Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie

Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften - auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's

Steiner, Jacob

1876

Vorwort zur ersten Auflage

Vorwort zur ersten Auflage.

Das für die synthetische Geometrie bahnbrechende Werk *Jacob Steiner's*: *„Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“* Berlin 1832, enthält in seiner Vorrede einen vollständigen Plan, nach welchem der berühmte Verfasser die Resultate seiner Forschungen in fünf einander folgenden Theilen niederzulegen gedachte. Von diesen ist nur der erste, allerdings wichtigste Theil erschienen, welcher die Principien enthält, auf denen die synthetische Geometrie in ihrem heutigen Standpunkte beruht. Indessen wurde Vieles von dem Inhalte des fünften Theiles, welcher eine *„ausführliche und umfassende Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades durch Construction und gestützt auf projectivische Eigenschaften“* enthalten sollte, in den Vorlesungen, welche *Steiner* während einer Reihe von Jahren an der Berliner Universität gehalten hat, vorgetragen; Einiges ist in *Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, sowie schon früher in den *Annales de mathématiques par M. Gergonne* veröffentlicht worden. Jene geistreichen und zur eigenen Forschung anregenden mündlichen Vorträge, denen sich der grosse Geometer mit besonderer Liebe unterzog, kamen indess nur wenigen Jüngern der Wissenschaft zu Gute, und die in diesen Vorlesungen auseinandergesetzten, hinsichtlich ihrer Anschaulichkeit und Fruchtbarkeit unübertroffenen synthetischen Methoden und Betrachtungen scheinen nachgerade der Gefahr nahe, vergessen oder von der immer weiter sich ausbreitenden allmächtigen analytischen Methode in den Hintergrund gedrängt zu werden; es erscheint daher als eine Pflicht deutscher Wissenschaft, dies zu verhüten und die Wege, welche der schöpferische Geist des grössten Geometers seiner Zeit den unmittelbaren Schülern zeigte, der Nachwelt zu erhalten, um dadurch den zahlreichen Entdeckungen auf die Spur zu kommen, welche noch heute Räthsel sind für die wissenschaftliche Welt. Hierzu gesellt sich für den Herausgeber noch die besondere Pflicht dankbarer Pietät gegen seinen hochverehrten Lehrer. Im Wintersemester 1852/53 hatte ich das Glück, eine von *Steiner* unter dem Titel: *„Ueber die neueren Methoden der syn-*

thetischen Geometrie" angekündigte Universitätsvorlesung zu hören und zugleich durch persönlichen Verkehr mit dem grossen Meister in den Ideengang seiner Schöpfungen eingeführt zu werden. Die damalige, wenn auch mangelhafte, doch sorgfältig ausgearbeitete Nachschrift liegt der heutigen Bearbeitung zu Grunde. Durch die Güte des Herrn Dr. *C. F. Geiser*, Docenten am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, welcher als Neffe des verstorbenen *Steiner* testamentarisch mit der Veröffentlichung seines wissenschaftlichen Nachlasses beauftragt ist, wurde mir die Bearbeitung dieses Abschnittes bereitwilligst überlassen und der Theil der hinterlassenen Manuscripte *Steiner's*, welcher sich auf „*die geometrischen Gestalten*" bezieht, zur Verfügung gestellt; aus diesem reichen Schatze habe ich Alles, was in den vorgeschriebenen Gang der Darstellung gehörte, mit Gewissenhaftigkeit aufgenommen und aus unvollendeten Aufzeichnungen zu ergänzen oder herzustellen versucht. Dass es schon früh in *Steiner's* Absicht gelegen hat, diesen auf die Kegelschnitte bezüglichen fünften Abschnitt seines grossen Werkes vollständiger, als es im ersten Theil geschehen konnte, und abweichend von der dortigen Behandlung allein von den Grundprincipien aus darzustellen, zeigt die vollständig erhaltene Einleitung zu einer nicht vollendeten Abhandlung; die erstere ist in einem Convolut von Papieren unter der Aufschrift „*Aufklärungs-Broschüre* 1833/34" enthalten und lautet folgendermassen:

