittpunkte $\xi\eta\zeta$ der Geraden $\mathfrak{G}$ mit den Dreiecksseiten entweder alle drei ausserhalb $\mathfrak{K}^{(2)}$ liegen oder nur einer ausserhalb und die beiden andern innerhalb; von den sechs Berührungspunkten $\alpha\alpha^1$ $\beta\beta^1$ $\gamma\gamma^1$ sind mithin entweder alle oder nur zwei reell, und es giebt daher auch entweder sechs reelle gemeinschaftliche Secanten oder nur zwei für die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder vier reelle Schnittpunkte oder keinen, in dem letzten Falle aber zwei angebbare ideelle gemeinschaftliche Secanten.

Andererseits kann ein Punkt P zu einem Dreiseit XYZ nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder seine Verbindungslinien mit den Ecken xyz des Dreiseits treffen alle drei Seiten in Punkten zwischen den Ecken desselben, oder von diesen Schnittpunkten liegt nur einer zwischen den Ecken des Dreiseits und die beiden andern in den Verlängerungen der Seiten. Hiernach können wir beurtheilen, in welche Räume die drei zusammengehörigen Strahlen Px, Py, Pz hineinfallen, wie auch der Punkt P in der Ebene liegen mag, und müssen dazu sechszehn verschiedene Fälle unterscheiden. Die Seiten des Dreiecks xyz theilen nämlich die ganze Ebene in sieben von einander getrennte Räume, den endlichen Dreiecksraum e, die drei an die Ecken xyz anstossenden Scheitelräume $e_1 e_2 e_3$ von unendlicher Ausdehnung und die drei den gegenüberliegenden Seiten anliegenden Räume $h_1 h_2 h_3$ ebenfalls von unendlicher Ausdehnung (Fig. 82). Da nun jede durch eine der drei Ecken des Dreiecks gezogene Gerade immer nur zwei zusammengehörige Räume e_1 und h_1, oder e_2 und h_2, oder e_3 und h_3 und ausserdem einen von den vier Räumen $e h_1 h_2 h_3$ treffen kann, so vertheilen sich drei zusammengehörige Strahlen $Px\ Py\ Pz$ nur auf dreizehn von einander verschiedene Arten auf diese Räume in folgender Weise:

Fig. 82.



Räume	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$e_1 h_1 e$	Px	Px	Px	Px	Px								
$e_2 h_2 e$	Py					Py	Py	Py	Py				
$e_3 h_3 e$	Pz									Pz	Pz	Pz	Pz
$e_1 h_1 h_2$		Pz		Pz			Pz	Pz					
$e_1 h_1 h_3$		Py	Py								Py	Py	
$e_2 h_2 h_3$						Px		Px			Px		Px
$e_2 h_2 h_1$			Pz		Pz	Pz			Pz				
$e_3 h_3 h_1$				Py	Py					Py			Py
$e_3 h_3 h_2$							Px		Px	Px		Px	

Ziehen wir nämlich durch xyz drei Parallelen zu den Dreiecksseiten, so wird dadurch jeder der drei Räume h in vier Räume zerlegt, wodurch wir im Ganzen $3 . 4h + 4e = 16$ Räume erhalten. Der Lage des Punktes P in je einem dieser 16 Räume entsprechen 16 Fälle, die sich aber auf die obigen 13 reduciren, weil dreimal die Lage des Punktes P in zwei verschiedenen Räumen eine gleiche Lage von Px, Py, Pz hervorruft; sobald nämlich P in dem Scheitelraum

e_1 und in dem Scheitelraum von h_1 zwischen den beiden durch y und z gezogenen Parallelen sich befindet, wird die Lage von Px, Py, Pz gleichartig.

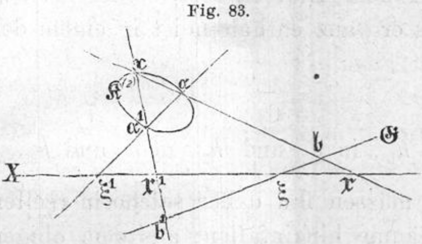
Der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, welcher dem Dreieck xyz einbeschrieben ist, kann nur so gelegen sein, dass er ganz enthalten ist in einem der Räume:

1)	2)	3)	4) oder	5)	6)	7)
e	h_1	h_2	h_3,	in e_1 und h_1,	in e_2 und h_2,	in e_3 und h_3.

Von den drei Strahlen Px, Py, Pz müssen ihn daher solche in reellen Punkten treffen, welche in diese Räume hineinfallen; aus dem obigen Tableau erkennen wir aber leicht, dass, welcher dieser 7 Fälle auch angenommen wird, die drei Strahlen Px, Py, Pz den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ entweder alle drei in reellen Punktpaaren treffen, oder nur einer von ihnen; von den sechs Tangenten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^1$ sind also auch entweder alle oder nur zwei reell, und von dem vollständigen Vierseit der vier gemeinschaftlichen Tangenten existiren daher entweder nur ein Paar Gegenecken oder drei Paar, d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder 4 reelle gemeinschaftliche Tangenten oder keine; in dem letzten Falle existiren aber zwei angebbare Punkte, welche als ein Paar Gegenecken des imaginären vollständigen Vierseits anzusehen sind. Wir erkennen hieraus, dass bei A) in der That nur die vier oben mit I., II., III., IV. bezeichneten Fälle auftreten können und auch wirklich auftreten müssen, wie die angegebene Construction es erheischt. (Wir sehen dabei von speciellen Fällen ab, indem einige der construirten Punkte oder Linien zusammenfallen können, welche dann als doppelt aufzufassen sind.)

B) Ist von dem gemeinschaftlichen Tripel der gegebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur ein Tripelpunkt x und ein Tripelstrahl X, seine Polare d. h. die Verbindungslinie der beiden andern imaginären Tripelpunkte reell, so schneidet X den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ nicht (denn schnitte sie ihn, so wären die Schnittpunkte $y\,z$ reell, was nicht der Fall ist); alle Punkte der Geraden X liegen also ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, mithin auch der Punkt $\mathfrak{x}$, in welchem $\mathfrak{G}$ von X getroffen wird; es giebt also aus $\mathfrak{x}$ ein reelles Tangentenpaar an $\mathfrak{K}^{(2)}$, und die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$ mit x verbunden geben ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks der vier gemeinschaftlichen Punkte von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$. Von den beiden Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ muss nun die eine in zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ treffen, die andere in zwei imaginären. Denn wir können die beiden Punktsysteme auf den Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ bestimmen, deren jedes beiden Kegelschnitten gleichzeitig zugehört, und werden finden, dass das eine hyperbolisch, das andere elliptisch sein muss; mögen nämlich (Fig. 83) die Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ der Geraden X in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^1$ begegnen und der Geraden $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^1$, so bestimmen die Punktpaare $x\mathfrak{x}$ und $\alpha\mathfrak{b}$ auf der ersten, $x\mathfrak{x}^1$ und $\alpha^1\mathfrak{b}^1$ auf der zweiten die Punktsysteme, welche den Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gleichzeitig zugehören. Die Geraden $\mathfrak{G}$ und X treffen sich in $\mathfrak{x}$, und $\alpha\alpha^1$ ist die Polare von ξ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$; trifft diese also die X in ξ^1, so sind $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ und $\xi\xi^1$ zwei Punktpaare desjenigen Punktsystems, welches der Geraden X in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ zugehört; dieses ist nothwendig elliptisch, weil die Schnittpunkte yz von X und $\mathfrak{K}^{(2)}$ imaginär sind, folglich müssen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ durch $\xi\xi^1$ getrennt werden, d. h. wenn ξ zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ liegt, so liegt ξ^1 ausserhalb dieser Strecke und umgekehrt. Nun liegen $\alpha\alpha^1\xi^1$ in einer Geraden und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1\xi$ in einer zweiten Geraden, und diese Punkte sind je drei Schnittpunkte mit den Seiten des Dreiecks $x\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$; von den Schnittpunkten $\xi\xi^1$ wissen wir, dass sie getrennt werden durch die Dreiecksecken $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$; von den Schnittpunkten irgend einer Geraden in der Ebene wissen wir, dass nothwendig entweder keiner oder zwei zwischen den Ecken eines Dreiecks liegen müssen; hieraus folgt: Wenn wir in einem Dreieck $x\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auf jeder Seite das Eckenpaar als *ein* Paar conjugirter Punkte eines Punktsystems auffassen, und zwei beliebige gerade Linien X und $\mathfrak{G}$ in der Ebene des Dreiecks jede Dreiecksseite in einem zweiten Paar conjugirter Punkte treffen lassen, so müssen die drei dadurch hervorgerufenen Punktsysteme auf den Dreiecksseiten entweder *a*) alle drei hyperbolisch oder *b*) zwei elliptisch und eins hyperbolisch sein. Es können aber nie alle drei elliptisch oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein. Da von unsern drei Punktsystemen auf den Seiten des Dreiecks $x\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche durch die Geraden X und $\mathfrak{G}$ bestimmt werden, das eine $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, $\xi\xi_1$ bekanntermassen elliptisch ist, so müssen die beiden andern verschiedener Art, d. h. eines elliptisch, das andere hyperbolisch sein, folglich müssen die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in dem Falle B) zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte, aber ein reelles Paar gemeinschaftlicher Secanten haben, welches durch x geht.

Fig. 83.



Wir können in ähnlicher Weise zeigen, dass in diesem Falle B) andererseits auf der Geraden X zwei solche reelle Punkte existiren, dass für jeden derselben die in Bezug auf die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zugehörigen Strahlsysteme identisch werden, und dass von den dadurch erhaltenen zwei Strahlsystemen nothwendig das eine hyperbolisch und das andere elliptisch ist; die Asymptoten des ersteren sind die beiden reellen gemeinschaftlichen Tangenten von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, während die anderen beiden imaginär sind, aber als reellen Schnittpunkt auf X den Mittelpunkt des andern elliptischen Strahlsystems haben. Allein es bedarf hier keines so umständlichen Nachweises mehr, weil durch Polarisation des bereits gefundenen Resultates das andere unmittelbar zu Tage tritt; denn das Polarerzeugniss zweier Kegelschnitte, für welche von dem gemeinschaftlichen Tripel allein x und X reell sind, wird aus zwei neuen Kegelschnitten bestehen, für welche von dem gemeinschaftlichen Tripel allein X und x reell sind; da jene zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte haben müssen, so müssen diese zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben; das Polar-Gebilde ist aber derselben Gattung B), wie das polarisirte, folglich tritt in der That für den Fall B) nur die einzige oben mit V. bezeichnete Möglichkeit ein, dass die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ allein zwei reelle Schnittpunkte und zugleich zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben.

Wir sind durch diese Untersuchung in den Stand gesetzt, wenn zwei beliebige Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gegeben sind, sowohl das Büschel, als auch die Schaar Kegelschnitte herzustellen, welche durch jene beiden bestimmt werden. Hierzu bedarf es nur der oben angegebenen Construction eines immer reellen gemeinschaftlichen Paares von Pol und Polare, x und X, und dann des reellen Linienpaares durch x und des reellen Punktpaares auf X, deren ersteres ein Paar gemeinschaftlicher Secanten der beiden Kegelschnitte und letzteres ein Paar Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten ist (d. h. ersteres enthält zwei Punktsysteme, letzteres zwei Strahlsysteme, welche für beide Kegelschnitte zugleich die zugehörigen sind). Diese beiden Punktsysteme und Strahlsysteme, mögen sie nun elliptisch oder hyperbolisch sein, geben, wie wir in §§. 42 und 49 gesehen haben, eine unmittelbare reelle Construction an die Hand für alle Kegelschnitte einerseits des Büschels und andererseits der Schaar, welche durch die beiden gegebenen $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmt werden. Auch zur Entstehung gemischter Kegelschnittschaaren (§. 53) geben $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Anlass. Schliesslich bemerken wir noch, dass durch die vorstehende Untersuchung zu den aus den Elementen bekannten Figuren des vollständigen Vierecks und Vierseits neue hinzutreten, indem Ecken und Seiten, Diagonalpunkte und Diagonalen derselben paarweise imaginär,

d. h. durch elliptische Punkt- und Strahlsysteme vertreten werden, und zwar giebt es drei wesentlich verschiedene Arten dieser beiden Figuren, wie aus dem Obigen hervorgeht:

Das vollständige Viereck hat:

I. vier reelle Ecken, sechs reelle Seiten oder drei Paar Gegenseiten, welche sich in drei reellen Diagonalpunkten paarweise treffen.

