Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie

Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften - auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's

Steiner, Jacob

1876

Erster Abschnitt. Projectivistische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüscher auf einander

urn:nbn:at:at-ubi:2-3695

Erster Abschnitt.

Projectivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander.

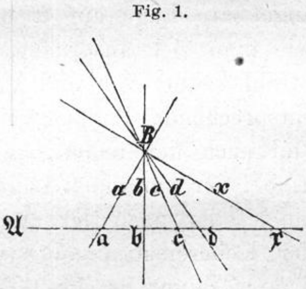
---

§. 1. Grundgebilde.

Die sämmtlichen auf einander folgenden Punkte einer (unendlich langen) geraden Linie nennt man eine *gerade Punktreihe* oder schlechtweg Punktreihe, wenn nur von geraden Punktreihen die Rede ist. Die Gerade selbst, deren Punkte aufgefasst werden, soll der *Träger* der Punktreihe heissen. Die sämmtlichen durch einen Punkt in einer Ebene gehenden Strahlen (unendlich lange gerade Linien) nennt man ein *ebenes Strahlbüschel* oder schlechtweg Strahlbüschel, wenn nur von ebenen Strahlbüscheln die Rede ist. Der Punkt, durch welchen sämmtliche Strahlen gehen, heisst der *Mittelpunkt* des Strahlbüschels. Die Punkte der Punktreihe und die Strahlen des Strahlbüschels heissen *Elemente* dieser *geometrischen Gebilde.*

§. 2. Projectivische Beziehung der Grundgebilde auf einander.

Fig. 1.



Diese beiden einfachsten geometrischen Gebilde (Punktreihe und Strahlbüschel) sind von gleicher Mächtigkeit und einfacher Unendlichkeit, d. h. es giebt ebenso viel Punkte auf einer Geraden, als Strahlen durch einen Punkt. Dies erkennen wir, indem wir die beiden Gebilde zu einander in Beziehung setzen. Sämmtliche durch einen Punkt B, den Mittelpunkt eines Strahlbüschels gehende Strahlen $a, b, c, d \ldots x \ldots$ treffen eine beliebige (nicht durch B gehende) Gerade $\mathfrak{A}$ in den gleichnamigen Punkten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d} \ldots \mathfrak{x} \ldots$ (Fig. 1) und stellen eine derartige Beziehung zwischen den Elementen beider Gebilde her, dass jeder Strahl des Strahlbüschels durch den gleichnamigen Punkt der Punktreihe geht und umgekehrt jeder Punkt der Punktreihe auf dem gleichnamigen Strahl des Strahlbüschels liegt. Zwei solche zusammenliegende Elemente heissen *entsprechende Elemente* und diese Lage der beiden Gebilde, bei welcher jeder Strahl des Strahlbüschels durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe geht, nennt man die *perspectivische Lage.* Die durch die perspectivische Lage beider Gebilde hergestellte eindeutige Beziehung der Elemente auf einander kann nun festgehalten werden, während die perspectivische Lage aufgehoben wird (etwa dadurch, dass das Strahlbüschel B und die Punktreihe $\mathfrak{A}$ beliebig in der Ebene verschoben werden), aber die entsprechenden Elemente in irgend einer Weise, z. B. durch Bezeichnung mit gleichlautenden Buchstaben, fixirt werden. Die auf diese Art von der perspectivischen Lage unabhängig gemachte eindeutige Beziehung der Elemente beider Gebilde auf einander heisst *projectivische Beziehung,* und die Gebilde selbst heissen *projectivisch,* wenn ihre entsprechenden Elemente so liegen, dass jene in perspectivische Lage gebracht werden können.

§. 3. Unendlich-entfernter Punkt der Punktreihe und Parallelstrahl des Strahlbüschels.

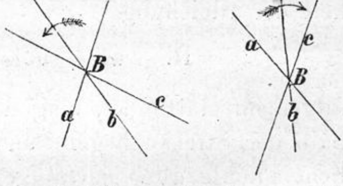
Die Zusammengehörigkeit entsprechender Elemente lässt sich bei der perspectivischen Lage der beiden Grundgebilde auch so auffassen, dass man einen veränderlichen Strahl x des Strahlbüschels um den Mittelpunkt B dreht, wodurch sein Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ mit dem Träger $\mathfrak{A}$ auf demselben fortrückt. Dabei tritt nun einmal der besondere Fall ein, dass der Strahl x in parallele Lage zu dem Träger $\mathfrak{A}$ gelangt und dadurch der Schnittpunkt $\mathfrak{x}$, welcher sonst immer eine bestimmte angebbare Lage auf $\mathfrak{A}$ hatte, der Wahrnehmung entschwindet oder, wie man sich ausdrückt, ins Unendliche rückt. Betrachten wir den Strahl x kurz vor und kurz nach dieser parallelen Lage, so wird der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}$ einmal nach der einen Seite und das andere Mal nach der andern Seite hin sehr weit entfernt liegen, während es bei der parallelen Lage selbst unentschieden bleibt, ob er nach der einen oder nach der andern Seite hin liegt. Trotzdem nehmen wir der Uebereinstimmung wegen an, dass auch der *Parallelstrahl* den Träger $\mathfrak{A}$ nur in *einem* Punkte treffe, und nennen diesen (obwohl er sich der Wahrnehmung entzieht) *den unendlich-entfernten Punkt* der Punktreihe, den wir uns sowohl nach der einen Seite als auch nach der andern Seite hin liegend vorstellen können. Der unendlich-entfernte Punkt der Geraden $\mathfrak{A}$ ist ein ausgezeichneter und bei Verrückung derselben unveränderlicher Punkt, welcher die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass jeder nach ihm hingehende Strahl mit der Geraden parallel ist.

Der unendlich entfernte Punkt verbindet gewissermassen die nach entgegengesetzten Seiten hin verlaufenden Enden der geraden Linie und stellt eine Continuität her entsprechend der continuirlichen Drehung des Strahles im Strahlbüschel.

§. 4. Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge der Strahlen des Strahlbüschels mit den entsprechenden Punkten der Punktreihe.

Aus der eben betrachteten zusammengehörigen Bewegung: der Drehung des Strahles x um B und dem Fortrücken des entsprechenden Punktes $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{A}$ ergiebt sich zugleich eine Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente oder des Drehungssinnes mit dem Richtungssinn. Der Strahl x kann sich um den Mittelpunkt B entweder in dem einen oder entgegengesetzten Drehungssinne herumbewegen (↷ ↶ entweder wie der Zeiger einer Uhr, auf welche man sieht, oder entgegengesetzt); dem entsprechend muss der Punkt $\mathfrak{x}$ entweder in dem einen (von rechts nach links) oder in dem entgegengesetzten Richtungssinne (von links nach rechts) auf dem Träger $\mathfrak{A}$ fortrücken. Sind a und b zwei besondere Lagen des sich drehenden Strahles x, so kann x auf doppelte Weise aus der Lage a in die Lage b übergeführt werden, entweder in dem einen oder entgegengesetzten Drehungssinne. Diese Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen abc annehmen und verlangen, der veränderliche Strahl solle von a durch b nach c gelangen (ohne indessen, während er sich von a nach b bewegt, in die Lage von c gekommen zu sein). Durch die Aufeinanderfolge abc ist der Drehungssinn von x mitbestimmt (Fig. 2).

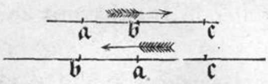
Fig. 2.



Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei besondere Lagen des fortrückenden Punktes $\mathfrak{x}$, so kann $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ auf doppelte Weise gelangen, entweder direct oder durch den unendlich-entfernten Punkt (§ 3). Diese beiden Wege haben entgegengesetzten Richtungssinn. Die Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen $\mathfrak{abc}$ annehmen und festsetzen, der Punkt $\mathfrak{x}$ solle von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{c}$ gelangen (ohne auf dem Wege von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ die Lage $\mathfrak{c}$ eingenommen zu haben); durch die Aufeinanderfolge $\mathfrak{abc}$ ist der Richtungssinn von

$\mathfrak{x}$ mitbestimmt (Fig. 3). Da nun abc und $\mathfrak{abc}$ entsprechende Elemente der beiden projectivischen Gebilde sind, so wird, sobald durch die Aufeinanderfolge abc der Drehungssinn des Strahlbüschels festgestellt ist, durch die zugehörige Aufeinanderfolge $\mathfrak{abc}$ der Richtungssinn der Punktreihe unzweideutig mitbestimmt, und nehmen wir im Strahlbüschel den entgegengesetzten Drehungssinn durch die Aufeinanderfolge acb, so wird durch die Aufeinanderfolge $\mathfrak{acb}$ auch der zugehörige Richtungssinn in der Punktreihe entgegengesetzt. Durch diese Bemerkung wird später jede Zweideutigkeit hinsichtlich der Lage entsprechender Elemente aufgehoben.

Fig. 3.



§. 5. Doppelverhältniss. (Anharmonische Function.)

Um die gegenseitige Abhängigkeit der Elemente der beiden Grundgebilde, welche durch die perspectivische Lage derselben hervorgerufen wird, unabhängig von letzterer darzustellen, suchen wir Beziehungen auf zwischen den Abständen beliebiger Punkte der Punktreihe und den Winkeln, welche die entsprechenden Strahlen mit einander bilden, solchergestalt, dass diese Beziehungen von der Lage der beiden Gebilde zu einander unabhängig sind.

Seien $\mathfrak{abcd}\ldots$ beliebige Punkte der Punktreihe $\mathfrak{A}$, so soll nach dem Vorgange von *Möbius* durch die Nebeneinanderstellung der Buchstaben

$$\mathfrak{ab}$$

nicht allein die Strecke zwischen den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (ihr Abstand) bezeichnet werden, sondern auch der Richtungssinn, in welchem die Strecke von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ hin auf *directem* Wege durchlaufen wird, so dass also

$$\text{I.}\quad \mathfrak{ab} + \mathfrak{ba} = 0\,,\ \text{d. h. } \mathfrak{ba} = -\,\mathfrak{ab}$$

ist, wonach dann für irgend drei Punkte $\mathfrak{abc}$ der Geraden die Gültigkeit der Gleichung

$$\text{II.}\quad \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{ac} \text{ oder } \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} = 0$$

allgemein stattfindet, mag der Punkt $\mathfrak{c}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ oder ausserhalb der Strecke liegen, und für irgend vier auf der Geraden befindliche Punkte $\mathfrak{abcd}$ nachfolgende Beziehungen gelten, die wir anführen, weil wir später von ihnen Gebrauch machen werden; da nämlich

$$\begin{array}{l} \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{ac} \\ \underline{\mathfrak{ad} \quad\ = \mathfrak{ab} + \mathfrak{bd}\,,} \end{array}$$

so folgt:

$$\mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{ad} + \mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{ad} = \mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{bd}$$

$$\mathfrak{ab}\,\{\mathfrak{ad} - \mathfrak{ac}\} = \mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{bd} - \mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{ad}$$

$$\text{III.}\qquad \mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{cd} + \mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{ad} + \mathfrak{ca}\,.\,\mathfrak{bd} = 0,$$

oder auch so geschrieben: $\dfrac{\mathfrak{da}}{\mathfrak{ba}\,.\,\mathfrak{ca}} + \dfrac{\mathfrak{db}}{\mathfrak{cb}\,.\,\mathfrak{ab}} + \dfrac{\mathfrak{dc}}{\mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{bc}} = 0\,.$

Eine weitere Beziehung zwischen vier Punkten einer Geraden folgt aus den beiden vorigen; da

$$\begin{array}{l} \mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{cd} = \mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{bd} + \mathfrak{cb}\,.\,\mathfrak{ad} \\ \underline{\mathfrak{bc} + \mathfrak{cd} = \qquad \mathfrak{bd}\qquad\qquad} \end{array}$$

$$\mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{cd} + \mathfrak{ab}\,.\,(\mathfrak{cd})^2 = \mathfrak{ac}\,.\,(\mathfrak{bd})^2 + \mathfrak{ad}\,.\,\mathfrak{db}\,.\,\mathfrak{bc},$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{ab}\,.\,(\mathfrak{cd})^2 + \mathfrak{ca}\,(\mathfrak{bd})^2 &= \mathfrak{bc}\,\{\mathfrak{ad}\,.\,\mathfrak{db} + \mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{dc}\} \\ &= \mathfrak{bc}\,\{\mathfrak{ad}\,(\mathfrak{da} + \mathfrak{ab}) + \mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{dc}\} \\ &= \mathfrak{cb}\,.\,(\mathfrak{ad})^2 + \mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{ac}, \end{aligned}$$

oder

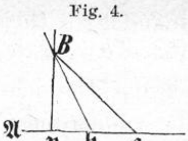
$$\text{IV.}\qquad \frac{(\mathfrak{da})^2}{\mathfrak{ba}\,.\,\mathfrak{ca}} + \frac{(\mathfrak{db})^2}{\mathfrak{cb}\,.\,\mathfrak{ab}} + \frac{(\mathfrak{dc})^2}{\mathfrak{ac}\,.\,\mathfrak{bc}} = 1\,.$$

Seien nun $abcd\ldots$ die entsprechenden Strahlen des mit der Punktreihe $\mathfrak{abcd}\ldots$ perspectivisch liegenden Strahlbüschels B, und bezeichne

$$(ab)$$

den Winkel zwischen den beiden Strahlen a und b von einem veränderlichen Strahl x in demjenigen Drehungssinne von a nach b hin beschrieben, welcher übereinstimmt mit dem Richtungssinne der Strecke $\mathfrak{ab}$ (§. 4), dann lassen sich leicht Beziehungen ermitteln zwischen den Winkeln des Strahlbüschels und den entsprechenden Abschnitten auf der Punktreihe, indem man nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie die Fläche des Dreiecks $B\mathfrak{ab}$ auf doppelte Weise ausdrückt; das aus B auf $\mathfrak{A}$ gefällte Perpendikel treffe in $\mathfrak{p}$, dann wird

Fig. 4.



$$B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{b}\,.\,\sin(ab) = B\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{ab},$$

oder

$$1)\qquad \frac{\mathfrak{ab}}{\sin(ab)} = \frac{B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{b}}{B\mathfrak{p}}.$$

Nimmt man ein drittes Paar c und $\mathfrak{c}$ entsprechender Elemente hinzu, so treten in gleicher Weise zwei neue Relationen hinzu:

$$2)\qquad \frac{\mathfrak{ac}}{\sin(ac)} = \frac{B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}\,;\quad \frac{\mathfrak{bc}}{\sin(bc)} = \frac{B\mathfrak{b}\,.\,B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}.$$

Nur die rechten Seiten dieser Beziehungen enthalten Stücke, welche von der perspectivischen Lage beider Gebilde abhängen, während die linken Seiten frei davon sind; es gelingt aber nicht, aus diesen drei Gleichungen 1) und 2) jene Stücke zu eliminiren; wir ziehen daher noch ein viertes Paar entsprechender Elemente d und $\mathfrak{d}$ in die Betrachtung und erhalten drei neue Relationen:

$$3)\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}\,;\quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\sin(bd)} = \frac{B\mathfrak{b}\,.\,B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}\,;\quad \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\sin(cd)} = \frac{B\mathfrak{c}\,.\,B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}\,.$$

Aus diesen 6 Relationen 1) 2) 3) können wir nun in mehrfacher Weise andere ableiten, die unabhängig sind von den Stücken $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$, $B\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{p}$, also bestehen bleiben, wenn die perspectivische Lage aufgehoben wird; es folgt nämlich u. a. die Beziehung:

$$4)\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}\,,$$

und, wenn wir in irgend einer Weise die vier Punkte $\mathfrak{abcd}$, in derselben Weise aber auch $abcd$ permutiren, so ergeben sich ähnliche Relationen.

Der Ausdruck $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$, welchen wir der Kürze wegen mit

$$(\mathfrak{abcd})$$

bezeichnen wollen, heisst das *Doppelverhältniss* (oder das anharmonische Verhältniss, die anharmonische Function) von vier Punkten, und um die Bildungsweise desselben leichter zu übersehen, nennen wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Paar *zugeordneter* Punkte, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ das andere Paar zugeordneter Punkte; dann sind zur Bildung des Doppelverhältnisses die einfachen Verhältnisse der Abstände jedes Punktes des einen Paares zugeordneter Punkte von den beiden Punkten des anderen Paares: $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ und $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ durch einander zu theilen; welche von den vier Punkten übrigens auf diese Weise einander zugeordnet werden, ist an sich gleichgültig, nur sollen bei der Bezeichnung $(\mathfrak{abcd})$ die beiden ersten und die beiden letzten als zugeordnete Punktenpaare festgehalten werden. Ebenso heisst der Ausdruck:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}\,,$$

welchen wir mit $(abcd)$ bezeichnen, das Doppelverhältniss von vier Strahlen des Strahlbüschels, und es werden dabei ebenfalls a und b, c und d als zugeordnete aufgefasst.

Die gefundene Beziehung (4) sagt also aus:

Bei zwei projectivischen Gebilden: einer Punktreihe und einem Strahlbüschel findet zwischen irgend vier entsprechenden Elementenpaaren $\mathfrak{abcd}$ *und* $abcd$ *immer die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:*

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd)\,.$$

§. 6. Verschiedene Werthe eines Doppelverhältnisses durch Vertauschung der Elemente.

Ehe wir aus dem gefundenen Resultat Folgerungen ziehen, wollen wir untersuchen, in welchem Zusammenhange die 24 Werthe des Doppelverhältnisses mit einander stehen, welche wir erhalten, wenn wir die Elemente desselben auf alle möglichen Arten unter einander vertauschen. Sei der Werth des Doppelverhältnisses:

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = (\mathfrak{abcd}) = k,$$

so erkennen wir zunächst aus der Bildungsweise desselben, dass

$$1). \quad (\mathfrak{ab\,cd}) = (\mathfrak{badc}) = (\mathfrak{cd\,ab}) = (\mathfrak{dcba}) \text{ ist;}$$

ferner, da

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} : \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}}, \text{ so ist}$$

$$2) \quad (\mathfrak{abcd}) . (\mathfrak{abdc}) = 1 .$$

Endlich giebt die Relation III. in §. 5 zwischen irgend vier Punkten einer Geraden:

$$\mathfrak{ab} . \mathfrak{cd} + \mathfrak{bc} . \mathfrak{ad} + \mathfrak{ca} . \mathfrak{bd} = 0$$

folgende Beziehung zwischen Doppelverhältnissen:

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} + \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cb}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{cd}} = 1$$

oder:

$$3) \quad (\mathfrak{abcd}) + (\mathfrak{acbd}) = 1,$$

und hieraus lassen sich die Werthe des Doppelverhältnisses für alle 24 möglichen Vertauschungen folgendermassen durch einen Werth k desselben ausdrücken:

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mathfrak{abcd}) = (\mathfrak{badc}) = (\mathfrak{cdab}) = (\mathfrak{dcba}) = k \\
(\mathfrak{abdc}) = (\mathfrak{bacd}) = (\mathfrak{cdba}) = (\mathfrak{dcab}) = \frac{1}{k} \\
(\mathfrak{acbd}) = (\mathfrak{bdac}) = (\mathfrak{cadb}) = (\mathfrak{dbca}) = 1 - k \\
(\mathfrak{acdb}) = (\mathfrak{bdca}) = (\mathfrak{cabd}) = (\mathfrak{dbac}) = \frac{1}{1-k} \\
(\mathfrak{adbc}) = (\mathfrak{bcad}) = (\mathfrak{cbda}) = (\mathfrak{dacb}) = \frac{k-1}{k} \\
(\mathfrak{adcb}) = (\mathfrak{bcda}) = (\mathfrak{cbad}) = (\mathfrak{dabc}) = \frac{k}{k-1} .
\end{array}\right.$$

Dieselben Beziehungen ergeben sich für das Doppelverhältniss von vier Strahlen $(abcd)$ aus der in § 5 nachgewiesenen Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd).$$

Sind fünf Punkte auf einer Geraden gegeben, so lassen sich zwischen denselben mehrere Doppelverhältnisse bilden, die in einfachem Zusammenhange mit einander stehen; da nämlich

$$(\mathfrak{abcd}) = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$$

$$(\mathfrak{abce}) = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ae}}{\mathfrak{be}} \qquad \text{ist, so folgt:}$$

$$\frac{(\mathfrak{abcd})}{(\mathfrak{abce})} = \frac{\mathfrak{ae}}{\mathfrak{be}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = (\mathfrak{abed}),$$

also haben wir die Relation:

$$(\mathfrak{abcd}) . (\mathfrak{abde}) . (\mathfrak{abec}) = 1.^{*)}$$

Aus dieser Relation ergiebt sich der Werth eines Doppelverhältnisses, dessen vier Elemente gegeben sind durch die Werthe der vier Doppelverhältnisse, welche sie mit drei anderen (Fundamental-)Elementen bilden; wenn nämlich

$$(\mathfrak{abcd}_1) = k_1, \ (\mathfrak{abcd}_2) = k_2 \ \text{ ist,}$$

so wird nach dem vorigen Satze:

$$(\mathfrak{abd}_1\mathfrak{d}_2) = \frac{k_2}{k_1}$$

Ist $(\mathfrak{abcd}_3) = k_3$, so folgt $(\mathfrak{ad}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{b}) . (\mathfrak{ad}_1\mathfrak{bd}_3) . (\mathfrak{ad}_1\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2) = 1$ d. h.

$$\frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot \frac{k_1 - k_3}{k_1} \cdot (\mathfrak{ad}_1\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_2) = 1$$

$$(\mathfrak{ad}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3) = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_2}.$$

Ist endlich $(\mathfrak{abcd}_4) = k_4$, so haben wir $(\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3\mathfrak{a}) . (\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{a}\mathfrak{d}_4) (\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_4\mathfrak{d}_3) = 1$ d. h.

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \cdot \frac{k_2 - k_4}{k_1 - k_4} (\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_4\mathfrak{d}_3) = 1$$

$$(\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_4} \cdot \frac{k_2 - k_4}{k_2 - k_3}.$$

§. 7. Veränderung des Werthes eines Doppelverhältnisses bei der Bewegung eines seiner Elemente.

Für die Folge ist es nützlich zu wissen, wie sich der Werth eines Doppelverhältnisses verändert, wenn eines seiner Elemente alle möglichen Lagen annimmt, während die drei andern festgehalten

---

*) Der barycentrische Calcul von A. F. Moebius, Leipzig 1827. S. 250.

werden. Nehmen wir das Doppelverhältniss von vier Punkten $(\mathfrak{abcd})$ und lassen den Punkt $\mathfrak{d}$ sich bewegen, so bleibt von dem Doppelverhältnisse $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$ das erste Verhältniss unverändert, und es variirt nur das zweite. Untersuchen wir daher zunächst, *wie sich das Verhältniss* $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ *verändert, während* $\mathfrak{x}$ *alle möglichen Lagen auf der Geraden* $\mathfrak{ab}$ *einnimmt.* Es treten hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle ein: entweder liegt $\mathfrak{x}$ auf der endlichen Strecke zwischen $\mathfrak{ab}$, oder auf einer der beiden unendlichen Strecken ausserhalb $\mathfrak{ab}$; im ersten Falle haben die Strecken $\mathfrak{ax}$ und $\mathfrak{bx}$ entgegengesetzten, im zweiten Falle gleichen Richtungssinn (§ 5); wir nehmen daher im ersten Falle den absoluten Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ mit dem negativen Vorzeichen $(-)$, im zweiten Falle mit dem positiven Vorzeichen $(+)$ und unterscheiden durch das entgegengesetzte Vorzeichen des Verhältnisses die beiden Gebiete auf der geraden Linie, in welchen der Punkt $\mathfrak{x}$ liegen kann. Wenn nun $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, so ist der Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ gleich 0; er bleibt negativ, so lange sich $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ hin bewegt; er wird $= -1$, wenn $\mathfrak{x}$ in die Mitte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fällt, wächst (absolut genommen), während $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{b}$ geht, und wird, wenn $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt, unendlich gross (∞); dabei liegen die absoluten Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$, während $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ liegt, zwischen 0 und 1; während $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, zwischen 1 und ∞, und keine zwei gleichen Werthe können vorkommen; das Verhältniss nimmt also alle negativen Werthe von 0 bis ∞ und jeden nur einmal an; geht $\mathfrak{x}$ weiter, über $\mathfrak{b}$ hinaus, so wird $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ positiv und nimmt ab von dem Werth ∞ an, welchen es in $\mathfrak{b}$ hatte; je weiter $\mathfrak{x}$ gelangt, desto mehr nähert sich der Werth des Verhältnisses dem Werthe $+1$, da $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}} = 1 + \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{bx}}$; für den unendlich entfernten Punkt selbst wird daher das Verhältniss den Grenzwerth $+1$ annehmen; gehen wir durch den unendlich entfernten Punkt auf die andere Seite der Geraden über (§. 3), so wird der Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}} < 1$, weil jetzt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{x}$ entfernter liegt als $\mathfrak{a}$, während es vorher umgekehrt war; nähert sich $\mathfrak{x}$ mehr und mehr dem Punkte $\mathfrak{a}$, so nimmt der Werth $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ immer mehr ab bis zum Werthe 0, der dann eintritt, wenn $\mathfrak{x}$ wieder mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt. Für das ganze Gebiet ausserhalb der Strecke $\mathfrak{ab}$, welches durch den unendlich entfernten Punkt in zwei Abschnitte zerfällt, ist demnach der Werth des Verhältnisses positiv und zwar auf dem einen Abschnitte > 1 (nimmt von ∞ bis 1 ab), auf dem andern Abschnitte < 1 (nimmt von 1 bis 0 ab), für den unendlich entfernten Punkt selbst $+ 1$; jeder positive Werth des Verhältnisses kommt aber nur einmal vor. Im Ganzen nimmt also das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$ bei der Bewegung von $\mathfrak{x}$ alle positiven und alle negativen Werthe von ± 0 bis $\pm \infty$ und jeden nur einmal an. Will man vom Vorzeichen absehen und nur den absoluten Werth des Verhältnisses auffassen, so tritt ein solcher immer zweimal auf, einmal für eine bestimmte Lage zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, das andere Mal ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; die Punkte gruppiren sich demgemäss paarweise, wie z. B. der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ und der unendlich entfernte Punkt dem Werthe 1 entspricht; durch das hinzugefügte Vorzeichen wird aber diese Zweideutigkeit aufgehoben.

Hieraus ergiebt sich nun auch die Veränderung des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$, wenn eines seiner Elemente sich bewegt. Sei $\mathfrak{d}$ dies veränderliche Element, so wird in dem Doppelverhältnisse $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ allein das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ sich ändern und alle positiven und negativen Werthe durchlaufen; die mit dem constanten Werthe $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ multiplicirten reciproken Werthe dieses Verhältnisses werden daher auch alle positiven und negativen Werthe in stetiger Aufeinanderfolge annehmen und jeden nur einmal. Wie die positiven und negativen Werthe mit der Veränderung von $\mathfrak{d}$ einander folgen, hängt von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ ab, welcher positiv oder negativ ist, je nachdem $\mathfrak{c}$ ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegt:

1) Liegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Art: $-\underset{\mathfrak{a}}{|}-\!-\!-\!-\underset{\mathfrak{b}}{|}-\underset{\mathfrak{c}}{|}-$, so ist $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ positiv, und der Werth des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$

wird für $\mathfrak{d}$ im Unendlichen $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = +$
während $\mathfrak{d}$ von ∞ bis $\mathfrak{a}$ geht $+$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{a}$ hineinfällt $= \infty$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{b}$ geht $-$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt $= 0$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{c}$ geht $+$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt $= + 1$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{c}$ bis ins Unendl. geht $+$.

2) Liegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Art: $-\underset{\mathfrak{a}}{|}-\!-\!-\!-\underset{\mathfrak{c}}{|}-\underset{\mathfrak{b}}{|}-$, so ist $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ negativ, und der Werth des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$

wird für $\mathfrak{d}$ im Unendlichen $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} = -$
während $\mathfrak{d}$ von ∞ bis $\mathfrak{a}$ geht $-$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{a}$ hineinfällt $= \infty$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{c}$ geht $+$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt $= +1$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{b}$ geht $+$
wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt $= 0$
während $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{b}$ bis ∞ geht $-$.

Die beiden zugeordneten Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, für welche, wenn $\mathfrak{d}$ hineinfällt, das Doppelverhältniss die Werthe ∞ und 0 annimmt, bilden die Uebergänge von den positiven zu den negativen Werthen desselben; ausserdem tritt einmal der besondere Werth $+1$ auf, wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt, also das andere Paar zugeordneter Punkte zusammenfällt, und für den unendlich entfernten Punkt geht das Doppelverhältniss in das einfache Verhältniss $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}$ über.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Paaren entsprechender Elemente einer Punktreihe und eines mit ihr projectivischen Strahlbüschels können wir auf einen ganz gleichen Verlauf des Werthes von $(abcd)$ schliessen, wenn von den vier Strahlen drei fest bleiben und der vierte d sich um den Mittelpunkt drehend das ganze Strahlbüschel durchläuft.

§. 8. Harmonische Elemente.