> „Ueber einige merkwürdige Lehren der neueren synthetischen Geometrie. In dieser Abhandlung werde ich zunächst die Betrachtungen über projectivische Gerade und Strahlbüschel, welche im ersten Theile der von mir verfassten Schrift: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", enthalten sind, kurz wiederholen und sodann die naturgemässe Erzeugung der Kegelschnitte aus jenen Gebilden ableiten, sowie ferner den Ursprung verschiedener merkwürdiger Eigenschaften, wie z. B. der sogenannten Involution und der théorie des polaires reciproques etc. aus denselben nachweisen.
>
> In der genannten Schrift wurden der alt-hergebrachten Weise zu Liebe die Kegelschnitte aus dem Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, hergeleitet. Obwohl ich die Unzweckmässigkeit dieses Verfahrens schon damals deutlich fühlte, so glaubte ich doch, um nicht zu sehr von dem gewöhnlichen Gange abzuweichen, demselben folgen zu müssen. Allein der Umstand, dass man gezwungen ist, die Umkehrung eines Satzes zu behaupten (§. 38, II), der sich durch die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen lässt — nämlich des Satzes, dass jeder Kegel zweiten Grades von

einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann — zeigte die Nothwendigkeit, jene Darstellungsweise zu verlassen und eine dem Gegenstande angemessenere aufzufinden. Die hier folgende genügt dieser Forderung im höchsten Grade, indem sie die Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Gerade und Strahlbüschel als eine unmittelbare, systematisch nothwendige offenbart und dieselbe rein synthetisch auf die möglichst einfache Weise bewerkstelligt. Ebenso wird das wahre Wesen der Involution und der théorie des polaires reciproques durch besondere Eigenschaften der genannten projectivischen Gebilde geoffenbart, indem ihre nothwendige Entstehung auf überraschende Weise aus diesen Eigenschaften sich nachweisen lässt und zugleich ihr inniger Zusammenhang sich kund giebt, was übrigens in der mehrerwähnten Schrift bereits angedeutet worden (§. 45). Die Schwierigkeit, die hierbei in Rücksicht auf die Kegelschnitte zu überwinden war, bestand darin, *zu beweisen, dass das durch zwei schiefliegende projectivische Gerade hervorgebrachte Erzeugniss identisch sei mit dem Erzeugniss zweier projectivischen Strahlbüschel, die sich in schiefer Lage befinden.* Diese Schwierigkeit ist jetzt nicht nur sehr leicht, sondern ich möchte sagen, sie ist auf die einfachste Weise gehoben, nämlich durch consequentes Festhalten der geringsten Anzahl von Elementen, durch welche die Projectivität jener Gebilde bestimmt wird, und zwar durch diejenigen Elemente, welche sich sowohl in Hinsicht der Gebilde, als in Bezug auf den Kegelschnitt am bemerkbarsten machen. Dadurch können nun zugleich alle übrigen Lehren, welche den Gegenstand des ersten Theiles der genannten Schrift bilden, zweckmässiger entwickelt werden, weil nunmehr die Betrachtungen in der Ebene sich bis zu ihrer Vollendung ausführen lassen, ohne dass es nöthig wird, den Büschel im Raume, der ihr entgegensteht, zu Hülfe zu nehmen. Die Eigenschaften des letzteren lassen sich dann umgekehrt leicht aus jenen der Ebene ableiten, was der natürlichere Gang ist. Der Kegel zweiten Grades erhält dabei eine allgemeinere Erklärung, die nicht mehr an seine besondere Eigenschaft, an seine Kreisschnitte, geknüpft ist; und nicht allein die verschiedenen Eigenschaften aller seiner ebenen Schnitte, sondern auch die Eigenschaften, welche ihm im Ganzen zukommen, seine zwei Erzeugungsarten durch projectivische Gebilde sind dann mit seiner Entstehung zugleich bekannt. Auch führt die gegenwärtige Erzeugungsweise der Kegelschnitte schneller und directer als jene frühere Betrachtungsweise in ihre innere Natur hinein und schliesst uns am unmittelbarsten den organischen

Zusammenhang ihrer zahlreichen Eigenschaften und Geheimnisse auf. Ich bemerke hier noch, dass die Betrachtung projectivischer Geraden und Strahlbüschel sich so vereinfachen lässt, dass sie ohne Hülfe trigonometrischer Ausdrücke durchgeführt werden kann, wodurch sie geeignet wird, der Elementargeometrie einverleibt zu werden und darin manche zweckmässige Verbesserung zu bewirken, indem zu ihrem trocknen Inhalt die belebenden Porismen, die Theorie der Transversalen und besonders die vollständige Lehre von den Kegelschnitten hinzutritt, dergestalt, dass alle diese Gegenstände sich ebenso leicht und einfach behandeln lassen, als nach der bisherigen Methode der Kreis. Dass in meiner mehrerwähnten Schrift trigonometrische Ausdrücke eingeführt worden, ist kein Irrthum oder Mangel in der Darstellung, wie man beim ersten Anblick leicht wähnen möchte, sondern die Entwickelungen der folgenden Theile bedürfen derselben, um zu der allseitig vollendeten Ausbildung zu gelangen, der sie fähig sind.“