II. keine reelle Ecke, zwei reelle Seiten, d. h. ein reelles Paar Gegenseiten, die sich in einem reellen Diagonalpunkte treffen; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär, aber ihre Durchschnittspunkte sind reell und bilden die beiden übrigen reellen Diagonalpunkte.

III. zwei reelle Ecken und zwei imaginäre Ecken, ein reelles Paar Gegenseiten, von denen eine die beiden reellen, die andere die beiden imaginären Ecken enthält; einen reellen Diagonalpunkt, den Schnittpunkt jenes reellen Paares Gegenseiten; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalpunkte, aber die Verbindungslinie der letzteren ist reell.

Das vollständige Vierseit hat:

I. vier reelle Seiten, sechs reelle Ecken oder drei Paar Gegenecken, welche paarweise verbunden drei reelle Diagonalen liefern.

II. keine reelle Seite, zwei reelle Ecken, d. h. ein reelles Paar Gegenecken, deren Verbindungslinie eine reelle Diagonale ist; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär, aber ihre Verbindungslinien sind reell und bilden die beiden übrigen reellen Diagonalen.

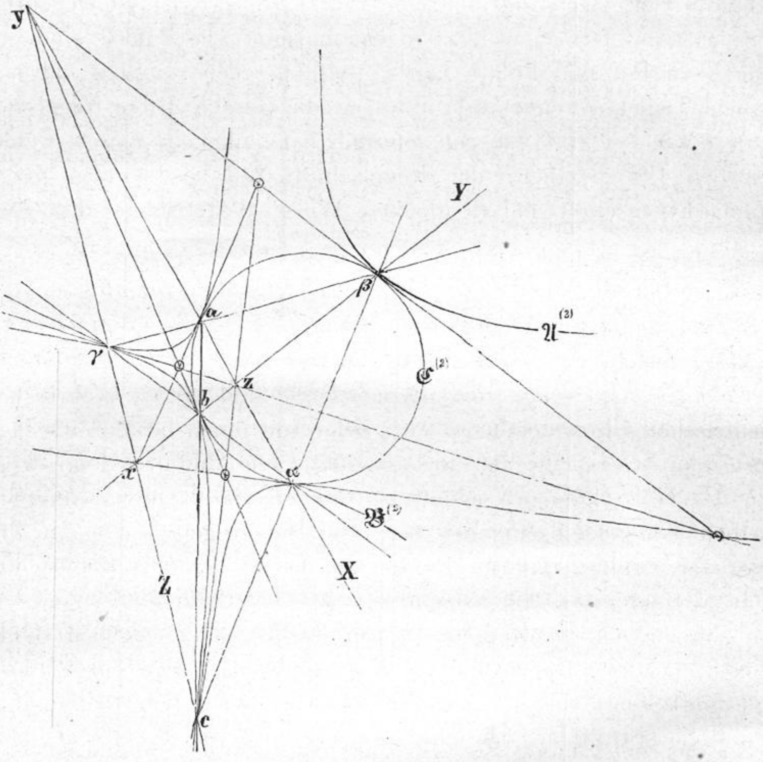
III. zwei reelle Seiten und zwei imaginäre Seiten, ein reelles Paar Gegenecken, von denen die eine der Schnittpunkt der beiden reellen, die andere der Schnittpunkt der beiden imaginären Seiten ist; eine reelle Diagonale, die Verbindungslinie dieses reellen Paares Gegenecken; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalen, aber der Schnittpunkt der letzteren ist reell.

Da das vollständige Viereck (links) in allen drei Fällen ein reelles Paar Gegenseiten hat, so können wir diese als die Träger zweier Punktsysteme ansehen, deren Doppelpunkte die Ecken des vollständigen Vierecks sind, und hiernach tritt der Fall I. ein, wenn beide Punktsysteme hyperbolisch, der Fall II., wenn beide elliptisch, und der Fall III., wenn eines elliptisch, das andere hyperbolisch ist; ebenso kann das vollständige Vierseit (rechts) als gebildet von den Doppelstrahlen zweier Strahlsysteme angesehen werden, und es treten die drei oben angeführten Fälle ein, je nachdem beide Strahlsysteme hyperbolisch, beide elliptisch oder eines hyperbolisch und das andere elliptisch ist.

§. 55. Harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte.

Wenn man einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ und ein Tripel conjugirter Punkte xyz in Bezug auf denselben hat, so müssen von den Verbindungslinien $(yz) = X$, $(zx) = Y$, $(xy) = Z$ zwei den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ in reellen Punktpaaren treffen, während die dritte ihn nicht trifft (S. 148); möge X in a und α, Y in b und β den $\mathfrak{C}^{(2)}$ schneiden (Fig. 84),

Fig. 84.



dann weiss man, dass der Schnittpunkt $(ab, \alpha\beta) = c$ und der Schnittpunkt $(a\beta, \alpha b) = \gamma$ beide auf der Polare Z von $z = (a\alpha, b\beta)$ liegen müssen, und dass $zc\gamma$ ein zweites Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ bilden, weil sie die Diagonalpunkte des dem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Vierecks $a\alpha b\beta$ sind; wir erkennen ferner, dass die vier Punkte $a\alpha b\beta$ vier harmonisch gelegene Punkte auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ sind, und dass auf den drei Geraden XYZ sowohl $a\alpha yz$, als auch $b\beta zx$ und endlich $c\gamma xy$ je vier harmonisch gelegene Punkte sind. Die hierdurch hergestellte Figur bietet interessante Eigenschaften dar.

Ebenso, wie der Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ durch die vier Punkte $a\alpha b\beta$ geht und in diesen xa, $x\alpha$, yb, $y\beta$ zu Tangenten hat, lassen sich zwei andere Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ herstellen, von denen der erstere durch $b\beta c\gamma$ geht und in diesen Punkten die Tangenten yb, $y\beta$, zc, $z\gamma$ hat, der andere aber durch $c\gamma a\alpha$ geht und die Tangenten zc, $z\gamma$, xa, $x\alpha$ hat. Denn der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, welcher in b und β die Tangenten yb und $y\beta$ hat und ausserdem durch c geht, wodurch er vollständig bestimmt ist, muss, weil er y und Y zu Pol und Polare hat und γ der vierte harmonische Punkt zu yxc ist, auch durch γ gehen; er muss ferner, weil $xzb\beta$ vier harmonische Punkte sind, auch x und X zu Pol und Polare haben, folglich auch z und Z, also xyz zu einem Tripel conjugirter Punkte; da die Gerade Z den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ in c und γ trifft, so müssen die Tangenten in diesen Punkten durch den Pol z gehen; der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ besitzt also die behauptete Eigenschaft und in gleicher Weise $\mathfrak{B}^{(2)}$. Solche drei Kegelschnitte:

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
\mathfrak{A}^{(2)} & \text{durch} & \text{die Punkte} & b\beta c\gamma & \text{mit} & \text{den} & \text{Tangenten} & yb,\ y\beta,\ zc,\ z\gamma \\
\mathfrak{B}^{(2)} & ,, & ,, & c\gamma a\alpha & ,, & ,, & ,, & zc,\ z\gamma,\ xa,\ x\alpha \\
\mathfrak{C}^{(2)} & ,, & ,, & a\alpha b\beta & ,, & ,, & ,, & xa,\ x\alpha,\ yb,\ y\beta
\end{array}\right.$$

heissen *harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte* und treten mehrfach bei geometrischen Untersuchungen auf; jeder von ihnen berührt die beiden andern doppelt, und die Berührungspunkte sind die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; das Diagonaldreieck xyz desselben ist gemeinschaftlich für alle drei Kegelschnitte ein Tripel conjugirter Punkte; die vier Punkte auf jedem der drei Kegelschnitte, welche allemal zwei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits sind, bilden immer ein Quadrupel von vier harmonisch gelegenen Punkten auf jedem der drei Kegelschnitte (S. 125), d. h. irgend ein Punkt des Kegelschnitts mit diesen vier Punkten verbunden liefert allemal vier harmonische Strahlen. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ erscheinen mithin als drei harmonische Kegelschnitte, welche bei gehöriger Zuordnung den drei Vierecken $b\beta c\gamma$, $c\gamma a\alpha$, $a\alpha b\beta$ umschrieben sind (S. 125); aus diesem Grunde heissen sie harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Gleichzeitig erscheinen dieselben drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ aber auch als drei harmonische Kegelschnitte, welche bei gehöriger Zuordnung den drei Vierseiten eingeschrieben sind, die in einem vollständigen Viereck liegen; bezeichnen wir nämlich die sechs Strahlen:

$$\begin{array}{llllll}
xa & x\alpha & yb & y\beta & zc & z\gamma \quad \text{mit} \\
A & \mathrm{A} & B & \mathrm{B} & C & \Gamma, \quad \text{so ist}
\end{array}$$

ersichtlich, dass diese sechs Strahlen ein vollständiges Viereck bilden,

d. h. zu je dreien sich in vier Punkten treffen, wobei A und $\mathbf{A}$, B und $\mathbf{B}$, C und Γ die drei Paare von Gegenseiten sind; denn ebenso wie

abc	in	einer	Geraden	liegen,	treffen	sich	$AB\Gamma$	in	einem	Punkt,
$\alpha\beta\gamma$	„	„	„	„	„	„	$\mathbf{A}\mathbf{B}C$	„	„	„
$\alpha b\gamma$	„	„	„	„	„	„	$\mathbf{A}BC$	„	„	„
$\alpha\beta c$	„	„	„	„	„	„	$\mathbf{A}\mathbf{B}\Gamma$	„	„	„

weil

$$\left.\begin{matrix} a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma \\ A\mathbf{A}B\mathbf{B}\Gamma C \end{matrix}\right\}\ \text{Pole und Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt } \mathfrak{C}^{(2)},$$

in gleicher Weise

$$\left.\begin{matrix} a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma \\ \mathbf{A}AB\mathbf{B}C\Gamma \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{Pole und} \\ \text{Polaren}\end{matrix}\ \text{in Bezug auf } \mathfrak{A}^{(2)},$$

und endlich

$$\left.\begin{matrix} a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma \\ A\mathbf{A}\mathbf{B}BC\Gamma \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{Pole und} \\ \text{Polaren}\end{matrix}\ \text{in Bezug auf } \mathfrak{B}^{(2)} \text{ sind.}$$

Der Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist also ein dem Vierseit $B\mathbf{B}C\Gamma$ einbeschriebener harmonischer Kegelschnitt, für welchen die Seitenpaare B und $\mathbf{B}$, C und Γ als zugeordnete aufgefasst sind; ebenso ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ ein dem Vierseit $C\Gamma A\mathbf{A}$ einbeschriebener harmonischer Kegelschnitt und $\mathfrak{C}^{(2)}$ ein dem Vierseit $A\mathbf{A}B\mathbf{B}$ einbeschriebener. Es giebt aber (S. 124) nur einen einzigen harmonischen Kegelschnitt, welcher bei gegebener Zuordnung einem gegebenen Vierseit einbeschrieben oder einem Viereck umschrieben ist, und zugleich ersehen wir aus der letzten Zusammenstellung, dass das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit Polarfiguren rücksichtlich jedes der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ sind, indem nur die drei einfachen Vierecke, aus denen das vollständige Vierseit besteht, den drei einfachen Vierseiten, aus welchen das vollständige Viereck besteht, in verschiedener Weise entsprechen bei $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$; da also auch die einfachen Vierseite die Polarfiguren der einfachen Vierecke sind, so müssen die jenen einbeschriebenen harmonischen Kegelschnitte die Polarfiguren der diesen umschriebenen Kegelschnitte sein; es folgt hieraus, *dass die drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte* $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ *die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass jeder als seine eigene Polarfigur erscheint, wenn er in Bezug auf einen der beiden andern polarisirt wird.*

Um z. B. die Polarfigur des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$ zu erhalten, müssen wir von den vier Punkten $b\beta c\gamma$ und den in ihnen gezogenen Tangenten $B\mathbf{B}C\Gamma$ die Polaren und Pole rücksichtlich $\mathfrak{B}^{(2)}$ nehmen; erstere sind beziehlich $\mathbf{B}BC\Gamma$ und letztere $\beta bc\gamma$; der Polarkegelschnitt geht also durch dieselben vier Punkte und hat dieselben vier Tangenten in ihnen, wie der zu polarisirende; er coincidirt daher mit ihm. Dasselbe geht hervor, wenn wir den dritten Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$ als Basis nehmen. Dieser eigenthümliche Zusammenhang der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$, wonach jeder sich selbst wieder erzeugt, lässt sich noch deutlicher überblicken, wenn wir von den Punkten eines dieser Kegelschnitte die Polaren in Bezug auf einen zweiten aufsuchen, welche selbst Tangenten des ersten sein müssen, und wenn wir zugleich die Berührungspunkte der letzteren ermitteln.