Unter allen Werthen, welche ein Doppelverhältniss annehmen kann, giebt es einen, welcher seines häufigen Vorkommens wegen von besonderer Wichtigkeit ist; ehe wir daher in den allgemeinen Betrachtungen fortfahren, wollen wir diesen besonderen Fall näher ins Auge fassen. Dieser wichtigste specielle Werth eines Doppelverhältnisses ist -1, und wenn das Doppelverhältniss von vier Punkten

$$(\mathfrak{abcd}) = -1$$

ist, so heissen diese *vier harmonische Punkte*, und zwar $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *zugeordnete* harmonische Punkte, ebenso $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ *zugeordnete*; da das Doppelverhältniss von vier harmonischen Punkten -1 ist, so folgt (§. 7), dass, wenn $\mathfrak{c}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, nothwendig $\mathfrak{d}$ ausserhalb $\mathfrak{ab}$ liegen muss und umgekehrt, dass also bei vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordneter Punkte durch das andere Paar *getrennt* wird und zwischen ihren Abständen die Bedingung stattfindet:

$$\text{I.} \quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} + \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = 0 \text{ oder } \frac{\mathfrak{ca}}{\mathfrak{da}} + \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{db}} = 0,$$

oder die Verhältnisse $\frac{ac}{bc}$ und $\frac{ad}{bd}$ haben gleichen, aber entgegengesetzten Werth. Aus den Beziehungen in §. 6 ergiebt sich für $k = -1$, dass, wenn

$$(abcd) = -1 \qquad \text{ist,}$$

$$(abcd) = (abdc) = (badc) = (bacd)$$
$$= (cdab) = (cdba) = (dcab) = (dcba) = -1 \text{ wird.}$$

Man kann also sowohl ein Paar zugeordneter harmonischer Punkte unter sich, als auch mit dem andern Paar vertauschen, ohne die harmonische Eigenschaft aufzuheben. Ferner ergiebt sich aus §. 7, dass, wenn man irgend drei Punkte abc auf einer Geraden willkürlich annimmt und zwei z. B. a und b als zugeordnet auffasst, nur ein einziger bestimmter vierter dem c zugeordneter harmonischer Punkt d existirt, welcher, wenn c zwischen ab liegt, ausserhalb ab liegen muss und umgekehrt; eine einfache Construction desselben allein mittels des Lineals ergiebt sich später (§. 9). Hier erwähnen wir nur noch einige metrische Beziehungen, welche aus dem besonderen Werthe -1 des Doppelverhältnisses folgen.

Wenn nämlich

$$(abcd) = -1,$$

so ist (§. 6)

$$(acdb) = \frac{1}{2},$$

das heisst:

$$\frac{ad}{cd} = \frac{1}{2} \frac{ab}{cb}.$$

Schreiben wir diese Beziehung dergestalt:

$$\frac{ac + cd}{cd} = \frac{1}{2} \frac{ac + cb}{cb},$$

so folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{1}{cd} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb}\right\}$$

d. h. *der reciproke Werth des Abstandes eines Punktes von dem zugeordneten harmonischen Punkte ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den reciproken Werthen der Abstände des ersten von den beiden andern zugeordneten Punkten.*

Ferner führen wir die Mitte m zwischen zwei zugeordneten Punkten ab ein, also

$$am = \frac{1}{2} ab = mb,$$

dann wird die vorige Relation:

$$\frac{ad}{cd} = \frac{am}{cb} = \frac{mb}{cb},$$

woraus folgt:

$$\frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{ad}} = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{cd}}$$

und durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$:

$$\frac{\mathfrak{mb}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{cd}} = \frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{db}};$$

aus den beiden Beziehungen:

$$\frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{ad}} = \frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{cd}}, \quad \frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{ac}} = \frac{\mathfrak{db}}{\mathfrak{cd}}$$

folgt durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten:

$$\frac{\mathfrak{md}}{\mathfrak{ad}} = \frac{\mathfrak{bd}}{\mathfrak{cd}}, \quad \frac{\mathfrak{mc}}{\mathfrak{ac}} = \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{cd}},$$

und hieraus folgt:

$$\text{III.} \quad (\mathfrak{ma})^2 = (\mathfrak{mb})^2 = \mathfrak{mc} \,.\, \mathfrak{md}$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\mathfrak{mc}}{\mathfrak{md}} = \left(\frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{bd}}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ad}}\right)^2.$$

Auch kann u. A. noch die Relation bemerkt werden:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} \mathfrak{ca} \,.\, \mathfrak{cb} = \mathfrak{cd} \,.\, \mathfrak{cm} \\ \mathfrak{da} \,.\, \mathfrak{db} = \mathfrak{dc} \,.\, \mathfrak{dm}, \end{cases}$$

woraus durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$\text{VI.} \quad \mathfrak{ca} \,.\, \mathfrak{cb} + \mathfrak{da} \,.\, \mathfrak{db} = (\mathfrak{cd})^2,$$

welche alle sich leicht in Worten ausdrücken lassen; ähnliche metrische Relationen ergeben sich, wenn wir die Mitte $\mathfrak{n}$ zwischen den beiden andern zugeordneten Punkten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ einführen.

Von besonderem Interesse ist die Beziehung III. für vier harmonische Punkte: *das Quadrat des Abstandes der Mitte zwischen zwei zugeordneten Punkten von einem derselben ist gleich dem Rechteck aus den Abständen derselben Mitte von den beiden andern zugeordneten Punkten.*

Halten wir bei vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordneter Punkte $\mathfrak{ab}$ fest, so bleibt auch deren Mitte $\mathfrak{m}$ unverändert; bewegen wir dann $\mathfrak{c}$, so verändert sich mit ihm der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{d}$ in der Weise, dass das Rechteck $\mathfrak{mc} \,.\, \mathfrak{md}$ constant bleibt. Wir können hierdurch, während wir von vier harmonischen Punkten das eine Paar zugeordneter Punkte festhalten, das ganze System von Paaren zugeordneter Punkte verfolgen, welche mit den beiden festen harmonisch liegen, und merken insbesondere zwei specielle Fälle: 1) wenn $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{m}$ liegt, so liegt $\mathfrak{d}$ im Unendlichen, d. h. *zwei beliebige Punkte einer Geraden, die Mitte zwischen ihnen und der unendlich ent-*

fernte Punkt sind immer vier harmonische Punkte und zwar die beiden ersten zugeordnet, die beiden letzten zugeordnet; 2) wenn $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}$ oder in $\mathfrak{a}$ hineinfällt, so muss auch $\mathfrak{d}$ hineinfallen, d. h. *wenn von vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordnete zusammenfallen, so muss in diesem Punkte auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte liegen,* oder: vier harmonische Punkte können insbesondere so liegen, dass drei zusammenfallen und einer abgesondert ist. Weil endlich $\mathfrak{m}\mathfrak{c} \, . \, \mathfrak{m}\mathfrak{d} = (\mathfrak{m}\mathfrak{a})^2$ positiv ist, so müssen $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$ gleichen Richtungssinn haben, d. h. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ immer auf derselben Seite von $\mathfrak{m}$ liegen; während also $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{a}$ fortschreitet, geht der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{d}$ vom Unendlichen im entgegengesetzten Richtungssinne nach $\mathfrak{a}$ (denn je grösser von dem constanten Rechteck die eine Seite wird, desto kleiner muss die andere werden), und wenn $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{b}$ fortrückt, bewegt sich $\mathfrak{d}$ vom unendlich entfernten Punkt ebenfalls nach $\mathfrak{b}$ hin [vergl. §. 7]*).

Dieselben Betrachtungen können wir leicht übertragen auf vier Strahlen, deren Doppelverhältniss den Werth -1 hat. Solche vier Strahlen $abcd$ eines Strahlbüschels, für welche

$$(abcd) = -1$$

ist, heissen *vier harmonische Strahlen* und zwar ab *zugeordnete*, cd *zugeordnete Strahlen*; der Werth des Doppelverhältnisses zwischen den Sinus der Winkel liefert die Beziehung:

$$1. \qquad \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} + \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = 0\,.$$

---

*) Die Erweiterung dieser Betrachtung führt zu dem für geometrische Betrachtungen nützlichen *Princip der Transformation durch reciproke Radien.* Bezeichnen wir die beiden von einander abhängigen veränderlichen Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ besser durch x und ξ, ihre feste Mitte durch m, so wird vermittelst der Relation:

$$mx \, . \, m\xi = \text{const.}$$

auf dem geradlinigen Träger jeder Punkt x in einen neuen Punkt ξ transformirt, oder die ganze gerade Linie wird auf sich selbst abgebildet. Denken wir uns nun diesen Träger um den festen Punkt m gedreht durch 180^0, so dass er die ganze Ebene durchstreift und seine Punkte x und ξ dieselbe doppelt bedecken, dann ist dadurch die ganze Ebene auf sich selbst abgebildet d. h. jedem Punkte x der Ebene entspricht ein bestimmter Punkt ξ auf dem Strahle mx vermöge der obigen Relation. Irgend einer Figur, welche der Punkt x in der Ebene beschreibt, entspricht eine transformirte Figur, die der Punkt ξ beschreibt z. B. einer geraden Linie ein Kreis, einem Kreise im Allgemeinen wieder ein Kreis u. s. f. Aus metrischen und Lagen-Verhältnissen der ersten Figur entspringen neue Beziehungen der transformirten Figur und bilden eine reiche Quelle geometrischer Forschung. (Vgl. Einleitung in die synthetische Geometrie von *C. F. Geiser* S. 159.)

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse (§. 5) folgt, dass, *wenn man irgend vier harmonische Punkte mit einem Punkt B durch Strahlen verbindet, diese vier harmonische Strahlen sind*, und *wenn man irgend vier harmonische Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet, die vier Schnittpunkte vier harmonische Punkte sind*, zugleich auch zugeordnete Strahlen die zugeordneten Punkte enthalten und umgekehrt.

Hiernach ergiebt sich die relative Lage von vier harmonischen Strahlen aus der von vier harmonischen Punkten. Zwei zugeordnete Strahlen ab theilen nämlich die ganze Ebene in vier Winkelräume, von denen zwei und zwei (Scheitelwinkelräume) gleich sind; das andere Paar zugeordneter Strahlen kann nun nicht in dieselben Scheitelwinkelräume fallen, sondern wenn der Strahl c in das eine Paar Scheitelräume fällt, so muss der zugeordnete d in das andere Paar Neben-Scheitelräume fallen, oder wie man sich kürzer ausdrückt: bei vier harmonischen Strahlen wird ein Paar zugeordneter Strahlen durch das andere Paar *getrennt*. Ferner giebt es zu drei beliebig gewählten Strahlen nur einen bestimmten vierten harmonischen, der, wenn zwei als zugeordnet festgesetzt sind, dem dritten zugeordnet ist. Ebenso übertragen sich die metrischen Relationen II. III. IV. auf vier harmonische Strahlen:

Da

$$\frac{\sin(da)}{\sin(ca)} + \frac{\sin(db)}{\sin(cb)} = 0 \quad \text{ist}$$

und

$$(da) = (dc) + (ca); \quad (db) = (dc) + (cb)$$

bei festgehaltenem Drehungssinn, so ergiebt sich durch Auflösung der sin der Summen:

$$2. \qquad \operatorname{cotg}(cd) = \frac{1}{2}\{\operatorname{cotg}(ca) + \operatorname{cotg}(cb)\}.$$

Auch die übrigen metrischen Beziehungen zwischen vier harmonischen Strahlen, analog III. und IV. ergeben sich, wenn man mit m einen Halbirungsstrahl des Winkels (ab) bezeichnet, also

$$(am) = (mb) = -(bm) = -(ma);$$

die Relation 1. lässt sich dann so schreiben:

$$\frac{\sin\{(am)+(mc)\}}{\sin\{(bm)+(mc)\}} + \frac{\sin\{(am)+(md)\}}{\sin\{(bm)+(md)\}} = 0$$

und giebt aufgelöst mit Berücksichtigung der vorigen Relationen:

$$\frac{\operatorname{tg}(mc)-\operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(mc)+\operatorname{tg}(ma)} + \frac{\operatorname{tg}(md)-\operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(md)+\operatorname{tg}(ma)} = 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg}(mc)}{\operatorname{tg}(ma)} = \frac{\operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(md)}.$$

$$3. \quad \operatorname{tg}^2(ma) = \operatorname{tg}^2(mb) = \operatorname{tg}(mc) \cdot \operatorname{tg}(md).$$

Ferner:

$$\sin\{(am) + (mc)\} + \sin\{(bm) + (mc)\} = \sin(ac) + \sin(bc)$$

aufgelöst:

$$2\cos(am) \cdot \sin(mc) = \sin(ac) + \sin(bc);$$

ebenso:

$$2\cos(am) \cdot \sin(md) = \sin(ad) + \sin(bd);$$

anderseits:

$$2\sin(am)\cos(mc) = \sin(ac) - \sin(bc);$$
$$2\sin(am)\cos(md) = \sin(ad) - \sin(bd).$$

Es folgt aber aus 1.:

$$\frac{\sin(ac) + \sin(bc)}{\sin(bd) - \sin(ad)} = \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}; \quad \frac{\sin(ad) + \sin(bd)}{\sin(bc) - \sin(ac)} = \frac{\sin(bd)}{\sin(bc)},$$

woraus dann folgt:

$$4. \quad \frac{\sin 2(mc)}{\sin 2(md)} = \left\{\frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)}\right\}^2.$$

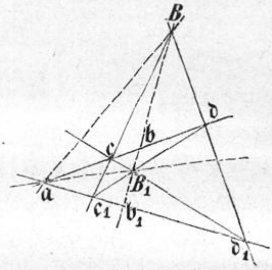
Weitere Beziehungen zwischen vier harmonischen Strahlen siehe unter „Aufgaben und Sätze“ am Ende des ersten Abschnitts.

Die Beziehung 3. lässt ähnlich wie III. die Abhängigkeit eines Paares zugeordneter Strahlen von dem andern und der Halbirungslinie ihres Winkels erkennen; halten wir ab und also auch die Halbirungslinie m des Winkels (ab) fest und verändern c, so wird auch der vierte harmonische Strahl d sich bewegen, aber das Product $\operatorname{tg}(mc) . \operatorname{tg}(md)$ constant bleiben; fällt insbesondere c auf m, so muss $\operatorname{tg}(md) = \infty$ werden, also d zu m senkrecht stehen, oder was dasselbe sagt: d wird der Halbirungsstrahl des Nebenwinkels von (ab). Wir schliessen also: *Wenn zwei Strahlen den Winkel und Nebenwinkel zweier andern halbiren, so bilden sie mit jenen vier harmonische Strahlen und sind einander zugeordnet*; aber auch umgekehrt: *Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete zu einander rechtwinklig sind, so halbiren sie die Winkel der beiden andern zugeordneten Strahlen.* (Wir erkennen ferner leicht, dass dieselbe Relation 3. bestehen bleibt, wenn wir statt der einen Halbirungslinie m des Winkels (ab) die andere, zu ihr senkrechte Halbirungslinie des Nebenwinkels setzen.) Fällt zweitens bei der Bewegung von c dieser Strahl auf a oder b, so muss auch d auf denselben fallen, also: *Wenn von vier harmonischen Strahlen ein Paar zugeordneter zusammenfallen, so muss auch einer des andern Paares hineinfallen,* oder: vier harmonische Strahlen können die besondere Lage haben, dass drei zusammenfallen und der vierte abgesondert liegt. Hinsichtlich der Bewegung sehen wir endlich, dass, während c das Gebiet zweier Scheitelräume des Winkels (ab) durchstreift, der zugeordnete Strahl d das Gebiet der beiden andern Neben-Scheitelräume in entgegengesetztem Drehungssinne durchstreift, und dass beide einmal auf a, das andere Mal auf b zusammenfallen.

§. 9. Vorkommen harmonischer Elemente beim vollständigen Viereck und Vierseit.

Harmonische Punkte und Strahlen bieten sich bei sehr vielen geometrischen Untersuchungen dar; des Folgenden wegen müssen wir auf ihr Vorkommen beim vollständigen Viereck und Vierseit aufmerksam machen. Sind nämlich $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1$ irgend vier Punkte der Ebene (Fig. 5) (ein vollständiges Viereck), so giebt es drei Paare Verbindungslinien je zweier derselben (drei Seitenpaare) nämlich:

Fig. 5.



$\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, die sich in $\mathfrak{a}$ treffen mögen
$\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, - - - B - -
$\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}$, - - - B_1 - - .

Diese drei Schnittpunkte bilden das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks, und die drei Seiten desselben heissen die drei *Diagonalen* des vollständigen Vierecks, die drei Ecken die *Diagonalpunkte* desselben; ziehen wir BB_1, welche Linie $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ resp. in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ treffe, so ist, weil die vier Strahlen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$, $B\mathfrak{d}$ die Gerade $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ resp. in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ treffen, das Doppelverhältniss der vier Strahlen einmal gleich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ und zweitens gleich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$ (§. 5), mithin

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1).$$

Die vier Strahlen $B_1\mathfrak{a}$, $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{c}_1$, $B_1\mathfrak{d}_1$ treffen aber die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in den resp. Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, mithin ist

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c});$$

folglich auch

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}).$$

Allgemein aber ist (§. 6, 2):

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = 1, \text{ folglich}$$
$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})^2 = 1,$$

$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ selbst also $+1$ oder -1; den Werth $+1$ kann dies Doppelverhältniss nach §. 7 nicht haben, weil derselbe nur dann auftritt, wenn zwei zugeordnete Punkte zusammenfallen, was hier offenbar nicht der Fall ist, mithin muss

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = -1$$

sein, d. h. (§. 8) die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ sind harmonisch gelegen, ebenso $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$; folglich sind auch die vier von B ausgehenden Strahlen vier harmonische Strahlen und ebenso die vier durch B_1 laufenden Strahlen; da von den letzteren sowohl die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ als auch $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ in vier harmonischen Punkten getroffen wird, durch welche die vier von $\mathfrak{a}$ ausgehenden Strahlen laufen, so sind auch die letzteren vier harmonische Strahlen. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Beim vollständigen Viereck bilden in jedem der drei Diagonalpunkte die beiden Seiten und die beiden Diagonalen, welche durch denselben gehen, vier harmonische Strahlen und zwar enthält jedes Paar zwei zugeordnete.

Dieselbe Figur lässt sich auch anders auffassen: Wir können die vier Verbindungslinien $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ als vier beliebige Gerade in der Ebene, ein vollständiges Vierseit, ansehen; diese vier Geraden schneiden sich in drei Punktenpaaren, den sechs Ecken des vollständigen Vierseits oder den drei Paar Gegenecken, nämlich B und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1$; die drei Verbindungslinien dieser drei Paare Gegenecken heissen *Diagonalen* des vollständigen Vierseits, ihre Schnittpunkte *Diagonalpunkte*. Hiernach lautet der vorige Satz:

Beim vollständigen Vierseit bilden auf jeder der drei Diagonalen die beiden Ecken des Vierseits und die Schnittpunkte der beiden andern Diagonalen vier harmonische Punkte und zwar besteht jedes Paar aus zwei zugeordneten.

Es folgt hieraus leicht eine Construction sowohl des vierten harmonischen Punktes, als auch Strahles zu drei gegebenen allein mit Hülfe des Lineals, wenn zwei als zugeordnete angenommen sind:

1) Sind auf einer Geraden drei Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gegeben, und soll der vierte harmonische dem $\mathfrak{c}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{d}$ gefunden werden, während $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ das eine Paar zugeordneter Punkte ist, so ziehe man durch $\mathfrak{c}$ einen beliebigen Strahl und nehme zwei beliebige Punkte x und y auf demselben, verbinde $x\mathfrak{a}$, $x\mathfrak{b}$, $y\mathfrak{a}$, $y\mathfrak{b}$ und bestimme die Schnittpunkte:

$$(x\mathfrak{a},\ y\mathfrak{b}) \text{ und } (x\mathfrak{b},\ y\mathfrak{a}),$$

deren Verbindungslinie die Gerade in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{d}$ trifft.

2) Sind drei durch einen Punkt O gehende Strahlen abc gegeben, und man soll den vierten harmonischen dem c zugeordneten Strahl d finden, während ab das andere Paar zugeordneter Strahlen ist, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt von c irgend zwei Gerade, welche a und b resp. in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ treffen; dann giebt der Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1)$ mit O verbunden den gesuchten vierten harmonischen Strahl d.

§. 10. Allgemeine Folgerungen aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Construction entsprechender Elemente zweier projectivischer Gebilde.

Die am Ende des §. 5 bewiesene Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Punkten einer Geraden und vier Strahlen eines Strahlbüschels, welche durch jene gehen:

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd)$$

liefert zuvörderst zwei allgemeine Sätze, deren specielle Fälle für harmonische Punkte und Strahlen wir bereits angewendet haben, nämlich:

1) *Zieht man durch ein beliebiges Strahlbüschel von vier Strahlen* $abcd$ *irgend welche Gerade (Transversalen), die jene resp. in den Punkten* $\mathfrak{abcd}$ *treffen, so ist der Werth des Doppelverhältnisses* $(\mathfrak{abcd})$ *immer derselbe*

$$(\mathfrak{abcd}) = \text{const.},$$

welches auch die Lage der hindurchgehenden Transversale sei, nämlich gleich dem Werthe des Doppelverhältnisses der vier Strahlen $(abcd)$.

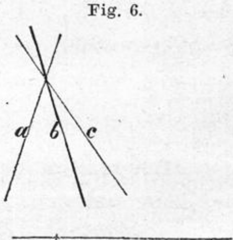
2) *Verbindet man irgend vier Punkte* $\mathfrak{abcd}$ *einer Geraden mit beliebigen Punkten der Ebene durch je vier Strahlen* $abcd$, *so haben diese Strahlbüschel immer dasselbe Doppelverhältniss*

$$(abcd) = \text{const.},$$

welches auch die Lage ihres Mittelpunktes sei, nämlich das Doppelverhältniss der vier Punkte $(\mathfrak{abcd})$.

Da ferner diese Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen entsprechenden Elementen der beiden in perspectivischer Lage befindlichen Gebilde ganz unabhängig ist von der perspectivischen Lage, indem sie nur die Abstände der Punkte von einander und die Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen enthält, so bleibt sie auch bestehen, wenn die perspectivische Lage aufgehoben wird, und enthält das allgemeine *Gesetz für die projectivische Beziehung* (§. 2) eines Strahlbüschels und einer Punktreihe auf einander. Wenn wir also die Strahlen eines Strahlbüschels und die Punkte einer Punktreihe projectivisch auf einander beziehen wollen, so dürfen wir drei Paare von Elementen abc und $\mathfrak{abc}$ willkürlich als entsprechende annehmen (Fig. 6), weil erst zwischen vier Paaren die Bedingung obwaltet:

Fig. 6.



$$(abcd) = (\mathfrak{abcd}).$$

Durch jene drei Paare ist aber die Beziehung vollständig und eindeutig bestimmt; denn nehmen wir jetzt einen beliebigen vierten Strahl d

des Strahlbüschels, so ist der Werth von $(abcd)$ gegeben, und da $(\mathfrak{abcd})$ denselben gegebenen Werth hat, so giebt es nur einen bestimmten Punkt $\mathfrak{d}$ (§. 7), welcher diesen Werth liefert, wofern man auch das Vorzeichen des Werthes von $(\mathfrak{abcd})$ berücksichtigt. (Will man von dem Vorzeichen absehen, so würde durch die vorige Gleichung das Verhältniss $\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$ nur seinem absoluten Werthe nach gegeben sein, und die Lage des Punktes $\mathfrak{d}$ wäre dann zweideutig; ob aber $\mathfrak{d}$ zwischen $\mathfrak{ab}$ oder ausserhalb $\mathfrak{ab}$ liegt, entscheidet alsdann die Uebereinstimmung des Drehungssinnes mit dem Richtungssinn in beiden projectivischen Gebilden, und diese gestattet nur *eine* Lage von $\mathfrak{d}$; siehe §. 4.) Demnach gehört zu jedem Strahle d nur ein einziger entsprechender Punkt $\mathfrak{d}$ und auch umgekehrt; lassen wir den Strahl d das ganze Strahlbüschel durchstreifen, so wird der entsprechende Punkt die ganze Punktreihe durchlaufen. Wir können also den *allgemeinen Satz* aussprechen:

Sämmtliche Paare entsprechender Elemente zweier projectivischer Gebilde (eines Strahlbüschels und einer Punktreihe) sind vollständig bestimmt durch drei Paare entsprechender Elemente, welche willkührlich angenommen werden können; zu jedem vierten Element des einen Gebildes kann das entsprechende Element des andern aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(abcx) = (\mathfrak{abcx})$$

unzweideutig ermittelt werden und die beiden Gebilde lassen sich dadurch, wenn sie in beliebiger (allgemeiner) Lage sich befinden, in ihre ursprüngliche perspectivische Lage zurückbringen.

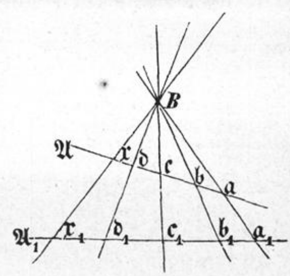
Wir werden bald Constructionen ermitteln, um entsprechende Elemente bei allgemeiner Lage der Gebilde allein mittels des Lineals zu erhalten. (Siehe Ende des §.)

Die beiden im Anfange dieses §. ausgesprochenen Sätze lassen sich in dem Sinne erweitern, dass man an Stelle von vier Strahlen und vier Punkten das ganze Strahlbüschel und die ganze Punktreihe treten lässt und an Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse die durch dieselbe gegebene projectivische Beziehung entsprechender Elemente zweier Gebilde.

Wir sagen, zwei Punktreihen $\mathfrak{abcd} \ldots \mathfrak{x} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{x}_1 \ldots$ befinden sich in perspectivischer Lage, wenn sie sich in demselben Strahlbüschel B befinden, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte $\mathfrak{aa}_1$, $\mathfrak{bb}_1 \ldots \mathfrak{xx}_1$ sämmtlich durch einen Punkt B laufen

(Fig. 7); der Punkt B heisst dabei *Projectionspunkt*, die sämmtlichen Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ ... *Projectionsstrahlen*, diejenigen Punkte, welche auf demselben Projectionsstrahle liegen, *entsprechende Punkte*. Diese Beziehung entsprechender Punkte der beiden Punktreihen ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher betrachtete Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, derart, dass für irgend vier Paare entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet:

Fig. 7.

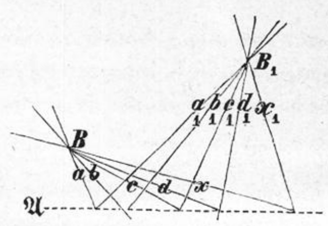


$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1)$$

nach §. 10, *1*).

Diese Beziehung bleibt also bestehen, auch wenn die perspectivische Lage aufgehoben wird, und heisst für die allgemeine Lage der beiden Punktreihen die *projectivische* Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst heissen projectivisch. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei projectivische Punktreihen. Anderseits sagen wir, zwei Strahlbüschel $abcd \ldots x \ldots$ und $a_1b_1c_1d_1 \ldots x_1 \ldots$ befinden sich in perspectivischer Lage, wenn ihre Strahlen durch die Punkte derselben Punktreihe gehen oder die Schnittpunkte entsprechender Strahlen (aa_1) (bb_1) (cc_1) .. (xx_1) auf derselben Geraden $\mathfrak{A}$ liegen (Fig. 8); diese Gerade heisst alsdann der *perspectivische Durchschnitt* der beiden Strahlbüschel, und immer zwei solche Strahlen heissen *entsprechende*, welche durch denselben Punkt des perspectivischen Durchschnitts gehen. Diese Beziehung entsprechender Strahlen der beiden Strahlbüschel auf einander ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher untersuchte Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, derart, dass für irgend vier Paare entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

Fig. 8.



$$(abcx) = (a_1b_1c_1x_1)$$

stattfindet (nach §. 10, *2*); sie bleibt also bestehen, auch wenn die perspectivische Lage aufgehoben wird, und heisst ebenfalls für die allgemeine Lage zweier Strahlbüschel *projectivische* Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst heissen projectivisch. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei projectivische Strahlbüschel.

Wir haben hiedurch eine eindeutige gegenseitige Abhängigkeit der Elemente zweier Gebilde, mögen diese 1) Strahlbüschel und Punktreihe oder 2) zwei Punktreihen oder 3) zwei Strahlbüschel sein, aus der perspectivischen Lage derselben abgeleitet und durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier entsprechenden Elementenpaaren unabhängig von der perspectivischen Lage ausgedrückt, so dass wir auch umgekehrt schliessen können:

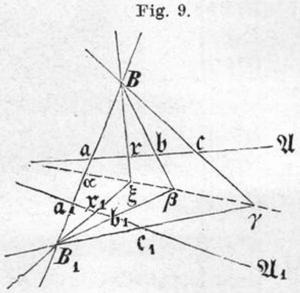
Wenn die Elemente zweier Gebilde in der Weise einander entsprechen, dass zwischen irgend vieren des einen Gebildes und den entsprechenden des andern die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet, zugleich aber auch Uebereinstimmung des Drehungssinnes und (oder) Richtungssinnes (§. 4) *herrscht, dann sind die beiden Gebilde projectivisch d. h. können in perspectivische Lage gebracht werden.*

Hieraus folgt ein allgemeiner sehr häufig zur Anwendung kommender Satz:

Wenn eine beliebige Anzahl von Gebilden (Punktreihen oder Strahlbüschel) in der Verbindung mit einander steht, dass das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten, das dritte mit dem vierten u. s. f. das vorletzte mit dem letzten projectivisch ist, so ist auch das letzte mit dem ersten projectivisch.