„Den 24. Mai 1836.“

Diese vor dreissig Jahren geschriebene Einleitung habe ich geglaubt der gegenwärtigen Bearbeitung ungekürzt vorausschicken zu dürfen, weil ich bemüht gewesen bin, in dem hier ausgesprochenen Sinne die Lehre von den Kegelschnitten darzustellen. Von der versprochenen Abhandlung selbst finden sich unter den Papieren nur Bruchstücke, welche vorzugsweise die Theorie der Involution (das Punkt- und Strahlsystem) behandeln, ferner den erwähnten Beweis von der Identität der beiden Erzeugnisse projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel und einige Notizen über Involutions-Netze enthalten. Unter den übrigen, mir zur Einsicht gestatteten Manuscripten, welche aus den verschiedensten Zeitepochen herrühren, fanden sich zur Verwerthung für den vorliegenden Zweck Untersuchungen über Kegelschnitt-Büschel und -Schaaren, insbesondere über „conjugirte Kegelschnittbüschel“ und „harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte“, manche schwer zu enträthselnde kurze Aufzeichnungen und viele Bemerkungen, die vermuthlich den Vorlesungen ihren Ursprung verdanken. Alles, was über die Ebene hinausging und sich grösstentheils auf Oberflächen zweiter Ordnung bezog, musste für jetzt unberücksichtigt bleiben. Der Anfang einer beabsichtigten Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten, wie sie *Steiner* in seinen Vorlesungen vorzutragen pflegte, findet sich noch an einer späteren Stelle, welche mit den charakteristischen Worten beginnt:

„Juni 1849. Der veränderte Gang, der nach §. 18 (Syst. Entw. d. A. g. G.) eintritt, ist seit Jahren in den Vorlesungen verbessert und einige Mal sogar mit Begeisterung vorgetragen worden, musste aber jedesmal mit saurer Mühe wieder erst neu hergestellt werden, was in der neuesten Zeit bei Abnahme an Eifer und Gedächtniss stets schwieriger wurde. Es wird nun kaum möglich sein, die in einzelnen Perioden in günstigen Licht-Momenten vorgetragenen Sätze und Beweise wieder hervorzurufen, um den besten Gang der Betrachtung endlich festzustellen . . ."

Hierauf folgen verschiedene Aufzeichnungen aus den Vorträgen im Sommersemester 1849, die aber zum grössten Theil Wiederholungen sind und nur bis zu dem erwähnten Identitätsbeweise reichen.