Nehmen wir irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ an, so muss seine Polare in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$ eine Tangente von $\mathfrak{A}^{(2)}$ sein; sie möge den Berührungspunkt $\mathfrak{a}'$ haben; dann wird die Polare von $\mathfrak{a}'$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$ ebenfalls eine Tangente von $\mathfrak{A}^{(2)}$ sein und offenbar den zuerst angenommenen Punkt $\mathfrak{a}$ zum Berührungspunkt haben; nennen wir für den Augenblick $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}'}$ diese beiden Tangenten in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ am Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ und ihren Schnittpunkt $\mathfrak{s}$, so sind in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$: $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}'}$ Pol und Polare, ebenso auch $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}}$, folglich auch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$; in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ sind aber ebenfalls $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ Pol und Polare, weil seine Tangenten in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ durch $\mathfrak{s}$ gehen. Der Punkt $\mathfrak{s}$ und die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ sind daher gemeinschaftlich für beide Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ Pol und Polare, sie müssten also dem gemeinschaftlichen Tripel angehören; dies ist aber xyz, also haben die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ zwei und somit unendlich-viele gemeinschaftliche Tripel, und dies ist (S. 345) nicht anders möglich, als wenn sie eine doppelte Berührung haben; sie haben nun in der That eine doppelte Berührung in den Punkten c und γ; z und Z sind Pol und Polare für beide Kegelschnitte gleichzeitig und haben in Bezug auf beide dasselbe Strahl- und Punktsystem; alle Tripel conjugirter Punkte, welche beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, müssen daher eine Ecke in z und eine Seite in Z haben, und es folgt daraus, dass der Punkt $\mathfrak{s}$ in Z liegen und die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ durch z laufen muss. Um also die Polare eines beliebigen Punktes $\mathfrak{a}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{A}^{(2)}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$ zu erhalten, ziehen wir $\mathfrak{a}z$, welches in $\mathfrak{a}'$ dem $\mathfrak{A}^{(2)}$ zum andern Male begegnet; dann ist die Tangente in $\mathfrak{a}'$ an $\mathfrak{A}^{(2)}$ die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$; um gleicherweise die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ zu erhalten, ziehen wir $\mathfrak{a}y$, welches in $\mathfrak{a}''$ dem $\mathfrak{A}^{(2)}$ zum andern Male begegnet; die Tangente in $\mathfrak{a}''$ an $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist dann die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}^{(2)}$; hieraus folgt zugleich, dass die Verbindungslinie $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ durch x gehen muss (S. 149). *Jeder durch x gehende Strahl trifft also den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ in zwei solchen Punkten, dass die Tangenten* *derselben die Polaren in Bezug auf* $\mathfrak{B}^{(2)}$ *und* $\mathfrak{C}^{(2)}$ *von einem und demselben dritten Punkte des Kegelschnitts* $\mathfrak{A}^{(2)}$ *sind*, und das Analoge gilt von y und z.

Ferner lassen sich die Mittelpunkte der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ leicht ermitteln; da $a\alpha$ die Berührungssehne und x ihr Pol für die Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ ist, so muss, wenn wir mit μ die Mitte der Berührungssehne $a\alpha$ bezeichnen, $x\mu$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ gehen; ist μ' die Mitte der Sehne $b\beta$, so muss $y\mu'$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{C}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ gehen, folglich ist der Schnittpunkt $(x\mu, y\mu')$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$; ist endlich μ'' die Mitte der Sehne $c\gamma$, so geht $z\mu''$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$, und daher ist:

$$(y\mu', z\mu'') = \mathfrak{M} \quad \text{der Mittelpunkt des Kegelschnitts } \mathfrak{A}^{(2)},$$
$$(z\mu'', x\mu) = \mathfrak{M}' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \mathfrak{B}^{(2)},$$
$$(x\mu, y\mu') = \mathfrak{M}'' \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \mathfrak{C}^{(2)}.$$

Die drei Punkte $\mu\mu'\mu''$ liegen als die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits auf einer Geraden (S. 276). Da wir von den drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten ein ihnen gemeinsames Tripel xyz und die Mittelpunkte $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ kennen, so lässt sich nach der auf S. 288 gemachten Bemerkung auch die Gattung der Kegelschnitte bestimmen. Wir sehen nämlich, dass die drei Mitten $\mu\mu'\mu''$ der Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ des vollständigen Vierseits nothwendig ausserhalb der Seiten des Diagonaldreiecks xyz liegen müssen, denn es sind yz zu $a\alpha$ harmonisch gelegen, und die Mitte des einen Paares zugeordneter Punkte $a\alpha$ liegt offenbar ausserhalb des andern Paares (wegen der hyperbolischen Natur des Punktsystems); wenn aber eine Transversale die Seiten eines Dreiecks xyz so trifft, dass die drei Schnittpunkte $\mu\mu'\mu''$ ausserhalb der drei Seiten yz, zx, xy zu liegen kommen, so wird in dem vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $x\mu$, $y\mu'$, $z\mu''$ und dessen Diagonalpunkte $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ sind, nothwendig einer zwischen $x\mu$, ein anderer zwischen $y\mu'$, der dritte aber ausserhalb $x\mu$ und $y\mu'$ liegen. Von den 7 Räumen, in welche die Ebene durch die Seiten des Dreiecks xyz zertheilt wird, müssen also zwei hyperbolische Räume (h) zwei von den Mittelpunkten enthalten, während der dritte entweder in den dritten hyperbolischen oder den gegenüberliegenden elliptischen Raum hineinfallen wird, also: *Von drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten müssen entweder alle drei Hyperbeln, oder einer Ellipse und die beiden andern Hyperbeln sein.*

Als besonderen Fall der letzten Art giebt es ein sehr einfaches Beispiel von drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten: Ist nämlich insbesondere z der Mittelpunkt des als Ellipse angenommenen Kegelschnitts $\mathfrak{C}^{(2)}$, und sind die Tripelstrahlen X und Y die Axen der Ellipse, so werden die beiden andern zugeordnet-harmonischen Kegelschnitte zwei Hyperbeln, deren eine die Ellipse in den Scheiteln der grossen Axe, die andere in den Scheiteln der kleinen Axe doppelt berührt, indem die beiden Hyperbeln dieselben Asymptoten haben, also conjugirte Hyperbeln sind, und die Asymptoten dieser Hyperbeln in die Richtungen der beiden gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse fallen. Dies ist der einfachste Fall dreier harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte, welche, in Bezug auf einander polarisirt, sich selbst wiedererzeugen. Wählt man für $\mathfrak{C}^{(2)}$ einen Kreis, so bestehen $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ aus gleichseitigen Hyperbeln, welche in den Endpunkten zweier zu einander rechtwinkligen Durchmesser den Kreis berühren und dieselben Asymptoten haben.

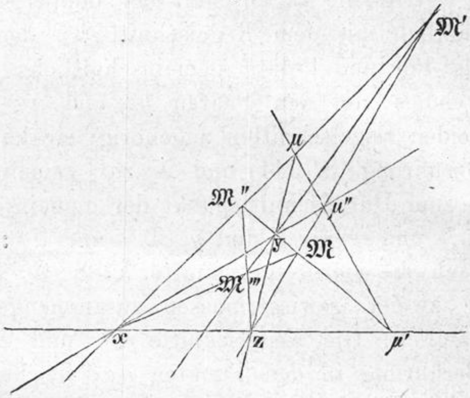
In eigenthümlicher Art tritt zu den harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}$ noch ein *vierter imaginärer Kegelschnitt* $\mathfrak{D}^{(2)}$, von dem man sagen kann, dass er dieselben Beziehungen darbietet, wie die drei reellen (vgl. §. 57). Wir haben nämlich oben drei Zuordnungen der Punkte $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ zu den Geraden $A\mathrm{A}$, $B\mathrm{B}$, $C\Gamma$ erkannt, wonach diese Polaren jener sind; durch jede dieser Zuordnungen wurde ein Kegelschnitt bestimmt, indem eigentlich mehr Bedingungen dadurch gesetzt waren, die sich aber nicht widersprachen; jetzt können wir noch eine vierte Zuordnung festsetzen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} a\;\alpha\;b\;\beta\;c\;\gamma\ \text{Pole und} \\ \mathrm{A}A\mathrm{B}B\Gamma C\ \text{Polaren} \end{array}\right\}$$

in Bezug auf einen unbekannten zu suchenden Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$; für diesen Kegelschnitt müssen sowohl $xa\alpha$ als auch $yb\beta$ und ebenso $zc\gamma$, endlich auch xyz je ein Tripel conjugirter Punkte sein. Auf den drei Tripelstrahlen XYZ kennen wir also die drei Punktsysteme, welche dem Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ zugehören müssen; da diese alle drei elliptisch sind (wegen der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits), so ist es ersichtlich, dass der ganze Kegelschnitt imaginär sein muss; wir erkennen dies aber auch, indem wir seinen Mittelpunkt aufsuchen; das elliptische Punktsystem, von dem yz und $a\alpha$ zwei Paare conjugirter Punkte sind, hat nämlich zum Mittelpunkt denjenigen Punkt $\mathfrak{m}$, in welchem yz von $x\mathfrak{M}$ getroffen wird, denn dasselbe Punktsystem gehört auch dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ zu, und da x und X Pol und Polare sind, so muss $x\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{m}$ gehen; die drei auf diese Weise erhaltenen Linien $x\mathfrak{M}$, $y\mathfrak{M}'$, $z\mathfrak{M}''$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{M}'''$ (nach bekannten harmonischen Eigenschaften), dem Mittelpunkte des Kegelschnitts $\mathfrak{D}^{(2)}$; durch diesen Mittelpunkt und das Tripel

xyz ist der Kegelschnitt vollständig bestimmt; es zeigt sich aber, dass er imaginär sein muss, weil $\mathfrak{M}'''$ in das Innere des Dreiecks xyz hineinfällt (S. 288), denn die drei Punkte $\mu\ \mu'\ \mu''$ liegen, wie wir oben gesehen haben, in einer geraden Linie, welche die Seiten des Dreiecks xyz in ihren Verlängerungen trifft. Da nun (Fig. 85) die Punkte $x\mu$, $y\mu'$, $z\mu''$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen Diagonalen sich in $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ schneiden, so werden $x\mathfrak{M}$ und $x\mathfrak{M}'$ harmonisch getrennt durch xy und xz, und da $x\mathfrak{M}'$ die Linie yz im Punkte μ ausserhalb yz trifft, so muss $x\mathfrak{M}$ dieselbe zwischen yz treffen, ebenso muss $y\mathfrak{M}'$ die Seite zx zwischen ihren Endpunkten treffen und gleicherweise die dritte $z\mathfrak{M}''$; der Schnittpunkt $\mathfrak{M}'''$ liegt daher nothwendig innerhalb des Dreiecks xyz, und der Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$, für welchen xyz ein Tripel und $\mathfrak{M}'''$ der Mittelpunkt ist, wird also imaginär. Aus dem Umstande, dass die drei Strahlen $x\mathfrak{M}$, $y\mathfrak{M}'$, $z\mathfrak{M}''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{M}'''$ schneiden oder xyz das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'''$ ist, geht hervor, dass für den durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}'''$ und das Tripel xyz bestimmten imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ in der That

Fig. 85.



$$\left.\begin{matrix} a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma \\ \mathrm{A}A\mathrm{B}B\Gamma C \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Pole und} \\ \text{Polaren} \end{matrix} \text{ in Bezug auf } \mathfrak{D}^{(2)}$$

sind. Fügen wir diesen vierten imaginären Kegelschnitt den oben untersuchten dreien hinzu, so haben wir für diese *vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte* folgende Zusammengehörigkeit von Pol und Polare:

für	$\mathfrak{A}^{(2)}$	$\mathfrak{B}^{(2)}$	$\mathfrak{C}^{(2)}$	$\mathfrak{D}^{(2)}$
Pol	$a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$	$a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$	$a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$	$a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$
Polare	$\mathrm{A}AB\mathrm{B}C\Gamma$	$A\mathrm{A}\mathrm{B}BC\Gamma$	$A\mathrm{A}B\mathrm{B}\Gamma C$	$\mathrm{A}A\mathrm{B}B\Gamma C$