Wir können hievon eine nützliche Anwendung machen zur Construction entsprechender Elemente bei zwei projectivischen Gebilden, deren Beziehung durch drei willkürlich gewählte Elementenpaare bestimmt wird:

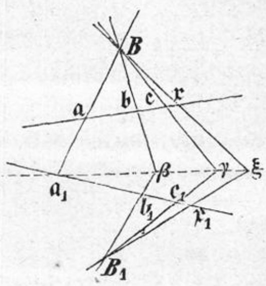
Fig. 9.



a) Sind auf zwei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ drei Paare von Punkten $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ willkürlich gegeben und sollen diese entsprechende Punktenpaare zweier projectivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ sein, so ist durch sie die ganze projectivische Beziehung vollständig bestimmt, und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Punkte allein mittels des Lineals in folgender Weise construirt werden: Man ziehe $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und nehme in diesem Strahl zwei beliebige Punkte B und B_1 an (Fig. 9), dann treffen sich $B\mathfrak{b}$ und $B_1\mathfrak{b}_1$ in β, ferner $B\mathfrak{c}$ und $B_1\mathfrak{c}_1$ in γ; man ziehe $\beta\gamma$ und verbinde irgend einen Punkt ξ dieser Linie einmal mit B und das andere Mal mit B_1; wo diese Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ treffen, hat man allemal zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der beiden Punktreihen; bewegt man ξ auf der Geraden $\beta\gamma$, so erhält man dadurch sämmtliche Paare entsprechender Punkte. Die Richtigkeit dieser Construction ist mit Hülfe des vorigen Satzes evident, denn bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $\beta\gamma$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ durch α, so ist die Punktreihe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}$ projectivisch mit der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\xi$, weil beide perspectivisch liegen (im Strahlbüschel B), ferner $\alpha\beta\gamma\xi$ projectivisch mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1$, weil beide perspectivisch liegen (im Strahlbüschel B_1), folglich auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}$ projectivisch mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1$ w. z. b. w.

Zweite Construction. (Fig. 10.) Man nehme in dem Strahle $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ einen beliebigen Punkt B an und ziehe durch $\mathfrak{a}_1$ eine beliebige Gerade, welche von $B\mathfrak{b}$ und $B\mathfrak{c}$ resp. in β und γ getroffen wird; dann mögen sich $\beta\mathfrak{b}_1$ und $\gamma\mathfrak{c}_1$ in B_1 treffen; verbindet man irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der ersten Punktreihe mit B und trifft $B\mathfrak{x}$ in ξ die Gerade $\beta\gamma$, so wird $B_1\xi$ die zweite Punktreihe in dem gesuchten entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ treffen.

Fig. 10.



Dritte Construction. Man nehme zwei willkürliche Punkte B und B_1 an und bestimme den Schnittpunkt:

$$(B\mathfrak{a},\ B_1\mathfrak{a}_1) = \alpha,$$

ziehe durch α zwei beliebige Gerade $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ und bezeichne die Schnittpunkte auf denselben:

$$(B\mathfrak{b},\ \mathfrak{L}) = \beta;\quad (B_1\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{L}_1) = \beta_1;$$
$$(B\mathfrak{c},\ \mathfrak{L}) = \gamma;\quad (B_1\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{L}_1) = \gamma_1;$$

endlich bestimme man den Schnittpunkt:

$$(\beta\gamma,\ \beta_1\gamma_1) = O$$

dann wird irgend ein Strahl durch O die Geraden $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ in ξ und ξ_1 treffen; $B\xi$ und $B_1\xi_1$ schneiden aber auf den gegebenen Trägern allemal zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ aus.

b) Sind durch die Mittelpunkte B und B_1 drei Strahlenpaare abc und $a_1b_1'c_1$ willkürlich gezogen, und sollen dieselben entsprechende Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel B und B_1 sein, so ist durch sie die ganze projectivische Beziehung vollkommen bestimmt, und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Strahlen allein mittels des Lineals in folgender Weise construirt werden: Durch den Schnittpunkt $(a,\ a_1)$ ziehe man zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und bestimme die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}b) = \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{A}c) = \mathfrak{c}$, $(\mathfrak{A}_1b_1) = \mathfrak{b}_1$, $(\mathfrak{A}_1c_1) = \mathfrak{c}_1$; $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1) = O$. Jeder durch O gehende Strahl trifft $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in zwei solchen Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, dass dieselben mit B und

B_1 verbunden zwei entsprechende Strahlen xx_1 der beiden Strahlbüschel liefern und wir erhalten durch die Drehung der Geraden um O die sämmtlichen Paare entsprechender Strahlen. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Construction sowie die Uebertragung der anderen im vorigen Falle a) angegebenen Constructionen wird für den Leser ohne Schwierigkeit sein.

c) Sind drei Strahlen abc eines Strahlbüschels B und drei Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ einer Geraden $\mathfrak{A}_1$ willkürlich gegeben und sollen diese entsprechende Elemente zweier projectivischen Gebilde B, $\mathfrak{A}_1$ sein, so ist durch sie die ganze projectivische Beziehung vollständig bestimmt und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Elemente allein mittels des Lineals in doppelter Weise construirt werden: entweder man schneide das Strahlbüschel B durch eine beliebige Transversale, wodurch man drei Schnittpunkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ auf derselben erhält, suche nach a) zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ beliebig viele Elementenpaare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und ziehe $B\mathfrak{x}$, dann ist dieses der jedesmal entsprechende Strahl zu $\mathfrak{x}_1$; oder man verbinde einen beliebigen Punkt B_1 mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ durch drei Strahlen $a_1b_1c_1$, suche nach b) zu abc und $a_1b_1c_1$ beliebig viele Paare entsprechender Strahlen xx_1; der Schnittpunkt von x_1 mit $\mathfrak{A}_1$ liefert denjenigen Punkt $\mathfrak{x}_1$, welcher dem Strahle x entsprechend ist.

§. 11. Bedingung für die perspectivische Lage zweier projectivischer Gebilde.

Zwei projectivische Gebilde: ein Strahlbüschel und eine Punktreihe befinden sich dann in perspectivischer Lage, wenn jeder Strahl des Strahlbüschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Punktreihe geht (§. 2) oder jeder Punkt der Punktreihe auf dem ihm entsprechenden Strahl des Strahlbüschels liegt. Dies ist der Fall für jedes Elementenpaar, sobald es nur für irgend drei Paare entsprechender Elemente stattfindet, weil durch diese drei Paare die ganze projectivische Beziehung bestimmt wird. Hat man daher ein Strahlbüschel und eine mit ihm projectivische Punktreihe in irgend welcher Lage, so dürfte es höchstens zweimal vorkommen, dass Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen; denn käme es dreimal vor, so müssten sämmtliche Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen und die beiden Gebilde lägen perspectivisch.

Zwei projectivische Punktreihen befinden sich in perspectivischer Lage, wenn die Verbindungsstrahlen sämmtlicher Paare entsprechender Punkte (Projectionsstrahlen) durch einen und denselben Punkt (Projectionspunkt) gehen (§. 10); dies wird auch hier für sämmtliche Paare der Fall sein, sobald es für irgend drei Paare stattfindet, weil durch drei Paare die ganze projectivische Beziehung bestimmt ist. Derjenige Projectionsstrahl, welcher bei der perspectivischen Lage der beiden Punktreihen nach dem Schnittpunkte ihrer Träger hingeht, trifft sie in zwei zusammenliegenden, im Schnittpunkte vereinigten Punkten, welche entsprechende Punkte sind; umgekehrt: wenn im Schnittpunkte der Träger beider Punktreihen zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so wird der sie verbindende Projectionsstrahl seiner Richtung nach unbestimmt oder kann jede Gerade sein, die durch diesen Schnittpunkt geht; suchen wir daher den Schnittpunkt zweier beliebiger anderer Projectionsstrahlen auf und verbinden ihn mit dem Schnittpunkte der Träger, so können wir sagen, dass durch ihn drei Projectionsstrahlen gehen, dass also die beiden Punktreihen perspectivisch liegen; wir können daher für die perspectivische Lage zweier Punktreihen folgende einfachere Bedingung setzen:

I. *Wenn zwei projectivische Punktreihen so liegen, dass in dem Schnittpunkte ihrer Träger zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so befinden sie sich in perspectivischer Lage, d. h. die Verbindungslinien sämmtlicher Paare entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt.*

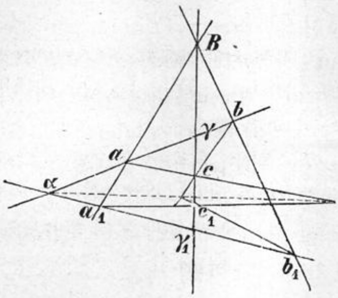
In gleicher Weise verhält es sich mit der perspectivischen Lage zweier projectivischer Strahlbüschel; dieselbe findet dann statt, wenn die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen auf derselben Geraden liegen, und dies ist der Fall, sobald drei von diesen Schnittpunkten in einer Geraden liegen; diese Bedingung wird aber dadurch erfüllt, dass auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, weil deren Schnittpunkt jeder beliebige ihrer Punkte sein kann; die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier beliebiger anderer Strahlenpaare enthält dann also drei solcher Punkte und die Gebilde liegen somit perspectivisch; also:

II. *Wenn zwei projectivische Strahlbüschel so liegen, dass in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt sind, so befinden sie sich in perspectivischer Lage, d. h. die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden.*

Diese beiden Sätze werden in der Folge die häufigste Anwendung finden; beispielsweise wollen wir einen geometrischen Satz aus ihnen ableiten:

Werden zwei Gerade, die sich in α treffen, von drei durch einen Punkt B gehenden Strahlen in den Punkten $ab\gamma$ und $a_1b_1\gamma_1$ getroffen (Fig. 11), und nehmen wir auf $\gamma\gamma_1$ zwei beliebige Punkte cc_1 an, so werden, weil die Punkte $\alpha ab\gamma$ und $\alpha a_1b_1\gamma_1$ perspectivisch liegen, wenn wir c mit den ersteren und c_1 mit den letzteren verbinden, in c und c_1 zwei projectivische Strahlbüschel von je vier Strahlen entstehen; diese haben aber, weil $c\gamma$ und $c_1\gamma_1$ in cc_1 vereinigt sind, nothwendig perspectivische Lage (II), mithin liegen die drei Schnittpunkte $(ca,\ c_1a_1)$ $(cb,\ c_1b_1)$ und α oder $(ab,\ a_1b_1)$ in einer Geraden d. h.

Fig. 11.



Wenn zwei Dreiecke abc *und* $a_1b_1c_1$ *so liegen, dass die Verbindungslinien ihrer Ecken* aa_1, bb_1, cc_1 *durch einen Punkt laufen, dann liegen die Schnittpunkte ihrer correspondirenden Seiten:*

$$(ab,\ a_1b_1)\ (bc,\ b_1c_1)\ (ca,\ c_1a_1)$$

auf einer Geraden.

Der in derselben Weise abzuleitende gegenüberstehende Satz ist zugleich der umgekehrte von diesem:

Wenn zwei Dreiecke abc *und* $a_1b_1c_1$ *so liegen, dass die drei Schnittpunkte ihrer Seiten* $(ab,\ a_1b_1)$ $(bc,\ b_1c_1)$ *und* $(ca,\ c_1a_1)$ *auf einer Geraden sich finden, so laufen die Verbindungslinien ihrer correspondirenden Ecken* aa_1, bb_1, cc_1 *durch einen Punkt**).

Denkt man sich noch ein drittes Dreieck $a_2b_2c_2$ so gelegen (perspectivisch), dass aa_1a_2, bb_1b_2, cc_1c_2 in je einer durch den Punkt B gehenden Geraden liegen, so kommt der vorige Satz dreimal zur Anwendung und die Schnittpunkte correspondirender Seitenpaare liegen dreimal zu je dreien auf einer Geraden; diese drei Geraden laufen wieder durch einen Punkt; bezeichnen wir nämlich diese Schnittpunkte in mehr symmetrischer Weise:

$$\begin{array}{lll}
(b_1c_1,\ b_2c_2) = \alpha & (b_2c_2,\ bc) = \alpha_1 & (bc,\ b_1c_1) = \alpha_2 \\
(c_1a_1,\ c_2a_2) = \beta & (c_2a_2,\ ca) = \beta_1 & (ca,\ c_1a_1) = \beta_2 \\
(a_1b_1,\ a_2b_2) = \gamma & (a_2b_2,\ ab) = \gamma_1 & (ab,\ a_1b_1) = \gamma_2,
\end{array}$$

so liegen nach dem vorigen Satze sowohl $\alpha\beta\gamma$ als auch $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ in je einer Geraden; fassen wir nun die beiden Dreiecke $\alpha\alpha_1\alpha_2$ und $\beta\beta_1\beta_2$ auf, so ergiebt sich aus dem Schema, dass

$\alpha\ \alpha_1$ identisch ist mit b_2c_2	$\beta\ \beta_1$ identisch mit c_2a_2
$\alpha_1\alpha_2$ - - - $b\ c$	$\beta_1\beta_2$ - - $c\ a$
$\alpha_2\alpha$ - - - b_1c_1	$\beta_2\beta$ - - c_1a_1

*) Die hieran sich knüpfende Frage „*ob zwei Dreiecke gleichzeitig auf mehr als eine Art perspectivisch liegen können*" ist von *Rosanes* und *Schröter* in den Math. Annalen Bd. II. S. 549 u. 553 beantwortet worden.

folglich der Schnittpunkt:

$$\begin{array}{lll} (\alpha\,\alpha_1,\ \beta\,\beta_1) & \text{identisch mit} & c_2\,, \\ (\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2) & \text{-}\qquad\text{-} & c\,, \\ (\alpha_2\alpha\,,\ \beta_2\beta\,) & \text{-}\qquad\text{-} & c_1\,. \end{array}$$

Da nun $c c_1 c_2$ in einer Geraden liegen, so müssen nach dem vorigen Satze $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ sich in einem Punkte treffen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn auf drei durch einen Punkt O gehenden Strahlen die Ecken von drei Dreiecken abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ so gelegen sich vorfinden, dass aa_1a_2, bb_1b_2, cc_1c_2 in je einem Strahle liegen, dann werden von den Schnittpunkten correspondirender Seiten:

$$\begin{array}{lll} (b_1c_1,\ b_2c_2) = \alpha & (b_2c_2,\ bc) = \alpha_1 & (bc,\ b_1c_1) = \alpha_2 \\ (c_1a_1,\ c_2a_2) = \beta & (c_2a_2,\ ca) = \beta_1 & (ca,\ c_1a_1) = \beta_2 \\ (a_1b_1,\ a_2b_2) = \gamma & (a_2b_2,\ ab) = \gamma_1 & (ab,\ a_1b_1) = \gamma_2 \end{array}$$

die Punkte: $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ in je einer Geraden liegen und diese drei Geraden durch einen Punkt Q laufen.

Diese Figur liefert ein eigenthümliches Arrangement von 15 Geraden und 20 Punkten in der Art, dass immer 4 von den 20 Punkten auf einer der 15 Geraden liegen und immer drei von den 15 Geraden durch einen der 20 Punkte laufen. Die 20 Punkte entsprechen sich ferner paarweise in der Art, dass, wenn man von irgend einem ausgeht, die drei durch ihn gehenden Geraden und die auf letzteren gelegenen Ecken dreier Dreiecke aufsucht, die angegebene Construction zu einem bestimmten anderen Punkte des Systems führt, ebenso wie man von O zu Q gelangt.*) (Siehe die Figur am Ende von §. 28).

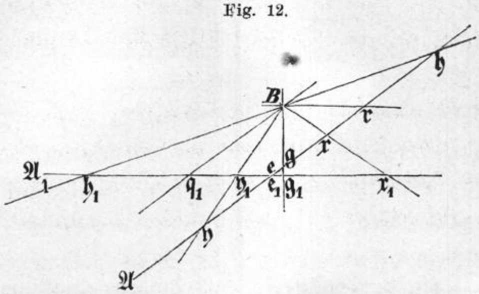
§. 12. Besondere Elemente bei zwei projectivischen Punktreihen. Doppeltes System entsprechender gleicher Strecken.

Unter allen Paaren entsprechender Punkte bei zwei projectivischen Punktreihen giebt es einige von besonderer Eigenthümlichkeit, welche ihrer Bedeutung wegen näher untersucht werden sollen; bei jeder Geraden ist der unendlich entfernte Punkt von besonderem Interesse, weil er seine Eigenthümlichkeit nicht verliert, wenn die Gerade irgendwie ihre Lage verändert (§. 3). Nennen wir bei zwei projectivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ den unendlich entfernten Punkt der einen $\mathfrak{q}^\infty$, den der andern $\mathfrak{r}_1^\infty$, so werden die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}_1$ und

*) Auf diese Figur hat zuerst *Hesse* (im *Crelle*schen Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 41 Seite 270) aufmerksam gemacht und gezeigt, dass dieselbe bei der *Steiner*schen Erweiterung des *Pascal*schen Satzes auftritt (§. 28).

$\mathfrak{r}$ im Allgemeinen eine bestimmte Lage im Endlichen haben. Denken wir uns die beiden Punktreihen in perspectivische Lage gebracht, wodurch die unendlich entfernten Punkte sich nicht ändern, und sei B der Projectionspunkt für die perspectivische Lage (Fig. 12), so treffen die durch B zu den Trägern der beiden Punktreihen gezogenen Parallelen jene in den beiden Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$. Die durch diese Buchstaben $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ sanctionirten ausgezeichneten Punkte heissen daher die *Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen* und sind nichts anderes, als *die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte;* sie bleiben unverändert, wenn die perspectivische Lage aufgehoben wird, weil die unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{q}^\infty$ und $\mathfrak{r}_1^\infty$ selbst sich nicht ändern.

Fig. 12.



Es könnte scheinen, als ob das bei der perspectivischen Lage in dem Schnittpunkt der beiden Träger vereinigte Paar $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ ein ausgezeichnetes Paar entsprechender Punkte wäre; dies ist aber nicht der Fall, weil es seine Eigenthümlichkeit mit der Aufhebung der perspectivischen Lage verliert und jedes andere Paar entsprechender Punkte vereinigt ebenfalls perspectivische Lage hervorruft. Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ und die besonderen Paare $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1^\infty$, $\mathfrak{q}^\infty\mathfrak{q}_1$, so ist wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{r}\mathfrak{q}^\infty) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1^\infty\mathfrak{q}_1)$$

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}^\infty}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}^\infty} = \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{r}_1^\infty}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1^\infty} : \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1};$$

da nun $\mathfrak{q}^\infty$ der unendlich-entfernte Punkt der ersten Geraden ist und allgemein

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} + 1,$$

so wird für $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^\infty$; $\mathfrak{y}\mathfrak{q}^\infty = \infty$ und

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}^\infty}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}^\infty} = 1, \text{ ebenso } \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{r}_1^\infty}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1^\infty} = 1,$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1},$$

oder

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1;$$

halten wir also ein Paar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ fest und verändern das andere Paar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, so bleibt dieses Rechteck constant:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \text{const.},$$

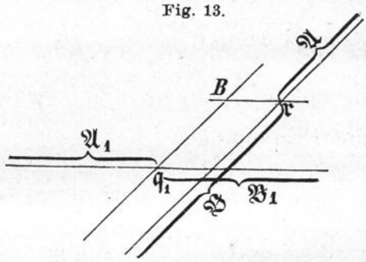
und wir sehen das ganze System entsprechender Punkte vermittelst der Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen durch eine viel einfachere Relation mit einander verbunden, als es die Gleichheit der Doppelverhältnisse war, denn es gilt der Satz:

Bei zwei projectivischen Punktreihen ist das Rechteck aus den Abständen irgend eines Paares entsprechender Punkte von den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen unveränderlich.

Dieses constante Rechteck soll „*Potenz der projectivischen Beziehung*“ genannt werden.

Sobald man also zu irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ bestimmen will, wird man nur nöthig haben, die andere Seite eines Rechtecks, dessen eine $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ ist und dessen Inhalt durch die Potenz der projectivischen Beziehung gegeben ist, zu ermitteln und dieselbe von $\mathfrak{q}_1$ auf die andere Gerade $= \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ abzutragen; es entsteht dabei aber noch die Zweideutigkeit, ob diese Strecke nach der einen oder andern Seite hin abzutragen sei oder welcher von den beiden so erhaltenen Endpunkten der wirklich dem $\mathfrak{x}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ sein wird. Diese Zweideutigkeit wird gehoben durch die Nothwendigkeit der Uebereinstimmung des Richtungssinnes bei zwei projectivischen Punktreihen. Die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ theilen nämlich jeder seinen Träger in zwei unendlich lange Hälften, welche einzeln einander entsprechen; dies erkennen wir, indem wir von der perspectivischen Lage ausgehend um den Projectionspunkt B einen veränderlichen Strahl drehen, welcher immer zwei entsprechende Punkte auf den beiden Trägern fixirt (Fig. 13); während also $\mathfrak{x}$ die eine Hälfte $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}^\infty$ durchläuft, muss $\mathfrak{x}_1$ eine bestimmte Hälfte $\mathfrak{A}_1$ des zweiten Trägers von $\mathfrak{r}_1^\infty$ bis $\mathfrak{q}_1$ durchlaufen, und wenn $\mathfrak{x}$ die zweite Hälfte $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{q}^\infty$ bis $\mathfrak{r}$ durchläuft, wird $\mathfrak{x}_1$ die andere entsprechende Hälfte von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{r}_1^\infty$ durchlaufen; diese Hälften entsprechen einander so, dass Punkte, die auf der Hälfte $\mathfrak{A}$ liegen, ihre entsprechenden *nur* auf der Hälfte $\mathfrak{A}_1$ haben (nicht auf der andern), und Punkte, die auf der Hälfte $\mathfrak{B}$ liegen, ihre entsprechenden nur auf $\mathfrak{B}_1$ haben. Die vorhin aufgetretene Zweideutigkeit ist dadurch gehoben, und es bleibt nur noch zu bestimmen, wie die ent-

Fig. 13.



sprechenden Hälften aus der gegebenen projectivischen Beziehung zu ermitteln sind bei nicht perspectivischer Lage. Die ganze Beziehung ist bestimmt, sobald $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ und irgend ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gegeben sind, denn diese vertreten in der That drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1^\infty$, $\mathfrak{q}^\infty\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, die zur Bestimmung der projectivischen Beziehung erforderlich sind (§. 10); verfolgen wir nun den unzweideutig bestimmten Richtungssinn (§. 4) von $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{q}^\infty$ und nennen diese Hälfte $\mathfrak{A}$, so ist dadurch der Richtungssinn von $\mathfrak{r}_1^\infty$ durch $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{q}_1$ unzweideutig mitbestimmt, also die entsprechende Hälfte $\mathfrak{A}_1$ gefunden; die beiden andern Hälften sind daun natürlich auch entsprechende $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$; oder kürzer, diejenigen Hälften, auf welchen das eine gegebene Paar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ liegt, sind entsprechende.

Das Rechteck mit constantem Inhalt und veränderlichen Seiten kann insbesondere ein Quadrat werden, und die Seite dieses Quadrates, auf die entsprechenden Hälften von $\mathfrak{r}$ und von $\mathfrak{q}_1$ aus aufgetragen, liefert zwei besondere Punktenpaare, welche wir *Potenzpunkte* nennen und durch die Buchstaben

$$\mathfrak{g} \text{ und } \mathfrak{g}_1, \ \mathfrak{h} \text{ und } \mathfrak{h}_1$$

(Fig. 12) bezeichnen wollen; es ist also:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}\mathfrak{r} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{q}_1 \,,$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2 = (\mathfrak{r}\mathfrak{h})^2 \,.$$

Selbstverständlich behalten die Potenzpunkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ ihre Eigenthümlichkeit bei Aufhebung der perspectivischen Lage und sind daher ebenso wie $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ ausgezeichnete Elemente; ihre Construction ist in elementarer Weise mittels eines Kreises leicht zu bewerkstelligen.

Aus der Eigenschaft des constanten Rechtecks ergiebt sich für irgend zwei Paare entsprechender Punkte:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1$$

die Proportion:

$$\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}}{\mathfrak{r}\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1} \text{ oder } \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1} \,,$$

woraus durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten folgt:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1} \,;$$

und dies führt zu einem bemerkenswerthen Verhalten von Paaren entsprechender Punkte. Es lassen sich nämlich hiernach *gleiche* entsprechende Strecken auf den Trägern der beiden Punktreihen finden; in der That, damit $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ sei, ist es nur nothwendig, dass

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1\,,$$

also auch

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1$$

sei, d. h. wenn wir eine Strecke von beliebiger Grösse von $\mathfrak{r}$ aus abtragen $= \mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und dieselbe Strecke von $\mathfrak{q}_1$ aus auf dem zweiten Träger $= \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1$, alsdann zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ bestimmen, so ist die Strecke

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\,.$$

Wegen der willkürlichen Grösse der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und in Folge der Zweideutigkeit, vermöge deren dieselbe Strecke nach entgegengesetzten Richtungen hin abgetragen werden kann, erhalten wir auf den beiden projectivischen Punktreihen *ein doppeltes System entsprechender gleicher Strecken*; tragen wir nämlich eine Strecke von beliebiger Länge auf die erste Gerade von $\mathfrak{r}$ aus nach beiden Seiten hin auf:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{b}$$

und dieselbe Strecke auf die zweite Gerade von $\mathfrak{q}_1$ aus:

$$\mathfrak{c}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{r}\,,$$

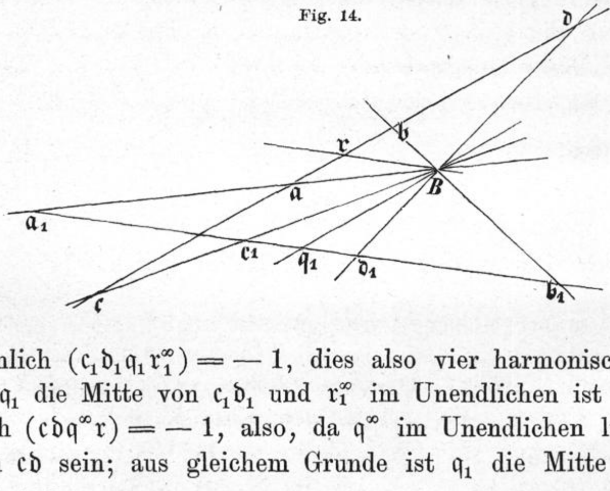
und bestimmen die vier entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, so ist nicht nur:

$$1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1\,, \end{cases}$$

sondern auch:

$$2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\,. \end{cases}$$

Fig. 14.



Weil nämlich $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1^\infty) = -1$, dies also vier harmonische Punkte sind, da $\mathfrak{q}_1$ die Mitte von $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{r}_1^\infty$ im Unendlichen ist (§. 8), so muss auch $(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{q}^\infty\mathfrak{r}) = -1$, also, da $\mathfrak{q}^\infty$ im Unendlichen liegt, $\mathfrak{r}$ die Mitte von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ sein; aus gleichem Grunde ist $\mathfrak{q}_1$ die Mitte von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; wir haben nun:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{d} & = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{a}\mathfrak{r} \quad & = \mathfrak{d}_1\mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{r}\mathfrak{b} \quad & = \mathfrak{q}_1\mathfrak{c}_1 \\ \hline \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 & \end{array} \quad \text{folglich}$$

und auf gleiche Weise:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1,$$

und verändern wir die willkürlich angenommene Länge $\mathfrak{r}\mathfrak{a}$, so erhalten wir das ganze doppelte System entsprechender gleicher Strecken. Fassen wir das gewonnene Resultat zusammen:

Bei zwei projectivischen Punktreihen giebt es zwei Systeme von Paaren entsprechender gleicher Strecken; jedes Paar des einen Systems hat seine beiden Endpunkte auf denselben entsprechenden Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{q}_1$ *aus); die Potenzpunkte* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{g}_1$ *repräsentiren zwei gleiche entsprechende Strecken von dem Werthe* 0, *ebenso* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}_1$; *die Strecken* $\mathfrak{r}\mathfrak{q}^\infty$ *und* $\mathfrak{r}_1^\infty\mathfrak{q}_1$ *haben den Werth* ∞; *die entsprechenden gleichen Strecken dieses Systems nehmen also alle Werthe von* 0 *bis* ∞ *an; jedes Paar des andern Systems hat dagegen seine beiden Endpunkte auf entgegengesetzten Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{q}_1$ *ein), und die entsprechenden Strecken dieses Systems nehmen nur Werthe an zwischen* $\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ *und* $\mathfrak{r}\mathfrak{q}^\infty = \mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1^\infty = \infty$. *Jeder Punkt einer Punktreihe ist ein Endpunkt für zwei Paare entsprechender gleicher Strecken, deren eines dem einen, das andere dem andern Systeme angehört, und deren Construction oben angegeben ist.*

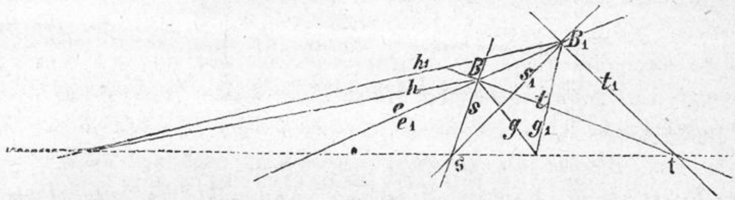
Wir werden später eine wichtige Anwendung hiervon zu machen haben (§. 16).

§. 13. Besondere Elemente bei zwei projectivischen Strahlbüscheln. Doppeltes System entsprechender gleicher Winkel.

Unter den unendlich vielen Paaren entsprechender Strahlen bei zwei projectivischen Strahlbüscheln giebt es einige von besonderem Interesse und von ähnlicher Bedeutung, wie bei zwei projectivischen Punktreihen die Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1^\infty$, $\mathfrak{q}^\infty\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ (§. 12); das ganze Doppelsystem entsprechender gleicher Strecken findet sich hier wieder als System entsprechender gleicher Winkel, und so wie dort die unendlichen Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{q}^\infty$ und $\mathfrak{r}_1^\infty\mathfrak{q}_1$ von besonderer Wichtigkeit sind, so sind es hier die *Schenkel entsprechender rechter Winkel;* denken wir uns nämlich die beiden projectivischen Strahlbüschel BB_1 in perspectivische Lage gebracht, so giebt es im Allgemeinen in dem ersten Strahlbüschel nur zwei besondere zu einander rechtwinklige Strahlen

s, t von solcher Beschaffenheit, dass die entsprechenden Strahlen $s_1 t_1$ auch zu einander rechtwinklig sind; diese heissen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel und können bei der perspectivischen Lage so ermittelt werden, dass wir uns einen Kreis durch B und B_1 gelegt denken, welcher auf dem perspectivischen Durchschnitt der beiden Strahlbüschel seinen Durchmesser hat, dessen Mittelpunkt also der Punkt sein würde, in welchem die in der Mitte von BB_1 auf dieser Verbindungslinie errichtete Senkrechte den perspectivischen Durchschnitt trifft; es giebt daher im Allgemeinen nur einen solchen Kreis (ausser wenn der perspectivische Durchschnitt selbst in der Mitte von BB_1 auf dieser Verbindungslinie senkrecht stände). Dieser Kreis trifft den perspectivischen Durchschnitt in zwei Punkten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$, welche mit B und B_1 verbunden diese besonderen Strahlenpaare ss_1 und tt_1 liefern (Fig. 15). Da diese Eigenschaft der besonderen Paare ss_1 und tt_1

Fig. 15.



unabhängig von der perspectivischen Lage ist, so giebt es auch bei zwei projectivischen Strahlbüscheln in allgemeiner Lage nur ein Paar entsprechender rechter Winkel, deren Schenkel eben durch die Buchstaben st und $s_1 t_1$ bezeichnet werden.