Hinsichtlich der Vertheilung und Behandlung des Stoffes habe ich mir nur wenig Abweichungen von der zu Grunde liegenden Ausarbeitung der *Steiner*'schen Vorlesung erlaubt, während die Menge desselben erheblich vergrössert ist; auch die *Steiner*'sche Terminologie habe ich bis auf wenige Ausnahmen festgehalten; der Gebrauch der Bezeichnung „Punktreihe" anstatt „Gerade" (als continuirliche Aufeinanderfolge sämmtlicher Punkte einer unendlich-langen geraden Linie) ist schon so üblich geworden, dass er keiner Entschuldigung bedarf. *Der erste Abschnitt* (projectivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander) enthält eine kurze Wiederholung der ersten in der syst. Entw. niedergelegten Principien; hier wie in der Folge habe ich die von *Moebius* in die Geometrie eingeführte Auffassung entgegengesetzter Grössen (Strecken und Winkel) durch Berücksichtigung des Richtungs- und Drehungs-Sinnes festgehalten, wonach z. B., wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Punkte bezeichnen, „$\mathfrak{ab}$" nicht blos den absoluten Abstand beider Punkte, sondern die in dem Sinne von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ durchlaufene Strecke bedeutet, so dass also $\mathfrak{ab} + \mathfrak{ba} = 0$ ist. Die ebenfalls von *Moebius* herrührenden Beziehungen zwischen den 24 möglichen Werthen eines Doppelverhältnisses habe ich aufgenommen. Sodann ist die Bestimmung der doppelten Systeme entsprechender gleicher Strecken und Winkel bei zwei projectivischen Punktreihen und Strahlbüscheln und eine ausführliche Behandlung der Involution (des Punkt- und Strahlsystems) hinzugekommen. *Der zweite Abschnitt* (der Kegelschnitt als Erzeugniss projectivischer Gebilde) definirt den Kegelschnitt auf doppelte Art und weist die Identität beider Erzeugnisse nach. Der *Pascal*'sche (und *Brianchon*'sche) Satz erscheint nur als ein etwas veränderter Ausdruck der Projectivität zweier gleichartiger Gebilde. Die Eintheilung der Kegelschnitte geschieht durch Berücksichtigung der unendlich-entfernten Punkte. Zu den Kriterien für die Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte durch zwei projectivische Punktreihen ist das für die gleichseitige Hyperbel hinzugekommen, welches ich nirgends gefunden habe. Die *Steiner*'sche Erweiterung des berühmten *hexagrammum mysticum* schien mir, obwohl sie etwas von dem Gange der Untersuchung abführt, doch mitzutheilen erlaubt, zumal ich das hier zusammengestellte Tableau der 60 Sechsecke, aus deren Gruppirung die Lage der *Pascal*'schen Linien, *Steiner*'schen Punkte und Geraden in der von *Hesse* angegebenen Weise am anschaulichsten hervortritt, anderswo vermisst habe. Das naturgemässe Auftreten des Punkt- und Strahlsystems beim Kegelschnitt führt zu den Polareigenschaften desselben, welche möglichst vollständig auseinandergesetzt sind. Als besondere Fälle dieser allgemeinen Beziehungen ergeben sich dann die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser, der Axen des Kegelschnitts und der Brennpunkte. Die metrischen Beziehungen treten dabei ungezwungen und fast ohne Rechnung hervor. Auf die Focaleigenschaften wird dann noch weiter eingegangen, um die Brücke vollständig herzustellen, welche die hier durchgeführte Auffassung der Kegelschnitte mit der mehr elementaren Behandlung derselben verbindet, bei der die metrischen Eigenschaften der Brennpunkte den Ausgangspunkt bilden. Der Schluss dieses Abschnitts über den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte ist mehr als ein Anhang zu betrachten, bestimmt, die Nützlichkeit des Princips der projectivischen Beziehung an einem besonderen Beispiel vor Augen zu führen.

Der dritte Abschnitt ist dem Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschaar gewidmet. Von den drei mitgetheilten Entstehungsarten dieser Gebilde ist die erste (*Steiner*'sche) die anschaulichste, erfordert aber die Realität der vier Grundpunkte des Büschels; bei der zweiten können auch zwei von diesen Punkten imaginär sein; die dritte ist die allgemeinste und liefert auch das Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten durch reelle Construction. Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Gerade in den Punktpaaren eines Punktsystems zu treffen, tritt bei allen drei Entstehungsarten unmittelbar hervor. Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche in einem Büschel und einer Schaar vorkommen, und wie sich dieselben in Gruppen vertheilen, lässt, wie mir scheint, den Vorzug der synthetischen Methoden recht deutlich erkennen; hieran knüpfen sich die Polar-Eigenschaften dieser Gebilde und einige besondere Fälle. Einen neuen oder doch wenig bekannten Gegenstand: „drei conjugirte Kegelschnittbüschel“ behandelt ein besonderer Paragraph. Endlich werden die gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte ermittelt und die verschiedenen Fälle, welche hinsichtlich der Realität dieser Elemente eintreten können, genauer discutirt. Der letzte Paragraph dieses Abschnittes behandelt einen bisher wenig untersuchten Gegenstand: Die harmonisch-zugeordneten oder sich polar selbst-entsprechenden Kegelschnitte, mit denen im Zusammenhange die Aufgabe gelöst wird: „Zu zwei gegebenen Kegelschnitten einen solchen dritten zu finden, in Bezug auf welchen als Basis der eine die Polarfigur des andern ist.“ Hier tritt schon *der imaginäre Kegelschnitt* auf und verlangt eine Erweiterung des Begriffes, welche in *dem vierten Abschnitt* durch das Involutions-Netz (Polarsystem) gegeben wird. Die Polareigenschaften eines Kegelschnitts werden unabhängig von demselben aufgefasst und liefern ein stets reelles Gebilde, das Involutions-Netz, welches, je nachdem es hyperbolisch oder elliptisch ist, einen reellen oder imaginären Kegelschnitt vertritt, ebenso wie das Punktsystem auf einer Geraden ein reelles Punktpaar (Asymptotenpunkte) oder ein imaginäres vertritt. Von den verschiedenen Bestimmungsarten des Netzes, deren Zahl durch Hinzunahme anderer Elemente leicht beträchtlich vermehrt werden kann, ist die allgemeinste vermittelst fünf beliebiger Paare conjugirter Punkte durch eine zwar umständliche aber lineare Construction bewerkstelligt. Die folgenden Paragraphen enthalten zum Theil eine Wiederholung früherer Betrachtungen auf der allgemeineren Grundlage, indem die ausgezeichneten Elemente des Netzes: Durchmesser, Mittelpunkt, Axen, Brennpunkte mit ihren hervorragendsten Eigenschaften für das Netz ähnlich, wie für den reellen Kegelschnitt ermittelt werden. Die Annahme zweier beliebig in der Ebene gegebenen Netze führt zum Netz-Büschel und zur Netz-Schaar; dadurch werden die früheren Gebilde des Kegelschnitt-Büschels und der Kegelschnitt-Schaar vervollständigt, indem auch die imaginären Kegelschnitte, welche ihnen angehören können, zum Vorschein kommen. Der letzte Paragraph untersucht das aus drei beliebig angenommenen Netzen oder Kegelschnitten gebildete Kegelschnitt-Netz und die Tripelcurve und bildet somit den Uebergang zur Theorie der Curven dritten Grades.