Aus dieser Zusammenstellung tritt es aber klar vor Augen, dass jeder der vier Kegelschnitte als Polarfigur in Bezug auf einen der übrigen selbst wieder hervorgeht, denn durch Polarisation wird aus Pol und Polare für die eine Figur Polare und Pol für die Polarfigur;

wenn wir daher einen der vier Kegelschnitte in Bezug auf einen andern polarisiren wollen, so suchen wir von den Punkten $a\alpha$.. und den Geraden $A\mathbf{A}$..., wie sie bei dem gewählten Kegelschnitte zusammengehören, die Polaren und Pole in Bezug auf die gewählte Basis und gelangen dadurch wieder zu denselben Geraden und denselben zugehörigen Punkten; der Kegelschnitt muss also seine eigene Polarfigur sein, weil er durch diese sechs Paare von Polen und Polaren schon mehr als bestimmt ist. Auch für den imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$ tritt die Eigenschaft der doppelten Berührung zu Tage; er hat nämlich mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ den Punkt x und die Gerade X als Pol und Polare gemeinschaftlich, und das Punktsystem auf X, welches von den Paaren yz und $a\alpha$ bestimmt wird, ist ebenfalls beiden Kegelschnitten zugehörig; sie haben daher eine ideelle doppelte Berührung (S. 344) und X zur gemeinschaftlichen Berührungssehne, x zum Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten; ebenso $\mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$: Y und y, $\mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$: Z und z. Wir können hiernach die vier Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{D}^{(2)}$ auf dreierlei Art in Paare je zweier gewissermassen zusammengehöriger Kegelschnitte theilen, nämlich: Die Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ haben eine reelle doppelte Berührung in den Punkten $a\alpha$, sie haben also X zur gemeinschaftlichen Berührungssehne und x zum Pol derselben; dagegen $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{D}^{(2)}$ haben eine ideelle doppelte Berührung mit derselben Berührungssehne X und dem Pol x; dies ist die erste Art und ähnlich die übrigen; es gehören also zusammen:

$\mathfrak{B}^{(2)}$	und	$\mathfrak{C}^{(2)}$,	$\mathfrak{A}^{(2)}$	und	$\mathfrak{D}^{(2)}$	in Bezug auf	x und	X,
$\mathfrak{C}^{(2)}$	„	$\mathfrak{A}^{(2)}$,	$\mathfrak{B}^{(2)}$	„	$\mathfrak{D}^{(2)}$	„ „	„ y „	Y,
$\mathfrak{A}^{(2)}$	„	$\mathfrak{B}^{(2)}$,	$\mathfrak{C}^{(2)}$	„	$\mathfrak{D}^{(2)}$	„ „	„ z „	Z.

Aus dem Obigen geht hervor, wie die vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte bei dem völlig reellen vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und dessen Diagonalpunkte xyz sind, zum Vorschein kommen; eine sehr einfache und natürliche Entstehungsweise solcher vier harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte siehe §. 57. Wir übergehen hier die Erörterung der Modificationen, welche eintreten, wenn das vollständige Vierseit nicht mehr völlig reell angenommen wird, sondern nach der Art II. oder III. auf S. 382 beschaffen ist.

In dem von uns angenommenen Fall tritt zu der bereits erwähnten Eigenschaft, dass jeder der vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte seine eigene Polarfigur ist, noch eine allgemeinere; bezeichnen wir nämlich das vollständige Vierseit, dessen vier Seiten abc, $a\beta\gamma$,

$\alpha b\gamma$, $\alpha\beta c$ sind, mit $\mathfrak{B}$ und das vollständige Viereck, dessen vier Ecken $\mathbf{AB\Gamma}$, $\mathbf{A}BC$, $A\mathbf{B}C$, $AB\mathbf{\Gamma}$ sind, mit V, so sind $\mathfrak{B}$ und V Polarfiguren in Bezug auf jeden der vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte, aber jedesmal entsprechen sich Ecken und Seiten in anderer Weise, was unmittelbar aus dem oben zusammengestellten Schema von Polen und Polaren der vier Kegelschnitte abzulesen ist. Es zeigt sich nun weiter, *dass irgend ein dem Vierseit* $\mathfrak{B}$ *einbeschriebener Kegelschnitt zu seiner Polarfigur in Bezug auf jeden der vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte einen und denselben dem Viereck* V *umschriebenen Kegelschnitt hat.* Da nämlich vier Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältniss haben, wie ihre vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, so wird, wenn irgend ein dem Vierseit $\mathfrak{B}$ einbeschriebener Kegelschnitt die Seite abc in p berührt, die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ diejenige Gerade $\mathfrak{L}$ sein, welche aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse $(abcp) = (\mathbf{A}BC\mathfrak{L})$ construirbar ist; diese Gerade ist gleichzeitig die Polare eines Punktes p' der Geraden $\alpha\beta c$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, wenn

$$(\mathbf{A}BC\mathfrak{L}) = (\alpha\beta cp') \text{ ist;}$$

aus der Gleichheit:

$$(abcp) = (\alpha\beta cp')$$

folgt, dass sich $a\alpha$, $b\beta$, pp' in einem Punkte schneiden müssen oder $p\mathfrak{z}p'$ in einer Geraden liegen; der angenommene Kegelschnitt, welcher dem Vierseit $\mathfrak{B}$ einbeschrieben ist und abc in p berührt, muss aber (S. 123) $\alpha\beta c$ in p' berühren, und die Polare von p in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist identisch mit der Polare von p' in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, nämlich die Gerade $\mathfrak{L}$; folglich ist die Polarfigur des angenommenen Kegelschnitts in Bezug auf die Basis $\mathfrak{A}^{(2)}$ und in Bezug auf die Basis $\mathfrak{B}^{(2)}$ derselbe dem Viereck V umschriebene Kegelschnitt; und Gleiches folgt für die andern Basen.

Hieran knüpft sich umgekehrt die Aufgabe: *Zu zwei in der Ebene beliebig gegebenen Kegelschnitten einen solchen dritten zu finden, in Bezug auf welchen der eine gegebene Kegelschnitt die Polarfigur des andern ist**). Es liegt nach dem Obigen nahe, zu vermuthen, dass es im Allgemeinen vier Basen geben wird, welche die gegenseitige Lage von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten besitzen, und diese Vermuthung bestätigt sich leicht. Zuvörderst ist klar, dass, wenn die beiden ge-

---

*) Diese Aufgabe hat *Steiner* in einer am 26. März 1846 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung behandelt, wovon nur die Anzeige in den Monats-Berichten und in *Crelle*'s Journal, Bd. 32, S. 79 sich findet. Eine analytische Behandlung des Problems hat Herr *J. Rosanes* in seiner Inaugural-Dissertation: de polarium reciprocarum theoria observationes, Breslau 1865, geliefert.

gebenen Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, deren einer die Polarfigur des andern sein soll, eine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, sie nothwendig auch einen reellen Schnittpunkt haben müssen, denn der Pol jener in Bezug auf die angenommene Basis muss sowohl ein Punkt von $K^{(2)}$, wie von $K_1^{(2)}$ sein; es folgt hieraus, dass von den auf S. 370 unterschiedenen Fällen, welche allein bei der gegenseitigen Lage zweier Kegelschnitte eintreten können, die Fälle II. und III. (sobald $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder sobald sie vier reelle gemeinschaftliche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt haben) sofort auszuschliessen sind, also nur die Fälle I. und IV., wo das reelle gemeinschaftliche Tripel nach der Art (α) liegt, und andererseits der Fall V., wo es nur theilweise reell ist, übrig bleiben.

Die Fälle I. und IV. (wo die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben) lassen sich zusammen behandeln; wir ermitteln nämlich zunächst das reelle gemeinschaftliche Tripel xyz und bemerken, dass Pol und Polare eines Kegelschnitts, in Bezug auf irgend eine Basis polarisirt, nothwendig Polare und Pol für die Polarfigur werden; wenn also x und X gleichzeitig für beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, deren einer die Polarfigur des andern sein soll, Pol und Polare sind, so müssen in Bezug auf eine solche Basis die entsprechenden Elemente X' und x' auch für $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gleichzeitig Polare und Pol sein; dasselbe gilt von y und Y, z und Z, deren entsprechende Elemente in Bezug auf die Basis Y' und y', Z' und z' seien; da nun xyz und XYZ ein Tripel bilden, so bilden auch $X'Y'Z'$ und $x'y'z'$ ein Tripel und zwar ein solches, welches beiden Kegelschnitten $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ gemeinschaftlich sein muss; nun haben aber $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur ein gemeinschaftliches Tripel, es coincidirt daher $x'y'z'$ mit xyz, d. h. *das gemeinschaftliche Tripel xyz der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ muss zugleich ein Tripel für die unbekannte Basis sein.*

Wir wissen ferner (S. 370), dass in den Fällen I. und IV. von dem gemeinschaftlichen Tripel xyz nothwendig ein Tripelpunkt z innerhalb beider Kegelschnitte liegt und die durch ihn gehenden beiden Tripelstrahlen XY die Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ in reellen Punktpaaren schneiden, während der dritte Tripelstrahl Z, welcher die Punkte x und y enthält, keinen von beiden Kegelschnitten trifft. Möge der Tripelstrahl X dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ in p und π, dem $K_1^{(2)}$ in p_1 und π_1, dagegen Y dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ in r und ϱ, dem $K_1^{(2)}$ in r_1 und ϱ_1 begegnen; die Punkte p und π, p_1 und π_1 sind

Paare conjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte z und y sind, und ebenso r und ϱ, r_1 und ϱ_1 Paare conjugirter Punkte eines zweiten Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte z und x sind. Die Tangenten in den Punkten $p\pi p_1\pi_1$ sind xp, $x\pi$, xp_1, $x\pi_1$ und in den Punkten $r\varrho r_1\varrho_1$ die Verbindungslinien: yr, $y\varrho$, yr_1, $y\varrho_1$. Wenn nun der Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ die Polarfigur von $K^{(2)}$ sein soll in Bezug auf eine noch zu suchende Basis, so muss die Polare von p in Bezug auf diese Basis, welche mit $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ das Tripel xyz gemeinsam hat, einmal durch x gehen, weil p auf X liegt, und andererseits eine Tangente der Polarfigur $K_1^{(2)}$ sein; sie muss also eine der beiden Tangenten xp_1 oder $x\pi_1$ sein, und ebenso muss die Polare von π in Bezug auf die zu suchende Basis eine der beiden Tangenten $x\pi_1$ oder xp_1 sein. Das Gleiche gilt für den andern Strahl Y. Die Polare von r in Bezug auf die noch unbekannte Basis muss yr_1 oder $y\varrho_1$ sein und die Polare von ϱ: $y\varrho_1$ oder yr_1; hiernach stellen sich nur vier Möglichkeiten heraus: Für die unbekannte Basis sind:

$$1)\quad \left.\begin{matrix}p\\p_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\pi\\\pi_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}r\\r_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\varrho\\\varrho_1\end{matrix}\right\}\ \text{je zwei conjugirte Punkte}$$

$$2)\quad \left.\begin{matrix}p\\p_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\pi\\\pi_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}r\\\varrho_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\varrho\\r_1\end{matrix}\right\}\ \text{- - - -}$$

$$3)\quad \left.\begin{matrix}p\\\pi_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\pi\\p_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}r\\r_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\varrho\\\varrho_1\end{matrix}\right\}\ \text{- - - -}$$

$$4)\quad \left.\begin{matrix}p\\\pi_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\pi\\p_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}r\\\varrho_1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\varrho\\r_1\end{matrix}\right\}\ \text{- - - - .}$$