Um noch zu zeigen, dass in der That, wie auch die perspectivische Lage herbeigeführt werde, immer nur dieselben entsprechenden rechtwinkligen Strahlenpaare st und $s_1 t_1$ aus der Construction hervorgehen, weisen wir direct nach, dass solche Paare nur *einmal* vorkommen können; denn träten zu den Paaren:

$$st \text{ und } s_1 t_1$$

noch zwei andere Paare:

$$uv \text{ und } u_1 v_1$$

von gleicher Beschaffenheit, so dass nämlich die Winkel:

$$(st) = (s_1 t_1) = (uv) = (u_1 v_1) = 90^0$$

wären, so würde aus der Projectivität der Gebilde die Gleichheit der Doppelverhältnisse folgen:

$$(stuv) = (s_1 t_1 u_1 v_1),$$

und hieraus würde mit Berücksichtigung der obigen Werthe weiter folgen, dass auch die Winkel:

$$(su) = (s_1 u_1) \text{ u. s. w.}$$

sein müssten, d. h. die beiden projectivischen Strahlbüschel müssten überhaupt gleich sein, was bei allgemeiner Annahme derselben nicht der Fall ist.

Die rechtwinkligen entsprechenden Strahlenpaare st und $s_1 t_1$ kommen also nur *einmal* vor*).

Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Strahlen xx_1 und yy_1, so wird sich wegen der besonderen Eigenthümlichkeit der Schenkel entsprechender rechter Winkel die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(stxy) = (s_1 t_1 x_1 y_1)$$

wesentlich vereinfachen:

$$\frac{\sin(sx)}{\sin(tx)} : \frac{\sin(sy)}{\sin(ty)} = \frac{\sin(s_1 x_1)}{\sin(t_1 x_1)} : \frac{\sin(s_1 y_1)}{\sin(t_1 y_1)}$$

$$(sx) = (st) + (tx) = 90^0 + (tx)$$

$$\frac{\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(tx)} = \frac{\operatorname{tg}(t_1 y_1)}{\operatorname{tg}(t_1 x_1)} = \frac{\operatorname{tg}(s_1 x_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)} = \frac{\operatorname{tg}(sx)}{\operatorname{tg}(sy)};$$

also:

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 x_1) = \operatorname{tg}(ty) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 y_1) \cdot$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir das Paar yy_1 festhalten und das andere Paar entsprechender Strahlen der projectivischen Beziehung gemäss verändern, das Product der Tangenten constant bleibt:

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 x_1) = \text{const.}$$

d. h. bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten derjenigen Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel (ts_1 oder auch st_1) bilden, von unveränderlichem Werthe. Dieser Werth ist

---

*) Die Construction der Schenkel entsprechender rechter Winkel lässt sich auch ohne Zuhülfenahme der perspectivischen Lage bewerkstelligen. Ihr Beweis folgt allerdings erst aus späteren Betrachtungen. Sie lautet so:

In dem Strahlbüschel B ziehe man Paare rechtwinkliger Strahlen a und α, b und β etc., die entsprechenden Strahlen im Strahlbüschel B_1 seien a_1 und α_1, b_1 und β_1 etc.; sie werden im Allgemeinen nicht rechtwinklige Paare sein; legt man aber durch B_1 einen Kreis (m), so schneiden diese Strahlenpaare Sehnen im Kreise aus, welche sämmtlich durch einen festen Punkt o laufen; die Sehne om (ein Durchmesser des Kreises) trifft ihn in zwei solchen Punkten, welche mit B_1 verbunden das gesuchte Paar $s_1 t_1$ liefern, dessen entsprechende Strahlen im Strahlbüschel B, st sind, die ebenfalls auf einander senkrecht stehen.

in dem einen Falle der reciproke von dem im andern Falle, weil

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 x_1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(sx) \cdot \operatorname{tg}(t_1 x_1)} \text{ ist.}$$

Durch dieses constante Product (die *Potenz* der projectivischen Beziehung), welches an Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse tritt, wird mit Hülfe der Schenkel der entsprechenden rechten Winkel eine einfachere Relation zwischen entsprechenden Strahlen der beiden projectivischen Strahlbüschel hergestellt, und es liesse sich leicht eine einfache Construction entsprechender Strahlen daraus ableiten, wenn man noch die Uebereinstimmung des Drehungssinnes berücksichtigte. Ohne hierauf näher einzugehen, bemerken wir nur noch, dass, wenn die Factoren des einen sowohl wie des andern constanten Productes einander gleich werden, das Product in ein Quadrat übergeht; es giebt aber zwei besondere Strahlenpaare:

$$g \text{ und } g_1 \,,\; h \text{ und } h_1 \,,$$

für welche dieser Fall eintritt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(tx) \cdot \operatorname{tg}(s_1 x_1) &= \operatorname{tg}^2(tg) = \operatorname{tg}^2(s_1 g_1) \\ &= \operatorname{tg}^2(th) = \operatorname{tg}^2(s_1 h_1) \,. \end{aligned}$$

Für diese besonderen Strahlenpaare, welche *Potenzstrahlen* heissen sollen, wird:

$$\begin{aligned} (sg) &= (t_1 g_1) = (hs) = (h_1 t_1) \\ (tg) &= (s_1 g_1) = (ht) = (h_1 s_1) \quad \text{(Fig. 15).} \end{aligned}$$

Endlich giebt es auch bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ein *doppeltes System von entsprechenden gleichen Winkeln*, zu welchen uns eine analoge Betrachtung wie in §. 12 führt. Aus der allgemeinen Relation folgt nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)} \text{ und hieraus } \frac{\operatorname{tg}(xt) + \operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1) + \operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)},$$

also

$$\operatorname{tg}(xy) \left\{ \frac{1 - \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} \right\} = \operatorname{tg}(x_1 y_1) \left\{ \frac{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1) \operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)} \right\}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x_1 y_1)}{\operatorname{tg}(xy)} = \frac{\operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(xt)} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}(xt) \cdot \operatorname{tg}(ty)}{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1) \cdot \operatorname{tg}(s_1 y_1)} \,.$$

Sollen nun zwei Strahlen xy des einen Strahlbüschels dieselben Winkel einschliessen, als die entsprechenden $x_1 y_1$ des andern, so muss die linke Seite der letzten Gleichung 1 sein, d. h.

$$\operatorname{tg}(s_1 y_1) - \operatorname{tg}(xt) \,.\, \operatorname{tg}(ty) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(xt) - \operatorname{tg}(s_1 y_1) \,.\, \operatorname{tg}(xt) \,.\, \operatorname{tg}(x_1 s_1),$$

woraus folgt, weil

$$\operatorname{tg}(ty) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1 x_1) \text{ ist,}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(xt) \\ \operatorname{tg}(ty) \quad = \operatorname{tg}(x_1 s_1) \end{cases} \text{also auch} \begin{cases} \operatorname{tg}(sy) \quad = \operatorname{tg}(x_1 t_1) \\ \operatorname{tg}(t_1 y_1) = \operatorname{tg}(xs). \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich nun eine einfache Construction solcher Paare von Strahlen und ihrer entsprechenden, welche gleiche Winkel einschliessen; man trage, nachdem man die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel ss_1 tt_1 bestimmt hat, einen Winkel von beliebiger Grösse an den Strahl s sowohl nach einer wie auch nach der andern Drehrichtung hin an und erhält dadurch zwei Strahlen a und b; denselben Winkel trage man zweitens an den Strahl t_1 nach beiden Seiten an und erhält dadurch c_1 und d_1; sucht man alsdann die entsprechenden Strahlen $a_1 b_1 c d$ zu jenen vieren, so bilden folgende Paare gleiche Winkel:

$$1) \quad \begin{cases} (ac) = (a_1 c_1) \\ (bd) = (b_1 d_1) \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} (bc) = (c_1 b_1) \\ (ad) = (d_1 a_1). \end{cases}$$

Verändert man die willkürlich angenommene Grösse des anzutragenden Winkels, so liefern 1) und 2) zwei Systeme von Paaren entsprechender gleicher Winkel, deren eines die Eigenschaft hat, dass beide Schenkel des einen Winkels und ebenso die beiden Schenkel des entsprechenden gleichen Winkels innerhalb desselben Winkelraumes (st) und $(s_1 t_1)$ liegen; (st) und $(s_1 t_1)$ gehören selbst diesem Systeme an; ebenso (gg) und $(g_1 g_1)$, welche den Winkel 0 oder 180^0 repräsentiren, auch (hh) und $(h_1 h_1)$, während das andere System die Eigenschaft hat, dass die beiden Schenkel eines Winkels und auch die des entsprechenden gleichen Winkels durch die Strahlen s und t, anderseits durch s_1 und t_1 getrennt werden; in diesem Systeme nimmt kein Paar entsprechender gleicher Winkel den Werth 0 an, vielmehr schwanken die Werthe zwischen

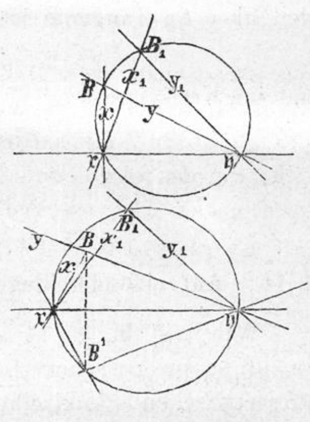
$$(gh) = (h_1 g_1) \text{ und } (st) = (t_1 s_1) = 90^0 \cdot$$

Diese mit den im vorigen Paragraphen abgeleiteten vollständig analogen Resultate ausführlicher zu entwickeln, können wir um so mehr unterlassen, als wir hier ein zweites sehr einfaches Mittel haben, die beiden Systeme entsprechender gleicher Winkel anzuschauen. Denken wir uns nämlich, was bekanntlich immer auf unendlich viele Arten zulässig ist (§. 11), die beiden projectivischen Strahlbüschel in perspectivische Lage gebracht, so können wir auf dieselbe Weise, wie wir die Schenkel entsprechender rechter Winkel bestimmt haben, überhaupt die Schenkel irgend eines Paares entsprechender gleicher Winkel dadurch ermitteln, dass wir durch die Mittelpunkte BB_1 der beiden Strahlbüschel irgend einen Kreis legen, welcher den perspectivischen Durchschnitt in zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ trifft; aus der bekannten Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind, folgt, dass die von B und B_1 nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gezogenen Strahlenpaare gleiche Winkel einschliessen:

$$(xy) = (x_1 y_1).$$

Verändern wir den durch B und B_1 gelegten Kreis, wodurch wir ein Kreisbüschel (sämmtliche durch zwei Punkte gehende Kreise) erhalten, so liefert dasselbe ein System von entsprechenden gleichen Winkeln, aber nur *eines* der beiden Systeme. Das andere System wird aber durch ein zweites Kreisbüschel bestimmt; denken wir uns nämlich aus B ein Perpendikel auf den perspectivischen Durchschnitt gefällt und um sich selbst bis B^1 verlängert, so dass B^1 das Spiegelbild von B in Bezug auf den perspectivischen Durchschnitt ist, so wird irgend ein durch B^1 und B_1 gelegter Kreis den perspectivischen Durchschnitt in zwei solchen Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ treffen, dass $B^1\mathfrak{x}$ und $B^1\mathfrak{y}$ dieselben Winkel (oder Nebenwinkel) mit einander bilden, wie $B_1\mathfrak{x}$ und $B_1\mathfrak{y}$; $B^1\mathfrak{x}$ und $B^1\mathfrak{y}$ bilden aber auch dieselben Winkel mit einander wie $B\mathfrak{x}$ und $B\mathfrak{y}$, folglich ist der Winkel:

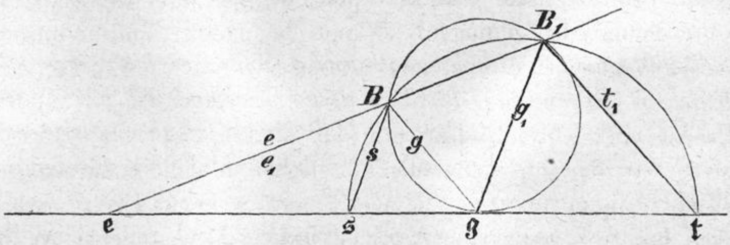
Fig. 16.



$$(yx) = (x_1 y_1) \quad \text{(Fig. 16.)}$$

Wir erhalten also, indem wir durch B^1B_1 das ganze Kreisbüschel legen, das zweite System entsprechender gleicher Winkel. Es ist einleuchtend, dass, wenn wir statt B_1 sein Spiegelbild B_1^1 in Bezug auf den perspectivischen Durchschnitt nehmen, das durch BB_1^1 gelegte Kreisbüschel dasselbe System, das durch $B^1B_1^1$ gelegte Kreisbüschel aber wieder das erste System liefert. Das eine der beiden Kreisbüschel, welche die Systeme entsprechender gleicher Winkel liefern, hat allemal seine beiden Schnittpunkte (BB_1) auf derselben Seite vom perspectivischen Durchschnitt, das andere (B^1B_1) aber nothwendig auf entgegengesetzten Seiten, so dass in dem einen Kreisbüschel zwei (leicht zu ermittelnde) Kreise sich vorfinden, welche den perspectivischen Durchschnitt berühren, in dem andern aber keine solche Berührungskreise vorhanden sind. Die nach den Berührungspunkten hin gehenden entsprechenden Strahlen sind g und g_1, h und h_1; die ihnen zugehörigen gleichen entsprechenden Winkel haben den Werth Null.

Fig. 17.



In der That, (s. Fig. 17) wenn ein Berührungskreis des Büschels (BB_1) den perspectivischen Durchschnitt in $\mathfrak{g}$ berührt, so ist in dem Dreieck $B\mathfrak{s}\mathfrak{g}$ der Aussenwinkel:

$$\angle B\mathfrak{s}\mathfrak{e} = \angle(sg) + \angle B\mathfrak{g}\mathfrak{s}$$

weil aber $\mathfrak{s}\mathfrak{g}$ Tangente ist, so wird:

$$\angle B\mathfrak{g}\mathfrak{s} = \angle BB_1\mathfrak{g}$$

und im Kreisviereck:

$$\angle B\mathfrak{s}\mathfrak{e} = \angle BB_1\mathfrak{g} + \angle(g_1 t_1)$$

sein, woraus folgt:

$$\angle(sg) = \angle(g_1 t_1) \text{ w. z. b. w.}$$

§. 14. Auf einander liegende projectivische Gebilde. Doppelelemente.

Wie wir in §. 11 gesehen haben, kommt es bei allgemeiner (nicht perspectivischer) Lage eines Strahlbüschels und einer mit ihm projectivischen Punktreihe nicht dreimal vor, dass Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen oder Punkte auf den ihnen entsprechenden Strahlen liegen, weil dann dieses Zusammenliegen bei allen Elementenpaaren stattfindet oder die Gebilde perspectivisch liegen; ob aber bei allgemeiner Lage weniger als drei (etwa zwei oder eines oder keines) entsprechende Elementepaare zusammenliegen, ist eine Cardinalfrage für die Theorie, die wir in doppelter Weise auffassen können. Seien $abc\ldots$ die Strahlen des Strahlbüschels B und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots$ die entsprechenden Punkte der mit ihm projectivischen Punktreihe $\mathfrak{A}_1$, dann wird das Strahlbüschel B den Träger $\mathfrak{A}_1$ selbst, den wir uns noch einmal als einen neuen Träger $\mathfrak{A}$ denken können, in einer neuen Punktreihe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$ treffen, und die vorige Frage reducirt sich auf folgende:

Fallen bei zwei beliebig auf einander liegenden projectivischen Punktreihen entsprechende Punkte zusammen, und wie viel Paare?

Oder wir können andererseits den Punkt B mit den Punkten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots$ durch neue Strahlen $a_1b_1c_1\ldots$ verbinden und erhalten in B zwei concentrische projectivische Strahlbüschel B und B_1; die obige Frage coincidirt daher mit folgender:

Fallen bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projectivischen Strahlbüscheln entsprechende Strahlen zusammen, und wie viel Paare?

Es ist einleuchtend, dass mit der einen Frage die andere mitbeantwortet wird, und wir wollen uns daher zunächst mit der ersten Frage beschäftigen.

Sind bei zwei gegebenen projectivischen Punktreihen die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ und die entsprechenden Hälften $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ (§. 12, Fig. 13) ermittelt, und denken wir uns die Träger der beiden Punktreihen irgend wie auf einander gelegt, so können zwei Fälle eintreten: entweder fallen Theile entsprechender Hälften zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ über einander oder nicht, d. h. die Abschnitte von $\mathfrak{r}$ bis ∞ und $\mathfrak{q}_1$ bis ∞ enthalten Theile entsprechender Hälften über einander oder nicht; diese beiden Fälle lassen sich noch kürzer dadurch von einander unterscheiden, dass in dem ersten Fall der Richtungssinn in beiden Punktreihen derselbe, im zweiten Fall entgegengesetzt ist, was wir leicht erkennen (Fig. 18), wenn wir auf entsprechenden Hälften von $\mathfrak{r}$ nach $\mathfrak{q}^\infty$ und von $\mathfrak{r}_1^\infty$ nach $\mathfrak{q}_1$ gehen. Wir nennen daher in dem ersten Falle die Punktreihen *gleichlaufend*, im zweiten Falle *ungleichlaufend* und können, sobald die beiden auf einander liegenden projectivischen Punktreihen durch irgend drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind, sofort entscheiden, ob sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, indem wir ihren Richtungssinn vergleichen (§. 4). Hieraus folgt, dass, wenn die auf einander liegenden Punktreihen *gleichlaufend* sind, der Werth der Potenz $(\mathfrak{r}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1)$ *negativ* sein muss, weil die Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ entgegengesetzten Richtungssinn haben; wenn dagegen die Punktreihen *ungleichlaufend* sind, der Werth der Potenz *positiv* ist.

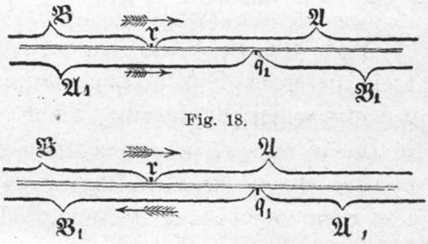


Fig. 18.

Ob nun zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, das wird in dem zweiten Fall, wenn die Punktreihen ungleichlaufend sind, sofort zu entscheiden sein; da nämlich nur entsprechende Hälften entsprechende Punkte enthalten, so werden in diesem Fall zusammenfallende entsprechende Punkte nur ausserhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ zu suchen sein; dort müssen sie aber nothwendig vorkommen; denn während ein Punkt $\mathfrak{x}$ der ersten Punktreihe die Hälfte $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}^\infty$ durchläuft, geht der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf der Hälfte $\mathfrak{A}_1$ in entgegengesetzter Richtung von $\mathfrak{r}_1^\infty$ bis $\mathfrak{q}_1$ und erst dann, wenn $\mathfrak{x}$ bis ins Unendliche gekommen ist, gelangt $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{q}_1$; sie laufen sich also entgegen und überholen sich, müssen sich mithin nothwendig irgendwo getroffen haben; dasselbe findet statt, wenn wir die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die andern Hälften $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in dem Sinne, welchen die projectivische Beziehung angiebt, durchlaufen lassen; es kommt daher nothwendig zweimal (auf jeder der unendlichen Strecken ausserhalb $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ einmal) vor, dass entsprechende Punkte zusammenfallen, und von diesen beiden *Doppelpunkten* der auf einander liegenden projectivischen Punktreihen steht der eine so weit von $\mathfrak{r}$ ab, wie der andere von $\mathfrak{q}_1$, wegen der Eigenschaft der constanten Potenz $(\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1)$. Es werden sich hieraus die Doppelpunkte in elementarer Weise construiren lassen; hat man nämlich die Potenzpunkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ (oder $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$) bestimmt, für welche:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{g}^2 \text{ ist,}$$

so wird man nur nöthig haben, in $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{q}_1$) eine Senkrechte auf den zusammenliegenden Trägern der beiden Punktreihen zu errichten, auf dieser zwei Stücke $= \mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\mathfrak{r}$ zu beiden Seiten von $\mathfrak{r}$ abzutragen und durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke einen Kreis zu legen, welcher seinen Mittelpunkt in der Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ hat; dieser Kreis geht durch die Doppelelemente der beiden Punktreihen, wie sich aus bekannten Elementarsätzen ergiebt; denn wäre $\mathfrak{z}$ ein ausserhalb $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ liegender Punkt von solcher Beschaffenheit, dass in ihm zwei entsprechende Punkte über einander lägen, so hätte man zur Bestimmung von $\mathfrak{z}$ die Relationen:

$$\mathfrak{z}\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{z}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$$
$$\mathfrak{z}\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{z}\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2,$$

also ein Rechteck zu construiren, dessen Inhalt und Differenz der Seiten gegeben sind; ein solches Rechteck lässt sich aber auf die angegebene Weise immer construiren, weil, wenn wir die Differenz der Seiten festhalten, durch Veränderung der Seiten selbst dem Inhalte des Rechtecks jeder beliebige Werth zuertheilt werden kann.

Anders verhält es sich im ersten Falle, wenn die auf einander liegenden projectivischen Punktreihen gleichlaufend sind; hier fallen nur innerhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ Theile entsprechender Hälften über einander; wenn daher zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, so können sie nur innerhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ enthalten sein. Wenn nun zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ über-einander fiele, etwa in den Punkt $\mathfrak{x}$, so müsste

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2 \quad \text{sein;}$$

wir hätten also zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{x}$ ein Rechteck zu construiren, für welches der Inhalt und die Summe der Seiten gegeben sind. Wenn aber die Summe der Seiten gegeben ist, so kann man aus ihr *nicht* Rechtecke von jedem beliebigen Inhalt machen, sondern der Inhalt des grössten Rechtecks, welches man herstellen kann, ist der des Quadrates, dessen Seite gleich der Hälfte der gegebenen Summe ist*); wenn daher der Abstand der Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ kleiner ist als die doppelte Seite des Quadrates, d. h. $2\mathfrak{r}\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$, so giebt es kein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, oder wenn

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{g}\mathfrak{h} \text{ (oder } \mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\text{)},$$

so giebt es keine Doppelpunkte; wenn dagegen

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 > \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so giebt es ein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, dessen Seiten von $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{q}_1$ aus zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ abgetragen, zwei solche End-punkte liefern, in deren jedem zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen über einander liegen; es giebt also in diesem Fall wieder zwei Doppelpunkte; ist insbesondere

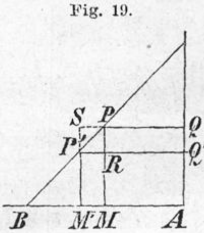
$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so wird das construirte Rechteck selbst ein Quadrat; die beiden zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ liegenden Doppelpunkte, von denen der eine so

---

*) Um uns in elementarer Weise davon zu überzeugen, dass unter allen Recht-ecken, welche dieselbe Summe der Seiten haben, das Quadrat den grössten In-halt besitzt, können wir folgendermassen verfahren:

Fig. 19.



Sei AB die gegebene Summe der Seiten und M die Mitte von AB; ferner $AMPQ$ das Quadrat über der Seite AM; ziehen wir BP und fällen aus irgend einem Punkte P' dieser Linie die Perpendikel $P'M'$ und $P'Q'$ auf AM und AQ, so hat das Rechteck $AM'P'Q'$ offenbar dieselbe Summe der Seiten; es ist aber, wenn sich $M'P'$ und PQ in S, $P'Q'$ und PM in R treffen, das Rechteck $MM'SP$ gleich dem Rechteck $PQQ'R$ (congruent), folglich $MM'P'R$ kleiner als $PQQ'R$, mithin das Rechteck $AM'P'Q'$ kleiner als das Quadrat $AMPQ$; da dasselbe von jedem andern in gleicher Weise con-struirten Rechteck gilt, so ist das Quadrat das grösste unter allen Rechtecken von gleichem Umfang.

weit von $\mathfrak{r}$ wie der andere von $\mathfrak{q}_1$ absteht, fallen zusammen; es giebt also in diesem Grenzfalle nur *einen* Doppelpunkt oder vielmehr zwei zusammenfallende.

Auch in diesem Falle zweier gleichlaufenden projectivischen Punktreihen können die Doppelpunkte durch elementare Construction gefunden werden: Man beschreibe über $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ als Durchmesser einen Kreis und trage in $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{q}_1$) auf der Tangente dieses Kreises nach beiden Seiten hin Stücke

$$= \mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\mathfrak{r} \text{ (oder } \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1\mathfrak{q}_1)$$

ab; die durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke zu dem Träger der Punktreihen gezogenen Parallelen treffen den Kreis in solchen Punkten, dass die von ihnen auf den Träger herabgelassenen Perpendikel zu Fusspunkten die gesuchten Doppelpunkte haben. Diese Construction, deren Richtigkeit einleuchtet, enthält auch das vorhin angegebene Kriterium, ob die Doppelpunkte reell vorhanden sind oder nicht; wenn nämlich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} < \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ (der Radius des Kreises), so schneidet die Parallele den Kreis in zwei reellen Punkten, es giebt also zwei Doppelpunkte; wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{g} > \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, so trifft die Parallele den Kreis nicht, es giebt also keine Doppelpunkte; wenn endlich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, so berührt die Parallele den Kreis, es giebt also nur einen Doppelpunkt.

Das gewonnene Resultat lässt sich, wie folgt, zusammenfassen:

Bei zwei auf einander liegenden projectivischen Punktreihen giebt es im Allgemeinen zweimal zwei zusammenfallende entsprechende Punkte (Doppelpunkte); diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Punktreihen ungleichlaufend sind, und liegen ausserhalb des Abstandes der Punkte $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{q}_1$ *symmetrisch zu diesen; sind dagegen die Punktreihen gleichlaufend, so sind die Doppelpunkte nur dann reell vorhanden, wenn der Abstand*

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 > \mathfrak{g}\mathfrak{h} \text{ (oder } \mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1),$$

und liegen zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ *symmetrisch zu diesen Punkten; ist*

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so giebt es nur einen Doppelpunkt (oder vielmehr: die beiden Doppelpunkte fallen selbst zusammen); dieser liegt in der Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ *und enthält als zusammenfallende Punkte eines der besonderen Paare* $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ *oder* $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$*; ist endlich*

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

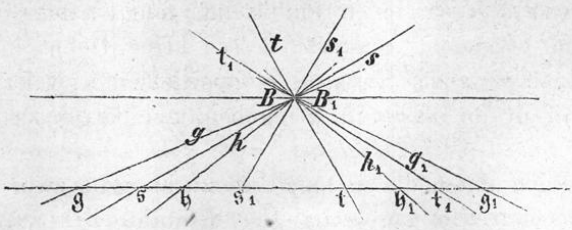
so liegt kein Paar entsprechender Punkte zusammen (oder, wie man sich ausdrückt, die beiden Doppelpunkte sind imaginär).

Sind die Punktreihen gleichlaufend und wir bestimmen die ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$, so werden bei dem Aufeinanderliegen der Punktreihen *Doppelelemente nur dann vorhanden sein, wenn die Strecken* $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ *sich in keinem ihrer Theile decken (ganz ausser einander liegen); sobald* $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ *ein Stück gemeinschaftlich haben, giebt es keine Doppelpunkte.* Den Uebergang bildet der Fall, wenn diese Strecken mit ihren Endpunkten entweder mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder mit $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$ an einander stossen; hieraus können wir, wenn wir die in sich festgehaltenen Punktreihen auf einander verschieben, den Spielraum erkennen, innerhalb dessen keine Doppelelemente vorhanden sind. Eine andere Art, die Doppelelemente zweier vereinigter Gebilde zu ermitteln, siehe in „Aufgaben und Sätze“ zu diesem Abschnitt.