Aus der vorstehenden Inhaltsangabe und bei einer genaueren Durchsicht des Buches wird der kundige Leser erkennen, dass ich manche Resultate aufzunehmen mir gestattet habe, welche im Laufe der Zeit hinzugekommen sind und von denen ich nicht mehr ermitteln konnte, ob *Steiner* sie früher als Andere gefunden hat, oder nicht, wenn sie sich eben in dem systematischen Entwicklungsgange naturgemäss darboten und der *Steiner*'schen Anschauungsweise ungezwungen anschlossen. Ich glaube, dass dies nicht zum Nachtheil eines Buches geschehen ist, welches seines ganz elementaren Charakters wegen vorzugsweise bestimmt ist, als Lehrbuch zur Einführung der studirenden Jugend in die synthetische Geometrie zu dienen. Aus diesem Grunde lag mir auch weniger daran, die in Anwendung gebrachten Methoden bis zur äussersten Grenze auszubeuten und die in unerschöpflicher Menge sich darbietenden Sätze und Eigenschaften mit möglichster Vollständigkeit aufzureihen, als vielmehr die fruchtbaren Betrachtungen selbst, welche zu jenen führen, in das klarste Licht zu setzen; dem Leser sollte auch noch Etwas zu thun übrig bleiben, und überall da z. B., wo nach dem in der Natur des Gegenstandes begründeten Princip der Dualität einer Betrachtung sich die polar gegenüberstehende anschloss, ist diese entweder blos angedeutet, oder es sind die abweichenden Punkte allein ausgeführt; möchte der Leser daher noch recht viel Stoff zur Ergänzung und Erweiterung und besonders die Aufmunterung zur eigenen Forschung aus dem Vorgetragenen entnehmen.

Was meinen eigenen bescheidenen Antheil an diesem Buche betrifft, so verzichte ich selbstverständlich in Anbetracht der Entstehung desselben auf jeden Anspruch, wie auf jede Priorität, ohne darum die Verantwortlichkeit für Dasjenige, was etwa Irriges in demselben vorkommen sollte, von mir abzulehnen. Ich halte meine Arbeit für hinreichend belohnt, wenn dadurch das Studium der *Steiner*'schen Schriften erleichtert, das Interesse für synthetisch-geometrische Forschungen von Neuem angeregt und insbesondere die studirende Jugend zu einem der interessantesten und fruchtbarsten Felder mathematischer Speculation hingeführt wird.

Schliesslich bleibt mir noch übrig, Herrn Dr. *Geiser* hiermit öffentlich meinen Dank auszusprechen für die freundlichst gestattete Einsicht in die *Steiner*'schen Manuscripte und das bereitwillige Abtreten seines Anrechtes zur Veröffentlichung dieser Vorlesung.

Breslau, im September 1866.

Heinrich Schröter.