Dem entsprechend werden sich vier Basen ermitteln lassen, indem auf den Tripelstrahlen XY die Punktsysteme bekannt sind, welche einer jeden zugehören müssen; auf X bilden nämlich die vier Punkte $p\pi p_1\pi_1$ zwei Punktpaare $p\pi$, $p_1\pi_1$ eines hyperbolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte y und z sind; andererseits rufen dieselben vier Punkte $p\pi p_1\pi_1$ paarweise als conjugirte Punkte aufgefasst noch zwei neue Punktsysteme hervor (S. 56), von denen nothwendig eines elliptisch, das andere hyperbolisch ist; dasjenige, bei welchem p und p_1, π und π_1 conjugirte Punkte sind, sei das hyperbolische (h_1), und dasjenige, bei welchem p und π_1, π und p_1 conjugirte sind, sei das elliptische Punktsystem (e_1); in gleicher Weise werden auf dem Tripelstrahl Y durch die vier Punkte $r\varrho r_1\varrho_1$ drei Punktsysteme hervorgerufen, deren erstes durch die Paare r und ϱ, r_1 und ϱ_1 bestimmt wird und hyperbolisch ist mit den Asymptotenpunkten z und x, während von den beiden übrigen nothwendig eines, hyperbolisch (h_2), durch die Punktpaare r und r_1, ϱ und ϱ_1, das andere, elliptisch (e_2), durch die Punktpaare r und ϱ_1, ϱ und r_1 bestimmt wird. Die gesuchte Basis hat daher auf den beiden Tripelstrahlen X und Y

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & \text{die Punktsysteme:} & \\ & 1) \ldots\ldots (h_1) \quad (h_2) & \\ \text{oder} & 2) \ldots\ldots (h_1) \quad (e_2) & \text{zu zugehörigen.} \\ \text{-} & 3) \ldots\ldots (e_1) \quad (h_2) & \\ \text{-} & 4) \ldots\ldots (e_1) \quad (e_2) & \end{array}$$

Die beiden hyperbolischen Punktsysteme (h_1) und (h_2) auf X und Y haben Asymptotenpunkte, welche wir beziehungsweise mit $a\alpha$ und $b\beta$ bezeichnen wollen; diese Asymptotenpunkte sind in bekannter Weise zu ermitteln, da die Punktsysteme durch die bekannten Paare conjugirter Punkte vollständig bestimmt sind; sie stehen auch zu den elliptischen Punktsystemen (e_1) und (e_2) in eigenthümlicher Beziehung; weil $a\alpha$ die Asymptotenpunkte des durch die Paare conjugirter Punkte p und p_1, π und π_1 bestimmten Punktsystems (h_1) sind, so findet die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(p\pi a\alpha) = (p_1\pi_1 a\alpha) = (\pi_1 p_1 \alpha a),$$

folglich sind a und α ein Paar conjugirter Punkte desjenigen Punktsystems, welches durch die Paare p und π_1, π und p_1 bestimmt wird, d. h. des Punktsystems (e_1), weil entsprechende gleiche Strecken $a\alpha$ und αa auf einander fallen (S. 49). Ferner folgt daraus, dass yz die Asymptotenpunkte des durch p und π, p_1 und π_1 bestimmten hyperbolischen Punktsystems sind,

$$(pp_1yz) = (\pi\pi_1 yz) = (\pi_1\pi zy),$$

also auch yz sind ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (e_1); durch die beiden Paare a und α, y und z ist daher das Punktsystem (e_1) bestimmt, sowie das Punktsystem (h_1) durch die Asymptotenpunkte a und α bestimmt wird; endlich bemerken wir noch, dass auch y und z ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (h_1) sind, also zu $a\alpha$ harmonisch liegen, was aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(p\pi_1 a\alpha) = (p_1\pi a\alpha) = (\pi p_1 \alpha a)$$

folgt; denn hieraus geht hervor, dass $a\alpha$ ein Paar conjugirter Punkte für das durch p und π, p_1 und π_1 bestimmte Punktsystem ist, dessen Asymptotenpunkte yz sind.

In ganz gleicher Weise besitzen die Asymptotenpunkte $b\beta$ auf dem zweiten Tripelstrahl Y die Eigenschaft, harmonisch zu xz zu liegen, und die beiden Punktpaare b und β, x und z bestimmen das elliptische Punktsystem (e_2), während b und β als Asymptotenpunkte das hyperbolische Punktsystem (h_2) bestimmen. Endlich folgt noch, weil $a\alpha$ harmonisch liegen zu zy und $b\beta$ zu zx, dass die Verbindungslinien ab und $\alpha\beta$ sich in einem Punkte c der Geraden xy und ebenso $a\beta$, αb sich in einem Punkte γ der vorigen Geraden xy treffen müssen; also die Punkte $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sind die sechs Ecken (drei Paar Gegenecken) eines vollständigen Vierseits $\mathfrak{V}$, dessen Diagonaldreieck xyz ist.

Nach diesen Erörterungen werden sich jetzt die vier Basen ergeben, in Bezug auf welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren sein sollen. Fassen wir zunächst den ersten Fall der beiden hyperbolischen Punktsysteme (h_1) und (h_2) ins Auge, so muss die gesuchte Basis die Eigenschaft besitzen, dass in Bezug auf dieselbe von p die Polare xp_1, von π die Polare $x\pi_1$ und auch von p_1 die Polare xp, von π_1 die Polare $x\pi$ wird; eine solche Basis muss also xa und $x\alpha$ in den Punkten a und α berühren; zweitens muss sie analoger Weise yb und $y\beta$ in den Punkten b und β berühren; es giebt nun aber einen solchen reellen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, wie wir aus der obigen Betrachtung harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte wissen, und derselbe ist durch die geforderten Bedingungen zwar mehr als bestimmt, aber jene Bedingungen widersprechen sich nicht. In Bezug auf eine solche Basis ist, wie leicht zu sehen, in der That der Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ die Polarfigur von $K^{(2)}$ und umgekehrt, denn durch die vier Punkte $p\pi r\varrho$ und ihre Tangenten ist $K^{(2)}$ mehr als bestimmt.

Im zweiten Falle giebt es einen reellen Kegelschnitt $\mathfrak{B}^{(2)}$, welcher xa and $x\alpha$ in den Punkten a und α berührt und gleichzeitig das Punktsystem (e_2), welches durch die Paare $b\beta$, zx bestimmt wird, sowie das mit ihm perspectivische Strahlsystem durch y zu zugehörigen hat; im dritten Falle giebt es einen reellen Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$, welcher yb und $y\beta$ in den Punkten b und β berührt und das elliptische Punktsystem (e_1), durch die Paare $a\alpha$, zy bestimmt, sowie das mit ihm perspectivische Strahlsystem durch x zu zugehörigen hat; endlich im vierten Falle giebt es einen imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}^{(2)}$, welcher die beiden elliptischen Punktsysteme (e_1) und (e_2) und die mit ihnen perspectivischen Strahlsysteme durch x und y zu den zugehörigen hat. Für jeden dieser vier Kegelschnitte als Basen müssen $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren sein, was in derselben Art, wie für den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^{(2)}$, nachzuweisen ist. Diese vier Basen haben aber die Eigenschaft von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten, welche sich auf das vollständige Vierseit beziehen, dessen drei Paar Gegenecken $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, und dessen Diagonaldreieck xyz ist. Nach dem Früheren ist daher von den vier Basen eine imaginär, die drei andern sind reell und entweder alle drei Hyperbeln oder eine Ellipse und die beiden übrigen Hyperbeln. Die Construction dieser Kegelschnitte ist in der Herleitung selbst enthalten. Wir können nunmehr folgendes Resultat aussprechen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte $K^{(2)}$ *und* $K_1^{(2)}$ *in der Ebene gegeben, so können im Allgemeinen vier andere Kegelschnitte von der Beschaffenheit gefunden werden, dass für jeden von ihnen als Basis die gegebenen Kegelschnitte Polarfiguren von einander sind. Diese vier Basen sind vier harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Haben* $K^{(2)}$ *und* $K_1^{(2)}$ *entweder vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt, so ist keine der Basen reell; haben dagegen* $K^{(2)}$ *und* $K_1^{(2)}$ *entweder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, oder keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, so sind von den vier Basen drei reell und eine imaginär; die drei reellen Basen sind entweder alle drei Hyperbeln, oder eine Ellipse und die beiden andern Hyperbeln. Haben* $K^{(2)}$ *und* $K_1^{(2)}$ *endlich zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, so sind von den vier Basen nur zwei reell, und eine ist Ellipse, die andere Hyperbel.*

Die letzte Behauptung, welche wir anticipirt haben, ist noch nachzuweisen; in dem Falle B) (S. 370), wenn die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nur zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, giebt es von dem gemeinschaftlichen Tripel nur einen Punkt x und dessen Polare X, die beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich ist und den einen in p und π, den andern in p_1 und π_1 trifft; diese Punktpaare müssen reell sein und einander trennen, so dass p_1 zwischen p und π, π_1 ausserhalb $p\pi$ liegt, wie auf S. 368 gezeigt ist; die Kegelschnitte haben ferner eine reelle gemeinschaftliche Secante, welche durch ihre beiden reellen Schnittpunkte PQ und durch x geht, und eine ideelle gemeinschaftliche Secante ebenfalls durch x; die erstere treffe X in o, die letztere in $\tilde{\omega}$; endlich haben $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, welche sich in einem Punkte s der Geraden X treffen, während die beiden andern imaginären gemeinschaftlichen Tangenten nur ihren reellen Schnittpunkt σ auf X haben (d. h. dem Punkte σ gehört in Bezug auf beide Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ dasselbe elliptische, dem Punkt s dasselbe hyperbolische Strahlsystem zu). Die Punkte $p\pi p_1\pi_1$ stehen nun zu den vier Punkten $o\tilde{\omega}s\sigma$ in einer eigenthümlichen Beziehung, auf welche wir vorher nicht aufmerksam zu machen Veranlassung hatten, deren wir aber hier bedürfen. Es sind nämlich zunächst o und $\tilde{\omega}$ ein Paar conjugirter Punkte des durch die beiden

Paare $p\pi$ und $p_1\pi_1$ bestimmten elliptischen Punktsystems, weil xo und $x\tilde{\omega}$ das einzig reelle Linienpaar des durch $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Büschels ist, und andererseits sind auch s und σ ein Paar conjugirter Punkte desselben Punktsystems, weil sie das einzig reelle Punktpaar der durch $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Schaar bilden; X schneidet aber das Büschel in einem Punktsystem, und die von x an die Kegelschnitte der Schaar gelegten Tangentenpaare bilden ein Strahlsystem.

Hierzu kommt noch ein weiterer Zusammenhang: Die vier Punkte $p\pi$, $p_1\pi_1$ bestimmen nämlich ausser dem erwähnten elliptischen Punktsysteme, in anderer Weise zu Paaren geordnet, zwei hyperbolische Punktsysteme (S. 56), wenn wir einmal p und p_1, π und π_1, das andere Mal p und π_1, π und p_1 als je zwei Paare conjugirter Punkte zur Bestimmung eines Punktsystems auffassen, und es zeigt sich, dass

1) für das elliptische Punktsystem (e) conjugirte Punkte sind:

$$\left.\begin{matrix}p\\ \pi\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}p_1\\ \pi_1\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}o\\ \tilde{\omega}\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}s\\ \sigma\end{matrix}\right\},$$

2) für das eine hyperbolische Punktsystem (h) conjugirte Punkte sind:

$$\left.\begin{matrix}p\\ p_1\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\pi\\ \pi_1\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}o\\ s\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\tilde{\omega}\\ \sigma\end{matrix}\right\},$$

3) für das andere hyperbolische Punktsystem (h') conjugirte Punkte sind:

$$\left.\begin{matrix}p\\ \pi_1\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\pi\\ p_1\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}o\\ \sigma\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}s\\ \tilde{\omega}\end{matrix}\right\}.$$

Um dies nachzuweisen, wollen wir umgekehrt den Punkt s für den Fall 2) als conjugirten Punkt von o im Punktsysteme (h) construiren und zeigen, dass für den so construirten Punkt s das ihm zugehörige Strahlsystem rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)} K_1^{(2)}$ dasselbe wird, woraus folgt, dass er der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten sein muss. Die auf S. 66 angegebene Construction des sechsten Involutionspunktes, sobald fünf gegeben sind, lässt sich hier folgendermassen benutzen: Wir bestimmen die Schnittpunkte:

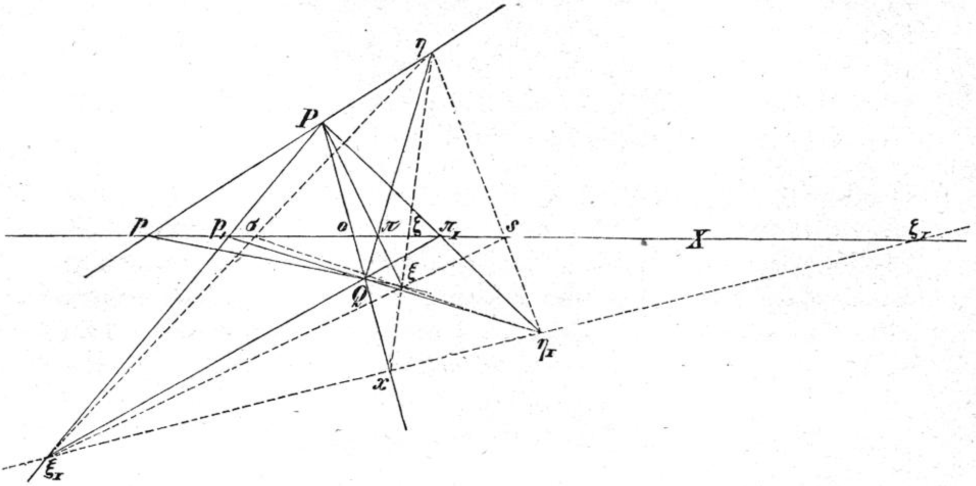
$$(P\pi,\ Qp) = \xi\,, \qquad (Pp_1,\ Q\pi_1) = \xi_1\,, \qquad \text{(Fig. 86)}$$

dann trifft $\xi\xi_1$ den Träger X in demjenigen Punkte s, welcher dem o conjugirt ist für das Punktsystem (h); wir erhalten denselben Punkt s auch in anderer Weise, indem wir die Schnittpunkte:

$$(Pp,\ Q\pi) = \eta \quad \text{und} \quad (P\pi_1,\ Qp_1) = \eta_1$$

aufsuchen und $\eta\eta_1$ ziehen, welche Linie auch durch s gehen muss.