Es wäre nun übrig, die analoge Untersuchung für zwei auf einander liegende (concentrische) projectivische Strahlbüschel auf demselben Wege durchzuführen; statt dessen können wir das Resultat dieser an sich nicht schwierigeren Untersuchung sofort aus dem vorhin erlangten ableiten und ziehen diesen kürzeren Weg vor. Schneiden wir nämlich die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine beliebige Transversale, welche wir uns doppelt denken als den Träger zweier Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, deren eine durch das eine, die andere durch das andere Strahlbüschel fixirt wird, so haben wir die beiden concentrischen Strahlbüschel in perspectivischer Lage mit zwei auf einander liegenden Punktreihen; durch die Doppelpunkte der letzteren gehen offenbar die Doppelstrahlen der ersteren; die Construction jener liefert also auch diese; sind die beiden ausgeschnittenen Punktreihen gleichlaufend hinsichtlich ihres Richtungssinnes, so sind es auch die beiden Strahlbüschel hinsichtlich ihres Drehungssinnes; sind jene aber ungleichlaufend, so sind es auch die Strahlbüschel; wir haben daher aus dem Vorigen zunächst das Resultat: Bei zwei auf einander liegenden projectivischen Strahlbüscheln giebt es, wenn sie ungleichlaufend sind, immer zweimal zwei reelle zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen); sind dagegen die beiden Strahlbüschel gleichlaufend, so können wir das dem obigen analoge Kriterium, wann Doppelstrahlen vorhanden sind, dadurch ableiten, dass wir die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine besondere Transversale schneiden, welche parallel läuft einer der beiden Richtungen, die den Winkel (st_1), also auch (ts_1) halbiren; diese Transversale besitzt nämlich die Eigenschaft, dass die beiden auf ihr ausgeschnittenen projectivischen

Punktreihen ihre Potenzpunkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ gerade in denjenigen Punkten haben, durch welche Potenzstrahlen $gg_1\ hh_1$ der beiden concentrischen Strahlbüschel gehen, so dass dann also das obige von den Punkten $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$ abhängige Kriterium sich direct übertragen hat. In der That, bei der angegebenen Lage der Transversale werden die Strahlen gh, deren Winkel durch die Strahlen st halbirt werden, und die Strahlen h_1g_1, deren Winkel durch t_1s_1 halbirt werden, mit der Transversale paarweise gleiche Winkel bilden und mit Rücksicht darauf, dass die Strahlbüschel BB_1 gleichlaufend sind, so liegen, wie sie Fig. 20 dar-

Fig. 20.



stellt. Für irgend zwei entsprechende Strahlen xx_1 gilt nun die Relation:

$$\operatorname{tg}(sx) \cdot \operatorname{tg}(x_1t_1) = \operatorname{tg}^2(sg),$$

und hieraus wird der Winkel (x_1t_1) leicht bestimmt durch (sx), wenn man die (§. 8, 3) für harmonische Strahlen gefundene ganz gleichlautende Relation in Betracht zieht; bestimmt man nämlich zu gh und x den vierten harmonischen, dem x zugeordneten Strahl ξ, so ist $(s\xi) = (x_1t_1)$; was nun die Lage von x_1 anbetrifft, so erkennen wir mit Rücksicht auf die entsprechenden Quadranten zwischen den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel, dass x_1 und ξ mit der Transversale ein gleichschenkliges Dreieck bilden müssen; wir können jetzt zu irgend einem Strahl x den entsprechenden x_1 in der einfachen Weise ermitteln, dass wir zuerst x in die symmetrische Lage zur Transversale uns gebracht denken nach ξ_1, d. h. so dass x dieselben Winkel mit der Transversale bildet wie ξ_1, und dann zu $g_1h_1\xi_1$ den vierten harmonischen, dem ξ_1 zugeordneten Strahl bestimmen, welcher x_1 sein wird. Wenn nun die Strahlen $gh\ldots x$ und $g_1h_1\ldots x_1$ der beiden concentrischen Strahlbüschel BB_1 die Transversale in den Punkten $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\ldots\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\ldots\mathfrak{x}_1$ zweier auf einander liegender Punktreihen begegnen, und die Mitte zwischen $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{r}$, die Mitte zwischen $\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ bezeichnet wird, so erhalten wir den entsprechenden Strahl zu $B\mathfrak{r}$, indem wir zu g_1h_1 und $B\mathfrak{q}_1$ den vierten harmonischen suchen; dieser ist aber nach §. 8 der Parallelstrahl, folglich ist $\mathfrak{r}$ in der That der dem unendlich entfernten $\mathfrak{r}_1^\infty$ entsprechende, ebenso $\mathfrak{q}_1$ der dem unendlich entfernten $\mathfrak{q}^\infty$ der anderen Punktreihe entsprechende; aus der vorigen Construction entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und der bekannten Eigenschaft harmonischer Punkte (§. 8) ergiebt sich ferner:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2 = (\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1)^2,$$

woraus denn folgt, dass in der That die mit $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$ bezeichneten Punkte jene Potenzpunkte sind.

Nunmehr sind wir berechtigt, das vorhin für zwei auf einander liegende projectivische Punktreihen ausgesprochene Resultat auf zwei concentrische projectivische Strahlbüschel folgendermassen zu übertragen:

Bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projectivischen Strahlbüscheln giebt es im Allgemeinen zweimal zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen); diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Strahlbüschel ungleichlaufend sind; sind sie dagegen gleichlaufend, so werden die beiden Doppelstrahlen nur dann vorhanden sein, wenn die besonderen Strahlen gh durch die Strahlen $h_1 g_1$ nicht getrennt werden; werden dagegen gh durch $h_1 g_1$ getrennt (d. h. fällt g_1 in einen Winkelraum zwischen (gh) und h_1 in den Nebenwinkelraum), so giebt es keine reellen Doppelstrahlen; den Uebergang bildet der Fall, wenn die Winkel (gh) und $(h_1 g_1)$ an einander stossen, so dass entweder gg_1 oder hh_1 zusammenfallen; in diesem Falle giebt es nur einen Doppelstrahl (d. h. die beiden Doppelstrahlen fallen selbst zusammen).

§. 15. Construction der Doppelelemente mittelst eines festen Kreises.

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Constructionen der Doppelpunkte und darnach auch der Doppelstrahlen setzen die Kenntniss der besonderen Elemente $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ voraus; es giebt aber eine andere viel einfachere Auflösung der Aufgabe:

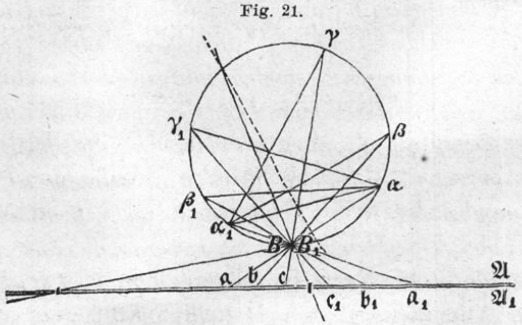
Wenn zwei auf einander liegende projectivische Punktreihen durch irgend drei Paare entsprechender Elemente $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ gegeben sind, die Doppelpunkte zu finden, wobei nur das Lineal und ein fester in der Ebene als gezeichnet angenommener Kreis benutzt wird.

Diese von *Steiner* angegebene Construction beruht auf der elementaren Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind. Verbinden wir irgend zwei Punkte BB_1 einer Kreisperipherie mit zwei andern Punkten derselben $\alpha\beta$ durch die Strahlen ab und a_1b_1, so ist entweder der Winkel (ab) gleich dem Winkel (a_1b_1) oder gleich seinem Nebenwinkel; jedenfalls also $\sin(ab) = \sin(a_1b_1)$;

lassen wir jetzt einen veränderlichen Punkt ξ die Kreisperipherie durchlaufen und verbinden ihn mit B und B_1 durch die Strahlen xx_1, so beschreiben dieselben zwei projectivische Strahlbüschel, weil die Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Strahlen des einen und den entsprechenden des andern Strahlbüschels offenbar gleich sind (da die Factoren dieser Doppelverhältnisse einzeln einander gleich sind).

Haben wir nun auf den zusammen liegenden Trägern zweier Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ willkürlich angenommen, und ist irgend ein Kreis in der Ebene gezeichnet, so verbinden wir einen beliebigen Peripheriepunkt desselben, den wir uns doppelt denken als den Mittelpunkt zweier Strahlbüschel BB_1, mit den Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ durch Strahlen $abc\,a_1b_1c_1$, welche die Peripherie des Kreises resp. in $\alpha\beta\gamma$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ treffen (Fig. 21). Bewegen

Fig. 21.



wir nun zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der durch die angenommenen drei Paar Elemente vollständig bestimmten projectivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, so beschreiben xx_1, ihre Verbindungsstrahlen mit BB_1, zwei concentrische projectivische Strahlbüschel und $\xi\xi_1$, die Schnittpunkte mit der Kreisperipherie, zwei krumme projectivische Punktreihen; so oft daher zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ zusammenfallen, müssen auch zwei entsprechende Strahlen xx_1 zusammenfallen und folglich auch zwei entsprechende Punkte $\xi\xi_1$ und umgekehrt. Nehmen wir irgend ein Punktpaar $\alpha\alpha_1$ auf dem Kreise und verbinden α mit $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\xi_1$, anderseits α_1 mit $\alpha\beta\gamma\ldots\xi$, so müssen die um α und α_1 als Mittelpunkte erhaltenen Strahlbüschel auch projectivisch sein, denn das Strahlbüschel (α) ist mit dem Strahlbüschel (B_1) projectivisch wegen der oben angegebenen Eigenschaft des Kreises, ebenso (α_1) mit (B); da nun (B) und (B_1) projectivisch sind, so sind es auch (α) und (α_1) (§. 10); diese beiden Strahlbüschel haben aber in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt: folglich liegen sie perspectivisch (§. 11), also die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden (ihrem perspectivischen Durchschnitt); dieser Ort des Schnittpunktes $(\alpha\xi_1, \alpha_1\xi)$ ist schon bestimmt durch die beiden Schnittpunkte:

$$(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta) \text{ und } (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma);$$

jeder Punkt dieser Geraden mit α und α_1 verbunden liefert zwei Strahlen, welche den Kreis in zwei entsprechenden Punkten $\xi\xi_1$ treffen; diese Gerade wird daher selbst den Kreis in solchen zwei Punkten treffen, in deren jedem zwei entsprechende Punkte $\xi\xi_1$ zusammenfallen; diese Punkte mit B (B_1) verbunden bestimmen auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die gesuchten Doppelpunkte, deren Construction sich also in folgender einfachen Weise gestaltet:

Man verbinde die gegebenen Punktpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ *mit irgend einem Peripheriepunkte* B (B_1) *eines festen Kreises durch Strahlen, welche die Peripherie zum zweiten Male in* $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\gamma\gamma_1$ *treffen, bestimme die Schnittpunkte:*

$$(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta)\ (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$$

und ihre Verbindungslinie $\mathfrak{L}$; *die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kreise verbinde man mit* B *durch Strahlen, welche die Träger der gegebenen auf einander liegenden Punktreihen in den gesuchten Doppelpunkten treffen.*

Da die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten trifft, so giebt es im Allgemeinen zwei Doppelpunkte; geht die Gerade $\mathfrak{L}$ aber vorbei, ohne den Kreis zu treffen, so giebt es keine Doppelpunkte; berührt sie den Kreis, so giebt es nur einen Doppelpunkt (zwei zusammenfallende). Das Resultat des §. 14 findet sich also durch diese Construction bestätigt, und es würde nicht schwer sein, die dort gefundenen Kriterien aus ihr von Neuem herzuleiten. Wir unterlassen dies, ebenso wie die Auflösung der analogen Aufgabe, die Doppelstrahlen zweier concentrischer projectivischer Strahlbüschel zu finden, da diese durch die vorige gleichzeitig gelöst ist.

Die Gerade $\mathfrak{L}$ muss auch durch den Punkt $(\beta\gamma_1, \gamma\beta_1)$ gehen, was wir daraus erkennen, dass nothwendig dieselben Doppelpunkte, also auch dieselbe Gerade $\mathfrak{L}$ hervorgehen würde, wenn wir bei der Construction anstatt des Paares $\alpha\alpha_1$ das Paar $\beta\beta_1$ gesetzt hätten. Wir gelangen daher beiläufig zu einem interessanten Satze vom Kreise:

Hat man irgend sechs Punkte eines Kreises $\alpha\beta\gamma$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, *so liegen die drei Schnittpunkte:*

$$(\alpha\beta_1, \beta\alpha_1)\ (\beta\gamma_1, \gamma\beta_1)\ (\gamma\alpha_1, \alpha\gamma_1)$$

auf einer Geraden.

Dieser Satz, dessen allgemeine Gültigkeit für jeden Kegelschnitt wir später darthun werden, lässt sich auch so aussprechen, wie ihn *Pascal* gefunden hat:

Verbindet man irgend sechs Punkte eines Kreises zu einem einfachen Sechseck in der Reihenfolge: $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$, so treffen sich die gegenüberliegenden Seiten desselben (die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste) in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Das obige Raisonnement würde seine beweisende Kraft verlieren, wenn die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kreis nicht träfe; die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich aber auf folgende Weise:

Die beiden von α und β ausgehenden Büschel sind projectivisch gleich:

$$\alpha\,(\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1) = \beta\,(\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1)$$

wegen der bekannten Grundeigenschaft des Kreises; das erste Büschel trifft die Gerade $\gamma\alpha_1$ in den vier Punkten:

$$\gamma \quad \alpha_1 \quad (\gamma\alpha_1,\, \alpha\beta_1) \quad (\alpha\gamma_1,\, \gamma\alpha_1)\,.$$

Das zweite Büschel trifft die Gerade $\gamma\beta_1$ in den vier Punkten:

$$\gamma \quad (\beta\alpha_1,\, \gamma\beta_1) \quad \beta_1 \quad (\beta\gamma_1,\, \gamma\beta_1)\,.$$

Diese beiden Punktreihen liegen perspectivisch, weil in ihrem Schnittpunkte, γ, entsprechende Punkte vereinigt sind; folglich treffen sich die drei Verbindungsstrahlen der übrigen entsprechenden Punkte in einem Punkte; die Verbindungslinie des ersten Paares entsprechender Punkte ist $\alpha_1\beta$, die des zweiten $\alpha\beta_1$, die des dritten die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$(\alpha\gamma_1,\, \gamma\alpha_1) \quad (\beta\gamma_1,\, \gamma\beta_1)$$

folglich liegt der Punkt $(\alpha\beta_1,\, \beta\alpha_1)$ auf derselben Geraden w. z. b. w.

Wenn bei zwei auf einander liegenden projectivischen Punktreihen *ein* Doppelpunkt bekannt ist, so bedarf es nicht mehr der vorigen Construction mit Hülfe des festen Kreises, um den andern Doppelpunkt zu finden, der dann nothwendig immer reell vorhanden ist, sondern dieser lässt sich mittelst des Lineals allein construiren auf folgende Art:

Sei $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der bekannte Doppelpunkt der beiden projectivischen auf einander liegenden Punktreihen und seien $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte, wodurch die ganze projectivische Beziehung bestimmt ist, so ziehe man durch $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ einen beliebigen Strahl und nehme in demselben irgend zwei Punkte BB_1 willkürlich an; die Schnittpunkte $(B\mathfrak{a},\, B_1\mathfrak{a}_1)$ und $(B\mathfrak{b},\, B_1\mathfrak{b}_1)$ verbunden, bestimmen eine Gerade, welche den Träger der beiden zusammenliegenden Punktreihen in dem gesuchten zweiten Doppelpunkte trifft. Die Richtigkeit dieser Construction erhellt aus der Construction auf Seite 22.

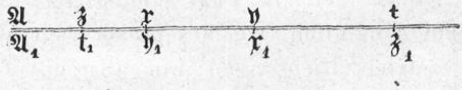
§. 16. Punktsystem (Involution von Punktpaaren).

Es giebt einen ausgezeichneten speciellen Fall zweier auf einander liegender projectivischer Punktreihen, welcher in der Folge eine besondere Wichtigkeit erlangt; dieser besteht darin, dass der Abstand der beiden Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ Null wird, oder dass die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zusammenfallen. Wenn zwei projectivische Punktreihen so auf einander liegen, dass die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander fallen, so fallen sämmtliche entsprechende gleiche Strecken des einen oder des andern Systems (§. 12) verkehrt auf einander, so dass, wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ zwei entsprechende gleiche Strecken sind, $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{y}_1$ und zugleich $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}_1$ fällt, und zwar wird das eine oder das andere System entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen, je nachdem die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, d. h. je nachdem entsprechende Hälften über einander liegen: $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}_1$ (dann sind die Punktreihen ungleichlaufend, Fig. 18), oder nicht entsprechende Hälften: $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}_1$ (dann sind die Punktreihen gleichlaufend); in dem ersten Falle existiren zwei Doppelpunkte; es fallen nämlich die Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ auf einander und die Punkte $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$; im zweiten Falle existiren keine Doppelpunkte nach dem obigen Kriterium (S. 42); es fällt insbesondere $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{g}_1$.

Es findet aber auch das Umgekehrte statt: *Wenn bei zwei auf einander liegenden projectivischen Punktreihen irgend ein Paar entsprechender gleicher Strecken verkehrt zusammen fällt*, d. h. $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$, *so fallen sämmtliche entsprechende gleiche Strecken desjenigen Systems, welchem jenes Paar angehört, verkehrt auf einander, insbesondere auch* $\mathfrak{r}$ *auf* $\mathfrak{q}_1$.

In der That, denken wir uns (Fig. 22) in den beiden auf einander liegenden Trägern der Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ so liegend, dass $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}_1$ liegt, und nehmen wir ein beliebiges drittes Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ (wodurch die projectivische Beziehung vollständig bestimmt wird) an, so wird der Punkt $\mathfrak{z}$ der ersten Punktreihe auf einem gewissen Punkte $\mathfrak{t}_1$

Fig. 22.



der zweiten liegen, und der ihm entsprechende Punkt $\mathfrak{t}$ der ersten Punktreihe wird bestimmt durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1)\,.$$

Es ist aber identisch: (Seite 7)

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1) = (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1)$$

also:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1)$$

und, wenn wir für $\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1$ die darüber stehenden Namen derselben Punkte setzen, $= (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1)$; da also

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1)$$

wird, so muss $\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{z}_1$ zusammenfallen, d. h. die Strecke $\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ fällt verkehrt auf die ihr gleiche entsprechende Strecke $\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1$; dies gilt hiernach von sämmtlichen Paaren entsprechender gleicher Strecken; weil insbesondere die beiden unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1^\infty$ und $\mathfrak{q}^\infty$ der beiden Punktreihen auf einander fallen, so müssen auch die ihnen entsprechenden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander fallen.

Ein solches Doppelgebilde zweier in dieser eigenthümlichen Weise aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen, so dass die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander fallen und zugleich die entsprechenden gleichen Strecken des einen ganzen Systems verkehrt auf einander liegen, heisst ein *Punktsystem* (oder nach der von *Desargues* eingeführten Bezeichnung eine *Involution* von Punktpaaren) und die Endpunkte eines solchen Paares auf einander fallender gleicher Strecken *ein Paar conjugirter Punkte* des Punktsystems; der dem unendlich entfernten Punkte conjugirte Punkt, in welchem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander liegen, heisst der *Mittelpunkt* des Punktsystems; wenn die das Punktsystem erzeugenden Punktreihen gleichlaufend sind, so heisst das Punktsystem ein *elliptisches*; es liegt dann ein Paar conjugirter Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkte, und bezeichnen wir mit o den Mittelpunkt, mit $x\xi$ irgend ein Paar conjugirter Punkte, so werden sämmtliche Paare conjugirter Punkte durch die Relation zusammengehalten:

$$ox \,.\, o\xi = \text{const.}\,;$$

denn x und ξ treten an die Stelle zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der beiden projectivischen Punktreihen, und in o liegen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ vereinigt, also gilt die Eigenschaft der constanten Potenz $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \text{const.}$ (§. 12); Doppelpunkte können in diesem Fall nicht vorkommen, wohl aber zeichnet sich *ein* Paar conjugirter Punkte vor den andern aus, dasjenige nämlich, welches gleich weit vom Mittelpunkte nach entgegengesetzten Richtungen hin absteht, für welches also das constante

Rechteck ein Quadrat wird; es sind dies offenbar die Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$, indem $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{g}_1$ auf $\mathfrak{h}$ fällt; dieses besondere Paar wollen wir wiederum die *Potenzpunkte* des elliptischen Punktsystems nennen, das constante Rechteck aber *die Potenz des Punktsystems*.

Wenn dagegen die das Punktsystem erzeugenden Punktreihen ungleichlaufend sind, also die entsprechenden gleichen Strecken des andern Systems verkehrt auf einander fallen, so heisst das Punktsystem ein *hyperbolisches*; es liegt ein Paar conjugirter Punkte immer auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus und sämmtliche Paare conjugirter Punkte werden wiederum durch die Relation zusammengehalten:

$$ox \cdot \mathfrak{o}\xi = \text{const.};$$

es fallen insbesondere zweimal zwei conjugirte Punkte zusammen (wenn nämlich das constante Rechteck ein Quadrat wird); dies geschieht für die Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ auf der einen Seite von o und für $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ auf der andern Seite; diese besonderen zusammenfallenden Punktpaare des Punktsystems heissen die *Doppelpunkte* oder *Asymptotenpunkte* des Punktsystems, welche nur beim hyperbolischen Punktsystem auftreten; sie liegen nach entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstande von o. Bezeichnen wir sie mit g und h, so drückt die Relation:

$$ox \cdot \mathfrak{o}\xi = (og)^2 = (oh)^2$$

zugleich ein merkwürdiges Verhalten sämmtlicher Paare conjugirter Punkte zu den Asymptotenpunkten des Punktsystems aus, indem $x\xi$ ein Paar zugeordnet-harmonischer Punkte zu g und h sind (Seite 14), also:

Sämmtliche Paare conjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems sind zugeordnet-harmonische Punkte zu den beiden Asymptotenpunkten desselben, und auch umgekehrt: *Sämmtliche Paare zugeordnet-harmonischer Punkte zu zwei festen Punkten einer Geraden bilden ein hyperbolisches Punktsystem, dessen beide Asymptotenpunkte die beiden festen Punkte sind.* Beim elliptischen Punktsystem findet dieses Verhalten nicht statt trotz der Eigenschaft des constanten Rechtecks, weil dort zwei conjugirte Punkte $x\xi$ immer auf entgegengesetzten Seiten von o liegen und die angezogene Eigenschaft harmonischer Punkte ausserdem erfordert, dass zwei zugeordnete Punkte auf derselben Seite vom Mittelpunkt aus gelegen seien.

Es mag hier noch ein besonderer Fall des Punktsystems erwähnt werden, welcher den Uebergang zwischen dem elliptischen und hyperbolischen Punktsystem bildet und daher das *parabolische* Punktsystem heisst; dieser tritt dann auf, wenn die beiden Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems zusammenfallen; alsdann fallen die allen

Punkten des Trägers conjugirten Punkte im Punktsystem in denselben einzigen Punkt hinein, in welchem die beiden Asymptotenpunkte vereinigt sind, weil (S. 14), wenn von vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete zusammenfallen, auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte in diesen hineinfallen muss. Wir haben also das einseitige Verhalten beim parabolischen Punktsystem, dass die allen Punkten conjugirten Punkte in einem einzigen vereinigt sind und zu diesem wiederum jeder beliebige Punkt des Trägers als conjugirt angesehen werden muss.

Rücksichtlich der Potenz der Punktsystems ist noch zu bemerken, dass für das *elliptische Punktsystem* die Potenz eine *negative*, für das *hyperbolische* eine *positive* Grösse ist, weil im ersten Fall je zwei conjugirte Punkte auf entgegengesetzter, im letzteren auf derselben Seite vom Mittelpunkt liegen; für das *parabolische Punktsystem* ist die Potenz *Null*.

Ein besonders einfacher Fall tritt beim hyperbolischen Punktsystem auf, wenn einer der beiden Asymptotenpunkte im Unendlichen liegt; in diesem Fall wird die Strecke zwischen je zwei conjugirten Punkten durch den andern im Endlichen befindlichen Asymptotenpunkt halbirt, und wir erhalten folgendes sehr einfache Doppelgebilde: alle Paare von Punkten $x\mathfrak{x}$ einer Geraden, welche zu einem festen Punkte g symmetrisch liegen. Ein solches Punktsystem nennt man ein *gleichseitig-hyperbolisches Punktsystem*; wie ersichtlich ist, kann es nur entstanden sein durch Aufeinanderlegen zweier projectivisch-gleicher Punktreihen, die ungleichlaufend aufeinander gelegt sind; sie haben einen Doppelpunkt im Unendlichen, der zugleich der Mittelpunkt dieses gleichseitig-hyperbolischen Punktsystems ist; der andere Doppelpunkt ist das Centrum der symmetrisch liegenden Paare.

Wegen des häufigen Auftretens von Punktsystemen bei geometrischen Untersuchungen heben wir die Grundeigenschaft eines solchen Doppelgebildes, dass es nämlich in sich projectivisch ist, noch besonders hervor:

Wenn wir bei einem Punktsystem von Punktpaaren, aus jedem Paare einen nehmen und diese als eine Reihe auffassen $abc\dots$, so bilden die conjugirten Punkte $\alpha\beta\gamma\dots$ eine mit der ersten Reihe projectivische Punktreihe, und die beiden Punktreihen liegen in der oben angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander. Es ist einleuchtend, dass wir dabei die conjugirten Punkte eines Paares mit einander vertauschen können, ohne die projectivische Beziehung zu alteriren, denn da die Endpunkte eines solchen Paares $\mathfrak{x}$ $(\mathfrak{y}_1)$ und $\mathfrak{x}_1$ $(\mathfrak{y})$ sind, so können wir es sowohl als $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auffassen, wie auch als $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}$. Es folgt ferner, dass Punktsysteme dieselbe allgemeine Eigenschaft der Projectivität besitzen, wie einfache Punktreihen selbst, d. h. wenn wir ein Punktsystem $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma\ldots$ mit irgend einem Punkte B durch Strahlenpaare verbinden, welche eine beliebige andere Transversale in den neuen Punktpaaren $a^1\alpha^1$, $b^1\beta^1$, $c^1\gamma^1\ldots$ treffen, so bilden diese ebenfalls ein Punktsystem; denn es bilden $a^1b^1c^1\ldots$ und $\alpha^1\beta^1\gamma^1\ldots$ zwei projectivische Punktreihen, welche sich in der eigenthümlichen Lage befinden, dass dem Punkt a^1 der ersten Punktreihe der Punkt α^1 der zweiten entspricht, aber auch gleichzeitig dem Punkt α^1, als der ersten Punktreihe angehörig betrachtet, der Punkt a^1 der zweiten Punktreihe entspricht; da also ein Paar entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen, so bilden auch $a^1\alpha^1$, $b^1\beta^1$, $c^1\gamma^1\ldots$ ein Punktsystem.

Aus der Eigenschaft der constanten Potenz:

$$ox \,.\, o\xi = \text{const.}$$

können wir uns ein leichtes Verfahren ableiten, Punktsysteme in ihrem ganzen Verlaufe herzustellen. Legen wir nämlich durch zwei conjugirte Punkte $a\alpha$ einen beliebigen Kreis und durch ein zweites Paar conjugirter Punkte $b\beta$ irgend einen zweiten Kreis, welcher den ersten in den Punkten P und Q treffe, so wird ein dritter Kreis, welcher durch PQ und x geht, nothwendig durch ξ gehen müssen, weil, wenn PQ den Träger des Punktsystems in o trifft, $oP \,.\, oQ = oa \,.\, o\alpha = ob \,.\, o\beta = ox \,.\, o\xi$ sein muss. Sämmtliche durch die Punkte PQ gelegten Kreise (Kreisbüschel) bestimmen also sämmtliche Punktpaare $x\xi$ eines Punktsystems, das mit dem angenommenen identisch ist, dessen Mittelpunkt durch die gemeinschaftliche Secante PQ des Kreisbüschels (oder denjenigen Kreis des Büschels, dessen Radius unendlich gross ist) bestimmt wird. Liegt der Punkt o ausserhalb der Strecke PQ, so liegt er auch ausserhalb jeder Strecke $x\xi$, ausserhalb aller Kreise des Büschels, das Punktsystem ist hyperbolisch; liegt o zwischen PQ, so liegt es auch innerhalb jeder Strecke $x\xi$, innerhalb sämmtlicher Kreise des Büschels, das Punktsystem ist elliptisch. Wir schliessen zugleich umgekehrt: *Ein Kreisbüschel mit zwei (reellen) gemeinschaftlichen Punkten PQ wird von einer beliebigen Transversale immer in einem Punktsysteme geschnitten, dessen Paare conjugirter Punkte die Schnittpunkte mit je einem Kreise des Büschels sind; das Punktsystem ist elliptisch, wenn die Transversale die Punkte P und Q trennt, d. h. auf entgegengesetzten Seiten von sich hat, hyperbolisch, wenn P und Q auf derselben Seite von der Transversale liegen.* Im letzteren Fall giebt es zwei besondere Kreise des Büschels, welche die Transversale berühren;

die Berührungspunkte sind die Asymptotenpunkte des Punktsystems. Aus dieser Construction eines Punktsystems vermittelst des Kreisbüschels geht schon hervor, dass *ein Punktsystem vollständig bestimmt ist durch zwei Paare* (willkürlich anzunehmender) *conjugirter Punkte;* dies folgt aber auch aus der ursprünglichen Entstehung des Punktsystems, denn nehmen wir $a\alpha$, $b\beta$ als zwei Paare conjugirter Punkte willkürlich an, so vertritt $a\alpha$ die Stelle von zwei Paaren $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}$, $b\beta$ die Stelle von zwei andern Paaren $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}$ entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$; es scheint also, als ob durch diese vier Paar entsprechender Punkte die projectivische Beziehung überbestimmt sei, da doch drei Paare entsprechender Elemente zur Bestimmung der projectivischen Beziehung nothwendig und ausreichend sind; dieser Scrupel verschwindet aber, da diese vier Paare so eigenthümlich liegen, dass das vierte nur eine Folge der drei andern ist, dass also kein Widerspruch eintritt, und in der That die projectivische Beziehung durch sie gerade bestimmt wird. Es liegen nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ zusammen in a, ebenso $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ zusammen in α, ferner $\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$ in b und $\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$ in β; folglich ist identisch:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1),$$

und da (Seite 7) allgemein:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) \text{ ist},$$

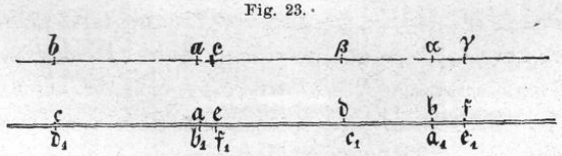
so folgt:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1).$$

Diese vier Paare entsprechender Elemente vertreten also nur drei Paare und bestimmen vollständig die projectivische Beziehung, also auch das ganze Punktsystem. Zwischen drei Paaren conjugirter Punkte eines Punktsystems muss daher eine Bedingung bestehen, welche unmittelbar hervorgeht aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse; fügen wir nämlich noch ein drittes Paar conjugirter Punkte $c\gamma$ den vorigen hinzu und denken uns dieses als $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}$ (Fig. 23), so ist:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1)$$

Fig. 23.



oder durch die Bezeichnung der conjugirten Punkte des Punktsystems ausgedrückt:

$$(a\alpha b c) = (\alpha a \beta \gamma),$$

das heisst:

$$\frac{ab}{\alpha b} : \frac{ac}{\alpha c} = \frac{\alpha\beta}{a\beta} : \frac{\alpha\gamma}{a\gamma}.$$

Dies lässt sich in mehr symmetrischer Gestalt so schreiben:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \dfrac{ab\,.\,a\beta}{\alpha b\,.\,\alpha\beta} = \dfrac{ac\,.\,a\gamma}{\alpha c\,.\,\alpha\gamma} & \text{und in gleicher Weise:} \\ \dfrac{bc\,.\,b\gamma}{\beta c\,.\,\beta\gamma} = \dfrac{ba\,.\,b\alpha}{\beta a\,.\,\beta\alpha} & \\ \dfrac{ca\,.\,c\alpha}{\gamma a\,.\,\gamma\alpha} = \dfrac{cb\,.\,c\beta}{\gamma b\,.\,\gamma\beta}. & \end{cases}$$

Ferner können wir folgende Gleichheit der Doppelverhältnisse ansetzen:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{f}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{f}_1)$$

oder in der andern Bezeichnung:

$$(ab\alpha\gamma) = (\alpha\beta a c),$$

das heisst:

$$\frac{a\alpha}{b\alpha} : \frac{a\gamma}{b\gamma} = \frac{\alpha a}{\beta a} : \frac{\alpha c}{\beta c};$$

da nun $(\alpha a) = -(a\alpha)$, so hebt sich ein Factor fort und es bleibt die Relation:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} a\beta \cdot b\gamma \cdot c\alpha = a\gamma \cdot b\alpha \cdot c\beta & \text{und durch Vertau-} \\ a\beta \cdot bc \cdot \gamma\alpha = ac \cdot b\alpha \cdot \gamma\beta & \text{schung je eines der} \\ b\gamma \cdot ca \cdot \alpha\beta = ba \cdot c\beta \cdot \alpha\gamma & \text{drei Paar conjugirter} \\ c\alpha \cdot ab \cdot \beta\gamma = cb \cdot a\gamma \cdot \beta\alpha. & \text{Punkte:} \end{cases}$$

Diese 7 Relationen zwischen drei Paaren conjugirter Punkte eines Punktsystems hängen natürlich alle von einer unter ihnen ab; sie sind von *Desargues* aufgestellt, der solche sechs Punkte, welche diesen Bedingungen genügen, „*sechs Punkte in Involution*“ nannte.