Fig. 86.



Gleichzeitig erhalten wir den Punkt σ, indem wir $\xi\eta_1$ ziehen, welche Verbindungslinie die Gerade X in σ trifft, oder auch indem wir die Gerade $\xi_1\eta$ ziehen, die ebenfalls durch σ geht; wir haben also:

$$(\xi\xi_1,\ \eta\eta_1) = s \qquad (\xi\eta_1,\ \xi_1\eta) = \sigma\,.$$

Dass $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ durch x gehen, ist selbstverständlich, weil $PQox$ vier harmonische Punkte sein müssen. Wir bezeichnen noch die Schnittpunkte:

$$(\xi\eta,\ X) = \zeta \qquad (\xi_1\eta_1,\ X) = \zeta_1\,.$$

Nun hat das dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ einbeschriebene Viereck $PQp\pi$ zum Diagonaldreieck $o\xi\eta$; dies ist also ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf $K^{(2)}$; ferner ist $ox\zeta$ ebenfalls ein Tripel; es sind daher xp, $x\pi$, $P\zeta$, $Q\zeta$ die vier Tangenten von $K^{(2)}$ in den Punkten $p\pi PQ$; da s auf der Berührungssehne des aus x an $K^{(2)}$ gelegten Tangentenpaares liegt, so lässt sich leicht Seite 136 das dem Punkte s in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehörige Strahlsystem ermitteln, indem wir xp und $x\pi$ als Träger der den Kegelschnitt $K^{(2)}$ erzeugenden Punktreihen von den andern Tangenten (in P und Q) treffen lassen; die Schnittpunkte:

$$(xp,\ P\zeta) \quad \text{und} \quad (x\pi,\ P\zeta)$$

geben mit s verbunden ein Paar conjugirter Strahlen des dem Punkt s in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehörigen Strahlsystems, und die Punkte:

$$(xp,\ Q\zeta) \quad \text{und} \quad (x\pi,\ Q\zeta)$$

mit s verbunden geben ein zweites Strahlenpaar dieses Strahlsystems.

Ein ganz analoges Verhältniss findet beim Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ statt: xp_1, $x\pi_1$, $P\xi_1$, $Q\xi_1$ sind vier Tangenten desselben und die Schnittpunkte:

$$(xp_1,\ P\xi_1) \quad \text{und} \quad (x\pi_1,\ P\xi_1)$$

geben mit s verbunden ein Paar conjugirter Strahlen des dem Punkt s in Bezug auf $K_1^{(2)}$ zugehörigen Strahlsystems, die Punkte:

$$(xp_1,\ Q\xi_1) \quad \text{und} \quad (x\pi_1,\ Q\xi_1)$$

mit s verbunden ein zweites Strahlenpaar dieses Strahlsystems.

Es zeigt sich aber, dass diese beiden Strahlenpaare in dem einen Strahlsystem rücksichtlich des Kegelschnitts $K^{(2)}$ und in dem andern rücksichtlich des Kegelschnitts $K_1^{(2)}$ identisch zusammenfallen; denn da $\xi\xi_1 s$ in gerader Linie liegen, so liegen die beiden Strahlbüschel:

$$P(\pi p_1 o s) \quad \text{und} \quad x(\xi\xi_1 o s)$$

perspectivisch, folglich sind die Punktreihen projectivisch:

$$(\pi p_1 o s) \quad \text{und} \quad (\xi\xi_1 o s),$$

mithin auch die Strahlbüschel:

$$x(\pi p_1 o s) \quad \text{und} \quad P(\xi\xi_1 o s),$$

und da Pox in einer Geraden liegen, so liegen diese beiden Strahlbüschel perspectivisch d. h. die Punkte:

$$(x\pi,\ P\xi) \quad (xp_1,\ P\xi_1) \quad \text{und} \quad s$$

liegen in einer Geraden und in gleicher Weise

$$(xp,\ P\xi) \quad (x\pi_1,\ P\xi_1) \quad \text{und} \quad s$$

in einer zweiten Geraden; diese beiden Strahlen sind aber nach dem Vorigen einerseits conjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $K^{(2)}$ und andererseits in Bezug auf $K_1^{(2)}$, folglich für beide Kegelschnitte gleichzeitig conjugirt. In ganz derselben Weise zeigen wir, dass die Punkte:

$$(x\pi,\ Q\xi) \quad (xp_1,\ Q\xi_1) \quad \text{und} \quad s$$

in einer Geraden liegen und andererseits

$$(xp,\ Q\xi) \quad (x\pi_1,\ Q\xi_1) \quad \text{und} \quad s$$

in einer zweiten Geraden liegen, und dass diese beiden Geraden ebenfalls ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf beide Kegelschnitte gleichzeitig sind. Wir haben also durch s zwei Paare conjugirter Geraden in Bezug auf beide Kegelschnitte (auch ist X und xs ein drittes Paar), mithin hat der Punkt s für beide Kegelschnitte dasselbe zugehörige Strahlsystem d. h. ist der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten von $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

In analoger Weise zeigt sich für den Punkt $\sigma = (\xi\eta_1, \xi_1\eta)$, dass sowohl

$$(x\pi, P\xi) \text{ und } (x\pi_1, P\xi_1) \text{ mit } \sigma$$

als auch $(xp, P\xi)$ und $(xp_1, P\xi_1)$ mit σ

in je einer Geraden liegen, sowie auch

$$(x\pi, Q\xi) \text{ und } (x\pi_1, Q\xi_1) \text{ mit } \sigma$$

und $(xp, Q\xi)$ und $(xp_1, Q\xi_1)$ mit σ

in je einer Geraden liegen; also ist auch der Punkt σ ein solcher, dass ihm rücksichtlich beider Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ dasselbe Strahlsystem zugehört.

Endlich ist leicht zu erkennen, dass von den beiden Strahlsystemen (s) und (σ) das erstere hyperbolisch, das letztere elliptisch ist; denn die aus den vier Punkten $p\pi p_1\pi_1$ abgeleiteten drei Punktsysteme:

das elliptische (e), bestimmt durch die Paare $p\pi \quad p_1\pi_1$,
das hyperbolische (h), - - - - $pp_1 \quad \pi\,\pi_1$,
das hyperbolische (h'), - - - - $p\pi_1 \quad \pi\,p_1$,

stehen in der eigenthümlichen Verbindung mit einander, wie sie auf Seite 57 beschrieben ist: wenn zu dem Punkte o

im Strahlsystem (e) der conjugirte $\tilde{\omega}$ ist,
- - (h) - - s - ,
- - (h') - - σ - ,
so sind auch s und σ conjugirte in (e),
- - - σ - $\tilde{\omega}$ - - (h),
- - - $\tilde{\omega}$ - s - - (h'),

und das neue Quadrupel $o\tilde{\omega}s\sigma$ hängt von dem alten $p\pi p_1\pi_1$ ebenso ab, wie umgekehrt letzteres vom ersteren. Da aber s und σ conjugirte Punkte im Strahlsystem (e) sind, so werden s und σ durch p und π von einander getrennt; also da xp und $x\pi$ Tangenten des Kegelschnitts $K^{(2)}$ sind, dessen Berührungssehne $p\pi$ ist, so sind die beiden Strahlsysteme, welche den Punkten s und σ in Bezug auf $K^{(2)}$ zugehören, verschiedener Natur, das eine hyperbolisch, das andere elliptisch. Die Asymptoten des hyperbolischen Strahlsystems sind die beiden reellen gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$.

Sind die beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Kreise, so sind s und σ ihre Aehnlichkeitspunkte, X die Centrale, o der Schnittpunkt der letzteren mit der Potenzlinie und $\tilde{\omega}$ unendlich-entfernt; die hier allgemein ausgesprochene Eigenschaft führt in diesem Fall auf die bekannte Eigenschaft der sogenannten „*gemeinschaftlichen Potenz*“ zweier Kreise*).

Nach dieser vorausgeschickten Auseinandersetzung bemerken wir, dass, wenn es eine Basis geben soll, für welche der Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ die Polarfigur von $K^{(2)}$ ist und also auch umgekehrt, für eine solche Basis die Polare des Punktes p nothwendig durch x gehen und zugleich eine Tangente von $K_1^{(2)}$ sein muss, also entweder xp_1 oder $x\pi_1$, und die Polare von π alsdann die Gerade $x\pi_1$ oder xp_1 ist; da nun x und X gleichzeitig Pol und Polare für die gesuchte Basis sein müssen, wie wir früher erkannt haben, so stellen sich für dieselbe folgende Bedingungen heraus: 1) entweder der Basis gehört das Punktsystem (h) zu, d. h. p und p_1, π und π_1 sind conjugirte Punkte, und da dieses Punktsystem ein hyperbolisches ist, dessen Asymptotenpunkte a und α heissen mögen, so geht die gesuchte Basis durch a und α und hat xa und $x\alpha$ zu ihren Tangenten in diesen Punkten; oder 2) der Basis gehört das Punktsystem (h') zu, d. h. p und π_1, π und p_1 sind conjugirte Punkte in Bezug auf die gesuchte Basis, und da dieses Punktsystem ebenfalls hyperbolisch ist (seine Asymptotenpunkte mögen $a'\alpha'$ heissen), so muss die Basis durch $a'\alpha'$ gehen und xa', $x\alpha'$ zu Tangenten an diesen Punkten haben. Durch diese Bedingungen ist die Basis noch nicht vollkommen bestimmt. Fügen wir aber hinzu, dass für eine reelle Basis die Polare eines Schnittpunktes der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nothwendig eine gemeinschaftliche Tangente derselben sein muss, so ist entweder $\mathfrak{P}$ die Polare von P und $\mathfrak{Q}$ von Q, oder $\mathfrak{Q}$ die Polare von P und $\mathfrak{P}$ von Q; in jedem der beiden Fälle ist also nothwendig s der Pol von PQ, d. h. s und o sind conjugirte Punkte und ebenso σ und $\tilde{\omega}$; hieraus erkennen wir, dass der zweite Fall des Punktsystems (h') keine reelle Basis liefern kann, denn für ihn wären s und $\tilde{\omega}$, σ und o je zwei conjugirte Punkte, was nicht möglich ist. Es bleibt hiernach nur der Fall 1) übrig: das Punktsystem (h) hat o und s, $\tilde{\omega}$ und σ zu conjugirten, a und α zu Asymptotenpunkten; die Punkte o und s liegen also harmonisch zu $a\alpha$ und werden durch diese getrennt. Um nun eine Basis zu erhalten, für welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren von einander sind, müssen entweder P und $\mathfrak{P}$ und gleichzeitig Q und $\mathfrak{Q}$ oder andererseits P und $\mathfrak{Q}$ und gleichzeitig Q und $\mathfrak{P}$ Pol und Polare in Bezug auf die Basis sein; die reelle gemeinschaftliche Secante xo, welche durch P und Q geht, treffe $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in den Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$; dann müssen sowohl P und Q zugeordnet-harmonische Punkte zu x und o

*) *J. Steiner:* Einige geometrische Betrachtungen, *Crelle*'s Journal f. Math. Bd. I. S. 175.

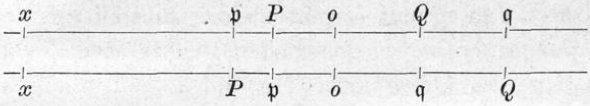
sein, als auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, wie ersichtlich ist; es sind daher x und o die Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems, von dem zwei Paare conjugirter Punkte P und Q, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind; diese vier Punkte bestimmen noch zwei andere Punktsysteme, von denen eines nothwendig elliptisch, das andere hyperbolisch ist; wenn nämlich P und $\mathfrak{p}$, Q und $\mathfrak{q}$ als conjugirte Punkte aufgefasst werden, so sei dies das hyperbolische Punktsystem und habe die Asymptotenpunkte b und β; werden dagegen P und $\mathfrak{q}$, Q und $\mathfrak{p}$ als conjugirte Punkte aufgefasst, so sei dies das elliptische Punktsystem; für beide sind x und o ein Paar conjugirter Punkte, denn da:

$$(PQxo) = -1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}\mathfrak{q}xo) = -1 \text{ ist,}$$

so folgt:

$$(PQxo) = (\mathfrak{p}\mathfrak{q}ox) \quad \text{und auch}$$
$$(PQxo) = (\mathfrak{q}\mathfrak{p}ox);$$

es liegen daher x und o harmonisch zu b und β, und andererseits sind $P\mathfrak{q}$, $Q\mathfrak{p}$, xo drei Paare conjugirter Punkte des elliptischen Punktsystems. Hieraus geht hervor, dass der Kegelschnitt, welcher durch $a\alpha$, $b\beta$ geht und xa, $x\alpha$ zu Tangenten hat, nothwendig die eine Basis, derjenige Kegelschnitt aber, welcher durch $a\alpha$ geht, in diesen Punkten von xa und $x\alpha$ berührt wird und das elliptische Punktsystem, dessen zwei Paare conjugirter Punkte b und β, x und o sind, zu dem ihm zugehörigen hat, die zweite Basis ist, für welche $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ Polarfiguren sind. Durch diese sich nicht widersprechenden Bedingungen sind die beiden reellen Basen vollständig bestimmt, und es bleibt nur nachzuweisen, dass nothwendig die eine von ihnen Ellipse, die andere Hyperbel ist; dies erhellt aus folgender Bemerkung: Ziehen wir $(ab, \alpha\beta) = c$ und $(a\beta, \alpha b) = \gamma$, so liegen c und γ auf xs und werden durch diese Punkte harmonisch getrennt; während die erste Basis durch b und β geht, muss die zweite durch c und γ gehen, und die beiden reellen Basen sind daher harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Da nun auch a und α zu o und s harmonisch liegen, so wird entweder o zwischen und s ausserhalb $a\alpha$ liegen oder umgekehrt; im ersten Falle wird diejenige Basis, welche durch b und β geht, Ellipse, die andere Hyperbel werden, im zweiten Falle umgekehrt; denn wir wissen, dass in dem S. 372 untersuchten Falle B) für die Lage der beiden Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ nothwendig x ausserhalb beider liegen und X beide in reellen Punktpaaren schneiden muss; es werden daher P und Q zwischen sich o und ausserhalb x haben und in gleicher Weise auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, folglich können die vier Punkte $PQ\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ nur auf eine der beiden Arten gelegen sein:



und hieraus folgt, dass die beiden Asymptotenpunkte b und β des durch die Punktpaare P und $\mathfrak{p}$, Q und $\mathfrak{q}$ bestimmten hyperbolischen Punktsystems nothwendig ebenfalls den Punkt o zwischen sich und x ausserhalb haben müssen; der durch x gehende Strahl xo hat also beide Punkte b und β auf derselben Seite von x. Wenn nun xo zwischen a und α hindurchgeht, so ist der durch $b\beta$ gelegte Kegelschnitt, welcher xa und $x\alpha$ in a und α berührt, nothwendig Ellipse und der andere Kegelschnitt, welcher durch c und γ geht und xa und $x\alpha$ in a und α berührt, Hyperbel; wenn dagegen xo ausserhalb $a\alpha$ diese Gerade X trifft, so geht xs zwischen $a\alpha$ hindurch, und der durch $a\alpha c\gamma$ gelegte Kegelschnitt wird Ellipse, der durch $a\alpha b\beta$ gelegte Hyperbel; einer von beiden Fällen kann aber nur eintreten; von den beiden reellen Basen ist daher immer eine Ellipse, die andere Hyperbel; der oben ausgesprochene Satz ist dadurch vollständig erwiesen.

Aufgaben und Sätze.

1. Sind in der Ebene eine Punktreihe $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$ und ein mit derselben projectivisches Strahlbüschel $B\,(abc\ldots x\ldots)$ in fester Lage gegeben, und dreht sich um einen festen Punkt P eine veränderliche Gerade $\mathfrak{A}_1$, welche von dem Strahlbüschel in der Punktreihe $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots$ geschnitten wird, so erzeugen die beiden projectivischen Punktreihen $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots)$ und $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots)$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$. Die sämmtlichen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ bilden eine Schaar, deren Eigenschaften untersucht werden sollen.
2. Es sollen folgende drei Gruppen von Kegelschnitten:
   α) alle Kegelschnitte, welche gleichzeitig durch einen gegebenen Punkt P gehen, eine gegebene Gerade $\mathfrak{L}$ berühren und denen ein gegebenes Strahlsystem $B\,(l,\,\lambda)$ zugehört;
   β) alle Kegelschnitte, welche gleichzeitig eine gegebene Gerade $\mathfrak{L}$ berühren, durch einen gegebenen Punkt P gehen und denen ein gegebenes Punktsystem $\mathfrak{A}\,(p,\,\pi)$ zugehört;
   γ) alle Kegelschnitte, denen gleichzeitig ein gegebenes Strahlsystem $B\,(l,\,\lambda)$ und ein gegebenes Punktsystem $\mathfrak{A}\,(p,\,\pi)$ zugehört,

einer Untersuchung unterzogen werden hinsichtlich der verschiedenen Gattungen der Kegelschnitte, welche bei ihnen auftreten, hinsichtlich des Ortes ihrer Mittelpunkte, Brennpunkte, Axen, Asymptoten und hinsichtlich der Polaritäts-Beziehungen, welche sie darbieten. Die Punkt- und Strahl-Systeme $\mathfrak{A}\ (p,\ \pi)$ und $B\ (l,\ \lambda)$ können hyperbolisch oder elliptisch angenommen werden.

3. Sind zwei Punkte P^0, Π^0 und ein Dreieck ABC gegeben, so kann man $A\,B\,C$ als die Mittelpunkte dreier Strahlsysteme annehmen, welche so hergestellt werden:

Wir bezeichnen in doppeltem Sinne:

die Seite AB durch a und β,
- - BC - γb - ,
- - CA - c - α;

ferner die Strahlen $P^0A = x^0$, $\Pi^0 A = \xi^0$,
$P^0B = y^0$, $\Pi^0 B = \eta^0$,
$P^0C = z^0$, $\Pi^0 C = \zeta^0$,

alsdann bestimmen die Strahlenpaare $a\alpha$ und $x^0\,\xi^0$ das Strahlsystem in (A),
ebenso - - - $b\beta$ - $y^0\eta^0$ - - - (B),
endlich - - - $c\gamma$ - $z^0\zeta^0$ - - - (C),

und diese drei Strahlsysteme sind in der Weise von einander abhängig, dass, wenn irgend ein Punkt P der Ebene mit ABC verbunden die drei Strahlen $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$ liefert, die drei conjugirten Strahlen $\xi\eta\zeta$ in jenen drei Strahlsystemen sich allemal in einem correspondirenden Punkte Π treffen. Hierdurch wird eine Verwandtschaft der beiden mit den Punkten P und Π erfüllten Ebenen hergestellt, deren Natur und Eigenschaften untersucht werde. Auch sind irgend drei Strahlenpaare jener drei Strahlsysteme allemal sechs Tangenten eines Kegelschnitts. Wie hängen alle solche Kegelschnitte in der Ebene mit einander zusammen?

Die drei Strahlsysteme lassen sich zu je zweien auf drei Arten zusammenfassen; alle Kegelschnitte, welche zwei gegebene Strahlsysteme zu den ihnen zugehörigen haben, bilden eine Kegelschnittschaar, und die drei dadurch erhaltenen Schaaren heissen *conjugirte Kegelschnittschaaren;* ihr Zusammenhang und ihre Eigenschaften sollen aufgesucht werden (vgl. §. 51).

4. Wenn zwei gegebene projectivische Strahlbüschel (B) und (B_1) in ihrer Beziehung unverändert bleiben und das eine (B) auch seine Lage unverändert beibehält, während das andere (B_1) sich continuirlich um den festgehaltenen Mittelpunkt dreht, so ver-

ändert sich der von (B) und (B_1) erzeugte Kegelschnitt $K^{(2)}$ und beschreibt eine Kegelschnittgruppe (§. 25). Die Bedingungen, denen die Kegelschnitte dieser Gruppe unterworfen sind, und die Eigenschaften derselben sollen aufgesucht werden.

5. Auf zwei gegebenen Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ werden durch ein beliebiges Strahlbüschel (B) mit dem Mittelpunkte B zwei perspectivisch liegende, also projectivische Punktreihen ausgeschnitten. Ist eine solche projectivische Beziehung durch den Punkt B hergestellt und werden die beiden Punktreihen auf ihren festgehaltenen Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ um zwei der Grösse und Richtung nach gegebene Strecken (Schiebstrecken) verschoben, so erzeugen sie nach der Verschiebung im Allgemeinen einen Kegelschnitt. Es wird gefragt:
   1) Wo muss der Punkt B liegen, damit nach der gegebenen Verschiebung der entstehende Kegelschnitt ein Kreis wird?
   2) Welches ist der Ort des Punktes B, damit nach der gegebenen Verschiebung der entstehende Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel wird?
6. Welches ist der Ort sämmtlicher Asymptoten der Kegelschnitte einer Schaar von vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten?
7. Unter den einem gegebenen Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitten (Kegelschnittschaar) haben je drei gleichen Inhalt d. h. gleiches Axenproduct; es giebt unter denselben zwei, eine Ellipse und eine Hyperbel, welchen ein Maximum des Axenproductes zukommt. Wie sind die Mittelpunkte dieser beiden Kegelschnitte zu finden?
8. Unter den einem gegebenen Viereck umschriebenen Kegelschnitten (Kegelschnittbüschel) haben im Allgemeinen je sechs gleichen Inhalt d. h. gleiches Axenproduct. Es giebt unter denselben drei solche, deren Axenproducte relative Maxima oder Minima sind, und zwar sind dieselben je nach der Beschaffenheit des gegebenen Vierecks entweder alle drei Hyperbeln, deren Axenproducte Maxima sind, oder eine Ellipse, deren Inhalt ein Minimum, und zwei Hyperbeln, deren Axenproducte Maxima sind. Die Mittelpunkte dieser drei ausgezeichneten Kegelschnitte zu finden.
9. Die Axen aller einem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Parabeln umhüllen eine specielle Curve dritter Klasse und vierten Grades, welche die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ zur ideellen Doppeltangente und drei Rückkehrpunkte hat; nämlich die Curve

ist eine bestimmte dreibogige oder dreispitzige Hypocycloide; ihre drei Rückkehrtangenten treffen sich im Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises unter gleichen Winkeln ($= 120^0$) und sind gleich lang und zwar dem dreifachen Radius des Kreises gleich; die drei Rückkehrpunkte liegen daher auf einem mit dem letztern concentrischen Kreise; derselbe ist die Basis der Hypocycloide, und der sie erzeugende rollende Kreis ist dem erstgenannten Kreise gleich.

10. Wie müssen zwei Kegelschnitte zu einander gelegen sein, damit jedem derselben solche Dreiecke umschrieben werden können, welche zugleich dem andern einbeschrieben sind?

11. Einen Kegelschnitt zu finden, welcher zwei gegebene Kegelschnitte doppelt berührt und ausserdem entweder a) eine gegebene Gerade berührt oder b) durch einen gegebenen Punkt geht.