Es ist für die Folge wichtig, ein Kriterium zu besitzen, welches sofort entscheidet, ob ein durch zwei Paare conjugirter Punkte gegebenes Punktsystem elliptisch oder hyperbolisch ist; dies erkennen wir unmittelbar aus der oben gefundenen Eigenschaft, dass beim hyperbolischen Punktsystem jedes Paar conjugirter Punkte auf derselben Seite vom Mittelpunkt liegt, also wenn $a\alpha$ und $b\beta$ irgend zwei Paare sind, entweder die Strecke $a\alpha$ ganz ausserhalb der Strecke $b\beta$ oder ganz innerhalb derselben oder endlich die Strecke $b\beta$ ganz innerhalb $a\alpha$ liegt, d. h. die Punkte $a\alpha$ werden durch die Punkte $b\beta$ nicht getrennt (liegt b innerhalb $a\alpha$, so liegt auch β innerhalb $a\alpha$, liegt b

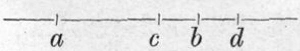
ausserhalb $a\alpha$, so liegt auch β ausserhalb $a\alpha$); während beim elliptischen Punktsystem ein Paar conjugirter Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkte liegt, d. h. $a\alpha$ durch $b\beta$ und umgekehrt getrennt wird; das gesuchte Kriterium ist also folgendes:

Wenn ein Punktsystem durch irgend zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ *und* $b\beta$ *gegeben ist, so wird es ein elliptisches oder hyperbolisches sein, je nachdem die Punkte* $a\alpha$ *durch* $b\beta$ *und zugleich* $b\beta$ *durch* $a\alpha$ *getrennt werden oder nicht.*

Hieraus entspringt folgende Betrachtung: Nehmen wir auf einer Geraden vier beliebige Punkte $abcd$ an, so lassen sich dieselben auf dreifache Weise zu Paaren ordnen, nämlich:

$$ab,\ cd \mid ac,\ bd \mid ad,\ bc\,.$$

Bei jeder dieser Zuordnungen wird durch die zwei Punktpaare, welche als conjugirte aufgefasst werden, ein Punktsystem bestimmt, und von diesen drei Punktsystemen ist immer eines elliptisch, die beiden andern hyperbolisch, nämlich nach dem vorigen Kriterium z. B.



$ab,\ cd$	$ac,\ bd$	$ad,\ bc$
elliptisch (e)	hyperbolisch (h)	hyperbolisch (h_1).

Nehmen wir von einem beliebigen Punkte p des Trägers den conjugirten Punkt rücksichtlich dieser drei Punktsysteme und bezeichnen wir ihn beziehlich durch:

$$\pi_e \qquad \pi_h \qquad \pi_{h_1}\,,$$

so bieten diese Punkte eine leicht erkennbare Eigenschaft dar; es findet nämlich wegen der Grundeigenschaft der Punktsysteme die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse statt:

$$\begin{cases} (abcp) = (bad\pi_e) \\ (acdp) = (cab\pi_h) \\ (adcp) = (dab\pi_{h_1})\,. \end{cases}$$

Die letzte Gleichheit lässt sich auch so schreiben:

$$(acdp) = (dba\pi_{h_1})$$

und zeigt, mit der vorletzten verglichen, dass

$$(cab\pi_h) = (dba\pi_{h_1})$$

oder

$$(abc\pi_h) = (bad\pi_{h_1}) \text{ wird };$$

folglich sind π_h und π_{h_1} ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (e), gleicherweise π_e und π_h ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (h_1), endlich π_e und π_{h_1} ein Paar conjugirter Punkte des Punktsystems (h). Hiernach gilt folgender Satz:

Vier beliebige Punkte in einer Geraden als zwei Paare conjugirter Punkte aufgefasst bestimmen drei verschiedene Punktsysteme, von denen immer eines elliptisch (e) und die beiden andern hyperbolisch sind (h) und (h_1). Nimmt man von irgend einem Punkte p in der Geraden den conjugirten Punkt in Bezug auf jedes dieser drei Punktsysteme und heissen dieselben beziehlich $\pi_e \pi_h \pi_{h_1}$, so sind π_h und π_{h_1} ein Paar conjugirter Punkte in dem Systeme (e), π_e und π_{h_1} ein Paar conjugirter Punkte in dem Systeme (h) und π_e und π_h ein Paar conjugirter Punkte in dem Systeme (h_1).

Auch zeigt sich das eigenthümliche reciproke Verhalten, dass *die vier Punkte $p\pi_e\pi_h\pi_{h_1}$ zu den vier angenommenen Punkten $abcd$ genau dieselbe Beziehung haben, wie diese zu jenen*, d. h. wenn man von $p\pi_e\pi_h\pi_{h_1}$ ausgeht und zu a die drei conjugirten sucht, erhält man bcd, was aus der Projectivität der Punktreihen hervorgeht:

$$\left.\begin{matrix} abcdp & \pi_e\,\pi_h\,\pi_{h_1} \\ badc\pi_e & p\,\pi_{h_1}\,\pi_h \end{matrix}\right\}(e)$$

$$\left.\begin{matrix} abcdp & \pi_e\,\pi_h\,\pi_{h_1} \\ cdab\pi_h & \pi_{h_1}\,p\,\pi_e \end{matrix}\right\}(h)$$

$$\left.\begin{matrix} abcd\,p & \pi_e\,\pi_h\,\pi_{h_1} \\ dcba\,\pi_{h_1} & \pi_h\,\pi_e\,p \end{matrix}\right\}(h_1)$$

Schliesslich möge noch eine Frage erörtert werden, welche sich bei geometrischen Untersuchungen öfters darbietet: *Ereignet es sich bei zwei beliebig auf einander gelegten Punktsystemen, dass ein Paar conjugirter Punkte des einen auf ein Paar des andern Punktsystems zu liegen kommt?* Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir die drei möglichen Fälle von einander trennen: ob 1) beide Punktsysteme elliptisch sind oder 2) eines elliptisch und das andere hyperbolisch, oder 3) beide hyperbolisch sind. Denken wir uns bei einem Punktsystem jedes Paar conjugirter Punkte als Durchmesser eines Kreises, so erhalten wir nach dem Obigen ein Kreisbüschel und zwar mit zwei reellen Schnittpunkten, wenn das Punktsystem ein elliptisches ist, dagegen mit einer ideellen gemeinschaftlichen Secante (Linie der gleichen Potenzen), wenn das Punktsystem ein hyperbolisches ist. Sind nun ad 1) die beiden auf einander liegenden Punktsysteme elliptisch, so haben die beiden zugehörigen Kreisbüschel reelle Schnittpunkte PQ und P_1Q_1, welche gleich weit abstehen von der gemeinschaftlichen Centrale und symmetrisch liegen zu derselben. Es giebt offenbar einen Kreis durch die vier Punkte PQP_1Q_1, welcher beiden Kreisbüscheln angehört, also die Centrale in einem Punktpaar trifft, welches beiden Punktsystemen gemeinschaftlich ist; dies ist das einzige und immer vorhandene. Ist ferner ad 2) das eine Punktsystem elliptisch, das andere aber hyperbolisch, so hat das eine Kreisbüschel zwei reelle Punkte PQ, das andere keine. Es giebt aber immer einen einzigen leicht zu ermittelnden Kreis des letzteren, welcher durch P und Q geht und dadurch gefunden werden kann, dass man durch P (oder Q) und die beiden Asymptotenpunkte gh des hyperbolischen Punktsystems (Grenzpunkte des Kreisbüschels) einen Kreis legt und einen andern Kreis construirt, der diesen in P und Q rechtwinklig schneidet; letzterer gehört beiden Kreisbüscheln an und bestimmt also auf der Centrale das einzige und immer vorhandene Paar conjugirter Punkte, welches beiden Punktsystemen gemeinschaftlich ist. Sind endlich ad 3) beide auf einander liegenden Punktsysteme hyperbolisch, so haben beide Kreisbüschel ideelle gemeinschaftliche Secanten; seien gh und g_1h_1 die Asymptotenpunkte des einen und andern Punktsystems, und beschreibt man über ihnen als Durchmesser zwei Kreise, so kommt es darauf an zu entscheiden, ob ein Kreis existirt, welcher seinen Mittelpunkt in der Centrale hat und beide zuletzt construirten Kreise rechtwinklig schneidet. Dieser ist nie vorhanden, wenn das eine Paar Asymptotenpunkte durch das andere getrennt wird, also gh einen und nur einen der Punkte g_1h_1 zwischen sich hat. Wenn dagegen das eine Paar durch das andere nicht getrennt wird, also entweder gh ganz ausserhalb g_1h_1 oder ganz zwischen g_1h_1 liegt oder umgekehrt, so giebt es einen einzigen bestimmten Kreis von der verlangten Beschaffenheit, welcher leicht zu ermitteln ist. Dieser bestimmt auf der Centrale das einzige beiden Punktsystemen gemeinschaftliche Paar conjugirter Punkte. Das Resultat dieser mit Hülfe von Kreisbüscheln durchgeführten Untersuchung lässt sich nun unabhängig hiervon so aussprechen:

Zwei auf einander liegende Punktsysteme haben immer ein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte, sobald sie beide elliptisch sind oder eines elliptisch und das andere hyperbolisch ist. Wenn aber beide hyperbolisch sind, so haben sie nur dann ein reelles Paar conjugirter Punkte gemeinschaftlich, wenn die Asymptotenpunkte des einen Punktsystems durch die des andern nicht getrennt werden; werden sie getrennt (d. h. liegt von den beiden Asymptotenpunkten des einen Punktsystems der eine zwischen, der andere ausserhalb der beiden Asymptotenpunkte des andern Punktsystems), *so existirt kein gemeinschaftliches Paar conjugirter Punkte.* Dass im Allgemeinen nicht zwei Paare conjugirter

Punkte den beiden Punktsystemen gemeinschaftlich sein können, ist an sich klar, weil sonst die Punktsysteme identisch sein müssten. (Vergl. §. 31.)

Hieraus ergiebt sich insbesondere folgende Eigenschaft des elliptischen Punktsystems: *In einem elliptischen Punktsystem giebt es allemal zu einem beliebig gegebenen Paare conjugirter Punkte* $a\alpha$ *ein einziges und bestimmtes anderes Paar* $a^1\alpha^1$, *welches durch das erstere harmonisch getrennt wird*, d. h. so liegt, dass $a\alpha a^1\alpha^1$ vier harmonische Punkte sind, und zwar $a\alpha$, ebenso $a^1\alpha^1$ zugeordnet. Beim hyperbolischen Punktsystem ist dies nicht möglich.

Hat man ein elliptisches Punktsystem, bei dem $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ zwei solche Paare conjugirter Punkte sind, die harmonisch durch einander getrennt werden, so steht der Mittelpunkt o des Punktsystems in eigenthümlicher Beziehung zu den Mittelpunkten der Strecken $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$, welche $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^1$ heissen mögen; es sind nämlich $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^1$ ein Paar conjugirter Punkte des gegebenen Punktsystems selbst, und der vierte harmonische Punkt zu $a\alpha o$ ist $\mathfrak{m}^1$, der vierte harmonische zu $a^1\alpha^1 o$ ist $\mathfrak{m}$, also $(a\alpha o\mathfrak{m}^1) = -1$ und $(a^1\alpha^1 o\mathfrak{m}) = -1$. Dies folgt leicht aus elementaren Sätzen, wenn man über $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ als Durchmesser zwei Kreise beschreibt, die sich rechtwinklig schneiden u. s. w.

§. 17. Strahlsystem (Involution von Strahlenpaaren).

Der im vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtung steht eine gleichlaufende zur Seite für zwei in der Weise auf einander liegende (concentrische) projectivische Strahlbüschel, dass die entsprechenden gleichen Winkel des einen oder des anderen System verkehrt auf einander fallen. Da diese Betrachtung der vorigen ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann, so genüge es, nur die Resultate anzuführen, welche auch unmittelbar durch perspectivische Projection aus den vorigen abgeleitet werden können:

Liegen zwei projectivische concentrische Strahlbüschel in der Weise auf einander, dass die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel st, s_1t_1 *verkehrt auf einander fallen:* s *auf* t_1 *und* t *auf* s_1, *so fallen die Schenkel sämmtlicher Paare des einen oder andern Systems entsprechender gleicher Winkel* $(xy) = (x_1y_1)$ *oder* $(xy) = (y_1x_1)$ (S. 37) *verkehrt auf einander, nämlich* x *auf* y_1 *und* y *auf* x_1 *und zwar findet dieses für das eine oder andere System statt, je nachdem die Strahlbüschel gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.*

Wenn bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln die Schenkel *irgend eines Paares entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen, xy auf y_1x_1, so fallen sämmtliche Paare von Schenkeln entsprechender gleicher Winkel desjenigen Systems, welchem jenes Paar angehört, verkehrt auf einander.*

Nur bei den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel st, s_1t_1, welche beiden Systemen gemeinschaftlich angehören, kann sowohl das eine, wie das andere System in der angegebenen Weise zur Deckung gebracht werden, indem man die Strahlbüschel einmal gleichlaufend, das andere Mal ungleichlaufend so auf einander legt, dass s auf t_1 und t auf s_1 fällt. Ein solches Doppelgebilde heisst ein *Strahlsystem* (oder eine *Involution von Strahlenpaaren*), die Schenkel irgend eines Paares verkehrt auf einander fallender entsprechender gleicher Winkel *ein Paar conjugirter Strahlen* des Strahlsystems, die Schenkel der auf einander fallenden entsprechenden rechten Winkel $s(t_1)$ und $t(s_1)$ *die Axen des Strahlsystems.* Wenn die das Strahlsystem erzeugenden Strahlbüschel gleichlaufend sind, so heisst dasselbe ein *elliptisches*, wenn sie ungleichlaufend sind, ein *hyperbolisches*; im letzteren Fall liegen die besonderen Strahlen gg_1 auf einander und ebenfalls hh_1; diese beiden Doppelstrahlen heissen die *Asymptoten* des hyperbolischen Strahlsystems; ihre Winkel werden gehälftet durch die Axen; im ersten Fall giebt es keine Doppelstrahlen, es fallen indessen g auf h_1 und h auf g_1, und diese besonderen Strahlen heissen *Potenzstrahlen.*

Sind $x\xi$ irgend ein Paar conjugirter Strahlen des Strahlsystems, m und μ die Axen, so ist immer:

$$\operatorname{tg}(mx) \cdot \operatorname{tg}(m\xi) = \text{const.},$$

also auch:

$$\operatorname{tg}(\mu x) \cdot \operatorname{tg}(\mu\xi) = \text{const.};$$

doch liegt beim elliptischen Strahlsystem ein Paar conjugirter Strahlen $x\xi$ immer so, dass, wenn x in einem Quadranten $(m\mu)$ liegt, ξ in dem nebenliegenden Quadranten sich findet, während beim hyperbolischen Strahlsystem jedes Paar $x\xi$ in demselben Quadranten sich findet, also beim elliptischen Strahlsystem jedes Paar $x\xi$ durch die Axen $m\mu$ getrennt wird, beim hyperbolischen keines; daraus folgt, dass *sämmtliche Paare conjugirter Strahlen eines hyperbolischen Strahlsystems zugeordnetharmonische Strahlen sind zu den beiden Asymptoten*, und auch umgekehrt: *Alle Paare zugeordnet-harmonischer Strahlen zu zwei festen Strahlen bilden ein hyperbolisches Strahlsystem, dessen beide Asymptoten die beiden festen Strahlen sind.* Beim elliptischen Strahlsystem findet dieses Verhalten nicht statt.

Ein Strahlsystem ist ein in sich projectivisches Doppelgebilde in der Art, dass, wenn man aus jedem Paare conjugirter Strahlen einen herausnimmt und diese als ein Strahlbüschel $abc\ldots$ auffasst, die conjugirten Strahlen $\alpha\beta\gamma\ldots$ ein mit dem ersten projectivisches Strahlbüschel bilden und diese beiden Strahlbüschel in der angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander liegen. Wir können dabei die conjugirten Strahlen eines Paares mit einander vertauschen, ohne jene projectivische Beziehung zu alteriren, denn da die Strahlen eines solchen Paares nach der ursprünglichen Entstehung des Strahlsystems als $x(y_1)$ und $x_1(y)$ aufgefasst werden müssen, so können sie sowohl als xx_1 gelten, wie auch als y_1y. Das Strahlsystem besitzt die allgemeine Eigenschaft der Projectivität, dass es auf jeder beliebigen Transversale ein Punktsystem ausschneidet, dessen Paare conjugirter Punkte durch die Paare conjugirter Strahlen fixirt werden, und umgekehrt, jedes Punktsystem mit irgend einem Punkte der Ebene durch Strahlen verbunden liefert ein Strahlsystem.

Ein Strahlsystem ist vollständig bestimmt durch zwei Paare (willkürlich anzunehmender) conjugirter Strahlen; zwischen drei Strahlenpaaren $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ finden die aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse entspringenden Relationen statt:

$$\text{I}^1.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(ab)\,.\,\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\,.\,\sin(\alpha\beta)} = \dfrac{\sin(ac)\,.\,\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\,.\,\sin(\alpha\gamma)} \\[2ex] \dfrac{\sin(bc)\,.\,\sin(b\gamma)}{\sin(\beta c)\,.\,\sin(\beta\gamma)} = \dfrac{\sin(ba)\,.\,\sin(b\alpha)}{\sin(\beta a)\,.\,\sin(\beta\alpha)} \\[2ex] \dfrac{\sin(ca)\,.\,\sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a)\,.\,\sin(\gamma\alpha)} = \dfrac{\sin(cb)\,.\,\sin(c\beta)}{\sin(\gamma b)\,.\,\sin(\gamma\beta)}. \end{cases}$$

$$\text{II}^1.\quad \begin{cases} \sin(a\beta)\cdot\sin(b\gamma)\cdot\sin(c\alpha) = \sin(a\gamma)\cdot\sin(b\alpha)\cdot\sin(c\beta) \\ \sin(a\beta)\cdot\sin(bc)\cdot\sin(\gamma\alpha) = \sin(ac)\cdot\sin(b\alpha)\cdot\sin(\gamma\beta) \\ \sin(b\gamma)\cdot\sin(ca)\cdot\sin(\alpha\beta) = \sin(ba)\cdot\sin(c\beta)\cdot\sin(\alpha\gamma) \\ \sin(c\alpha)\cdot\sin(ab)\cdot\sin(\beta\gamma) = \sin(cb)\cdot\sin(a\gamma)\cdot\sin(\beta\alpha). \end{cases}$$

Es gilt folgendes leicht anzuwendendes Kriterium, um zu erkennen, ob ein Strahlsystem, welches durch zwei gegebene Paare conjugirter Strahlen $a\alpha$, $b\beta$ bestimmt wird, ein elliptisches oder hyperbolisches ist: *Wird das eine Strahlenpaar $a\alpha$ durch das andere $b\beta$ getrennt, also auch umgekehrt (d. h. fällt b in einen Winkelraum $a\alpha$ und β in den Nebenwinkelraum), so ist das Strahlsystem elliptisch; wird dagegen das eine Strahlenpaar durch das andere nicht getrennt, so ist das Strahlsystem hyperbolisch.*

Ein eigenthümliches Auftreten des Strahlsystems (oder Punktsystems) zeigt sich bei folgender Betrachtung: Sind drei beliebige durch einen Punkt gehende Strahlen abc gegeben, so kann man zwei derselben in dreifacher Weise als zugeordnete Strahlen auffassen und zu dem jedesmaligen dritten den zugeordneten vierten harmonischen Strahl construiren; seien b und c zugeordnete und der vierte harmonische zu a zugeordnete: α; anderseits c und a zugeordnete und der vierte harmonische zu b zugeordnete: β, endlich a und b zugeordnete und der vierte harmonische zu c zugeordnete: γ; dann ist:

$$(cba\alpha) = -1 \quad (acb\beta) = -1 \quad (bac\gamma) = -1\,.$$

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(acb\beta) = (abc\gamma)$$

folgt, dass b und c als ein Paar, β und γ als ein zweites Paar conjugirter Strahlen eines Strahlsystems genommen werden dürfen, welches a zu einer Asymptote haben muss; die andere Asymptote ist aber α, weil es zu a der vierte harmonische Strahl ist, während b und c das andere Paar zugeordneter Strahlen sind; mithin müssen auch a und α harmonisch liegen zu β und γ, also:

$$(\gamma\beta\alpha a) = -1, \text{ ebenso } (\alpha\gamma\beta b) = -1 \text{ und } (\beta\alpha\gamma c) = -1\,.$$

Es findet daher zwischen den 6 Strahlen $abc\alpha\beta\gamma$ das eigenthümliche reciproke Verhalten statt, dass *die drei ersten von den drei letzten ebenso abhängen, wie die drei letzten von den ersten.*

Aus der Relation:

$$(cba\alpha) = (\gamma\beta\alpha a)$$

folgt sodann, dass $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *drei Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems* oder sechs Strahlen in Involution sind; ebenso bilden aber auch $a\alpha$, $b\gamma$, $c\beta$ eine Involution, $a\gamma$, $b\beta$, $c\alpha$ eine neue und endlich $a\beta$, $b\alpha$, $c\gamma$; von diesen vier Involutionen ist die erste elliptisch, die drei andern sind hyperbolisch; ihre Asymptoten bilden selbst eine elliptische Involution, welche mit der ersteren zusammenfällt.

Obwohl wir sehen, dass die durch die drei Elementenpaare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ bestimmte Involution eine elliptische ist, so können wir doch im algebraischen Sinne nach den Doppelelementen derselben: ii_1 fragen, welche sowohl durch $a\alpha$, als auch durch $b\beta$ und durch $c\gamma$ harmonisch getrennt werden müssen; da aber auch bc durch $a\alpha$ harmonisch getrennt werden, so gehören ii_1 und bc einer Involution an, deren eines Doppelelement a ist; wir haben demnach folgende projectivische Reihen:

$$(ii_1abc) = (i_1iacb) \quad \text{und ebenso wegen } b\beta$$
$$(ii_1abc) = (i_1icba) \quad \text{und } c\gamma.$$
$$(ii_1abc) = (i_1ibac)$$

und hieraus folgt:

$$(ii_1ab) = (ii_1ca) = (ii_1bc) \quad \text{oder}$$
$$(ii_1abc) = (ii_1bca) = (ii_1cab).$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der Doppelverhältnisse $(iabc)$ und (i_1abc); setzen wir $(iabc) = x$, so folgt aus den Gleichheiten:

$$(iabc) = (ibca) = (icab)$$
$$x = \frac{1}{1-x} = \frac{x-1}{x}$$

d. h. die quadratische Gleichung:

$$x^2 - x + 1 = 0 = \frac{x^3+1}{x+1},$$

deren beide imaginäre Wurzeln:

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \text{ und } \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

die Werthe der Doppelverhältnisse:

$$(iabc) \text{ und } (i_1abc)$$

sind, d. h. die imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit. Ein solches System von 5 Elementen $abcii_1$, von denen die beiden letzten imaginär sind, nennt man ein *äquianharmonisches System von 5 Elementen**), weil zu drei willkürlichen Elementen abc das vierte i dadurch bestimmt wird, dass von den Werthen, welche das Doppelverhältniss $(iabc)$ durch Vertauschung der Elemente überhaupt annehmen kann, die drei verschiedenen:

$$\frac{1}{x} \qquad 1-x \qquad \frac{x}{x-1}$$

einander *gleich* werden; diese Bedingung erfüllen die beiden imaginären Elemente ii_1; aus der vorigen Betrachtung ergeben sie sich als die beiden imaginären Doppelelemente einer elliptischen Involution: $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$. Wir erkennen sie aber auch als die Doppelelemente zweier in anderer Weise auf einander liegender projectivischer Gebilde: wenn wir die Projectivität zweier auf einander liegender Gebilde dadurch bestimmen, dass wir die 3 Paare von Elementen sich entsprechen lassen: $\left\{ \begin{matrix} abc \\ bca \end{matrix} \right\}$, so sind die Doppelelemente ii_1; dieselben Doppelelemente gehen hervor, wenn wir sich entsprechen lassen: $\left\{ \begin{matrix} abc \\ cab \end{matrix} \right\}$, oder beide Fälle vereinigt, wenn wir die Elemente abc cyclisch fortschreiten lassen; daher werden die in solcher Weise auf einander liegenden Gebilde auch *cyclisch-projectivisch* genannt. (Vgl. Aufgaben und Sätze am Ende dieses Abschnitts.)

---

*) Siehe: *Cremona:* Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologna 1862, Seite 21.

Endlich müssen wir noch zwei besondere Fälle eines Strahlsystems erwähnen, in welchen dieses einen sehr einfachen Charakter annimmt.

Im Allgemeinen giebt es in jedem Strahlsystem nur *ein* Paar zu einander rechtwinkliger conjugirter Strahlen, die Axen des Strahlsystems, weil es im Allgemeinen bei zwei projectivischen Strahlbüscheln nur ein Paar entsprechender rechter Winkel giebt. Andererseits dürfen wir aber zur Bestimmung des Strahlsystems zwei Paare conjugirter Strahlen willkürlich annehmen, und es steht uns frei, diese Paare $a\alpha$, $b\beta$ so anzunehmen, dass nicht allein a und α zu einander rechtwinklig sind, sondern auch b und β, also ein Strahlsystem zu bilden, welches zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Strahlen hat; ein solches Strahlsystem muss natürlich ein elliptisches sein, weil zwei rechte Winkel, die denselben Scheitel haben, einander nothwendig trennen; betrachten wir $a\alpha$ als die Axen dieses Strahlsystems, so ist:

$$\operatorname{tg}(ax)\cdot\operatorname{tg}(a\xi) = \text{const} = \operatorname{tg}(ab)\cdot\operatorname{tg}(a\beta),$$

weil aber

$$(a\beta) = (ab) + 90^0 \text{ und } \operatorname{tg}(a\beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(ab)} \text{ ist, so folgt:}$$

$$\operatorname{tg}(ax)\cdot\operatorname{tg}(a\xi) = -1,$$

und hieraus ergiebt sich wieder, dass der Strahl ξ auf dem conjugirten Strahl x senkrecht stehen muss, *also sämmtliche Paare conjugirter Strahlen bilden rechte Winkel.* Ein solches besonderes Strahlsystem, welches nur aus rechten Winkeln besteht, die denselben Scheitel haben, welches also nicht nur *ein* Axenpaar, sondern unendlich viele Axenpaare hat, soll ein *circulares Strahlsystem* heissen und ist ein specieller Fall eines elliptischen Strahlsystems. Wir schliessen also: *Wenn ein Strahlsystem zwei Paare rechtwinkliger conjugirter Strahlen hat, so sind sämmtliche Paare conjugirter Strahlen rechtwinklig zu einander und das Strahlsystem ist ein circulares Strahlsystem.*

Zweitens wissen wir, dass jedes Paar conjugirter Strahlen eines hyperbolischen Strahlsystems zugeordnet-harmonische Strahlen zu den Asymptoten sind; nehmen wir nun insbesondere die beiden Asymptoten, welche zwei (zusammenfallende) Strahlenpaare vertreten, also zur Bestimmung des Strahlsystems gerade ausreichen, auf einander rechtwinklig an, so muss jedes Paar $x\xi$ mit ihnen gleiche Winkel bilden (S. 16); hieraus geht ein Strahlsystem besonders einfacher Art hervor, welches ein *gleichseitig-hyperbolisches Strahlsystem* heisst und die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass seine Asymptoten zu einander rechtwinklig sind, also mit den Axen Winkel von 45^0 bilden; wir können auch sagen: Alle durch einen Punkt gehenden Strahlenpaare, welche zu einem festen Strahl gleich geneigt sind, bilden ein gleichseitig-hyperbolisches Strahlsystem.

Die involutorische Lage zweier projectivischer Gebilde tritt nicht allein bei gleichartigen Gebilden auf, deren Träger zusammenfallen, also bei zwei aufeinander liegenden Punktreihen und bei zwei concentrischen Strahlbüscheln, sondern kann auch bei zwei verschiedenartigen Gebilden: einem Strahlbüschel und einer Punktreihe, deren Träger beliebig in der Ebene liegen und die in projectivischer Beziehung stehen, vorkommen. Dies ist der Fall, wenn die beiden Gebilde $B\,(abc\ldots x\ldots)$ und $\mathfrak{A}_1\,(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots\mathfrak{x}_1\ldots)$ derartig liegen, dass jeder Strahl x des Strahlbüschels durch einen Punkt $\mathfrak{y}_1$ der Punktreihe geht, dessen entsprechender Strahl y den dem Strahle x entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ enthält. Dies tritt immer ein, sobald es nur *einmal* eintritt, und es bilden alsdann die Strahlenpaare xy ein Strahlsystem, die Punktpaare $\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$ ein Punktsystem; dieses liegt mit jenem perspectivisch. Wir sagen daher Strahlbüschel (B) und Punktreihe $(\mathfrak{A}_1)$ liegen *involutorisch*, ein Verhalten, welches sich nicht selten bei geometrischen Untersuchungen darbietet z. B. bei Pol und Polare eines Kegelschnitts (§. 30).

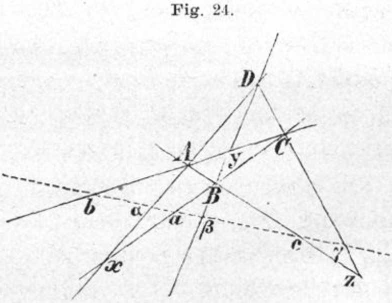
§. 18. Vorkommen von Punktsystemen und Strahlsystemen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Die Hauptsätze der Theorie der Transversalen.

Punktsysteme und Strahlsysteme treten bei sehr vielen geometrischen Untersuchungen auf; zuerst wurden sie bemerkt bei der Figur des vollständigen Vierecks und Vierseits. Sei $ABCD$ ein vollständiges Viereck, und mögen sich die drei Seitenpaare:

BC, DA in x,
CA, DB in y,
AB, DC in z,

den drei Diagonalpunkten, treffen; schneiden wir diese sechs Seiten des vollständigen Vierecks durch irgend eine Transversale (beliebige gerade Linie in der Ebene) und bezeichnen (Fig. 24) die Schnittpunkte

Fig. 24.



des Seitenpaars BC, DA auf ihr mit a und α,
- - CA, DB - - - b - β,
- - AB, DC - - - c - γ,

so ist zunächst identisch das Doppelverhältniss:

$$(axCB) = (xaBC) \qquad \text{(Seite 7).}$$

Die vier Punkte links $axCB$ von A aus auf die Transversale projicirt und rechts $xaBC$ von D aus projicirt liefern die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(a\alpha bc) = (\alpha a\beta\gamma);$$

auf der Transversale finden sich also vier Paare entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen dergestalt, dass die entsprechenden gleichen Strecken $a\alpha$ und αa verkehrt auf einander fallen; die Punktreihen bilden also (Seite 49) ein Punktsystem, d. h. $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sind drei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems oder sechs Punkte in Involution; also gilt der Satz:

Werden die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks durch eine beliebige Transversale geschnitten, so bilden die Schnittpunkte drei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems (oder sind sechs Punkte in Involution).

Dieser Satz enthält als speciellen Fall in sich die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierseits (S. 18), denn geht die beliebige Transversale insbesondere durch zwei Diagonalpunkte xy, so werden diese die Asymptotenpunkte des Punktsystems (zusammenfallende conjugirte Punkte) und die Schnittpunkte des dritten Seitenpaares müssen zu den Asymptotenpunkten harmonisch liegen (S. 51). Der Satz selbst ist aber wiederum nur ein specieller Fall eines allgemeineren, den wir später finden werden und bei welchem das ganze Punktsystem zum Vorschein kommt (§. 40). Aus dieser Eigenschaft des vollständigen Vierecks ergiebt sich eine lineare *Construction* beliebig vieler Punktpaare eines Punktsystems, von welchem zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha$ und $b\beta$ gegeben sind; um nämlich zu irgend einem Punkte c des Trägers den conjugirten γ zu finden, ziehe man durch c eine beliebige Gerade und nehme auf ihr zwei beliebige Punkte A und B an; verbindet man A und B mit a und α, b und β und suche die Schnittpunkte $(Aa, Bb) = P$ und $(A\beta, B\alpha) = Q$ auf, dann geht PQ durch den gesuchten Punkt γ, weil $ABPQ$ ein Viereck ist, dessen drei Seitenpaare in sechs Punkten der Involution getroffen werden.

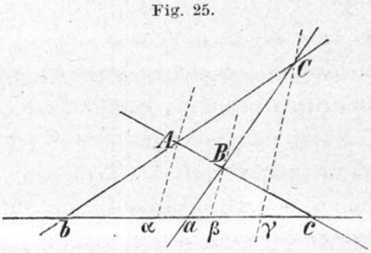
Es drängt sich hierbei die Frage auf, wann für verschiedene Lagen der Transversale das Punktsystem elliptisch und wann es hyperbolisch wird. Nach dem auf S. 55 angegebenen Kriterium brauchen wir bei der Bewegung der Transversale nur zwei Paare conjugirter Punkte $a\alpha$, $b\beta$ zu verfolgen und nachzusehen, ob das eine Paar durch das andere getrennt wird oder nicht; hierbei stellt sich nun das leicht erkennbare Verhalten heraus: *Sobald von den vier Ecken des vollständigen*

Vierecks eine gerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale liegt (zwei oder vier auf der einen und zwei oder keine auf der andern), ist das Punktsystem hyperbolisch; liegt aber eine ungerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale (also eine oder drei Ecken auf einer Seite und drei oder eine auf der andern), so ist das Punktsystem elliptisch.

Dieses Kriterium gilt indessen nur dann, wenn die vier Ecken des vollständigen Vierecks so liegen, dass jede ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet (Fig. 24); liegen sie dagegen so, dass eine innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, so tritt gerade das umgekehrte Verhalten ein: *Liegt eine gerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten der Transversale, so ist das Punktsystem elliptisch, liegt eine ungerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten derselben, so ist das Punktsystem hyperbolisch**).

Ein besonderer Fall der Eigenschaft des vollständigen Vierecks führt zu einem Hauptsatze der sogenannten *Transversalen-Theorie.* Denken wir uns nämlich eine der vier Ecken des vollständigen Vierecks ins Unendliche gerückt, es sei D, so werden die drei Strahlen DA, DB, DC parallel und es bleibt nur das Dreieck ABC im Endlichen, dessen Seiten von einer Transversale in den Punkten abc geschnitten werden, während drei durch die Ecken ABC in beliebiger Richtung gezogene Parallelen die Transversale in $\alpha\beta\gamma$ treffen (Fig. 25). Fassen wir nun die in §. 16 gefundene Relation II. für sechs Punkte einer Involution:

Fig. 25.



$$a\beta \,.\, b\gamma \,.\, c\alpha = a\gamma \,.\, b\alpha \,.\, c\beta$$

*) Ein Punktsystem tritt auch bei beliebig auf einander gelegten Trägern zweier projectivischer Punktreihen auf, deren Doppelpunkte reell sind; seien nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktreihen, deren Träger zusammen liegen, und $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Doppelpunkte, so findet die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$$
$$= (\mathfrak{h}\mathfrak{g}\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1) \quad \text{(Seite 7)},$$

und da die Strecke $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ verkehrt auf die Strecke $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$ fällt, so bilden (Seite 55) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ein Punktsystem oder sind 6 Punkte in Involution, also:

Sind bei zwei beliebig auf einander liegenden projectivischen Punktreihen $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{b}_1$ *zwei Paare entsprechender Punkte und* $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{h}$ *die Doppelpunkte, so sind immer die drei Punktpaare* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ *drei Paare conjugirter Punkte eines Punktsystems oder sechs Punkte in Involution.*

Hieraus folgt insbesondere:

ins Auge und ersetzen wegen der Parallelität die Verhältnisse der Abschnitte auf der Transversale durch die analogen Verhältnisse der Abschnitte auf den Dreieckseiten:

$$\frac{a\beta}{a\gamma} = \frac{aB}{aC}; \; \frac{b\gamma}{b\alpha} = \frac{bC}{bA}; \; \frac{c\alpha}{c\beta} = \frac{cA}{cB};$$

d. h. ersetzen wir die Buchstaben $\alpha\beta\gamma$ durch ABC, so finden wir:

$$Ab \cdot Bc \cdot Ca = Ac \cdot Ba \cdot Cb,$$

d. h.: *Werden die Seiten eines Dreiecks ABC durch eine Gerade (Transversale) in den Punkten abc getroffen, so bestimmt jeder Schnittpunkt auf der betreffenden Seite zwei Abschnitte: aB und aC, bC und bA, cA und cB; das Product dreier nicht zusammenstossender Abschnitte ist gleich dem Product der drei übrigen nicht zusammenstossenden Abschnitte.*

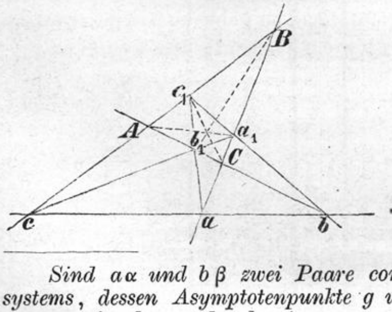
Fassen wir die vorige Relation in der Gestalt auf:

1. $$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1,$$

so drückt jeder Factor das Verhältniss der beiden Abschnitte aus, welche der Schnittpunkt der Transversale und je einer Seite auf dieser bildet, und die Bedingung dafür, dass die drei Punkte abc in gerader Linie liegen, ist die, dass das Product dieser drei Verhältnisse $= 1$ sei; es giebt aber auf jeder Seite des Dreiecks noch einen zweiten Theilpunkt, welcher absolut genommen dasselbe Verhältniss der Abschnitte darbietet, seiner Lage nach aber das entgegengesetzte (S. 10), nämlich den jedesmaligen vierten harmonischen Punkt, welcher dem Schnittpunkt mit der Transversale zugeordnet ist, während die beiden Ecken der Dreiecksseite das andere Paar zugeordneter Punkte sind; bezeichnen wir diese vierten harmonischen Punkte entsprechend mit $a_1 b_1 c_1$ (Fig. 26), so haben wir:

2. $$\frac{aB}{aC} + \frac{a_1 B}{a_1 C} = 0; \; \frac{bC}{bA} + \frac{b_1 C}{b_1 A} = 0; \; \frac{cA}{cB} + \frac{c_1 A}{c_1 B} = 0 \text{ (Seite 12).}$$

Fig. 26.



Was nun die Lage der Punkte $a_1 b_1 c_1$ betrifft, so sind sie leicht zu construiren nach §. 8; man verbinde den Schnittpunkt (Aa, Bb) mit C, so schneidet ihre Verbindungslinie die Gerade AB in c_1 wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $AaBb$.

Sind $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare conjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte g und h sind, so bilden immer die drei Punktpaare $a\beta$, $b\alpha$ und gh eine neue Involution oder sind drei Punktpaare eines neuen Punktsystems.

Hieraus folgen die von *Hesse* im 63. Bande des Crelle-Borchardt'-schen Journals in dem Aufsatze „zur Involution" Seite 179 angegebenen Sätze.

Es schneiden sich also Aa, Bb, Cc_1 in einem Punkte,
ebenso Bb, Cc, Aa_1 - - - ,
- Cc, Aa, Bb_1 - - - .

Ferner liegen cb_1a_1 in einer geraden Linie, weil die vier von c nach bCb_1A gehenden Strahlen vier harmonische sind und daher auch die Gerade CB in vier harmonischen Punkten treffen müssen; von diesen sind drei aCB, der vierte harmonische dem a zugeordnete ist a_1, folglich muss der vierte Strahl cb_1 durch a_1 gehen, also liegen

$c\,b_1\,a_1$ in einer Geraden,
ebenso $a\,c_1\,b_1$ - - - ,
- $b\,a_1\,c_1$ - - - ;

endlich schneiden sich auch

$$Aa_1 \quad Bb_1 \quad Cc_1$$

in einem Punkte wegen der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierecks ABa_1b_1.

Führen wir in die Relation 1. die Punkte $a_1b_1c_1$ ein vermittelst der Beziehungen 2., so ergiebt sich:

$$\text{I.}\quad\begin{cases}\dfrac{aB}{aC}\cdot\dfrac{bC}{bA}\cdot\dfrac{cA}{cB}=1 & (a\;b\;c\ \text{in gerader Linie})\\[2mm] \dfrac{aB}{aC}\cdot\dfrac{b_1C}{b_1A}\cdot\dfrac{c_1A}{c_1B}=1 & (a\;b_1c_1\ \text{- - -})\\[2mm] \dfrac{a_1B}{a_1C}\cdot\dfrac{bC}{bA}\cdot\dfrac{c_1A}{c_1B}=1 & (a_1b\;c_1\ \text{- - -})\\[2mm] \dfrac{a_1B}{a_1C}\cdot\dfrac{b_1C}{b_1A}\cdot\dfrac{cA}{cB}=1 & (a_1b_1c\ \text{- - -})\end{cases}$$

$$\text{II.}\quad\begin{cases}\dfrac{a_1B}{a_1C}\cdot\dfrac{b_1C}{b_1A}\cdot\dfrac{c_1A}{c_1B}=-1 & (Aa_1,\ Bb_1,\ Cc_1\ \text{schneiden sich in 1 Punkte})\\[2mm] \dfrac{a_1B}{a_1C}\cdot\dfrac{bC}{bA}\cdot\dfrac{cA}{cB}=-1 & (Aa_1,\ Bb,\ Cc\ \text{- - - -})\\[2mm] \dfrac{aB}{aC}\cdot\dfrac{b_1C}{b_1A}\cdot\dfrac{cA}{cB}=-1 & (Aa,\ Bb_1,\ Cc\ \text{- - - -})\\[2mm] \dfrac{aB}{aC}\cdot\dfrac{bC}{bA}\cdot\dfrac{c_1A}{c_1B}=-1 & (Aa,\ Bb,\ Cc_1\ \text{- - - -}).\end{cases}$$

Da (Seite 9) der Werth eines solchen Verhältnisses $\dfrac{xA}{xB}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Theilungspunkt x ausserhalb der Strecke AB oder zwischen A und B liegt, und das Product dreier solcher Factoren nur positiv sein kann, wenn keiner oder zwei von ihnen negativ sind, dagegen negativ ist, wenn einer oder alle drei negativ sind, so folgt aus I., dass, wenn eine gerade Linie die Seiten eines Dreiecks trifft, von den Schnittpunkten entweder keiner oder zwei zwischen den Dreiecksecken liegen müssen, aus II., dass, wenn drei durch einen Punkt und die Ecken eines Dreiecks gehende Strahlen die Seiten desselben in drei Punkten treffen, entweder nur einer oder alle drei zwischen den Dreiecksecken liegen müssen, und dass in beiden Fällen von den sechs durch die Theilungspunkte auf den Seiten gebildeten Abschnitten das Product dreier nicht zusammenstossender gleich dem Product der drei andern ist.

Diese Erweiterung des vorigen Satzes gestattet jetzt die Umkehrung desselben, welche folgendermassen lautet: *Wenn in den Seiten eines Dreiecks (oder deren Verlängerungen) ABC sich drei Punkte abc finden, von solcher Beschaffenheit, dass von den sechs Abschnitten, welche auf den Dreiecksseiten durch die Punkte abc gebildet werden: aB, aC, bC, bA, cA, cB, das (absolut genommene) Product dreier nicht zusammenstossender gleich dem Product der drei andern nicht zusammenstossenden Abschnitte ist, so liegen entweder die drei Punkte abc in gerader Linie* $\left(\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1\right)$, *sobald von ihnen keiner oder zwei zwischen den Dreiecksecken liegen; oder die drei Verbindungslinien Aa, Bb, Cc schneiden sich in einem Punkte* $\left(\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1\right)$, *sobald von den Punkten abc einer oder alle drei zwischen den Dreiecksecken liegen.* In dieser Gestalt liefert der Satz ein nützliches und oft angewendetes Kriterium, um zu erkennen, ob gewisse drei Punkte in gerader Linie liegen oder gewisse drei Linien sich in einem Punkte schneiden, und ist das Fundament einer umfangreichen und vorzüglich von französischen Geometern (*Carnot*, *Brianchon*, *Poncelet* u. A.) ausgebildeten Theorie (théorie des transversales). Die umgekehrten Sätze sind seit langer Zeit bekannt und stammen von Menelaos und de Céva her. Zugleich ergiebt sich beiläufig der Satz:

Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten und die zu den Schnittpunkten und je zwei Dreiecksecken zugeordneten vierten harmonischen Punkte auf den Dreiecksseiten mit den gegenüberliegenden Ecken verbunden, so laufen diese drei Linien durch einen Punkt, und umgekehrt: *Verbindet man einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks mit den Ecken desselben und construirt zu diesen drei Strahlen den jedesmaligen vierten harmonisch-zugeordneten Strahl, indem je zwei Dreiecksseiten das andere Paar zugeordneter Strahlen sind, so treffen die so construirten drei Strahlen die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.*

Dieser Satz ist von besonderem Interesse darum, weil er eine eigenthümliche (reciproke) Zuordnung von sämmtlichen Geraden einer

Ebene zu den Punkten derselben hervorruft, worauf hier näher einzugehen der Raum nicht gestattet. Es bleibt noch übrig, die analoge Betrachtung für das vollständige Vierseit, d. h. vier beliebige in der Ebene liegende gerade Linien anzustellen; da der Gang der Untersuchung aber genau derselbe ist, so genüge es, die Resultate anzugeben:

Werden die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits d. h. wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Seiten des vollständigen Vierseits, vier beliebige unendlich lange Gerade in der Ebene, bedeuten, die Schnittpunktpaare:

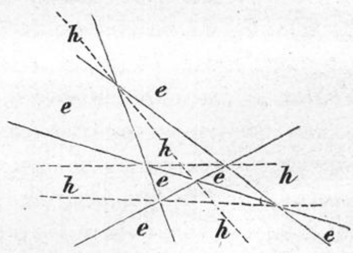
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ und } (\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \;\; - \;\; (\mathfrak{B}, \mathfrak{D})$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) \;\; - \;\; (\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

mit irgend einem Punkte der Ebene durch gerade Linien verbunden, so bilden dieselben drei Paare conjugirter Strahlen eines Strahlsystems oder sind sechs Strahlen in Involution.

Wenden wir das oben gegebene Kriterium (Seite 61) an, um zu entscheiden, wann das Strahlsystem ein elliptisches und wann es ein hyperbolisches wird, so finden wir für die Lage des Punktes in dem einen oder andern Falle verschiedene Regionen der Ebene. Durch die vier geraden Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ wird nämlich die ganze unendliche Ebene in elf Gebiete zerschnitten, von denen drei einen endlichen, die andern acht einen unendlich grossen Inhalt haben; von diesen elf Räumen sind fünf von solcher Beschaffenheit, dass, wenn in ihnen der Punkt liegt, sein Strahlsystem hyperbolisch wird (wir haben diese Räume in Fig. 27 mit h bezeichnet), die andern sechs Räume aber liefern für jeden in ihnen enthaltenen Punkt ein elliptisches Strahlsystem. Die Seiten des vollständigen Vierseits trennen die Räume (h) von den Räumen (e).

Die fünf Räume h sind gerade diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, während die sechs Räume e von den Diagonalen nicht getroffen werden.

Fig. 27.



Insbesondere kann man nach solchen Punkten P in der Ebene fragen, für welche das Strahlsystem, welches nach den drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ geht, ein *circulares* wird. Es giebt im Allgemeinen und höchtens *zwei* solche Punkte in der Ebene; denn beschreibt man über $a\alpha$ und über $b\beta$ als Durchmesser zwei Kreise, so schneiden sich dieselben in den gesuchten Punkten P und P'; es muss also auch der Kreis, welcher über $c\gamma$ als Durchmesser beschrieben wird, durch dieselben beiden Punkte P und P' gehen, weil alle Paare conjugirter Strahlen eines circularen Strahlsystems auf einander rechtwinklig sind; hieraus folgt, dass *die Mitten der drei Diagonalen* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *eines vollständigen Vierseits auf einer Geraden liegen müssen.* Diese Eigenschaft bleibt erhalten, auch wenn die Kreise über $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmesser sich nicht treffen, also die Punkte P und P' nicht reell sind. (Siehe §. 45.)

Fragt man nach solchen Punkten P in der Ebene des vollständigen Vierseits, für welche das zugehörige Strahlsystem ein *gleichseitig-hyperbolisches* wird, so ergiebt sich als Ort derselben eine Curve dritten Grades von besonderer Art*).

Lassen wir *eine* von den vier Geraden (sei es $\mathfrak{D}$) in die Unendlichkeit rücken dadurch, dass wir zwei ihrer Schnittpunkte ins Unendliche versetzen, womit die ganze gerade Linie ins Unendliche geht, also auch ihr dritter Schnittpunkt, so bleibt nur ein Dreiseit $\mathfrak{ABC}$ im Endlichen zurück; die drei Diagonalen werden die durch die Ecken des Dreiseits zu den Seiten gezogenen Parallelen; verbinden wir einen beliebigen Punkt P der Ebene mit den Ecken des Dreiseits und ziehen durch ihn Parallele zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so erhalten wir in P sechs Strahlen in Involution; bezeichnen wir mit $\mathfrak{abc}$ die ersteren drei Strahlen und mit $\alpha\beta\gamma$ die letzteren, so gilt nach §. 17 II[1]. die Relation:

$$\sin(\mathfrak{a}\beta)\sin(\mathfrak{b}\gamma)\sin(\mathfrak{c}\alpha) = \sin(\mathfrak{a}\gamma)\sin(\mathfrak{b}\alpha)\sin(\mathfrak{c}\beta);$$

weil aber $\alpha\beta\gamma$ resp. parallel laufen $\mathfrak{ABC}$, so können wir auch schreiben:

$$\frac{\sin(\mathfrak{aB})}{\sin(\mathfrak{aC})}\cdot\frac{\sin(\mathfrak{bC})}{\sin(\mathfrak{bA})}\cdot\frac{\sin(\mathfrak{cA})}{\sin(\mathfrak{cB})} = 1$$

und erhalten den Satz:

Verbindet man bei einem Dreiseit $\mathfrak{ABC}$ *die Ecken desselben* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{A})$ *mit einem beliebigen Punkte der Ebene durch Strahlen* $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *so zerfällt jeder Winkel des Dreiseits durch je einen dieser Strahlen in zwei Theilwinkel:* $(\mathfrak{cA})$, $(\mathfrak{cB})$, $(\mathfrak{aB})$, $(\mathfrak{aC})$, $(\mathfrak{bC})$, $(\mathfrak{bA})$; *das Product der sinus dreier solcher Theilwinkel, deren Schenkel nicht an einander stossen, ist gleich dem Product der sinus der drei übrigen.*

Die Vervollständigung und Umkehrung dieses Satzes lautet, analog dem Obigen, wie folgt:

Wenn durch die Ecken eines Dreiseits $\mathfrak{ABC}$ *drei Strahlen* $\mathfrak{abc}$ *von*

*) S. Math. Annalen. Bd. V. Seite 50.

solcher Beschaffenheit gehen, dass von den sechs Theilwinkeln, in welche die Winkel des Dreiseits durch die Strahlen zerfallen: $(\mathfrak{a}\mathfrak{B})$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{C})$ $(\mathfrak{b}\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{A})$ $(\mathfrak{c}\mathfrak{B})$ *das Product* (absolut genommen) *der sinus dreier, die keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, gleich dem Product der sinus der drei andern Theilwinkel ist, so schneiden sich 1) entweder die drei Strahlen* $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ *in einem Punkte, nämlich sobald von den Schnittpunkten* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{a})$ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{b})$ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{c})$ *der Strahlen mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiseits einer oder alle drei zwischen den Ecken des Dreiseits liegen, oder 2) diese drei Schnittpunkte der Strahlen* $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ *mit den gegenüberliegenden Seiten* $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ *liegen in einer geraden Linie, sobald von ihnen keiner oder zwei zwischen die Ecken des Dreiseits fallen.*

Es liegt nicht in unserer Absicht, auf die mannichfachen Anwendungen dieser Fundamentalsätze der Transversalentheorie einzugehen, vielmehr kam es nur darauf an, den Zusammenhang derselben mit der Involution anzudeuten und dadurch auch jene Theorie auf die gemeinsame Quelle projectivischer Beziehungen zurückzuführen.

§. 19. Besondere Fälle projectivischer Beziehung: Aehnlichkeit, Gleichheit.

Die perspectivische Lage zweier Gebilde gestattet einige besondere Annahmen, welche zu besonderen Fällen projectivischer Beziehung führen und hier noch erörtert werden müssen.

a) Es kann bei der perspectivischen Lage eines Strahlbüschels und einer Punktreihe der in §. 2 ausgeschlossene besondere Fall eintreten, dass der Mittelpunkt B des Strahlbüschels in dem Träger $\mathfrak{A}$ der Punktreihe selbst liegt; es treffen alsdann alle durch B gehende Strahlen die Punktreihe $\mathfrak{A}$ in einem einzigen Punkte, dem Punkte B selbst, mit Ausnahme eines einzigen durch B gehenden Strahls, desjenigen nämlich, welcher mit dem Träger $\mathfrak{A}$ der Punktreihe zusammenfällt; jeder Punkt der Punktreihe darf als ein Schnittpunkt dieses besonderen Strahles mit dem Träger der Punktreihe angesehen werden, und die projectivische Beziehung beider Gebilde gestaltet sich in der eigenthümlichen Weise, dass allen Strahlen des Strahlbüschels ein einziger Punkt der Punktreihe entsprechend ist mit Ausnahme eines Strahls, welchem sämmtliche Punkte der Punktreihe entsprechen. Es ist wichtig, auch ein solches Verhalten, welches bei geometrischen Untersuchungen sich öfters darbietet, als projectivische Beziehung aufzufassen.

Ebenso kann es bei der perspectivischen Lage zweier Pnuktreihen vorkommen, dass der Projectionspunkt (§. 10) in eine der beiden Geraden selbst zu liegen kommt; in diesem Fall werden die allen Punkten der andern Geraden entsprechenden Punkte in einem

Punkte der ersteren (dem Projectionspunkte) vereinigt sein mit Ausnahme eines Punktes, des Schnittpunktes beider Träger, welchem wiederum alle Punkte der ersten Geraden als entsprechend angesehen werden müssen. Ebenso ist es bei der perspectivischen Lage zweier Strahlbüschel, wenn der perspectivische Durchschnitt (Seite 21) durch einen der Mittelpunkte selbst hindurchgeht; in diesem Fall entspricht allen Strahlen des einen Strahlbüschels ein einziger Strahl des andern mit Ausnahme eines einzigen Strahls, dem wiederum sämmtliche Strahlen des andern Strahlbüschels entsprechen; diese beiden isolirt stehenden Strahlen sind der perspectivische Durchschnitt und die Verbindungslinie der Mittelpunkte. Wir werden später diesem sogenannten *parabolischen* Fall projectivischer Beziehung öfters begegnen.

b) Wenn der Mittelpunkt eines Strahlbüschels in die Unendlichkeit rückt, so geht das Strahlbüschel in ein Büschel von Parallellinien über; welche dieselbe Richtung haben; ein solches Gebilde ist ebenfalls als ein *Strahlbüschel* von Parallelstrahlen anzusehen. Das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen $abcd$ eines solchen Strahlbüschels wird (obgleich die Winkel zwischen je zweien sämmtlich 0 sind) gleich dem von den vier Schnittpunkten irgend einer Transversale mit ihnen sein, und insbesondere, wenn man durch (xy) den Abstand zweier Parallelen xy bezeichnet,

$$(abcd) = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},$$

wo also die Abstände an Stelle der sinus der Winkel treten.