12. Einen Kegelschnitt zu finden, welcher einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berührt und ausserdem entweder a) drei gegebene Gerade berührt, oder b) zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, oder c) eine gegebene Gerade berührt und durch zwei gegebene Punkte geht, oder d) durch drei gegebene Punkte geht.

13. Eine Gerade, welche in zwei gegebenen festen Kreisen solche Sehnen ausschneidet, deren Verhältniss irgend einen gegebenen constanten Werth k hat, umhüllt einen bestimmten Kegelschnitt; lässt man den Werth k nach einander alle Grössen durchlaufen, so erhält man eine Kegelschnittschaar von vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten, und zwar gehören die gegebenen Kreise selbst zu dieser Schaar, indem sie den Werthen $k = 0$ und $k = \infty$ entsprechen; dem Werthe $k = 1$ entspricht die einzige Parabel der Schaar.

14. Wenn man in einen beliebigen Peripheriepunkt P eines Kegelschnitts den Mittelpunkt eines Strahlsystems hineinverlegt, so durchbohren die Strahlenpaare desselben den Kegelschnitt in Punktpaaren, deren Sehnen durch einen festen Punkt O (Sehnenpol) laufen (S. 152). Nimmt man insbesondere für das Strahlsystem ein circulares (d. h. die Schenkel aller rechten Winkel mit dem gemeinsamen Scheitel P), so gehört zu dem Punkte P ein bestimmter Punkt O. Welches ist der Ort von O, während P die ganze Peripherie des Kegelschnitts durchläuft? Der Punkt O liegt offenbar auf der Normale des Punktes P für den gegebenen Kegelschnitt. Giebt es solche besondere Punkte P, für

welche O der Krümmungsmittelpunkt wird, und wie findet man diese?

15. Für sämmtliche Parabeln, welche ein gegebenes Dreieck zu einem Tripel conjugirter Punkte haben, gehen die Leitlinien durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises; der Ort der Brennpunkte ist derjenige Kreis, welcher durch die Mitten der Seiten und die Fusspunkte der Höhen des gegebenen Dreiecks geht. (*Feuerbach*'scher Kreis.)

16. Wie viel Kegelschnitte einer Schaar (und eines Büschels) haben eine gegebene Gerade zur Normale, und wie findet man sie?

17. Sind zwei projectivische Punktreihen $\mathfrak{A}(\mathfrak{abc}..\mathfrak{x}..)$ und $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1..\mathfrak{x}_1..)$ gegeben, und bewegen sich zwei veränderliche Punkte x und x_1 so, dass sie auf zwei andern geraden Trägern $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ zwei projectivische Punktreihen beschreiben, dann erzeugen die beiden Strahlbüschel:

$$x(\mathfrak{abc}\ldots\mathfrak{x}..) \quad \text{und} \quad x_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1..)$$

allemal einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher sich verändert mit der Veränderung der Mittelpunkte xx_1 der erzeugenden Strahlbüschel Welchen Bedingungen ist die dadurch erhaltene Gruppe von Kegelschnitten unterworfen, und welcher Art sind die in ihr enthaltenen Kegelschnitte? Wie vereinfacht sich die Kegelschnittgruppe, wenn die von x und x_1 beschriebenen Punktreihen perspectivisch liegen?

18. Wenn man ein Kegelschnittbüschel hat und verlegt in einen der vier Grundpunkte desselben den Mittelpunkt eines beliebigen Strahlsystems, so bestimmt dieses für jeden Kegelschnitt des Büschels einen gewissen Punkt O (Sehnenpol), durch welchen die sämmtlichen Durchbohrungssehnen für jedes Strahlenpaar des Strahlsystems gehen. Welches ist der Ort des Punktes O für alle Kegelschnitte des Büschels?

19. Legt man durch den Mittelpunkt eines beliebigen Strahlsystems $(x, \mathfrak{x})$ zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, so durchbohrt jedes Strahlenpaar $x\mathfrak{x}$ den ersten Kegelschnitt in einem Punktpaar, dessen Sehne durch einen festen Punkt P läuft und ein Strahlbüschel (P) beschreibt; in gleicher Weise erhält man für den zweiten Kegelschnitt ein Strahlbüschel (P_1). Die beiden Strahlbüschel (P) und (P_1) sind projectivisch und erzeugen einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher durch die drei übrigen gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$, aber nicht durch den Mittelpunkt des Strahlsystems hindurchgeht. Bezeichnet man

die Schnittpunkte irgend eines Strahlenpaares des gegebenen Strahlsystems mit dem Kegelschnitte $K^{(2)}$ durch $\alpha\beta$ und mit dem Kegelschnitte $K_1^{(2)}$ durch $\alpha_1\beta_1$; so laufen $\alpha\beta$ durch P und $\alpha_1\beta_1$ durch P_1; die vier Schnittpunkte lassen sich aber noch durch zwei andere Linienpaare verbinden: $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$. Welchen Ort umhüllen diese Geraden bei der Veränderung des Strahlenpaares in dem gegebenen Strahlsystem?

20. Es sind fünf Gerade als Träger von fünf bestimmten Punktsystemen gegeben; es soll ein Kegelschnitt gefunden werden, welcher jede Gerade in einem Paare conjugirter Punkte des auf ihr gegebenen Punktsystems trifft.

21. Es giebt vier Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck umschrieben sind und zugleich zwei gegebene Gerade $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ berühren. Die sechs übrigen Schnittpunkte dieser vier Kegelschnitte liegen paarweise auf drei Geraden, welche durch den Schnittpunkt $(\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1)$ hindurchgehen.

22. Es giebt unendlich-viele Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck umschrieben sind und eine gegebene Gerade $\mathfrak{L}$ berühren. Wenn man vier Kegelschnitte dieser Gruppe festhält und einen fünften verändert, so bestimmen die ersteren vier Durchschnittspunkte auf dem letzteren, deren Doppelverhältniss von constantem Werthe ist, nämlich gleich dem der vier Berührungspunkte der vier festen Kegelschnitte mit der Geraden $\mathfrak{L}$.

23. Sind $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zwei Kegelschnitte, welche einem Dreieck ABC umschrieben sind und eine Gerade $\mathfrak{L}$ berühren, und ist $K^{(2)}$ derjenige Kegelschnitt, welcher durch ABC und die beiden Berührungspunkte gelegt werden kann, so werden die Tangenten von $K^{(2)}$ in den Punkten ABC die Gerade $\mathfrak{L}$ in denjenigen drei Punkten treffen, in welchen dieselbe von den übrigen drei gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ getroffen wird.

24. Die beiden Kegelschnitte, welche vier Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt P gehen, sind, wenn sie reell sind, beide Ellipsen oder beide Hyperbeln, sobald der Punkt P ausserhalb derjenigen Parabel liegt, welche die vier gegebenen Geraden berührt; dagegen ist einer der Kegelschnitte Ellipse und der andere Hyperbel, sobald der Punkt P innerhalb jener Parabel liegt.

25. Sind in der Ebene eines Dreiecks ABC zwei beliebige Gerade $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ gegeben, so bestimmen auf jeder Dreiecksseite die beiden

Ecken und die beiden Schnittpunkte mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ als zwei Paare conjugirter Punkte aufgefasst, ein gewisses Punktsystem. Diese drei Punktsysteme auf den Dreiecksseiten sind entweder 1) alle drei hyperbolisch, oder 2) es ist eines hyperbolisch und die beiden andern sind elliptisch. Wie lässt sich aus der Lage der gegebenen Stücke der Figur das Eintreten des einen oder des andern Falles entscheiden? Im ersten Falle liegen die sechs Asymptotenpunkte der drei hyperbolischen Punktsysteme zu je dreien auf vier Geraden und bilden die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonaldreieck das gegebene Dreieck ABC ist. Seien s und t die Asymptotenpunkte eines dieser drei Punktsysteme (und eines muss immer hyperbolisch sein); drehen wir um s einen beliebigen Strahl, welcher in a und b die beiden andern Dreiecksseiten trifft, und sind α und β die conjugirten Punkte in den auf diesen Seiten befindlichen Punktsystemen, so muss auch $\alpha\beta$ durch s gehen. Welchen Ort umhüllen aber $a\beta$ und $b\alpha$?

26. Welchen Ort wird eine veränderliche Gerade $\mathfrak{L}$ umhüllen, welche zwei gegebene Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1^{(2)}$ beziehlich in zwei solchen Punktpaaren s und t, s_1 und t_1 trifft, dass das Doppelverhältniss:

$$(s\,t\,s_1\,t_1)$$

einen gegebenen constanten Werth k hat? Wie vereinfacht sich der gefundene Ort, wenn $k = -1$ ist?

27. Wenn man drei Polardreiecke in Bezug auf einen Kegelschnitt hat, so liegen die sechs Ecken je zweier derselben auf einem neuen Kegelschnitt; in welchem Zusammenhange stehen die auf diese Weise erhaltenen drei neuen Kegelschnitte mit einander?

28. Gegeben sei ein Dreieck ABC und zwei beliebige Punkte PQ; die Verbindungslinie PQ treffe die Dreiecksseiten BC, CA, AB in Punkten, deren zugeordnete vierte harmonische Punkte $A_1B_1C_1$ seien; alsdann lassen sich durch die beiden Punkte P und Q drei Kegelschnitte legen, von denen der erste durch ABC, der zweite durch $A_1B_1C_1$ gehe und der dritte das gegebene Dreieck ABC zum Polardreieck habe. Diese drei Kegelschnitte gehören einem und demselben Büschel an, d. h. gehen ausser durch P und Q durch dieselben beiden (reellen oder imaginären) Punkte, deren (stets reelle) Verbindungslinie construirt werde.

29. Wenn zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ so liegen, dass es einmal ein Dreieck giebt, welches gleichzeitig dem $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein- und dem

$\mathfrak{K}_1^{(2)}$ umbeschrieben ist, so giebt es bekanntlich unzählig viele solcher Dreiecke xyz. Nimmt man irgend drei Punkte ABC des Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$, so berühren die sechs Seiten der beiden Dreiecke ABC und xyz einen Kegelschnitt $K^{(2)}$, welcher bei der Veränderung des Dreiecks xyz eine Kegelschnittschaar durchläuft d. h. beständig ausser den Dreiecksseiten BC, CA, AB noch eine feste Gerade berührt, die zugleich eine Tangente von $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ ist.

30. Durch einen gegebenen Punkt P in der Ebene eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ gehen im Allgemeinen vier solche Sehnen desselben, die eine gegebene Länge l haben. Die Mitten dieser vier Sehnen liegen allemal auf einem Kreise. Wie verändert sich der Kreis, wenn bei festgehaltenem Punkte P die Länge l variirt? Man kann an Stelle der Entfernung der beiden Schnittpunkte eines Strahles mit einem Kegelschnitt die Potenz desjenigen Punktsystems einführen, welches dem Strahl in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, und sich allgemeiner die folgende Frage stellen:

31. Wenn sich ein Strahl in der Ebene eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^{(2)}$ um einen festen Punkt P dreht, wie verändert sich die Potenz desjenigen Punktsystems, welches dem Strahle in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört? Wie oft und wann erreicht diese Potenz ein relatives Maximum oder Minimum?

32. Wenn man von den Punkten a eines Kegelschnitts $A^{(2)}$ in Bezug auf einen Basis-Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Polaren construirt, so umhüllt die Polare $\mathfrak{B}$ des Punktes a in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ einen Kegelschnitt $B^{(2)}$, welcher in dem Punkte b von der Geraden $\mathfrak{B}$ berührt wird; die Polare $\mathfrak{A}$ des Punktes b in Bezug auf $\mathfrak{K}^{(2)}$ ist die Tangente $\mathfrak{A}$ im Punkte a am Kegelschnitt $A^{(2)}$. Bezeichnen wir die Verbindungslinie $(ab) = X$ und den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = x$, welche Ortscurven werden bei der Veränderung von a auf $A^{(2)}$ die Gerade X und der Punkt x beschreiben? Und in welchem Zusammenhange stehen dieselben mit einander und mit den Kegelschnitten $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$?

33. Welches ist der Ort der Berührungspunkte sämmtlicher Tangentenpaare aus einem festen Punkte P an die Kegelschnitte einer gegebenen Schaar und eines gegebenen Büschels? In welchem Zusammenhange stehen drei solche Ortscurven, welche bei drei conjugirten Kegelschnittbüscheln (§. 51) auftreten?