Wenn zwei Punktreihen in perspectivischer Lage ihren Projectionspunkt im Unendlichen haben, also sämmtliche Projectionsstrahlen parallel laufen, so gehen die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ selbst ins Unendliche, denn ein Projectionsstrahl, welcher durch den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{q}^\infty$ der ersten Punktreihe und durch den unendlich entfernten Projectionspunkt geht, fällt ganz ins Unendliche, trifft also auch die andere Punktreihe in dem entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}_1$, der im Unendlichen liegen muss; es fallen also $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}^\infty$ zusammen, ebenso wie $\mathfrak{r}_1^\infty$ und $\mathfrak{q}_1$, oder *die unendlich-entfernten Punkte beider Punktreihen sind entsprechende*; die Gleichheit der Doppelverhältnisse vereinfacht sich in diesem Fall, weil die entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}^\infty$ und $\mathfrak{q}_1^\infty$ beide unendlich entfernt sind; das Doppelverhältniss:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{q}^\infty) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{q}_1^\infty)$$

geht über in:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1},$$

d. h. irgend zwei Abschnitte auf einer Punktreihe haben dasselbe Verhältniss zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte der andern, was denn auch bei der perspectivischen Lage aus bekannten Elementarsätzen der Aehnlichkeit folgt. Aus diesem Grunde heissen zwei solche projectivische Punktreihen, bei denen entsprechende Strecken in constantem Verhältniss zu einander stehen, *projectivisch-ähnliche Punktreihen* und haben die charakteristische Eigenschaft, dass ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind; auch umgekehrt sind zwei projectivische Punktreihen immer projectivisch-ähnlich, sobald ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende sind. Die Beziehung zweier projectivisch-ähnlichen Punktreihen ist schon durch *zwei* willkürlich als entsprechend angenommene Punktpaare vollständig bestimmt, weil die unendlich-entfernten Punkte als das dritte Paar entsprechender Punkte eo ipso gegeben sind. Es ist ferner zu bemerken, dass, weil bei zwei projectivisch-ähnlichen Punktreihen die unendlich-entfernten Punkte selbst entsprechende sind, jedem endlichen Punkte der einen Reihe immer ein endlicher der andern entsprechen muss. Entsprechende gleiche Strecken kann es bei zwei projectivisch-ähnlichen Punktreihen im Allgemeinen niemals geben, weil das Verhältniss irgend zweier entsprechender Strecken immer dasselbe constante ist. Dies ist nur ein scheinbarer Widerspruch zu unserm allgemeinen Resultat, dass es bei zwei projectivischen Punktreihen unendlich viele entsprechende gleiche Strecken giebt, denn da hier die unendlich-entfernten Punkte $\mathfrak{q}^\infty$ und $\mathfrak{q}_1^\infty$ entsprechend sind, so giebt es auch hier in gewissem Sinne entsprechende Strecken: $\mathfrak{q}^\infty\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}_1^\infty\mathfrak{x}_1$, die beide unendlich gross als gleich angesehen werden können.

Es kann aber vorkommen, dass insbesondere das constante Verhältniss bei zwei projectivisch-ähnlichen Punktreihen $= 1$ wird, dann werden alle entsprechenden Strecken einander gleich sein:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 ;$$

in diesem Fall heissen die Punktreihen *projectivisch-gleich*. Zwei projectivisch-gleiche Punktreihen sind also solche, bei denen je zwei entsprechende Strecken einander gleich sind. Für die perspectivische Lage und bei beliebiger Lage der Träger muss der Projectionspunkt nicht nur im Unendlichen liegen, sondern einer derjenigen beiden unendlich-entfernten Punkte sein, welche in den Richtungen der Halbirungslinien der Winkel zwischen den Trägern liegen, was aus bekannten Elementarsätzen der Congruenz folgt. Die Beziehung zweier projectivisch-gleicher Punktreihen ist durch *ein einziges* willkürlich als entsprechend angenommenes Punktpaar vollständig bestimmt, weil sie ausserdem die unendlich-entfernten Punkte als zweites Paar entsprechender Punkte haben und irgend ein drittes Paar durch den Werth 1 des constanten Verhältnisses entsprechender Strecken erhalten wird, $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1$, wobei es allerdings zweifelhaft bleibt, ob der dem $\mathfrak{x}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ nach der einen oder entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{a}_1$ liegt, was durch die alleinige Annahme des Paares $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ noch nicht bestimmt wird.

Werden zwei projectivisch-ähnliche Punktreihen beliebig auf einander gelegt, so giebt es immer ausser dem schon vorhandenen unendlich-entfernten Doppelpunkte noch einen bestimmten zweiten Doppelpunkt, dessen Construction auf S. 48 angegeben ist; die beiden Doppelpunkte sind also bei projectivisch-ähnlichen Punktreihen, welche auf einander liegen, immer reell, mögen die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sein.

Werden zwei projectivisch-gleiche Punktreihen beliebig auf einander gelegt und sind sie gleichlaufend, so fällt auch der zweite Doppelpunkt in die Unendlichkeit, was sich aus der Construction desselben ergiebt, und keine zwei entsprechende Punkte fallen im Endlichen zusammen, aber es kann auch vorkommen, dass alle Paare entsprechender Punkte über einander fallen; dies tritt immer ein, sobald irgend ein Paar entsprechender Punkte, ausser den unendlich-entfernten, zusammenfällt. Sind dagegen die projectivisch-gleichen Punktreihen, welche auf einander liegen, ungleichlaufend, so giebt es ausser dem unendlich-entfernten Punkte noch einen Doppelpunkt im Endlichen, welcher in der Mitte liegt zwischen allen Paaren entsprechender Punkte. Zwei solche auf einander liegende projectivisch-gleiche Punktreihen, welche ungleichlaufend sind, constituiren daher immer ein Doppel-Gebilde, wie es bereits oben (S. 52) als gleichseitig-hyperbolisches Punktsystem bezeichnet worden ist.

Zwei projectivisch-ähnliche Punktreihen können nie so auf einander gelegt werden, dass sie ein Punktsystem bilden, weil es bei ihnen keine entsprechende gleiche Strecken von endlicher Länge giebt.

Durch besondere Annahme für die Lage des Projectionspunktes bei beliebiger Lage der Träger zweier perspectivischer Punktreihen kamen wir zu den angegebenen besonderen Fällen ähnlicher und gleicher Punktreihen; lassen wir den Projectionspunkt beliebig und nehmen für die Träger besondere Lagen an, so erhalten wir dieselben speciellen Fälle; wenn nämlich die Träger der beiden Punktreihen einander parallel laufen, so werden die auf ihnen entstehenden Punktreihen bei beliebiger Annahme des Projectionspunktes projectivisch-ähnlich, weil die unendlich-entfernten Punkte entsprechende werden;

liegt der Projectionspunkt zwischen den beiden Trägern, so werden die Punktreihen ungleichlaufend sein (ihr Richtungssinn entgegengesetzt); liegt er aber auf derselben Seite von beiden Trägern, so werden die Punktreihen gleichlaufend sein. Liegt endlich bei parallelen Trägern der Projectionspunkt im Unendlichen, so werden die Punktreihen projectivisch-gleich; es können aber auch projectivisch-gleiche Punktreihen bei parallelen Trägern dadurch hervorgerufen werden, dass der Projectionspunkt zwischen beiden Trägern gleich weit von ihnen abstehend angenommen wird.

c) Die perspectivische Lage zweier Strahlbüschel kann nur dadurch eine besondere Vereinfachung erlangen, dass der perspectivische Durchschnitt in die Unendlichkeit rückt, dadurch werden je zwei entsprechende Strahlen parallel; die Strahlbüschel heissen *projectivisch-gleich*, weil je zwei entsprechende Winkel gleich sind:

$$(ab) = (a_1 b_1) .$$

Die Strahlbüschel haben gleichen Drehungssinn, sind gleichlaufend; aber auch bei endlicher Annahme des perspectivischen Durchschnitts können wir projectivisch-gleiche Strahlbüschel erhalten, wenn wir nämlich den perspectivischen Durchschnitt in der Mitte zwischen den Mittelpunkten BB_1 beider Strahlbüschel auf ihrer Verbindungslinie senkrecht annehmen; dann haben sie aber entgegengesetzten Drehungssinn, sind ungleichlaufend. Zwei projectivisch-gleiche Strahlbüschel sind durch *ein einziges* willkürlich angenommenes Paar entsprechender Strahlen vollständig bestimmt, sobald noch hinzugefügt wird, dass sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sein sollen, was sonst unentschieden bleibt. Haben zwei gleichlaufende projectivisch-gleiche Strahlbüschel irgend ein Paar entsprechender Strahlen parallel, so sind sämmtliche Paare entsprechender Strahlen parallel, ihre Schnittpunkte liegen also alle im Unendlichen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte enthält aber bei dieser Lage zwei entsprechende Strahlen, die zusammenfallen, folglich sind die beiden Strahlbüschel in perspectivischer Lage (Seite 25). Da nun bei der perspectivischen Lage zweier Strahlbüschel im Allgemeinen immer die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, so halten wir dies consequenter Weise auch für diesen ausgezeichneten Fall fest. Wir sagen daher: *„alle unendlich entfernten Punkte der Ebene liegen in einer Geraden"*, und nennen diese Gerade G_∞, *die unendlich-entfernte Gerade*; sie bedeutet uns nichts anderes, als den perspectivischen Durchschnitt zweier gleichlaufender projectivisch-gleicher Strahlbüschel in perspectivischer Lage. Werden zwei projectivisch-gleiche Strahlbüschel concentrisch gelegt, so fallen, wenn sie gleichlaufend sind, entweder gar keine entsprechenden Strahlen auf einander, oder es fallen sämmtliche Paare entsprechender Strahlen auf einander, so dass also die Strahlbüschel identisch liegen.

Stehen irgend zwei entsprechende Strahlen bei zwei concentrisch liegenden projectivisch-gleichen Strahlbüscheln, welche gleichlaufend sind, auf einander senkrecht, so stehen alle Paare entsprechender Strahlen auf einander senkrecht, und dies Doppelgebilde fällt zusammen mit dem oben (Seite 64) angegebenen circularen Strahlsystem.

Wenn die beiden Strahlbüschel dagegen ungleichlaufend sind, so fallen zwei Paare entsprechender Strahlen auf einander; diese Doppelstrahlen sind zu einander rechtwinklig und zwar die Halbirungslinien der Winkel irgend eines Paares entsprechender Strahlen (xx_1). Zwei solche concentrische projectivisch-gleiche Strahlbüschel constituiren daher immer ein Doppel-Gebilde, wie es bereits oben (S. 64) als gleichseitig-hyperbolisches Strahlsystem bezeichnet worden ist.

Ein circulares Strahlsystem schneidet die unendlich entfernte Gerade G_∞ in einem Punktsystem von ausgezeichneter Art und unveränderlicher Natur; es ist elliptisch, weil das circulare Strahlsystem elliptischer Art ist, und hat also imaginäre Doppelelemente. Dieses ausgezeichnete Punktsystem ist völlig unabhängig von der Lage des circularen Strahlsystems, durch welches wir es uns hervorgerufen dachten. Es besteht aus *sämmtlichen Paaren unendlich-entfernter Punkte, die in je zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen*, und seine beiden imaginären Doppelpunkte heissen *die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen.* Obwohl sie nicht reell vorhanden sind, so ist das Punktsystem auf G_∞, als dessen Doppelpunkte sie erscheinen, völlig reell construirbar. Da dies häufig bei geometrischen Fragen sich darbietet, so bedient man sich auch häufig der abkürzenden Bezeichnung der beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen.

Aufgaben und Sätze.

1. Es sind gegeben eine gerade Punktreihe $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{abc}$ ...) und ein mit derselben projectivisches Strahlbüschel B (abc ...); es soll
   a) eine Transversale in der Ebene gezogen werden, welche das Büschel in einer mit der gegebenen gleichen Punktreihe schneidet.
   b) ein Punkt in der Ebene gefunden werden, so dass ein von ihm aus durch die Punktreihe gelegtes Strahlbüschel mit dem gegebenen (B) gleich sei.

c) die Anzahl der möglichen Lösungen und ihre Beziehung zu einander untersucht werden.

2. Sind vier harmonische Strahlen $abcd$ gegeben, also das Doppelverhältniss:
$$(abcd) = -1,$$
und ist m ein Halbirungsstrahl des Winkels (a, b) zwischen zwei zugeordneten Strahlen, so gelten ausser den bekannten Relationen noch folgende andere:
$$\sin(ca) \cdot \sin(cb) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(cd) \cdot \sin 2(cm)$$
$$\sin(da) \cdot \sin(db) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(dc) \cdot \sin 2(dm)$$
$$\sin(ca) \sin(cb) + \sin(da) \sin(db) = \sin^2(cd) \cdot \cos(ab)$$
$$\frac{\sin(mc) \sin(md)}{\sin^2(ma)} = \frac{\cos(mc) \cos(md)}{\cos^2(ma)} = \cos(cd)$$
$$\sin(ab) \cdot \sin(cd) = 2 \cdot \sin(cb) \sin(ad)$$
Halbirt der Strahl m den Winkel (ab) und der Strahl n den Winkel (cd), so gilt die Relation:
$$\cos(ab) . \cos(cd) = \cos 2(mn) .$$

3. Ist ein Dreieck ABC gegeben und ein beliebiger Punkt P der Ebene, so bestimmen die Durchschnittspunkte:
$$(PA, BC) = A_1 \qquad (PB, CA) = B_1 \qquad (PC, AB) = C_1$$
ein neues Dreieck $A_1B_1C_1$; nimmt man einen beliebigen neuen Punkt P_1 an und bestimmt die Schnittpunkte:
$$(P_1A_1, B_1C_1) = A_2 \quad (P_1B_1, C_1A_1) = B_2 \quad (P_1C_1, A_1B_1) = C_2,$$
dann liegt das Dreieck $A_2B_2C_2$ mit dem anfänglichen ABC perspectivisch, d. h. es schneiden sich AA_2, BB_2, CC_2 in einem Punkte.

4. Sind irgend 5 Punkte in der Ebene gegeben: $abcde$ und man bestimmt die Schnittpunkte:
$$(cd, be) = \alpha, \quad (ad, ce) = \beta, \quad (bd, ae) = \gamma,$$
so schneiden sich die drei Strahlen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in einem Punkte o. Durch Vertauschung der gegebenen fünf Punkte unter einander erhält man mehrere solche neue Punkte o, deren Lage zu untersuchen ist.

5. Sind die 3 Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, so besteht zwischen den Entfernungen derselben von einander folgende involutorische Relation:
$$\frac{ab \cdot a\beta}{\alpha b \cdot \alpha\beta} = \frac{ac \cdot a\gamma}{\alpha c \cdot \alpha\gamma} .$$

6. Sind $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ irgend drei Paare conjugirter Punkte eines geraden Punktsystems (einer Involution), so gilt folgende Beziehung zwischen Doppelverhältnissen:

$$(\alpha abc)\cdot(\beta bca)\cdot(\gamma cab) = -1$$
$$(a\alpha\beta\gamma)\cdot(b\beta\gamma\alpha)\cdot(c\gamma\alpha\beta) = -1\,.$$

7. Sind irgend 5 Gerade in der Ebene gegeben: $abcde$, so wird jede durch die vier übrigen in vier Punkten geschnitten, welche ein bestimmtes Doppelverhältniss besitzen; bezeichnen wir ein solches durch die Zusammenstellung der Buchstaben der vier schneidenden Geraden, indem wir die geschnittene Gerade fortlassen, so gilt die Beziehung:

$$(abcd)\,.\,(abde)\,.\,(abec) = 1$$

und ähnliche, welche aus der Vertauschung der Geraden unter einander hervorgehen. Geht eine der Geraden a oder b in die Unendlichkeit, so giebt diese Beziehung den bekannten Satz der Transversalentheorie von Menelaos.

8. Ist ein beliebiges Punktsystem (x, $\mathfrak{x}$) gegeben, und man nimmt von irgend einem festen Punkte o des Trägers allemal den zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{x}$ zu x und ξ, dann erhält man eine einfache Punktreihe ($\mathfrak{x}$); für verschiedene Annahmen von o erhält man verschiedene Punktreihen, die alle mit einander projectivisch sind, insbesondere auch, wenn o in die Unendlichkeit verlegt wird, projectivisch mit der von den Mitten zwischen sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte gebildeten Punktreihe.

9. Werden zwei feste Kreise von einem veränderlichen dritten rechtwinklig geschnitten, so ist das Doppelverhältniss zwischen den vier Schnittpunkten auf dem schneidenden Kreise von constantem Werthe. (Unter Doppelverhältniss von vier Punkten eines Kreises versteht man das Doppelverhältniss eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt in die Peripherie des Kreises hineinverlegt wird und dessen Strahlen nach den vier Peripheriepunkten des Kreises hingehen.) Welche geometrische Bedeutung hat der Werth dieses constanten Doppelverhältnisses?

10. Werden zwei projectivische Punktreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ mit ihren Trägern beliebig auf einander gelegt, so ist jeder Punkt der beiden vereinigten Träger doppelt aufzufassen als $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$, dem einen und dem andern Träger angehörig; in diesem doppelten Sinne entsprechen ihm zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$; man bestimme zu diesen dreien den vierten harmonischen, dem anfänglichen $\mathfrak{x}$ ($\mathfrak{y}_1$) zugeordneten Punkt ξ; dann beschreiben, während der erste Punkt

den ganzen Träger durchläuft, die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte zusammenfallen mit den Doppelpunkten der beiden aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen. Hierdurch wird die Ermittelung der Doppelpunkte bei zwei beliebig auf einander gelegten projectivischen Punktreihen zurückgeführt auf die Ermittelung der Doppelpunkte (Asymptotenpunkte) eines Punktsystems. S. 43.

11. Werden zwei projectivische Punktreihen mit ihren Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ beliebig auf einander gelegt, und geht man von irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ der ersten aus, sucht den entsprechenden Punkt $\mathfrak{a}_1$, welcher als dem ersten Träger angehörig $\mathfrak{b}$ heisse; sodann sucht man zu $\mathfrak{b}$ den entsprechenden Punkt $\mathfrak{b}_1$ auf, welcher auf dem ersten Träger $\mathfrak{c}$ heisse u. s. f.; so nähert man sich bei dieser bis ins Unendliche fortgesetzt gedachten Operation einem Doppelpunkte der beiden zusammenliegenden Gebilde, falls dieselbe reelle Doppelpunkte besitzen; wäre man von einem Punkte der zweiten Punktreihe ausgegangen, so würde man auf dieselbe Weise zu dem zweiten Doppelpunkte gelangen. Wohin führt aber die Operation, wenn die Doppelpunkte imaginär sind?

12. Es kann vorkommen, dass die in der vorigen Aufgabe beschriebene Operation nach n-maligem Fortgange wieder zu dem anfänglichen Punkte zurückführt, also eine endliche geschlossene wird. Findet dies *einmal* statt, so trifft es immer ein nach n maligem Fortschreiten, von welchem Anfangspunkte man auch ausgehen mag; es kann aber nur eintreten, wenn die Punktreihen gleichlaufend sind, also die Potenz der projectivischen Beziehung negativ ist $(= -p^2)$ und die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen ($\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$) um ein solches Stück $d = \mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ von einander abstehen, dass

$$d = 2p \cos \frac{\nu \pi}{n}$$

ist, wo n die gegebene Anzahl der Punkte des in sich zurückkehrenden Cyclus, ν eine zu n relative Primzahl (im einfachsten Falle 1) und π die halbe Kreis-Peripherie bedeutet.

Für $n = 2$ und $\nu = 1$ haben wir die Bedingung $d = 0$ d. h. den Fall der gewöhnlichen Involution oder des Punktsystems.

Für $n = 3$ und $\nu = 1$ haben wir unendlich viele Tripel von Punkten, so dass in jedem Tripel immer ein Punkt die beiden andern im doppelten Sinne zu den ihm entsprechenden hat; die Bedingung für diese Lage $(d = p)$ ist die, dass $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{q}_1$

mit $\mathfrak{g}$ zusammenfällt; jedes Tripel der Art bildet mit den beiden imaginären Doppelpunkten ein *äquianharmonisches* System von fünf Punkten. (S. 63.)

13. Hat man zwei projectivische Strahlbüschel von je vier Strahlen:

$$(abcd) \text{ und } (a_1 b_1 c_1 d_1)$$

in perspectivischer Lage, so durchschneiden sich die Projectionsstrahlen ausser in den Mittelpunkten des Büschels und in den vier Punkten des perspectivischen Durchschnitts aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 noch in 12 andern Punkten, deren Lage so beschaffen ist, dass die vier Verbindungslinien:

$$(ab_1,\ cd_1)\quad (a_1b,\ c_1d)\quad (ac_1,\ bd_1)\quad (a_1c,\ b_1d)$$

durch einen und denselben Punkt des perspectivischen Durchschnitts laufen; ebenso gehen die Verbindungslinien:

$$(ab_1,\ dc_1)\quad (a_1b,\ d_1c)\quad (bc_1,\ ad_1)\quad (b_1c,\ a_1d)$$

durch einen und denselben neuen Punkt des perspectivischen Durchschnitts und endlich die vier Verbindungslinien:

$$(ac_1,\ db_1)\quad (a_1c,\ d_1b)\quad (bc_1,\ da_1)\quad (b_1c,\ d_1a)$$

durch einen dritten Punkt des perspectivischen Durchschnitts. Welche geometrische Bedeutung haben diese drei Punkte?

14. Von den vier Kreisen, welche die Seiten eines ebenen Dreiecks berühren, haben je zwei noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente, welche dreimal als äussere, dreimal als innere gemeinschaftliche Tangente auftritt; diese 6 Geraden laufen dreimal paarweise parallel mit den Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Höhenfusspunkten des ursprünglichen gebildet wird und zwar sind jedesmal eine äussere und eine innere gemeinschaftliche Tangente parallel.

Diese vierten gemeinschaftlichen Tangenten enthalten 12 Berührungspunkte; auf jedem der vier Kreise liegen je drei und bilden allemal ein Dreieck, welches mit dem ursprünglichen ähnlich und ähnlichliegend ist.

Von den vier Kreisen haben je zwei eine Dreiecksecke zum Aehnlichkeitspunkt, also ausserdem noch einen zweiten Aehnlichkeitspunkt. Diese 6 neuen Aehnlichkeitspunkte zerfallen in drei äussere und drei innere und liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, indem einmal die drei äusseren und dreimal ein äusserer mit zwei inneren Aehnlichkeitspunkten auf je einer Geraden liegt.

Von den vier Kreisen haben je zwei eine Potenzlinie und diese 6 Potenzlinien schneiden sich zu je dreien in vier Potenz-punkten. Diese vier Potenzpunkte bilden ein solches Viereck, dass jeder von den vier Punkten der Höhenpunkt des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks ist. Die vier Kreismittelpunkte bilden ein ähnliches und ähnlich-liegendes (inverse-liegendes) Viereck, dessen lineare Dimensionen doppelt so gross sind, als die des vorigen.

15. Sind ABC die Mittelpunkte, a, b, c beziehlich die Radien dreier Kreise eines Büschels (mit reeller oder ideeller gemeinschaftlicher Secante), so besteht zwischen den Abständen der Mittelpunkte und den Radien die Beziehung:

$$\frac{a^2}{AB \, . \, AC} + \frac{b^2}{BC \, . \, BA} + \frac{c^2}{CA \, . \, CB} = 1 \, .$$

16. Werden die Seiten bc, ca, ab eines Dreiseits von einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ in den Punkten α, β, γ getroffen, verbindet man letztere mit einem beliebigen vierten Punkte d durch die Strahlen $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ und nimmt in ihnen drei beliebige Punkte beziehlich a_1, b_1, c_1 an, so treffen die Dreiecksseiten b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 die Gerade $\mathfrak{G}$ in drei solchen Punkten α_1, β_1, γ_1, dass $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ sich in einem Punkte d_1 schneiden. Denkt man sich die Ebene als doppelt und dreht die eine Ebene mit den accentuirten Buchstaben um die Schnittlinie $\mathfrak{G}$ aus der andern heraus, so erhält man zwei Tetraëder $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$, deren jedes dem andern gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist. Die drei Paare von Punkten $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ in der Geraden $\mathfrak{G}$ gehören einem Punktsysteme an.

17. Wenn man von drei reellen Elementen abc eines einfachen Gebildes (einer geraden Punktreihe oder eines ebenen Strahlbüschels) zwei cyclische Vertauschungen bildet und dieselben projectivisch setzt, so haben diese beiden projectivischen Gebilde zwei imaginäre Doppelelemente ii_1, die als die Doppelelemente einer elliptischen Involution auftreten, welche wir §. 17 construirt haben. Solche fünf Elemente heissen ein äquianharmonisches System (S. 63). Wenn man anstatt von drei reellen Elementen abc von einem reellen a und einem Paar conjugirt-imaginärer Elemente bc ausgeht, welche man durch eine gegebene elliptische Involution (mit imaginären Doppelelementen) vertreten sich denkt, so lässt sich ebenfalls fragen nach solchen Doppelelementen ii_1, welche mit den cyclisch vertauschbaren abc ein äquianharmonisches System bilden. In diesem Falle können ii_1 auch reell sein. Wie construirt man diese Doppelelemente ii_1 oder die sie vertretende (hyperbolische

6*

oder elliptische) Involution? Ist umgekehrt von den drei cyclisch-vertauschbaren Elementen eines äquianharmonischen Systems ein reelles Element a und sind ausserdem die beiden als reell angenommenen Doppelelemente ii_1 gegeben, dann müssen bc conjugirt-imaginär sein und werden gefunden durch die cubischen Wurzeln der positiven Einheit; setzen wir die Doppelverhältnisse:

$$(ii_1ab) = y \qquad (ii_1ac) = y_1,$$

so sind y und y_1 die Wurzeln der Gleichung:

$$y^2 + y + 1 = 0 = \frac{y^3 - 1}{y - 1}.$$

Wie lässt sich die elliptische Involution reell construiren, deren imaginäre Doppelelemente b und c sind?

18. Werden die Seiten eines Dreiecks ABC von einer beliebigen geraden Transversale $\mathfrak{L}$ beziehlich in abc getroffen und man construirt auf jeder Dreieckseite den vierten harmonischen dem Schnittpunkte zugeordneten Punkt $a'b'c'$, so treffen sich bekanntlich aa', bb', cc' in einem Punkte S. Zieht man von irgend einem Punkte P aus die Strahlen Pa' Pb' Pc', welche der Transversale $\mathfrak{L}$ in $a''b''c''$ begegnen, so schneiden sich auch aa'', bb'', cc'' in einem Punkte Q und es liegen PQS auf einer Geraden.

19. Werden die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks von einer beliebigen geraden Transversale $\mathfrak{L}$ in den Punktpaaren $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ getroffen und man construirt zu diesen sechs Schnittpunkten auf jeder Seite die zugeordneten vierten harmonischen Punkte $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$, so schneiden sich $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ in einem Punkt S. Ausserdem liegen diese Punkte zwölfmal zu je dreien auf einer Geraden z. B. $a'b'\gamma$, $a'b\gamma'$, $\alpha'b'c$, $\alpha'c'b$ u. s. w. Welche Beziehung haben diese 12 Geraden zu einander? Verbindet man einen beliebigen Punkt P mit den sechs Punkten $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ durch Strahlen, welche die Transversale $\mathfrak{L}$ in sechs neuen Punkten $a''\alpha''$, $b''\beta''$, $c''\gamma''$ treffen, so schneiden sich die 6 Verbindungslinien $a'\alpha''$, $a''\alpha'$, $b'\beta''$, $b''\beta'$, $c'\gamma''$, $c''\gamma'$ in einem Punkte Q und die drei Punkte PQS liegen auf einer Geraden, so dass P und Q harmonisch getrennt werden durch S und $\mathfrak{L}$.

20. In einem geradlinigen Dreieck ABC seien abc beziehlich die Mitten der Seiten und $a_1b_1c_1$ die Fusspunkte der Höhen, welche sechs Punkte bekanntlich auf dem *Feuerbach*'schen Kreise O liegen; sei ferner H der Höhenschnittpunkt und M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises; bestimmt man die Schnittpunkte der Verbindungslinien:

$$(bc_1, cb_1) = \alpha \qquad (bc, b_1c_1) = \alpha_1$$
$$(ca_1, ac_1) = \beta \qquad (ca, c_1a_1) = \beta_1$$
$$(ab_1, ba_1) = \gamma \qquad (ab, a_1b_1) = \gamma_1,$$

so liegen die drei Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf der Geraden HM und die drei Strahlen $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ stehen auf HM senkrecht. Ferner liegen

$A\,\alpha\,\beta_1\,\gamma_1$ auf einer Geraden,
$B\,\beta\,\gamma_1\,\alpha_1$ - - - ,
$C\,\gamma\,\alpha_1\,\beta_1$ - - - ;

die drei Strahlen $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ schneiden sich in einem Punkte P,
- - - $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ - - - - - Q,

Die beiden Punkte P und Q liegen auf dem *Feuerbach*'schen Kreise (O);

die drei Schnittpunkte: $(BC, \beta_1\gamma_1) = \mathfrak{a}$
$(CA, \gamma_1\alpha_1) = \mathfrak{b}$
$(AB, \alpha_1\beta_1) = \mathfrak{c}$

liegen mit P und Q auf einer Geraden;

die drei Schnittpunkte: $(b_1c_1, \beta_1\gamma_1)$
$(c_1a_1, \gamma_1\alpha_1)$
$(a_1b_1, \alpha_1\beta_1)$

liegen auf einer Geraden, die durch H geht und

die drei Schnittpunkte: $(bc, \beta_1\gamma_1)$
$(ca, \gamma_1\alpha_1)$
$(ab, \alpha_1\beta_1)$

liegen auf einer Geraden, die durch den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC hindurchgeht u. s. w.

21. Wenn sich drei Kreise (a) (b) (c) paarweise ausschliessend berühren:

(b) und (c) im Punkte α
(c) - (a) - - β
(a) - (b) - - γ

und man zieht die Secanten:

$$\beta\gamma,\quad \gamma\alpha,\quad \alpha\beta,$$

welche den Kreisen ausserdem in den Paaren von Punkten:

$$\beta'\gamma',\quad \gamma''\alpha'',\quad \alpha'''\beta'''$$

begegnen, so giebt es drei neue Kreise, welche die gegebenen paarweise in den drei letzten Punktpaaren berühren. Diese drei neuen Kreise sind gleich gross und haben zum Radius die Summe der Radien der drei gegebenen Kreise. Welche Modificationen erleidet der Satz, wenn die paarweise Berührung der drei gegebenen Kreise nicht immer eine ausschliessende ist?
